REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou

Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département d'Electrotechnique

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Electrotechnique
Option : Machines Electriques

Présenté par
M.TARIK MERZOUKI
Ingénieur d'Etat en Electrotechnique

Thème

Modélisation Couplée Electrique-Magnétique-Mécanique des Machines Asynchrones à Cage en Régime Transitoire par la Méthode des Eléments Finis

Présenté et soutenu publiquement le : 13 /06/ 2009

Devant le jury d'examen

M.Nacereddine BENAMROUCHE	Professeur	UMMTO	**Président**
M.Salah HADDAD	Professeur	UMMTO	**Rapporteur**
M.Youcef OUAZIR	Maître de Conférences A	USTHB	**Examinateur**
Mme.Ferroudja BITAM-MEGHERBI	Maître de Conférences A	UMMTO	**Examinatrice**
M.M'hemed RACHEK	Maître de Conférences B	UMMTO	**Examinateur**

REMERCIEMENTS

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au département d'électrotechnique de l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

Je remercie vivement Monsieur ***M'hemed RACHEK****, Maître de Conférences à l'université Mouloud Mammeri, d'avoir proposé et dirigé ce travail de si près, avec une qualité remarquable. Je le remercie de m'avoir témoigné une nouvelle fois de sa confiance lors de cette collaboration entamée au cours de l'Ingéniorat, où il m'avait déjà transmis un réel et féru plaisir pour le domaine de la modélisation numérique, dont il est un éminent spécialiste. J'ai grandement apprécié ses immenses compétences et qualités scientifiques, sans oublier ses indéniables qualités humaines, à travers un suivi régulier et une attention minutieuse accordés à l'avancement des travaux. Je me souviendrai toujours de son écoute, de sa disponibilité, de ses précieux conseils ainsi que de la pertinence de ses idées lors des nombreuses discussions que nous avons partagées et qui ont été d'un apport certain pour moi. Je n'omettrai pas également de souligner sa présence lors des moments difficiles ayant précédé mon inscription en magister, où il a su rallumer mon désir de suivre cette voie et concrétiser ce présent travail. Qu'il trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.*

J'adresse mes chaleureux remerciements à Monsieur ***Salah HADDAD****, Professeur à l'université Mouloud Mammeri, pour m'avoir fait l'immense honneur d'encadrer ce mémoire.*

Mes vifs remerciements vont aussi à Monsieur ***Nacereddine BENAMROUCHE****, Professeur à l'université Mouloud Mammeri, pour l'honneur qu'il me fait de présider mon jury.*

Que Monsieur ***Youcef OUAZIR****, Maître de Conférences à l'Ecole Nationale Polytechnique trouve ici l'expression de mes sincères remerciements pour avoir eu l'amabilité de prendre part à mon jury. Je suis tout honoré de le rencontrer d'autant plus que sa thèse de Doctorat fut une référence qui m'a accompagné et guidé tout au long de ce travail.*

*J'exprime mes sincères remerciements à Madame **Ferroudja BITAM-MEGHERBI**, Maître de Conférences à l'université Mouloud Mammeri, pour avoir eu la gentillesse de participer à mon jury.*

*Mes remerciements vont aussi à Messieurs **Saïd MAKHLOUF** et **Moh-Djerdjer MITICHE**, ex vice-recteurs chargés de la Post-Graduation et de la Recherche Scientifque, ainsi qu'à Monsieur **Chérif KAIS**, vice-recteur chargé de la pédagogie à l'université Mouloud Mammeri, pour avoir fait, chacun, preuve d'un grand professionnalisme lors de la régularisation de ma situation administrative inhérente à mon accès en Post-Graduation en 2005. Que Monsieur **Abdelkader KACHER,** Directeur de l'Ecole Doctorale de Droit et Professeur à l'université Mouloud Mammeri, trouve ici l'expression de mes chaleureux remerciements, pour ses conseils utiles durant cette période là.*

Je suis immensément reconnaissant envers mes chers parents qui m'ont soutenu tout au long de ma vie. Ils m'ont simplement tout donné et je leur dois tout. Qu'ils trouvent dans ce manuscrit toute ma reconnaissance, mon dévouement et mon affection.

Je ne peux oublier de remercier mon frère Yacine et mes sœurs Salima, Samia et Ouiza pour m'avoir nourri par leur gentillesse, leur soutien et leur aide durant toutes ces années d'étude. Que mon beau frère Djamel trouve ici mes sincères remerciements pour la précieuse documentation qu'il a mise à ma disposition à partir de l'Université de Montréal.

Je saisis aussi cette occasion pour remercier l'ensemble des enseignants du département d'Electrotechnique ayant contribué à ma formation durant ces six années de spécialité. J'exprime particulièrement ma sympathie profonde à M.Mustapha Zaouia.

Que ceux qui se sentent oubliés trouvent ici ma profonde gratitude et mes chaleureux remerciements pour leur concours dans l'accomplissement de ce travail.

M.Tarik MERZOUKI
Octobre 2008

DEDICACES

A la mémoire de mon grand-père.
A toute ma famille.

A tout le personnel de la SARL RACINO, agent CEVITAL, au sein de laquelle j'ai vu ce travail naître, ainsi qu'au personnel de la SNC RACINAUTO, agent RENAULT. Que les gérants Yacine AIT BENAMARA et Mustapha AIT BENAMARA trouvent ici l'expression de ma haute gratitude pour tout ce qu'ils m'ont apporté durant ces dernières années.

A toute la famille Ait Benamara.

A mon oncle Dr.Mohamed-Ouamar Ait Benamara et toute sa petite famille pour leur soutien précieux à une certaine période.

A mon oncle Hamou Ait Benamara pour son immense aide.

A mon oncle Hadj-Abderrahmane Ait Benamara et toute sa petite famille pour leur aide.

A mes amis de toujours, Massinissa Ait Menguellet et Belkacem Djeroum.
A mes amis Sofiane, Hichem, Mohamed-Amine, Mokrane, Tarik.

A toi Tania Labchri.
A ma meilleure amie, Sabine Temmar.
A mes amies Kahina, Nabila, Djidji, Leila, Amira, sabrina, Sonia, Sophie.

A toute l'équipe de la Post-Graduation Machines Electriques 2005-2006 : Salim, Nacéra, Rachida, Samira, Nassima, sans oublier Souhila.

A tous ceux que j'ai oubliés, qu'ils m'en excusent !

M.Tarik MERZOUKI
Octobre 2008

A la mémoire de mon ami et frère LEBID Malik
Que dieu lui accorde sa sainte miséricorde et l'accueille dans son vaste paradis

Sommaire

Sommaire

■ INTRODUCTION GENERALE

■ CHAPITRE I
La machine asynchrone, état de l'art de sa modélisation

■ CHAPITRE II
Analyse physico-mathématique des phénomènes électromagnétiques et résolution par éléments finis

CHAPITRE III
Modélisation couplée magnétique-électrique des machines asynchrones en régime harmonique

CHAPITRE IV
Modélisation couplée magnétique–électrique-mécanique des machines asynchrones en régime transitoire

CHAPITRE V
Applications et validation

Nomenclature

Nomenclature

n	Vecteur unitaire, normal à la surface dirigé du milieu 1 à 2 (P.30)
ρ_s	Densité surfacique de la charge [Cb/m^2].
K	Densité de courant surfacique [A/m].
σ	Conductivité électrique du milieu [Ω^{-1}.m^{-1}].
μ_0	Perméabilité magnétique du vide.
ε_0	Permittivité électrique du vide.
μ_r	Perméabilité magnétique relative du milieu considéré
ε_r	Permittivité électrique relative du milieu considéré
Γ	Contour du dispositif étudié.
$d\Gamma$	Période spatiale suivant le contour Γ .
U	Tension appliquée au circuit.
R	Résistance des conducteurs du circuit.
I	Courant traversant le circuit.
ψ	Flux magnétique engendré par l'inducteur.
n	Normale à la section droite du conducteur.
ds	Elément de surface du conducteur
n_s	Nombre de spires produisant une induction B .
S_c	Surface du conducteur.
n_c	Normale à la surface S_c .
n_Γ	Vecteur tengent au contour Γ .
N_{cn}	Nombre de conducteurs
N_s	Nombre de secteurs symétriques de la machine
S_n	Section du conducteur.
L_b	Inductance de barre
L_{be}	Inductance de la partie frontale de barre
L_{sc}	Inductance de l'anneau de court-circuit
Z_{be}	Impédance de la partie frontale de barre
Z_{sc}	Impédance de l'anneau de court-circuit
R_{sc}	Résistance de l'anneau de court-circuit

R_{be}	Résistance de la partie frontale de barre
J_m	Moment d'inertie de la machine
Ω	Vitesse angulaire de la machine
f	Coefficient de frottement
C_{em}	Couple électromagnétique
C_{ch}	Couple de charge

Introduction Générale

Introduction Générale

Généralités

L'étude, la conception et l'optimisation d'un système électromagnétique passe par la mise en œuvre de modèles mathématiques d'équations aux dérivées partielles spatio-temporelles aptes à représenter et caractériser leur état de fonctionnement. Le développement et la mise en œuvre d'une telle structure mathématique traduit le concept de modélisation dont le but est d'accéder aux grandeurs locales (champs, densité de courant…) et globales (courant, flux, énergie…) nécessaires à l'analyse ou la conception des dispositifs électromagnétiques **[17, 53, 74 , 91]**. La modélisation des systèmes électromagnétiques, dans ses aspects d'analyse des performances, de contrôle et de surveillance, de développement, de conception et d'optimisation, a connu une avancée considérable due à une croissance continue des besoins industriels à travers la recherche de nouveaux modèles et à une croissance des moyens informatiques, ce qui a rendu possible la modélisation de problèmes divers **[75]** : mécanique au sens large (mécanique du solide et des matériaux ou mécanique des fluides), la thermique, l'électromagnétisme, …etc.

Dans les dispositifs électromagnétiques, le calcul analytique des grandeurs locales (champs électromagnétiques et thermiques par exemple) et globales (forces, couples, courants, inductances) serait difficile, voir impossible à cause des problèmes dus aux conditions aux limites, aux géométries complexes, aux non linéarités et aux interactions entre les phénomènes. Le recours aux méthodes numériques de discrétisation paraît dès lors incontournable pour la modélisation, la conception et l'optimisation. De nos jours, la modélisation numérique est devenue un enjeu scientifique et technologique et les méthodes numériques deviennent indispensables pour étudier les dispositifs électrotechniques et spécialement les machines électriques **[3, 54, 55]**. L'investissement de la recherche dans des techniques numériques et l'avènement de moyens informatiques très performants tant au niveau des temps de calcul que de l'espace de stockage ont permis d'améliorer la connaissance des phénomènes physiques engendrés dans les dispositifs et de fournir des modèles plus fins. Les techniques numériques transforment les équations aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques avec des degrés de liberté finis. Parmi ces méthodes, celle des éléments finis. Après son succès dans le domaine de la mécanique des structures, la méthode des éléments finis a connu un grand essor dans le domaine des systèmes électromagnétiques ces deux dernières décennies. La grande flexibilité de cette méthode permet de traiter une gamme importante de fonctionnement d'une part et d'épargner la fabrication de nombreux prototypes, nécessaires dans le passé, pour la conception d'autre part. La solution obtenue fournit alors une approximation des grandeurs locales, lesquelles sont exploitées par la suite pour déterminer les valeurs globales. Cette résolution numérique donne une précision suffisante pour envisager des applications de conception ou d'optimisation des systèmes électromagnétiques **[16, 58, 75].**

Parmi les principaux dispositifs électrotechniques utilisés, nous citons la machine électrique. Le but qui lui est assigné est une transformation d'énergie d'une forme à une autre. Suivant le genre de transformation opérée, les machines électriques sont classées : génératrices si elles transforment de l'énergie mécanique en énergie électrique, réceptrices si elles transforment de l'énergie électrique en énergie mécanique ou transformatrices si l'énergie électrique entrant dans la machine est restituée sous forme électrique, les convertisseurs modifient la nature des courants et des tensions appliqués à l'entrée en convertissant par exemple des grandeurs alternatives en continues **[41]**.

De tous les moteurs électriques, le moteur à induction est le plus répandu. Il n'est donc pas du tout surprenant de voir qu'il fait encore l'objet de nombreux travaux de recherche visant à améliorer sa modélisation et à optimiser sa conception. L'utilisation des machines asynchrones à cage dans les entraînements industriels est en pleine expansion, du fait de leur robustesse, de leur coût de fabrication relativement faible et la quasi-absence en entretien. Le formidable progrès technologique des composants de l'électronique de puissance, entraînant le développement des convertisseurs statiques, a favorisé une large application des machines asynchrones **[16, 56]**.

En dépit de sa simplicité de fabrication et de mise en œuvre, la modélisation de la machine asynchrone n'est pas chose aisée. En effet, à l'instar de la plupart des dispositifs électrotechniques, la machine asynchrone est le siège de plusieurs phénomènes (magnétiques, électriques, mécaniques, thermiques,…) qui interagissent entre eux. Par exemple, l'alimentation en tension des régions inductrices engendre un couplage des équations électriques et magnétiques. Par conséquent, une modélisation fine de la machine asynchrone nécessite le développement de modèles qui incluent le plus possible ces phénomènes et leurs couplages. De plus, la machine asynchrone est un dispositif électromécanique qui comporte une partie en mouvement (rotation), sa modélisation numérique requiert donc le développement de techniques permettant la prise en compte de ce mouvement. En dehors des phénomènes physiques et du mouvement à traiter, la machine asynchrone traduit un système complexe en raison de sa géométrie et des non-linéarités **[16, 17]**.

Problématique et motivations

Ce présent mémoire s'inscrit dans le domaine de la modélisation numérique 2D des systèmes électrotechniques sur la base d'une résolution des équations de l'électromagnétisme par la méthode des éléments finis.

Deux aspects importants s'y présentent. Le premier concerne le couplage des équations du champ avec celles du circuit. L'analyse des dispositifs électrotechniques est souvent limitée par les sources d'alimentation et les éléments du circuit électrique. Pour connaître la distribution du champ magnétique dans le domaine étudié, il est nécessaire d'accéder à la tension ou bien au courant. La modélisation de tels dispositifs dans le cadre de la méthode des éléments finis nécessite donc une prise en compte de l'interaction entre les circuits magnétique et électrique. Le calcul du champ électromagnétique bidimensionnel avec couplage du circuit électrique tend à devenir d'usage courant pour la modélisation des dispositifs électrotechniques, et à l'heure actuelle, les codes de calcul développés ont atteint le stade des applications industrielles.

Le second aspect est lié à la prise en compte du mouvement. Les dispositifs électromagnétiques et notamment les convertisseurs électromécaniques sont des dispositifs électrotechniques qui par définition comportent des parties en mouvement. Il peut s'agir de la rotation pour les machines électriques tournantes ou de translation pour les électroaimants, lanceurs, actionneurs linéaires, dispositifs de contrôle non destructif. La modélisation numérique de tels systèmes nécessite donc le développement de techniques permettant la prise en compte du mouvement. A ces deux aspects, nous pouvons ajouter le problème de non-linéarité lié au milieu d'étude. Effectivement, en régime harmonique, il ne nous est possible de traiter en toute rigueur que le problème linéaire. Un calcul et une étude rigoureuse en régime transitoire ne peuvent éluder l'aspect de saturation.

Ainsi, la visée de nos travaux consiste à présenter un modèle électromagnétique bidimensionnel basé sur la méthode des éléments finis, intégrant les équations de Maxwell pour la partie magnétique couplées à une représentation du circuit électrique. Le modèle sera dans un premier temps étudié en régime harmonique et dédié à la modélisation d'une machine asynchrone qui consacre donc tous les développements effectués. Par la suite, une simulation en régime transitoire électrique et électromécanique est envisagée. Pour prendre en compte le mouvement du rotor par rapport au stator, la méthode du macro-élément est adoptée. Le modèle transitoire prend en compte la non linéarité que provoquent les parties ferromagnétiques constituant la machine. Les objectifs recherchés à travers notre étude se résument ainsi :

a. Etablir des codes de calcul éléments finis.
b. Couplage magnétique-électrique.
c. Simulation sans mouvement : régime harmonique.
d. Calcul des grandeurs globales.
e. Implémentation d'une technique de mouvement (Macro-élément).
f. Simulation en régime transitoire avec mouvement en tenant compte de la non-linéarité magnétique.

Structure du mémoire

Les travaux que nous avons menés dans le cadre de ce présent mémoire s'articulent autour de cinq chapitres :

Le premier chapitre traite un état de l'art de la modélisation de la machine asynchrone, sujette de nos travaux. Ceci nous permet notamment d'aborder le problème à traiter. Nous procédons initialement à la présentation de quelques généralités théoriques relatives à la constitution et fonctionnement de la machine. Par la suite, nous passons en revue les différents modèles qui régissent son fonctionnement et une attention particulière est accordée au modèle électromagnétique.

Au deuxième chapitre, une double étude est menée. En premier lieu, la nature électromagnétique du problème que nous abordons a fait que nous entamons ce chapitre par la mise en place de la structure mathématique nécessaire à la modélisation électromagnétique de la machine asynchrone. Un rappel des équations de base que sont les équations de Maxwell et les relations qui leurs sont associées est dressé. A partir de ces équations, nous présentons une formulation mathématique des problèmes magnétostatique et magnétodynamique. En second lieu, nous traitons les voies de résolution des modèles ainsi élaborés. Un intérêt particulier est accordé aux méthodes numériques à travers une présentation de la méthode des éléments finis.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à la présentation du couplage magnétique-électrique, un aspect très important dans la modélisation des dispositifs électrotechniques qui est, du reste, le problème abordé dans ce mémoire. Un modèle couplé des équations du champ et du circuit électrique en régime harmonique est développé en empruntant la méthodologie de Arkkio **[4]**.

Une extension du modèle couplé développé précédemment fait l'objet du quatrième chapitre. Il est question en effet de reformuler le modèle magnétique-électrique dans le cadre d'une étude en régime transitoire. Par la suite, une étude magnétique-électrique-mécanique est abordée. Nous présentons alors les différentes techniques développées pour la prise en compte du mouvement, en particulier, la méthode du macro-élément.

Le cinquième et dernier chapitre intervient pour clôturer l'étude et la rattacher au but pour lequel elle est inscrite. Une simulation des modèles élaborés, tant en régime harmonique qu'en régime transitoire non linéaire avec mouvement, est exécutée. Les résultats recueillis seront présentés dans cette partie.

La synthèse du travail est présentée en conclusion générale.

CHAPITRE 1

La machine Asynchrone Etat de l'art de sa modélisation

I.1 Introduction

La machine asynchrone, connue également sous le terme « anglo-saxon » de machine à induction, est une machine à courant alternatif sans connexion entre le stator et le rotor. Son invention est attribuée à Nicolas Tesla en 1887. En 1889, Michail Ossipowitsch Doliwo-Dobrowolski, électricien allemand d'origine russe, invente le premier moteur asynchrone à courant triphasé et à cage d'écureuil, construit industriellement à partir de 1891 **[10, 41, 46]**. Les machines asynchrones couvrent actuellement l'essentiel des besoins de transformation d'énergie électrique en énergie mécanique et le progrès technique dans certains secteurs consiste à évoluer des technologies de machines à courant continu et synchrones vers celles des machines asynchrones [**45].** Dans les pays industrialisés, plus de soixante pour cent de l'énergie électrique consommée est transformée en énergie mécanique par des entraînements utilisant les moteurs asynchrones **[23]**.

Le moteur asynchrone est actuellement le moteur électrique dont l'usage est le plus répandu dans les applications industrielles ou domestiques de l'électricité, du fait de sa facilité d'installation, sa simplicité de construction, sa facilité d'utilisation et d'entretien, sa robustesse, son faible prix de revient et son excellente fiabilité. **[20**, **57]**

Plusieurs caractéristiques, dont les principales font l'objet de normalisation conduisent donc au choix d'un moteur asynchrone pour une application donnée : la puissance nominale, le service nominal, la tension d'alimentation, le mode de construction mécanique et le degré de protection des enveloppes. Il faut aussi veiller à ce que le démarrage se fasse dans de bonnes conditions pour le moteur et la machine entraînée ainsi que pour le réseau d'alimentation. Deux facteurs non complètement indépendants sont ainsi à surveiller : le couple et l'intensité du courant de démarrage. Ces facteurs peuvent ainsi conduire à orienter le choix technologique du moteur **[57]**. En outre, avec le progrès de l'électronique de puissance, les utilisations de la variation électronique de vitesse des moteurs se sont développées, en particulier pour les applications industrielles. Il existe maintenant plusieurs technologies d'entraînements à vitesse variable utilisant des moteurs asynchrones qui couvrent une gamme très étendue de puissance et d'applications **[36, 57]**.

Nous allons présenter, dans un premier temps, la machine asynchrone par la voie de notions élémentaires liées à sa constitution et son fonctionnement. Dans un second temps, on s'intéressera à la présentation des différents modèles électrique, magnétique, mécanique et thermique utilisés dans le calcul des machines à induction. L'accent sera mis sur le modèle électromagnétique.

I.2 Présentation

La machine asynchrone se compose de deux pièces principales (figure I.1) :

- Le stator est relié au réseau ou à un variateur de vitesse.
- Le rotor est constitué de conducteurs en court circuit qui sont parcourus par des courants induits par le champ magnétique créé par les courants statoriques.

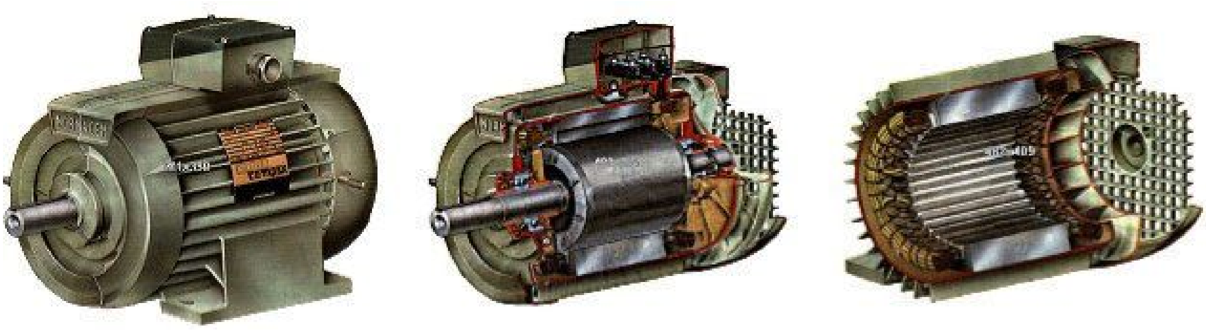

Figure I.1 : Machine Asynchrone.

Cette machine peut, selon sa construction, être reliée à un réseau monophasé ou polyphasé (généralement triphasé car c'est celui de la distribution).
Bien que réversible, la machine asynchrone est principalement (mais pas exclusivement) utilisée en moteur **[64, 66]**.

I.3 Eléments de constitution

La machine est constituée d'un circuit magnétique déformable (rotor en mouvement par rapport au stator) et de bobinages parcourus par des courants, à l'origine de champ magnétique. Le circuit magnétique est réalisé par un empilement de tôles ferromagnétiques fines et découpées, faisant apparaître le stator, le rotor et les différentes encoches (figure I.2) **[27, 28, 34, 86]**. Les machines asynchrones triphasées peuvent se décomposer, du point de vue mécanique, en trois parties distinctes :

- Le stator, partie fixe de la machine où est connectée l'alimentation électrique.
- Le rotor, partie tournante qui permet de mettre en rotation la charge mécanique.
- Les paliers, partie mécanique qui permet la mise en rotation de l'arbre du moteur.

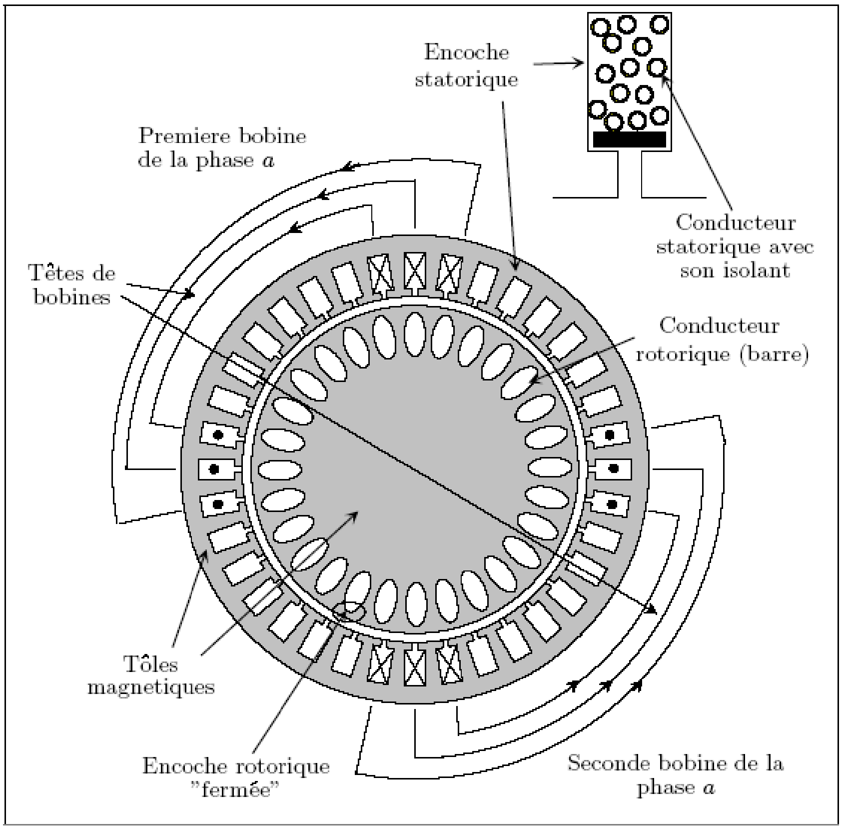

Figure I.2 : Coupe schématique de la machine asynchrone.

I.3.1 Le stator

Le stator en forme d'un cylindre creux, consiste en un empilage de tôles d'acier. Ces dernières comportent à leur périphérie intérieure des encoches dans lesquelles sont placés les enroulements d'un bobinage triphasé ou polyphasé (figure I.3). Ces enroulements peuvent se raccorder en étoile ou en triangle sur certains moteurs **[44, 84, 88]**.

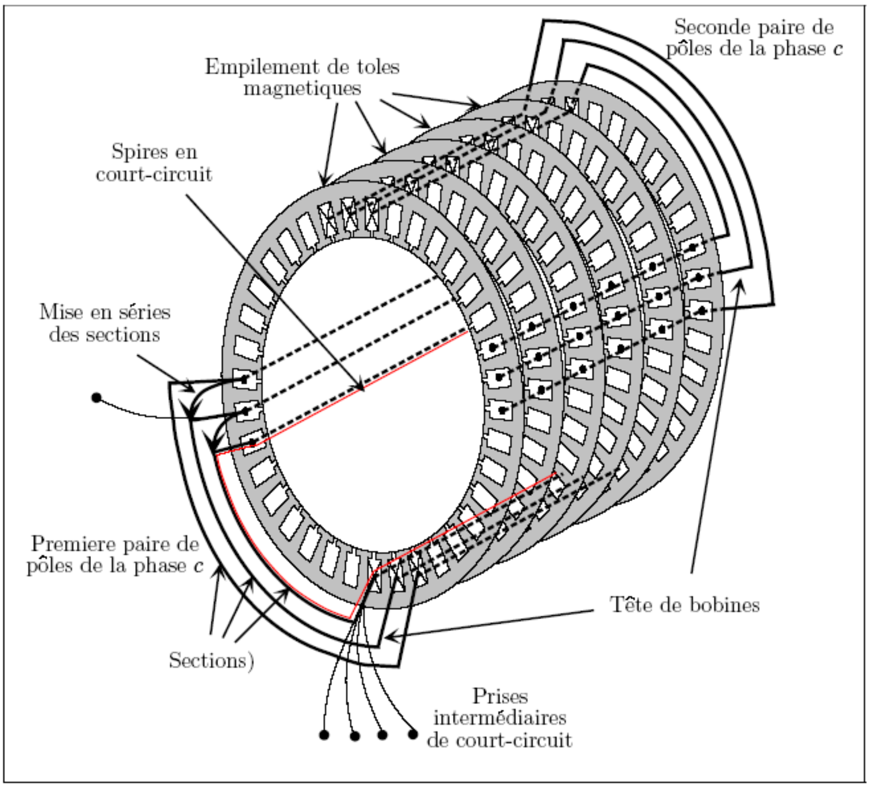

Figure I.3 : Vue schématique en perspective du stator

I.3.2 Rotor

Tout comme le stator, le circuit magnétique rotorique est constitué de tôles d'acier qui sont, en général, de même origine que celles utilisées pour la construction du stator. Les différents types de moteurs asynchrones ne se distinguent que par le rotor **[27, 57, 86, 88]**.

I.3.2.1 Rotor bobiné (rotor à bague)

Le bobinage du rotor est un enroulement triphasé semblable à celui du stator, connecté en étoile afin d'empêcher toute circulation du courant entre les phases rotoriques. Il est relié à des bagues fixées sur l'arbre de la machine (figure I.4.a).

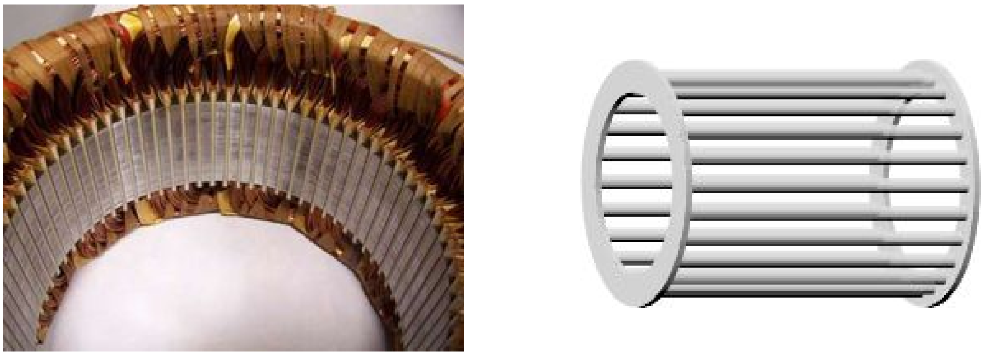

Figure I.4 : a) Rotor bobiné, b) Structure d'un rotor à cage.

I.3.2.2 Rotor à cage

Le circuit électrique du rotor peut être simplement constitué de barres en cuivre ou en aluminium logées dans des encoches régulièrement espacées à la périphérie de l'entrefer. Ces barres sont reliées entre elles à chacune des extrémités du rotor par un anneau de court-circuit (figure I.4.b).

I.3.2.3 Rotor à encoches profondes

C'est un rotor constitué de barres très plates s'enfonçant profondément dans le circuit magnétique (figure I.5). Ces topologies de rotor permettent un démarrage avec un couple plus important lorsque la machine est alimentée par une source de tension fixe (sans variateur de vitesse).

Figure I.5 : Coupe d'un rotor à cage à encoches profondes.

I.3.3 Les paliers

Les paliers, qui permettent de supporter et de mettre en rotation l'arbre rotorique, sont constitués de flasques et de roulements à billes insérés à chaud sur l'arbre. Les flasques, moulés en fonte, sont fixés sur la carter statorique grâce à des boulons ou des tiges de serrage. L'ensemble ainsi établi constitue alors la machine asynchrone à cage d'écureuil.

I.4 Principe de fonctionnement

Le principe de fonctionnement des moteurs à courants alternatifs réside dans l'utilisation d'un champ magnétique tournant produit par des tensions alternatives. Dans le cas du moteur triphasé, les trois bobines sont disposées dans le stator à 120° les unes des autres, trois champs magnétiques sont ainsi crées (figure I.6). Compte tenu de la nature du courant sur le réseau triphasé, les trois champs sont déphasés (chacun à son tour passe par un minimum). Le champ magnétique résultant tourne à la même fréquence que le courant, soit 50 tr/s. Les trois enroulements statoriques créent donc un champ magnétique tournant, sa fréquence de rotation est nommée fréquence de synchronisme. Si on place une boussole au centre, elle va tourner à cette vitesse de synchronisme.

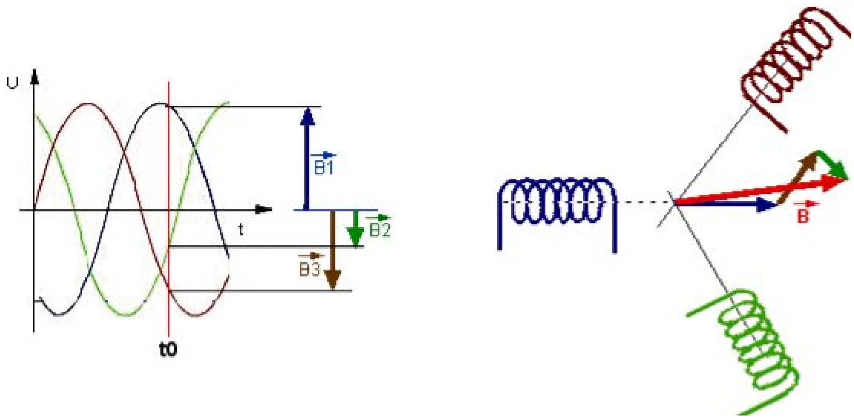

Figure I.6 : Champ magnétique crée par un enroulement statorique.

Le rotor est constitué de barres d'aluminium noyées dans un circuit magnétique. Ces barres sont reliées à leurs extrémités par deux anneaux conducteurs et constituent une cage d'écureuil. Cette cage est en fait un bobinage à grosse section et très faible résistance. Cette cage est balayée par le champ magnétique tournant, les conducteurs sont alors traversés par des courants de Foucault induits. Des courants circulent dans les anneaux formés par la cage, les forces de Laplace qui en résultent exercent un couple sur le rotor. D'après la loi de Lenz, les courants induits s'opposent par leurs effets à la cause qui leur a donné naissance. Le rotor tourne alors dans le même sens que le champ, mais à une vitesse légèrement inférieure à la vitesse de synchronisme de ce dernier. Le rotor ne peut pas tourner à la même vitesse que le champ magnétique, sinon la cage ne serait plus balayée par le champ tournant et il y aurait disparition des courants induits et donc des forces de Laplace et du couple moteur. Les deux fréquences de rotation ne peuvent donc pas être synchrones d'où le nom de moteur asynchrone **[11, 64, 66]**.

I.5 La variation de vitesse

Malgré sa conception ancienne, le moteur asynchrone reste toujours d'actualité car l'électronique permet maintenant de faire varier sa fréquence de rotation. Pour faire varier celle-ci, il faut modifier la fréquence de rotation du champ magnétique et donc la fréquence du courant d'alimentation. Les variateurs de vitesse sont des variateurs de fréquence. Ils permettent :

- Une gamme de vitesse de 5% à 200% de la vitesse nominale.
- Une conservation du couple sur toute la gamme de vitesses.
- Des rampes d'accélération et de décélération.
- Deux sens de rotation

La tension d'alimentation peut être modifiée à l'aide d'un variateur constitué d'un redresseur combiné à un onduleur. Le redresseur va permettre d'obtenir un courant quasi continu. A partir de ce courant continu, l'onduleur (bien souvent à modulation de largeur d'impulsion ou MLI) va permettre de créer un système triphasé de tension alternatives dont on pourra faire varier la valeur efficace et la fréquence. Le fait de conserver le rapport de la valeur efficace du fondamental de la tension par la fréquence (U_1/f) constant permet de maintenir un flux tournant constant dans la machine et donc de maintenir constante la fonction reliant la valeur du couple en fonction de (N_s-N) **[36, 64]**.

I.6 Freinage

On distingue plusieurs types de freinage : freinage libre, freinage contrôlé, freinage à contre courant et freinage mécanique **[41, 64, 66]**.

- Arrêt libre : C'est la mise hors tension du stator.
- Arrêt contrôlé : Tension statorique progressivement passée à 0V. On y distingue :

  Freinage hypersynchrone : lorsque la vitesse du rotor est supérieure à la vitesse du champ tournant, le moteur freine. Couplé à un variateur de fréquence qui diminue progressivement la vitesse du moteur, on peut arrêter un moteur. Le couple de freinage est faible : la courbe du couple en fonction de la vitesse pour différentes valeurs de glissement montre que le couple résistant n'est pas très important pour un glissement compris entre 0 et 1. Cette méthode n'est donc pas très efficace pour freiner une machine asynchrone.

  Arrêt par injection de courant continu : l'alimentation en courant continu du stator crée un champ fixe dans la machine qui s'oppose au mouvement. C'est la méthode la plus efficace pour freiner la machine, mais les contraintes en courant sont également très sévères. Le contrôle de l'intensité du courant continu permet de contrôler le freinage.

  - Arrêt à contre courant : Le principe consiste à inverser deux phases pendant un court instant. C'est donc équivalent à un freinage hypersynchrone mais à fréquence fixe. Le couple résistant est donc faible et le courant appelé est également très important (de l'ordre de 10 à 12 fois l'intensité nominale. La conséquence en est que les enroulements du moteur risquent la surchauffe : on peut prévoir des résistances supplémentaires afin de diminuer l'intensité en ligne. Enfin, avec cette méthode, le couple décélérateur reste négatif même lorsque la vitesse est égale à 0 tr/min, il faut donc prévoir de couper l'alimentation quand la vitesse est nulle, sinon le moteur part en arrière.
  - Freinage mécanique : Il est souvent utile de prévoir un dispositif d'arrêt d'urgence du moteur en absence de courant.

I.7 Vitesse et glissement

Pour caractériser la vitesse du rotor, on définit le glissement *g*, qui est l'écart relatif entre la vitesse de synchronisme *Ns* et sa vitesse réelle *N* (différence de vitesse entre le rotor et le champ statorique), soit **[10, 41, 57, 67]**:

$$g = \frac{N_s - N}{N_s} = \frac{\omega_s - p.\omega_m}{\omega_s} \tag{I.1}$$

Et on a :

$$\omega_m = \frac{2.\pi.N}{60} \tag{I.2}$$

$$\omega_s = 2.\pi.f \tag{I.3}$$

$$\omega_r = \omega_s - (p.\omega_m) = g.\omega_s \tag{I.4}$$

f : Fréquence du réseau [Hz].

p : Nombre de paires de pôles.

ω_m : Pulsation mécanique [rad/s].

ω_r : Pulsation des courants induits [rad/s].

ω_s : Pulsation des courants inducteurs [rad/s].

N_s : Vitesse de rotation (de synchronisme) du champ tournant [tr/s].

N : Vitesse de rotation du rotor [tr/s].

Le glissement est toujours faible, de l'ordre de : 2% pour les machines les plus grosses, 6 ou 7% pour les petites machines triphasées, il peut atteindre 10% pour les petites machines monophasées.

I.8 Modélisation et mise en équation de la machine asynchrone

La machine à induction fait intervenir des aspects électriques, électromagnétiques, thermiques, mécaniques…etc. Pour chacun de ces phénomènes, il existe autant de modèles mathématiques destinés à des applications données **[95]**.

I.8.1 Modèles électromagnétiques

Les modèles électromagnétiques consistent à décrire le comportement électromagnétique de la machine en régime transitoire ou en régime permanent harmonique. Ils se présentent sous deux formes :

- Modèles électriques (externes ou classiques) donnant des schémas électriques équivalents des machines.
- Modèles magnétiques (internes basés sur le calcul du champ) s'attachant à résoudre les équations de l'électromagnétisme à l'intérieur de la machine à l'aide de méthodes, souvent numériques **[17, 89]**.

I.8.1.1 Les modèles électriques (externes ou classiques)

La machine asynchrone a été longtemps modélisée par un schéma électrique équivalent qui dérive de la théorie des champs tournants. Les paramètres de ce schéma (inductances et résistances) sont obtenus par une décomposition de la machine en différentes parties qui peuvent être analysées d'une manière simplifiée. Le calcul de ces paramètres fait appel à une connaissance approximative de la distribution du champ magnétique à partir de laquelle sont déduites les perméances du circuit magnétique et de l'entrefer. En utilisant la notation complexe, un tel modèle permet d'évaluer les performances de la machine en régime permanent sinusoïdal. Le régime dynamique est formulé par un système d'équations différentielles qui peuvent être intégrées, par rapport au temps, par une méthode numérique de type Runge-Kutta ou Euler. Ces modèles donnent généralement des résultats satisfaisants au niveau de la prédiction du courant et du couple pour une alimentation sinusoïdale, mais ne permettent pas le calcul direct des flux ni des courants rotoriques **[17]**.

I.8.1.1.1 Equations électriques en régime transitoire

On considère le repère (abc) dans lequel nous exprimerons le modèle électrique :

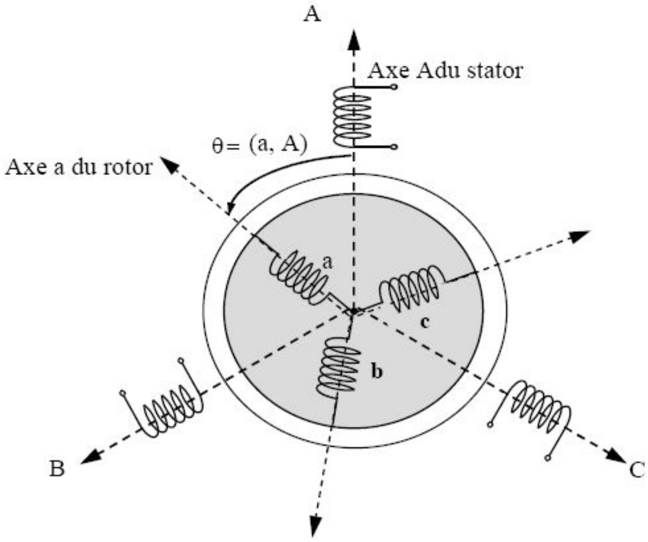

Figure I.7 : Modèle électrique dans le repère (abc).

Pour le régime transitoire, le modèle de la machine à induction peut s'écrire, au niveau du stator, à l'aide de la formulation matricielle suivante :

$$\begin{cases} V_s = R_s I_s + \dfrac{d}{dt}\varphi_s \\ \varphi_s = L_s I_s \end{cases} \tag{I.5}$$

Pour une machine triphasée équilibrée, dont le rotor est classique (simple cage), on peut représenter la cage par un système triphasé équilibré. L'équation (I.5), après avoir introduit le circuit du rotor, prend la forme :

$$\begin{Bmatrix} V_s \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_s \\ I_r \end{Bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \varphi_s \\ \varphi_r \end{Bmatrix} \tag{I.6}$$

V_s : Vecteur des tensions aux bornes des phases 1, 2, 3 au stator.

I_s : Vecteur des courants au niveau des phases 1, 2, 3 au stator.

I_r : Vecteur des courants au niveau des phases 1, 2, 3 au rotor.

φ_s : Flux des phases 1, 2, 3 au stator.

φ_r : Flux des phases 1, 2, 3 au rotor.

R_s, R_r : Matrices résistances statorique et rotorique respectivement.

I.8.1.1.2 Equations électriques en régime permanent

En régime établi, lorsque les sources sont à variation sinusoïdale par rapport au temps, et toujours sous l'hypothèse de l'existence d'un seul harmonique d'espace, les relations (I.5) et (I.6) (pour une phase) montrent que toutes les grandeurs sont à variation sinusoïdale par rapport au temps. En introduisant leur représentation complexe, on est conduit aux équations :

$$\begin{Bmatrix} \bar{V}_s \\ \dfrac{R_r}{g} I_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + j\omega l_s & j M \omega_s \\ j M \omega & j l_r \omega_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{I}_s \\ -\bar{I}_r \end{Bmatrix} \qquad \text{(I.7)}$$

Avec :

I_s : Inductance cyclique de l'enroulement statorique.

I_r : Inductance cyclique de l'enroulement rotorique.

M : Inductance mutuelle cyclique des enroulements statorique et rotorique.

$\bar{V}_s$: Tension aux bornes d'une phase du stator.

$\bar{I}_s$: Courant d'une phase au stator.

$\bar{I}_r$: Courant d'une phase au rotor.

On en déduit alors le schéma équivalent par phase :

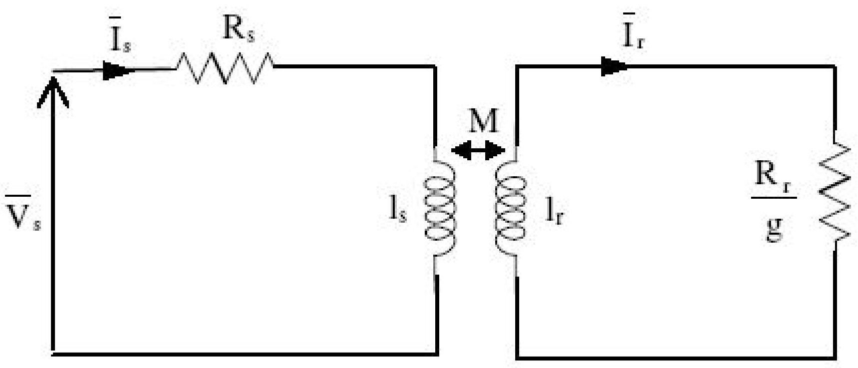

Figure I.8 : Schéma équivalent par phase du moteur à induction.

I.8.1.2 Les modèles magnétiques (internes basés sur le calcul du champ)

La complexité des machines électriques utilisées et l'exigence de bonnes performances dynamiques nécessitent une modélisation fine. Du point de vue électromagnétique, les modèles internes, basés sur la résolution des équations du champ électromagnétique par la méthode des éléments finis, sont largement utilisés. Cette modélisation nécessiterait la connaissance de la géométrie et des propriétés des matériaux (perméabilité magnétique, conductivité électrique…) et leur évolution en fonction des champs (magnétique, électrique, thermique). Dans ce cas, les phénomènes physiques (électromagnétiques) qui caractérisent les systèmes sont décrits par des équations aux dérivées partielles, issues principalement des équations de Maxwell et des lois de comportement des milieux et des matériaux. La résolution par la méthode des éléments finis de ces équations permet d'obtenir la distribution des champs. Par suite, la connaissance de ces champs conduit à, outre une évaluation précise des grandeurs globales (résistance, inductances, puissance, force…), appréhender le comportement intime du système **[17, 58, 89].**

I.8.1.2.1 Modèle interne dans le cas magnétodynamique

En régime dynamique, la modélisation par éléments finis des machines à induction est une tâche délicate puisqu'il s'agit de résoudre un problème de champ évolutif tout en suivant le mouvement et la diffusion lente du champ dans le rotor. Malgré cela, elle reste la seule démarche indiscutable pour la détermination des performances et le suivi local de l'état magnétique de la machine. Un modèle 2D permet de décrire l'état magnétique de la machine moyennant certaines hypothèses simplificatrices. La résolution de ce type de problème est généralement effectuée à l'aide de la technique pas à pas dans le temps. Dans ce contexte, plusieurs techniques, pour la prise en compte du mouvement et pour la résolution numérique des systèmes algébriques, ont été développées. L'avantage de ce type de modèle réside dans la prise en compte de la saturation et des harmoniques d'espace d'une façon convenable. La difficulté réside dans la façon de coupler les champs au stator et au rotor en mouvement ainsi que dans le temps de calcul inhérent nécessaire à la résolution. Une autre alternative très attractive se présente quand le régime transitoire n'est pas nécessaire. Il s'agit du calcul dans l'approximation sinusoïdale **[90, 95]**.

I.8.1.2.2 Modèle interne harmonique

Ces modèles sont développés particulièrement pour le calcul des machines à induction alimentées par des sources à variation sinusoïdale par rapport au temps et opérant à vitesse constante. L'hypothèse admise dans ce type de calcul est que toutes les grandeurs électromagnétiques sont à variation sinusoïdale dans le temps. De ceci résulte l'élimination des harmoniques de temps dans le problème magnétique et l'autorisation de l'utilisation de la représentation complexe des différentes grandeurs électromagnétiques. L'avantage de cette approche est de ne pas nécessiter d'itérations dans le temps pour la résolution du problème, ce qui permet un gain de temps très important comparativement au modèle transitoire.

I.8.1.2.3 Calcul numérique en électromagnétisme

La simulation électromagnétique fait appel au calcul des champs créés dans les diverses parties du moteur. Les grandeurs à l'intérieur de ce dernier sont de nature essentiellement bidimensionnelle dans un plan perpendiculaire à l'axe de la machine. Cependant, il existe certains effets de nature tridimensionnelle comme les courants dans les têtes de bobines ou dans les anneaux de court-circuit de la cage. Il est, en fait, possible de tenir compte de ces effets tout en gardant, pour des raisons de temps de calcul et d'efficacité du processus de conception, un modèle bidimensionnel **[39, 43]**.
Les logiciels de calcul de champ font aujourd'hui partie de la panoplie de l'ingénieur de conception et sont, de ce fait, couramment utilisés en bureau d'étude. En ce qui concerne l'analyse électromagnétique des machines électriques et donc en particulier des moteurs asynchrones, on recourt le plus souvent à la méthode des éléments finis qui est la base de progiciels très utilisés chez les constructeurs de matériel électrique. Le principe de la méthode est d'utiliser une formulation variationnelle des équations du champ électromagnétique et, quand cela n'est pas possible, de projeter, au sens vectoriel, sur les fonctions d'approximation, la fonction d'erreur entre la formule approchée de la valeur du potentiel vecteur électromagnétique et la valeur exacte définie par les équations du potentiel vecteur. La valeur approchée du potentiel vecteur est définie comme une combinaison linéaire des valeurs A_i de A noeuds d'un découpage défini et des fonctions de base associées aux éléments de dimension finie qui constituent ce découpage **[39, 43]**.

Pour le moteur dont la géométrie est définie par la figure (I.9), on représente le découpage en éléments finis sur la même figure.

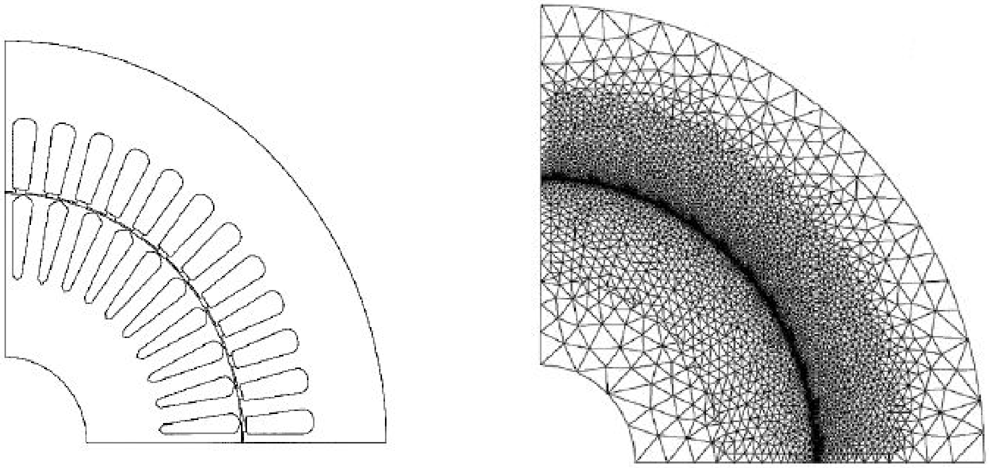

Figure I.9 : Géométrie et maillage d'un moteur asynchrone obtenus par simulation.

La formulation adoptée, appliquée au découpage réalisé permet de transformer le système d'équations aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques. La résolution par des méthodes itératives permet d'obtenir la valeur du potentiel vecteur A , en tous les noeuds du domaine discrétisé et d'accéder, par là, à toutes les grandeurs utiles pour la conception de la machine (induction, couple, f.é.m, courants, etc.). Le résultat du calcul est souvent illustré par des cartes de champ ou des équiflux (figure I.10) qui sont représentatives de l'état magnétique de la machine à un moment donné.

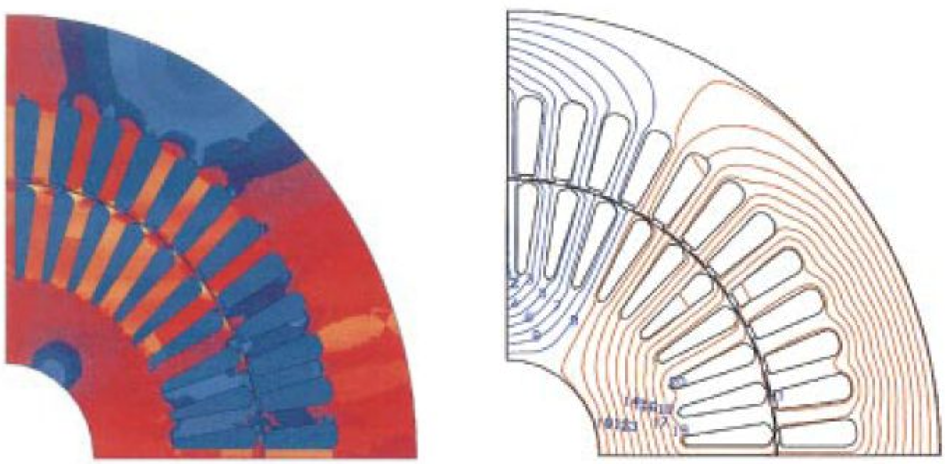

Figure I.10 : Résultats graphiques d'un calcul numérique du champ.

Sur le tableau de la figure (I.11), nous dressons un état comparatif des modèles électromagnétiques externes et internes.

Modèles électromagnétiques		
	Modèles externes	**Modèles internes**
Avantages	• Très indiqués pour la commande des machines à partir des convertisseurs statiques et pour le dimensionnement de réseaux d'alimentation • Prise en compte de la saturation des circuits magnétiques ainsi que de la variation des paramètres en fonction de la température. • Résultats satisfaisants au niveau de la prédiction du courant et du couple	• Répond parfaitement à la nécessité d'une modélisation fine exigée par la complexité des machines. • Etude des structures mal connues ou amélioration des structures classiques. • Bonne description de l'état magnétique de la machine. • Prise en compte de la saturation et des harmoniques d'espace de façon convenable. • Meilleure précision sur les performances de la machine.
Inconvénients	• Modèles relativement simples pour s'intégrer dans une représentation plus globale. • Représentation des phénomènes internes grossière voir inexistante. • Ne permettent pas un calcul direct des flux et des courants rotoriques.	• Les systèmes d'équations mis en jeu dépassent le millier de degrés de liberté. • Difficulté de coupler les champs du stator et du rotor en mouvement. • Le modèle transitoire ne traite la saturation que dans un sens moyen. • Le modèle transitoire ne convient que pour les machines où l'harmonique fondamental est prépondérant.

Figure I.11 : Confrontation des modèles externes aux modèles internes

I.8.2 Modèles mécaniques

Les phénomènes considérés dans ces modèles sont généralement liés à l'interaction entre le champ magnétique dans la machine et sa structure mécanique. Ces phénomènes produisent le mouvement mécanique nécessaire pour la conversion de l'énergie et, dans certains cas, peuvent conduire à des déformations et à des vibrations mécaniques de la structure. Les bruits acoustiques engendrés deviennent très gênants durant le fonctionnement de la machine. Les modèles mécaniques se présentent sous deux formes :

- Forme locale ou interne.
- Forme globale ou externe.

Le premier formalisme caractérise la mécanique interne de la machine. Il est donc utilisé lorsque la détermination de la tenue mécanique des diverses pièces est nécessaire ou lorsqu'on cherche à localiser une source de vibration acoustique. Ce modèle peut être alors utile pour détecter ou prévoir une panne en mesurant ces vibrations et aider ainsi à la maintenance du matériel. On retrouve aussi ce modèle dans le calcul des effets d'excentricité statique ou dynamique de l'entrefer lors de vibrations du rotor, en mouvement, provoquées par des défauts d'origine mécanique.

Dans le deuxième formalisme, la structure de la machine est considérée solide et indéformable. La description mécanique de la machine est donc globale. Elle consiste à modéliser le mouvement mécanique du rotor provoqué par le couple électromagnétique développé. Cette solution est adoptée pour décrire le comportement de la machine vis-à-vis de la charge. On cherche alors les caractéristiques externes décrivant le fonctionnement électromécanique de la machine à induction (caractéristiques couple-vitesse, courant-vitesse,…etc.) **[95]**.

I.8.3 Modèles thermiques

Les modèles thermiques sont utilisés pour le développement de nouvelles structures ou pour l'optimisation d'installations plus courantes. Les phénomènes thermiques sont une conséquence du fonctionnement de la machine.

Deux approches sont possibles en thermique. Soit la machine est considérée comme un assemblage de pièces homogènes dans sa construction et dans le fonctionnement. On utilise alors plutôt une description de type réseau thermique équivalent qui peut aboutir à une représentation simple. La température n'est calculée qu'aux nœuds du réseau qui représentent chacun un sous-ensemble de la machine dans lequel la température est uniforme. Les échanges et les sources de chaleur sont décrits exhaustivement et représentent les branches du réseau. L'autre point de vue est plus local. On décrit alors les équations de transfert de chaleur en tout point de la machine. Les équations aux dérivées partielles qui régissent le bilan énergétique sont résolues sur des volumes élémentaires et la température est connue en tout point du domaine. La description est alors plus complexe et nécessite souvent des méthodes de calcul numérique. Elle aboutit généralement à une solution plus fine et ne nécessite pas d'a priori sur l'uniformité de la solution dans les différentes parties du système **[25]**.

I.8.4 Modèles couplés

Bien que des modèles distincts soient utilisés pour décrire chacun des principes physiques qui interviennent dans la machine, le fonctionnement de celle-ci n'est correctement décrit que par l'examen simultané de tous les phénomènes. Les modèles décrits précédemment sont ainsi couplés par différentes grandeurs comme le décrit la figure (I.12) **[25]**.

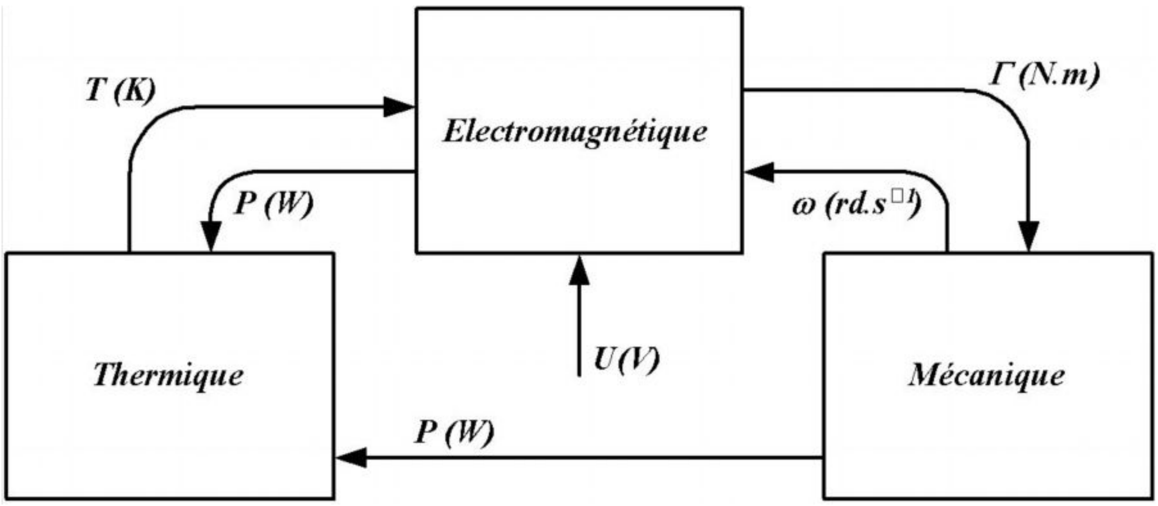

Figure I.12 : Grandeurs de couplage entre les différents phénomènes physiques.

I.9 Conclusion

Dans ce chapitre, une présentation de la machine asynchrone a été établie. Nous avons dressé quelques généralités et concepts allant dans le sens de se familiariser avec cette machine qui constituera le sujet de nos travaux.

La modélisation de la machine asynchrone est une étape très importante, que ce soit dans la phase de conception ou dans la phase de mise en œuvre. Afin de répondre à cette nécessité, nous avons présenté un état (rencontré dans la littérature) des différents modèles régissant la machine.

La complexité des machines utilisées actuellement et l'exigence de bonnes performances dynamiques nécessitent la modélisation par le calcul du champ qui, aujourd'hui, est largement utilisé dans les systèmes électromagnétiques. A ce jour, les modèles électromagnétiques qui décrivent le fonctionnement de la machine asynchrone peuvent être décomposés en deux parties distinctes : les modèles internes et les modèles externes. En ce qui concerne les modèles internes, ce sont les lois régissant l'électromagnétisme qui sont utilisées pour décrire le fonctionnement de cette machine. Ces modèles, résolus numériquement, sont de plus en plus utilisés pour la conception et l'optimisation des machines électriques de façon générale, et la machine asynchrone de façon particulière. Un modèle numérique électromagnétique 2D dédié à la simulation de la machine asynchrone sera, du reste, l'objectif visé dans notre travail.

CHAPITRE 2

Analyse Physico-Mathématique des Problèmes Electromagnétiques et résolution par éléments finis

II.1 Introduction

Le traitement, l'étude, la conception et l'optimisation des dispositifs électromagnétiques passent par une bonne maîtrise des phénomènes électromagnétiques s'y déroulant, ainsi que par la mise en œuvre de modèles mathématiques d'équations aux dérivées partielles spatio-temporelles représentant et caractérisant le fonctionnement de ces systèmes. Le but d'une telle modélisation est d'accéder aux grandeurs locales (champ magnétique, densité de courant,…) et globales (courant, flux, énergie,…) nécessaires à l'analyse ou la conception des dispositifs électromagnétiques. La structure mathématique capable de nous fournir de tels résultats est basée sur la résolution des équations de Maxwell. Pour un problème donné, cette résolution nous donne les grandeurs locales à partir desquelles on peut déduire des grandeurs globales **[17, 71, 74]**.

L'établissement d'un modèle électromagnétique (un modèle interne en particulier), pour la modélisation d'une machine asynchrone, requiert l'étude du comportement du champ magnétique et du champ électrique dans ce dispositif. A cet effet, un formalisme permettant de décrire l'ensemble des phénomènes électromagnétiques s'impose. Les équations de base de l'électromagnétisme, dont les équations de Maxwell constituent l'essentiel, auxquelles sont associées des relations constitutives, des conditions aux limites ainsi que des conditions de continuité, donneraient le modèle complet régissant le fonctionnement de la machine.

La théorie de Maxwell permet de décrire l'ensemble des phénomènes électromagnétiques. Elle est donnée par des équations aux dérivées partielles reliant les champs magnétique et électrique. Pour des cas simples, ces équations ont des solutions analytiques donnant une distribution exacte des champs dans le dispositif étudié. Néanmoins, la majorité des problèmes de l'électromagnétisme sont complexes et leur résolution par des méthodes analytiques est quasiment impossible (à moins d'utiliser des hypothèses simplificatrices). En conséquence, il est nécessaire de recourir à des méthodes numériques basées sur une discrétisation des variables et de l'espace géométrique. Ces techniques transforment les équations aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques avec des degrés de liberté finis. Parmi ces méthodes, celle des éléments finis est couramment utilisée. La solution obtenue fournit alors une approximation des grandeurs locales que sont les champs magnétique et électrique. Ces grandeurs sont exploitées par la suite pour déterminer les valeurs globales telles que les flux, les courants,…etc. Cette résolution numérique donne une précision suffisante pour envisager des applications de conception ou d'optimisation des systèmes électromagnétiques.

L'étude des systèmes électromagnétiques nécessite des outils mathématiques pour modéliser les phénomènes physiques intervenant dans leur fonctionnement. Dans ce chapitre, nous débuterons par un rappel sur la théorie de l'électromagnétisme, en présentant les équations de base que sont les équations de Maxwell. De ces équations seront extraits les modèles magnétodynamiques harmonique et transitoire devant nous intéresser dans les parties ultérieures. Ces modèles seront formulés par des variables autres que les champs physiques. On parle alors de formulation en terme de potentiel. Pour notre part, nous adopterons la formulation utilisant le potentiel vecteur. Par la suite, nous présenterons la résolution numérique des équations du champ électromagnétique par la méthode des éléments finis.

II.2 Grandeurs électromagnétiques

L'ensemble des phénomènes électromagnétiques intervenant dans l'étude d'un dispositif électromagnétique fait appel aux équations de Maxwell. Ces dernières définissent les propriétés macroscopiques locales associées aux grandeurs électriques et magnétiques vectorielles dépendantes du temps et de l'espace.
L'ensemble des phénomènes électromagnétiques peut être décrit par le biais de six grandeurs qui dépendent du temps et de l'espace et qui sont les suivantes **[32, 51, 62]** :

$H(p,t)$: Champ magnétique [A.m^{-1}].

$E(p,t)$: Champ électrique [V.m^{-1}].

$B(p,t)$: Induction magnétique [T].

$D(p,t)$: Induction électrique [C.m^{-2}].

$J(p,t)$: Densité de courant de conduction [A.m^{-2}].

$\rho(p,t)$: Densité de charges électriques libres [C.m^{-3}].

La variable t représente le temps absolu dans le sens de la transformation de Lorentz. Elle est réduite à celle de Galilée et p est un point du domaine étudié.

La figure (II.1) laisse apparaître la correspondance existant entre les phénomènes physiques électriques et magnétiques :

Magnétostatique	Electrostatique	Conduction électrique
$\vec{B}$	$\vec{E}$	$\vec{E}$
A_z	V	V
$\vec{H}$	$\vec{D}$	$\vec{J}$
$\vec{J}$	ρ	0
ν	ε	σ

Figure II.1 : Correspondance entre les phénomènes physiques électromagnétiques

II.3 Equations de Maxwell

II.3.1 Forme Locale

L'étude harmonieuse de l'électromagnétisme est fondée sur les équations de Maxwell. Elles spécifient que toute variation spatiale d'un champ (électrique ou magnétique), en un point de l'espace, entraîne (ou est due à) l'existence, ou la variation temporelle d'un autre champ au même point de l'espace **[29, 63]**. L'ensemble des phénomènes en électromagnétisme est donc régi par la théorie de Maxwell qui est donnée par un système d'équations aux dérivées partielles sous la forme suivante **[22, 35, 49, 50, 63]** :

$$r\vec{o}t\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$ Théorème d'Ampère-Maxwell (II.1)

$$r\vec{o}t\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ Loi de Faraday (II.2)

$$div\,\vec{D} = \rho$$ Théorème de Gauss (II.3)

$$div\,\vec{B} = 0$$ Loi de conservation de flux (II.4)

Les deux premières équations indiquent l'évolution et la dualité entre les grandeurs électriques et magnétiques, tandis que les deux dernières sont des équations de conservation de la charge et du flux.

II.3.2 Diagramme de Tonti

Les équations de Maxwell se présentent en deux systèmes duaux **[75]** :

- Les lois de Faraday et de conservation de flux d'une part (système magnétique)
- Les théorèmes d'Ampère-Maxwell et de Gauss d'autre part (système électrique).

La dualité des deux systèmes peut être mise en évidence à l'aide du diagramme de Tonti :

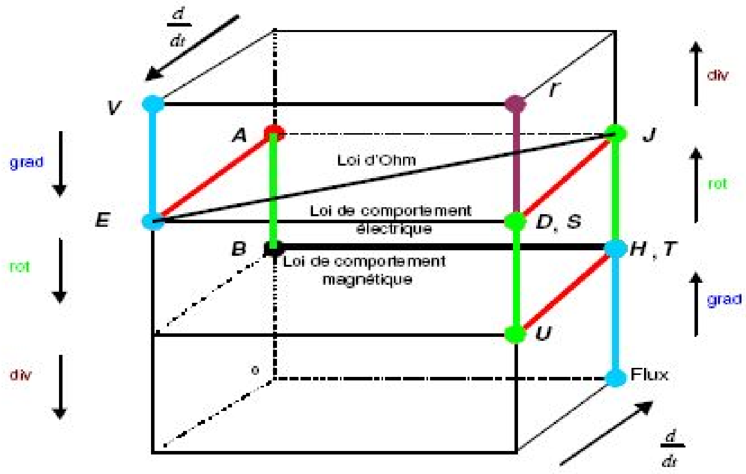

Figure II.2 : Diagramme de Tonti.

II.3.3 Forme globale

Les équations de Maxwell peuvent être aussi mises sous forme intégrale, elles expriment alors des relations entre les champs dans une région de l'espace et non plus en un point. Il existe une différence fondamentale entre les deux systèmes d'équations. Les équations intégrales donnent en effet des résultats moyens, applicables à des volumes, des surfaces et des contours. Les équations différentielles ou locales sont ponctuelles : elles sont valables en tout point d'un milieu continu soumis à des champs électromagnétiques. Elles sont aussi valables à tout instant. Les dispositifs comportant des circuits électriques, mobiles ou non, sont en général étudiés par les relations intégrales. Les milieux continus sont en général décrits par les équations différentielles **[29]**.

II.4 Lois de comportement

Dès lors que les champs vectoriels présentés précédemment sont fonction du milieu où ils règnent, il faut joindre aux équations de Maxwell des relations qui définissent le milieu ou la matière à étudier, et ce, pour résoudre les problèmes électromagnétiques **[8]**.

II.4.1 Relations magnétique et diélectrique

Ces relations viennent en fait compléter les équations de Maxwell. Elles expriment les rapports existant entre champs de même nature. Les propriétés de la matière où se développent ces champs interviennent sous la forme de relations de comportement entre $\vec{B}$ et $\vec{H}$ d'une part, $\vec{D}$ et $\vec{E}$ d'autre part **[5, 83]**. Pour des milieux diélectriques de permittivité ε_r et magnétiques de perméabilité μ_r respectivement, elles s'écrivent comme suit :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \qquad \text{(II.5)}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} + \vec{B}_r \qquad \text{(II.6)}$$

II.4.2 Loi d'ohm

Dans les milieux conducteurs, la densité de courant est reliée au champ électrique par la loi d'Ohm :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \qquad \text{(II.7)}$$

. Dans le cas d'un milieu en mouvement, de vitesse V_d , cette loi s'exprime aussi :

$$\vec{J} = \sigma.\left(\vec{E} + \left(\vec{V}_d \wedge \vec{B}\right)\right) \qquad \text{(II.8)}$$

II.5 Equation de continuité

Les courants électriques ne sont que des charges en mouvement, soumis à la loi de conservation de la charge électrique. Celle-ci est obtenue par la combinaison des équations (II.1) et (II.3) :

$$div\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \text{(II.9)}$$

II.6 Relations de passage

Lors du passage d'un milieu repéré 1 vers un milieu repéré 2, les grandeurs électromagnétiques subissent des discontinuités et ne sont donc mathématiquement plus différentiables.

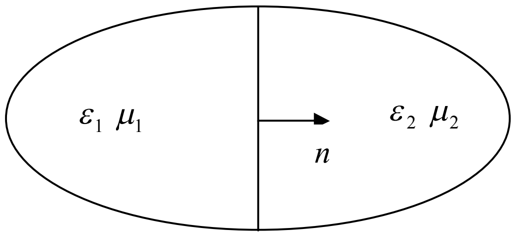

Figure II.3 : Schématisation des conditions d'interface

Les relations de passage à l'interface de passage, entre deux milieux de propriétés différentes, s'écrivent alors **[26, 35]** :

$$(D_1 - D_2).n = \rho_s \tag{II.10}$$

$$(B_1 - B_2).n = 0 \tag{II.11}$$

$$(E_1 - E_2)\times n = 0 \tag{II.12}$$

$$(H_1 - H_2)\times n = K \tag{II.13}$$

Les équations (II.11) et (II.12) expriment successivement la continuité de la composante normale de l'induction magnétique et de la composante tangentielle du champ électrique. Les équations (II.10) et (II.13) indiquent, quant à elles, la discontinuité de la composante normale de l'induction électrique et de la composante tangentielle du vecteur champ magnétique.

II.7 Conditions aux limites

Dans la résolution numérique, l'unicité de la solution exige la connaissance des valeurs des potentiels ou de leurs dérivées sur certaines parties du domaine.

II.7.1 Condition de Dirichlet

La condition aux limites de Dirichlet est décrite par des valeurs de l'inconnue connues sur toutes les surfaces entourant le milieu où l'on cherche sa distribution :

$$A\big|_{\Gamma} = A_0 \tag{II.14}$$

II.7.2 Condition de Neumann

Est décrite par des valeurs de la dérivée normale de l'inconnue connues sur toutes les surfaces entourant le milieu où l'on cherche sa distribution :

$$\left.\frac{\partial A}{\partial n}\right|_{\Gamma} = A_0 \tag{II.15}$$

II.7.3 Condition de périodicité

Cette condition intervient dans les machines cylindriques symétriques telles les machines électriques tournantes ou linéaires où on repère une symétrie de la distribution du champ magnétique. Cette condition nous permet de réduire la taille du modèle numérique, elle est exprimée par :

$$A\big|_{\Gamma} = K \,.\, A\big|_{\Gamma} + d\Gamma \tag{II.16}$$

Γ : Contour du dispositif étudié.

$d\Gamma$: Période spatiale suivant le contour Γ.

K : Constante pouvant prendre deux valeurs :

$K = 1$ Condition périodique, $K = -1$ Condition anti-périodique.

L'implémentation de la condition de périodicité et d'anti-périodicité est détaillée dans l'annexe (A.I).

II.8 Modèle magnétodynamique dans le cas des états quasi-stationnaires

Les équations développées jusque là décrivent globalement les phénomènes électromagnétiques. Dans la pratique nous essayons de simplifier certains cas, suivant les dispositifs considérés. Les équations données se découplent alors, donnant naissance à des modèles plus simples. En effet, toutes les études menées jusqu'à présent dans le domaine de l'électrotechnique pour le calcul du champ électromagnétique, sont basées sur plusieurs hypothèses simplificatrices **[6]**. Dans le cadre de l'étude des systèmes électrotechniques en général, et en particulier celle des machines à induction, les fréquences des phénomènes électromagnétiques intervenant dans leur fonctionnement sont relativement faibles. L'hypothèse admise, dans ces conditions, est de négliger les courants de déplacement devant les courants de conduction **[14, 15]**. De plus, la densité volumique de charge est nulle $(\rho = 0)$. Ainsi, l'équation (II.9) et le second membre de l'équation (II.1) deviennent :

$$div\, J = 0 \tag{II.17}$$

$$J + \frac{\partial D}{\partial t} \approx J \tag{II.18}$$

Que l'on peut écrire, en tenant compte de l'équation (II.7) sous la forme :

$$\sigma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \approx \sigma E \tag{II.19}$$

Si l'on se place en régime harmonique, on peut transformer cette équation sous la forme suivante :

$$\sigma E + j\,\omega\,\varepsilon\, E \approx \sigma E \tag{II.20}$$

L'approximation des états quasi-stationnaires peut alors se traduire en module par :

$$\omega \prec\prec \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{II.21}$$

Dans le cadre des machines à induction étudiées, cette condition est respectée.

II.9 Equations de la magnétodynamique

Les simplifications effectuées précédemment nous mènent vers une simplification des équations de Maxwell qui se réécrivent alors comme suit :

$$r\vec{o}t\,\vec{H} = \vec{J}_s + \vec{J} \tag{II.22}$$

$$r\vec{o}t\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{II.23}$$

$$div\,\vec{B} = 0 \tag{II.24}$$

$$div\,\vec{E} = 0 \tag{II.25}$$

A ces équations sont ajoutées les équations constitutives et les conditions de passage. Cet ensemble là traduit alors une configuration magnétodynamique.

II.10 Formulation mathématique des problèmes électromagnétiques

Les modèles de J.C.Maxwell décrivent globalement tous les phénomènes électromagnétiques, mais suivant les dispositifs que l'on étudie, certains phénomènes deviennent négligeables. Les équations se découplent donnant alors naissance à des modèles plus simples. Parmi ces modèles, nous citons : le modèle électrostatique, électrocinétique, magnétostatique et magnétodynamique (figure II.4) **[38]**.

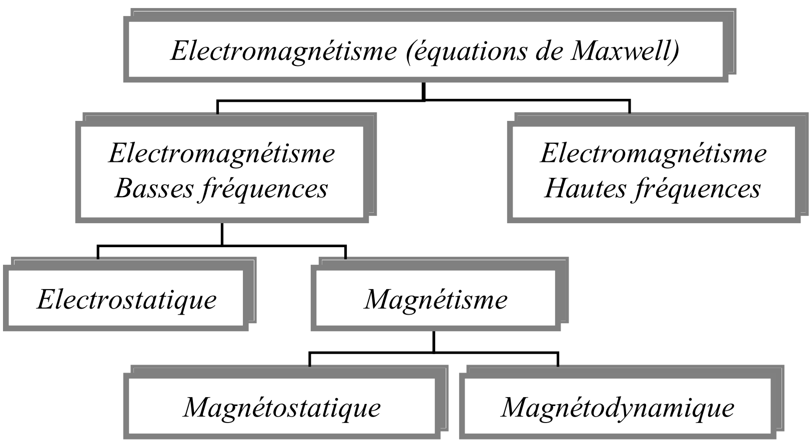

Figure II.4 : Diagramme divisionnaire de l'électromagnétisme et adaptation des équations de maxwell aux situations physiques correspondantes.

Ces modèles peuvent être formulés en introduisant des variables autres que les champs physiques. On parle alors de formulation en terme de potentiels scalaires ou vecteurs. La notation du potentiel est très intéressante car elle permet de rendre implicite une des équations à résoudre. En effet, un champ physique est relié au potentiel par une opération de dérivation ou d'intégration **[17]**. On se contentera, dans ce qui suit, de présenter les modèles magnétostatique et magnétodynamique.

II.10.1 Potentiel vecteur magnétique

Le vecteur densité de flux magnétique peut être dérivé d'un potentiel magnétique vecteur A :

$$div\vec{B} = 0 \Rightarrow \exists\vec{A} / \vec{B} = r\vec{o}t\vec{A} \tag{II.26}$$

II.10.2 Potentiel scalaire électrique

L'équation $r\vec{o}t\,\vec{E} = 0$ permet de déduire qu'il existe un potentiel scalaire V tel que :

$$\vec{E} = -gra\vec{d}\,V \tag{II.27}$$

II.10.3 Formulation

Lorsqu'on s'intéresse aux performances électriques et mécaniques dans les machines à induction, un modèle simplifié en 2D est tout indiqué. Il consiste à supposer que la longueur de la machine est importante, de sorte que l'on puisse considérer que le champ magnétique est situé dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation de la machine. Dans ces conditions, les courants imposés dans l'inducteur et ceux induits dans les milieux conducteurs sont dirigés parallèlement à cet axe. On peut choisir alors un potentiel vecteur magnétique A n'ayant qu'une seule composante suivant la direction axiale. Ce dernier est de la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A(x,y) \end{pmatrix} \tag{II.28}$$

La densité de courant, imposée au stator, est donc de la forme :

$$J_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J_s(x,y) \end{pmatrix} \tag{II.29}$$

Le potentiel vecteur magnétique sous la forme (II.28) vérifie implicitement la jauge de Coulomb. D'où l'induction et le champ magnétique dans le plan (x,y) :

$$B = \begin{pmatrix} +\dfrac{\partial A}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial A}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} +\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial A}{\partial y} \\ -\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial A}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{II.30}$$

II.10.4 Modèle magnétostatique

Lorsque les phénomènes étudiés sont indépendants du temps, les dérivées temporelles dans les équations de Maxwell s'annulent et les grandeurs électriques et magnétiques sont découplées. Dans ce cas, l'étude des problèmes magnétiques fait l'objet de la magnétostatique **[1, 13]**. Soit les équations :

$$r\vec{o}t\,\vec{H} = \vec{J}$$

$$div\,\vec{B} = 0$$

La combinaison de ces deux équations avec la loi du milieu (II.6) donne :

$$\Delta\,\vec{A} = -\mu\,\vec{J}_s \tag{II.31}$$

Dans le cas d'un problème magnétostatique 2D cartésien, l'équation (II.31) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\,\frac{\partial A}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\,\frac{\partial A}{\partial y}\right) = J_s \tag{II.32}$$

II.10.5 Modèle magnétodynamique

Ce modèle s'applique aux dispositifs électromagnétiques dans lesquels les sources de courant ou de tension varient dans le temps. Le terme qui représente la variation temporelle du vecteur induction magnétique est non nul, ainsi, les champs électrique et magnétique sont alors couplés par la présence des courants de Foucault.

L'utilisation de ce modèle est très répandue dans l'étude des machines électriques, des dispositifs de chauffage par induction, des transformateurs…etc.

En se basant sur les équations de Maxwell, nous pouvons formuler l'équation qui décrit l'évolution spatio-temporelle des phénomènes électromagnétiques.

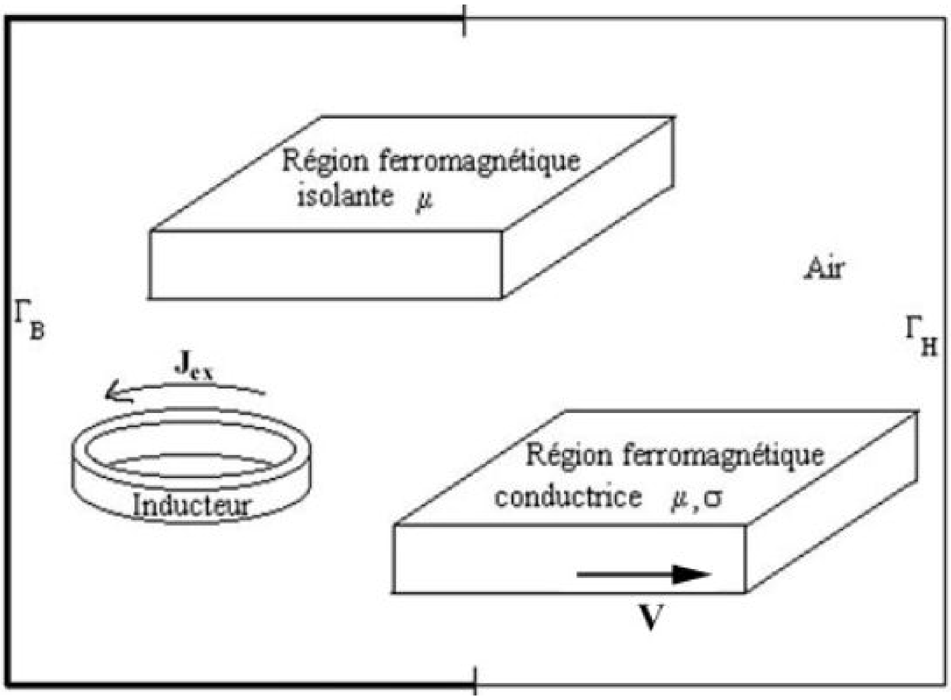

Figure II.5 : Problème magnétodynamique type.

III.10.5.1 Equation magnétodynamique transitoire

L'équation magnétodynamique transitoire en terme du potentiel magnétique vecteur $\vec{A}$ est donnée par la relation :

$$r\vec{o}t\left(\frac{1}{\mu}\left(r\vec{o}t\ \vec{A}\right)\right)+\sigma\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=-\sigma\ gra\vec{d}V \qquad \text{(II.33)}$$

Avec : $\vec{J}_s = -\sigma\, grad\vec{V}$, l'équation précédente s'écrit :

$$r\vec{o}t\left(\frac{1}{\mu}\left(r\vec{o}t\,\vec{A}\right)\right)+\sigma\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=-\vec{J}_s \tag{II.34}$$

Dans le cas d'un problème magnétodynamique 2D cartésien, l'équation (III.34) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)=-\sigma\left(grad\vec{V}+\frac{\partial A_z}{\partial t}\right) \tag{II.35}$$

II.10.5.2 Equation magnétodynamique harmonique

Ce modèle s'applique aux dispositifs électromagnétiques dans lesquels les sources de courant (ou les grandeurs électromagnétiques) sont en régime permanent harmonique. La dérivée temporelle est substituée par le terme $j\omega$:

$$r\vec{o}t\left(\frac{1}{\mu}\left(r\vec{o}t\,\vec{A}\right)\right)+\sigma\, j\omega\vec{A}=-\vec{J}_s \tag{II.36}$$

En 2D cartésien :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)=-\sigma\left(grad\vec{V}+j\omega A_z\right) \tag{II.37}$$

Le tableau ci-dessous synthétise quelques cas particuliers intéressants dans la pratique, il fait part des équations bidimensionnelles du champ A :

Type d'équation	Equation
Laplace	$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)=0$
Poisson	$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)=-J_s$
Diffusion	$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)=\sigma\frac{\partial A_z}{\partial t}-J_s$

Figure II.6 : Equations bidimensionnelles du champ A

II.11 Puissance électromagnétique :

Dans l'approximation des états quasi stationnaires, on peut écrire les équations de Maxwell sous la forme suivante :

$$\begin{cases} r\vec{o}t\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ r\vec{o}t\,\vec{H} = \vec{J} + \sigma\left(\vec{E} + v \wedge \vec{B}\right) \end{cases} \tag{II.38}$$

Multiplions la première équation par H et la seconde par E. Après soustraction terme à terme, il vient :

$$div\left(\vec{E} \wedge \vec{H}\right) + \vec{E}.\vec{J} + \sigma.\vec{E}.\left(\vec{E} + v \wedge \vec{B}\right) + \vec{H}.\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{II.39}$$

On intègre cette équation sur un volume Ω délimité par une surface fermée Γ :

$$\oiint_{\Gamma} \left(\vec{E} \wedge \vec{H}\right) n\, d\Gamma + \iiint_{\Omega} \vec{E}.\vec{J}\, d\Omega + \iiint_{\Omega} \sigma.\vec{E}.\vec{E}\, d\Omega + \oiiint_{\Omega} \sigma.\vec{E}\left(v \wedge \vec{B}\right) d\Omega + \oiiint_{\Omega} \vec{H}.\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\Omega = 0$$

Cette équation représente le bilan de puissance avec le vecteur de Poynting sur le volume Ω. La signification de chaque terme est la suivante :

- $\oiint_{\Gamma} \left(\vec{E} \wedge \vec{H}\right) n\, d\Gamma$: Flux du vecteur de Poynting. Représente la puissance que le volume Ω échange avec l'extérieur.
- $\iiint_{\Omega} \vec{E}.\vec{J}\, d\Omega$: Représente la puissance émise par la source dans le volume Ω.
- $\oiiint_{\Omega} \sigma.\vec{E}.\vec{E}\, d\Omega$: Représente la puissance électromagnétique induite dans le volume Ω et dissipée par effet Joule.
- $\oiiint_{\Omega} \sigma.\vec{E}\left(v \wedge \vec{B}\right) d\Omega$: Représente la puissance électromagnétique induite dans le volume Ω et transformée en énergie mécanique.
- $\oiiint_{\Omega} \vec{H}.\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\Omega$: Représente la puissance électromagnétique emmagasinée dans le volume Ω.

II.12 Introduction à la résolution des modèles électromagnétiques

L'étude de tout système physique nécessite une modélisation. Celle-ci nous permet de simuler le comportement de ce système face à différentes sollicitations et d'appréhender ainsi les mécanismes régissant son fonctionnement **[94]**. Une telle modélisation est généralement représentée par des équations aux dérivées partielles sur un domaine géométrique avec des conditions aux limites sur les frontières du domaine. Une grande variété de méthodes peut être utilisée en vue de résoudre ces équations traduisant les phénomènes physiques rencontrés par les communautés scientifique et industrielle : méthodes analytiques, numériques, analogiques et graphiques. Le choix d'une méthode de résolution est intimement lié à la géométrie et aux caractéristiques de la structure considérée **[12]**.

Dans le cas des milieux de géométrie simple et à comportement linéaire, une solution analytique aux équations aux dérivées partielles est obtenue. Cependant, en électromagnétisme, le traitement des équations par des méthodes analytiques s'avère très difficile, voir impossible, dès que la complexité de la géométrie accroît et que certains matériaux présentent des caractéristiques non linéaires. De plus, l'évolution fulgurante de la technologie confère davantage de complexité aux systèmes électromagnétiques. Ainsi, dans ces cas là, et en particulier celui des machines électriques, il faut faire appel à des méthodes d'approximation numériques **[50, 52]**.

De nos jours, la modélisation numérique est devenue un enjeu scientifique et technologique, faisant que les méthodes numériques de résolution deviennent peu à peu indispensables pour étudier les dispositifs électrotechniques et spécialement les machines électriques **[55]**. Ainsi, en ingénierie, la simulation numérique est un moyen efficace et économique, couramment utilisé pour faire des études préliminaires et /ou comparatives, tant au stade du développement (conception), qu'au cours du fonctionnement normal des systèmes dans le domaine de la mécanique au sens large (mécanique du solide et des matériaux ou mécanique des fluides), la thermique, l'électromagnétisme,…etc. **[65]**.

Les méthodes de résolution numériques sont toutes fondées sur un découpage du système à modéliser en blocs élémentaires. Elles consistent à ramener la résolution d'une équation aux dérivées partielles dans le domaine d'étude, compte tenu des conditions aux limites, à celle d'un système d'équations algébriques dont la solution conduit à la distribution des champs (électromagnétique : potentiel magnétique vecteur, thermique : température, mécanique : vitesse d'écoulement). L'objectif est donc de remplacer le modèle décrit dans un espace continu par un modèle discret équivalent. Pour cela, on découpe le domaine de résolution en éléments géométriques simples : c'est le maillage. Ensuite, on applique le jeu d'équations à résoudre à chacun de ces éléments simples. L'assemblage de toutes ces équations sur l'ensemble des éléments conduit à un système d'équations linéaire à résoudre. On détermine alors la solution pour un nombre fini d'éléments, puis sur tout le domaine par interpolation **[61, 80]**.

II.13 Méthodes de résolution analytiques

Celles-ci donnent une solution exacte et précise mais qui n'est pas facile à trouver ou elle n'est pas du tout évidente vu la complexité du problème. Les modèles analytiques trouvent leur grand intérêt dans l'étude des phénomènes avec mouvement (dynamiques) et à effet de peau important dans les induits (charges). Ils apportent aussi des avantages importants en terme de coût de calcul, d'espace mémoire de volume d'informations et de facilité d'exploitation. Les méthodes analytiques trouvent aussi leur grand intérêt lorsqu'elles sont couplées à des méthodes numériques. Parmi les principales méthodes analytiques de résolution des équations aux dérivées partielles **[7, 61, 76]**:

- La Méthode de Séparation des Variables (MSV).
- La Méthode Intégrale (MI).

II.14 Méthodes de résolution numériques

L'utilisation des méthodes numériques de discrétisation consiste à ramener la résolution des équations aux dérivées partielles dans le domaine d'étude, compte tenu des conditions aux limites, à celle d'un système d'équations algébriques dont la solution donne les valeurs et les distributions des grandeurs recherchées. Des méthodes numériques, nous citons **[7, 40,61]** :

- Méthode des Différences Finies (MDF)
- Méthode d'Intégrale de Frontière (MIF)
- Méthode des Volumes Finis (MVF)
- Méthode des Eléments Finis (MEF)

II.15 La méthode des éléments finis (MEF)

II.15.1 Présentation

La Méthode des Eléments Finis fut développée et appliquée initialement en génie civil et en mécanique, elle n'a trouvé son application en électromagnétisme que vers les années 1970 **[24].** C'est une méthode numérique de résolution des équations au dérivées partielles (EDP) régissant les phénomènes physiques des milieux continus et leurs conditions aux limites. C'est une méthode générale qui s'applique à de nombreux problèmes rencontrés dans la pratique : électrique, thermique, mécanique…etc., linéaires ou non linéaires, définies dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions. Son principe consiste à remplacer le problème continu par un problème discret équivalent en utilisant une approximation simple de l'inconnue sur des sous domaines pour transformer les systèmes d'équations aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques dont la résolution fournit une solution approchée du problème. La MEF ne s'applique pas directement aux EDP, mais à une formulation intégrale qui est équivalente au problème à résoudre **[60, 61]**.

II.15.2 Démarches de la méthode des éléments finis

Pour une analyse par éléments finis, tout un travail de préparation et de finalisation doit être effectué. C'est ce que nous allons décrire dans les étapes qui suivent.

II.15.2.1 L'équation différentielle

La première étape dans la modélisation de tout dispositif électrotechnique consiste à écrire les équations aux dérivées partielles décrivant les phénomènes physiques s'y déroulant, en y associant les conditions aux limites qui décrivent les interactions entre le système étudié et l'extérieur.

II.15.2.2 De l'équation différentielle à l'équation intégrale

La MEF discrétise une formulation intégrale pour conduire à un système algébrique. Pour passer d'un système d'EDP à une formulation intégrale, nous utilisons l'une des méthodes suivantes **[60]**:

II.15.2.2.1 Formulation variationnelle :

Son utilisation nécessite la connaissance de la fonctionnelle d'énergie du système physique à étudier, elle s'exprime par :

$$f(A) = \oint_{\Omega} L.d\Omega \qquad (II.41)$$

$L = w_c - w_p$: Lagrangien exprimé par la différence entre l'énergie cinétique et potentielle.

La solution est obtenue en minimisant la fonctionnelle $f(A)$. Le principe de cette méthode consiste à trouver une fonctionnelle à partir de l'EDP telle que le minimum de celle-ci corresponde à la solution de l'EDP sous les conditions aux limites. La minimisation est effectuée par le principe de Rayleigh-Ritz consistant à écrire :

$$\frac{\partial f(A)}{\partial A_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f(A)}{\partial A_1} = \frac{\partial f(A)}{\partial A_2} = ...\frac{\partial f(A)}{\partial A_n} = 0 \qquad (II.42)$$

n : Nombre de nœuds du domaine d'étude.

A_i : Inconnue du nœud i du domaine.

II.15.2.2.2 Résidus pondérés

Le principe de la méthode des résidus pondérés consiste à chercher la solution approchée du problème en partant directement des EDP exprimées sous forme générale par :

$$L(A) = f \qquad \text{Sur un domaine } \Omega \qquad (II.43)$$

$$G(A) = g \qquad \text{Sur la frontière } \Gamma \qquad (II.44)$$

La méthode des résidus pondérés consiste à déterminer les valeurs du potentiel vecteur magnétique qui permettent d'annuler l'intégrale du résidu. L'expression de l'intégrale du résidu est donnée par :

$$\oint_{\Omega} \alpha_i . R_i . d\Omega \qquad \text{(II.45)}$$

$$R_i = L(A) - f \qquad \text{(II.46)}$$

R_i : Résidu de l'approximation.

f : Fonction définie sur le domaine Ω.

α_i : Fonction de pondération.

La méthode des résidus pondérés fournit selon le choix des fonctions de pondération tout un ensemble de formulations intégrales : collocation par points, collocation par sous domaines, méthode des moments et méthode de Galerkine.

II.15.2.3 Approximation par éléments finis

L'approximation par éléments finis consiste à :

- Discrétiser le domaine d'étude en sous domaines.
- Définir une fonction approchée différente sur chaque sous-domaine (approximation nodale).

II.15.2.3.1 Discrétisation du domaine

Pour résoudre un problème avec la méthode des éléments finis, il faut découper le domaine d'étude en éléments finis, tout en respectant les interfaces de géométrie. Cette procédure est appelée maillage. Parmi les types d'éléments utilisés dans la majorité des cas bidimensionnels, on rencontre les éléments triangulaires, les éléments rectangulaires et quadrilatéraux **[33]**. Dans une configuration triangulaire, chaque élément est déterminé par trois points qui sont appelés nœuds. Au total, on produit N_e éléments et N_n nœuds. Dans les zones où des résultats plus précis sont nécessaires, il faut diminuer la taille des éléments, chose qui rend le temps de résolution plus important. En plus, on doit limiter la région R en introduisant la surface S suffisamment éloignée avec des conditions de Dirichlet pour pouvoir simuler l'infini. La procédure du maillage est intuitivement claire, mais à programmer, elle est passablement compliquée. Les logiciels pour MEF sont capables de faire le maillage automatiquement **[77]**.

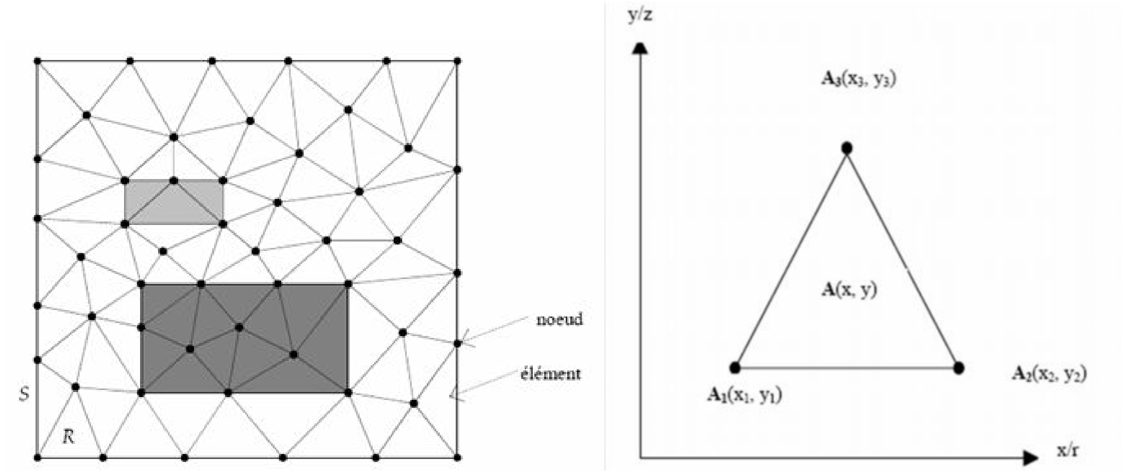

Figure II.7 : Découpage en éléments finis du domaine Ω et repérage d'un élément fini

II.15.2.3.2 Approximation nodale

Dans son principe, la MEF se présente comme une méthode de discrétisation où la fonction inconnue (U) définie sur un domaine (Ω) de la frontière (Γ) est calculée en un nombre fini de points appelés nœuds du problème. La fonction inconnue, en l'occurrence le vecteur potentiel, dans un élément du découpage peut être approchée par des fonctions d'approximation dites fonctions de forme, dont l'expression varie d'un type d'élément à un autre. Ces fonctions d'approximation doivent assurer la continuité du potentiel aux interfaces des éléments. La majorité des formes d'approximation du potentiel dans un élément sont des approximations polynomiales. Pour les éléments triangulaires :

$$A_z^e(x, y) = a + bx + cy \tag{II.47}$$

Les constantes a, b, c sont à déterminer. Le potentiel A_z^e est généralement non nul dans l'élément et nul ailleurs. La valeur approchée du potentiel dans un point du domaine (Ω) de résolution est donnée par :

$$A(X,Y) = \sum_{e=1}^{ne} A_z^e(X,Y) \tag{II.48}$$

e : Numéro de l'élément.

ne : Nombre total des éléments du domaine (Ω).

$$A_z^e = a + bx + cy = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i A_i \tag{II.49}$$

A_z^e : Fonction d'approximation.

A_i : Inconnue au nœud i.

α_i : Coefficient inconnu.

II.15.2.4. Formulation matricielle du système d'équations

Suite à la formulation intégrale et à la discrétisation, nous obtenons un système matriciel d'équations dont les inconnues sont les valeurs du potentiel vecteur dans les nœuds. La résolution de ce dernier constituera alors la dernière étape dans la méthode des éléments finis. Après l'assemblage, le système d'équations à résoudre prendra la forme suivante :

$$[K][A]+[F]=0 \tag{II.50}$$

$[A]$Est un vecteur dont les composantes sont les inconnues du problème représentant les valeurs nodales du potentiel magnétique vecteur, $[K]$est une matrice symétrique dont les composantes sont fonction des propriétés magnétiques des matériaux et de la géométrie du maillage, $[F]$est un vecteur fonction des sources du champ.

Ce système est linéaire lorsque la matrice $[K]$ ne dépend pas de$[A]$. La précision de la MEF est limitée par les dimensions du système que nous voulons résoudre sur un ordinateur. A l'heure actuelle et avec l'évolution des ordinateurs, nous pouvons résoudre des systèmes de quelques dizaines de milliers d'équations.

L'algorithme de la méthode des éléments finis est présenté ci-dessous.

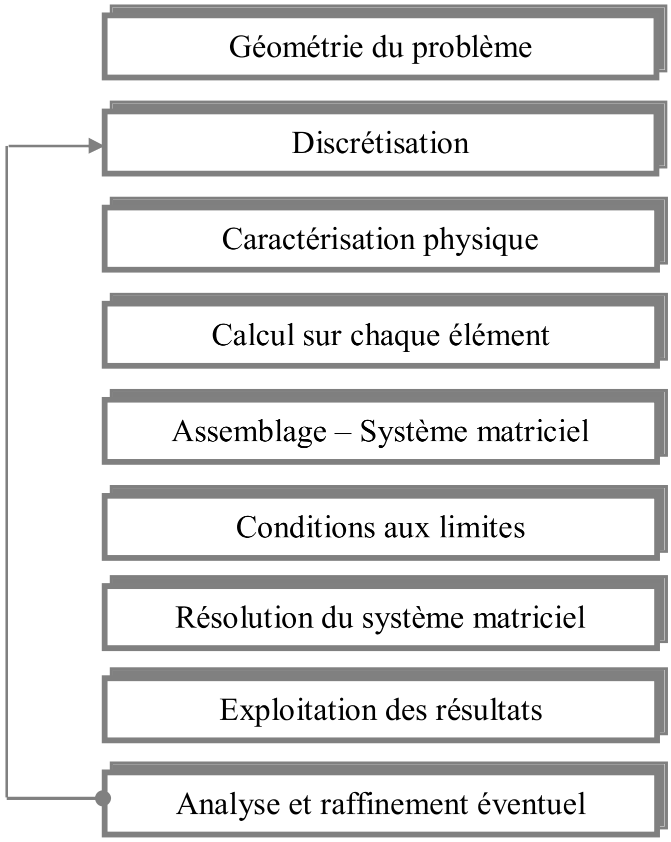

Figure II.9 : Algorithme de la méthode des éléments finis

II.15.3 Méthodes de résolution des systèmes algébriques

La modélisation des problèmes que l'on rencontre en pratique conduit, après une étape de discrétisation, à la résolution de systèmes d'équations en dimension finie, ce qui est effectivement le cas de plusieurs méthodes numériques à savoir la méthode des éléments finis et la méthode des différences finies **[82]**. La mise en œuvre de la MEF nécessite l'utilisation de méthodes numériques variées pour construire les matrices élémentaires et résoudre les systèmes d'équations algébriques.

Un système linéaire est un ensemble d'équations de la forme :

$$\left.\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \cdots & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \cdots & a_{2n}x_2 & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = \vdots \\ a_{n11}x_1 & a_{n2}x_2 & \ldots & a_{nn}x_n & = b_n \end{array}\right\} \tag{II.51}$$

Où :

$x_i (i = 1,2,...,n)$ Sont les inconnues, a_{ij} des nombres réels.

Le système peut être transcrit sous forme matricielle :

$$A.x = b \tag{II.52}$$

$A = \lfloor a_{ij} \rfloor$, $b = \lfloor b_i \rfloor$, $x = \lfloor x_i \rfloor$

Le système matriciel précédent est obtenu suite à la formulation intégrale et à la discrétisation. Les méthodes de résolution des systèmes linéaires peuvent être classées en deux catégories **[18, 47, 82]** :

- Les méthodes directes qui conduisent à la solution en un nombre fini d'opérations. Nous citerons : la méthode de Crammer, la méthode de Cholesky.
- Les méthodes itératives qui conduisent à la solution par une succession d'améliorations d'une solution approchée. Le nombre d'itérations est difficile à prévoir, il est dépendant de la structure de la matrice. Nous citons : la méthode de Jacobi, la méthode de Gauss-Seidel, la méthode de relaxation.

Les méthodes directes sont commodes pour les systèmes denses d'ordre peu élevé. Les méthodes itératives sont mieux adaptées aux matrices d'ordre élevé comportant de nombreux éléments nuls.

II.15.4 Logiciel de simulation

Les modèles mathématiques et numériques constituent les aspects théoriques du problème et pour être exploitables de manière simple et efficace, ils doivent être intégrés dans des logiciels de conception par ordinateur (CAO) permettant d'alléger la description des données et d'exploiter les résultats sous forme de courbes et de dessins. Un exemple concret illustre ce qui précède. Un programme de calcul des champs magnétiques dans une machine par la méthode des éléments finis devient logiciel CAO lorsqu'il est accompagné de programmes permettant une introduction simple de géométrie, un maillage automatique et une interprétation exacte de ces derniers **[52, 55]**. Ainsi, la résolution des équations électromagnétiques en utilisant la méthode des éléments finis fait intervenir trois blocs principaux : Bloc d'entrée, bloc de résolution et bloc de sortie.

- Bloc d'entrée (Préprocesseur) :

Le Préprocesseur permet de décrire, de manière interactive, la géométrie et les propriétés physiques des objets constituant le dispositif étudié, et de procéder au maillage du domaine de résolution.

- Le bloc de résolution (Processeur)

Le processeur détermine les valeurs des champs (A) aux nœuds du maillage. Au niveau de ce module, l'utilisateur peut intervenir pour définir la précision souhaitée dans la détermination de la solution ou l'intervalle et le pas de temps de calcul des problèmes transitoires.

- Le bloc de sortie (Postprocesseur)

A partir des valeurs nodales des champs fournis par le processeur, le postprocesseur permet de représenter une grandeur sous forme de lignes équivaleurs (équipotentielles A), sous forme de variation le long d'un chemin (variation radiale de la densité de puissance), sous forme de variation temporelle (montée en température)…etc. Ce module offre également la possibilité de calculer les grandeurs globales.

Figure II.10 : Organigramme de code de calcul

II.16 Formulation éléments finis des équations électromagnétiques

II.16.1 Modèle magnétodynamique cartésien

On s'intéressera de façon particulière à la formulation éléments finis de l'équation magnétodynamique en régime harmonique qui s'écrit comme suit :

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\right]+j\omega\sigma A_z=J_{sz} \qquad \text{(II.53)}$$

Afin de remédier à une multiplicité de solutions (de vecteurs A) que nous rencontrons dans le cas général, une condition d'unicité appelée condition de jauge est utilisée. On peut utiliser la jauge de Coulomb $divA=0$ qui implique la continuité de la composante normale du potentiel vecteur A **[79]**. L'application de la méthode de Galerkine donne :

$$\iint_{\Omega} \alpha i \left[\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] + j\omega\sigma A_z - J_{sz} \right] dxdy = 0 \qquad \text{(II.54)}$$

$$\iint_{\Omega} \alpha i \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] dxdy + j\omega \iint_{\Omega} \alpha i \sigma A_z dxdy = \iint_{\Omega} J_{sz} \alpha i \, dxdy \qquad \text{(II.55)}$$

En appliquant le théorème de Green à l'équation précédente, et prenant compte de la condition aux limites de type Dirichlet homogène, on aura :

$$\iint_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial \alpha i}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha i}{\partial y} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) dxdy + j\omega \iint_{\Omega} \alpha i \, \sigma A_z dxdy = \iint_{\Omega} \alpha i \, J_{sz} \qquad \text{(II.56)}$$

Cette équation peut également prendre la forme suivante :

$$\iint_{\Omega} \nu \, gr\vec{a}d \, \alpha i \, gr\vec{a}d \, A_z \, dxdy + j\omega \iint_{\Omega} \alpha i \, \sigma A_z \, dxdy - \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \alpha_i A_z d\Gamma \int_{\Gamma_{ME}} \alpha_i H_t d\Gamma_{ME} = \iint_{\Omega} \alpha i \, J_{sz} \, dxdy \qquad \text{(II.57)}$$

Les termes $\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \alpha_i A_z d\Gamma$ et $\int_{\Gamma_{ME}} \alpha_i A_z d\Gamma_{ME}$ représentent respectivement les contributions de la condition aux limites imposée sur les frontières externes du domaine d'étude, ainsi que celle du macro-élément.

En prenant : $A_z = \sum_{j=1}^{n} \alpha j \, Aj$ et en remplaçant dans l'équation (II.57), on obtient :

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\iint_{\Omega} \nu \, gr\vec{a}d \, \alpha i \, gr\vec{a}d \, \alpha J \, dxdy \right) Aj + j\omega \sum_{j=1}^{n} \left(\iint_{\Omega} \sigma \, \alpha i \, \alpha j \, dxdy \right) Aj + \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \alpha_i \alpha_j A_j d\Gamma \right)$$
$$+ \sum_{j=1}^{nt} \left(\int_{\Gamma_{ME}} \alpha_i \alpha_j \frac{\partial A_j}{\partial n} d\Gamma \right) = \iint_{\Omega} \alpha i \, J_{sz} dxdy \qquad \text{(II.58)}$$

Le terme $\int_{\Gamma_{ME}} \alpha_i \alpha_j \frac{\partial A_j}{\partial n} d\Gamma_{ME} = S_{ij}^{ME}$ représente le terme général de la matrice du macro-élément.

Finalement, le système matriciel à résoudre est donné comme suit :

$$[K].[A]+ j\,\omega[M].[A]=[F] \qquad \text{(II.59)}$$

Avec :

$Kij = \iint_{\Omega} \nu\, gr\vec{a}d\, \alpha i\, gr\vec{a}d\, \alpha j\, dxdy + S_{ij}^{ME}$, éléments de la matrice $[K]$

$Mij = \iint_{\Omega} \sigma\, \alpha i\, \alpha j\, dxdy$, éléments de la matrice $[M]$

$Fi = \iint_{\Omega} \alpha i\, J_{sz} dxdy$, éléments de la matrice $[F]$

II.16.2 Modèle magnétostatique cartésien

Soit un domaine Ω à l'intérieur duquel le potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$ est régi par l'équation suivante :

$$r\vec{o}t\left(\nu\, r\vec{o}t\vec{A}\right)=\vec{J}_s \qquad \text{(II.60)}$$

Dans le cas 2D du problème défini par l'équation (II.60), les grandeurs $\vec{A}$ et $\vec{J}_s$ s'écrivent : $\vec{A}=(0{,}0, A_z)$ et $\vec{J}_s=(0{,}0, J_{sz})$. En empruntant la même démarche que celle du problème magnétodynamique, nous aboutissons au système matriciel final :

$$[K].[A]=[F] \qquad \text{(II.61)}$$

Avec :

$Kij = \iint_{\Omega} \nu\, gra\vec{d}\,(\alpha i) gra\vec{d}\,(\alpha j) dxdy + S_{ij}^{ME}$

$Fi = \iint_{\Omega} \alpha i\, J_{sz} dxdy$

$[A]=[A_1, A_2, ..., A_n]$: Vecteur des valeurs de A aux nœuds du maillage.

II.17 Conclusion

La modélisation en électromagnétisme est basée sur les équations de Maxwell, c'est pourquoi nous nous sommes attelés à exposer un rappel des notions relatives à l'électromagnétisme. Par la suite, une formulation mathématique des phénomènes électromagnétiques présents dans les dispositifs électromagnétiques, utilisant principalement le potentiel magnétique vecteur, a été présentée. Nous nous sommes intéressés de façon particulière au modèle magnétodynamique harmonique appliqué aux machines à induction. Ces modèles feront l'objet de nos travaux.

Les phénomènes physiques qui caractérisent les systèmes et problèmes électrotechniques sont décrits par des équations aux dérivées partielles. Une grande variété de méthodes peut être utilisée pour la résolution de ces équations. Nous avons présenté dans ce chapitre les méthodes analytiques et les méthodes numériques qui se prêtent mieux à la résolution des problèmes vu les avantages qu'elles présentent. Nous nous sommes principalement intéressés à la méthode des éléments finis que nous utiliserons dans nos travaux.

Maintenant que nous avons présenté la machine asynchrone, les différents modèles d'équations électromagnétiques régissant son fonctionnement ainsi que les différents outils mathématiques nécessaires à leur élaboration, l'objectif des chapitres qui suivent est de présenter un modèle couplé magnétique et électrique de la machine asynchrone en régime magnétodynamique harmonique, puis un modèle couplé magnétique-électrique-mécanique en régime magnétodynamique transitoire.

CHAPITRE 3

Modélisation couplée électrique-magnétique de la Machine Asynchrone en régime harmonique

III.1 Introduction

La plupart des dispositifs électrotechniques sont le siège de plusieurs phénomènes (magnétiques, électriques, mécaniques, thermiques…etc.) qui interagissent entre eux. Par exemple, l'alimentation en tension des régions conductrices, engendre un couplage des équations électriques et magnétiques. Par conséquent, une modélisation fine de ces systèmes nécessite le développement de modèles qui incluent le plus possible ces phénomènes et leurs couplages **[17]**. Pour résoudre le problème du couplage entre les équations du champ et du circuit électrique, plusieurs méthodes ont été proposées :

- La première méthode consiste à représenter la partie magnétique par un schéma équivalent dont les éléments sont obtenus en résolvant les équations magnétique linéarisées autour d'un point de fonctionnement. Un programme de simulation des circuits permet alors de modéliser l'ensemble. Une telle méthode simplifie le problème mais son domaine d'applications reste limité. En effet, lorsque l'interaction entre les circuits magnétique et électrique devient importante, cette technique perd de sa fiabilité car les équations magnétiques se découplent des équations électriques **[30].**
- La méthode intégro-différentielle consiste à éliminer la densité de courant entre les équations magnétiques et électriques. Cela revient à exprimer le courant en fonction d'une intégrale de tension. L'inconvénient de la méthode réside dans le fait qu'elle rend la matrice à inverser moins creuse, ce qui conduit à un temps de calcul important **[16, 17]**.
- La résolution simultanée des équations magnétiques du champ et les équations électrique du courant. Cette méthode est la mieux adaptée pour une résolution éléments finis, puisque le caractère creux de la matrice du système est conservé, ce qui donne des résultats satisfaisants en terme de temps de calcul **[17, 31]**.

La meilleure stratégie pour la modélisation numérique d'un ensemble comprenant un circuit électrique et un circuit magnétique, est celle qui consiste à simuler le système électromagnétique par un modèle où les équations électriques et magnétiques sont considérées simultanément. Pour effectuer une telle modélisation, on est amenés à résoudre un système d'équations aux dérivées partielles couplé à un autre système d'équations. En ayant recours à une discrétisation spatiale de type éléments finis, et une discrétisation temporelle, on aboutit à un système d'équations où les inconnues sont les courants dans le circuit électriques et les valeurs nodales du potentiel vecteur aux nœuds du maillage **[30]**.

III.2 Equations de liaisons Electriques-Magnétiques

Dans la plupart des cas rencontrés dans l'industrie, l'enroulement statorique des machines électriques est soumis à une tension simple ou composée, selon le type de connexion. La tension d'alimentation représente par conséquent la source du champ électromagnétique **[68]**. Ainsi, pour connaître la distribution du champ magnétique dans un domaine étudié, il est nécessaire d'accéder à la tension ou bien au courant. De ce qui précède, il apparaît clairement que l'analyse des dispositifs électrotechniques, en particulier les machines électriques, est souvent conditionnée par les sources d'alimentation (générateur de courant ou de tension) et les éléments du circuit électrique (résistance, inductance,…etc.) **[17]**. L'analyse des machines électriques est donc tributaire des sources d'alimentation des bobinages dont dépendent les grandeurs magnétiques. En plus du potentiel magnétique vecteur comme inconnue, le courant total traversant les circuits est aussi une inconnue qu'il est nécessaire de déterminer. Sur le plan physique, le couplage des grandeurs électriques et magnétiques est direct, c'est pourquoi, nous devons résoudre simultanément les équations du champ magnétique et du circuit électrique **[17, 25, 30, 68, 72, 73, 95]**.

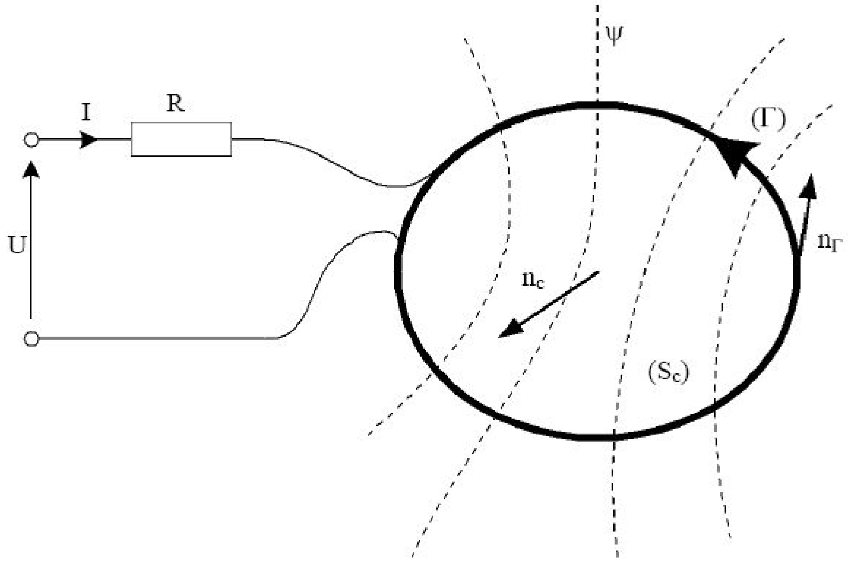

Figure III.1 : Configuration type d'un circuit électrique

Le circuit est constitué d'une résistance, celle des conducteurs du circuit, en série avec l'enroulement inducteur à l'origine du champ magnétique. Le comportement de l'inducteur est décrit par les équations électromagnétiques qui relient la densité de courant au potentiel vecteur magnétique.

Le comportement du circuit électrique est donné par :

$$U = R.I + \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{III.1}$$

Il existe une relation directe entre le courant I et la densité de courant J appliquée au problème électromagnétique :

$$I = \int_{conducteur} J.n.ds \tag{III.2}$$

De même, le flux magnétique s'exprime à partir du potentiel magnétique vecteur :

$$\psi = n_s . \iint_{S_c} B.n_c.ds = n_s . \oint_{\Gamma} A.n_{\Gamma}.dl \tag{III.3}$$

III.3 Couplage magnétique-électrique dans la machine asynchrone

Dans un modèle bidimensionnel couplé magnétique-électrique de la machine asynchrone, la structure électromagnétique est décrite par des équations à deux dimensions en tenant compte de deux types de conducteurs : massifs (barres du rotor) et filaires (bobinage du stator). Les équations du champ sont décrites dans le cadre de la formulation magnétodynamique avec la composante axiale du potentiel vecteur magnétique et le potentiel scalaire électrique. En 2D, ce dernier se réduit à une différence de potentiel aux bornes de chaque barre. Par la suite, il s'agit de réaliser le couplage du circuit d'alimentation avec la structure électromagnétique. En d'autres termes, coupler les équations des circuits électriques à celle du champ. Ce couplage est appliqué au bobinage statorique pour une alimentation en tension de la machine. Par la suite, il est étendu aux conducteurs massifs en utilisant la différence de potentiel aux bornes des barres et l'analyse du circuit de la cage rotorique.

III.3.1 Circuit électrique au stator

Pour une machine qui est supposée équilibrée, donc les trois phases du stator sont de constitution identique. Chaque phase est caractérisée par la résistance électrique de l'enroulement R_{ph}, une inductance L_{tete} et une force contre électromotrice E_i.

Le schéma électrique de la machine pour les trois phases couplées en étoile est donné par la figure suivante **[25, 93]**:

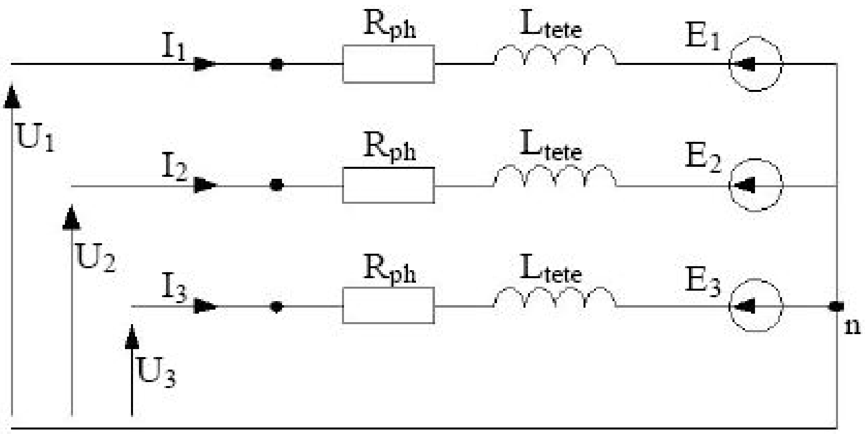

Figure III.2 : Schéma électrique du stator de la machine

Les équations électriques qui régissent ce circuit s'écrivent :

$$U_i = R_{ph} I_i + j\omega L_{tete} I_i + E_i \qquad \text{(III.4)}$$

La configuration d'un conducteur filaire au stator est illustrée sur le schéma suivant **[42]** :

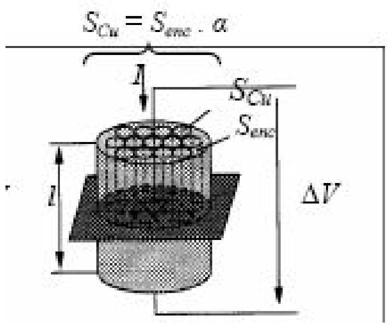

Figure III.2 : Fil conducteur situé dans une encoche statorique.

L'hypothèse relative au problème électromagnétique bidimensionnel nous permet de supposer que le gradient de potentiel V le long d'un conducteur (massif ou bobiné), de longueur l et de section radiale S_c est constant **[25, 68, 72, 73]**:

$$gradV = \frac{U_c}{l} n \qquad \text{(III.5)}$$

La densité de courant que supporte un conducteur dans le cas d'un régime harmonique est alors donnée par la relation :

$$J = -\sigma\left(gradV + j\,\omega\,A\right) = \sigma\frac{U_c}{l} - \sigma\, j\,\omega\,A \qquad \text{(III.6)}$$

III.3.2 Circuit électrique au rotor

Le schéma du circuit électrique à considérer au rotor est représenté par la figure (III.3) suivante **[4, 93]**:

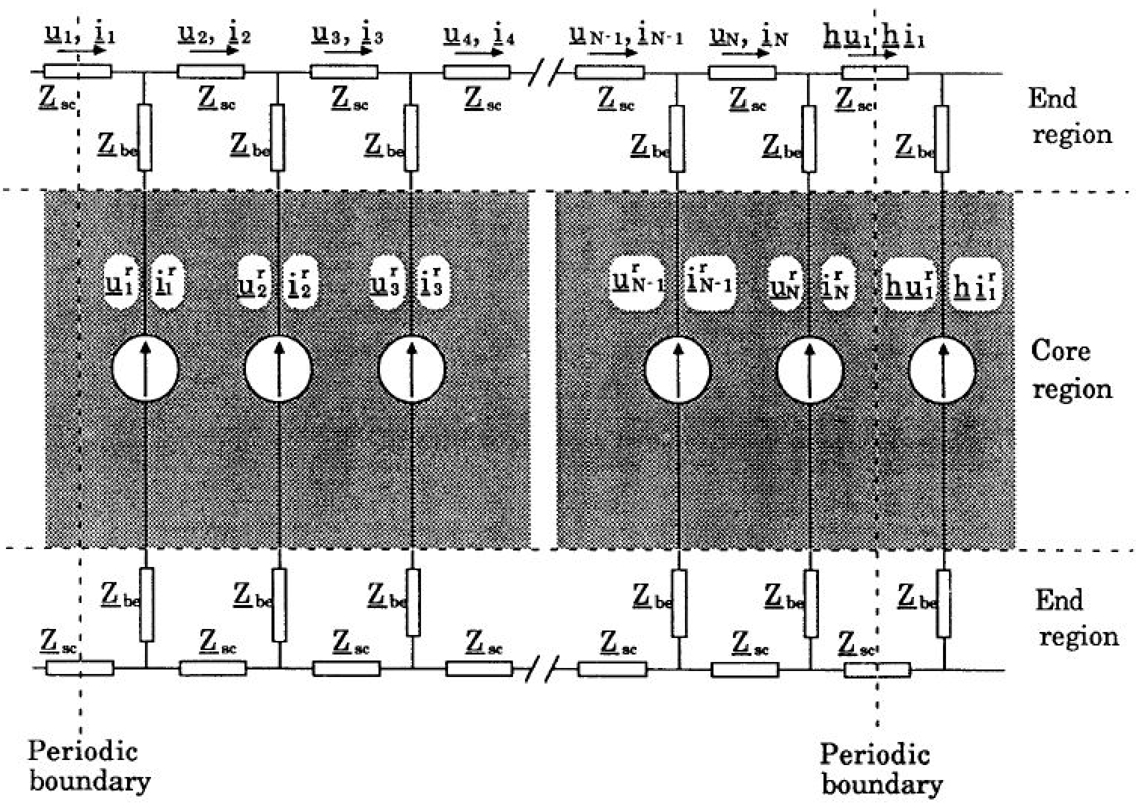

Figure III.3 : Circuit électrique correspondant au modèle du rotor à cage

Le rotor de la machine est constitué d'une cage d'écureuil simple représentée par le schéma précédent. La cage forme un circuit électrique fermé parcouru par des courants. E_i Représente la force électromotrice induite dans la barre i du rotor par les variations du champ magnétique, Z_b est l'impédance d'une barre, Z_{sc} l'impédance d'une portion d'anneau de court-circuit entre deux barres respectivement. La cage fermée porte N_b barres avec la prise en compte d'éventuelle symétrie par un coefficient h.

On suppose qu'aucun courant inter barre n'existe (isolation électrique entre les barres et les tôles magnétiques). La principale différence avec le stator réside dans le fait que ce circuit est totalement isolé électriquement. Cela signifie qu'un même décalage de tous les potentiels produira les mêmes courants dans les N_b barres et les anneaux de court-circuit. Les courants ne définissent donc pas l'état électrique du circuit de manière unique mais à un potentiel près. C'est pourquoi nous choisissons ici d'exprimer les équations en considérant les tensions aux bornes des barres comme les inconnues à déterminer.

III.4 Couplage magnétique-électrique en régime harmonique dans la machine asynchrone

L'utilisation du modèle magnétodynamique en régime harmonique s'avère très intéressante pour réduire le temps de calcul dans la modélisation par éléments finis des machines à induction.

III.4.1 Couplage des équations du champ et du circuit électrique au stator

On considère une configuration d'un conducteur filaire situé sur la partie active du circuit magnétique. La différence de potentiel induite dans une phase de l'enroulement statorique est donnée par l'équation **[4]** :

$$U = \int_{\Gamma} - gradV.dl = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{\sigma} J + \frac{\partial A}{\partial t} \right\} .dl \qquad \text{(III.7)}$$

L'utilisation de cette équation véhicule deux difficultés remarquables : Le potentiel vecteur magnétique ainsi que la densité de courant demeurent inconnus au niveau des têtes de bobines. D'autre part, la considération de cette équation fait que chaque conducteur d'une encoche statorique doit satisfaire l'équation :

$$\vec{rot}\left(\nu\,\vec{rot}\,\vec{A}\right)=\vec{J} \tag{III.8}$$

Ceci implique que chaque conducteur présentera son propre maillage éléments finis, ce qui engendre alors un maillage global compliqué qui rendrait la résolution difficile.

La densité de courant peut être exprimée en fonction du courant et des paramètres du bobinage comme suit :

$$J=\frac{N_{cn}I}{S_n}e_z \tag{III.9}$$

Le flux magnétique qui apparaît dans l'équation est la somme de deux composantes : flux embrassé par la région conductrice, donné par l'intégrale surfacique du potentiel magnétique vecteur sur un conducteur d'une phase statorique. L'autre composante correspond à l'effet des têtes de bobine.

Sur la lumière de ce qui précède, l'expression de la différence de potentiel d'une phase statorique est donnée par l'équation :

$$U=N_s\left\{\sum_{n=1}^{N1}\frac{l\,N_{cn}}{S_n}\int_{S_n}\frac{\partial A}{\partial t}dS-\sum_{n=1}^{N2}\frac{l\,N_{cn}}{S_n}\int_{S_n}\frac{\partial A}{\partial t}dS\right\}+RI+L_b\frac{dI}{dt} \tag{III.10}$$

Une forme plus compacte de l'équation est obtenue en introduisant la fonction β_n^s :

$$\beta_n^s(x,y)=\begin{cases}\dfrac{N_{cn}}{S_n} & si\,(x,y)\ appartient\ aux\ conducteurs\ aller\\ -\dfrac{N_{cn}}{S_n} & si\,(x,y)\ appartient\ aux\ conducteurs\ retour\\ 0 & ailleurs\end{cases} \tag{III.11}$$

Dans le cas du régime harmonique, nous écrivons :

$$j\,\omega\,\overline{A} \rightarrow \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$j\,\omega\,\bar{i}_n^{\,s} \rightarrow \frac{\partial I}{\partial t}$$

L'expression de la différence de potentiel devient :

$$\overline{u}_n^{\,s} = j\,\omega\,l\,N_s \int_{\Omega} \beta_n^s \left\{ \sum_{j=1}^{N_n} \overline{A}_j N_j \right\} d\Omega + \left(R_s + j\omega L_b\right) \bar{i}_n^{\,s} \qquad \text{(III.12)}$$

La forme matricielle de l'équation (III.12) est donnée par :

$$D^s \overline{A} - \frac{R_s + j\,\omega\,L_b}{j\,\omega\,l\,N_s} \bar{i}^{\,s} + \frac{1}{j\,\omega\,l\,N_s} \overline{u}^{\,s} = 0 \qquad \text{(III.13)}$$

Les éléments de la matrice D^s sont donnés par :

$$D_{ij}^s = -\int_{\Omega} \beta_i^s N_j \, d\Omega \qquad \text{(III.14)}$$

Pour des considérations liées au branchement étoile ou triangle du stator, une autre contrainte est ajoutée aux courants statoriques :

$$\sum_{i=1}^{m} i_i^s = 0 \qquad \text{(III.15)}$$

m est le nombre de phases. Nous distinguons alors $m-1$ courants statoriques indépendants. Si le vecteur colonne contenant $m-1$ courants statoriques indépendants est défini, la relation liant les deux courants est alors :

$$i^s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \\ -1 & -1 & -1 & . & . & . & -1 \end{bmatrix} i^{s'} = K^T i^{s'} \qquad \text{(III.16)}$$

La matrice K^T est de dimensions $(m \times m-1)$

De même, si V^s est la tension de ligne et u^s le vecteur colonne des différences de potentiel de l'enroulement statorique, la relation les liant est donnée par :

$$Ku^s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 & -1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & -1 \end{bmatrix} u^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & . & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix} V^s = QV^s \qquad \text{(III.17)}$$

La matrice Q est de dimensions $(m-1 \times m)$.

En multipliant l'équation (III.13) par K et en y portant les relations (III.16) et (III.17), nous obtenons le système final à résoudre au stator (avec un couplage étoile) **[4]**:

$$K\,D^s\,\overline{A} - \frac{R_s + j\,\omega\,L_b}{j\,\omega\,l\,N_s} KK^T i^{s'} + \frac{1}{j\,\omega\,l\,N_s} QV^s = 0 \qquad \text{(III.18)}$$

III.4.2 Couplage des équations du champ et du circuit électrique au rotor

La différence de potentiel induite dans la barre rotorique d'indice n est formulée comme suit **[4]**:

$$\overline{u}_n^r = R_r i_n^r + j\,s\,\omega\,R_r \int_\Omega \beta_n^r \sigma \left\{ \sum_{j=1}^{N_n} \overline{A}_j N_j \right\} d\Omega \qquad \text{(III.19)}$$

La fonction β est définie :

$$\beta_n^r(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ le\ point\ (x,y)\ appartient\ à\ la\ barre\ n \\ 0 & Ailleurs \end{cases} \qquad \text{(III.20)}$$

Lorsque les vecteurs colonnes $\overline{u}^{r}$ et $\overline{i}^{r}$, renfermant les valeurs des différences de potentiel et les valeurs des courants rotoriques des barres respectivement, sont définis, on obtient le système matriciel suivant :

$$D^{r}\overline{A}+\frac{j}{s\,\omega\,l}\overline{i}^{r}-\frac{j}{s\,\omega\,l\,R_{r}}\overline{u}^{r}=0 \tag{III.21}$$

Les éléments de la matrice D^{r} sont donnés par :

$$D_{ij}^{r}=-\frac{1}{l}\int_{\Omega}\beta_{i}^{r}\sigma\,N_{j}\,d\Omega \tag{III.22}$$

De la figure (III.3), nous définissons dans ce qui suit les impédances associées à la partie frontale des barres ainsi qu'aux portions de court-circuit respectivement :

$$\begin{aligned}\overline{Z}_{be}&=2\overline{Z}_{be}I_{d}\\ \overline{Z}_{sc}&=2\overline{Z}_{sc}I_{d}\end{aligned} \tag{III.23}$$

Ainsi, la différence de potentiel des barres rotoriques incluant la partie frontale de celles-ci est donnée par l'équation :

$$\overline{u}^{r'}=\overline{u}^{r}+\overline{Z}_{be}\,\overline{i}^{r} \tag{III.24}$$

En appliquant les lois de Kirchhoff au circuit de la figure (III.3), nous pouvons écrire :

$$2\overline{u}=\begin{bmatrix}1&0&0&.&.&.&0&-\overline{h}\\-1&1&0&.&.&.&0&0\\0&-1&1&.&.&.&0&0\\.&.&.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.&.&.\\0&0&0&.&.&.&-1&1\end{bmatrix}\overline{u}^{r'}=\overline{M}\,\overline{u}^{r'} \tag{III.25}$$

$\overline{u}$ est le vecteur des différences de potentiel au niveau des portions de court-circuit. Le coefficient h prend en compte la symétrie. M est une matrice de connexion.

$$\overline{i}^{\,r} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & -1 & 1 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & -1 & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 \\ \overline{h} & 0 & 0 & . & . & . & . & -1 \end{bmatrix} \overline{i} = -\overline{M}^{T}\,\overline{i} \tag{III.26}$$

$\overline{i}$ est le vecteur des courants au niveau des portions de court-circuit. Le vecteur différence de potentiel y est donné par :

$$2\overline{u} = \overline{Z}_{sc}\,\overline{i} \tag{III.27}$$

En combinant les relations (III.23) et (III.27), nous obtenons la relation liant les courants et les différences de potentiel dans les barres :

$$\left(1 + \overline{M}^{T}\,\overline{Z}_{sc}^{-1}\,\overline{M}\,\overline{Z}_{be}\right)\overline{i}^{\,r} = -\left(\overline{M}^{T}\,\overline{Z}_{sc}^{-1}\,\overline{M}\right)\overline{u}^{\,r} \tag{III.28}$$

L'expression des courants dans la cage rotorique est donnée par :

$$\overline{i}^{\,r} = \left(1 + \overline{M}^{T}\,\overline{Z}_{sc}^{-1}\,\overline{M}\,\overline{Z}_{be}\right)^{-1}\left(\overline{M}^{T}\,\overline{Z}_{sc}^{-1}\,\overline{M}\right)\overline{u}^{\,r} \tag{III.29}$$

En introduisant le vecteur $\overline{i}^{\,r}$ dans l'équation (III.21), nous obtenons le système final à résoudre au rotor **[4]**:

$$D^{r}\,\overline{A} + \frac{j}{s\,\omega\,l\,R_r}\left\{1 + R_r\left(1 + \overline{M}^{T}\,\overline{Z}_{sc}^{-1}\,\overline{M}\,\overline{Z}_{be}\right)^{-1}\left(\overline{M}^{T}\,\overline{Z}_{sc}^{-1}\,\overline{M}\right)\right\}\overline{u}^{\,r} = 0 \tag{III.30}$$

III.4.3 Couplage des équations du champ et du circuit électrique à l'ensemble de la machine

L'équation du champ à résoudre est **[4]**:

$$\nabla \times \left(\nu \nabla \times \overline{A}\right) + j\, s\, \omega \sigma\, \overline{A} - \left\{ \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{Q_r} \sigma\, \beta_j^r\, \overline{u}_j^r + \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{m} \beta_j^s\, \overline{i}_j^s \right\} e_z = 0 \qquad \text{(III.31)}$$

La discrétisation de l'équation du champ donne :

$$\bar{f}^f(\overline{A}, \overline{u}^r, \bar{i}^s) = \overline{S}(\overline{A})\, \overline{A} + \left[D^r\right]^T \overline{u}^r + \left[D^s\right]^T K^T \bar{i}^s = 0 \qquad \text{(III.32)}$$

Les éléments de la matrice $\overline{S}(\overline{A})$ sont donnés ainsi :

$$\overline{S}_{il}(\overline{A}) = \int_{\Omega} \left\{ \nu(\overline{A}) \nabla N_i . \nabla N_l + j\, s\, \omega\, \sigma\, N_i\, N_l \right\} d\Omega \qquad \text{(III.33)}$$

Le système global à résoudre consiste à coupler l'équation (III.8) avec les équations (III.13) et (III.30) **[4]**:

$$\begin{bmatrix} \bar{f}^f \\ \bar{f}^r \\ \bar{f}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{S}(\overline{A}) & (D^r)^T & (D^s)^T K^T \\ D^r & \overline{C}^r & 0 \\ KD^s & 0 & \overline{G}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{A} \\ \overline{u}^r \\ \bar{i}^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{h}(\overline{V}^s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.34)}$$

Les éléments de la matrice $\overline{G}^s$ et $\overline{C}^r$ sont donnés par :

$$\overline{G}^s = -\frac{R_s + j\omega L_b}{j\omega\, l\, N_s} K K^T \qquad \text{(III.35)}$$

$$\overline{C}^r = -\frac{j}{s\omega\, l\, R_r} \left\{ 1 + R_r \left[\overline{Z}_{be}^{-1} - \left(\overline{Z}_{be} + \overline{Z}_{be} \overline{M}^T \overline{Z}_{sc}^{-1} \overline{M} \overline{Z}_{be} \right)^{-1} \right] \right\} \qquad \text{(III.36)}$$

III.5 Bilan de puissance, rendement, couple et caractéristiques

La transformation de l'énergie électrique en énergie mécanique s'opère avec des pertes de puissance au niveau des éléments actifs de la machine, tel que les circuits magnétiques, les enroulements et les organes mécaniques. Le synoptique suivant met en évidence cette transformation symbolisée par le bilan de puissance **[11, 19, 84]** :

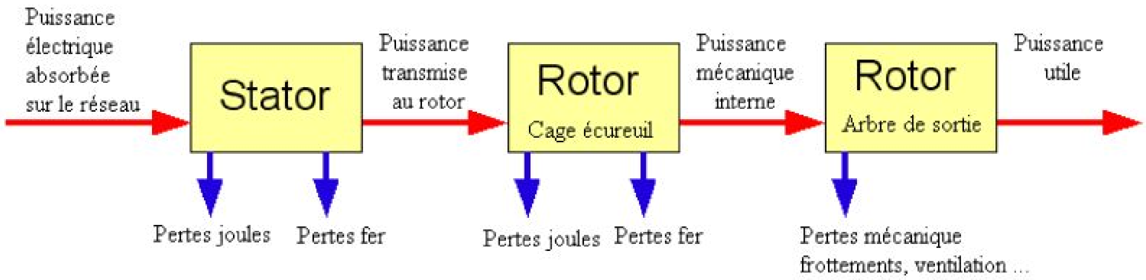

Figure III.4 : Bilan de puissance

III.5.1 Les puissances

III.5.1.1 Puissance électrique absorbée

La puissance absorbée par la machine est donnée par la relation :

$$P_a = 3\,\mathrm{Re}\left(\overline{V}\,\overline{I}^*\right) \qquad \text{(III.37)}$$

III.5.1.2. Puissance transmise au rotor

La puissance électromagnétique transmise au rotor est :

$$P_{tr} = P_a - p_{js} - p_{fs} \qquad \text{(III.38)}$$

III.5.1.3. Puissance mécanique totale

Cette puissance comprend la puissance utile et les pertes mécaniques :

$$P_M = P_{tr}(1-g) \qquad \text{(III.39)}$$

III.5.2 Les pertes

III.5.2.1 Pertes par effet Joule au stator

Dans le bobinage statorique, les pertes Joule sont définies par :

$$p_{js} = 3.R\,.I^2 \text{ (Cas du couplage étoile).} \tag{III.40}$$

$$p_{js} = R\,.I^2 \text{ (Cas du couplage triangle).} \tag{III.41}$$

R : Résistance de l'enroulement statorique.

III.5.2.2 Pertes fer au stator

Les pertes par hystérésis sont estimées au moyen de la formule de Steinmetz à partir de laquelle on peut calculer les pertes volumiques fer au stator :

$$p_H = C.\omega.B_{\max}^k \tag{III.42}$$

C et k sont des coefficients déterminés expérimentalement, dépendants de la nature magnétique du matériau.

$B_{\max}^k$: Valeur maximale de l'induction.

III.5.2.3 Pertes par effet Joule et pertes fer au rotor

Les pertes Joules dans la cage (ou tout autre matériau) du rotor se calculent, pour l'harmonique de rang n, par :

$$p_{jrn} = l_u \iint_{\Omega_r} \frac{\left|\bar{J}_n^r\right|^2}{\sigma_n} ds \tag{III.43}$$

l_u Est la longueur utile de la machine, Ω_r domaine de la cage rotorique.

La densité de courant $\bar{J}^r$ dans les conducteurs est exprimée, en fonction du potentiel vecteur rotorique par :

$$\bar{J}^r = j\, g\omega_s \sigma\, \bar{A}^r \tag{III.44}$$

Les pertes joules totales au rotor sont la somme des pertes engendrées par chaque harmonique, soit :

$$p_{jr} = \sum_n p_{jr} \tag{III.45}$$

III.5.2.4 Pertes mécaniques

Les pertes mécaniques expriment les pertes lors du transfert énergétique entre la puissance mécanique vers la puissance utile créant le couple utile :

$$p_m = P_u - P_M \tag{III.46}$$

III.5.2.5 Pertes collectives

Ces pertes ne dépendent que de la tension U et de la fréquence f. Comme ces grandeurs sont généralement constantes, les pertes fer au stator et les pertes mécaniques sont aussi constantes :

$$p_c = p_{fs} + p_m \tag{III.47}$$

III.5.3 Le rendement

C'est le quotient de la puissance utile P_u par la puissance électrique absorbée :

$$\eta = \frac{P_u}{P_a} \tag{III.48}$$

III.5.4 Couple électromagnétique

Le couple est obtenu en divisant la puissance électromagnétique par la vitesse de rotation Ω_r :

$$T_{em} = \frac{P_{tr}}{\Omega_r} \tag{III.49}$$

III.5.5 Caractéristiques

III.5.5.1 Domaines de fonctionnement de la machine asynchrone

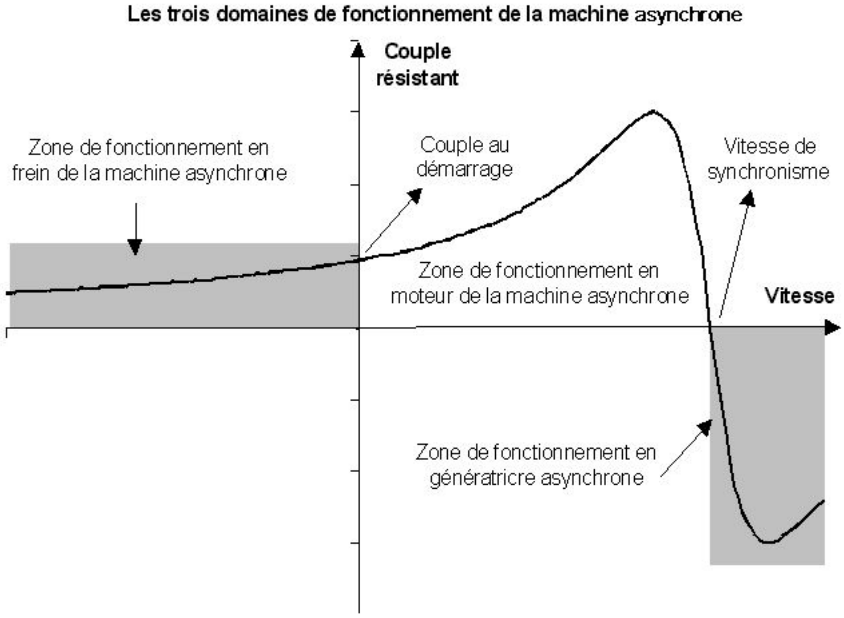

Figure III.7 : Domaines de fonctionnement de la machine asynchrone

III.6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une approche de la modélisation électromagnétique des machines à induction dans l'approximation sinusoïdale où le problème magnétique est directement couplé aux circuits électriques externes. Ainsi, les équations régissant le potentiel vecteur magnétique sont couplées à celles relatives aux circuits électriques aussi bien dans les phases statoriques que dans la cage rotorique. Le modèle obtenu présente le potentiel vecteur magnétique, la tension des barres ainsi que les courants de phases comme inconnues. La source étant exprimée par le système de tensions triphasées équilibrées. L'étude du régime transitoire fera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 4

Modélisation couplée électrique-magnétique-mécanique de la Machine Asynchrone en régime transitoire

IV.1 Introduction

La machine asynchrone à cage est un dispositif électrotechnique qui offre un véritable test du modèle développé précédemment. En effet, elle fait intervenir une formulation magnétodynamique avec un couplage des équations du circuit électrique et prise en compte du mouvement. Après avoir appliqué le modèle développé en régime harmonique, nous allons dans ce qui suit établir le modèle transitoire avec prise en compte du mouvement ainsi que de la saturation.

En régime dynamique, la modélisation par éléments finis est délicate lorsqu'il s'agit, en même temps, de suivre la diffusion lente du champ au niveau du rotor ainsi que le mouvement. Les méthodes temporelles permettent de résoudre le problème avec, il est vrai, des temps de calculs importants. Cette procédure est néanmoins trop lourde quand seules les performances en régime permanent sinusoïdal sont recherchées. Un aspect crucial se pose lors de l'étude des régimes transitoires : la non linéarité magnétique. En effet, le système d'équations à résoudre est non linéaire en raison d'une certaine matrice issue du modèle éléments finis qui dépend de la réluctivité magnétique des matériaux du stator et du rotor. Cet état magnétique change d'un instant à un autre du fait que les grandeurs électromagnétiques changent dans le temps.

Pour modéliser un système électrotechnique complexe tel qu'une machine électrique tournante, on doit, en plus de la résolution des équations du champ, tenir compte des parties en mouvement. En effet, les convertisseurs électromécaniques sont des dispositifs électrotechniques qui par définition comportent des parties en mouvement. La modélisation numérique de tels systèmes nécessite donc le développement de techniques permettant la prise en compte du mouvement. Diverses études ont été menées dans ce sens, l'objectif étant, dans une modélisation éléments finis, d'éviter entre autres le remaillage de toute la géométrie, l'adaptation à une large gamme de dispositifs ainsi que la simplicité d'implémentation **[75]**. Dans le cadre de nos travaux, c'est la technique du macro-élément qui sera adoptée. Elle sera du coup détaillée dans le chapitre en cours.

IV.2 Couplage magnétique-électrique en régime transitoire dans la machine asynchrone

IV.2.1 Couplage des équations du champ et du circuit électrique au stator

Dans le cas général des régimes transitoires électromagnétiques, on doit résoudre un problème d'évolution que l'on traite par une procédure pas à pas dans le temps. Pour obtenir l'évolution dans le temps des grandeurs électromagnétiques, représentées par le vecteur inconnu X, nous devons résoudre un système dont la forme générale est la suivante **[95]** :

$$Q\,X + T\frac{\partial}{\partial t}X = P \quad avec \quad x(t=0) = X^0 \tag{IV.1}$$

L'intégration d'une telle équation différentielle est effectuée généralement par des méthodes directes basées sur le β-schéma. Ce dernier consiste à approximer la dérivée temporelle par l'expression suivante :

$$\beta\frac{\partial}{\partial t}X\Big|^{t+\Delta t} + (1-\beta)\frac{\partial}{\partial t}X\Big|^{t} = \frac{X^{t+\Delta t} - X^{t}}{\Delta t} \tag{IV.2}$$

Suivant la valeur de β, le schéma de discrétisation utilisé est dit :

- Euler explicite si $\beta = 0$
- Euler implicite si $\beta = 1$

  Ces deux schémas conviennent généralement dans le cas des variations lentes.
- Semi implicite si $0 \prec \beta \prec 1$. La valeur $\beta = \frac{1}{2}$ correspond au schéma dit de Cranck-Nicholson, tandis que $\beta = 0{,}866$ correspond au schéma de Liniger. Ces schémas sont généralement utilisés pour les variations raides.

En adoptant la même démarche entreprise lors du chapitre précédent, nous considérons la différence de potentiel induite dans une phase de l'enroulement statorique donnée par l'équation (III.7), puis sous une autre forme par l'équation (III.8).

La formulation du régime transitoire consiste à écrire les dérivées temporelles du potentiel vecteur et du courant comme suit :

$$\frac{A_{k+1} - A_k}{\Delta t} \to \frac{\partial A}{\partial t} \tag{IV.3}$$

$$\frac{i_{k+1}^s - i_k^s}{\Delta t} \to \frac{\partial I}{\partial t} \tag{IV.4}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} u_s\big|_{k+1} &= R_s i_s\big|_{k+1} + L_b \frac{di_s}{dt}\bigg|_{k+1} + N_s l \int_\Omega \beta_s \frac{\partial A}{\partial t}\bigg|_{k+1} d\Omega \\ u_s\big|_{k} &= R_s i_s\big|_{k} + L_b \frac{di_s}{dt}\bigg|_{k} + N_s l \int_\Omega \beta_s \frac{\partial A}{\partial t}\bigg|_{k} d\Omega \end{aligned} \tag{IV.5}$$

En introduit la fonction β_n^s donnée par (III.11), en utilisant l'approximation de Cranck-Nicholson (IV.2) et avec le concours de (IV.5), l'équation électrique (III.10) devient :

$$\frac{u_n^s\big|_{k+1} + u_n^s\big|_k}{2} = N_s l \int_\Omega \beta_n^s \left\{ \frac{a_j\big|_{k+1} + a_j\big|_k}{\Delta t} \right\} d\Omega + \frac{R_s}{2}\left(i_n^s\big|_{k+1} + i_n^s\big|_k \right) + L_b \frac{i_n^s\big|_{k+1} + i_n^s\big|_k}{\Delta t} \tag{IV.6}$$

La forme matricielle de l'équation précédente est donnée par l'expression :

$$D^s A_{k+1} - \frac{R_s \Delta t + 2L_b}{2N_s l} i_{k+1}^s + \left\{ -D^s A_k - \frac{R_s \Delta t - 2L_b}{2N_s l} i_k^s + \frac{\Delta t}{2N_s l}\left(u_{k+1}^s + u_k^s \right) \right\} = 0 \tag{IV.7}$$

Les éléments de la matrice D^s sont donnés par l'équation (III.14).

En reprenant les équations (III.16), (III.17) du chapitre précédent et en tenant compte de la matrice de couplage K, l'expression (IV.7) se réécrit comme suit :

$$KD^s A_{k+1} - \frac{R_s \Delta t + 2L_b}{2N_s l} KK^T i^{s'}_{k+1} + \left\{ -KD^s A_k - \frac{R_s \Delta t - 2L_b}{2N_s l} KK^T i_k^{s'} + \frac{\Delta t}{2N_s l} Q\left(V_{k+1}^s + V_k^s \right) \right\} = 0 \tag{IV.8}$$

En prévision du couplage des équations du champ à celles du circuit, l'équation (IV.8) prend la forme suivante :

$$KD^s A_{k+1} + G^s i^s_{K+1} + \left\{-KD^s A_k + H^s i^s_k + C^s\left(V^s_{k+1} + V^s_k\right)\right\} = 0 \qquad \text{(IV.9)}$$

IV.2.2 Couplage des équations du champ et du circuit électrique au rotor

L'équation correspondant au circuit du rotor en régime transitoire est :

$$u^r_n = R_r i^r_n + R_r \int_\Omega \beta^r_n \sigma \left\{\sum_{j=1}^{N_n} \frac{\partial A_j}{\partial t} N_j\right\} d\Omega \qquad \text{(IV.10)}$$

De façon analogue aux équations électriques du stator, l'équation (IV.10) s'exprime selon le schéma de Cranck Nicholson comme suit :

$$\frac{1}{2}\left(u^r_n\big|_{k+1} + u^r_n\big|_k\right) = \frac{1}{2} R_r \left(i^r_n\big|_{k+1} + i^r_n\big|_k\right) + R_r \int_\Omega \beta^r_n \sigma \left\{\sum_{j=1}^{N_n} \frac{A_j\big|_{k+1} - A_j\big|_k}{\Delta t}\right\} d\Omega \qquad \text{(IV.11)}$$

Pour une conductivité électrique constante, une section S_b uniforme et en incluant la partie frontale des barres, ainsi que les anneaux de court-circuit, les équations générales de la cage rotorique sont :

$$u_{sc} = R_{sc} i_{sc} + L_{sc} \frac{di_{sc}}{dt} \qquad \text{avec} \qquad u_{sc} = \frac{1}{2} M\, u^{'}_r \qquad \text{(IV.12.a)}$$

$$u^{'}_r = u_r + R_{be} i_r + L_{be} \frac{di_r}{dt} \qquad \text{avec} \qquad i_r = -M^T i_{sc} \qquad \text{(IV.12.b)}$$

En exprimant le courant de barre en fonction de la tension de barre, les équations (IV.12.a,b) nous conduisent vers l'équation suivante :

$$\begin{aligned} i^r_{k+1} = & \left\{\left(R_{sc} + 2\frac{L_{sc}}{\Delta t}\right) I + \left(R_{be} + 2\frac{L_{be}}{\Delta t}\right) M^T M\right\}^{-1} \left\{\frac{1}{2} M^T M \left(u^r_{k+1} + u^r_k\right)\right\} \\ & + \left[\left(R_{sc} - 2\frac{L_{sc}}{\Delta t}\right) I + \left(R_{be} - 2\frac{L_{be}}{\Delta t}\right) M^T M\right] i^r_k \end{aligned} \qquad \text{(IV.13)}$$

L'équation du système est donnée par l'expression (IV.14) :

$$D^r A_{k+1} + \frac{\Delta t}{2l\,R_r}\left\{1+\frac{R_r}{2}\left[\left(R_{sc}+2\frac{L_{sc}}{\Delta t}\right)l+\left(R_{be}+2\frac{L_{be}}{\Delta t}\right)M^T M\right]^{-1} M^T M\right\}u_{k+1}^r$$

$$-D^r A_k + \frac{\Delta t}{2l\,R_r}\left\{1+\frac{R_r}{2}\left[\left(R_{sc}+2\frac{L_{sc}}{\Delta t}\right)l+\left(R_{be}+2\frac{L_{be}}{\Delta t}\right)M^T M\right]^{-1} M^T M\right\}u_k^r$$

$$-\frac{\Delta t}{2l}\left\{1-\left[\left(R_{sc}+2\frac{L_{sc}}{\Delta t}\right)l+\left(R_{be}+2\frac{L_{be}}{\Delta t}\right)M^T M\right]^{-1}\cdot\left[\left(R_{sc}-2\frac{L_{sc}}{\Delta t}\right)l+\left(R_{be}-2\frac{L_{be}}{\Delta t}\right)M^T M\right]\right\}u_k^r=0$$

Sous forme simplifiée, l'équation (IV.14) est donnée par :

$$D^r A_{k+1} + C^r u_{k+1}^r + \left\{-D^r A_k + C^r u_k^r + G^r i_k^r\right\} = 0 \qquad \text{(IV.15)}$$

IV.2.3 Couplage des équations du champ et des circuits électriques

L'équation du champ à résoudre est donnée par l'expression **[4]**:

$$\nabla\times\left(\nu\,\nabla\times A\right)+\sigma\frac{\partial A}{\partial t}-\left\{\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{Q_r}\sigma\,\beta_j^r\,u_j^r+\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{m}\beta_j^s\,i_j^s\right\}e_z=0 \qquad \text{(IV.16)}$$

La discrétisation de cette équation donne :

$$\begin{aligned}
f_i^f\left(A_{k+1},u_{k+1}^r,i_{k+1}^s\right)=&\int_\Omega\left\{\sum_{j=1}^{N_n}\left(\nu(A_{k+1})\nabla N_i.\nabla N_j+\frac{2\sigma}{\Delta t}N_iN_j\right)A_j\Big|_{k+1}\right\}d\Omega\\
&-\int_\Omega\left\{N_i\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{Q_r}\sigma\beta_j^r u_j^r\Big|_{k+1}+N_i\sum_{j=1}^{m}\beta_j^s i_j^s\Big|_{k+1}\right\}d\Omega\\
&+\int_\Omega\left\{\sum_{j=1}^{N_n}\left(\nu(A_k)\nabla N_i.\nabla N_j+\frac{2\sigma}{\Delta t}N_iN_j\right)A_j\Big|_{k}\right\}d\Omega\\
&-\int_\Omega\left\{N_i\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{Q_r}\sigma\beta_j^r u_j^r\Big|_{k}+N_i\sum_{j=1}^{m}\beta_j^s i_j^s\Big|_{k}\right\}d\Omega
\end{aligned} \qquad \text{(IV.17)}$$

En incorporant la matrice K, dans les équations (IV.9), (IV.15), (IV.17), on aboutit au système algébrique suivant :

$$\begin{aligned}
&f_i^f\left(A_{k+1},u_{k+1}^r,i_{k+1}^s\right)=S(A_{k+1})A_{k+1}+\left[D^r\right]^T u_{k+1}^r+\left[D^s\right]^T K^T i_{k+1}^s\\
&+S'(A_k)A_k+\left[D^r\right]^T u_k^r+\left[D^s\right]^T K^T i_k^s=0
\end{aligned} \qquad \text{(IV.18)}$$

$$f^r\left(A_{k+1},u^r_{k+1}\right)=D^r A_{k+1}+C^r u^r_{k+1}+\left\{-D^r A_k+C^r u^r_k+G^r i^r_k\right\}=0 \qquad \text{(IV.19.a)}$$

$$f^s\left(A_{k+1},u^s_{k+1}\right)=KD^s A_{k+1}+G^s i^s_{k+1}+\left\{-KD^s A_k+H^s i^s_k+C^s\left(V^s_{k+1}+V^s_k\right)=0\right\} \text{(IV.19.b)}$$

Le système algébrique à considérer est donc le suivant :

$$\begin{bmatrix} S(A_{k+1}) & \left[D^r\right]^T & \left[D^s\right]^T K^T \\ \left[D^r\right] & C^r & 0 \\ KD^S & 0 & G^S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ U^r \\ I^s \end{bmatrix}_{k+1}=\begin{bmatrix} S^{'}(A_k) & \left[D^r\right]^T & \left[D^s\right]^T K^T \\ -\left[D\right]^r & C^r & 0 \\ KD^S & 0 & H^S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ U^r \\ I^s \end{bmatrix}_k-\begin{bmatrix} 0 \\ G^r i^r_k \\ C^s(V^s_{k+1}+V^s_k \end{bmatrix}_{k+1}$$

A cause de la non linéarité magnétique, la matrice S dépend des valeurs nodales du potentiel vecteur magnétique. La méthode itérative de Newton-Raphson est utilisée pour résoudre le système précédent qui prend alors la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} P(A^n_{k+1}) & (D^r)^T & (D^s)^T K^T \\ D^r & C^r & 0 \\ KD^s & 0 & G^s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta A^n_{k+1} \\ \Delta u^{r\,n}_{k+1} \\ \Delta i^{s\,n}_{k+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f^f(A^n_{k+1},u^{r\,n}_{k+1},i^{s\,n}_{k+1} \\ f^r(A^n_{k+1},u^{r\,n}_{k+1}) \\ f^s(A^{s\,n}_{k+1} \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.20)}$$

IV.3 Prise en compte du mouvement

Les méthodes de simulation de mouvements peuvent être classées en deux catégories **[17]**, celles basées sur :

- L'utilisation de deux référentiels, l'un mobile lié à la partie en mouvement D_m et l'autre à la partie fixe D_f. Dans cette approche, le mouvement est traité dans la région entrefer D_e.

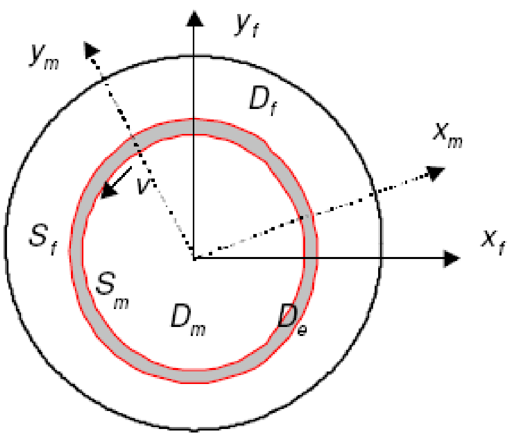

Figure IV.1 : Utilisation de deux référentiels.

- L'utilisation d'un seul référentiel indépendant de la position de la partie mobile. Le mouvement est alors simulé par l'introduction de $v \times B$ dans les équations du champ électromagnétique, v étant la vitesse de translation. Cette technique ne peut être appliquée qu'aux dispositifs ayant une partie mobile homogène (invariante pour le déplacement).

Dans le cadre de notre travail, l'exposé des méthodes de prise en compte du mouvement sera restreint à celles constituant la première catégorie, utilisant deux référentiels. Plusieurs méthodes de prise en compte du mouvement ont été décrites dans la littérature. Dans les problèmes 2D, nous citerons la méthode de la bande de mouvement (roulement), méthode mixte éléments finis-intégrales de frontières, méthode du macro-élément, méthode de connexion de maillages **[69]**. Dans le système à deux repères, elles peuvent être classées comme suit **[17, 75, 85]**:

- Les techniques de remaillage (complet ou partiel)
- Les méthodes intégrales.
- Les méthodes de raccordement de maillage fixe et mobile.

IV.3.1 Les techniques de remaillage

IV.3.1.1 Remaillage complet

La méthode du remaillage est la plus évidente **[25]**, son principe consiste à remailler complètement la géométrie du domaine pour chaque déplacement de la partie mobile, ce qui signifie qu'il doit y avoir un générateur de maillage automatique capable de produire un maillage optimal et homogène **[85].** Le remaillage complet impose un couplage entre le code de calcul par éléments finis et le mailleur automatique. Dans la plupart des cas, le remaillage automatique est basé sur la géométrie et non sur les données du maillage effectué pour la position précédente, de ce fait, l'homogénéité du maillage n'est pas garantie. En utilisant cette technique, les propriétés de la matrice du système sont inchangées. Cette méthode est coûteuse en temps de calcul lorsque que la géométrie se complique quelque peu et ne convient donc qu'assez rarement dans les machines électriques et aux problèmes à caractère transitoire.

IV.3.1.2 Bande de mouvement

Cette méthode est basée sur le remaillage de l'entrefer D_e à chaque déplacement en maintenant les domaines fixe D_f et mobile D_m inchangés. Elle consiste à créer une bande d'éléments réguliers dans l'entrefer qui relie la géométrie du stator à celle du rotor : c'est la bande de mouvement (roulement). A chaque déplacement de la partie D_m, les éléments de la bande se déforment. Lorsque la distorsion devient grande, la bande est remaillée **[85]**. Le remaillage peut être effectué par un mailleur automatique intégré au code de calcul, ou en développant un algorithme de connexion des bords S_m et S_f de l'entrefer.

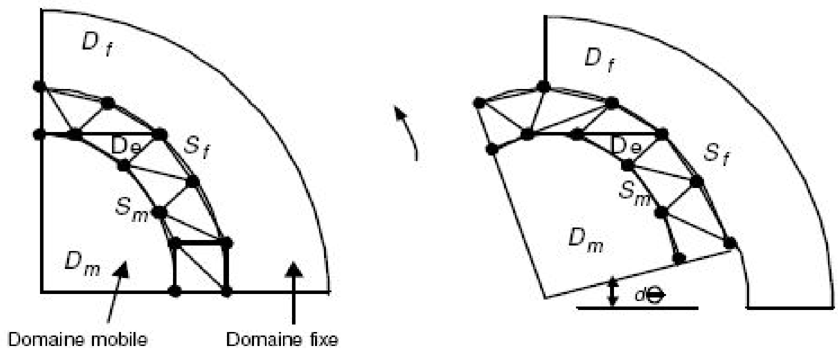

Figure IV.2 : Prise en compte du mouvement par la bande de mouvement.

L'utilisation de la bande de mouvement permet de garder les propriétés de la matrice éléments finis (creuse et symétrique). Par rapport à la technique de remaillage complet, cette méthode présente comme avantage certain la rapidité de l'exécution. Elle permet d'avoir un nombre de nœuds différent de part et d'autre de la bande, ce qui rend le processus de maillage plus souple, avec la possibilité de densité de maillage optimal **[75]**. Notons enfin que la méthode est très utilisée dans les problèmes 2D.

IV.3.2 Méthodes intégrales et analytiques

Les parties fixe et mobile sont couplées dans l'entrefer par des formules intégrales qui utilisent les nœuds aux bords S_m et S_f de l'entrefer. Ce couplage ne nécessite pas le maillage de l'entrefer et il peut être effectué en utilisant **[75]**:

- La méthode des intégrales de frontière
- Une solution analytique du champ magnétique dans l'entrefer obtenue au moyen d'un macro-élément.

IV.3.2.1 Intégrales de frontières

Son principe consiste à ramener la solution du problème défini dans un volume à une solution équivalente sur la surface entourant le volume qui ne doit pas englober des matériaux non linéaires. C'est le cas pour l'entrefer des machines électriques. En associant cette technique à la méthode des éléments finis, on parle de méthode mixte. Les résultats obtenus sont satisfaisants et ne dépendent pas du déplacement. Cependant, la matrice du système est pleine au niveau des degrés de liberté associés aux interfaces S_m et S_f **[17, 75]**. Les résultats de cette méthode en 2D sont bons, tandis qu'ils ne sont pas utilisables en 3D **[85]**.

IV.3.2.2 Méthode du macro-élément

Le principe de cette méthode est basé sur l'expression analytique du champ dans un entrefer non maillé vu comme un seul élément fini possédant des nœuds sur chacune des parties mobile et fixe, d'où le nom de macro-élément.

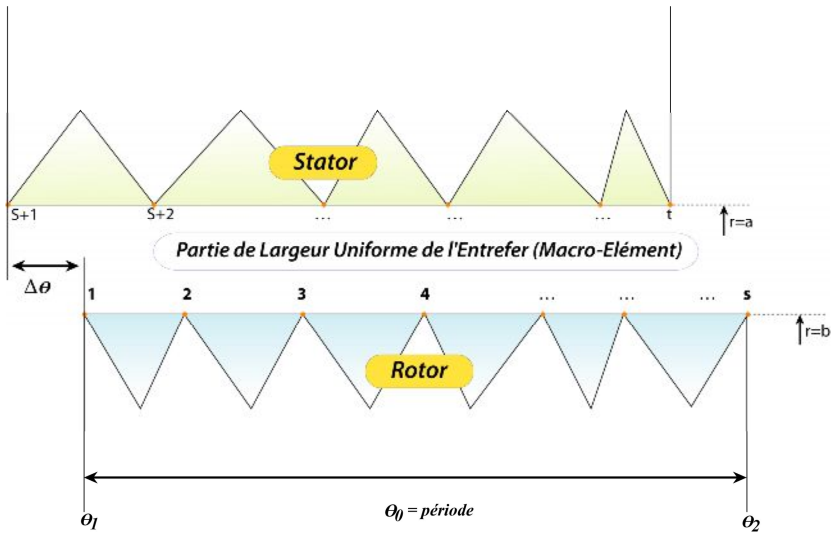

Figure IV.3 : Prise en compte du mouvement par le macro-élément.

La solution est déterminée dans l'entrefer analytiquement en résolvant l'équation de Laplace par la méthode de séparation de variables. Ainsi, la solution est représentée par une série de Fourier. Le macro-élément est représenté par sa matrice raideur qu'il faut assembler avec les matrices issues des éléments finis classiques subdivisant les régions rotor et stator. Cette méthode donne de très bons résultats. Cependant, elle engendre des temps de calcul élevés pour un maillage fin en 2D **[75]**. Nous retrouvons l'utilisation de la méthode dans les travaux **[2]**.

Le Macro-Elément (ME) constitué de la partie de largeur uniforme de l'entrefer PLUE permet de tenir automatiquement compte du mouvement du rotor. La PLUE étant constituée d'un milieu linéaire (l'air), le potentiel vecteur magnétique A y est régi par l'équation de Laplace $(\Delta A = 0)$. La résolution d'une telle équation est effectuée analytiquement dans un espace bidimensionnel, utilisant la méthode de séparation de variables. Sur les frontières latérales de la PLUE, les valeurs du potentiel A sont liées par des conditions de périodicité ; sur les frontières courbes, la solution est représentée par la somme de séries de Fourier suivante **[59, 92]** :

$$A(c,\theta) = \sum_{i=k}^{l} A_i \left[\frac{1}{2} a_{0i} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{ni} \cos(\lambda_n \theta) + b_{ni} \sin(\lambda_n \theta) \right] \right] \qquad \text{(IV.21)}$$

Avec :

$$k = \begin{cases} 1 \quad et \quad l = s \quad si \quad c = a \\ s+1 \quad et \quad l = t \quad si \quad c = b \end{cases}$$

Dans ces relations, a_{0i}, a_{ni}, et b_{ni} sont les coefficients de Fourier des fonctions choisies. A_i sont les valeurs nodales du potentiel A dans la PLUE, s est le nombre de nœuds situés sur une frontière courbe et t est le nombre total de nœuds appartenant à la PLUE. Les fonctions choisies pour le calcul des coefficients de Fourier sont prises identiques à celles définies sur les interfaces des éléments classiques. Ainsi, la compatibilité (continuité de la fonction représentant A) entre ceux-ci et la PLUE est assurée. Dans la PLUE, la solution générale peut s'écrire :

$$A(r,\theta) = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i (r,\theta) A_i \qquad \text{(IV.22)}$$

Avec :

$$\alpha_i(r,\theta) = \frac{Ln\left(\frac{r}{c'}\right)}{Ln\left(\frac{c}{c'}\right)} \frac{a_{0i}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{c'}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{c'}{r}\right)^{\lambda_n}}{\left(\frac{c}{c'}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{c'}{c}\right)^{\lambda_n}} \left[a_{ni} \cos(\lambda_n \theta) + b_{ni} \sin(\lambda_n \theta) \right] \qquad \text{(IV.23)}$$

$$c = \begin{cases} a \quad et \quad c' = b \quad si \quad i = [1,2,.....,s] \\ b \quad et \quad c' = a \quad si \quad i = [s+1,2,.....,t] \end{cases}$$

Ainsi, la PLUE est considérée comme un élément : le Macro-Elément (ME). Un tel élément présente les caractéristiques suivantes :

- Le potentiel A y est donné par une formule exacte.
- Le nombre de nœuds y est relativement élevé.
- Les valeurs du potentiel A sur les limites latérales y sont liées par une condition de périodicité.

Afin de pouvoir assembler le ME avec les éléments classiques subdivisant les régions stator et rotor, nous déterminons sa matrice raideur. Le terme général d'une telle matrice est donné par la formule suivante (IV.24) :

$$S_{ij} = \frac{\theta_0}{4} \frac{\ln\left(\frac{b}{c'}\right) - \ln\left(\frac{a}{c'}\right)}{\ln\left(\frac{c}{c'}\right) - \ln\left(\frac{e}{e'}\right)} a_{0i}\, a_{0j} + \frac{\theta_0}{2} \sum_{n=1}^{nFourier} \frac{\lambda_n (a_{ni}\, a_{nj} + b_{ni}\, b_{nj}}{\left[\left(\frac{c}{c'}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{c'}{c}\right)^{\lambda_n}\right]\left[\left(\frac{e}{e'}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{e'}{e}\right)^{\lambda_n}\right]} \times$$

$$\left(\left[\left(\frac{b}{c'}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{c'}{b}\right)^{\lambda_n}\right]\left[\left(\frac{b}{e'}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{e'}{b}\right)^{\lambda_n}\right] - \left[\left(\frac{a}{c'}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{c'}{a}\right)^{\lambda_n}\right]\left[\left(\frac{a}{e'}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{e'}{a}\right)^{\lambda_n}\right]\right)$$

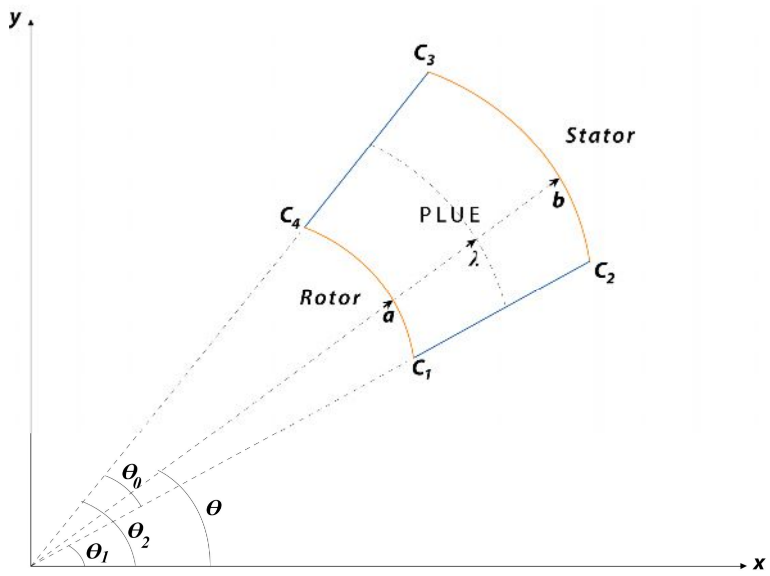

Figure IV.4 : Description de la PLUE

Avec :

$$a_{0i} = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{\theta_0} \tag{IV.25}$$

$$a_{ni} = -\frac{4}{\theta_0}\frac{1}{\lambda_n{}^2}\left[\frac{1}{\theta_i - \theta_{i-1}}\sin\left(\frac{\lambda_n}{2}(\theta_i + \theta_{i-1}\right)\sin\left(\frac{\lambda_n}{2}(\theta_i - \theta_{i-1}\right) + \frac{1}{\theta_i - \theta_{i+1}}\sin\left(\frac{\lambda_n}{2}(\theta_{i+1} + \theta_i\right)\sin\left(\frac{\lambda_n}{2}(\theta_{i+1} - \theta_i\right)\right] \tag{IV.26}$$

$$b_{ni} = -\frac{4}{\theta_0}\frac{1}{\lambda_n{}^2}\left[\frac{1}{\theta_i - \theta_{i-1}}\sin\left(\frac{\lambda_n}{2}(\theta_i - \theta_{i-1}\right)\cos\left(\frac{\lambda_n}{2}(\theta_i + \theta_{i-1}\right) + \frac{1}{\theta_i - \theta_{i+1}}\sin\left(\frac{\lambda_n}{2}(\theta_{i+1} - \theta_i\right)\cos\left(\frac{\lambda_n}{2}(\theta_{i+1} + \theta_i\right)\right] \tag{IV.26}$$

$$\lambda_n = \frac{2\pi n}{\theta_0} \tag{IV.27}$$

$$c = \begin{cases} a \quad et \quad c' = b \quad si \quad i = [1, 2, ...,s] \\ b \quad et \quad c' = a \quad si \quad i = [s+1, 2, ...,t] \end{cases}, \quad e = \begin{cases} a \quad et \quad e' = b \quad si \quad i = [1, 2, ...,s] \\ b \quad et \quad e' = a \quad si \quad i = [s+1, 2, ...,t] \end{cases}$$

Afin de simplifier l'expression de S_{ij}, nous l'écrivons comme étant la somme de deux composantes :

$$S_{ij} = S_1 + S_2 \tag{IV.28}$$

$$S_1 = \frac{\theta_0}{4}\frac{\ln\left(\frac{b}{c'}\right) - \ln\left(\frac{a}{c'}\right)}{\ln\left(\frac{c}{c'}\right) - \ln\left(\frac{e}{e'}\right)} a_{0i}\, a_{0j} \tag{IV.29}$$

$$S_2 = \frac{\theta_{à}}{2}\sum_{n=1}^{nFourier} f(\lambda_n).(a_{ni}\, a_{nj} + b_{ni}\, b_{nj}) \tag{IV.30}$$

$$f(\lambda_n) = \frac{\lambda_n}{\left[\left(\frac{c}{c'}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{c'}{c}\right)^{\lambda_n}\right]\left[\left(\frac{e}{e'}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{e'}{e}\right)^{\lambda_n}\right]} \times \left(\left[\left(\frac{b}{c'}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{c'}{b}\right)^{\lambda_n}\right]\left[\left(\frac{b}{e'}\right)^{\lambda_n} + \left(\frac{e'}{b}\right)^{\lambda_n}\right] - \left[\left(\frac{a}{c'}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{c'}{a}\right)^{\lambda_n}\right]\left[\left(\frac{a}{e'}\right)^{\lambda_n} + \left(\frac{e'}{a}\right)^{\lambda_n}\right]\right)$$

La matrice S_1 est indépendante de la position du rotor. Son calcul s'effectue donc une seule fois. De même, l'expression $f(\lambda_n)$ n'est pas influencée par le déplacement du rotor. Les seuls termes qui font changer S_{ij} lors des différentes positions du rotor sont a_{ni} et b_{ni}. Les expressions donnant ces coefficients se simplifient en mettant :

$$\begin{cases} \phi_1 = \theta_i - \theta_{i-1} \\ \phi_2 = \theta_i + \theta_{i-1} \\ \phi_3 = \theta_i - \theta_{i+1} \\ \phi_4 = \theta_i + \theta_{i+1} \\ k_n = \dfrac{4}{\lambda^2 \theta_0} \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation (IV.26), l'expression de a_{ni} devient :

$$a_{ni} = -k_n \left[\frac{1}{\phi_1} \sin\left(\frac{\lambda_n}{2}\phi_2\right) \sin\left(\frac{\lambda_n}{2}\phi_1\right) + \frac{1}{\phi_3} \sin\left(\frac{\lambda_n}{2}\phi_4\right) \sin\left(\frac{-\lambda_n}{2}\phi_3\right) \right] \qquad \text{(IV.31)}$$

Lors du mouvement du rotor (déplacement d'un angle $\Delta\theta$), les termes ϕ_1 et ϕ_3 demeurent invariables (vu que ce sont des soustractions de termes), tandis que ϕ_2 et ϕ_4 deviennent :

$$\phi_2 \rightarrow \phi_2 + 2\Delta\theta \quad et \quad \phi_4 \rightarrow \phi_4 + 2\Delta\theta$$

Mettons :

$$C_{ni} = \frac{k_n}{\phi_1} \sin\left(\frac{-\lambda_n}{2}\phi_1\right) \quad et \quad D_{ni} = \frac{k_n}{\phi_3} \sin\left(\frac{\lambda_n}{2}\phi_3\right)$$

En introduisant ces dernières notations dans l'équation (IV.31), nous obtenons :

$$a_{ni}\big|_{+\Delta\theta} = C_{ni} \sin \frac{\lambda_n}{2}(\phi_2 + 2\Delta\theta) + D_{ni} \sin \frac{\lambda_n}{2}(\phi_4 + 2\Delta\theta) \qquad \text{(IV.32)}$$

En arrangeant les termes constants et les termes dépendant de $\Delta\theta$, l'équation précédente devient :

$$a_{ni}\big|_{+\Delta\theta} = F_{ni} \sin \lambda_n \Delta\theta + G_{ni} \cos \lambda_n \Delta\theta$$

Avec :

$F_{ni} = C_{ni} \cos\frac{\lambda_n}{2}\phi_2 + D_{ni} \cos\frac{\lambda_n}{2}\phi_4$,

$G_{ni} = C_{ni} \sin\frac{\lambda_n}{2}\phi_2 + D_{ni} \sin\frac{\lambda_n}{2}\phi_4$,

F_{ni} et G_{ni} sont bien entendu des termes indépendants de $\Delta\theta$.

Afin de réduire davantage les calculs :

$$a_{ni}\big|_{+\Delta\theta} = H_{ni} \cos(\lambda_n \Delta\theta - P_{ni}) \qquad \text{(IV.33)}$$

Avec :

$H_{ni} = (F_{ni}{}^2 + G_{ni}{}^2)^{1/2}$, $P_{ni} = \tan^{-1}(F_{ni} / G_{ni})$

Les constantes λ_n, H_{ni} et P_{ni} sont indépendantes de $\Delta\theta$. Elles sont déterminées puis stockées. Ainsi, a_{ni} et b_{ni} peuvent être recalculées pour chaque mouvement symbolisé par $\Delta\theta$.

IV.3.3 Méthodes de raccordement de maillage fixe et mobile

La connexion de maillages fixe et mobile est faite au niveau d'une interface S_e. Celle-ci peut être confondue avec les surfaces S_m et S_f ou située entre les deux. Dans cette dernière configuration, une partie du volume entrefer est liée à D_m et l'autre à D_f.

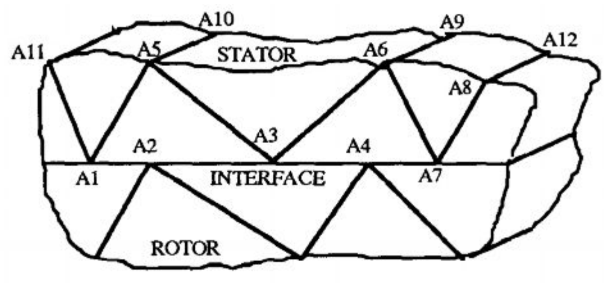

Figure IV.5 : Configuration de connexion de maillage statorique et rotorique

Dans la perspective d'établir cette connexion, plusieurs techniques ont été mises en œuvre :

- Multiplicateurs de Lagrange **[21, 70, 81]**
- La méthode d'interpolation nodale **[21,70]**.
- Ligne de glissement **[9, 89]**.

IV.3.3.1 Multiplicateurs de Lagrange

Cette méthode permet le recollement des parties fixe et mobile en utilisant des contraintes additionnelles liées à la continuité du champ ou de l'induction. En d'autres termes, à chaque déplacement, on ajoute les équations qui assurent les conditions de transmission de H ou B à l'interface S_e.

Pour le potentiel A, le principe consiste à déterminer le minimum des fonctionnelles d'énergie dans les domaines D_m et D_f, et d'une fonctionnelle liée à la continuité de A. Cette dernière fait intervenir une inconnue supplémentaire λ, appelée Lagrangien. Ce minimum est calculé en annulant la différentielle.

L'avantage de cette méthode est qu'elle génère un système proche de ceux des éléments finis, donc, économique en espace mémoire. Cependant, elle est liée à la formulation utilisée et aux fonctions d'approximation. Il faut donc développer des routines de calcul spécifique à chaque approche **[17]**.

IV.3.3.2 Méthode d'interpolation nodale :

Cette technique est basée sur la connexion des nœuds du bord mobile situé sur S_e aux éléments de la partie fixe.

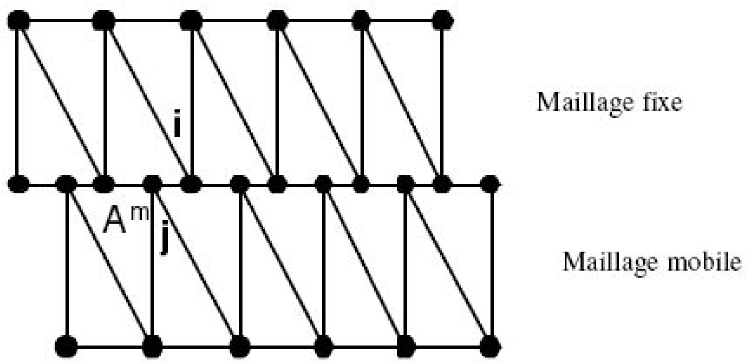

Figure IV.6 : Recollement de maillage par interpolation nodale.

En utilisant les fonctions d'interpolation de l'élément volumique fixe, on peut écrire que le potentiel magnétique vecteur A_j^m au nœud mobile j est :

$$A_j^m = \sum_{i=1}^{ne} N_j^i A_{fi} \qquad \text{(IV.34)}$$

N_j^i sont les fonctions d'interpolation évaluées au nœud j, n_e nombre de nœuds par élément volumique fixe et A_{fi} sont les valeurs nodales du potentiel magnétique vecteur de l'élément volumique fixe. L'avantage de cette technique indépendante de la formulation utilisée, est de garder la structure de la matrice du système sans engendrer d'inconnues supplémentaires. Cependant, elle peut être mise en défaut lorsqu'il s'agit d'un maillage fortement hétérogène. Par ailleurs, son caractère nodal, n'assure qu'en moyenne la continuité du potentiel vecteur **[75]**.

IV.3.3.3 Ligne de glissement

Les maillages du stator et du rotor sont liés par l'intermédiaire d'une ligne de glissement en 2D ou d'une surface de glissement en 3D. Le mouvement est réalisé en déplaçant le rotor d'un nombre entier de pas. Cette méthode est relativement facile à mettre en œuvre mais impose des rotations discrètes du rotor qui correspondent au pas de discrétisation spatiale sur la ligne (ou surface de glissement). Ce pas de déplacement impose donc dès le départ le pas de calcul temporel. Le maillage de la région de l'entrefer doit être régulier.

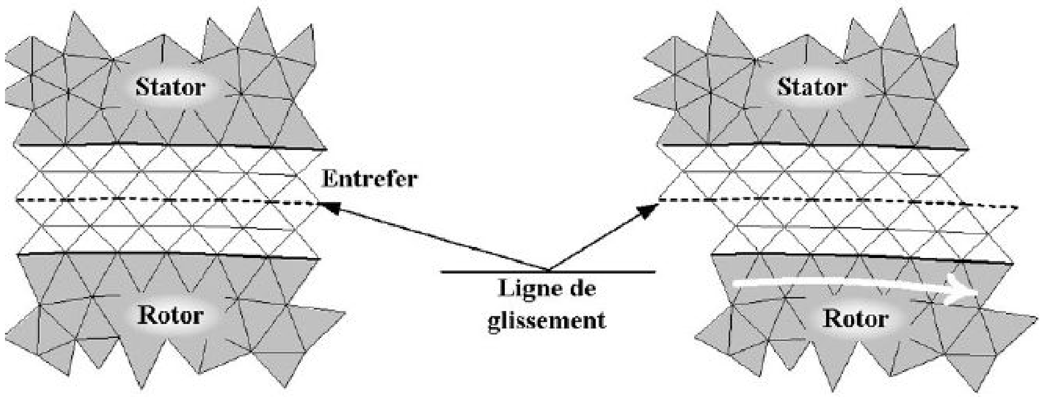

Figure IV.7 : Ligne de glissement.

IV.4 Equation mécanique

Dans les convertisseurs électromécaniques, en particulier dans les machines tournantes, le mouvement du rotor est guidé et la trajectoire suivie est déterminée. Alors, un seul degré de liberté suffit pour décrire le mouvement. Le guidage du rotor induit par ailleurs des contacts et des frottements apparaissent dans l'équation de mouvement. Dans ces conditions, un modèle mécanique externe, représenté par l'équation mécanique de la machine, suffit pour décrire l'interaction de la machine avec sa charge. Cette équation s'écrit sous la forme **[95]** :

$$J_m \frac{\partial \Omega}{\partial t} + f\Omega + C_{ch} = C_{em} \qquad \text{(IV.35)}$$

En fonction de la position du rotor, la vitesse de rotation de ce dernier s'écrit :

$$\Omega = \frac{\partial \theta}{\partial t} \qquad \text{(IV.36)}$$

Le couplage de l'équation mécanique de la machine avec le modèle magnétodynamique s'obtient directement en exprimant le couple électromagnétique développé en fonction des grandeurs magnétiques locales.

IV.5 Calcul du couple électromagnétique

Le couple électromagnétique d'une machine électrique à p paires de pôles exprimé par le tenseur de Maxwell s'écrit :

$$\Gamma = p \frac{rl}{\mu_0} \int_{\gamma} B_r B_\theta \, d\gamma \qquad \text{(IV.37)}$$

r est le rayon du cercle γ passant dans l'entrefer et l la longueur de la machine. En remplaçant B_r et B_θ, il vient :

$$\Gamma = -p \frac{rl}{\mu_0} [A]_E^T [T][A]_E \qquad \text{(IV.38)}$$

$[A]_E^T$ est la matrice transposée de la matrice $[A]_E$ des valeurs nodales du champ A dans le macro-élément et $[T]$ une matrice carrée de dimensions n_{tot} et dont le terme général est donné par :

$$t_{ij} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \theta} d\theta = \frac{\theta_0}{2} \sum \frac{{p_k}^2}{r} \frac{\left\{ \left(\frac{r}{c}\right)^{pk} + \left(\frac{c}{r}\right)^{pk} \right\} \left(\frac{r}{e}\right)^{pk} - \left(\frac{e}{r}\right)^{pk}}{\left\{ \left(\frac{c'}{c}\right)^{pk} - \left(\frac{c}{c'}\right)^{pk} \right\} \left\{ \left(\frac{e'}{e}\right)^{pk} - \left(\frac{e}{e'}\right)^{pk} \right\}} \left(A_{ki} B_{kj} - B_{ki} A_{kj} \right) \qquad \text{(IV.39)}$$

Avec : $e = \begin{array}{llll} R_S & et \quad e' = R_R & si & j \in \{1, 2, \ldots.., n_{rot}\} \\ R_R & et \quad e' = R_S & si & j \in \{n_{rot} + 1, 2, \ldots.., n_{tot}\} \end{array}$

Et : $c = \begin{array}{llll} R_S & et \quad c' = R_R & si & i \in \{1, 2, \ldots.., n_{rot}\} \\ R_R & et \quad c' = R_S & si & i \in \{n_{rot} + 1, 2, \ldots.., n_{tot}\} \end{array}$

IV.6 Conclusion

Nous venons d'aborder au cours de ce chapitre la mise en équations du modèle magnétodynamique en régime transitoire, et ce, avec le couplage des équations des circuits électriques. En régime transitoire, l'interaction mécanique de la machine est considérée par l'équation mécanique du mouvement. Nous avons également présenté dans ce chapitre, à travers une étude bibliographique, les techniques courantes de prise en compte du mouvement, en essayant de faire apparaître au mieux les avantages, les inconvénients ainsi que l'adéquation de chacune d'entre elles avec le cadre de leur adoption. La méthode du macro-élément a été largement détaillée vu que c'est la technique adoptée dans nos travaux. Enfin, un calcul du couple électromagnétique a été présenté.

CHAPITRE 5

Applications et validation

V.1 Introduction

Cette ultime partie intervient pour clôturer l'étude et la rattacher au but pour lequel elle est inscrite : modélisation bidimensionnelle couplée électrique-magnétique-mécanique par la méthode des éléments finis, dédiée à la simulation d'une machine asynchrone à cage. Les développements effectués jusque là ont porté sur le calcul du champ électromagnétique bidimensionnel avec couplage des équations des circuits électriques, intégrant la prise en compte du mouvement ainsi que la non-linéarité magnétique. Ce présent chapitre renfermera une succession de simulations effectuées sur un moteur asynchrone à cage qui constitue une application directe de la théorie et du modèle élaboré.

Selon l'objectif visé, la modélisation électromagnétique de la machine à induction est effectuée à l'aide du modèle magnétodynamique complexe lorsque nous nous intéressons au régime permanent, et à l'aide du modèle pas à pas dans le temps lorsqu'on s'intéresse aux régimes transitoires. Pour notre part, nous procéderons dans cette partie à la présentation de quelques simulations effectuées avec le modèle développé à travers des applications conduites aussi bien en régime harmonique que transitoire. Dans un premier temps, il s'agira d'effectuer une simulation du modèle magnétodynamique en régime harmonique linéaire. La particularité à y relever demeure la valeur de la perméabilité relative des tôles magnétiques statorique et rotorique à considérer. Le calcul mené repose sur une technique d'implémentation de la courbe de saturation. En second lieu, on effectuera une simulation du modèle magnétodynamique transitoire linéaire et non linéaire avec prise en compte du mouvement via la technique du macro-élément. Cette dernière simulation regroupera les situations correspondant aux fonctionnements en régimes à vide et de court-circuit pour le régime transitoire électrique. Enfin, une simulation à vide et en charge correspondant au régime transitoire électromécanique ponctue le travail.

La mise en équations de la machine asynchrone à cage conduit à un système matriciel. La résolution de ce dernier donne l'état magnétique du système et le courant dans les phases. On peut déduire aussi des grandeurs telles que le couple ou les courants rotoriques. En somme, une telle modélisation permet l'obtention de solutions et de réponses précises sur le comportement qualitatif et quantitatif des grandeurs électromagnétiques.

V.2 Validation du modèle magnétodynamique en régime harmonique linéaire

V.2.1 Présentation de la machine étudiée :

La machine sur laquelle porteront nos simulations est un moteur asynchrone à cage fabriqué en grande série par l'entreprise Leroy Somer, sujet des travaux développés en références **[89, 95]**. Les figures (V.1) et (V.2) illustrent respectivement une coupe droite de la machine ainsi que les dimensions des encoches statorique et rorique :

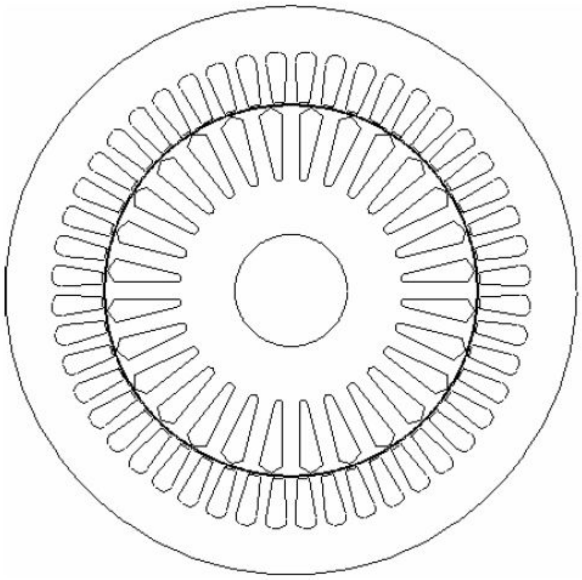

Figure V.1 : Coupe droite de la machine étudiée.

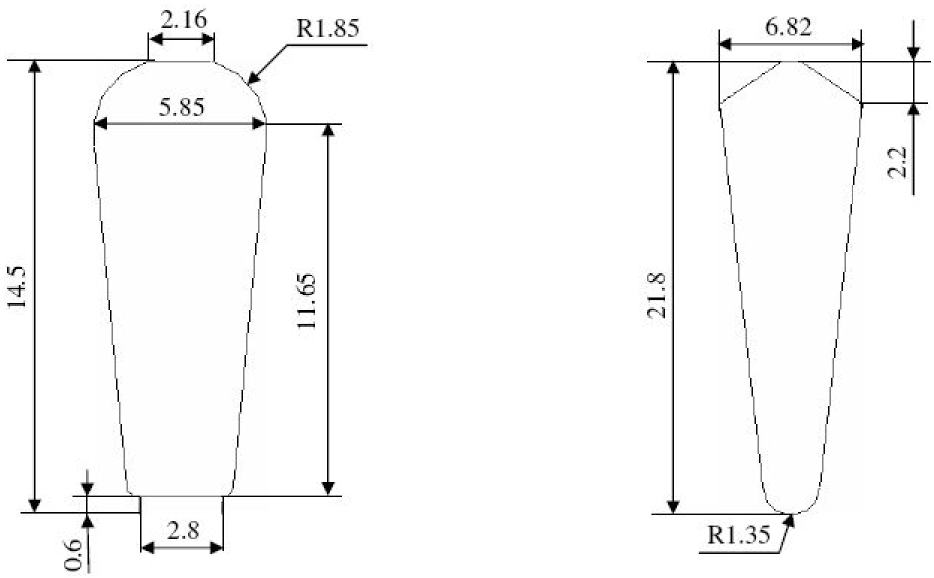

Figure V.2 : Dimensions des encoches : a) statorique, b) rotoriqe.

V.2.2 Caractéristiques nominales et dimensions géométriques du moteur

Les caractéristiques électromécaniques et les dimensions géométriques du moteur sont données par les deux tableaux suivants :

Caractéristique	**Valeur**	**Unité**
Puissance utile	5,5	KW
Nombre de phases	3	-
Fréquence d'alimentation	50	Hz
Nombre de pôles	4	-
Type d'enroulement	Concentrique	-
Nombre de conducteurs en série par phase	19	-
Connexion des enroulements	Etoile (Y)	-
Classe d'isolation	F	-
Nombre d'encoches au stator (semi-fermées)	48	-
Nombre d'encoches au rotor (fermées)	28	-
Résistance d'une phase au stator à 25°C	1,05	Ω
Tension d'alimentation	380	V
Glissement	4,13	%
Courant absorbé	11,62	A
Couple nominal	37	N.m
Facteur de puissance	0,865	-
Rendement	84,26	%

Tab.V.1 : Caractéristiques nominales du moteur étudié.

Composante	**Valeur**	**Unité**
Rayon extérieur du stator	84	mm
Rayon intérieur de la culasse statorique	69,5	mm
Rayon d'alésage	55	mm
Rayon extérieur du rotor	54,6	mm
Largeur de l'entrefer	0,4	mm
Rayon extérieur de la culasse rotorique	33,2	mm
Rayon de l'arbre	16,5	mm
Longueur utile	160	mm
Inclinaison des barres du rotor	7,5	degrés

Tab.V.2 : Dimensions géométriques du moteur étudié.

V.2.3 Modèle d'équations électromagnétiques

Le modèle adopté est un modèle électromagnétique bidimensionnel basé sur la méthode des éléments finis, intégrant les équations de Maxwell pour la partie magnétique couplées à une représentation du circuit électrique de la machine. Le modèle de départ est celui des équations de Maxwell qui constitue le formalisme de base pour la description de l'ensemble des phénomènes électromagnétiques, gouvernés par des modèles d'équations aux dérivées partielles spatio-temporelles reliant les champs magnétiques et électriques. Pour la formulation du problème magnétodynamique harmonique, nous avons utilisé celle en potentiel vecteur magnétique. Afin de parvenir à un couplage électrique-magnétique, les circuits électriques au stator et dans la cage rotorique sont pris en compte.

L'équation en potentiel vecteur magnétique dans les différentes régions de la machine s'écrit :

$$r\vec{o}t\left(\frac{1}{\mu}\left(r\vec{o}t\,\vec{A}\right)\right)=\vec{J}$$

Le second terme de l'équation précédente permet de rendre compte des différentes régions de la machine :

$$\vec{J}=\begin{cases} 0 & \textit{Entrefer / carcasse / tôles} \\ \beta\dfrac{N_{cond}I_s}{S_{cu}}\vec{n} & \textit{Conducteurs des phases du stator} \\ -\sigma\left(j\,g\,\omega_s\,\vec{A}+\dfrac{U_r}{l}\vec{n}\right) & \textit{Barres / anneaux de la cage du rotor} \end{cases}$$

La prise en compte des circuits électriques tant au stator qu'au rotor se fera respectivement par la considération des équations suivantes :

$$\overline{V}_s=\overline{Z}_s\overline{I}_s+j\,\omega_s\,N_s\,\frac{l}{S}\left\{\iint_{s+}\overline{A}_s dS-\iint_{s-}\overline{A}_s dS\right\}$$

$$\overline{I}_b=-j\sigma\,g\,\omega_s\left\{\iint_{s_b}\overline{A}\,dS_b\right\}+\frac{1}{R_b}\overline{U}_b$$

V.2.4 Conditions aux limites

La résolution des équations précédentes s'accompagne de conditions aux limites de type Dirichlet imposées sur la frontière externe (carcasse) et interne (arbre), et de conditions de type anti-périodique sur les frontières verticale et horizontale. Dans un problème bidimensionnel, le domaine de résolution considéré dans le cas d'une machine électrique, correspond à la section transversale de cette dernière. Pour des raisons de symétrie ou de périodicité, géométrique ou électrique qui interviennent, la résolution du problème peut être effectuée seulement sur une portion du domaine global de résolution. Ainsi, nous supposons que le domaine choisi correspond à une période géométrique et les valeurs du champ sur les limites latérales sont liées par une condition d'antipériodicité :

$$A(x) = -A(x+d)$$

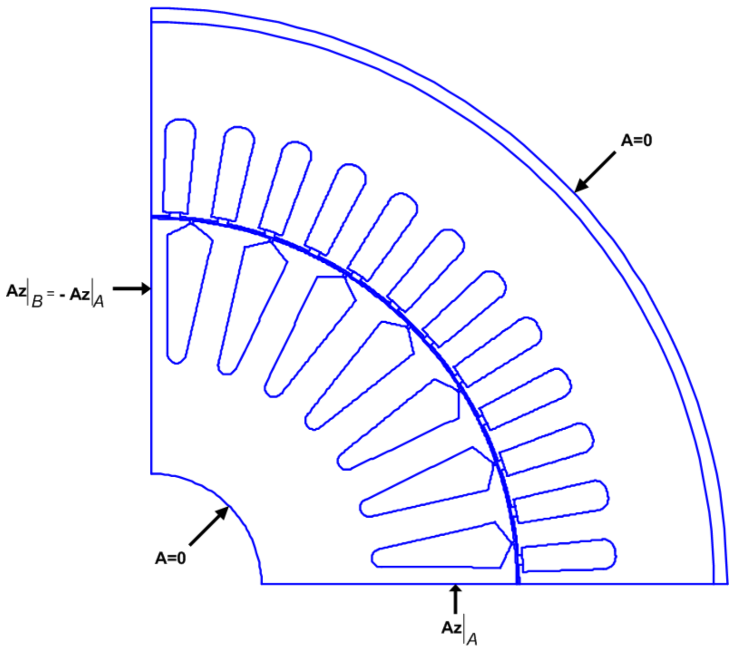

Figure V.3 : Conditions aux limites associées au domaine d'étude

V.2.5 Paramètres et propriétés électriques et magnétiques

Les propriétés physiques (magnétiques et électriques) relatives au modèle électromagnétique adopté sont définies dans les tableaux qui suivent :

Conductivité	Valeur	Unité
Arbre/air/carcasse	0	$[\Omega.m]^{-1}$
Culasse	$1,03.10^{6}$	$[\Omega.m]^{-1}$
Enroulement (cuivre)	$5,9.10^{7}$	$[\Omega.m]^{-1}$
Cage rotorique	$34,45.10^{6}$	$[\Omega.m]^{-1}$

Tab.V.3 : Conductivité électrique des différents éléments de la machine.

	0 Bobine manquante	1 Bobine manquante	2 Bobines manquantes
$R_s(\Omega)$	2,2	1,8	1,4
L_{tb}(mH)	0,35	0,27	0,2

Tab.V.4 : Résistance et inductance de fuite des têtes de bobine (par phase).

Région	Perméabilité relative
Encoche (enroulement)	1
Cage rotorique	1
Arbre	1
Carcasse	1

Tab.V.5 : Perméabilité relative des différents éléments de la machine.

Pour la perméabilité des tôles statorique et rotorique, nous avons utilisé une courbe de saturation suivant la démarche suivante :

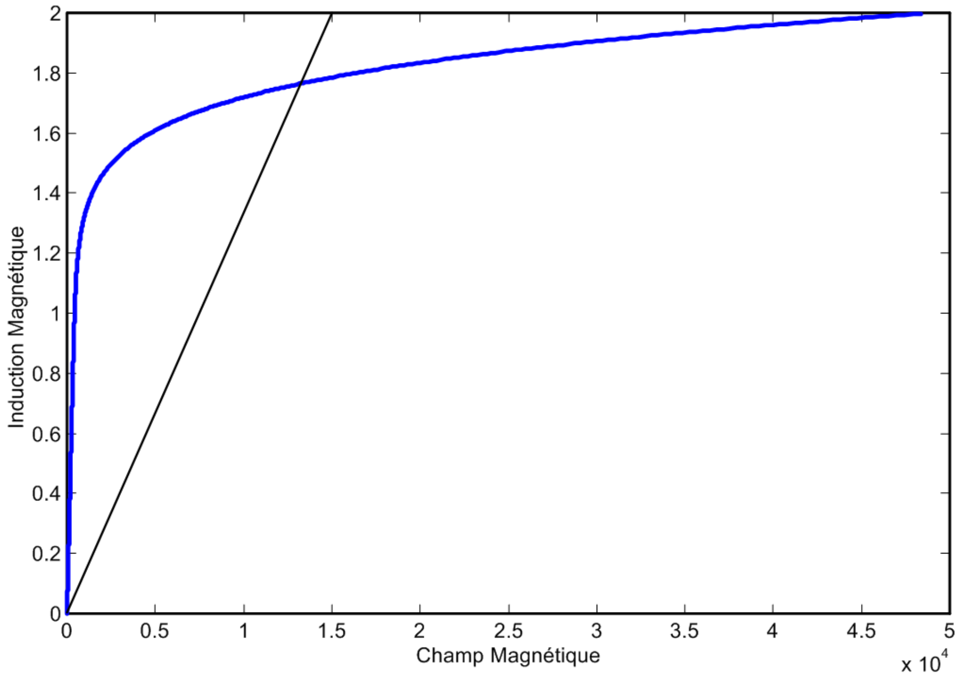

Figure V.4 : Courbe de saturation.

Pour simplifier l'implantation d'une telle caractéristique dans le logiciel, nous utilisons la forme analytique suivante pour la réluctivité relative :

$$\nu_r(B^2) = \nu_i + (\nu_f - \nu_i)\frac{(B^2)^\alpha}{(B^2)^\alpha + \tau}$$

Les différents paramètres de la formule sont :

	ν_i	ν_f	α	τ
Statique	251,33 . 10^{-6}	2,3610 . 10-3	14,033	15,278 . 10^3

Tab.V.6 : Paramètres de la courbe de saturation.

V.2.6 Implémentation de la géométrie et maillage éléments finis

La géométrie de la structure bidimensionnelle de la machine asynchrone étudiée est exécutée par un code de calcul développé sous environnement MATLAB PDETOOL. La figure (V.8) consacre une vue radiale de la machine :

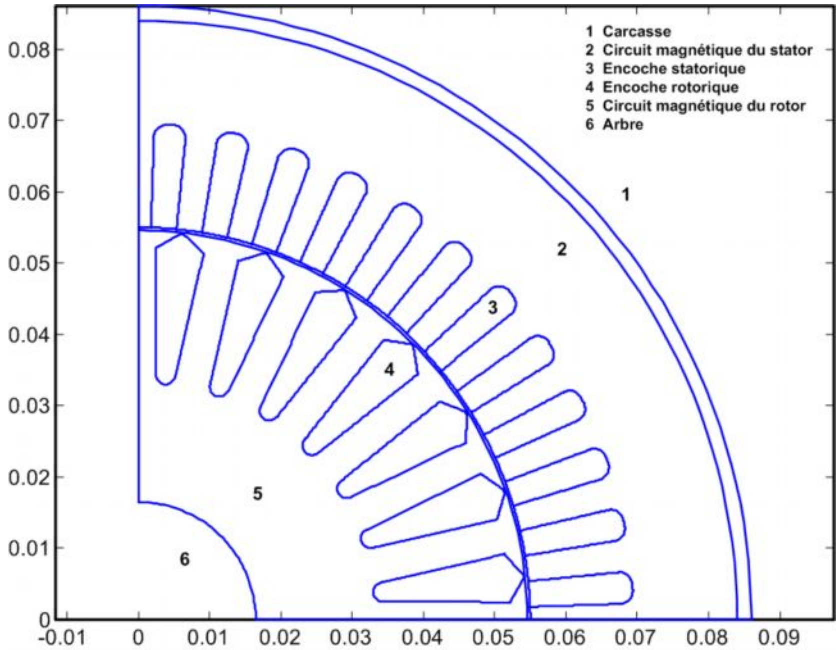

Figure V.5 : Géométrie de la machine asynchrone étudiée.

Le maillage élément finis de la structure est généré en utilisant le mailleur du logiciel FEMLAB qui offre une meilleure performance que le mailleur de MATLAB. Néanmoins, la topologie du maillage qu'il génère diffère de celle que donnerait le mailleur de MATLAB, il est donc indispensable de pouvoir réaliser un interfaçage des caractéristiques du maillage obtenu en vue de l'adapter aux fonctionnalités des outils de MATLAB PDETOOL. La figure (V.10) représente le maillage éléments finis du domaine d'étude utilisé, présentant 25276 triangles et 12810 nœuds.

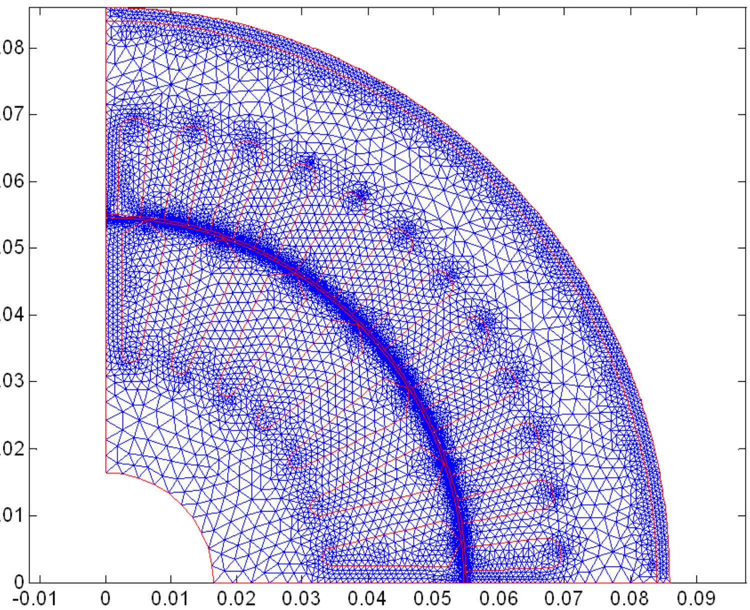

Figure V.6 : Maillage éléments finis de la machine.

V.2.7 Exploitation

Le calcul pour la résolution du problème magnétodynamique harmonique linéaire a demandé un temps de résolution estimé à 25min. L'exécution du calcul s'est faite avec un ordinateur DELL, Intel(R) Pentium (R) M, (Processor 1.73GHz, 797MHz, 1Go RAM).

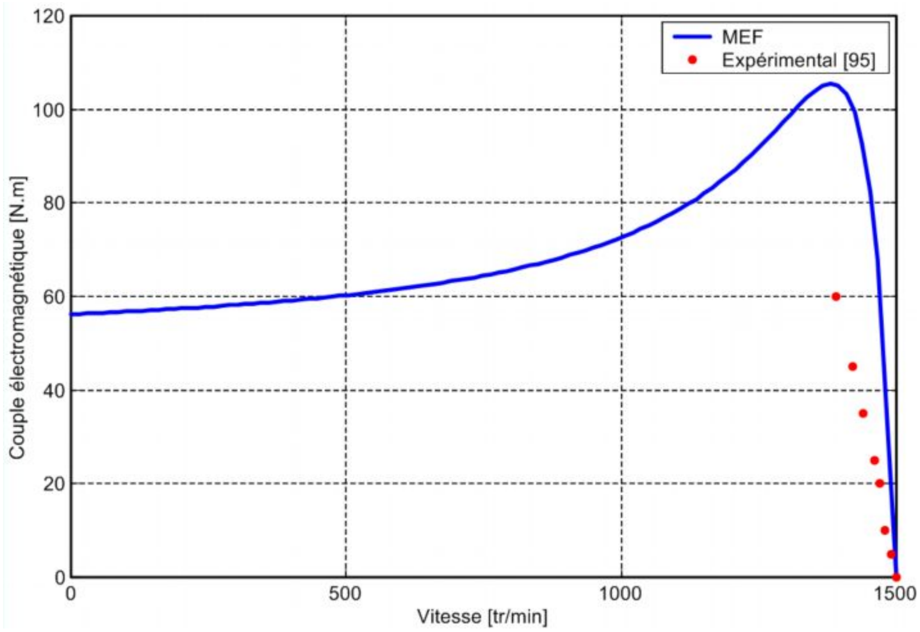

Figure V.7 : Caractéristique mécanique – couple en fonction de la vitesse.

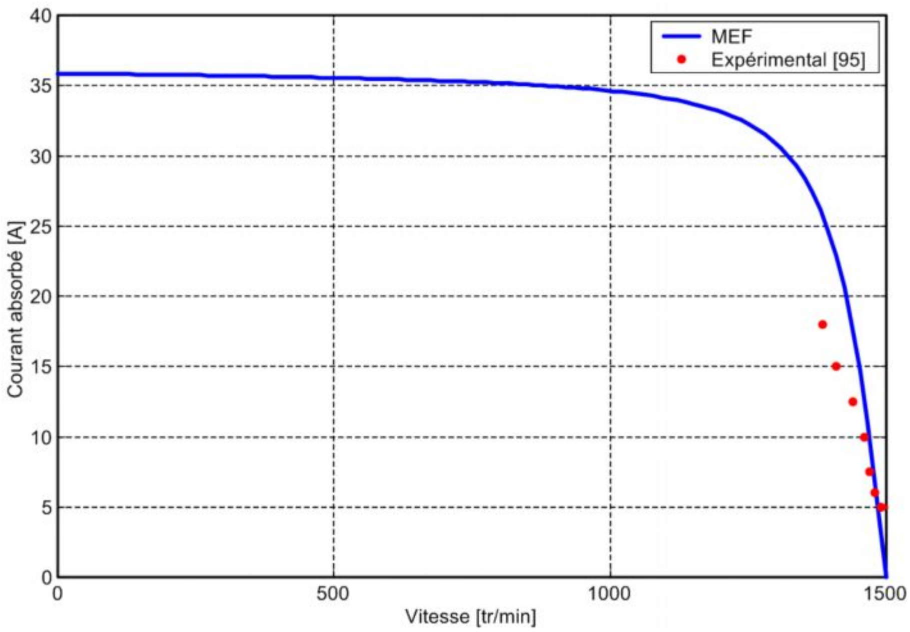

Figure V.8 : Caractéristique du courant en fonction de la vitesse.

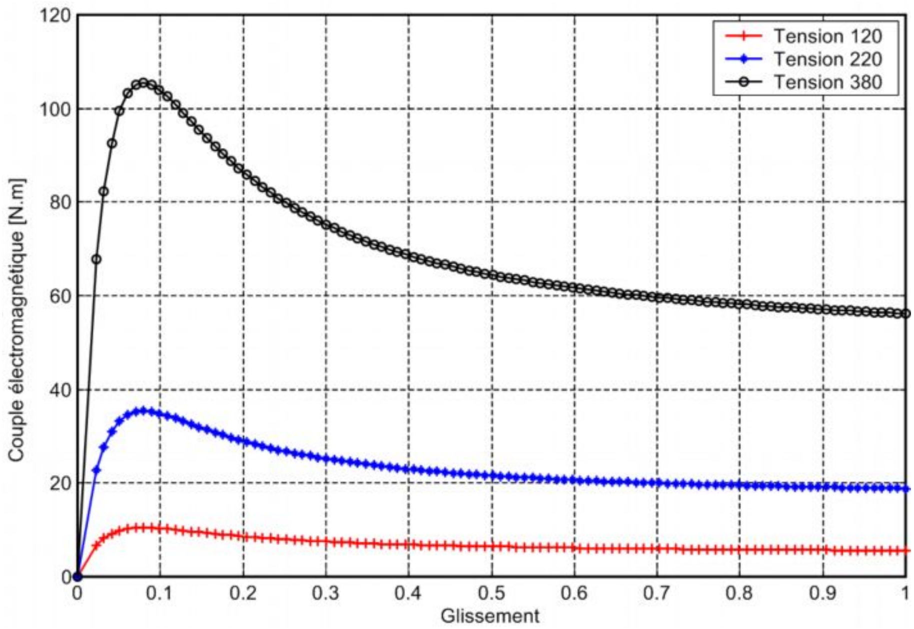

Figure V.9 : Relevé de la caractéristique Couple-Glissement pour diverses valeurs de la tension.

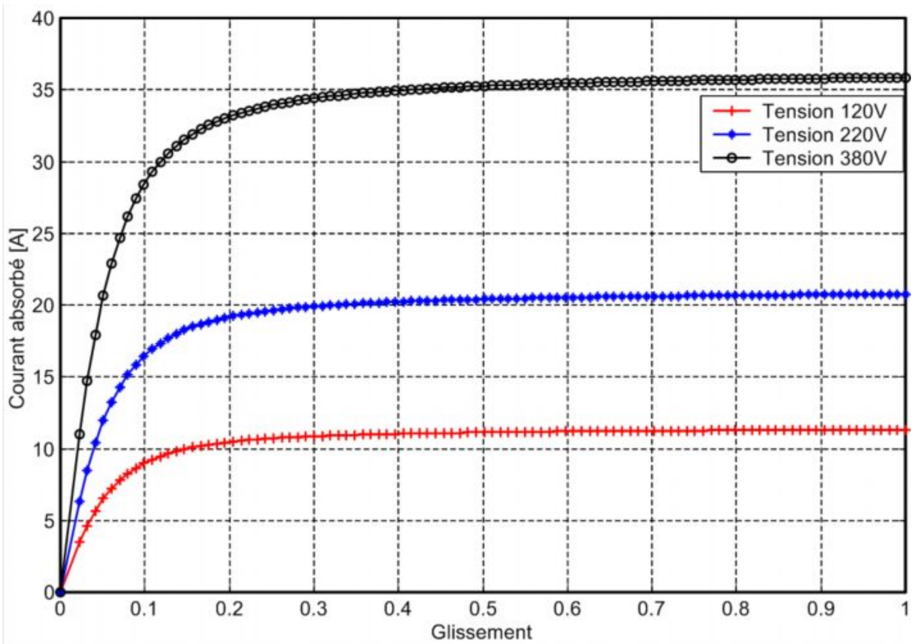

Figure V.10 : Relevé de la caractéristique Courant-Glissement pour diverses valeurs de la tension.

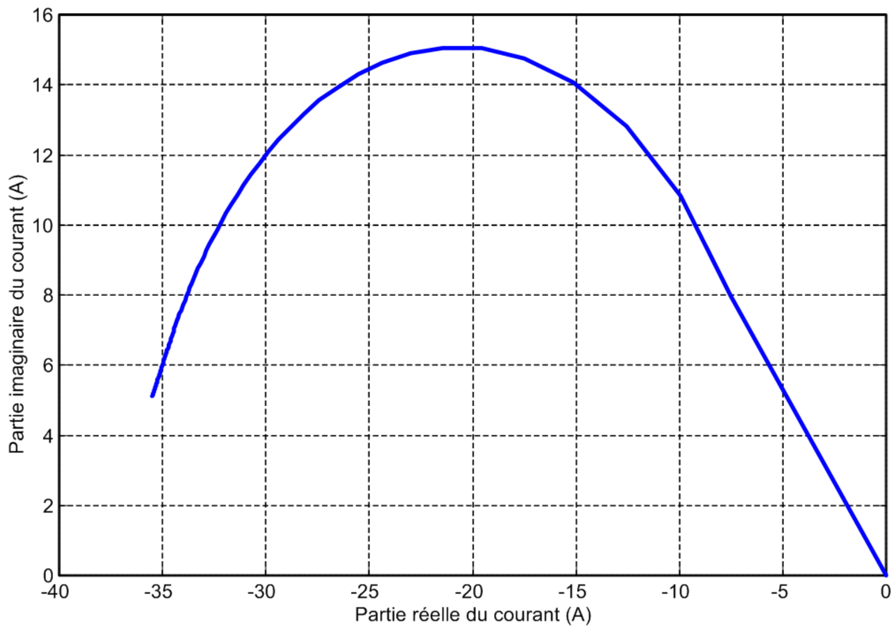

Figure V.11 : Tracé de la partie réelle et imaginaire du courant.

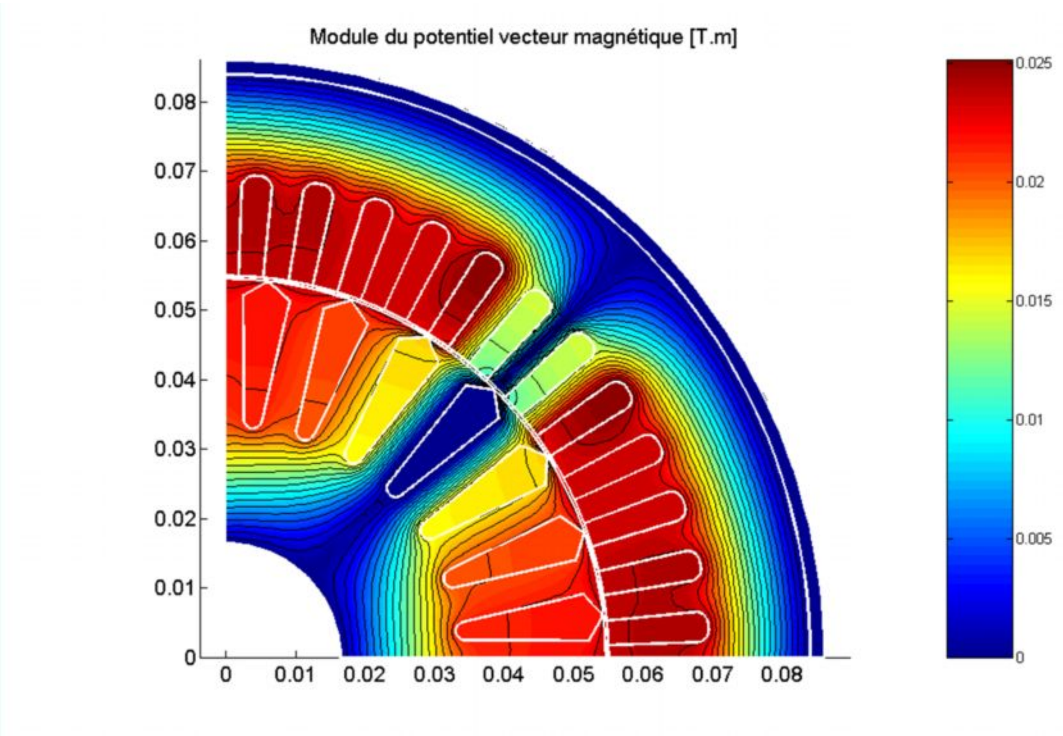

Figure V.12 : Répartition spatiale du module du potentiel vecteur magnétique.

V.2.8 Résultats

Sur la figure (V.7) sont données les caractéristiques mécaniques du couple en fonction de la vitesse, l'une obtenue par notre modèle, l'autre étant une œuvre de travaux de référence **[89, 95]**. De même, les caractéristiques donnant le courant en fonction de la vitesse obtenues par notre modèle et par les relevés expérimentaux de référence sont illustrées sur la figure (V.8). Ces premiers résultats laissent en fait apparaître une corrélation évidente entre les deux modèles, permettant ainsi la validation du travail développé. Les figures (V.9) et (V.10) présentent les tracés des caractéristiques couple-glissement et courant-glissement pour différentes tensions d'alimentation. Une concordance parfaite est aussi à signaler comparativement aux résultats recueillis dans **[16]**. A signaler que la perméabilité qui a été prise en compte est symbolisée par une droite tracée entre la zone linéaire et celle de saturation dans la courbe de magnétisation. Ce qui traduit une idée fort intéressante permettant de prendre en quelque sorte les deux zones citées en considération.

V.3 Validation du modèle magnétodynamique transitoire

La non-linéarité de la caractéristique magnétique et la rotation du moteur nécessitent a priori une résolution de type pas à pas dans le temps pour analyser l'évolution du champ dans une machine.

V.3.1 Modèles d'équations

L'équation de diffusion du champ électromagnétique s'écrit sous la forme suivante :

$$r\vec{o}t\left(\frac{1}{\mu}\left(r\vec{o}t\,\vec{A}\right)\right)+\sigma\left(\frac{\partial A}{\partial t}+gra\vec{d}\,V\right)=\vec{J}$$

La prise en compte des circuits électriques tant au stator qu'au rotor se fera respectivement par la considération des équations suivantes :

$$u_s=R_s i_s+L_b\frac{di_s}{dt}+N_s l\int_{\Omega}\beta_s\frac{\partial A}{\partial t}d\Omega$$

$$u_n^r=R_r i_n^r+R_r\int_{\Omega}\beta_n^r\sigma\left\{\sum_{j=1}^{N_n}\frac{\partial A_j}{\partial t}N_j\right\}d\Omega$$

V.3.2 Etude du régime transitoire électrique

V.3.2.1 Description des simulations effectuées

On s'intéresse dans cette partie à l'étude du régime transitoire électrique où la vitesse de la machine est considérée constante. Cela peut avoir lieu lorsque la machine fonctionne en régime permanent, à une vitesse de rotation donnée et où on coupe brusquement l'alimentation durant un intervalle de temps suffisant pour annuler les courants dans les phases sans changement de vitesse. La machine continue à tourner avec son inertie, ensuite on réalimente la machine. Les calculs ont été menés en 2D en perspective des simulations suivantes :

- Régime à vide et nominal
- Régime à rotor bloqué

Ces simulations portent, rappelle t-on, sur la machine décrite dans la section (V.2.1).

V.3.2.2 Maillage éléments finis

Au cours des calculs effectués dans l'étude de ce régime transitoire, un problème relatif au maillage du domaine d'étude est apparu. Si le maillage adopté en régime transitoire électrique à rotor bloqué n'a causé point de soucis dans la mesure où la matrice du macro-élément n'est calculée qu'une seule fois, le même maillage a, en revanche, causé de sérieux désagréments en terme de temps de résolution en régimes électrique à vide et électromécanique en charge. Effectivement, un nombre de nœuds important sur la frontière liant le macro-élement au rotor, conjugué au processus itératif non linéaire mené dans les calculs conduirait vers un temps de résolution prohibitif. Pour parer à cet inconvénient, il a été question de générer un maillage avec une densité suffisamment appréciable. Cela consiste à réduire le nombre de nœuds sur la frontière du rotor. Ceci nous a forcé en outre à apporter quelques changements au niveau de la géométrie, particulièrement les formes des encoches. Les figures suivantes illustrent enfin les maillages adoptés pour les différentes simulations. Le maillage de la figure (V.13) renferme 3204 nœuds et 5623 triangles. Le nombre de nœuds sur la frontière du rotor est 960. Le maillage de la figure (V.14) présente un nombre de nœuds égal à 1012 et un nombre de triangles égal à 1728. Le nombre de nœuds sur la frontière du rotor a été réduit à 185.

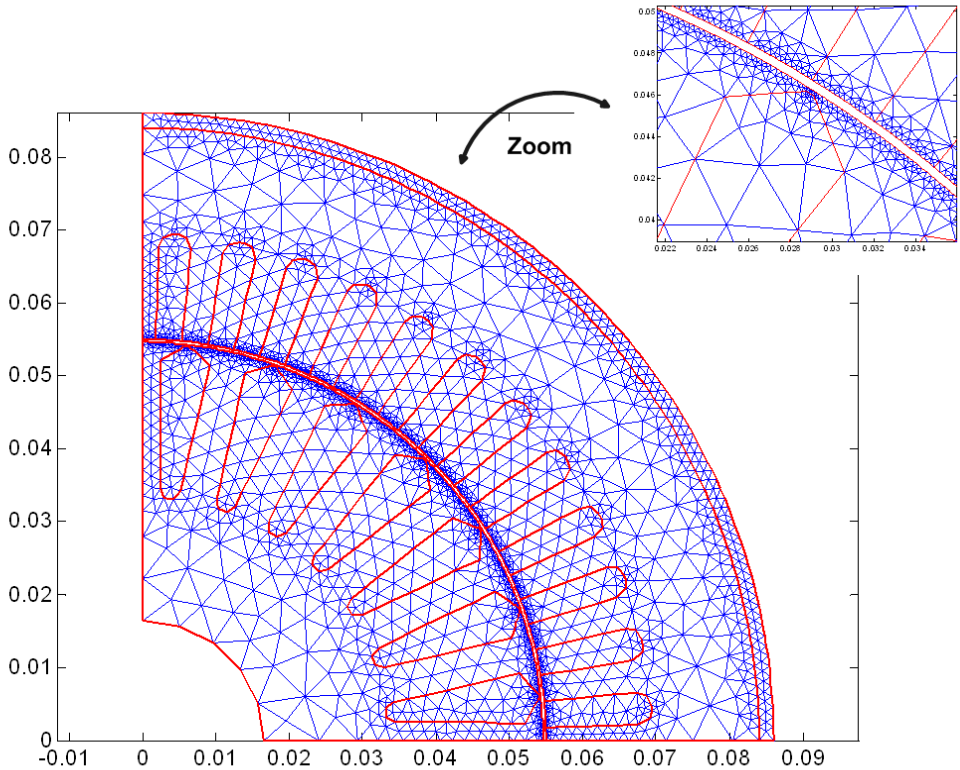

Figure V.13 : Maillage éléments finis correspondant au régime à rotor bloqué

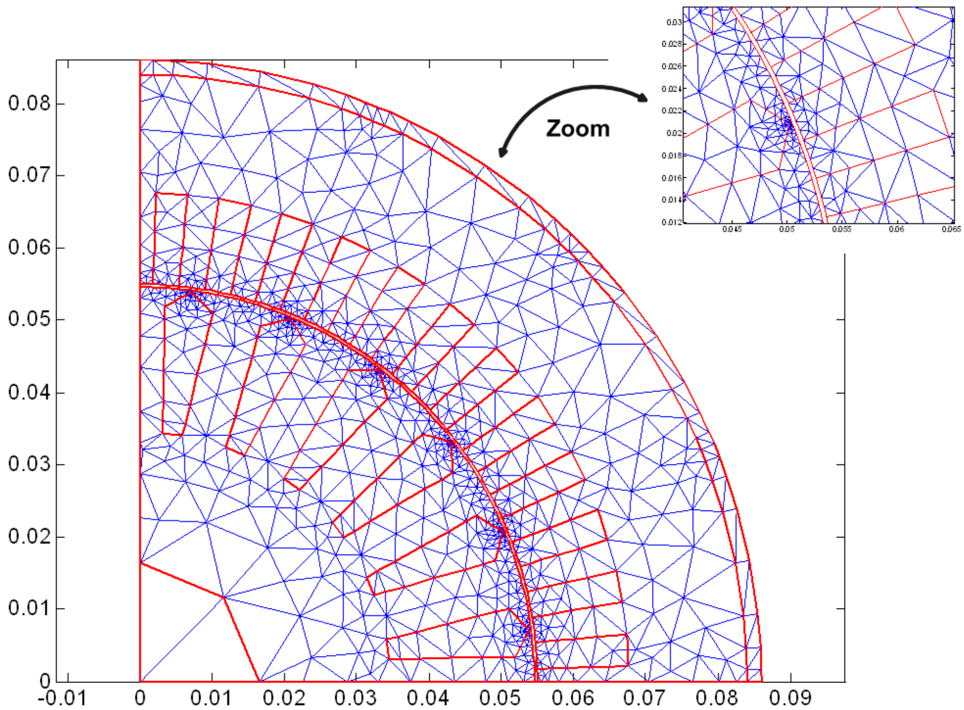

Figure V.14 : Maillage éléments finis correspondant au régime à vide.

V.3.2.3 Exploitation du régime transitoire électrique à vide et nominal

Le fonctionnement à vide du moteur correspond à un glissement presque nul sous tension nominale. La vitesse est fixée dès le départ à 1495 tr/mn, ce qui engendre un transitoire numérique qui n'influence pas le régime permanent obtenu en fin de simulation.

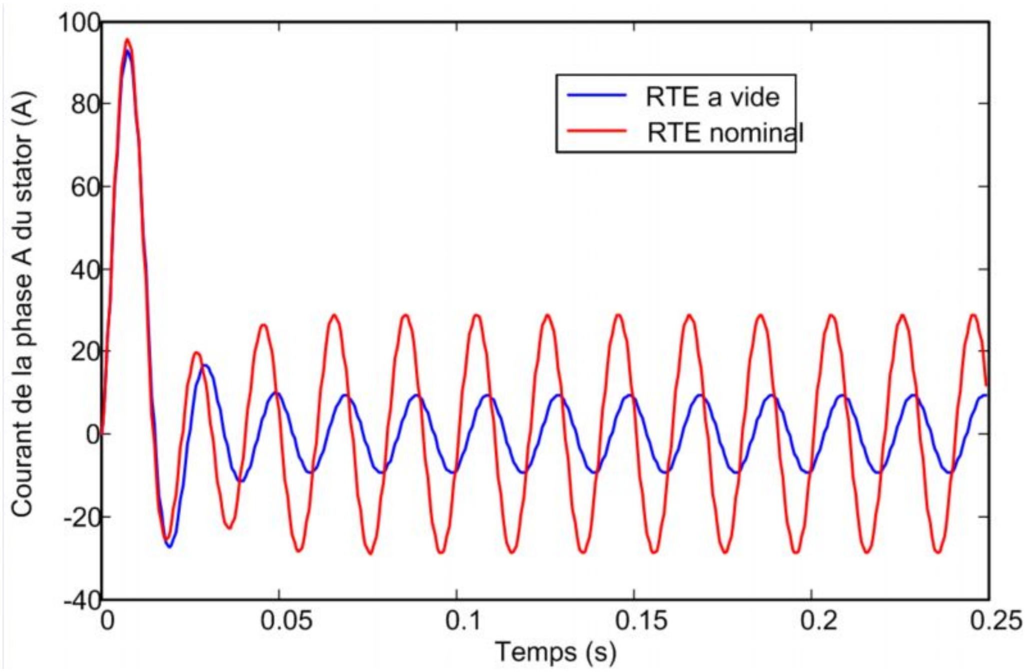

Figure V.15 : Courant de la phase A correspondant au régime à vide nominal

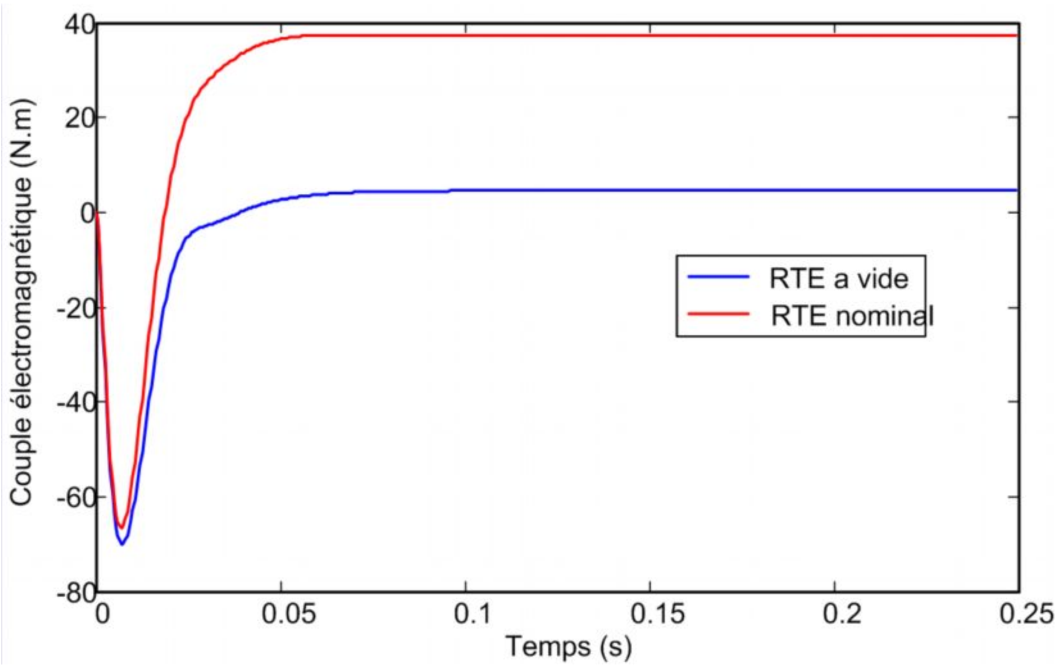

Figure V.16 : Couple électromagnétique développé correspondant aux régime à vide et nominal.

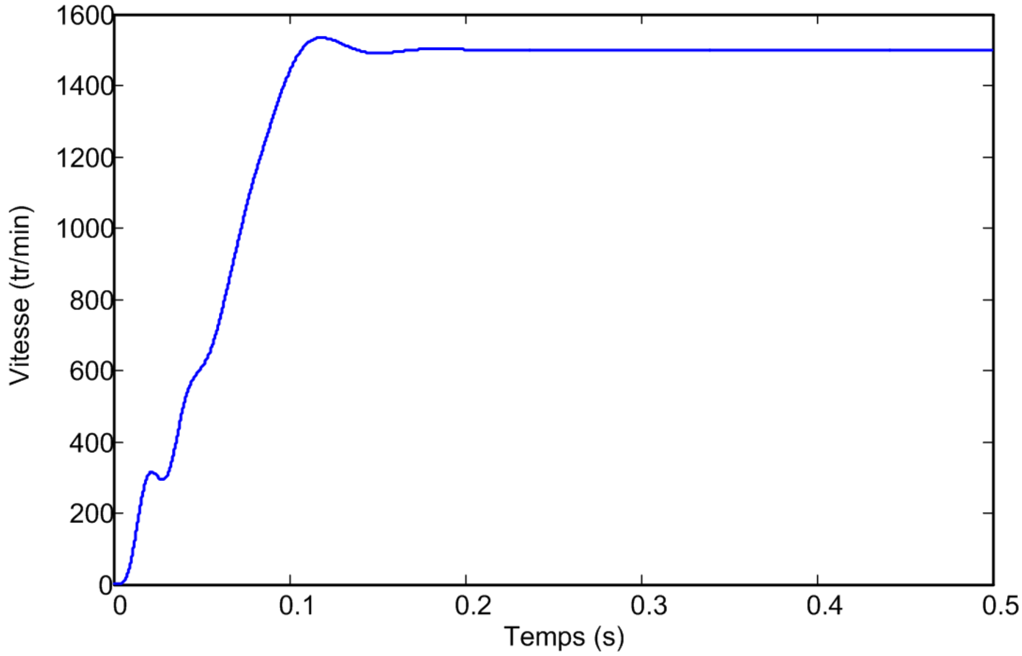

Figure V.17 : Caractéristique de la vitesse.

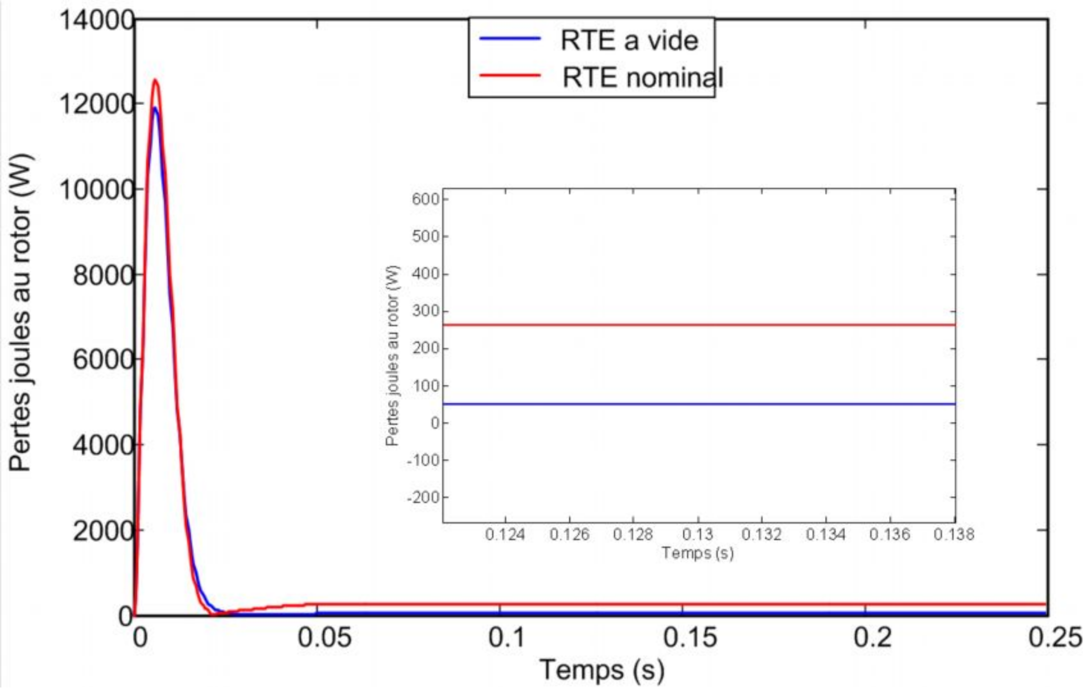

Figure V.18 : Pertes par effet Joule au rotor

V.3.2.4 Exploitation du régime transitoire électrique à rotor bloqué

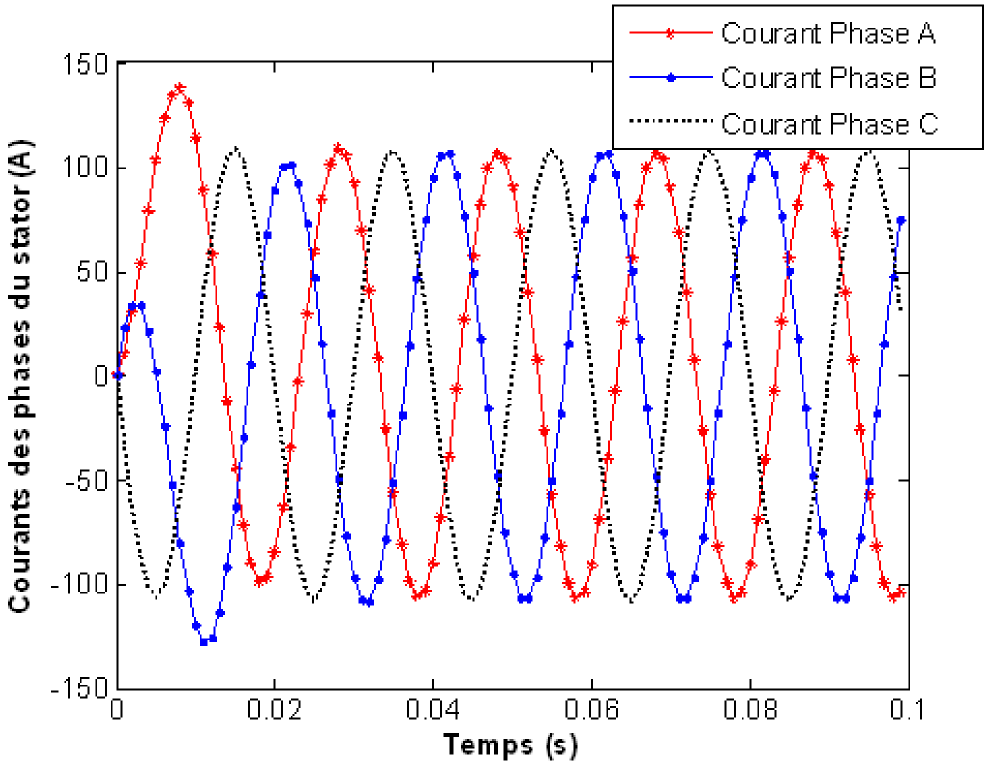

Figure V.19 : Courants des phases du stator pour la machine en régime linéaire à rotor bloqué.

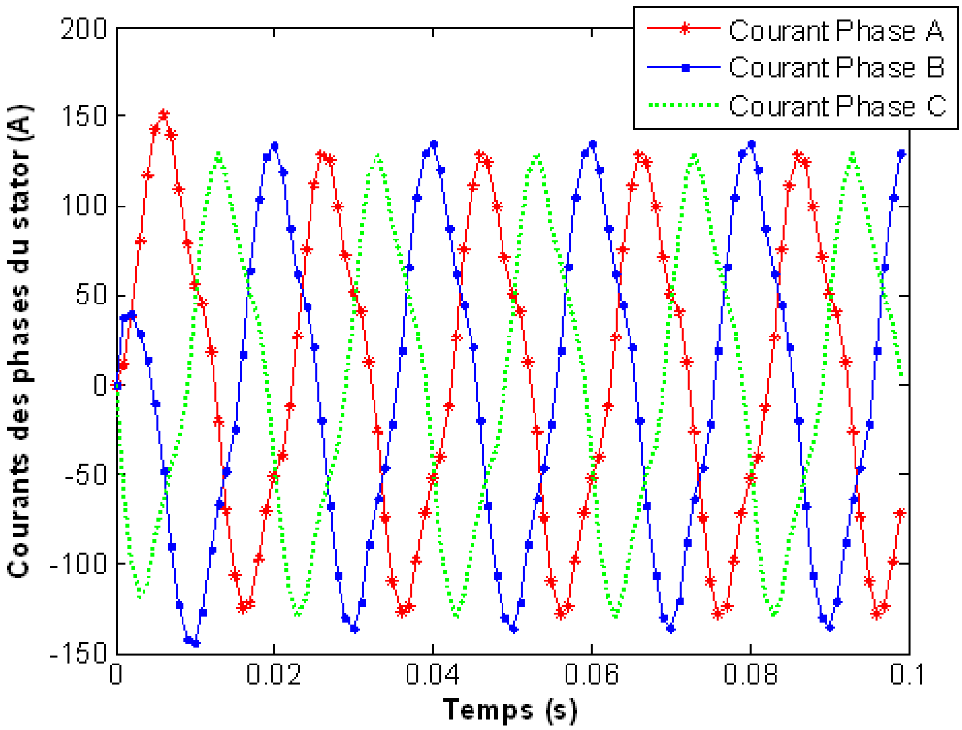

Figure V.20 : Courants des phases du stator pour la machine en régime non linéaire à rotor bloqué.

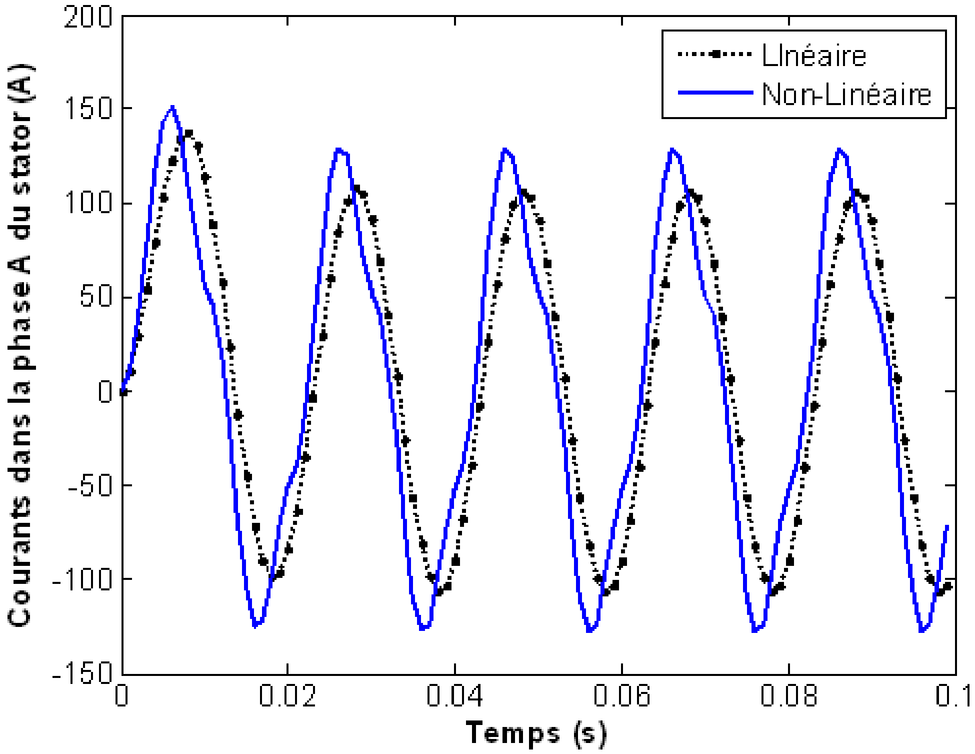

Figure V.21 : Courant dans la phase A de la machine en régime linéaire et non linéaire à rotor bloqué

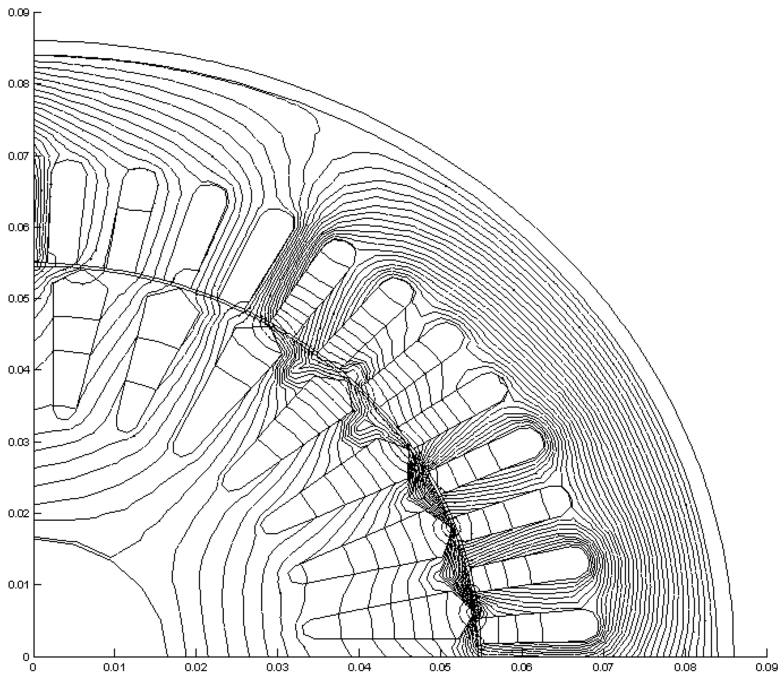

Figure V.22 : Isovaleurs du potentiel vecteur magnétique à l'instant t=0.05 sec

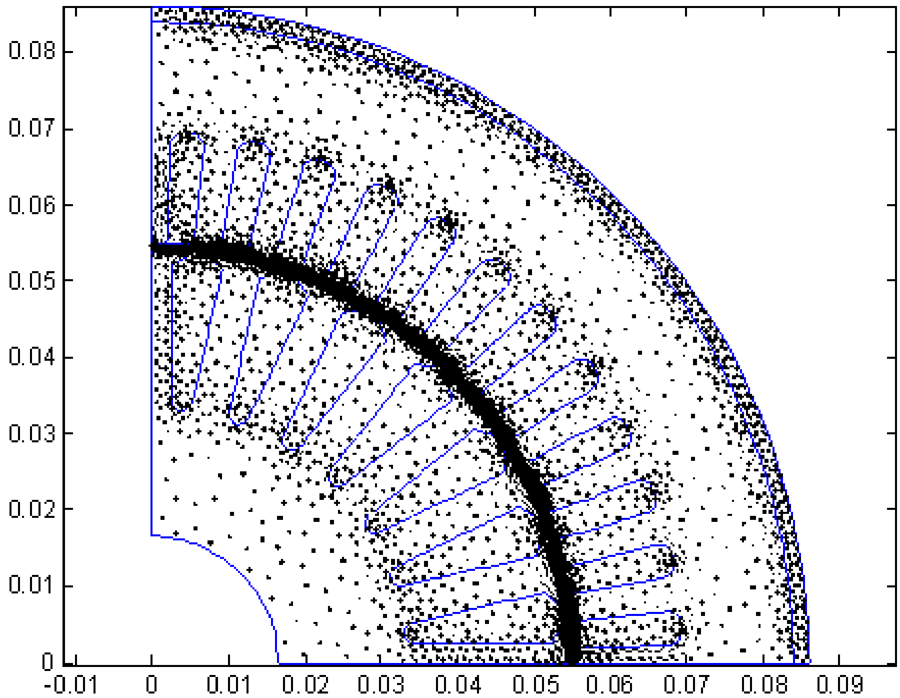

Figure V.23 : Induction magnétique a l'instant t=0.05 sec

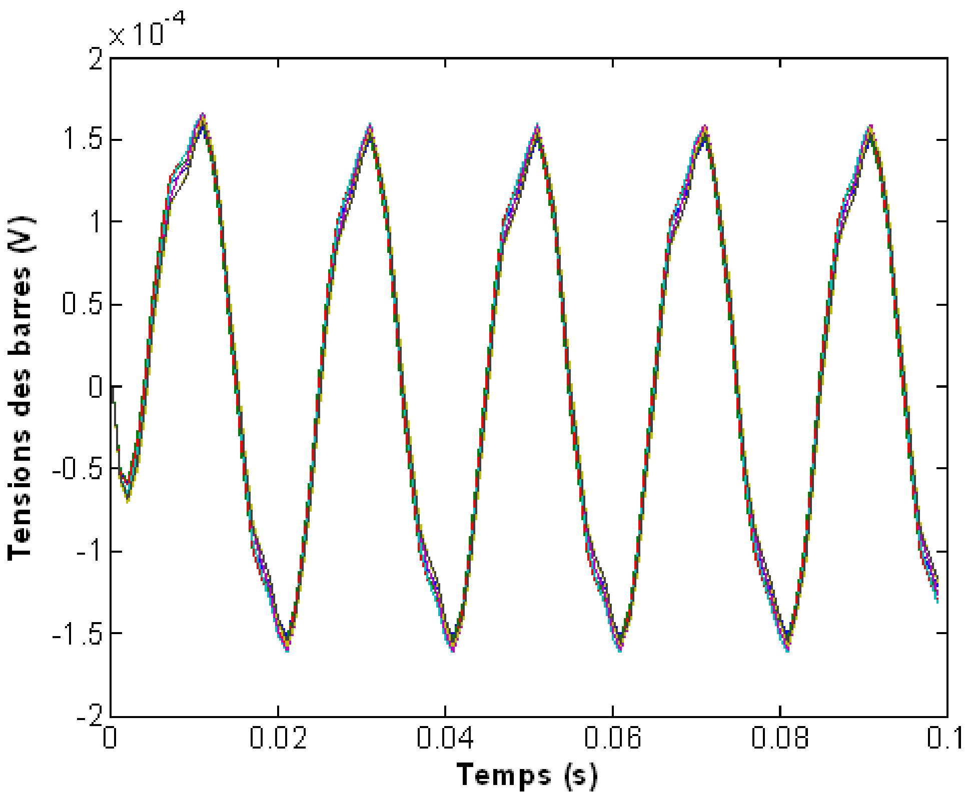

Figure V.24 : Tensions aux bornes des barres

V.3.2.5 Résultats

Les calculs ont été effectués sur un ordinateur STATION HP Compaq dx2300, Intel(R) Core(TM) 2CPU, (Processor 1,58 GHz, 3,24Go RAM). Le pas de temps retenu est $\Delta t = 50\mu s$. Le temps de résolution pour un pas de temps avec 5 à10 itérations du problème non linéaire est de 30 secondes. Ce temps de résolution s'avère en harmonie parfaite avec les recommandations de l'auteur de la référence **[25]**.

Régime transitoire électrique à vide

La première compagne de résultats est associée au calcul du régime à vide non linéaire. Ainsi, nous avons représenté l'évolution des courants de phase et du couple sur les figures (V.15), (V.16). Le courant absorbé en régime permanent présente une forme d'onde. Le couple électromagnétique est pratiquement nul en régime permanent. Ces tracés, donnant simultanément le courant/couple en régime à vide et nominal laissent apparaître une légère différence. Le tracé des pertes Joule au rotor est illustré sur la figure (V.18), tandis que celui de la vitesse est donné par la figure (V.17).

Régime transitoire électrique à rotor bloqué

La seconde compagne est à mettre à l'actif de la simulation à rotor bloqué pour un calcul linéaire et non linéaire. Les figures (V.19) et (V.20) donnent l'évolution des courants statoriques en régime linéaire et non linéaire respectivement. La non linéarité magnétique explique la petite déformation qui entache l'allure des courants. Les figures (V.22) et (V.23) représentent l'état magnétique de la machine. Nous pouvons y constater que la cage constitue un écran à la pénétration du champ à l'intérieur du rotor. La différence de potentiel dans une barre rotorique est donnée par la figure (V.24). Tous ces résultats sont en très bonne concordance avec les résultats fournis notamment par les références **[17, 95]**.

V.3.3 Etude du régime transitoire électromagnétique-mécanique

Les phénomènes couplés que nous chercherons à modéliser à travers cette partie proviennent de l'interaction entre le champ électromagnétique et la partie mécanique en mouvement sur laquelle sont exercés des efforts d'origine électromagnétique. Dans les machines à induction, lorsque nous cherchons seulement l'interaction de la machine avec sa charge, les problèmes électromagnétique et mécanique sont couplés par le couple électromagnétique produisant le mouvement du rotor. L'étude de ce couplage nécessite donc des méthodes précises pour le calcul du couple et pour la prise en compte du mouvement. La procédure de résolution du problème électromécanique est donnée ainsi :

- Résolution du problème magnétodynamique couplé aux circuits électriques définissant l'alimentation de la machine pour obtenir le potentiel vecteur dans le domaine éléments finis et les courants dans les circuits.
- Calcul du couple électromagnétique développé en fonction du potentiel vecteur par le tenseur de Maxwell.
- Résolution de l'équation mécanique par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, permettant d'avoir le déplacement.
- Estimation du nouveau déplacement pour le calcul suivant.

V.3.3.1 Exploitation du régime transitoire électromécanique à vide

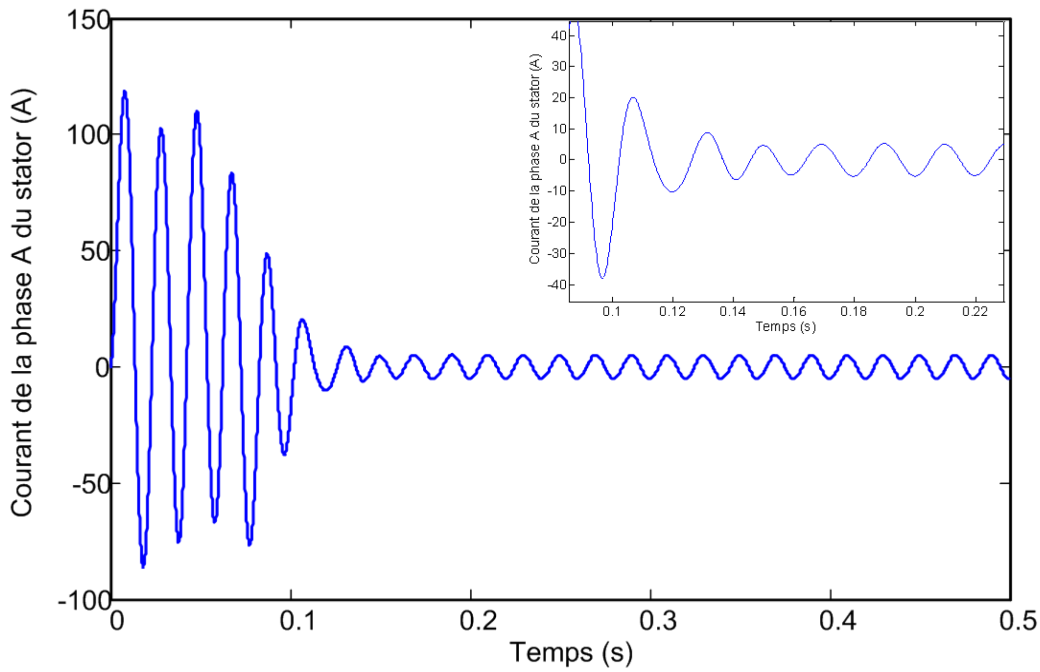

Figure V.25 : Courant de la phase A du stator à vide.

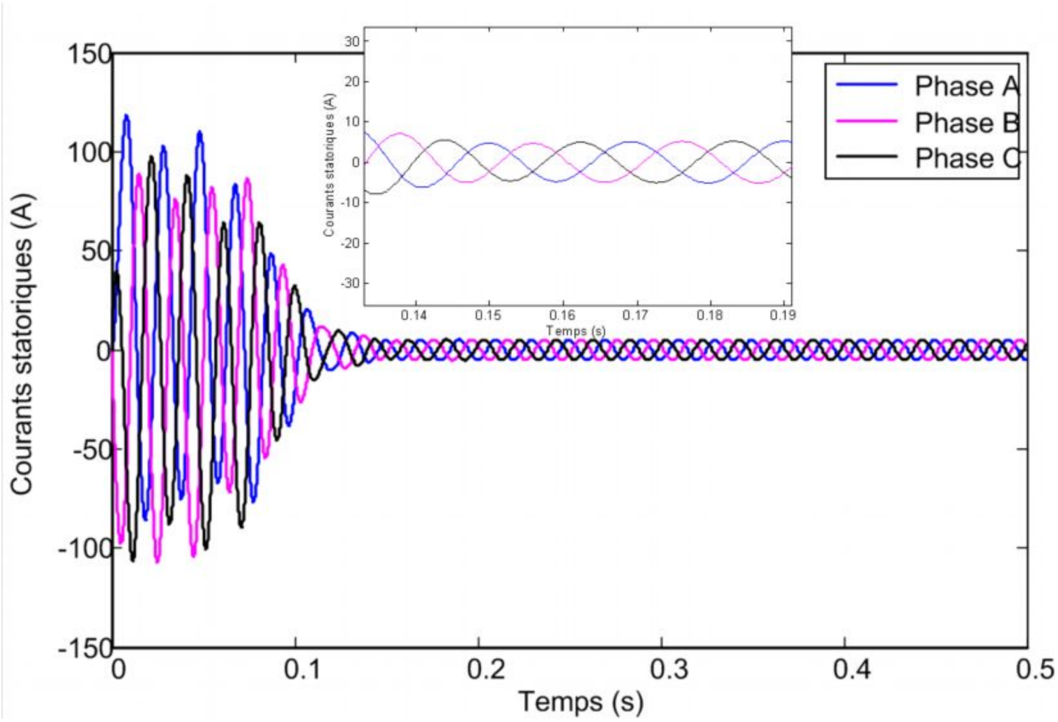

Figure V.26 : Courant absorbé pour les trois phases statoriques à vide.

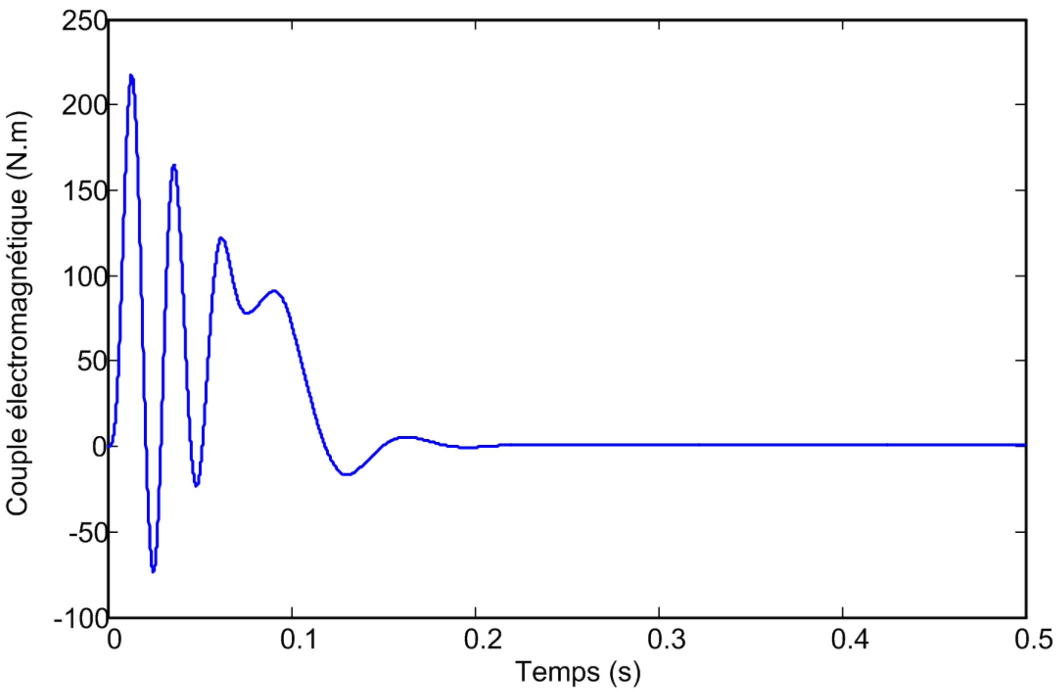

Figure V.27 : Couple électromagnétique développé à vide.

V.3.3.2 Régime transitoire électromécanique en charge

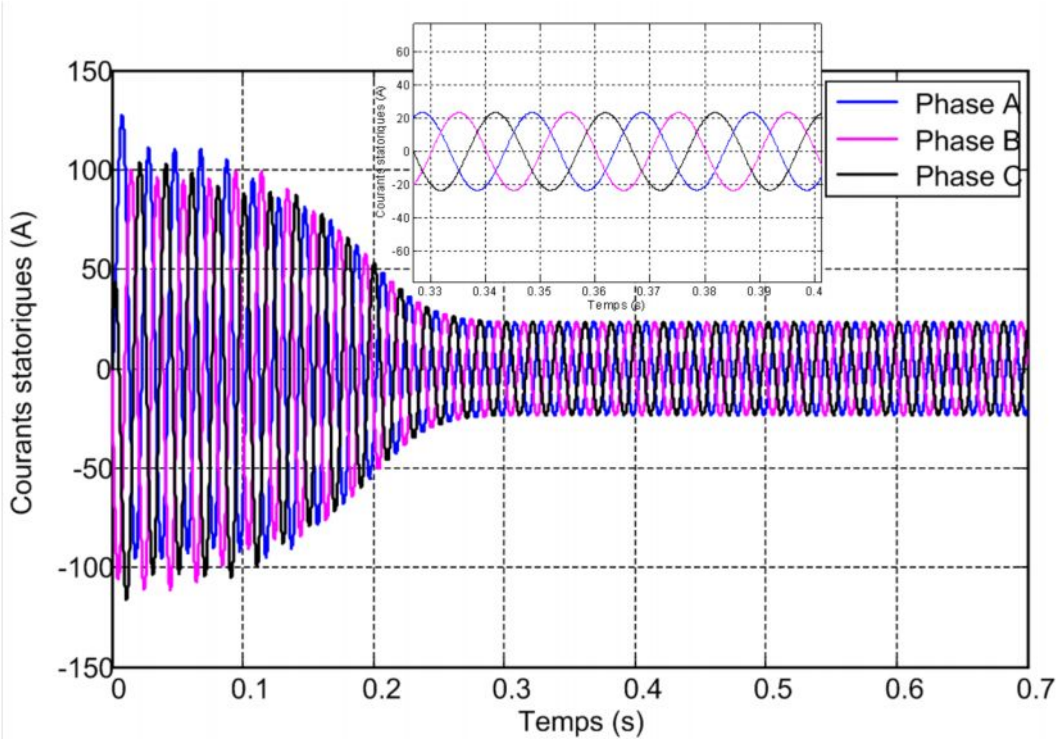

Figure V.28 : Courants des phases du stator

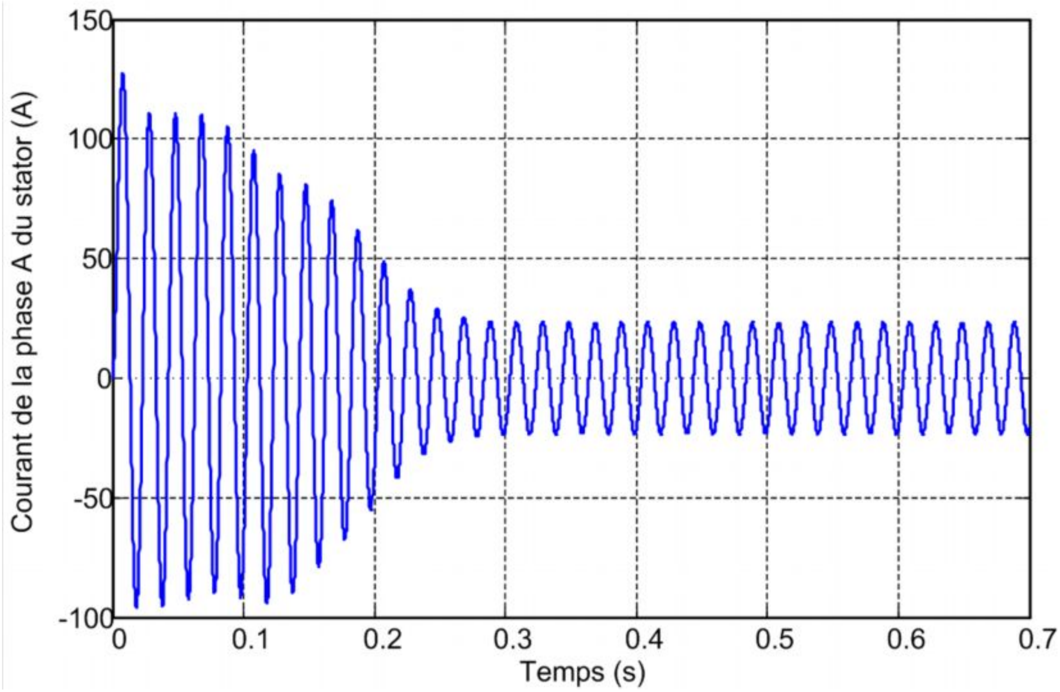

Figure V.29 : Tracé du courant de la phase A du stator

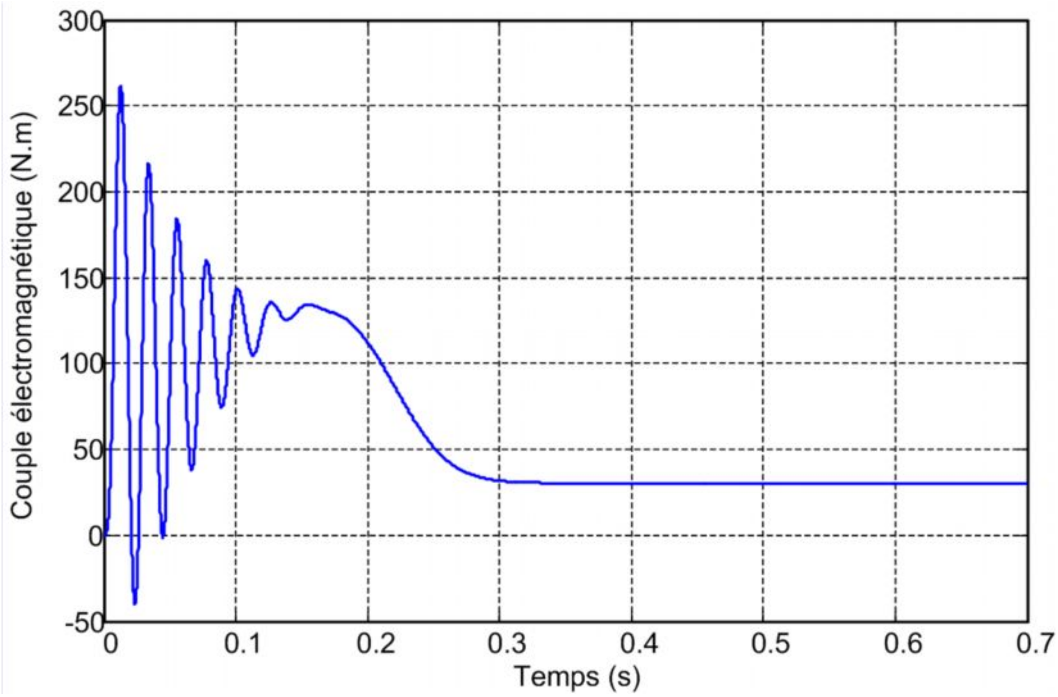

Figure V.30 : Tracé de la caractéristique du couple électromagnétique

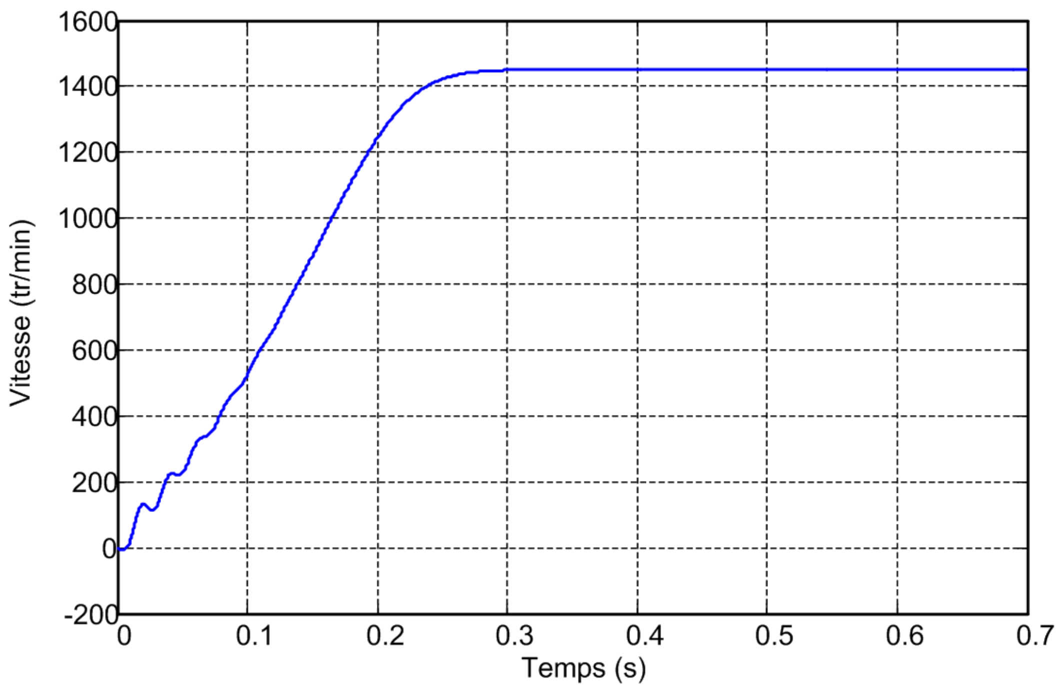

Figure V.31 : Tracé de la caractéristique de la vitesse

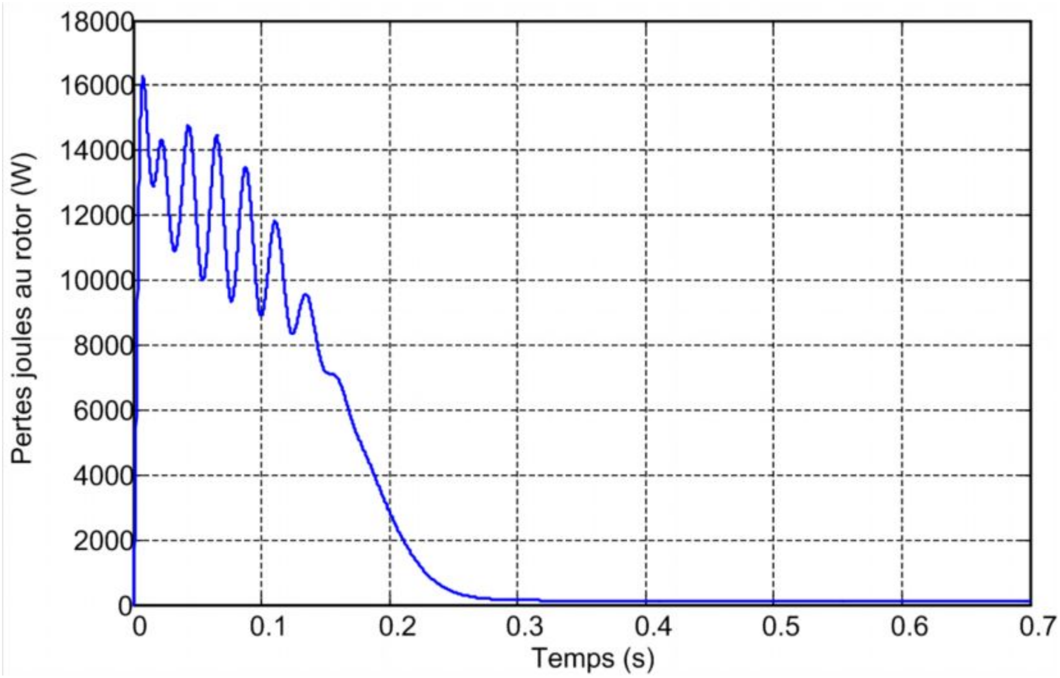

Figure V.32 : Pertes par effet joule au rotor

V.3.3.3 Résultats

La somme de la série de Fourier représentant le potentiel vecteur magnétique sur les frontières du macro-élément contient 200 termes. Le maillage éléments finis adopté étant identique à celui de la figure (V.14). La compagne de résultats obtenus en régime transitoire électromécanique à vide regroupe les caractéristiques des courants de phases et celle du couple électromagnétique (Figures V.25, V.26, V.27). En régime transitoire électromécanique en charge, nous avons tracé les caractéristiques des courants, du couple, de la vitesse et des pertes Joule au rotor (Figures V.28, V.29, V.30, V.31, V.32). A noter que la durée du régime transitoire électromécanique est une peu plus longue que celle du régime transitoire électrique.

V.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une validation du modèle magnétique-électrique-mécanique développé à travers les simulations suivantes :

- Modèle magnétodynamique complexe couplé aux circuits électriques dans le cas linéaire. Le point particulier aura été l'utilisation d'une perméabilité de tôles statorique et rotorique permettant de se situer entre la zone linéaire et la zone de saturation. Les résultats obtenus sont en bonne corrélation avec des relevés expérimentaux de référence.

- Modèle magnétodynamique couplé aux circuits électriques dans le cas du régime transitoire électrique. Les simulations à vide et en régime bloqué ont pris en compte la non-linéarité magnétique, incontournable lors de l'étude d'un régime transitoire. L'algorithme de Newton-Raphson a permis la concrétisation de cet aspect. La comparaison des résultats avec ceux provenant de travaux de référence a montré toute l'efficacité des codes de calcul développés.
- Modèle magnétodynamique couplé aux circuits électriques dans le cas du régime transitoire électromécanique non linéaire. Le modèle électromagnétique a été couplé au problème mécanique via le calcul du couple électromagnétique par le tenseur de Maxwell et la prise en compte du mouvement par la technique du macro-élément. La résolution de l'équation mécanique par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 fournit le déplacement. Les résultats trouvés concordent quantitativement et qualitativement avec les travaux d'autres auteurs.

Conclusion Générale

Conclusion Générale

Conclusion générale

Les travaux menés au cours de ce mémoire constituent une contribution dans le domaine de la modélisation numérique des structures électrotechniques 2D de façon générale et des machines électriques de façon particulière. Les modèles développés sont basés sur la résolution numérique des équations de Maxwell par la méthode des éléments finis, ce qui permet l'élaboration d'une représentation fidèle de la machine. L'attraction du travail aura été la présentation des bases de la modélisation des machines asynchrones à cage incluant différents aspects réputés d'envergure lorsqu'on on entreprend la tâche de les modéliser. Il s'agit notamment de l'aspect du couplage électrique-magnétique rendu nécessaire par les sources d'alimentation et les éléments du circuit électrique, qui, très souvent, limitent l'analyse des dispositifs électrotechniques. L'autre aspect est d'ordre mécanique, traduit par la prise en compte du mouvement de la partie mobile de la machine. Enfin, la non linéarité magnétique est également intégrée dans le modèle qui se présente ainsi très affiné par la prise en compte des ces trois aspects.

L'étude menée a fait l'objet de cinq parties. Dans les deux premières parties, nous nous sommes attelés à présenter la machine asynchrone ainsi que la méthodologie empruntée lors de sa modélisation élémentaire. Nous avons retenu alors le modèle électromagnétique interne basé sur la mise en place des équations de Maxwell. Le Modèle est basé sur une formulation magnétodynamique complexe, puis transitoire. Le traitement de ce modèle, en vue de sa résolution numérique par la méthode des éléments finis, a été étayé.

La partie suivante a consacré la présentation de l'interaction des circuits électriques et magnétiques via le couplage électrique magnétique dans la machine asynchrone. A cette fin, les équations magnétodynamiques complexes en terme de potentiel vecteur magnétique sont couplées aux équations des circuits électriques de l'enroulement statorique et de la cage rotorique.

L'avant dernière partie a été dédiée à la présentation d'un modèle couplé électrique-magnétique-mécanique en régime transitoire. La démarche repose sur une discrétisation pas à pas dans le temps, avec la conduite du schéma de Crank-Nicholson.

Concernant la prise en compte du mouvement, une synthèse des méthodes existantes en 2D a été présentée en mettant l'accent, au passage, sur la méthode du macro-élément. La mise en œuvre de cette technique, associée au calcul du couple électromagnétique permet en fait de coupler le modèle électromagnétique au modèle mécanique. Quant à la prise en compte de la non-linéarité magnétique, elle a été rendue possible en exécutant l'algorithme itératif de Newton-Raphson.

La machine asynchrone à cage est un dispositif électrotechnique qui offre un véritable test des différents développements effectués. Elle fait intervenir, en effet, une formulation magnétodynamique avec couplage des équations du circuit électrique, la prise en compte du mouvement, le calcul du couple et la prise en compte de la non-linéarité magnétique. Dans ce contexte, au niveau de l'application des modèles élaborés, nous avons exposé les résultats recueillis des simulations effectuées aussi bien en régime harmonique que transitoire. En régime harmonique linéaire, les principaux résultats obtenus sont les caractéristiques couple-vitesse et courant-vitesse. L'étude du régime transitoire a été scindée en deux parties. Dans un premier temps, nous avons fait simuler le régime transitoire électrique en tenant compte de la non-linéarité en fonctionnements à vide et à rotor bloqué. En second lieu, nous avons procédé à la résolution de l'équation mécanique aboutissant au déplacement. Ceci traduit alors le régime transitoire électromagnétique-mécanique. La comparaison entre les résultats obtenus avec ceux issus des travaux de référence témoigne de toute l'efficacité de nos modèles.

En perspective, les modèles que nous avons développés à travers ce travail peuvent être étoffés et complétés à travers la prise en compte entre autres des harmoniques d'espace ou de l'inclinaison des encoches du rotor. Une étude tridimensionnelle constituerait également un challenge certain.

.

Bibliographie

Bibliographie

[1] A.A.Abdel-Razek, J.L.Coulomb, M.Féliachi, J.C.Sabonnadière
"Conception of an air-gap element for the dynamic analysis of the electromagnetic field in electrical machines". IEEE Transaction On Magnetic, Vol.Mag-18, No 2, March 1982.

[2] A.A.Abdel-Razek, J.L.Coulomb, M.Féliachi, J.C.Sabonnadière
« The calculation of electromagnetic torque in saturated electric machines within combined numerical and analytical solutions of the field equations». IEEE Transactions On Magnetics, Vol.Mag-17, No.6, November 1981.

[3] A.Arif, A.Reghel, B.Mehdad, S.M.Mimoune, K.Srairi
« Modélisation 3D des grandeurs électromagnétiques et thermiques dans une installation à plasma inductif 100KH par la méthode des volumes finis et effet de la jauge de coulomb sur le processus de convergence ». 1st International Symposium on Electromagnetism, Satellites and Cryptography, ISESC05, Jijel, 2005.

[4] A.Arkkio
« Analysis of induction motors based on the numerical solution of the magnetic field and circuit equations». Thèse de Doctorat, Université de Technologie d'Helsinki, Finlande, 18 Décembre 1987.

[5] A.Bossavit
« Deux équations d'évolution non linéaires à constantes de temps très différentes : La méthode du changement de fréquence ». E.D.F.- Bulletin de la direction des études et recherches, Série C – Mathématiques, Informatique, No 2, pp. 5-14, 1979.

[6] A.Bossavit
« Le chauffage par induction des pièces d'acier – Aperçus théoriques». EDF, Direction des Etudes et Recherche – Service Informatique et Mathématique appliquée, Avril 1985.

[7] A.Bouzidi
« Contribution au calcul par éléments finis des courants de Foucault dans les pièces de structure tridimensionnelles ». Mémoire de Magister, Université de Béjaia.

[8] A.Chentouf
« Contribution à la modélisation électrique, magnétique et thermique d'un applicateur de plasma inductif haute fréquence ». Thèse de doctorat, Université de Nantes, Décembre 1994.

[9] A.Demenko
« Movement simulation in finite element analysis of electric machine dynamics». IEEE Transactions On Magnetics, Vol.32, No.3, May 1996.

[10] A. Fouillé :
« Electrotechnique à l'usage des ingénieurs. Tome 2 : Machines électriques ». Editions Dunod, 1969.

[11] A.Genon et W.Legros :
« Machines électriques ». Edition, Hermes Science Europe, 2000.

[12] A.Khennane
« Méthode des éléments finis, énoncé et principes de base ». Office des publications universitaires, Alger, 1997.

[13] A.Nafalski, S.Maticevic, W.B.Lawrance
"Teaching of computational electromagnetics in an undergraduate course". Advanced Computational and Design Techniques in Applied Electromagnetic systems. S.-y. Han (Editor), 1995.

[14] A.Tenhunen
"Electromagnetic forces acting between the stator and eccentric cage rotor". Thèse de Doctorat, Université de Technologie d'Helsinki, Finlande, 22 Août 2003.

[15] A.Vander Vorst
« Electromagnétisme, champs et circuits ». Edition De Boeck, 1reédition, 2^{ième}tirage, 2002.

[16] A.Yahiaoui
« Modélisation électromagnétique d'un actionneur asynchrone en vue de sa commande ». Thèse de Doctorat, Université Paris VI, Février 1994.

[17] B.Benali
« Contribution à la modélisation des systèmes électrotechniques à l'aide des formulation en potentiel : Application à la machine asynchrone ». Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologie de Lille, France, 1997.

[18] B.Démidovitch, I.Maron
«Eléments de calcul numérique ». Editions Mir, Moscou, 1979.

[19] B.Multon
« Conception d'actionneurs spéciaux ». DEA de Génie Electrique, Option Conception et Optimisation de Systèmes Electromagnétiques, Paris ,1992-2004.

[20] B.Saint-Jean
« Electrotechnique et machines électriques ». Editions Eyrolles, Paris, 1976.

[21] C.Golovanov, J.L.Coulomb, Y.Maréchal, G.Meunier
« 3D mesh connection techniques applied to movement simulation». IEEE Transactions On Magnetics, Vol.34, No.5, September 1998.

[22] C.Vassalo
« Electromagnétisme classique dans la matière ». Editions Dunod, Paris, 1980.

[23] Chee-Mun Ong
« Dynamical simulation of electrical machinery ». School of electrical and computer engineering. Perdue University West Lafayette, Rudiana, 1998.

[24] D.Euvrard
« Résolution numérique des équations aux dérivées partielles : différences finies, éléments finies ». Edition Masson, Paris, 1987.

[25] E.Chauveau
« Contribution au calcul électromagnétique et thermique des machines électriques. Application à l'étude de l'influence des harmoniques sur l'échauffement des moteurs asynchrone ». Thèse de Doctorat, I.U.T de Saint-Nazaire, France, 2001.

[26] E.Durand
«Magnétostatique», Editions Masson, Paris, 1968.

[27] E.S.Hamdi
« Design of small electrical machines». Editions Wiley, 1994.

[28] E.Schaffer
« Diagnostic des machines asynchrones, modèles et outils paramétriques dédiés à la simulation et à la détection des défauts ». Thèse de Doctorat, Ecole Doctorale Sciences de L'ingénieur, Université de Nantes ,1999.

[29] F.Gardiol
«Traité d'électricité, Volume 3 : Electromagnétisme». Nouvelle édition, revue et augmentée. Presses polytechniques et universités romandes, 1996.

[30] F.Hecht, A.Marrocco, F.Piriou, A.Razek
« Modélisation des systèmes électrotechniques par couplage des équations électriques et magnétiques ». Revue Phys. Appl.25, Juillet 1990, 649-659.

[31] F.Piriou, A.Razek
« A model for coupled magnetic-electric circuit in electric machines with skewed slots". IEEE Transaction On Magnetics, Vol. 26, No. 2, March 1990.

[32] G.Aubert
«Electromagnétisme». Editions Dunod, Paris, 1971.

[33] G.Dhatt, G.Touzot
« Une présentation de la méthode des éléments finis ». Deuxième édition, Maloine S.A., Paris, 1984.

[34] G.Didier
Modélisation et diagnostic de la machine asynchrone en présence de défaillances ». Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences et Techniques, Université Henry Poincaré, Nancy, 2004.

[35] G.Fournet
« Electromagnétisme à partir des équations locales ». Editions Masson, 1985.

[36] G.Séguier
« Les convertisseurs de l'électronique de puissance. 4 Tomes ». Editions Lavoisier, Tec & Doc, 1987

[37] H.De Gersem, K.Hameyer
« A multiconductor model for finite-element eddy-current simulation». IEEE Transaction on magnetic, Vol.38, No.2, March 2002.

[38] J.C.Sabonnadière, J.L.Coulomb
« Calcul de champs électromagnétiques ».Techniques de L'ingénieur, Traité du Génie Electrique, D 3020.

[39] J.C.Sabonnadière, M.Jufre
« Conception assistée par ordinateur : Machine asynchrone ». Techniques de l'ingénieur, Traité Génie Electrique, D 3 590.

[40] J.C.Sabonnadière
«Méthodes de calcul numérique en électrotechnique, application aux machines électriques ». R.G.E.10, Octobre 1982.

[41] J.Chatelain
« Machines électriques. Volume X du Traité d'électricité, d'électronique et d'électrotechnique ». Presse Polytechnique Romande, Editions Georgi, 1983.

[42] J.Gyselinck, X.M.Lopez-Fernandez
"Inclusion of inter-bar currents in multi-slice FE modelling of induction motors– influence of inter-bar resistance value and skew discretisation".

[43] J.L.Coulomb et J.C. Sabonnadière
« Eléments finis et CAO ». Editions Hermes, 1986.

[44] J.Niard, R.Moreau et J.Battut
« Machines électriques ». Edition Nathan, 1985.

[45] J.P. Fanton :
« Électrotechnique, machines et réseaux ». Editions Ellipses, 2002.

[46] J.P Hautier et J.P Caron
« Modélisation et commande de la machine asynchrone. Volume 7 ». Editions Technip, 1995.

[47] J.P.Nougier
« Méthodes de calcul numérique ». Edition Masson, 3^{ième}édition revue, 3^{ième}tirage, Paris, 1991.

[48] J.Saitz
« Magnetic field analysis of electric machines taking ferromagnetic hysteresis into account». Thèse de Doctorat, Université de Technologie d'Helsinki, Finlande, 06 Novembre 2001.

[49] Joao Pedro, A.Bastos et Nelson Sadowski
«Electromagnetic modeling by finite element methods». Library of congress cataloguing – in - Publication data. Marcel Dekker, USA, 2003.

[50] K.J.Binns, P.J.Lawrenson, C.W.Trowbridge
« The analytical and numerical solution of electrical and magnetic fields ». Edition John Wiley & Son, Chichester, 1994.

[51] L.Lebensztajn, V.C.Silva, L.NRossi, J.R.Cardoso
« Teaching electromagnetic fields and FEM for undergraduate students ». Av.Prof.Luciano Gualberto, Trav.3, No.158, 05508-900, Sao Paolo, Brazil, 2000.

[52] L.Miegeville
« Le couplage des phénomènes électromagnétiques et thermiques ». Rapport de DEA d'Electronique, Université de Nantes, 1995-1996.

[53] L.Mokrani
« Contribution à la CAO optimisée des machines électriques, application au moteur linéaire à induction ». Thèse de Doctorat en Electrotechnique, Université de Batna, 03 Décembre 2005.

[54] M.Belatel, H.Benalla
« A novel approach to design ventilation holes in machines by finite element". 1st International Symposium on Electromagnetism, Satellites and Cryptography, ISESC05, Jijel, 2005.

[55] M.Belatel, H.Benalla
« Contribution à la CAO des machines électriques par Flux 2D ». 1stInternational Symposium on Electromagnetism, Satellites and Cryptography, ISESC'05, Jijel, 2005.

[56] M.Bouharkat
« Etude de l'évolution des courants rotoriques d'une machine asynchrone à cage en régime dynamique ». Thèse de Doctorat en Electrotechnique, Université de Batna, 15 Février 2006.

[57] M.Dessoude
"Moteurs asynchrone, choix et problèmes connexes". Techniques de l'ingénieur, traité Génie électrique, D 3 490.

[58] M.Féliachi
« Contribution au calcul du champ électromagnétique par la méthode des éléments finis, en vue d'une modélisation dynamique des machines électriques ». Thèse de Doctorat, Conservatoire des Arts et Métiers, Paris, France, 21 Janvier 1981.

[59] M.Féliachi, A.Abdel-Razek
« Considération du movement du rotor de machines électriques dans une modélisation par éléments finis». RGE- 10/82 – Octobre 1982.

[60] M.Féliachi
« La méthode de différences et la méthode des éléments finis pour la résolution des équations du champ électromagnétique ». Rapport d'étude bibliographique, 1978.

[61] M.Féliachi
"La modélisation numérique des phénomènes couplés". Journée de formation, Club Electrothermie Enseignement, Paris, 16 Octobre 1997.

[62] M.Hulin, J.P.Maury
« Les bases de l'électromagnétisme, cours et problèmes ». Edition Dunod, Paris, 1991, Nouvelle présentation, 1999.

[63] M.Hulin, N.Hulin, D.Perrin
« Equations de Maxwell, ondes électromagnétiques : cours, exercices et problèmes résolus ». 3ième Edition, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Dunod, Paris, 1998.

[64] M.Kostenko et L.Piotrovski
« Machines électriques ». Editions Moscou, 1969.

[65] M.L.Doumbia, G.Roy, V.Rajagopalan
"An integrated solution for simulating Electrical Drive Systems with Matlab/Simulink". International Symposium on Industrial Electronics, 1997.

[66] M.Pouloujadoff
« Machines asynchrones : Régime permanent ». Technique de l'ingénieur, Traité de Génie électrique, D3480, 1998.

[67] M.R.Khan, I.Hussein, M.F.Momen
« Lightly ferromagnetic rotor bars for three phase squirrel-cage induction machines". IEEE Trans.On industry applications, Vol. 40, No.6, pp. 1536-1539, December, 2004.

[68] M.R.Mekideche, S.Laissaoui, D.Sedira, A.Ladjimi
« Couplage des équations électriques et magnétiques à une machine asynchrone». 1st International Symposium on Electromagnetism, Satellites and Cryptography, ISESC05, Jijel, 2005.

[69] M.Rachek, M.Féliachi
« 3D transient analysis and movement simulation for the modelling of magnetic levitation». Int. J. Computer Applications in Technology, Vol.30, No.4, 2007.

[70] M.Rachek, M.Féliachi
« 3D movement simulation techniques using FE methods : application to eddy current non-destructive testing». NDT&E International 40 (2007) 35-42.

[71] M.Rachek, M.Féliachi
«Modélisation par éléments finis tridimensionnelle des phénomènes magnétodynamique harmonique avec la formulation AV-A ». 1st International Symposium on Electromagnetism, Satellites and Cryptography, ISESC05, Jijel, 2005.

[72] M.Rachek, S.Nait Larbi, S.Yahou
« Modélisation par EF 2-D du couplage électrique-magnétique-thermique dans les moteurs asynchrones à cage ». 4thInternational Conference on Electrical Engineering, Batna, Algeria, 2006.

[73] M.Rachek, S.Nait Larbi, H.Gahlouze
« Modélisation par éléments finis 2-D du couplage électromagnétique-themique dans les MSAP à flux radial ». CGE'05, EMP, Bordj El Bahri, Alger, 16-17 Avril 2007.

[74] M.Rachek, T.Merzouki, M.Meliani
«Modélisation par éléments finis des phénomènes couplés magneto-thermiques 2D dans les matériaux composites avec prise en compte de la convection ». 1st International Symposium on Electromagnetism, Satellites and Cryptography, ISESC05, Jijel, 2005.

[75] M.Rachek
«Modélisation par éléments finis de systèmes électromagnétiques en mouvement de structures tridimensionnelles. Application au couplage magnétique-mécanique et au Contrôle Non Destructif par courants de Foucault ». Thèse de doctorat, FGEI, Université de Tizi-Ouzou, Février 2007.

[76] M.Rachek
"Modélisation analytico-numérique d'inducteurs axisymétriques alimentés en tension en moyenne fréquence". Mémoire de Magister, FGEI, Université de Tizi-Ouzou, 2001.

[77] M.Sadiku
« A simple introduction to finite element analysis of electromagnetic problems ». IEEE Trans.on Education, Vol. 32, No. 2, May 1989.

[78] N.Sadowski, Y.Lefèvre, M.Lajoie-Mazenc, J.Cros
« Finite element torque calculation in electrical machines while considering the movement». IEEE Transactions On Magnetics, Vol.28, No.2, March 1992.

[79] O.Biro, K.Preis
«On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three dimensional eddy currents". IEEE Trans.Mag.Vol.25, No4, pp 2465-2470, 1989.

[80] O.C.Zienkiewicz, R.L.Taylor
« The finite element method, basic formulation and linear problems », Volume 1, 4ièmeedition, Ed.Mc Graw Hill, Maidenhead, 1994.

[81] O.J.Antunes, J.P.A.Bastos, N.Sadowski, A.Razek, L.Santandrea, F.Bouillault, F.Rapetti
«Torque calculation with conforming and non conforming movement interface». IEEE Transactions On Magnetics, Vol.42, No.4, April 2006.

[82] P.Lascaux, R.Théodor
«Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Tome 2 – Méthodes itératives ». Edition Masson, 1994.

[83] P.Savard, F.M.Ghannouchi
« L'électromagnétisme en application ». Editions de l'Ecole Polytechnique de Montréal, 1995.

[84] R.P.Bouchard et G.Olivier
« Circuits et machines électriques ». Editions de l'école polytechnique de Montréal, 1995.

[85] R.Perrin-Bit, J.LCoulomb
« A three dimensional finite element mesh connection for problems involving movement». IEEE Transactions On Magnetics, Vol.31, No.3, May 1995.

[86] S.A.Nasar
« Handbook of electric machines». Mc Graw-Hill, 1987.

[87] S.Bensaid
"Utilisation de la méthode du problème inverse pour l'identification des propriétés physiques des matériaux composites de type carbone/résine ». Stage de DEA Electronique et Génie Electrique. Ecole polytechnique de l'université de Nantes, France, 2002.

[88] S.Loutzky
« Calcul pratique des alternateurs et des moteurs asynchrones ». Editions Eyrolles, 1969.

[89] S.Mezani
"Modélisation électromagnétique et thermique des moteurs à induction en tenant compte des harmoniques d'espace". Thèse de Doctorat, INPL, Nancy, France, Juillet 2004.

[90] S.Williamson, L.H.Lim, A.C.Smith
"Transient analysis of cage induction motors using finite elements". IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, No. 2, March 1990.

[91] T.Henneron
« Contribution à la prise en compte des grandeurs globales dans les problèmes d'électromagnétisme résolus avec la méthode des éléments finis ». Thèse de Doctorat, Université de Lille I, France, 15 Décembre 2004.

[92] T.J.Flack, A.F.Volschenk
«Computational aspects of time-stepping finite-element analysis using an air-gap element». D.15 Modelling and simulation, Paris, 1994.

[93] X.M.Lopez-Fernandez, M.Piper
« Magnetodynamic performance in cage induction motors with a broken bar ». 11th International Symposium on Electromagnetic Fields in Electrical Engineering, Maribor, Slovenia, September 18-20, 2003.

[94] Y.Amara
« Contribution à la conception et à la commande des machines synchrones à double excitation, application au véhicule hybride ». Thèse de Doctorat, Université Paris XI, 2001.

[95] Y.Ouazir
« Contribution à la modélisation électromagnétique des machines à induction ». Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Polytechnique (ENP), Alger, 2006.

Annexes

Annexes

I. Traitement et implémentation de la condition aux limites Anti-périodique

Soit A_1 et A_2 les potentiels vecteurs magnétiques présents respectivement sur les frontières Γ_1 et Γ_2. On se propose d'établir une liaison cyclique entre les potentiels A_1 et A_2 selon la relation générale :

$$A_1 + k\,A_2 = m \qquad \text{(A.1)}$$

Nous considérons le système algébrique suivant :

$$\begin{bmatrix} K_{ff} & K_{f1} & K_{f2} & 0 \\ K_{1f} & K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{2f} & K_{21} & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_f \\ A_1 \\ A_2 \\ A_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_f \\ F_1 \\ F_2 \\ F_p \end{bmatrix} \qquad \text{(A.2)}$$

L'instauration de la condition aux limites anti-périodique consiste à passer vers l'autre forme suivante :

$$\begin{bmatrix} K_{ff} & 0 & K_{f2} - k.K_{f1} & 0 \\ K_{1f} & 0 & K_{12} - k.K_{11} & 0 \\ K_{2f} & 0 & K_{22} - k.K_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_f \\ A_1 \\ A_2 \\ A_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_f - m.K_{f1} \\ F_1 - m.K_{11} \\ F_2 - m.K_{21} \\ A_p \end{bmatrix} \qquad \text{(A.3)}$$

Puis vers le système suivant :

$$\begin{bmatrix} K_{ff} & 0 & K_{f2} - k.K_{f1} & 0 \\ K_{1f} & I & 0 & 0 \\ K_{2f} - k.K_{1f} & 0 & K_{22} - k.K_{21} - k.(K_{12} - k.K_{11}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_f \\ A_1 \\ A_2 \\ A_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_f - m.K_{f1} \\ 0 \\ F_2 - m.K_{21} - k.(F_1 - m.K_{11}) \\ A_p \end{bmatrix} \qquad \text{(A.4)}$$

II. Traitement de la non-linéarité

Le problème de non-linéarité magnétique a été traité dans notre cas en faisant appel à l'algorithme itératif de Newton-Raphson. Les principales étapes de cet algorithme de résolution dans le cadre de la méthode des éléments finis sont décrites comme suit :

Considérons l'équation :

$$A_j^{n+1} \approx A_j^n - \sum_{i=1}^{nn} \left\{ \frac{\partial}{\partial A_j} \left(\frac{\partial F[A]}{\partial A_i} \right) \right\}_n^{-1} \left\{ \frac{\partial F[A]}{\partial A_i} \right\}_n \tag{A.5}$$

Les quantités $\frac{\partial F[A]}{\partial A_i}$ et $\frac{\partial}{\partial A_j}\left(\frac{\partial F[A]}{\partial A_i}\right)$ sont données comme suit :

$$\frac{\partial F[A]}{\partial A_i} = \sum_{i=1}^{ne} \iint_{\Omega_e} \left(\nu_e(B_e^2) \sum_{k=1}^{m} \vec{\nabla}\alpha_i \vec{\nabla}_k A_k - j_0^e \alpha_i \right) d\Omega_e \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial A_j}\left(\frac{\partial F[A]}{\partial A_i}\right) = \sum_{e=1}^{ne} \left\{ \iint_{\Omega_e} \nu_e(B_e^2) \sum_{k=1}^{m} \vec{\nabla}\alpha_i \vec{\nabla}_k d\Omega + 2\iint_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \nu_e(B_e^2)}{\partial B^e} \sum_{k=1}^{m} \vec{\nabla}\alpha_i \vec{\nabla}_k A_k^e \sum_{i=1}^{m} \vec{\nabla}\alpha_i \vec{\nabla}_k A_i^e \right) d\Omega_e \right\} \tag{A.7}$$

Compte tenu des formules d'intégration dans un triangle linéaire, ces équations deviennent :

$$\frac{\partial F[A]}{\partial A_i} = \sum_{e=1}^{ne} \left\{ \frac{\nu^e(B_e^2)}{4\Delta_e} \sum_{k=1}^{3} (b_i b_k + c_i c_k) \right\} - \sum_{e=1}^{ne} j_0 \frac{\Delta_e}{3} \tag{A.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial A_j}\left(\frac{\partial F[A]}{\partial A_i}\right) = \sum_{e=1}^{ne} \left\{ \frac{\nu^e(B_e^2)}{4\Delta_e} \sum_{k=1}^{3} (b_i b_k + c_i c_k) \right\} + \sum_{e=1}^{ne} \left\{ \frac{1}{2\Delta_e} \frac{\nu^e(B_e^2)}{\partial B^e} \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{b_i b_k + c_i c_k}{2\Delta_e} \right) A_k \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{b_i b_k + c_i c_k}{2\Delta_e} \right) A_l \right\} \tag{A.9}$$

En considérant l'équation approximée de la réluctivité $\nu \approx \varepsilon + (c-\varepsilon)\frac{B^{2\alpha}}{B^{2\alpha}+\tau}$, nous calculons :

$$\frac{\partial \nu(B^2)}{\partial B^2} = \nu_0 \frac{\partial \nu_0(B^2)}{\partial B^2} = \nu_0 (c-\varepsilon)\tau\alpha \frac{B^{2(\alpha-1)}}{(B^{2\alpha}+\tau)^2} \tag{A.10}$$

En écrivant l'équation (A.9) pour l'élément triangulaire e, on obtient la matrice jacobienne suivante :

$$\frac{\partial}{\partial [A]^e}\left(\frac{\partial F[A]}{\partial [A]^e}\right) = [SJ^e] \tag{A.11}$$

La matrice $\left[SJ^e\right]$ peut s'écrire sous forme de deux matrices :

$$\left[SJ^e\right]=\left[S\right]^e+\left[SNL\right]^e \tag{A.12}$$

Les calculs développés pour un élément triangulaire sont donnés ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial A_i}\left(\frac{\partial F}{\partial A_j}\right)=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial A_1}\left(\frac{\partial F}{\partial A_1}\right) & \frac{\partial}{\partial A_1}\left(\frac{\partial F}{\partial A_2}\right) & \frac{\partial}{\partial A_1}\left(\frac{\partial F}{\partial A_3}\right) \\ \frac{\partial}{\partial A_2}\left(\frac{\partial F}{\partial A_1}\right) & \frac{\partial}{\partial A_1}\left(\frac{\partial F}{\partial A_2}\right) & \frac{\partial}{\partial A_1}\left(\frac{\partial F}{\partial A_3}\right) \\ \frac{\partial}{\partial A_3}\left(\frac{\partial F}{\partial A_1}\right) & \frac{\partial}{\partial A_1}\left(\frac{\partial F}{\partial A_2}\right) & \frac{\partial}{\partial A_1}\left(\frac{\partial F}{\partial A_3}\right) \end{bmatrix} \tag{A.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial A_i}\left(\frac{\partial F}{\partial A_j}\right)=\frac{i}{4\Delta_e}\frac{\partial \nu^r}{\partial B^2}\frac{1}{2\Delta_e}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_4 & X_5 & X_6 \\ X_7 & X_8 & X_9 \end{bmatrix} \tag{A.14}$$

Avec :

$$X_1=\sum_{i=1}^{3}\left(b_1b_i+c_1c_i\right)A_i\sum_{j=1}^{3}\left(b_1b_j+c_1c_j\right)A_j$$

$$X_2=\sum_{i=1}^{3}\left(b_1b_i+c_1c_i\right)A_i\sum_{j=1}^{3}\left(b_2b_j+c_2c_j\right)A_j$$

$$X_3=\sum_{i=1}^{3}\left(b_1b_i+c_1c_i\right)A_i\sum_{j=1}^{3}\left(b_3b_j+c_3c_j\right)A_j$$

$$X_4=\sum_{i=1}^{3}\left(b_2b_i+c_2c_i\right)A_i\sum_{j=1}^{3}\left(b_1b_j+c_1c_j\right)A_j$$

$$X_5=\sum_{i=1}^{3}\left(b_2b_i+c_2c_i\right)A_i\sum_{j=1}^{3}\left(b_2b_j+c_2c_j\right)A_j$$

$$X_6=\sum_{i=1}^{3}\left(b_2b_i+c_2c_i\right)A_i\sum_{j=1}^{3}\left(b_3b_j+c_3c_j\right)A_j$$

$$X_7=\sum_{i=1}^{3}\left(b_3b_i+c_3c_i\right)A_i\sum_{j=1}^{3}\left(b_1b_j+c_1c_j\right)A_j$$

$$X_8=\sum_{i=1}^{3}\left(b_3b_i+c_3c_i\right)A_i\sum_{j=1}^{3}\left(b_2b_j+c_2c_j\right)A_j$$

$$X_9=\sum_{i=1}^{3}\left(b_3b_i+c_3c_i\right)A_i\sum_{j=1}^{3}\left(b_3b_j+c_3c_j\right)A_j$$

Enfin :

$$\frac{\partial}{\partial A_i}\left(\frac{\partial F}{\partial A_j}\right)=\frac{i}{4\Delta_e}\frac{\partial \nu^r}{\partial B^2}\frac{1}{2\Delta_e}\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \tag{A.15}$$

$$S_{11}=\left[(b_1b_1+c_1c_1)\quad(b_1b_2+c_1c_2)\quad(b_1b_3+c_1c_3)\right]\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}\left[(b_1b_1+c_1c_1)\quad(b_1b_2+c_1c_2)\quad(b_1b_3+c_1c_3)\right]\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

$$S_{12}=\left[(b_1b_1+c_1c_1)\quad(b_1b_2+c_1c_2)\quad(b_1b_3+c_1c_3)\right]\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}\left[(b_2b_1+c_2c_1)\quad(b_2b_2+c_2c_2)\quad(b_2b_3+c_2c_3)\right]\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

$$S_{13}=\left[(b_1b_1+c_1c_1)\quad(b_1b_2+c_1c_2)\quad(b_1b_3+c_1c_3)\right]\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}\left[(b_3b_1+c_3c_1)\quad(b_3b_2+c_3c_2)\quad(b_3b_3+c_3c_3)\right]\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

$$S_{21}=\left[(b_2b_1+c_2c_1)\quad(b_2b_2+c_2c_2)\quad(b_2b_3+c_2c_3)\right]\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}\left[(b_1b_1+c_1c_1)\quad(b_1b_2+c_1c_2)\quad(b_1b_3+c_1c_3)\right]\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

$$S_{22}=\left[(b_2b_1+c_2c_1)\quad(b_2b_2+c_2c_2)\quad(b_2b_3+c_2c_3)\right]\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}\left[(b_2b_1+c_2c_1)\quad(b_2b_2+c_2c_2)\quad(b_2b_3+c_2c_3)\right]\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

$$S_{23}=\left[(b_2b_1+c_2c_1)\quad(b_2b_2+c_2c_2)\quad(b_2b_3+c_2c_3)\right]\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}\left[(b_3b_1+c_3c_1)\quad(b_3b_2+c_3c_2)\quad(b_3b_3+c_3c_3)\right]\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

$$S_{31}=\left[(b_3b_1+c_3c_1)\quad(b_3b_2+c_3c_2)\quad(b_3b_3+c_3c_3)\right]\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}\left[(b_1b_1+c_1c_1)\quad(b_1b_2+c_1c_2)\quad(b_1b_3+c_1c_3)\right]\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

$$S_{32}=\left[(b_3b_1+c_3c_1)\quad(b_3b_2+c_3c_2)\quad(b_3b_3+c_3c_3)\right]\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}\left[(b_2b_1+c_2c_1)\quad(b_2b_2+c_2c_2)\quad(b_2b_3+c_2c_3)\right]\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

$$S_{33}=\left[(b_3b_1+c_3c_1)\quad(b_3b_2+c_3c_2)\quad(b_3b_3+c_3c_3)\right]\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}\left[(b_3b_1+c_3c_1)\quad(b_3b_2+c_3c_2)\quad(b_3b_3+c_3c_3)\right]\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

III. Modèle d'Arkkio et modèles dérivés

Le modèle développé au cours de nos travaux repose principalement sur la méthodologie d'Arkkio dont les développements sont très complets et tenant compte d'aspects aussi bien physiques que techniques de fond. Ceci dit, des modèles empruntant la même démarche et constituant la même étude peuvent être conduits. Ils reposent sur quelques simplifications d'ordre paramétrique. Parmi ces modèles, nous retrouvons les travaux de Y.Ouazir **[95]** et B.Benali **[17]** que nous pouvons reporter comme suit :

Modèle de Y.Ouazir [95]

Le passage du modèle de Arkkio à celui de Y.Ouazir consiste à poser :

$$R_{be} = 0\,,\quad L_{be} = 0\,,\quad L_b = 0$$

Le modèle est alors donné comme suit :

$$\begin{bmatrix} K+M & [D^r]^T & [D^s]^T \\ D^r & Z_r & 0 \\ D^s & 0 & Z_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ U^r \\ I^s \end{bmatrix}_{t+\Delta T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{\Delta t}{N_S L} V_s \end{bmatrix}_{t+\Delta T} + \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ [D^r] & Z_e & 0 \\ D^s & 0 & -\dfrac{L_S}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_z \\ U^r \\ I^s \end{bmatrix}_t \qquad (A.16)$$

Avec :

$$Z_r = \frac{\Delta t}{L}\left[\frac{1}{R_b} I + \frac{1}{2(R_{sc} + \dfrac{L_{sc}}{\Delta t}} M M^T\right]$$

$$Z_s = \frac{\Delta t}{N_s L}\left(R_s + \frac{L_s}{\Delta t}\right) = \frac{R_s \Delta t + L_s}{N_s L}$$

$$Z_e = \frac{L_{sc}}{L\left(R_{sc} + \dfrac{L_{sc}}{\Delta t}\right)}$$

Modèle de B.Benali [17]

Le passage du modèle de Arkkio à celui de B.Benali consiste à poser :

$$R_{be} = 0\,,\quad L_{be} = 0\,,\quad L_{sc} = 0$$

$$G^{r} = Y_{r} \quad \text{au facteur } \frac{1}{2} \text{ Près (Discrétisation de Crank-Nicholson)}$$

$$L_{s} = 0$$

Le modèle est alors donné comme suit :

$$\begin{bmatrix} K+M & [D^{r}]^{T} & [D^{s}]^{T} \\ D^{r} & Y_{r} & 0 \\ D^{s} & 0 & -k^{'}.R_{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ U^{r} \\ I^{s} \end{bmatrix}_{t+\Delta T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k^{'}V_{s} \end{bmatrix}_{t+\Delta T} + \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ D^{r} & 0 & 0 \\ D^{s} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ U^{r} \\ I^{s} \end{bmatrix}_{t} \tag{A.17}$$

Avec :

$$k^{'} = \frac{\Delta t}{0{,}5\,(3-\beta)\,pL} = \frac{\Delta t}{N_{s}L}$$

$$Y_{r} = \frac{\Delta t}{L}\left(\frac{1}{R_{sc}} M^{T} M + \frac{1}{R_{b}} I\right)$$

Tarik Merzouki
FGEI, Université Mouloud Mammeri
Tizi-Ouzou, Octobre 2008