

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D' INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

Mémoire de Fin d'Etudes de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Génie Electrique

Spécialité : **Machines électriques**

Présenté par

Yazid CHOUALI

Aghilas HADJI

Thème

Estimation de la position et de la vitesse rotorique de la MSAP par injection d'un signal pulsatoire de haute fréquence.

Mémoire soutenu publiquement le/...../ 20..... devant le jury composé de :

Mr Meziane AOUES.

Maitre-Assistant. A, UMMTO, Président.

Mme Ouiza MANSOURI-TOUDERT.

Maitre-Assistante. A, UMMTO, Encadreur.

Mr B. MOULA.

Maitre de conférences. B, UMMTO, Examineur.

Mr S. HARMIM.

Maitre de conférences. B, UMMTO, Examineur.

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions le bon Dieu, qui nous a donné la force et le courage de mener à bien notre travail.

Nous exprimons nos sincères remerciements à notre promotrice ; Mme MANSOURI, pour nous avoir guidés et orientés tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Nous exprimons toute notre gratitude pour tous les enseignants que nous avons eus durant notre formation, pour tout le savoir que nous avons acquis grâce à eux.

Sans oublier les personnes qui nous ont soutenus et encouragés, de près ou de loin pour nous permettre de réussir.

HADJI Aghilas

CHOUALI Yazid

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

*À mes très chers parents : **ma mère et mon père**,
qu'ils trouvent ici l'expression de mon affection
et de ma reconnaissance*

À mes frères, ma sœur

*A **ma fiancée** et mon frère **azouaou** qui m'ont soutenus durant ce travail*

*À tous mes oncles, mes tantes, mes cousins et cousines,
À toute ma famille*

A mon binôme

À tous (tes) mes amis (es)

Aghilas HADJI

Je dédie ce modeste travail

*A mes deux adorables et agréables parents, mon
Guide dans ma vie, le symbole de tendresse
Ma chère mère et le généreux père*

*Qui ont toujours été là pour moi, et qui m'ont donné un magnifique
modèle de labeur et de persévérance. J'espère qu'ils trouveront dans ce
travail toute ma reconnaissance et tout mon amour.*

A mon frère et mes sœurs

A mon binôme

*Ton aide, ta générosité, ton soutien ont été pour moi une source de
courage et de confiance*

A tous mes amis et amies chacun en son nom.

CHOUALI Yazid

Notation et symboles

Notations et symboles

MSAP: Machine Synchrone à Aimants Permanents,

MAPI: Machines à aimants permanents internes,

PI: Correcteur Proportionnel Intégral,

PID: Régulateur Proportionnel Intégrale Dérivé,

FTBO: Fonction de Transfert en Boucle Ouverte,

FTBF: Fonction de Transfert en Boucle Fermée,

$\omega_c = \omega_{HF}$: Haute Fréquence,

Ω : La vitesse mécanique de rotation de la machine [tr/min],

ω : La pulsation électrique des courants statoriques [rd/s],

f : Fréquence des courants statoriques [Hz],

f_c : Fréquence de signal injecté ($f_c = 1000\text{Hz}$ dans cette étude),

f_r : Fréquence des courants rotoriques [Hz],

ξ : Rapport de la saillance,

L_q, L_d : Inductances des axes respectivement direct et en quadrature [Wb],

θ_r : Position électrique du rotor [rd],

θ_m : Position mécanique du rotor [rd],

$\tilde{\theta}_r$: L'erreur de position du rotor [rd],

$\hat{\theta}_r$: La position estimée du rotor [rd],

$V_{abc} = [V_s]$: Les tensions des phases statoriques respectivement a, b, c [V],

$i_{abc} = [i_s]$: Courants des phases statoriques respectivement a, b, c [A],

$\Phi_{abc} = [\phi_s]$: Les flux produits par les phases statoriques respectivement a, b, c [Wb],

R_s : Résistance d'un enroulement statorique exprime en [Ω],

Notations et symboles

$[L_{ss}]$: Matrice des inductances propres et mutuelles entre phases statoriques [H],

$[M_{ab}], [M_{ba}], [M_{ac}], [M_{ca}], [M_{bc}], [M_{cb}]$: Les inductances mutuelles entre phases statoriques [H],

$[L_{sa}], [L_{sb}], [L_{sc}]$: Les inductances propres des phases statoriques [H],

$[L_{sf}]$: Matrice des inductances mutuelles stator-aimants [H],

$\hat{\Phi}_{fd}$: Flux d'induction maximum de l'aimant permanent [Wb],

Φ_f : Flux engendré par l'aimant [Wb],

$\Phi_{sf} = [\Phi_{f,abc}]^T$: La matrice des flux produits par l'aimant dans les enroulements des trois phases statoriques respectivement a, b, c [Wb],

$\tilde{\omega}_r$: Vitesse de rotation du rotor estimée [rd/s],

ω_r : Vitesse de rotation du rotor [rd/s],

C_{em} : Couple électromagnétique [N*m],

C_r : Couple résistant [N*m],

J : Moment d'inertie [Kg*m²],

f_v : Coefficient de frottement visqueux [N*m*s/rd],

G_0 : Gain,

$[X_{dq0}]$: Vecteur de la variable X dans le repère de Park,

$[X_{abc}]$: Vecteur de la variable X dans le repère triphasé,

$P(\Theta_r)$: Matrice de passage direct de Park,

$P(\Theta_r)^{-1}$: Matrice de passage inverse de Park,

v_d, v_q : Tensions des axes respectivement direct et en quadrature [V],

i_d, i_q : Courants des axes respectivement direct et longitudinal [A],

Z_q, Z_d : Impédance des axes respectivement direct et en quadrature,

Notations et symboles

Φ_d, Φ_q : Flux des axes respectivement direct et longitudinal [Wb],

$\tau_d = \frac{L_d}{R_s}$ et $\tau_q = \frac{L_q}{R_s}$: Constantes de temps d'axe direct et en quadrature [s],

$v_{\alpha s}, v_{\beta s}$: Tensions statoriques diphasés dans le repère α, β [V],

$i_{\alpha s}, i_{\beta s}$: Courants statoriques diphasés dans le repère α, β [A],

$\emptyset_{\alpha s}, \emptyset_{\beta s}$: Flux statoriques diphasés dans le repère α, β [wb],

ω_m : vitesse mécanique de rotation du rotor [rd/s],

z : Coefficient l'amortissement,

v_d^{lin}, v_q^{lin} : Tensions linéaires respectivement d'axes d et q [V],

v_d^{dec}, v_q^{dec} : Tensions de découplage respectivement dans les axes d et q [V],

I_{qref} : Consigne du courant quadrature [A],

K_p : Gain proportionnel du régulateur PI,

K_i : Gain intégral du régulateur PI,

T_d, T_q : Constantes de temps d'intégration PI respectivement dans l'axe direct et en quadrature,

p : Operateur de Laplace,

G_{0d}, G_{0q} : Gains statiques d'intégration PI respectivement dans l'axe direct et en quadrature,

N_p : Nombre de paires de pôles,

$I_{\alpha\beta s_c}$: Courant de la porteuse dans un référentiel lié au stator [A],

I_c : Amplitude du signal injecté [A],

$[L_{\alpha\beta}]$: Matrice des inductances dans le repère $(\alpha\beta)$ [H],

$[R]$: Matrice de rotation,

\hat{x}_d, \hat{x}_q : Variables estimées des axes respectivement direct et en quadrature,

L_{diff} : Représente la moyenne de la différence des impédances statoriques,

Notations et symboles

Z_{moy} : Représente la valeur moyenne des impédances statoriques,

Les repères :

a, b, c: Axes liés aux enroulements triphasés,

q, d: Axes du référentiel de Park,

β , α : Axes du référentiel statorique,

Oa: Axe homopolaire,

Sommaire

INTRODUCTION GENERALE	1
------------------------------------	----------

Chapitre I : Modélisation et simulation de la commande vectorielle de la MSAP

I. Introduction	3
II. Classification des machines synchrones	3
III. Description de la machine synchrone à aimants permanents	4
III.1. Le stator	4
III.2. Le rotor	4
IV. Fonctionnement de la MSAP	5
V. Les différents types des machines synchrones à aimants permanents	5
V.1. Machines à aimants permanents internes	5
V.2. Machines à aimants permanents surfaciques	6
V.3. Machines à aimants permanents internes à saillance inverse.....	6
VI. Avantages de la machine synchrone à aimants permanents.....	7
VII. Les domaines d'application de MSAP.....	7
VIII. Modélisation de la machine synchrone à aimants permanents.....	8
VIII.1. Mise en équation de la machine synchrone à aimants permanents dans le repère (a-b-c)	9
VIII.2. Equation de la machine synchrone a aimants permanents dans le repère (a-b-c)	9
VIII.2.1. Equations électriques	9
VIII.2.2. Equations du flux	10
VIII.2.3. L'équations mécanique	10
VIII.2.4. Le couple électromagnétique de la MSAP	10
VIII.3. Transformation triphasée-diphasée en utilisant la transformation de Park	11
VIII.3.1. Les équations électriques dans les axes d et q	12
VIII.3.2. Les équations du flux	13
VIII.3.3. Modèle d'état de la MSAP	13
VIII.4. Modèle d'état dans un référentiel lié au stator	14
VIII.5. Passage de repère d, q au repère $\alpha \beta$	15

SOMMAIRE

IX.	Stratégies de commande des machines synchrones à aimants permanents.....	15
IX.1.	Principe de la commande vectorielle	15
IX.2.	Commande vectorielle de la MSAP	16
IX.3.	Avantage de la commande vectorielle	17
X.	Le Découplage.....	17
XI.	La régulation.....	18
XI.1.	La régulation en boucle multiple (cascade)	18
XI.2.	Calcul des régulateurs pas la méthode de placement de pôle	18
XI.2.1.	Le régulateur du courant I_d	19
XI.2.2.	Le régulateur du courant I_q	20
XI.2.3.	Boucle de régulation de la vitesse	20
XII.	Les résultats de la simulation	21
XIII.	Interprétation des résultats	25
XIV.	Conclusion.....	25

Chapitre II : Estimation et extraction de la position de la vitesse rotorique en injectant un signal rotationel direct

I.	Introduction	27
II.	Estimation de la position des saillances par l'injection d'un signal à haute fréquence ..	28
III.	Injection d'un signal de haute fréquence	28
III.1.	Injection d'un courant à haute fréquence dans la machine.....	28
III.2.	Injection d'une tension à haute fréquence dans la machine.....	29
IV.	Calcul des courants à hautes fréquences	30
V.	Résultats de simulation	31
VI.	Interprétation des résultats	33
VII.	Extraction de la position rotorique	33
VII.1.	Extraction de la composante négative par un filtre passe bande suivi d'un filtre synchrone passe-haut.....	33
VII.2.	Extraction de la position rotorique par la fonction « arc tangente 2 »	34
VIII.	Estimation de la position du rotor.....	34
IX.	Résultats de simulation sans déroulement de phase	35
X.	Interprétation des résultats	37

SOMMAIRE

XI. Déroulement de phase	37
XII. Résultats de simulation avec déroulement de phase :	37
XIII. Interprétation des résultats	39
XIV. Conclusion.....	39

Chapitre III : Estimation de la position et la vitesse rotorique en injectant un signal pulsatoire

I. Introduction.....	40
II. Les différents types de signaux	40
II.1. L'injection d'un signal de haute fréquence rotatif	40
II.2. L'injection d'un Signal haute fréquence carré	40
II.3. L'injection d'un signal de haute fréquence pulsatoire.....	40
III. Estimation de la position du rotor par une boucle à verrouillage de phase (PLL)	44
IV. Simulation de l'estimateur	45
V. Interprétation des résultats	50
VI. Conclusion.....	51

CONCLUSION GENERALE	52
----------------------------------	-----------

Listes des figures

Chapitre I : Modélisation et simulation de la commande vectorielle de la MSAP

Figure. I. 1 : Classement des machines synchrones.....	3
Figure. I. 2 : Machine synchrone à aimants permanents.....	5
Figure. I. 3 : Machines à aimants permanents internes.....	6
Figure. I. 4 : Machine à aimants permanents surfaciques.....	6
Figure. I. 5 : Machine à aimants permanent internes à saillance inverse.....	7
Figure. I. 6 : Schéma équivalent d'une MSAP dans le repère (a-b-c).....	9
Figure. I. 7 : Représentation de la MSAP dans le repère (d, q).....	11
Figure. I. 8 : Repère triphasé- Repère fixe [2].....	14
Figure. I. 9 : Régulateur à boucle cascade (boucle de vitesse).....	18
Figure. I. 10 : Boucle de régulation du courant Id.....	19
Figure. I. 11 : Boucle de régulation du courant Iq.....	20
Figure. I. 12 : Boucle de régulation de la vitesse.....	20
Figure. I. 13 : la vitesse mesurée et la vitesse de référence.....	22
Figure. I. 14 : Le couple électromagnétique Cem.....	22
Figure. I. 15 : Le courant d'axe direct (Id).....	23
Figure. I. 16 : Le courant d'axe quadrature (Iq).....	23
Figure. I. 17 : Position mécanique (θ_m).....	24
Figure. I. 18 : La position électrique (θ_r).....	24
Figure. I. 19 : La réponse de la vitesse à un test Benchmark.....	25

Chapitre II : Estimation et simulation de la position et de la vitesse rotorique en injectant un signal rotationnel direct

Figure. II. 1 : Estimation de la position du rotor par l'injection du courant à haute fréquence.....	29
Figure. II. 2 : Schéma du principe de la méthode d'estimation de la position du rotor par l'injection d'une tension à haute fréquence.....	29
Figure. II. 3 : La variation de courant haute fréquence (I_α) lorsque $L_d = L_q=4.8mH$	31
Figure. II. 4 : La variation de courant haute fréquence (I_α) lorsque $L_d=4.8mH$. el $L_q=3.1mH$	32
Figure. II. 5 : La variation de courant haute fréquence (I_α) lorsque $L_d=4.8mH$; $L_q=4.1mH$	32
Figure. II. 6 : Schéma d'extraction des composantes inverses par un filtre analogique suivi par un filtre synchrone passe haut.....	33
Figure. II. 7 : Estimation de la position du rotor par la fonction arc tangente.....	34

Liste des figures

Figure. II. 8 : La position rotorique mesurée et la position rotorique estimée par la méthode directe pour une vitesse de référence $N=10\text{tr/min}$ sans déroulement de phase.	35
Figure. II. 9 : La position rotorique mesurée et la position rotorique estimée par la méthode directe pour une vitesse de référence $N=50\text{tr/min}$ sans déroulement de phase.	35
Figure. II. 10 : La position rotorique mesurée et la position rotorique estimée par la méthode directe pour une vitesse de référence $N=100\text{tr/min}$ sans déroulement de phase.	36
Figure. II. 11 : Les erreurs de la position pour les différentes valeurs de la vitesse de référence ($N=10\text{tr/min}$, $N=50\text{tr/min}$, $N=100\text{tr/min}$) sans déroulement de phase.	36
Figure. II. 12 : La position rotorique mesurée et la position rotorique estimée par la méthode directe pour une vitesse de référence $N=10\text{tr/min}$ avec déroulement de phase.	37
Figure. II. 13: La position rotorique mesurée et la position rotorique estimée par la méthode directe pour une vitesse de référence $N=50\text{tr/min}$ avec déroulement de phase.	38
Figure. II. 14 : la position rotorique mesurée et la position rotorique estimée par la méthode directe pour une vitesse de référence $N=100\text{tr/min}$ avec déroulement de phase.	38
Figure. II. 15 : Les erreurs de la position pour les différentes valeurs de la vitesse de référence ($N=10\text{tr/min}$, $N=50\text{tr/min}$, $N=100\text{tr/min}$) avec déroulement de phase.	39

Chapitre III : Estimation de la position et la vitesse rotorique en injectant un signal pulsatoire

Figure. III. 1: Repère fixe ($\alpha\beta$), repère réel (dq) et repère estimé (d, q).	41
Figure. III. 2 : Procédure de calcul du signal d'entrée de l'observateur de position.	44
Figure. III. 3 : estimation de la position du rotor par une boucle à verrouillage de phase.	45
Figure. III. 4 : La vitesse estimée pour $T=1.5$ s.	45
Figure. III. 5 : La position estimée et réelle du rotor pour $T=1.5$ s.	46
Figure. III. 6 : L'erreur de la position rotorique pour $T=1.5$ s.	46
Figure. III. 7 : La position estimée et réelle du rotor pour $T=0,3$ s.	47
Figure. III. 8 : La vitesse estimée pour $T=0.3$ s.	47
Figure. III. 9 : L'erreur de la position rotorique pour $T=0,3$ s.	48
Figure. III. 10 : La vitesse estimée pour $T=0.15$ s.	48
Figure. III. 11 : La position réelle et estimée du rotor pour $T=0.15$ s.	49
Figure. III. 12 : L'erreur de la position rotorique pour $T=0.15$ s.	49
Figure. III. 13 : Les erreurs de la position pour les différentes valeurs de la période de référence ($T=1.5\text{s}$, $T=0.3\text{s}$, $T=0.15\text{s}$).	50

Introduction Générale

Introduction générale

Les machines synchrones à aimants permanents (**MSAP**) se répandent de plus en plus comme actionneurs dans les industries automatisées où ils remplacent les moteurs à courant continu. Ils présentent sur ces derniers l'avantage d'avoir de meilleures performances, vu leur divers avantages tels que:

- un couple massique élevé.
- une inertie très faible.
- absence de pertes Joules au rotor ce qui augmentent leur rendement.

Avec le développement rapide des microprocesseurs, la réalisation de la commande de la MSAP est devenue de plus en plus simple ; ainsi des différentes stratégies de commande des machines à courant alternatif existent, telles que la commande scalaire, la commande directe du couple et la **commande vectorielle**. Cette dernière est devenue une technique courante pour les systèmes d'entraînement de la MSAP. Elle permet une réponse rapide du couple des machines à courant alternatif similaire à celle des machines à courant continu ; elle nécessite la connaissance de la position du rotor d'où la présence d'un capteur de position s'impose.

Cependant, il est souhaitable d'éliminer ces capteurs vu que leur présence, non seulement augmente le coût et la complexité matérielle totale (des câblages supplémentaires), mais aussi réduit la fiabilité de la commande vectorielle avec une sensibilité additionnelle aux perturbations extérieures.

Pour y remédier, des capteurs logiciels ont été alors conçu, c'est la commande sans capteur "sensorless". Ces capteurs se basent sur l'anisotropie du circuit magnétique. La méthode a été développées afin de fournir des informations sur la position et la vitesse du rotor de la machine synchrone à aimants permanents à bas régime et à l'arrêt :

- Les méthodes basées sur l'injection des signaux de haute fréquence (HF).

Cette méthode est basée sur l'injection d'un signal de haute fréquence (tension ou courant), selon l'axe ($\alpha - \beta$) ou l'axe ($d - q$). En effet, le signal résultant de l'injection contient des informations sur la position du rotor de la machine synchrone à aimant permanent. Ainsi Plusieurs formes de signaux à haute fréquence peuvent être injectées :

- L'injection d'un signal HF **rotatif**;
- L'injection d'un signal HF **pulsatoire**.

Ce présent travail est consacré à l'étude et à la simulation d'une approche pour la commande de la machine à aimants permanents sans capteurs de vitesse et de position par la méthode d'injection d'un signal rotationnel direct et d'un signal pulsatoire de haute fréquence et de concevoir un estimateur permettant d'isoler et d'estimer la position rotorique.

Pour mener à bien notre étude, nous avons subdivisé notre travail en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la modélisation mathématique de la machine synchrone à aimants permanents dans trois repères différents : le repère triphasé (abc), le repère fixe (α - β), le repère tournant (d - q). Ensuite nous avons présenté le principe de la commande vectorielle de la MSAP ainsi le dimensionnements des régulateurs PI utilisés. Pendant ce travail on a utilisé système de régulation, qui est basée sur les régulateurs classiques **PI**.

Le deuxième chapitre constitue les méthodes d'estimation de la position et de la vitesse rotorique sans le capteur mécanique en utilisant un signal rotationnel directe (tension ou courant), ensuite on a utilisé la méthode d'extraction de la composante négative par un filtre passe bande suivi d'un filtre synchrone passe-haut .afin d'extraction la position et la vitesse en utilisant la fonction «arc tangente2 ».

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'estimation et de la position rotorique en injectant un signal de haute fréquence pulsatoire. Une autre forme du courant haute fréquence est alors induite contenant l'information sur l'erreur de l'estimation de la position. Afin d'extraire la position rotorique, nous avons conçu un estimateur contenant un bloc de traitement de signal pour isoler la composante haute fréquence du courant et un estimateur basé sur une boucle à verrouillage de phase(PLL).

Nous avons terminé notre travail par une conclusion générale synthétisant les résultats obtenus par simulation numérique en utilisant MATLAB-SIMULINK.

Chapitre I

Modélisation et simulation de la Commande vectorielle de la MSAP

I. Introduction

Dans l'industrie, la machine synchrone à aimants permanents essaye de plus en plus de remplacer la machine à courant continu dans les applications où l'on cherche des performances dynamiques et statiques très élevée avec des puissances importantes. Ce type de machines s'impose sur le marché en raison de sa simplicité de commande et sa puissance massique élevée, vu que les aimants modernes ont la capacité de produire une forte induction dans l'entrefer sous un faible volume, ce qui est impossible avec un inducteur bobiné. [3].

II. Classification des machines synchrones

En reprenant le principe de la classification de Chalmers et de ses collègues, on peut agencer l'ensemble des machines synchrones comme l'indique la figure I.1. Les machines sont distinguées par la nature de leur excitation (bobinages, aimants permanents, etc...) et par leur rapport de saillance (ξ). [5]. Telle que :

$$\xi = \frac{L_q}{L_d} \tag{I.1}$$

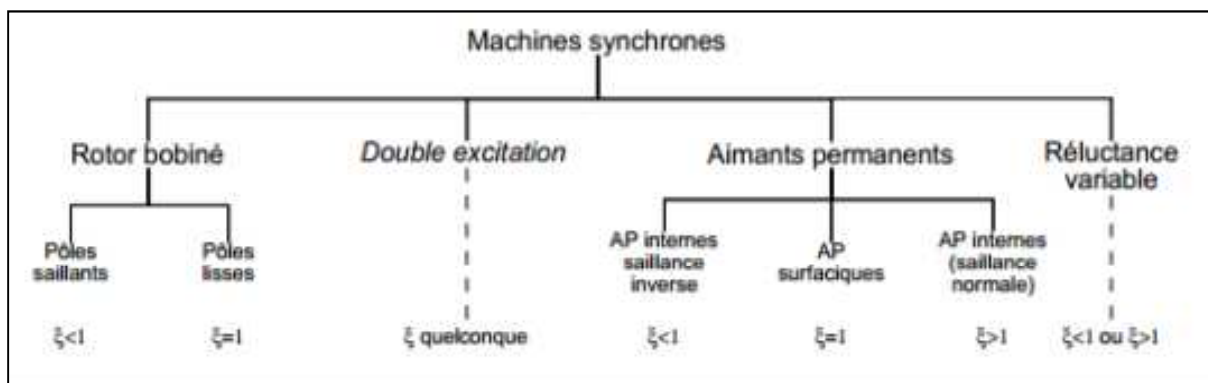


Figure. I. 1 : Classement des machines synchrones.

On peut classer les machines synchrones d'après le mode de construction utilisé pour la fabrication des rotors mais quel que soit le type utilisé, sa vitesse est constante.

Dans notre travail on s'intéresse à la machine synchrone à aimant permanent. Il existe de nombreuses configurations de la machine synchrone à aimants permanents. La raison principale de cette diversité est que les utilisateurs ont des besoins spécifiques. Par exemple, pour la conception d'un servomoteur, l'inertie devra être la plus faible possible. Afin de permettre une accélération et une décélération rapide.

III. Description de la machine synchrone à aimants permanents

La machine synchrone à aimants permanents est une machine électrique à courant alternatif qui peut fonctionner en moteur c.-à-d. de transformer l'énergie électrique en énergie mécanique, comme elle peut fonctionner en génératrice (alternateur), tout en transformant l'énergie mécanique en énergie électrique. Cette machine est constituée par deux parties essentielles qui jouent un rôle prépondérant dans la conversion d'énergie, ces deux parties sont. [4] :

III.1. Le stator

Il représente la partie fixe de la machine [17]. Le stator est similaire à celui de la machine asynchrone. Il se compose d'un bobinage distribué triphasé, tel que les forces électromotrices générées par la rotation du Champ rotorique soient sinusoïdales ou trapézoïdales. Ce bobinage est représenté par les trois axes (a, b, c) déphasés, l'un par rapport à l'autre, de 120° électriques [8].

Dans la grande majorité des cas, les trois enroulements sont couplés en étoile [17], ce qui annule la composante homopolaire de courant. Lorsqu'on alimente les enroulements statoriques par un système triphasé équilibré de courant, il y a création d'un champ tournant le long de l'entrefer. La vitesse de rotation du champ tournant est proportionnelle au nombre de pôles de la machine et à la pulsation des courants statoriques selon la relation (I.2) :

$$\Omega = \frac{60f}{N_p} \quad (\text{tr/min}) \quad \text{(I.2)}$$

III.2. Le rotor

Il représente la partie mobile de la machine [17]. Le rotor se compose d'aimants permanents alternants pôle nord et pôle sud. Ces derniers présentent l'avantage d'éliminer les balais et les pertes rotoriques, ainsi que la nécessité d'une source pour fournir le courant d'excitation. Cependant, on ne peut pas contrôler l'amplitude du flux rotorique. [8]

La figure I.2 représente la machine synchrone à aimants permanents :



Figure. I. 2 : Machine synchrone à aimants permanents.

IV. Fonctionnement de la MSAP

Le stator est alimenté par un système de tension triphasé équilibré, créant dans l'entrefer un champ tournant, ce dernier a tendance à attirer le rotor, qui muni d'aimants permanents produisent le champ d'induction, de ce fait les champs d'induction créés par le stator et le rotor, ont tendance à s'aligner, la raison pour laquelle un couple d'origine électromagnétique prend naissance. [18].

V. Les différents types des machines synchrones à aimants permanents

V.1. Machines à aimants permanents internes

La machine à une configuration classique. Le rotor est constitué d'aimants assemblés sur une douille magnétique. Le stator est similaire à celui de la machine triphasée à induction. L'avantage majeur de cette structure est le ratio couple /vitesse qui est élevé. Néanmoins une difficulté de construction existe, il faut être capable de maintenir les aimants, même à vitesse élevée. Le plus souvent ils sont collés et frétés. La machine à aimants permanents internes est représentée par la figure I.3. [6]

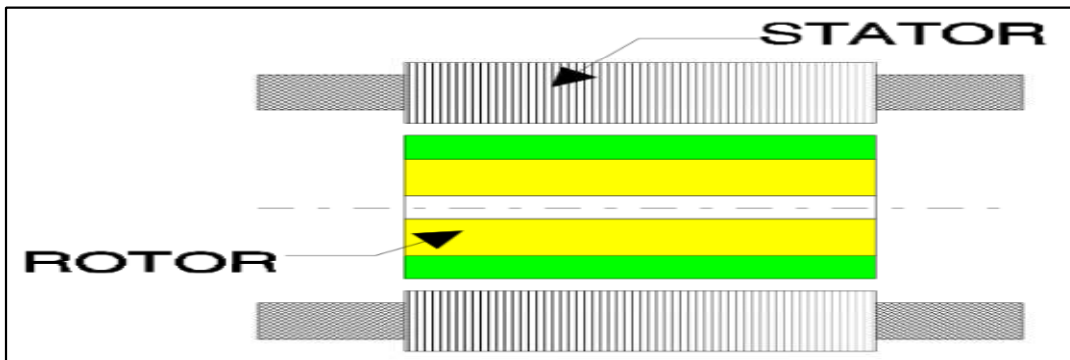


Figure. I. 3 : Machines à aimants permanents internes.

V.2. Machines à aimants permanents surfaciques

La Machine à aimants permanents surfaciques peut favoriser une meilleure intégration de l'actionneur au système dans certaines applications. Ainsi, pour la ventilation par exemple, les pales du ventilateur peuvent être montées directement sur le rotor. Le maintien des aimants est facilité par la force centrifuge et un simple collage peut être suffisant pour assurer leur fixation mécanique. Une structure de la machine à aimants permanents surfaciques permet aussi de réduire le diamètre extérieur puisque généralement la hauteur des aimants est moins importante que la profondeur des encoches, la machine à aimants permanents surfaciques est représentée sur la figure I.4 [5], [6]:

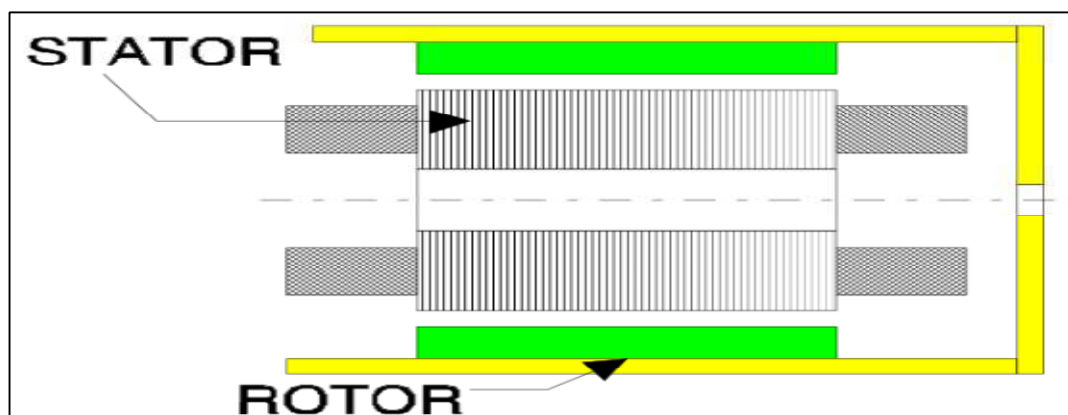


Figure. I. 4 : Machine à aimants permanents surfaciques.

V.3. Machines à aimants permanents internes à saillance inverse

Dans certaines applications à encombrement réduit (moteur de disque dur d'ordinateur, table tournante, ventilateur). Les aimants sont montés sur un disque magnétique mobile. Les bobines sont fixées en générale sur le circuit imprimé avec les composants électroniques. Sous le circuit, une plaque métallique permet au champ de se refermer. Ces machines ont en général un grand nombre de pôles et fonctionnent à basse vitesse (inférieur à 1000 tr/min) afin d'éviter un échauffement excessif dû aux courants de Foucault. Leur avantage est leur faible coût, leur forme plate et

l'absence de couple réactif à faible vitesse. La machine à aimants permanents internes à saillance inverse est représentée par la figure I.5 [6] :

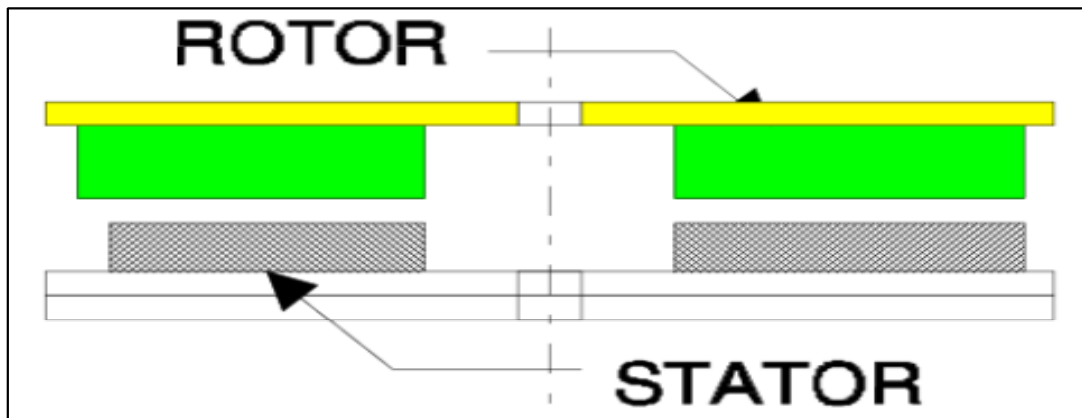


Figure. I. 5 : Machine à aimants permanent internes à saillance inverse.

VI. Avantages de la machine synchrone à aimants permanents

Les machines synchrones à aimants permanents présentent plusieurs avantages par rapport aux autres types de machines [8] :

- Puissances massives importantes et élevée.
- Absence de contacts glissants.
- absence des pertes résistives au rotor ; ce qui facilite l'évaluation de la chaleur due aux Pertes dans la machine. Ainsi, il y a suppression d'équipement de refroidissement au rotor.
- Suppression des bagues et des ballait, ce qui réduit les problèmes de maintenance.
- Possibilité de supporter des surcharges transitoires importantes et un bon comportement dynamique en accélération et en freinage.
- Grande fiabilité.
- Fonctionnement en survitesse.

VII. Les domaines d'application de MSAP

Le moteur synchrone trouve plusieurs domaines d'utilisation tels que [8] :

- les équipements domestiques (machine à laver le linge),
- les automobiles,
- les équipements de technologie de l'information (DVD drives),
- les outils électriques, jouets, système de vision et ses équipements,
- les équipements de soins médicaux et de sante (fraise de dentiste),

Chapitre II

*Estimation et Extraction de la position
et de la vitesse rotorique en injectant un
signal rotationnel direct*

I. Introduction

L'industrie ne cesse de chercher à réduire le coût de mise en œuvre et la maintenance, la tendance générale est donc de minimiser le nombre de capteurs. Les commandes les plus performantes comme "la commande vectorielle" nécessitent une connaissance précise de la position du rotor pour assurer un autopilotage. Ces informations proviennent des capteurs mécaniques tels que "les encodeurs, les résolveurs". En effet, la présence des capteurs implique l'augmentation du volume, le coût global du système ainsi que la diminution de la fiabilité de ce dernier. De plus, cela nécessite un bout d'arbre disponible pour les ajouter, ce qui est surtout difficile pour des machines de petites tailles. En outre, dans certains cas (motorisation pour la propulsion navale), il est difficile voire impossible d'y accéder [22].

Dans le cas où la charge est une entrée inconnue et que l'on ne dispose pas de capteurs de vitesse et de position, il faut donc trouver une technique pour estimer ces grandeurs. De ce fait, une solution est l'usage d'observateurs. La synthèse des observateurs dits "capteurs logiciels" qui remplacent les capteurs mécaniques présente une solution prometteuse [22]. C'est pourquoi l'observation et donc la commande sans capteur mécanique devient primordiale. Il existe actuellement dans la littérature plusieurs techniques de synthèse d'un observateur non linéaire pour la machine synchrone à aimants permanents. En général, ces approches peuvent être classées en deux catégories [22] :

1. Approche basée sur l'injection de signal à haute fréquence,
2. Approche basée sur le modèle de la machine "Excitation fondamentale".

La première est plutôt appliquée aux machines synchrones à aimants permanents à pôles saillants. L'idée de base porte sur l'exploitation de l'effet de saillance. Cela peut être effectué via l'injection de signal d'excitation supplémentaire à haute fréquence indépendant de l'alimentation fondamentale de la machine. Ces signaux d'excitation peuvent être des signaux de tension ou bien des signaux de courant. Il y a deux méthodes d'injection. La première est de la superposer à l'excitation fondamentale [23]. La deuxième est d'utiliser une Modulation de Largeur d'Impulsions (MLI) modifiée [25]. Les hautes fréquences utilisées varient typiquement de 0.5 à 3 kHz [24]. Cela signifie que la résistance sera donc négligeable tandis que le courant dépendra surtout de l'inductance. La position du rotor sera ensuite extraite à partir de la mesure du courant ou de la tension à haute fréquence via le traitement des signaux [22].

Si la machine est à pôles lisses, il n'y aura pas de saillances dues à la différence des inductances ($L_d = L_q$) qui a été utilisée ci-dessus pour la détection de la position du rotor [22].

II. Estimation de la position des saillances par l'injection d'un signal à haute fréquence

En analysant toutes les techniques d'estimation de la position du flux, du rotor ou de la vitesse, nous trouvons que pour avoir une estimation sans capteur robuste, trois conditions doivent être validées [1]:

- Une excitation permanente indépendante de l'excitation fondamentale est nécessaire pour avoir une estimation dans le domaine des basses vitesses y compris à vitesse nulle.
- L'algorithme d'estimation doit être basé sur des saillances modélisables dépendantes de la position du rotor ou de celle du flux afin d'avoir une estimation indépendante des paramètres de la machine synchrone.
- Un traitement de signal robuste est indispensable pour extraire la position du rotor ou du flux (ou bien encore d'extraire la vitesse) en ligne et avec le moins de perturbations.

Une technique qui valide ces trois conditions a été proposée dans [15], cette technique est basée sur l'injection d'un signal à haute fréquence (courant ou tension) dans la machine superposée au signal fondamental d'alimentation de la machine. Si la machine présente des saillances, le signal résultant de l'injection contient des informations sur la position du rotor ou du flux [1].

III. Injection d'un signal de haute fréquence

III.1. Injection d'un courant à haute fréquence dans la machine

Le schéma général de cette méthode est montré sur la figure (II.1). Un courant à haute fréquence triphasé d'amplitude I_c et de fréquence ω_c est ajouté aux entrées des régulateurs de courant dans un schéma de commande vectorielle. L'interaction entre le courant à haute fréquence et les saillances dans la machine, produit une tension triphasée contenant des informations sur la position du rotor [15].

$$I_{\alpha\beta s_c}^{s^*} = I_c e^{j\omega_c t} \quad (II.1)$$

L'obstacle principal pour l'implantation de cette méthode vient de l'injection du signal aux entrées des régulateurs de courant dont la bande passante est limitée. Nous avons alors deux choix [15]:

- Diminuer la fréquence injectée, et par conséquent diminuer la séparation spectrale entre le courant injecté et le courant fondamental.
- Augmenter la bande passante des régulateurs de courant de plusieurs multiples de la fréquence injectée ce qui induit la sensibilité aux bruits de mesure qui réduit la qualité de contrôle.

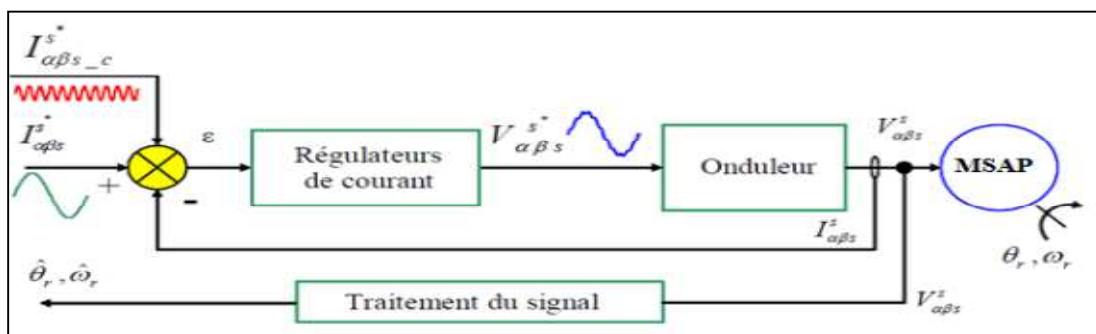


Figure. II. 1 : Estimation de la position du rotor par l'injection du courant à haute fréquence.

III.2. Injection d'une tension à haute fréquence dans la machine

La forme la plus simple du signal injecté est une tension sinusoïdale triphasée équilibrée d'amplitude $c V$ et de pulsation $c \omega$, superposée à l'alimentation fondamentale de la machine. Cette méthode ne demande pas d'équipements supplémentaires pour effectuer l'injection. En effet, il suffit d'ajouter les tensions $V_{\alpha\beta s_c}^s$ équation (II.3) du signal à haute fréquence aux tensions $V_{\alpha\beta s}^s$ de l'alimentation fondamentale de la machine à la sortie des régulateurs de courant. Ensuite, la tension résultante est appliquée aux bornes de la machine synchrone via un onduleur (figure II.2) [15].

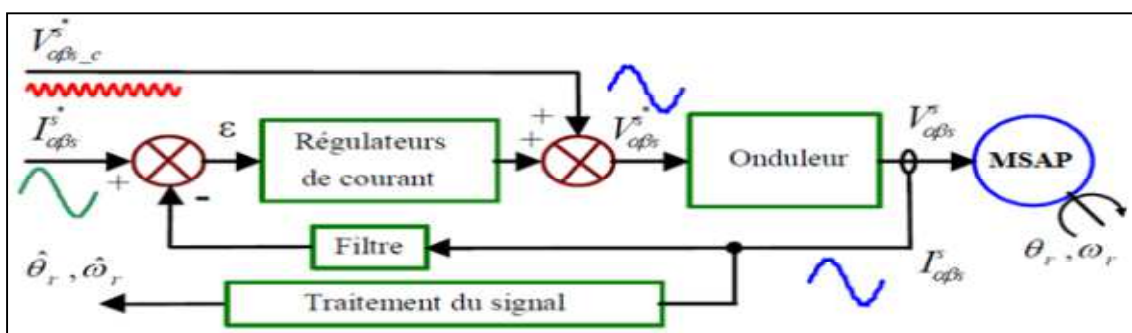


Figure. II. 2 : Schéma du principe de la méthode d'estimation de la position du rotor par l'injection d'une tension à haute fréquence.

IV. Calcul des courants à hautes fréquences

Etant donné que la fréquence du signal injecté est beaucoup plus grande que la fréquence de la tension de commande, le modèle de la machine peut être simplifié en hautes fréquences, ceci permet d'omettre les termes de couplage. En considérant que la machine possède une seule saillance à distribution sinusoïdale et en négligeant la résistance devant la réactance, le modèle de la MSAP se simplifie comme suit [12]:

$$\begin{bmatrix} V_{\alpha_c} \\ V_{\beta_c} \end{bmatrix} = \left(R_s I_2 + \frac{dL_{\alpha\beta}}{dt}(\theta_r) \right) \begin{bmatrix} I_{\alpha_c} \\ I_{\beta_c} \end{bmatrix} + L_{\alpha\beta}(\theta_r) \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{\alpha_c} \\ I_{\beta_c} \end{bmatrix} \approx L_{\alpha\beta}(\theta_r) \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{\alpha_c} \\ I_{\beta_c} \end{bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

$_c = \text{HF}$: désigne les termes hautes fréquences (carrier) et $V_{\alpha_c}, V_{\beta_c}, I_{\alpha_c}, I_{\beta_c}$ désignent les valeurs de tension et de courant haute fréquence suivant les axes α et β .

Avec :

$$V_{\alpha\beta s_c}^s = V_{_c} \begin{pmatrix} -\sin \omega_{_c} t \\ \cos \omega_{_c} t \end{pmatrix} = V_{_c} e^{j(\omega_{_c} t + \frac{\pi}{2})} \quad (\text{II.3})$$

Ainsi le courant à haute fréquence peut être déduit par l'expression II.4 :

$$\begin{bmatrix} I_{\alpha_c} \\ I_{\beta_c} \end{bmatrix} = \frac{V_{_c}}{\omega_{_c} (L^2 - \Delta L^2)} \begin{bmatrix} L \cos(\theta_{_c}) + \Delta L \cos(2\theta_r - \theta_{_c}) \\ L \sin(\theta_{_c}) + \Delta L \sin(2\theta_r - \theta_{_c}) \end{bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

Avec :

$\theta_{_c}$: représente l'angle entre la tension à haute fréquence injectée et l'axe de repère statique.

Le courant $I_{\alpha\beta_c} = I_{\alpha_c} + jI_{\beta_c}$ résulte de l'injection de la tension de haute fréquence qui peut s'écrire par :

$$I_{\alpha\beta} \approx I_{_c p} e^{j(\omega_{_c} t)} + I_{_c n} e^{j(-\omega_{_c} t + 2\theta_r)} + I_{\alpha\beta_f} e^{j(\omega_r t)} \quad (\text{II.5})$$

Où les amplitudes des composantes positive et négative du courant de haute fréquence sont données respectivement par :

$$I_{_c p} = \frac{L.V_{_c}}{\omega_{_c}(L^2 - \Delta L^2)} \quad \text{et} \quad I_{_c n} = \frac{\Delta L.V_{_c}}{\omega_{_c}(L^2 - \Delta L^2)}$$

Nous remarquons que ce courant est composé de trois termes à savoir :

- Le premier terme est la composante positive qui est un vecteur tournant dans le même sens que la pulsation du signal injecté, a une amplitude proportionnelle à la valeur

moyenne des inductances statoriques, à l'amplitude du signal injecté et inversement proportionnelle à la fréquence du signal injecté qui est indépendant de la position rotorique.

- Le deuxième terme est la composante négative qui est un vecteur tournant dans le sens inverse de celui de la tension injectée et dont l'amplitude est proportionnelle à la différence des inductances statoriques, à l'amplitude du signal injecté et inversement proportionnel à la fréquence du signal information et il contient l'information de la position rotorique.
- Le troisième terme est la composante fondamentale qui est indépendante de la position rotorique.

V. Résultats de simulation

Nous avons simulé la commande sans capteur par injection d'une tension sinusoïdale de haute fréquence d'amplitude de 10V et d'une fréquence de 1000Hz pour différentes valeurs des inductances directes et en quadrature et nous avons obtenu les résultats des figures suivantes :

- Pour : $L_d = L_q = 4.8\text{mH}$

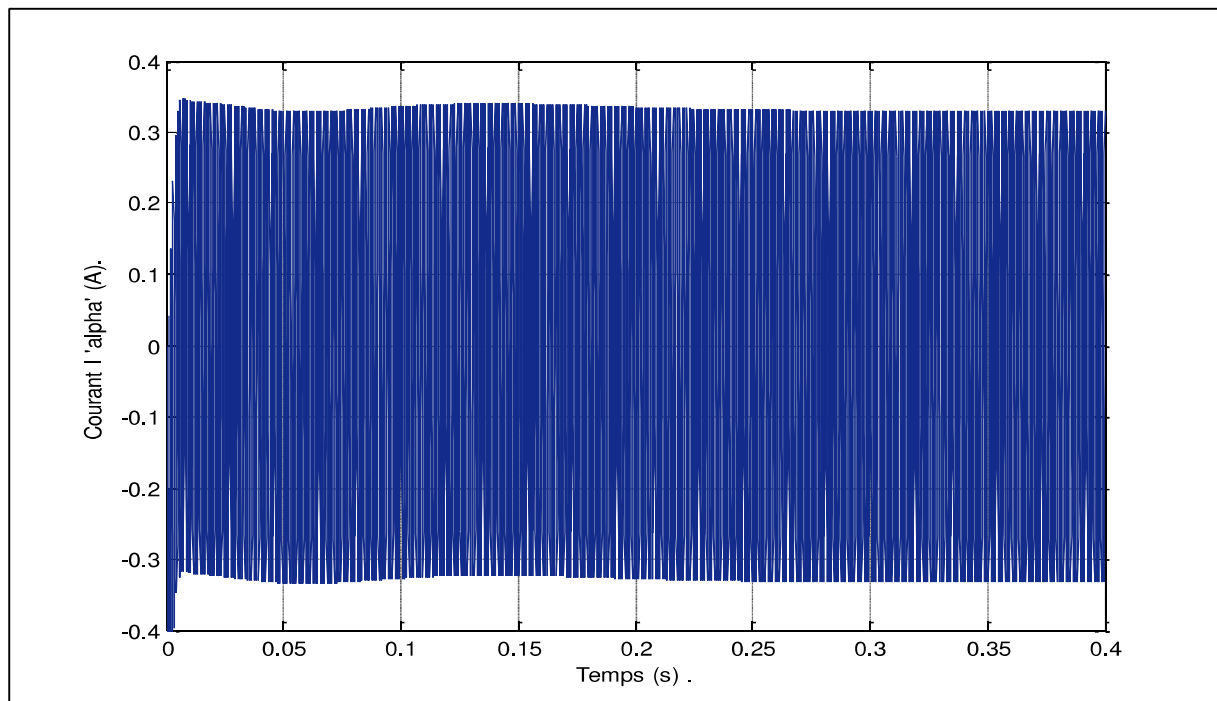


Figure. II. 3 : La variation de courant haute fréquence (I_α) lorsque $L_d = L_q = 4.8\text{mH}$.

- Pour : $L_d = 4.8\text{mH}$; $L_q = 3.1\text{mH}$

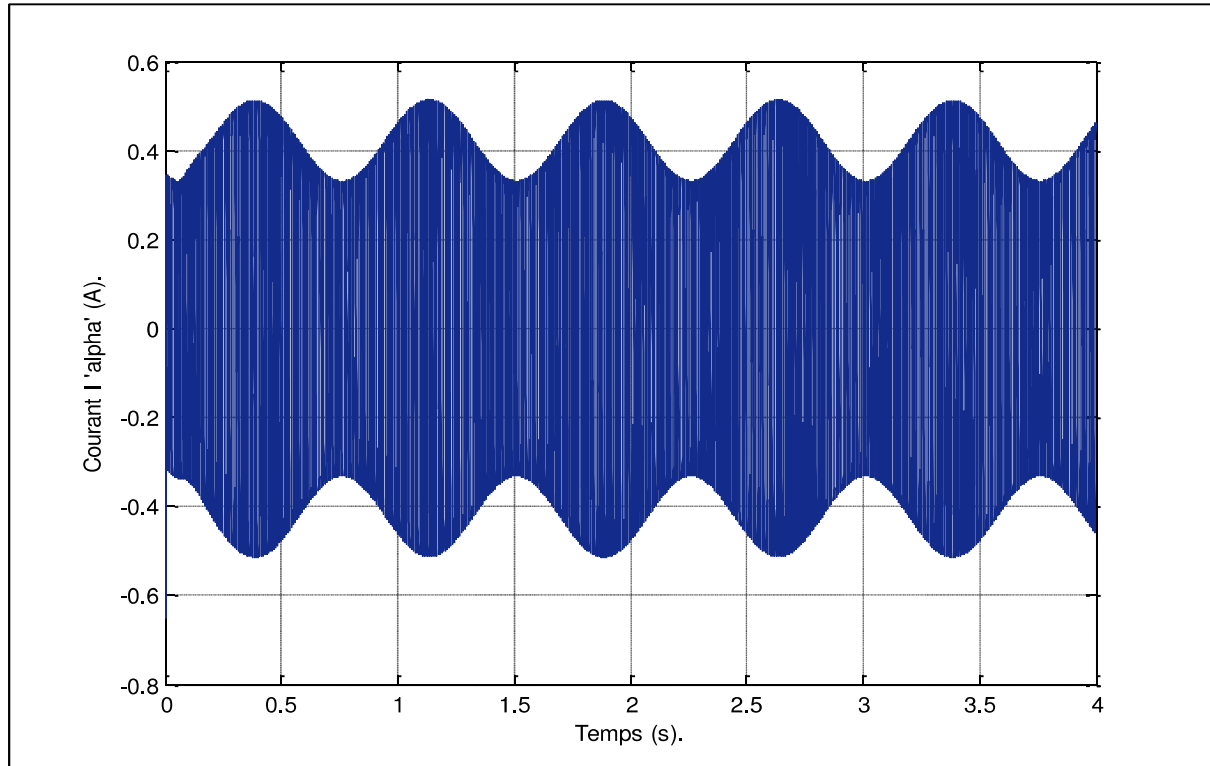


Figure. II. 4 : La variation de courant haute fréquence (I_{α}) lorsque $L_d=4.8\text{mH}$. el $L_q=3.1\text{mH}$.

- Pour : $L_d = 4.8\text{mH}$; $L_q = 4.1\text{mH}$

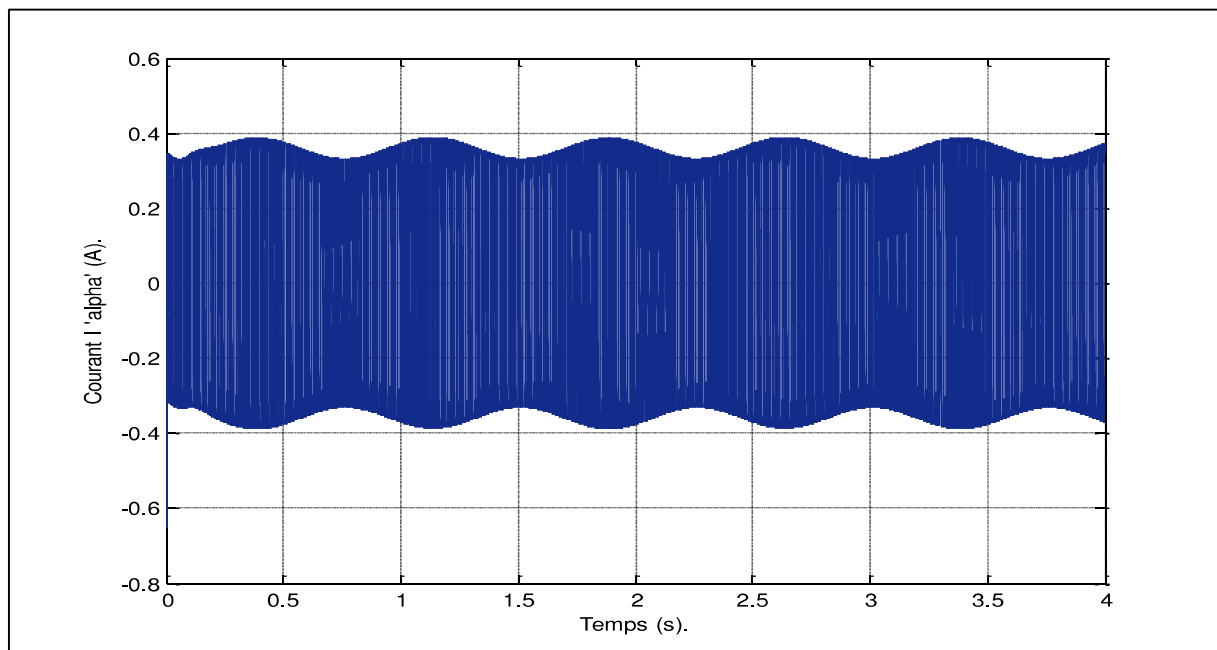


Figure. II. 5 : La variation de courant haute fréquence (I_{α}) lorsque $L_d=4.8\text{mH}$; $L_q=4.1\text{mH}$.

VI. Interprétation des résultats

On remarque que lorsque $L_d = L_q$ (cas d'une machine à pôles lisses) le courant de haute fréquence n'est pas modulé par la position rotorique (figure II.3) par contre lorsque $L_d \neq L_q$ (machine synchrone à pôle saillants) le courant de haute fréquence est modulé par la position rotorique (figure II.5), plus la différence entre les deux inductances (L_d et L_q) plus grande, la modulation du courant de haute fréquence devient plus importante (figure II.4), donc plus la machine est saillante l'extraction de la position de rotor est plus facile.

VII. Extraction de la position rotorique

VII.1. Extraction de la composante négative par un filtre passe bande suivi d'un filtre synchrone passe-haut

Cette structure est constituée d'un filtre passe bande suivi d'un filtre synchrone passe-haut. Le filtre passe bande, dont la bande passante est choisie autour de la fréquence du signal à haute fréquence, permet d'éliminer la composante fondamentale. Quant au filtre synchrone passe haut, il isole la composante négative du courant à HF. Ce filtre exploite la conséquence de rotation des deux vecteurs de courant à HF dans deux directions différentes. En effet, il a pour principe le transfert du vecteur courant à haute fréquence dans un référentiel en rotation synchrone avec la fréquence de la tension haute fréquence injectée. Ce passage permet de transformer la séquence positive du courant à HF en une composante continue facile à éliminer à l'aide d'un filtre passe haut. Ensuite, une transformation inverse est appliquée à la composante résultante pour transférer à nouveau le signal dans le repère statorique [16].

Le schéma d'extraction de la séquence négative du courant à haute fréquence par cette méthode est présenté par la figure (II.6).

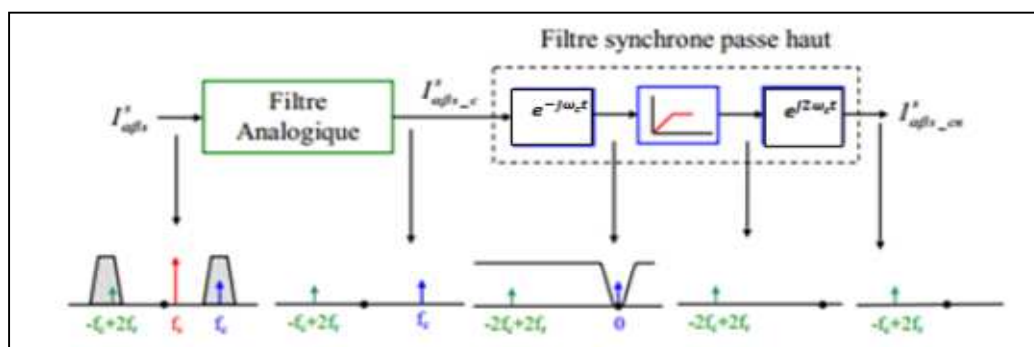


Figure. II. 6 : Schéma d'extraction des composantes inverses par un filtre analogique suivi par un filtre synchrone passe haut.

Malgré la facilité d’implantation de cette structure, elle présente un inconvénient qui réside dans le degré du filtre passe haut à employer. En effet, l’utilisation d’un filtre de 1^{er} ordre accroît le temps de réponse, et cette conséquence dégrade l’estimation de la position du rotor durant les transitoires [16].

VII.2. Extraction de la position rotorique par la fonction « arc tangente 2 »

Dans ce chapitre, le signal haute fréquence injecté est une tension directe (équation II.3), le courant statorique résultant est donné par l’équation (II.5), afin d’extraire la position rotorique. Nous avons utilisé la deuxième méthode qui est l’extraction de la composante négative par un filtre passe bande suivi d’un filtre synchrone passe-haut. Nous obtenons la composante utile qui contient l’information sur la position rotorique donnée par l’équation II.6 :

$$I_{\alpha\beta s_c}^{-\omega_c} = I_{cn} e^{-j(2\theta_r)} \quad (II.6)$$

L’équation II.6 peut s’écrire sous la forme suivante :

$$I_{\alpha\beta s_c}^{-\omega_c} = I_{\alpha\beta s_c}^{-\omega_c} \cos(2\theta_r) + j I_{\alpha\beta s_c}^{-\omega_c} \sin(2\theta_r) \quad (II.7)$$

VIII. Estimation de la position du rotor

Pour estimer cette position on peut utiliser la fonction Arc tangente (Figure II.7). On peut ainsi extraire la position du rotor par:

$$2\theta_r = \arctan\left(\frac{I_{\beta_{nc}}^{-\omega_c}}{I_{\alpha_{nc}}^{-\omega_c}}\right) \quad (II.8)$$

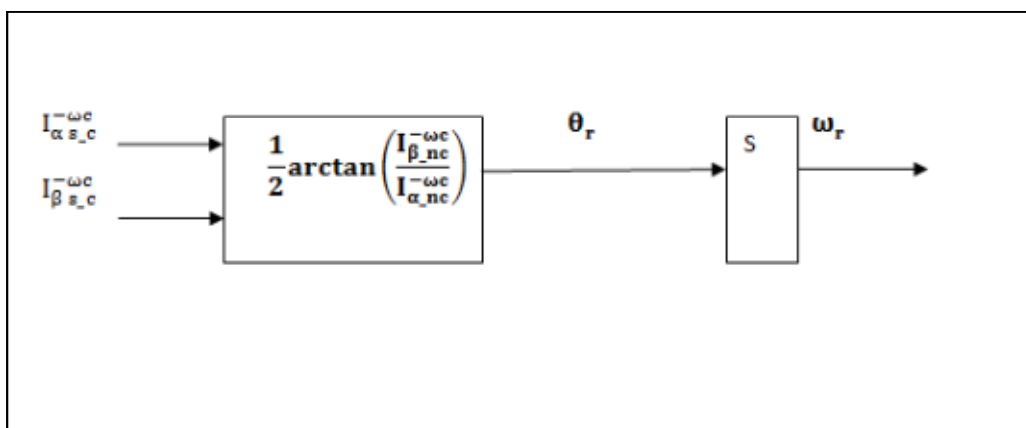


Figure. II. 7 : Estimation de la position du rotor par la fonction arc tangente.

Cette stratégie a pour avantage sa réponse instantanée car elle ne se base pas sur un contrôleur ou sur un régime en boucle. Cependant elle dispose d’un inconvénient qui réside

dans la division par zéro, mais qui peut être résolu en utilisant la fonction «arctan2» qui calcule l'angle à partir des coordonnées dans le plan euclidien [16].

IX. Résultats de simulation sans déroulement de phase

Nous avons simulé notre machine par l'injection d'une tension rotationnelle de haute fréquence directe pour différentes valeurs de la consigne de vitesse ($N = 10\text{tr/min}$, $N = 50\text{tr/min}$, $N = 100\text{tr/min}$) et on a obtenues les résultats suivants :

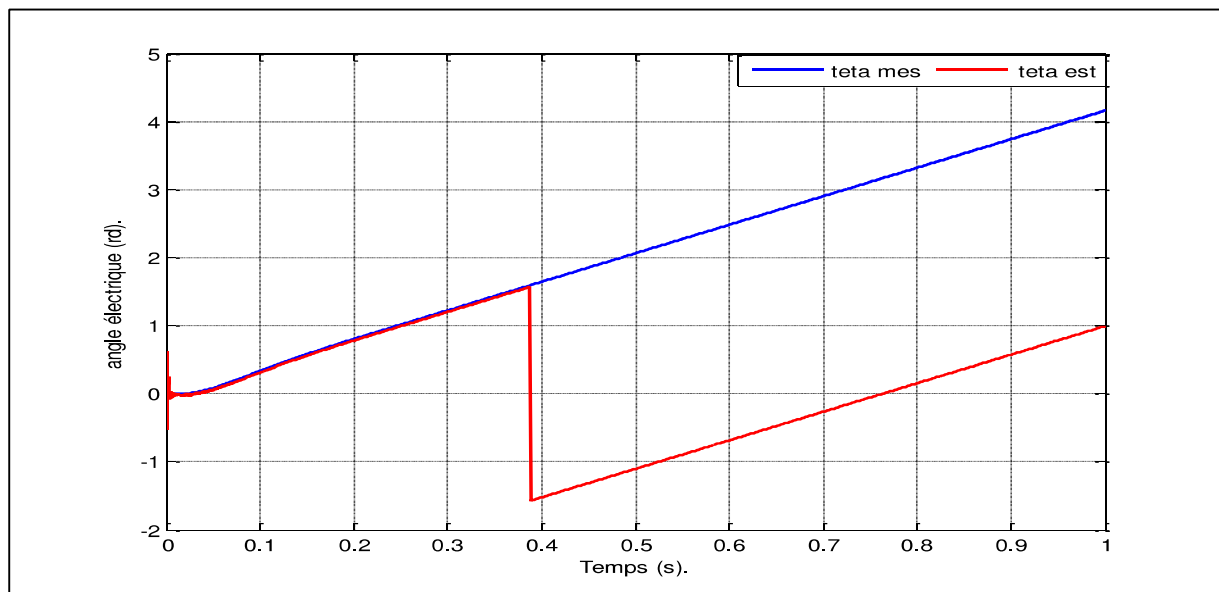


Figure. II. 8 : La position rotorique mesurée et la position rotorique estimée par la méthode directe pour une vitesse de référence $N=10\text{tr/min}$ sans déroulement de phase.

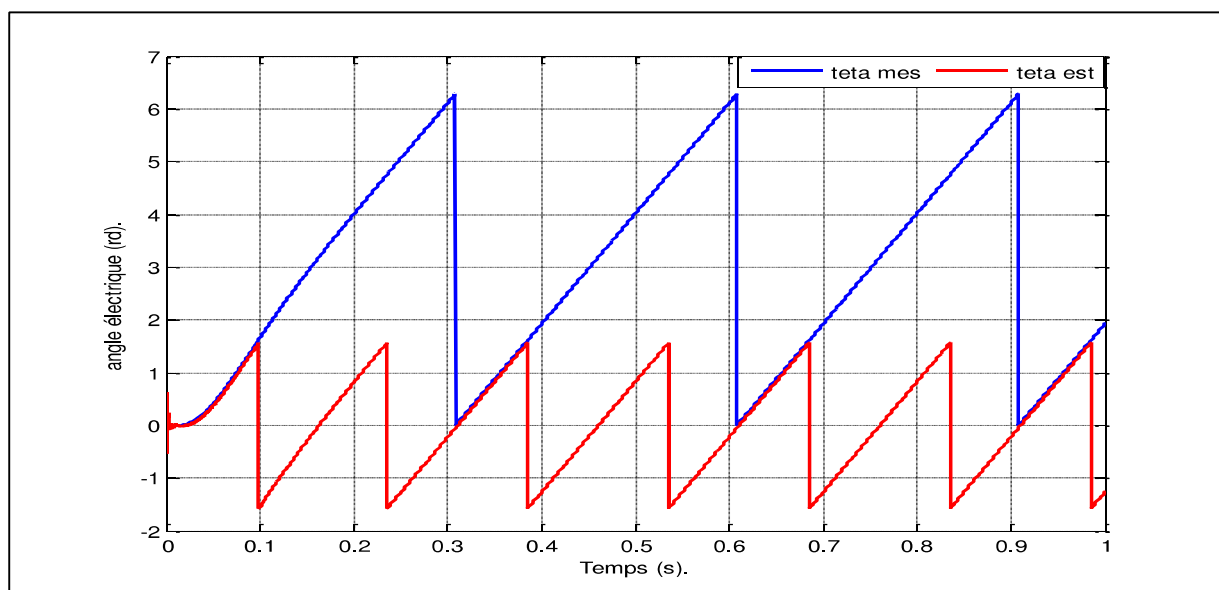


Figure. II. 9 : La position rotorique mesurée et la position rotorique estimée par la méthode directe pour une vitesse de référence $N=50\text{tr/min}$ sans déroulement de phase.

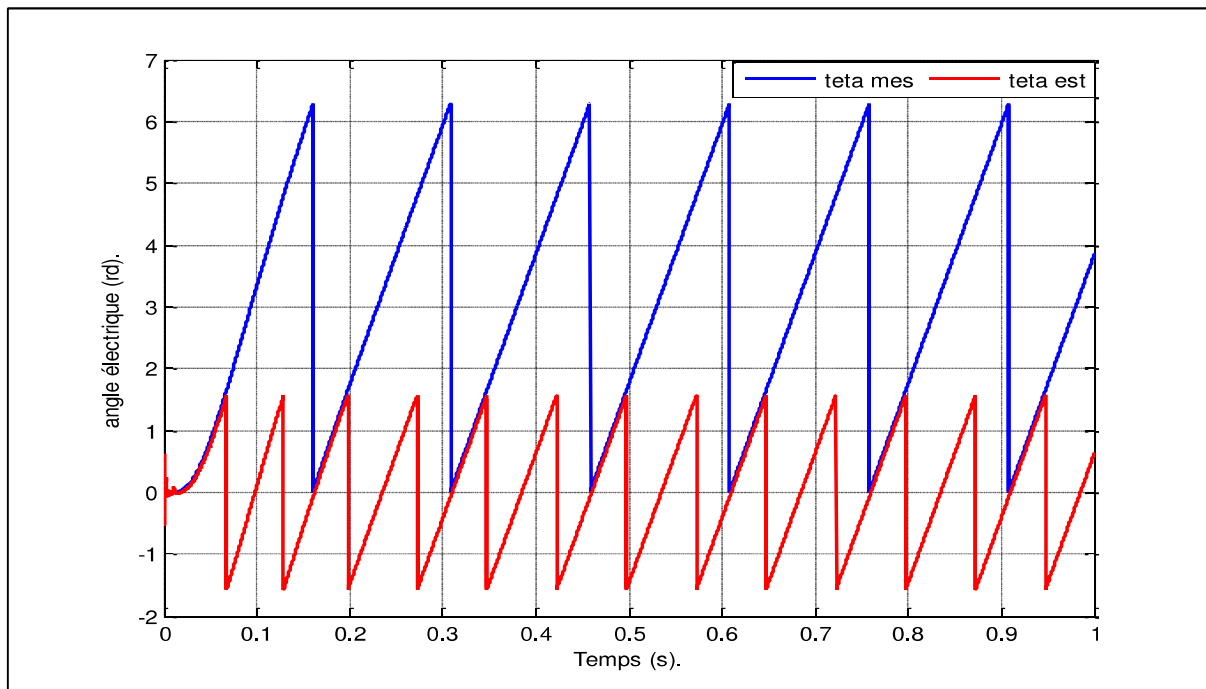


Figure. II. 10 : La position rotorique mesurée et la position rotorique estimée par la méthode directe pour une vitesse de référence $N=100\text{tr/min}$ sans déroulement de phase.

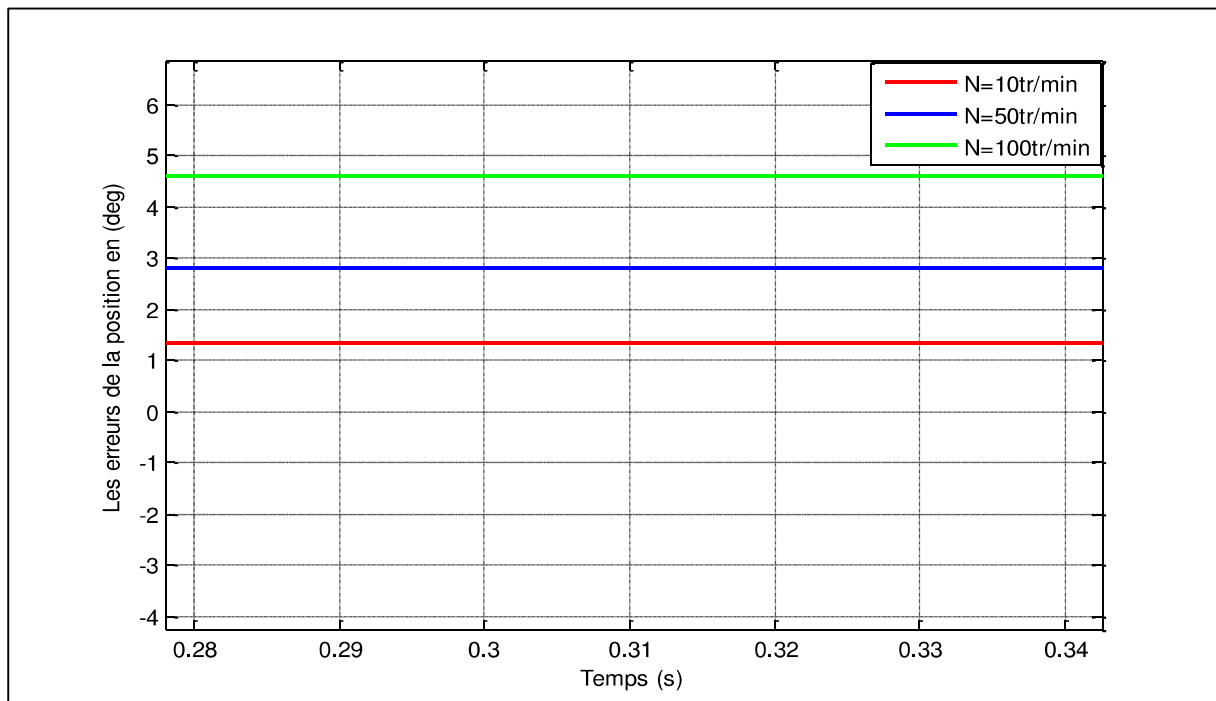


Figure. II. 11 : Les erreurs de la position pour les différentes valeurs de la vitesse de référence ($N=10\text{tr/min}$, $N=50\text{tr/min}$, $N=100\text{tr/min}$) sans déroulement de phase.

X. Interprétation des résultats

On remarque que l'erreur sur la position du rotor augmente en augmentant la vitesse de référence (figure II.11).

L'estimation de la position du rotor par la fonction « arc tangente2 » fait que la position soit comprise sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$, et pour cela on est amené à utiliser un programme intermédiaire pour faire le déroulement de phase.

XI. Déroulement de phase

Lorsque la phase est comprise dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ de la fonction « arc tangente 2 », le programme de déroulement de phase permet de ramener cette phase dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ pour pouvoir la comparer à l'angle réel (ou mesurée).

XII. Résultats de simulation avec déroulement de phase :

Nous avons simulé notre machine par l'injection d'une tension rotationnelle de haute fréquence on utilise le déroulement de phase pour différentes valeurs de la consigne de vitesse ($N = 10\text{tr/min}$, $N = 50\text{tr/min}$, $N = 100\text{tr/min}$) et on a obtenues les résultats suivants :

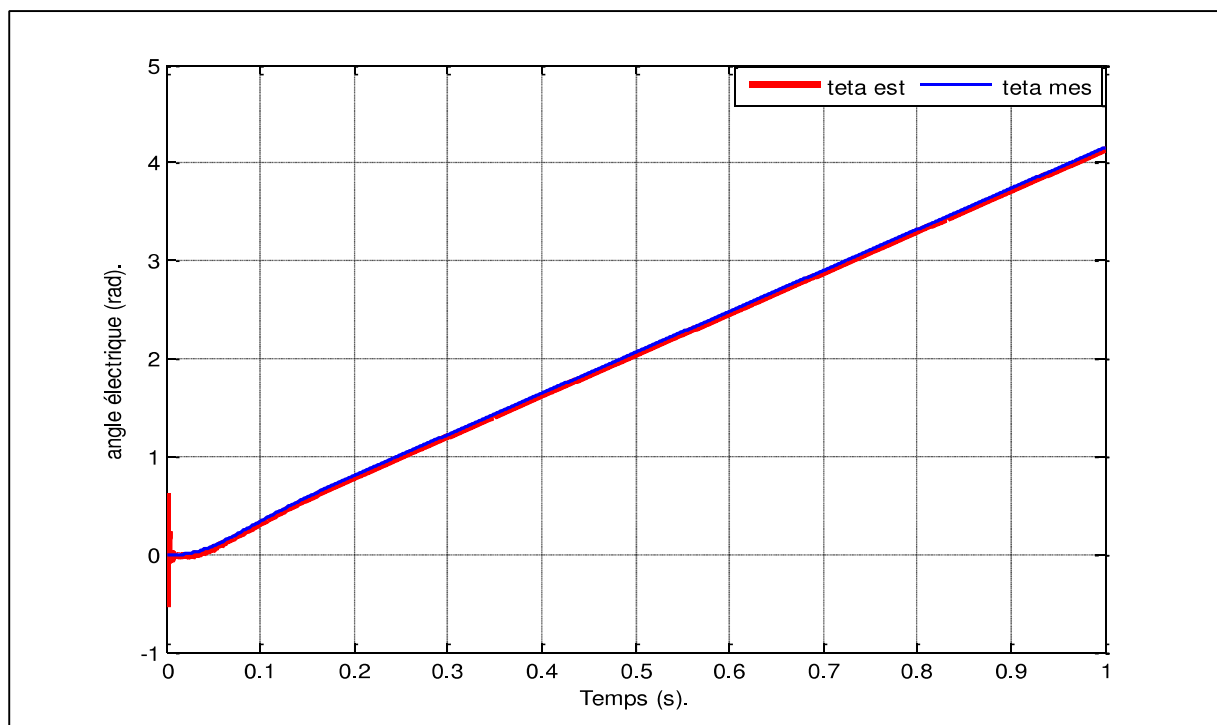


Figure. II. 12 : La position rotorique mesurée et la position rotorique estimée par la méthode directe pour une vitesse de référence $N=10\text{tr/min}$ avec déroulement de phase.

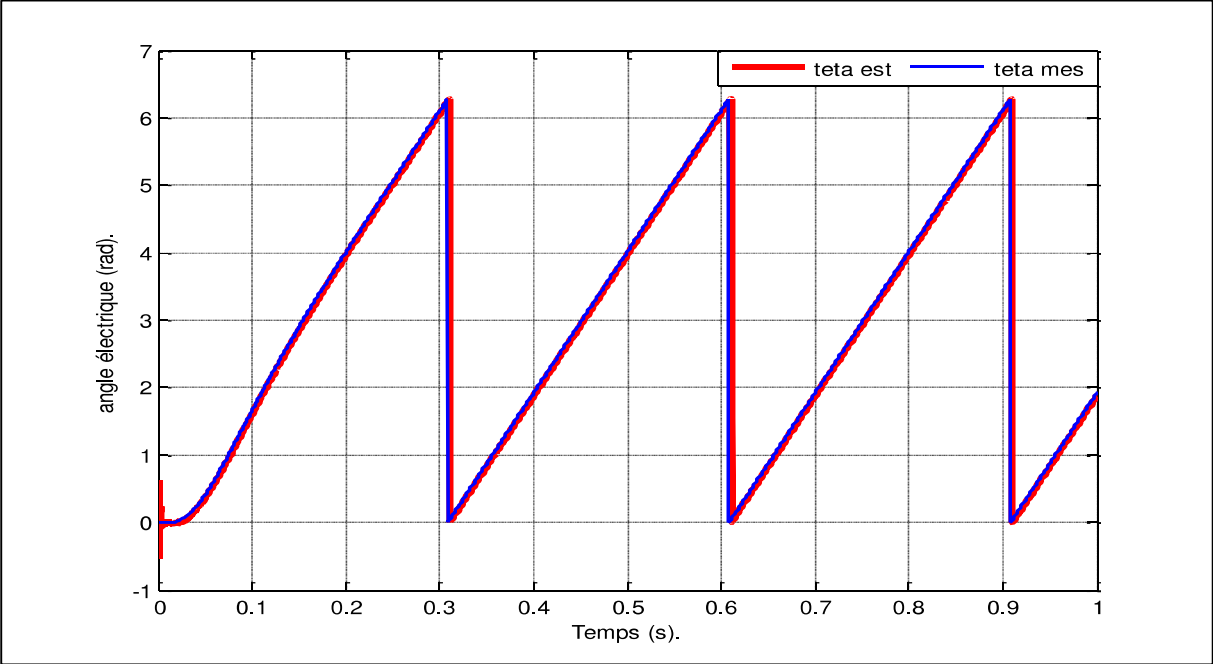


Figure. III. 13: La position rotorique mesurée et la position rotorique estimée par la méthode directe pour une vitesse de référence N=50tr/min avec déroulement de phase.

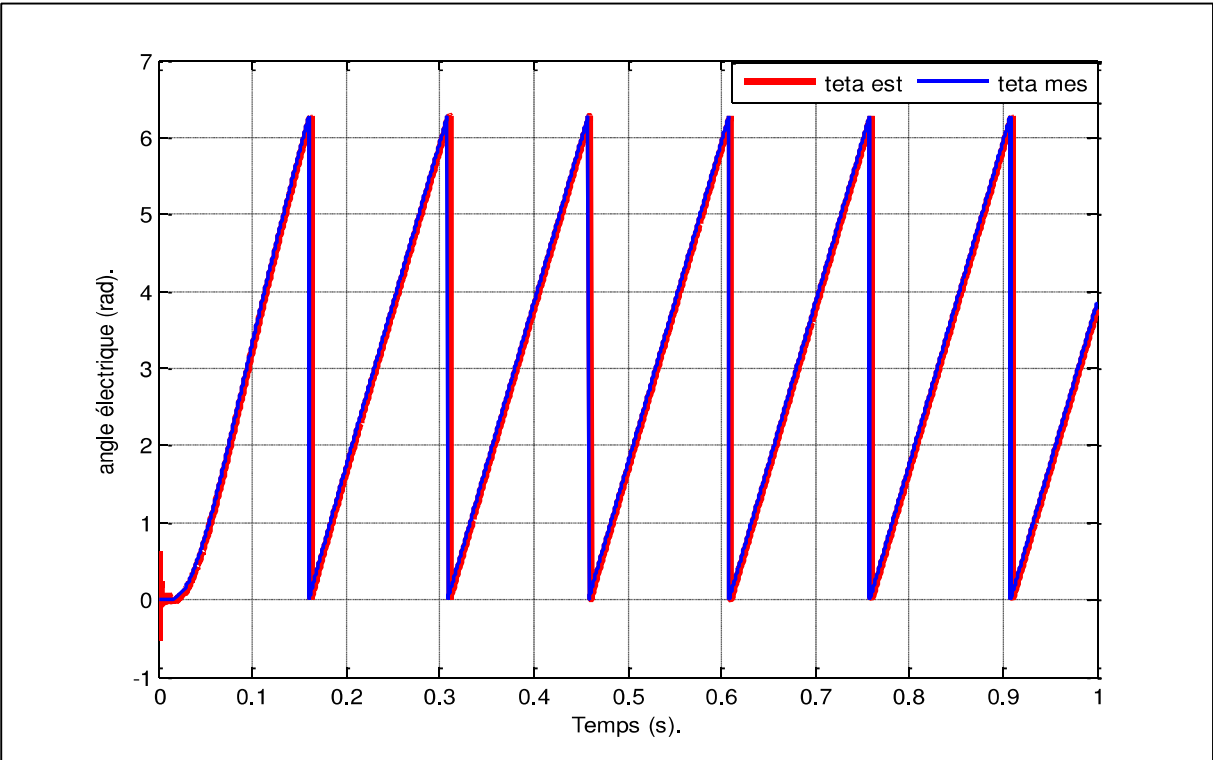


Figure. III. 14 : la position rotorique mesurée et la position rotorique estimée par la méthode directe pour une vitesse de référence N=100tr/min avec déroulement de phase.

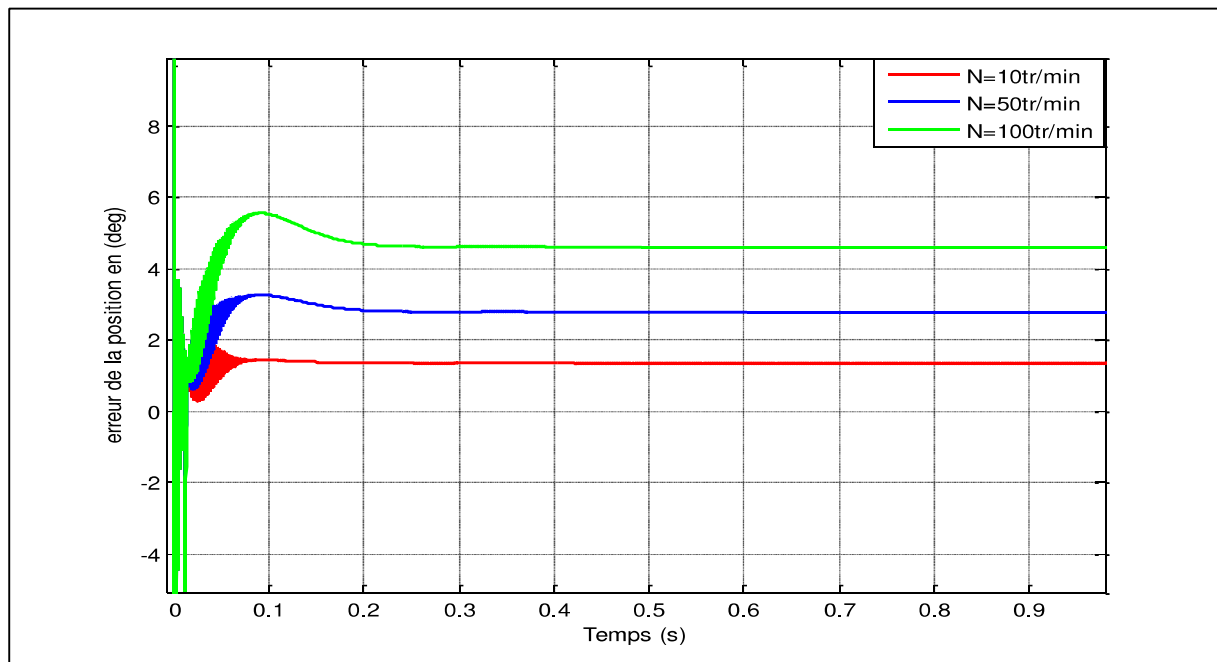


Figure. II. 15 : Les erreurs de la position pour les différentes valeurs de la vitesse de référence (N=10tr/min, N=50tr/min, N=100tr/min) avec déroulement de phase.

XIII. Interprétation des résultats

Lorsque on utilise le déroulement de phase, on remarque bien que la position estimée et celle mesurée sont presque les mêmes, et l'erreur sur la position augmente en augmentant la vitesse.

XIV. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit la méthode d'estimation de la position par injection d'un signal haute fréquence.

L'extraction du courant haute fréquence contenant l'information sur la position se fait à l'aide d'un traitement de signal en utilisant différents filtres analogiques, et l'extraction de la position se fait par la fonction « arc tangente 2 » ainsi on obtient la position estimée dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$, et avec le programme de déroulement de phase, nous l'avons ramené à l'intervalle $[0, 2\pi]$.

D'après les résultats de simulation, nous remarquons que la méthode d'estimation de position du rotor par injection d'un signal de haute fréquence est valable plus précise à basses vitesses.

Chapitre III

*Estimation de la position et la vitesse
rotorique en injectant un signal
pulsatoire*

I. Introduction

La méthode d'injection d'un signal de haute fréquence est très utilisée pour l'estimation de la position à basses vitesses voir à l'arrêt de la MSAP, elle se base sur l'exploitation de la saillance au rotor. Ainsi plusieurs formes de signaux de haute fréquence peuvent être injectés et créer cette saillance, comme le signal rotationnel, qui est traditionnellement utilisé, le signal pulsatoire et le signal carré utilisés récemment. Différentes formes de courants de haute fréquence sont alors induites et un traitement de signal adéquat s'impose pour l'extraction de l'information sur la position rotorique.

Dans le chapitre précédent on a développé la méthode d'injection d'un signal rotatif direct, et dans cette partie nous injectons un signal pulsatoire.

II. Les différents types de signaux

II.1. L'injection d'un signal de haute fréquence rotatif

En 1995, l'injection de tension rotative a été testée sur la MSAP à pôles saillants. Différents types de saillances ont été exploités pour extraire la position du rotor. D'une manière générale le signal injecté est une tension (ou un courant) triphasée équilibrée de haute fréquence qui peut être portée par les axes α et β ou par les axes d et q . Souvent, le signal injecté est une tension et dans ce cas, l'information sur la position du rotor est obtenue à partir de la composante inverse des courants statoriques. Il a été prouvé que l'injection de courant nécessite que la bande passante des régulateurs de courant soit plus grande que la fréquence d'injection. Ainsi l'injection de tension a été la plus utilisée. [2]

II.2. L'injection d'un Signal haute fréquence carré

Un signal carré n'est seulement qu'une superposition de plusieurs signaux sinusoïdaux de fréquences différentes. Ce type de signal est récemment utilisé pour l'estimation de la position de la machine asynchrone qui possède des saillances multiples, afin d'isoler le courant haute fréquence contenant l'information sur la position rotorique.

II.3. L'injection d'un signal de haute fréquence pulsatoire

Cette méthode exploite également les différents types de saillance présentés dans la machine. Généralement, le signal injecté est une tension ou un courant. Il est porté par l'axe d ou l'axe q estimé. Récemment, Liu et al proposent une nouvelle technique d'estimation de la position rotorique à basse vitesse en injectant une tension HF dans le repère fixe ($\alpha - \beta$). La position

estimée est alors déduite à partir du courant mesuré suivant l'axe orthogonal à l'axe de l'injection. Si on l'injecte une tension HF selon l'axe d telle que le signal pulsatoire de haute fréquence est injecté selon l'axe $V_{\hat{d}}$ estimé ou dans l'axe $V_{\hat{q}}$ (dans le référentiel hypothétique) représenté par la figure 1 et son expression est (s'il est injecté selon l'axe d) : [2]

$$\begin{bmatrix} V_{\hat{d}_c} \\ V_{\hat{q}_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_c \cos(\omega_c t) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{V_c}{2} e^{j(\omega_c t)} + \frac{V_c}{2} e^{j(-\omega_c t)} \quad (\text{III.1})$$

Ce signal est composé de deux signaux rotatifs tournants dans le sens inverse.

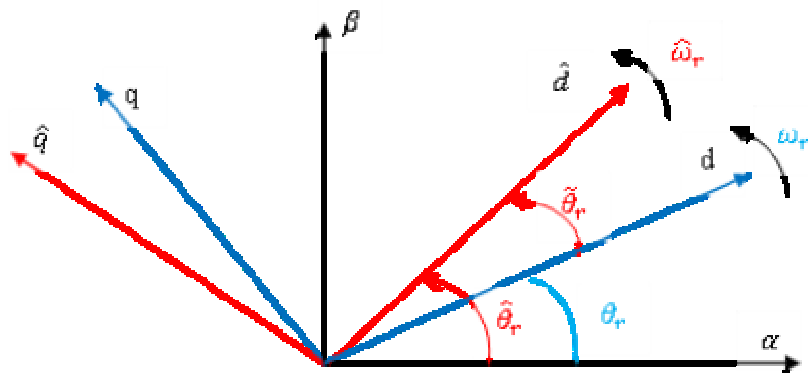


Figure. III. 1: Repère fixe ($\alpha\beta$), repère réel (dq) et repère estimé (\hat{d}, \hat{q}).

Cette figure représente le repère biphasé ($\alpha\beta$), le repère tournant ou réel (dq) et le repère estimé (\hat{d}, \hat{q}).

Le modèle de la machine dans le référentiel lié au champ tournant est :

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + s \cdot L_d & -\omega_r L_q \\ \omega_r L_d & R_s + s \cdot L_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_r \cdot \Phi_f \end{bmatrix} \quad (\text{III.2})$$

Ces équations (III.2) peuvent être réécrites par :

$$\begin{cases} v_d = R_s \cdot i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - \omega_r \cdot L_q \cdot i_q \\ v_q = R_s \cdot i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + \omega_r \cdot L_d \cdot i_d + \omega_r \cdot \Phi_f \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

En supposant que la fréquence du signal injecté est beaucoup plus grande que la fréquence d'alimentation de la machine, on peut négliger les effets de la vitesse du rotor, en haute fréquence nous avons donc [21] :

$$v_{d_c} = R_s \cdot i_{d_c} + L_d \frac{di_{d_c}}{dt} = (R_s + j \cdot \omega_c \cdot L_d \cdot i_{d_c}) = Z_d \cdot i_{d_c} \quad (\text{III.4})$$

$$v_{q_c} = R_s \cdot i_{q_c} + L_q \frac{di_{q_c}}{dt} = (R_s + j \cdot \omega_c \cdot L_q \cdot i_{q_c}) = Z_q \cdot i_{q_c} \quad (\text{III.5})$$

Les équations (III.4) et (III.5) peuvent être mises sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} v_{d_c} \\ v_{q_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_d & 0 \\ 0 & Z_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{d_c} \\ i_{q_c} \end{bmatrix} \quad (\text{III.6})$$

La matrice de transformation des variables réelles (x_d, x_q) aux variables estimées (\hat{x}_d, \hat{x}_q) est la matrice $R(\tilde{\theta}_r)$ telle que [2] :

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \end{bmatrix} = R(\tilde{\theta}_r) \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_d \\ \hat{x}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \tilde{\theta}_r & \sin \tilde{\theta}_r \\ -\sin \tilde{\theta}_r & \cos \tilde{\theta}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_d \\ \hat{x}_q \end{bmatrix} \quad (\text{III.7})$$

$$\tilde{\theta}_r = \hat{\theta}_r - \theta_r$$

Avec :

$\tilde{\theta}_r$: erreur de position.

$\hat{\theta}_r$: position estimée.

θ_r : position mesurée.

Avec la variable x peut être une tension ou un courant.

En remplaçant (III.7) dans (III.6) on peut écrire:

$$\begin{bmatrix} v_{d_c} \\ v_{q_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \tilde{\theta}_r & \sin \tilde{\theta}_r \\ -\sin \tilde{\theta}_r & \cos \tilde{\theta}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_{d_c} \\ \hat{i}_{q_c} \end{bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

Les expressions des courants estimés à haute fréquence peuvent être donnés par :

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{d_c} \\ \hat{i}_{q_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \tilde{\theta}_r & -\sin \tilde{\theta}_r \\ \sin \tilde{\theta}_r & \cos \tilde{\theta}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/Z_d & 0 \\ 0 & 1/Z_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \tilde{\theta}_r & \sin \tilde{\theta}_r \\ -\sin \tilde{\theta}_r & \cos \tilde{\theta}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_{d_c} \\ \hat{v}_{q_c} \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

En développant les calculs on obtient les expressions ci-dessous :

$$\hat{i}_{d_c} = \frac{1}{Z_d} (\cos^2 \tilde{\theta}_r \cdot \hat{v}_{d_c} + \cos \tilde{\theta}_r \cdot \sin \tilde{\theta}_r \cdot \hat{v}_{d_c}) + \frac{1}{Z_d} (\sin^2 \tilde{\theta}_r \cdot \hat{v}_{d_c} - \cos \tilde{\theta}_r \cdot \sin \tilde{\theta}_r \cdot \hat{v}_{q_c}) \quad (\text{III.10})$$

Et :

$$\hat{i}_{q_c} = \frac{1}{Z_d} \cdot \left[\frac{1}{2} \sin^2 \tilde{\theta}_r \cdot \hat{v}_{d_c} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2 \tilde{\theta}_r \right) \cdot \hat{v}_{q_c} \right] + \frac{1}{Z_d} \cdot \left[-\frac{1}{2} \sin 2 \tilde{\theta}_r \cdot \hat{v}_{d_c} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2 \tilde{\theta}_r \right) \cdot \hat{v}_{q_c} \right] \quad (\text{III.11})$$

En appliquant des transformations trigonométriques et en remplaçant \hat{v}_{d-c} et \hat{v}_{q-c} par les expressions donnée par (III.1) et en posant :

$$Z_{moy} = \frac{Z_d + Z_q}{2}$$

$$L_{diff} = \frac{Z_d - Z_q}{2}$$

Par conséquent, si le courant de haute fréquence est injecté que selon l'axe d, on obtient :

On trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{i}_{d-c} = \frac{V_c \cos(\omega_c t)}{Z_d Z_q} \left(Z_{moy} - \frac{1}{2} Z_{diff} \cos 2\tilde{\theta}_r \right) \quad \text{(III.12)} \\ \hat{i}_{q-c} = \frac{V_c \cos(\omega_c t)}{Z_d Z_q} \left(-\frac{1}{2} Z_{diff} \sin 2\tilde{\theta}_r \right) \quad \text{(III.13)} \end{array} \right.$$

Avec :

$$Z_{diff} = Z_d - Z_q = (R_s - R_r) + j\omega_c(L_d - L_q).$$

On peut déterminer l'erreur d'estimation de la position rotorique si $Z_{diff} = Z_d - Z_q \neq 0$. Si cette erreur est nulle alors seul le courant \hat{i}_{q-c} s'annule. Ce dernier est proportionnel à $\sin 2\tilde{\theta}_r$. On le considère comme un signal d'entrée pour l'estimation de $\tilde{\theta}_r$. Nous pouvons supposer que l'impédance relative à la résistance statorique est négligeable par rapport à l'impédance relative aux inductances, ce qui donne [2] :

$Z_d = L_d \cdot \omega_c$ est l'impédance longitudinale.

$Z_q = L_q \cdot \omega_c$ est l'impédance transversale.

Avec :

$$\cos(\omega_c t + \frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} \quad \text{(III.14)}$$

$$j \cos \omega_c t = \cos(\omega_c t + \frac{\pi}{2}) = -\sin \omega_c t \quad \text{(III.15)}$$

Le courant \hat{i}_{q-c} est donné par :

$$\hat{i}_{q-c} = \frac{V_c \sin 2\tilde{\theta}_r}{2\omega_c L_d L_q} (L_{diff} \sin \omega_c t) \quad \text{(III.16)}$$

Nous remarquons que ce courant est sinusoïdal et modulé en amplitude par l'erreur sur la position estimée $\tilde{\theta}_r$. Afin de démoduler \hat{i}_{q_c} , on effectue une démodulation synchrone à la fréquence ω_c . Le terme résultant à la fréquence $2\omega_c$ est éliminé par un filtre passe bas donné par la Fig. III.2:

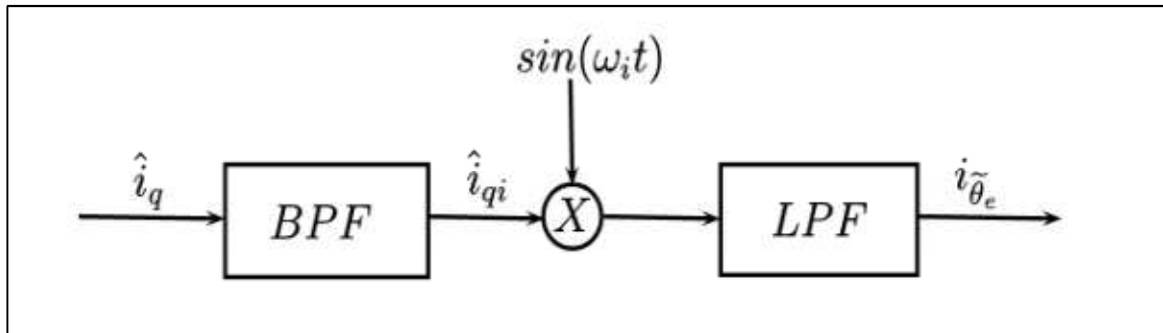


Figure. III. 2 : Procédure de calcul du signal d'entrée de l'observateur de position.

Cette méthode d'injection est basée sur un processus de démodulation permettant de trouver un signal proportionnel à l'erreur d'estimation de la position rotorique. Ce processus est utilisé par la majorité des méthodes et il utilise des filtres analogiques pour isoler le terme contenant des informations sur la position et pour éliminer les autres termes indésirables. Le filtre passe bande, centré sur la fréquence porteuse f_c , permet de séparer les deux composantes de faibles amplitudes du courant statorique en HF et d'annuler le courant d'excitation en BF. Le courant résultant est alors multiplié par $\sin(\omega_c t)$. A la fin, un filtre passe bas est utilisé pour récupérer le signal portant une information sur la position rotorique. [2]

On obtient le signal d'erreur :

$$i_{\tilde{\theta}_r} \equiv LPF(\hat{i}_{q_c} \sin(\omega_c t)) = -\frac{V_c L_{diff}}{4\omega_c L_d L_q} \sin(2\tilde{\theta}_r). \quad (III.17)$$

Supposons que l'erreur d'estimation de la position rotorique est faible, on a donc :

$$i_{\tilde{\theta}_r} \approx -\frac{V_c L_{diff}}{2\omega_c L_d L_q} \tilde{\theta}_r \quad (III.18)$$

III. Estimation de la position du rotor par une boucle à verrouillage de phase (PLL)

La boucle à verrouillage de phase PLL est un estimateur dont le principe de fonctionnement est d'employer l'erreur résultant de la multiplication croisée entre un vecteur réel (issu de la mesure) et un vecteur modèle (issu d'un modèle de référence) afin de forcer la convergence de la phase du vecteur modèle vers celle du vecteur réel.

Puisque la phase des composantes inverses de la porteuse contient la position du rotor, nous pouvons donc appliquer une PLL (dont le schéma principe est présenté sur la figure pour estimer cette position [15].

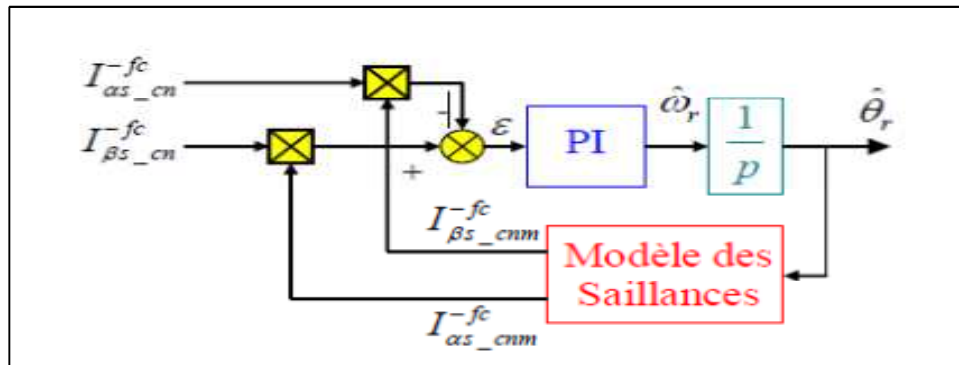


Figure. III. 3 : estimation de la position du rotor par une boucle à verrouillage de phase.

IV. Simulation de l'estimateur

Nous avons simulé l'estimateur de la position et de la vitesse en injectant un signal pulsatoire selon l'axe d estimé, dans lequel on a imposé une référence de position périodique variant dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$, et pour deux valeurs de périodes ($T=1.5$ s ; $T=0.3$; et $T=1.5$ s), nous avons ainsi obtenu les résultats des figures suivantes :

- Pour $T= 1.5$ s :

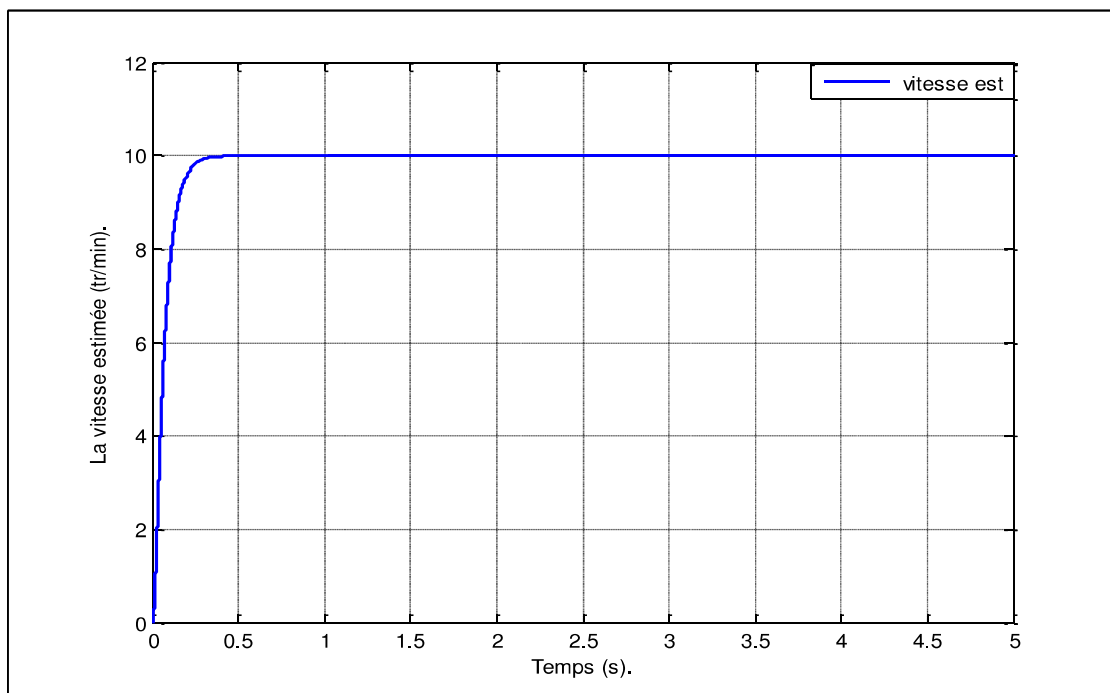


Figure. III. 4 : La vitesse estimée pour $T=1.5$ s.

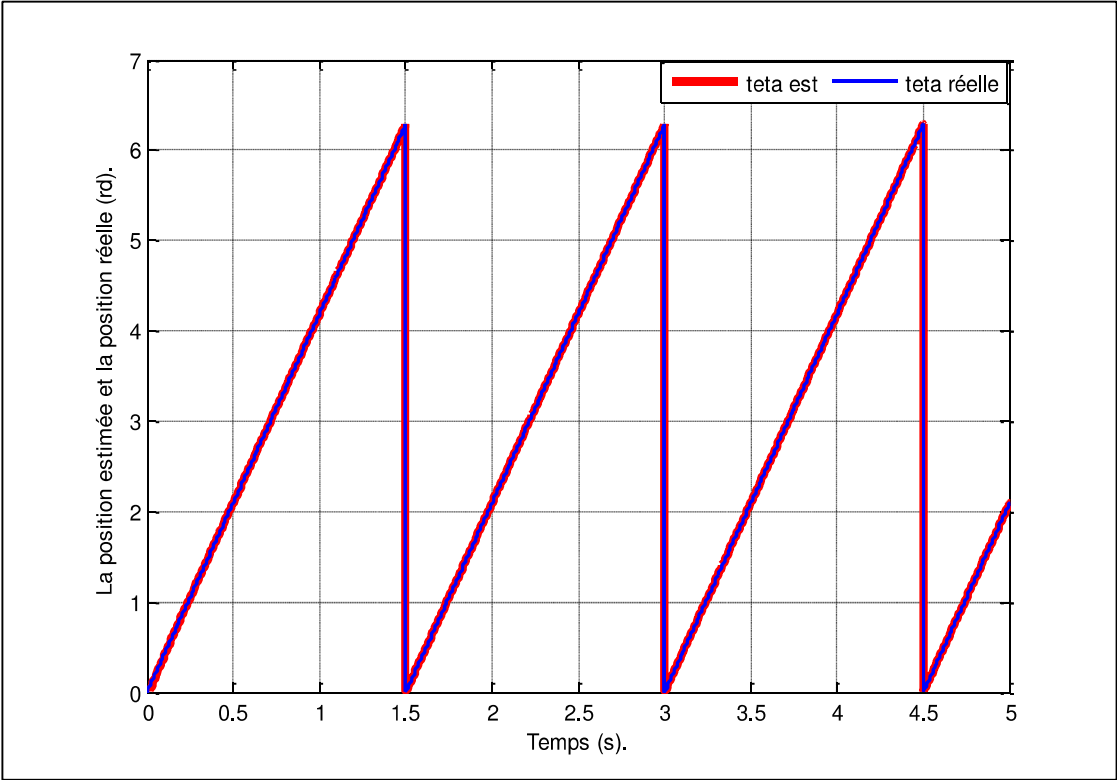


Figure. III. 5 : La position estimée et réelle du rotor pour T=1.5 s.

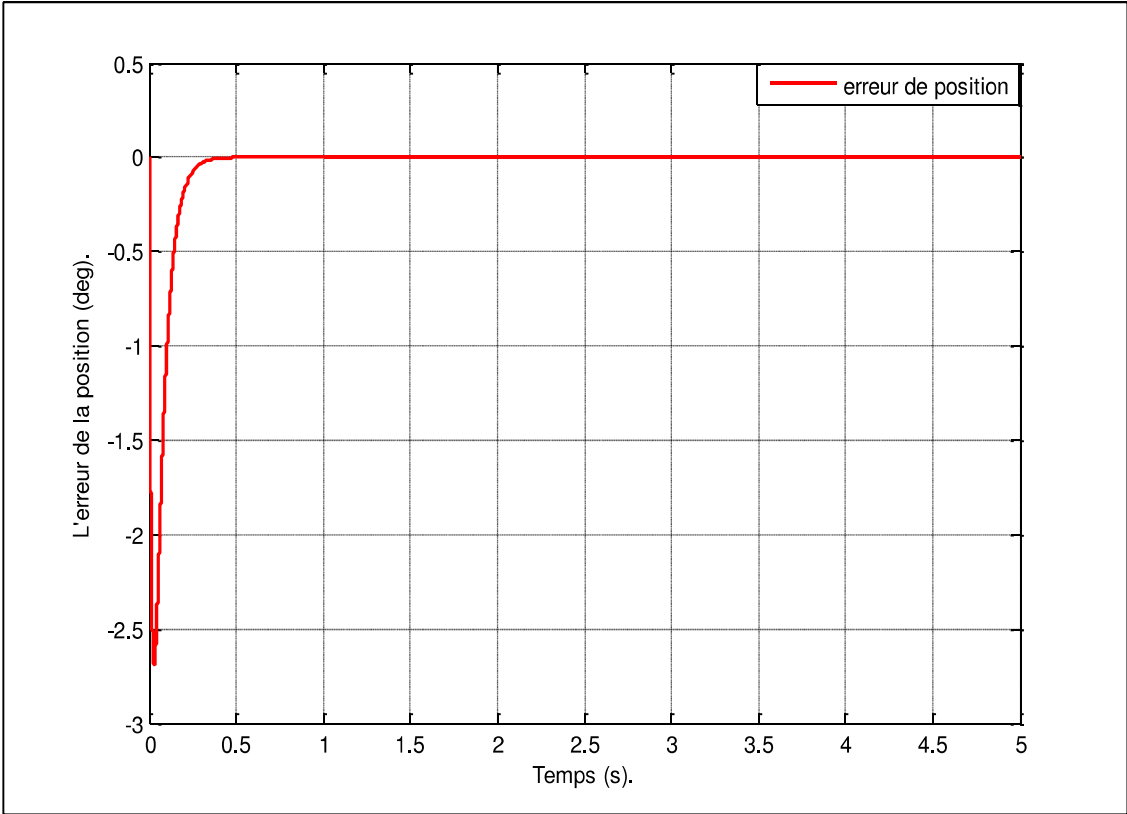


Figure. III. 6 : L'erreur de la position rotorique pour T=1.5s.

- Pour $T=0.3$ s :

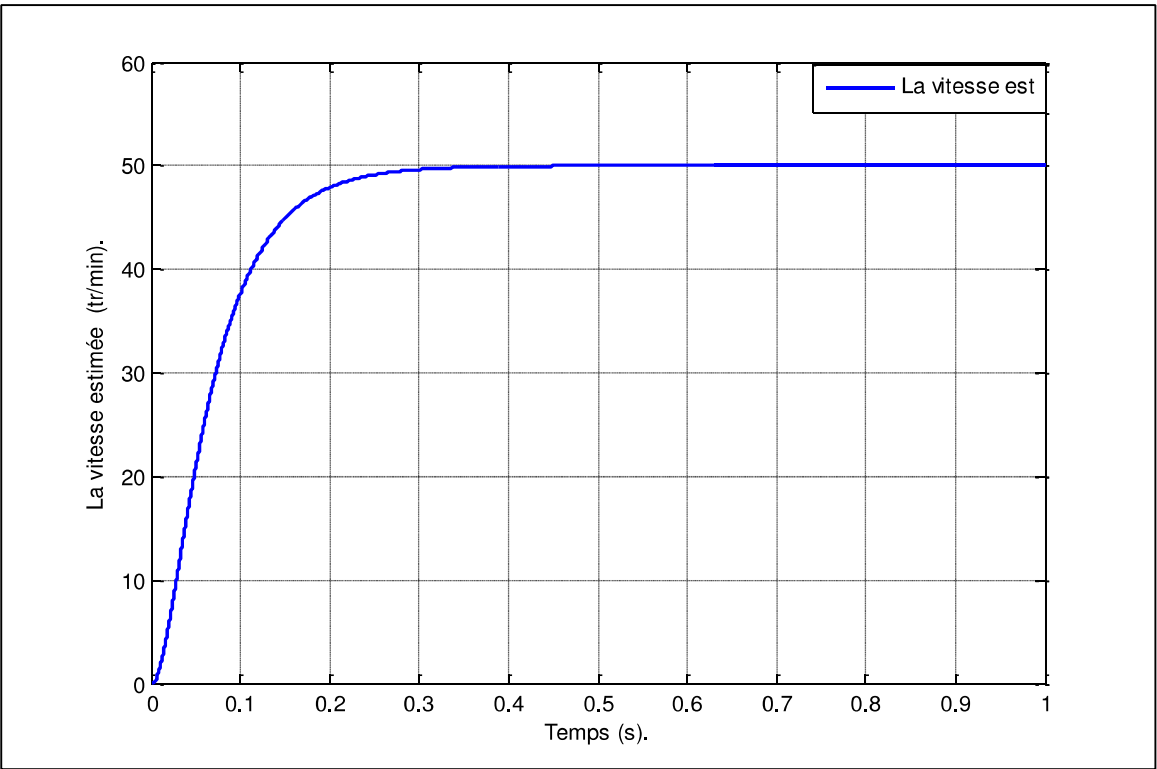


Figure. III. 7: La vitesse estimée pour $T=0.3$ s.

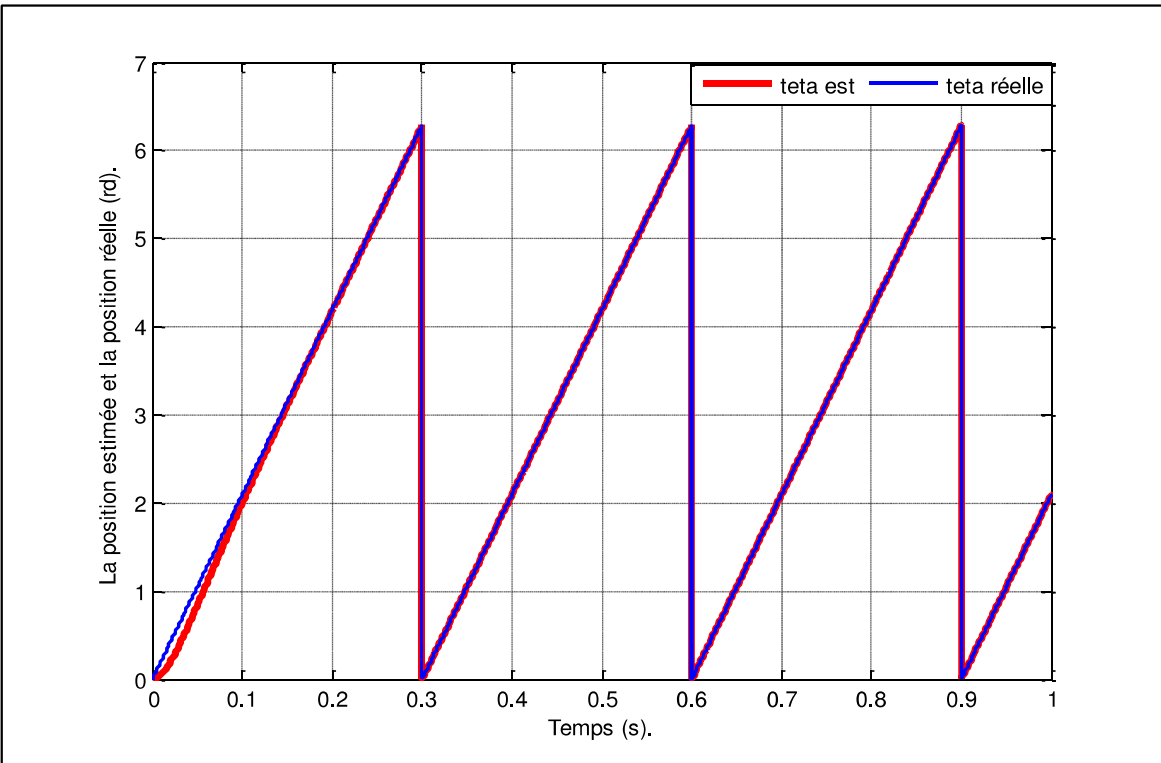


Figure. III. 8: La position estimée et réelle du rotor pour $T=0,3$ s.

Chapitre III: Estimation de la position et la vitesse rotorique en injectant un signal pulsatoire.

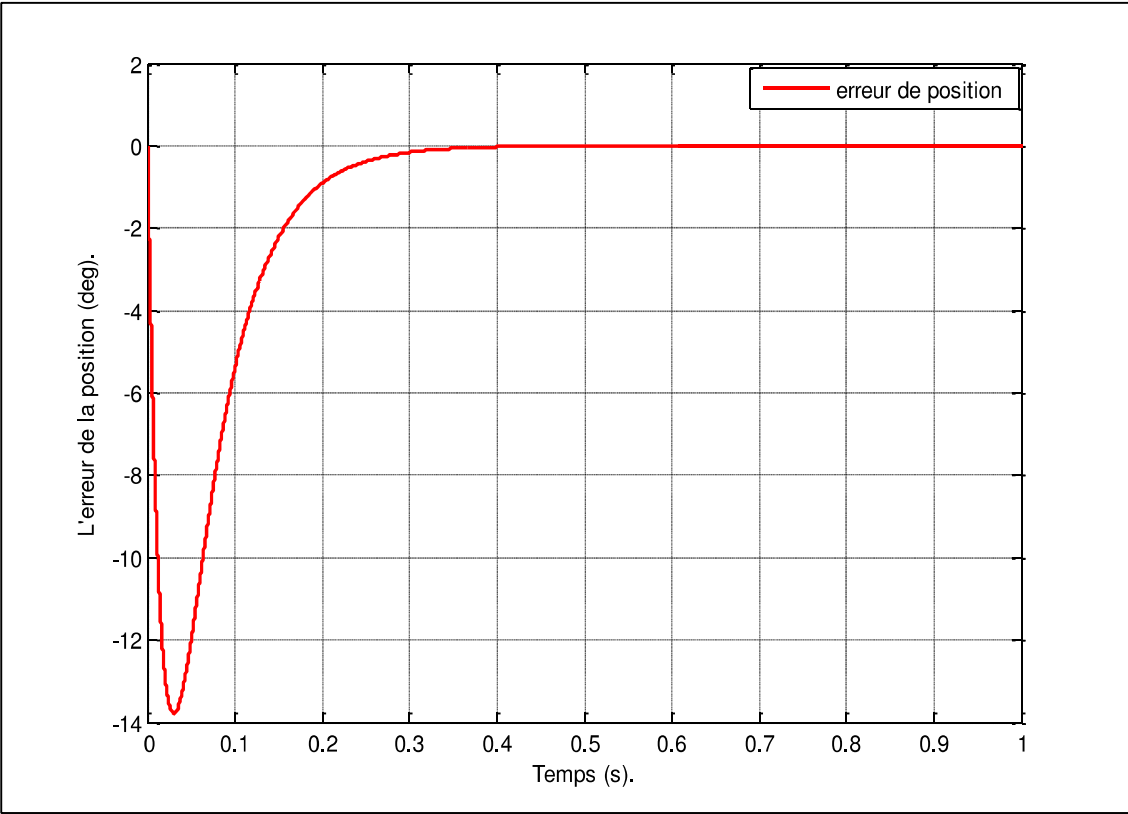


Figure. III. 9 : L'erreur de la position rotorique pour T=0,3 s.

- Pour T=0.15s.

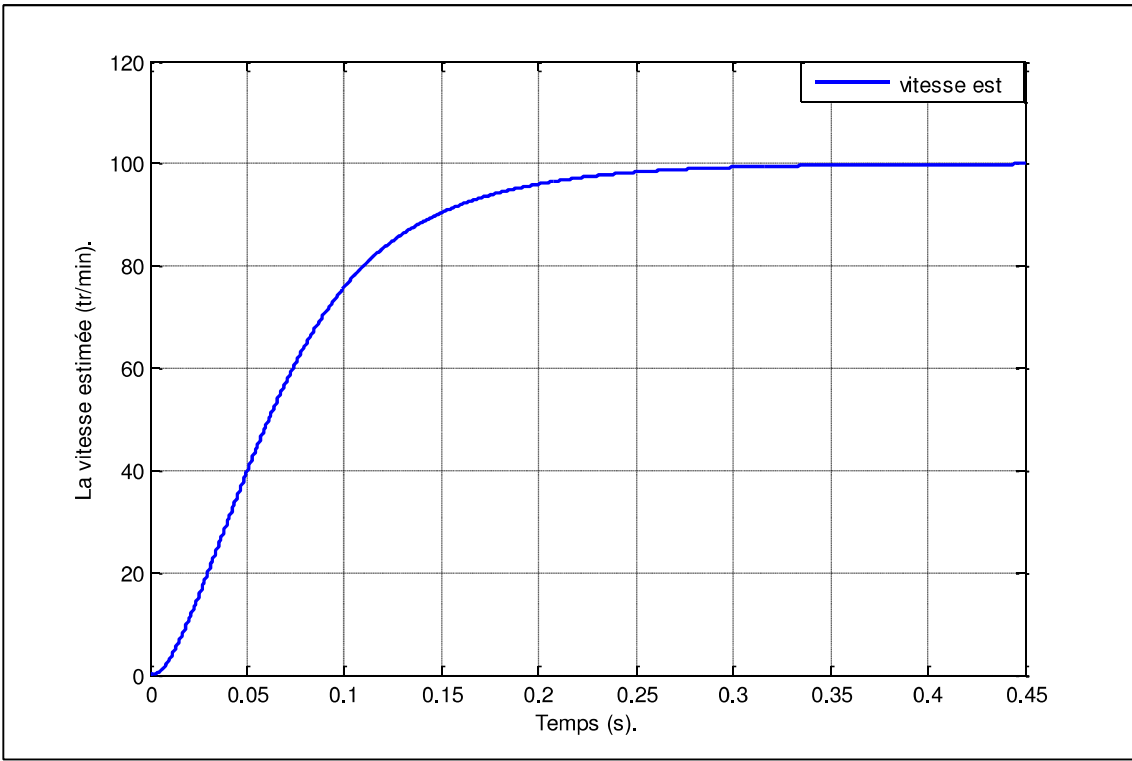


Figure. III. 10 : La vitesse estimée pour T=0.15 s.

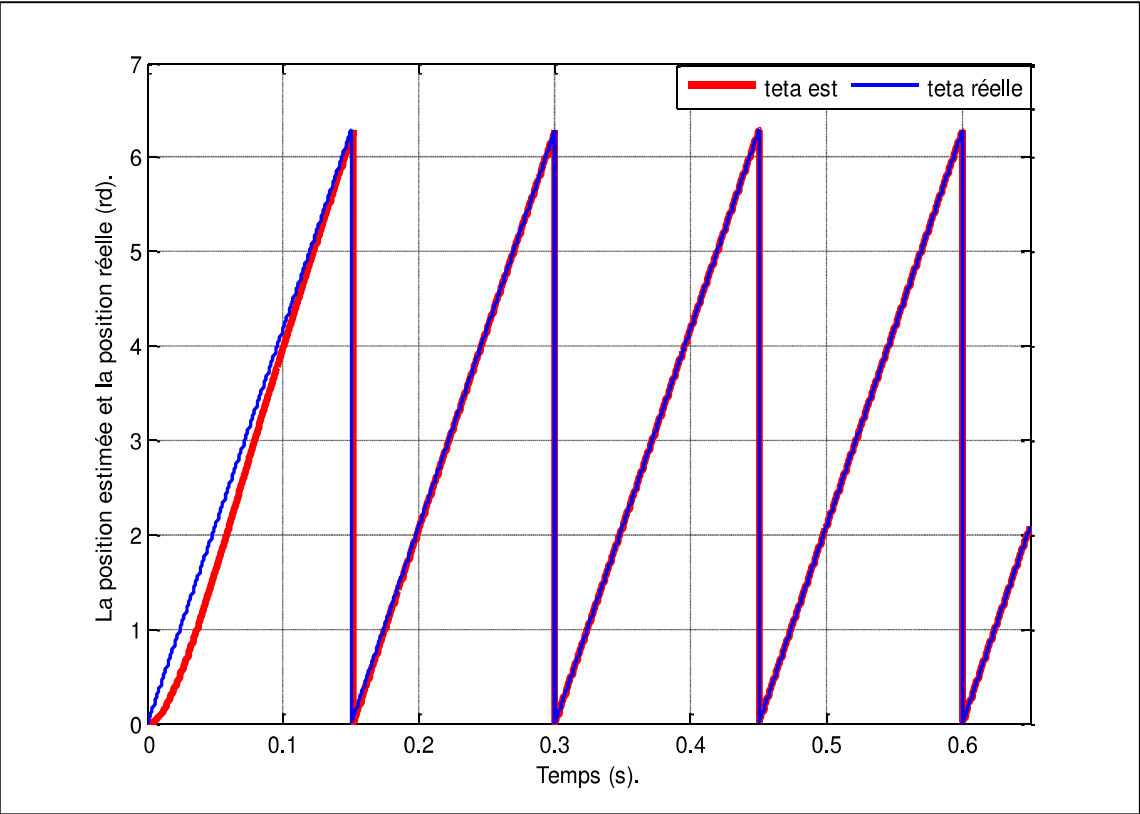


Figure. III. 11 : La position réelle et estimée du rotor pour T=0.15 s.

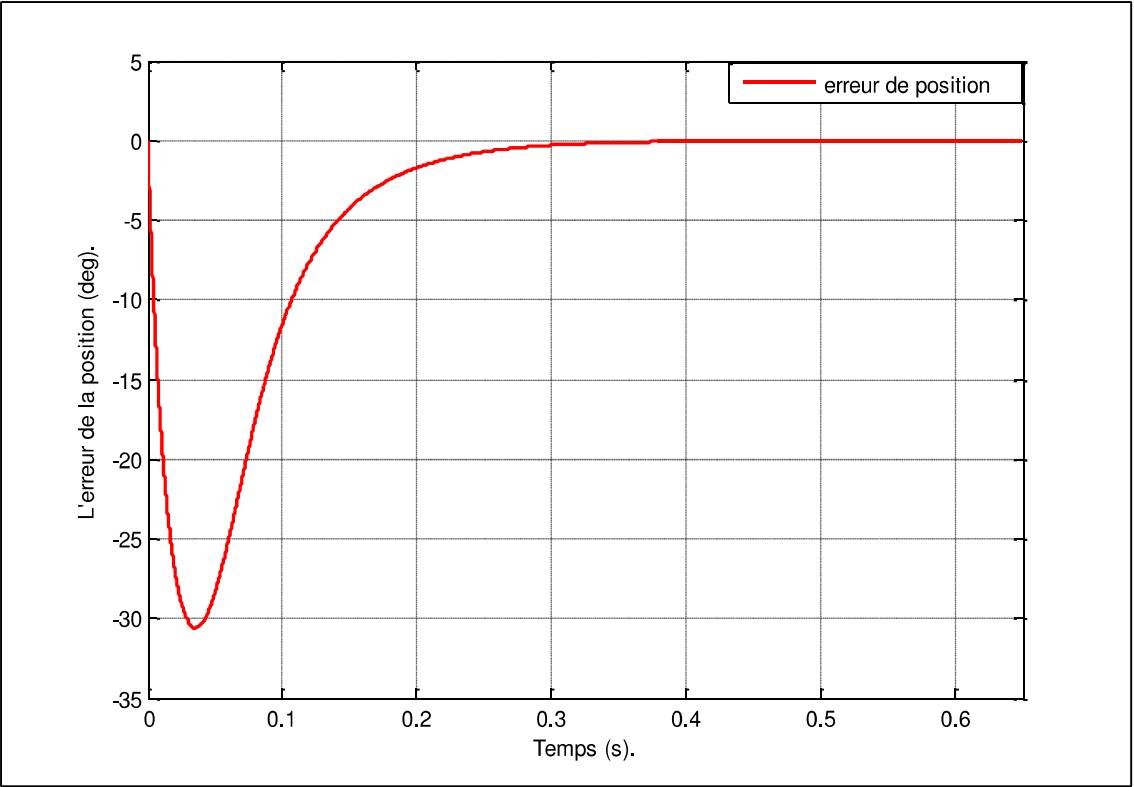


Figure. III. 12: L'erreur de la position rotorique pour T=0.15 s.

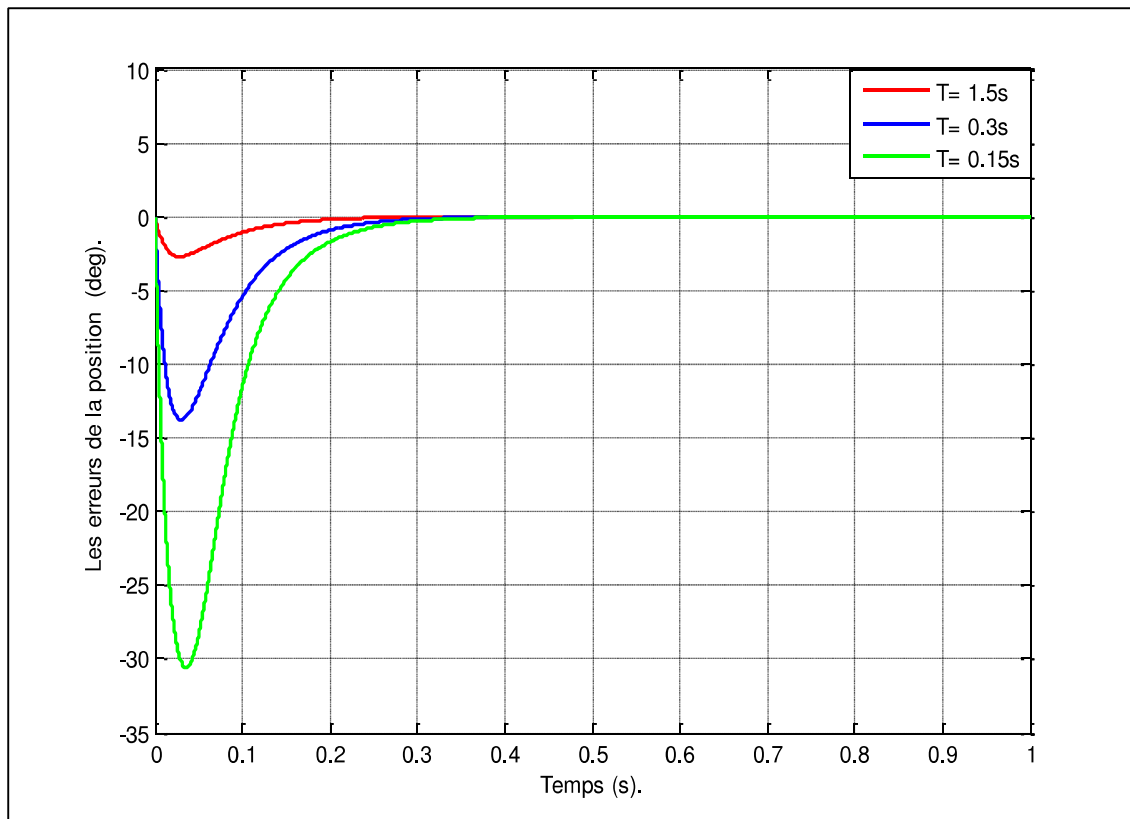


Figure. III. 13 : Les erreurs de la position pour les différentes valeurs de la période de référence (T=1.5s, T=0.3s, T=0.15s).

V. Interprétation des résultats

D'après les résultats de simulation, on remarque que les vitesses estimées varient en fonction des périodes, Donc on peut agir sur la fréquence ou la période pour faire augmenter la vitesse, et pour confirmer ces résultats on peut utiliser les relations suivantes :

Pour T= 1.5s.

$$\text{On a: } f = \frac{1}{T}$$

$$\text{A.N: } f = \frac{1}{1.5}$$

$$f = 0.66 \text{ Hz.}$$

Donc on peut aboutir à l'expression suivante :

$$N = \frac{60 \cdot f}{p} \text{ (tr/min)}$$

Avec $p=4$; le nombre paire de pôle.

$$\text{A.N: } N = \frac{60 \cdot 0.66}{4}$$

Donc :

$$N = 10 \text{ tr/min.}$$

On fait les mêmes calculs pour les deux autres périodes ($T=0.3$ s ; $T=0.15$ s).

L'erreur sur la position rotorique est inversement proportionnelle par rapport à la période imposée dans l'intervalle $[0s ; 0.3s]$, au de-là l'erreur reste la même, fixé à une valeur qui est égale à zéro.

VI. Conclusion

L'objectif principale de ce chapitre consiste à estimer la position rotorique en injectant un signal de haute fréquence et pour cela on a introduit au début de ce chapitre les différents types de signaux qu'on peut injecter (**rotatif, carré et pulsatoire**), nous sommes intéressés à ce dernier.

Pour extraire la position rotorique, un bloc de traitement de signal est conçu pour isoler la composante de courant contenant l'information sur l'erreur d'estimation ainsi qu'un estimateur basé sur la boucle à verrouillage de phase, qui nous a permis d'avoir des résultats de simulation proches des valeurs réelles, ce qui confirme la validité de notre estimateur.

La méthode d'injection est indépendante des paramètres du moteur mais elle produit plus de pertes.

Conclusion générale

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire porte essentiellement sur la commande vectorielle sans capteur mécanique de la machine synchrone à aimants permanents à pôles saillants. L'objectif fixé au début qui est l'injection de deux formes de signaux haute fréquence à savoir une forme classique qui est une tension rotationnelle directe et une tension pulsatoire est atteint.

Dans un premier temps nous avons simulé notre variateur en utilisant la commande vectorielle.

Ensuite nous avons cité les différentes méthodes d'estimation de la position et de la vitesse de la MSAP sans capteur mécanique par injection d'un signal de haute fréquence. Deux types de signaux haute fréquence à savoir un signal rotationnel et un signal pulsatoire sont injectés à la machine et sont étudiées sous l'environnement Matlab/Simulink.

Des formes différentes de courant de haute fréquence sont ainsi obtenues, l'injection d'une tension rotationnelle directe induit un courant de haute fréquence qui contient deux composantes : une composante directe qui tourne dans le même sens que la tension injectée (appelée composante positive) et une composante inverse qui tourne dans le sens inverse de la tension injectée (composante négative). L'information sur la position est donnée par la composante négative.

L'injection d'une tension pulsatoire induit un courant de haute fréquence qui contient une information sur la position rotorique en fonction de l'erreur d'estimation.

Pour cela, un bloc de traitement de signal et un bloc d'estimation de la position sont alors élaborés pour chaque signal injecté à savoir la fonction arctangente2 pour le premier signal et la boucle de verrouillage de phase pour le deuxième signal.

Les résultats de simulation obtenus montrent qu'en présence de la saillance, la position rotorique est facilement extraite à partir de la démodulation du courant statorique.

L'erreur d'estimation de la position augmente avec l'accroissement de la vitesse de consigne, ceci confirme que la méthode d'injection est valable à basses vitesses.

L'estimateur à boucle de verrouillage de phase donne des résultats satisfaisants, l'erreur d'estimation tend vers zéro.

Cette étude peut être complétée par l'incorporation de l'estimateur de la deuxième méthode dans le variateur de vitesse et faire ainsi une étude comparative des deux signaux injectés.

Bibliographie

- [1] A.kHLAIEF, « Contribution à la Commande Vectorielle sans Capteur Mécanique des Machines Synchrones à Aimants Permanents », Thèse Doctorat, Université d'Aix Marseille, jui 2012.
- [2] Ines OMRANE, « Développement de Capteurs Logiciels de Position pour la Commande de la Machine Synchrones à Aimants Permanents », Thèse Génie Electrique, Université de Poitiers, jan 2014.
- [3] SLIMANE Ould Younes, « commande d'une machine synchrone a aimants permanents par régulateurs de type RST » Mémoire Master, 2014.
- [4] KICHOU Nadia, « Régulation PID numérique d'une machine synchrone à aimants permanent associée à onduleur de tension contrôlé en courant », mémoire d'ingénieur ,1998.
- [5] L.Chédot, « Contribution à l'étude des machines synchrones à aimants permanents interne à large espace de fonctionnement. Application à l'alternateur-démarrateur », mémoire Magister , 2004.
- [6] ABDELLAOUI Hassina , « Etude Expérimentale de la position rotorique d'un moteur synchrone à aimants permanents par variables électriques »,Mémoire Magister.
- [7] A. AOUIFI , « Utilisation d'observateurs à Modes Glissants pour le Contrôle Directe de Couple et le Contrôle Vectorielle d'une Machine Asynchrone à Cage », mémoire Magister, Université de Biskra,2011.
- [8] AID Houssein et AINA Wafaa, « Synthèse de lois de commande non-linéaires pour un entraînement électrique à vitesse variable basé sur un moteur synchrone à aimants permanents », Mémoire de Master, 2013.
- [9] HAMMAMI Mouhamed Ilyes, « Commande sans Capteur de Vitesse d'un Moteur Synchrones à Aimants Permanents par l'utilisation de la Commande Directe du Couple et d'un Observateur de Vitesse à Mode Glissant », Mémoire de Magister en électrotechnique, Université Mouhamed Khider-Biskra, 2010.
- [10] Toufik REKIOUA, « Contribution à la Modélisation et à la Commande Vectorielle des Machines Synchrones à Aimants Permanents », Thèse Doctorat, Juillet 1991.

- [11] F. BENCHABANE , « Commande en Position et en Vitesse par Mode de Glissement d'un Moteur Synchron Triphasé à Aimants Permanents avec Minimisation du Chattering »,Mémoire de Magister , Université Mouhamed Khider de Biskra ,2005.
- [12] Ferhat BOUZIDI, Bouhali MED SAID, « Estimation de la Machine Synchron à Aimants Permanents par Injection d'un Signal de Haute Fréquence », Mémoire Master, Université Mouloud Mammeri Tizi_Ouzou, jui 2014.
- [13] L.BOURAS , M. KADJOU DJ, N.GOLEA ,«Contrôle Directe du Couple Basé sur la Modulation Vectorielle avec Régulation à Hystérésis Appliqué la Machine à Induction »,PCSE,pp319-324,O.E.Bouaghi,05 may 2005.
- [14] N. BENYAHIA, K. SRAIRI, S.M. MIMOUNE, « Commande de la Machine Synchron par Orientation du Flux Rotorique », pp.148, N°06, Juin 2005.
- [15] IMAD AL-ROUH, « Contribution à la Commande Sans Capteur de la Machine Asynchrone », Thèse de Doctorat en Electrotechnique, Université Henri Poincaré, Nancy-I,12 juin 2014.
- [16] A.CHIBAH, « Commande Sans Capteur de Machines Synchrones à Aimants Permanents et à pôles Saillants Par Injection de Tension de Haute Fréquence », Master en Electronique et Génie Electrique, Université de Nantes ,2010-2011.
- [17] Mr ZEGUEB Boubaker, « Commande d'une machine synchron à aimants permanents sans capteur de vitesse. Utilisation d'un observateur non linéaire », Mémoire de Magister, Université de Batna, 2008.
- [18] ALILECHE Fatima , AIT HOCINE Fatiha , MESSAOUDENE. Taous , « commande vectorielle d'une machine synchron a aimant permanent autopilotée »,. Mémoire (D.E.U.A), U .M.M.T.O ,2007.
- [19] A. kADDOURI, « Etude d'une Commande Non-linéaire Adaptative d'une Machine Synchron à Aimants Permanents », Faculté des sciences et de Génie, Université Laval Qubec,Nov.2000.

- [20] REZGUI Sallah Eddine, « Commande de la Machine électrique en Environnement » Mémoire de Magister en électrotechnique, Université Mentouri de Constantine, 2009.
- [21] Zedong ZHENG, « Commande à haute performance et sans capteur mécanique du moteur synchrone à aimants permanents », Thèse Doctorat, Laboratoire Plasma et Conversion d'Énergie Site ENSEEIHT en France Unité Mixte de Recherche du CNRS n°5213 et le département de Génie Electrique de l'Université de Tsinghua en Chine, 2008.
- [22] Marwa Mohamed Moustafa EZZAT, « COMMANDE NON LINEAIRE SANS CAPTEUR DE LA MACHINE SYNCHRONE A AIMANTS PERMANENTS » Thèse de Doctora, L'École Centrale de Nantes, le 17 Mai 2011.
- [23] R. S. Miranda, C. B. Jacobina, E. M. Fernandes, A. M. N. Lima, A. C. Oliveira, M. B. R. Correa. « Parameter and Speed Estimation for Implementing Low Speed Sensorless PMSM Drive System Based on an Algebraic Method, 22nd Annual IEEE Applied Power Electronics Conference », APEC 2007, pp. 1406-1410, Anaheim, CA, USA, 25 Feb.-1 March, 2007.
- [24] Jan Persson, Miroslav Markovic and Yves Perriard. « A New Standstill Position Detection Technique for Nonsalient Permanent-Magnet Synchronous Motors Using the Magnetic Anisotropy Method, IEEE Transactions on Magnetics », Vol. 43, No. 2, pp. 554-560, February, 2007.
- [25] Arias A, Saltiveri D, Caruana C, Pou J, Gago J, Gonzalez D. « Position estimation with voltage pulse test signals for Permanent Magnet Synchronous Machines using Matrix Converters, Compatibility in Power Electronics», CPE'07, pp 1-6, 29 May-1 June, 2007.

Annexes

Paramètres de la machine

Paramètre	Signification	Valeur
N	Vitesse nominale en [tr/min]	1500
r_s	Résistance statorique en [ohm]	0.25
npp	Nombre de paires de pôles	4
L_d	Inductance d'axe d en [H]	4.8e-3
L_q	Inductance d'axe q en [H]	4.1e-3
V_n	Tension efficace maximale en [Volt]	400
V_{bus}	Tension du bus continu en [Volt]	400
J_m	Inertie de la machine en [Kg. m²]	0,0067
flux	Flux rotorique en Wb	0,32
f_v	Coefficient de frottement en [Nm.s/rd]	0,001
C_{em_max}	Couple électromagnétique maximal [N.m]	71,1
I	Courant maximal en [A]	42
Pu	Puissance de la machine en [Kw]	4

Déroulement de la phase d'un signal :

Ils existent plusieurs techniques de traitement de signal qui utilisent les quatre cadrans de la fonction arc tangente2 pour calculer la phase d'un signal.

La valeur de la phase calculée par la fonction Arc tangente2 peut prendre des valeurs contenues dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$; Quand les valeurs de la phase excèdent les valeurs de cet intervalle ; 2π ou $n * 2\pi$ doit être ajouté (avec n est un entier).

Pour dérouler la phase d'un signal $x(n)$. On peut suivre les étapes suivantes :

- 1- Calcul la sinusoïde de x .
- 2- Calcul la consinusoïde de x .
- 3- Calcul les quatre quadrants arc tangente2 (atan2) de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$.

$$\text{atan2}(a, b) = \begin{cases} \tan^{-1} \left[\frac{a}{b} \right] & \text{si } a > 0, \text{ et } b > 0 \text{ 1}^{\text{er}} \\ \tan^{-1} \left[\frac{a}{b} \right] + \pi & \text{si } a > 0 \text{ et } b < 0 \\ \tan^{-1} \left[\frac{a}{b} \right] - \pi & \text{si } a < 0 \text{ et } b > 0 \\ \tan^{-1} \left[\frac{a}{b} \right] & \text{si } a < 0 \text{ et } b < 0 \end{cases}$$

Où a et b sont des nombres réels.

On peut exprimer le processus de déroulement de phase comme suit :

$$\mathbf{x}_\omega(\mathbf{n}) = \mathbf{W}(x(\mathbf{n}))$$

Avec :

$x(n)$: C'est le signal original de la phase.

$W(x(n))$: C'est l'opération de déroulement de phase.

$x_\omega(n)$: est la phase déroulée.