REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE et POPULAIRE.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.
UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI de TIZI-OUZOU

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master
en
Mathématiques
Option
Analyse Mathématiques et applications

Thème

Solutions Classiques et Stabilité de la Chimiotaxie Attractive-Répulsive en une dimension

---

Présenté par

Kaïssa OULD BRAHAM

Devant le jury

Mme.RAHMANI Leila	Professeur	UMMTO	Présidente
Mme.TALEB Lynda	MCB	UMMTO	Rapporteur
Mme.HAMDOUS Saliha	MCB	UMMTO	Examinatrice
M.MENGUELTI Ali	MAA	UMMTO	Examinateur

Soutenu le 04/07/2018

Résumé :
Dans ce travail, nous avons établi l'existence globale et la stabilité d'une solution classique du modèle de la chimiotaxie attractif-répulsif en dimension une. Dans un premier temps, nous avons étudié l'exsitence locale d'une solution classique positive et par des estimations à priori, nous avons établi son existence globale. Dans un second temps, nous avons étudié le comportement asymptotique de la solution classique en utilisant les systèmes dynamiques.
Mots clés :
Chimiotaxie ; réaction-diffusion ; attraction-répulsion ; solutions classiques ; existence globale ; comportement asymptotique ; systèmes dynamiques.

Table des matières

Introduction

La chimiotaxie est la migration des cellules, dans un mouvement directionnel, vers le gradient de concentration de certains produits chimiques dans leur environnement. C'est un procédé qui stimule les cellules, à travers un stimulus ou signal chimique, pour qu'elles se déplacent. La chimiotaxie peut être positive, si le stimulus chimique stimule les cellules à se déplacer vers le produit chimique utilisé, on parle de chimiotaxie attractive ; comme elle peut être négative si les cellules sont stimulées pour se déplacer dans la direction opposée du stimulus chimique, on parle alors de chimiotaxie répulsive. On retrouve la chimiotaxie dans plusieurs schémas comme dans l'aggrégation des cellules chimiotactiques et la formation de motifs, entre autre la formation de circuits nigrostriataux pendant le développement [13] et autres (voir exemple [14]), dans la réponse immunitaire de l'organisme où le système immunitaire permet aux leucocytes de se diriger vers la zone du corps où l'infection ou l'inflammation se développe, la formation des motifs bactériens, ou encore le mouvement des cellules endothéliales et la croissance tumorale en réponse à une substance chimique connue sous le nom de facteur d'angiogenèse tumorale qui joue un rôle important dans le processus d'invasion des cellules voisines.

Le premier modèle de la chimiotaxie a été proposé par Keller-Segel [2] dans les années 1970 pour décrire l'agrégation des moisissures cellulaires *Dictyostelium discoideum*. Sa structure élémentaire est un système différentiel parabolique défini comme suit

$$
\begin{aligned}
u_t &= D_u \triangle u - \nabla(\chi u \nabla v) \\
v_t &= D_v \triangle v + f(u, v)
\end{aligned}
$$

Où $u(x, t)$: densité des cellules.
$v(x, t)$: la concentration chimique.
D_u et D_v sont des coefficients de diffusion positifs.
$\chi > 0$ le coefficient chimiotactique mesurant la force d'influence du produit chimique sur les cellules.

Dans notre étude, nous considérons le modèle de chimiotaxie d'attraction-répulsion suivant

$$
\begin{aligned}
u_t &= D_u \triangle u - \nabla(\chi_v u \nabla v) + \nabla(\chi_w u \nabla w) \\
v_t &= D_v \triangle v + \alpha u - \beta v \\
w_t &= D_w \triangle w + \gamma u + \delta w
\end{aligned}
\tag{0.1}
$$

Où D_u, D_v, $D_w > 0$ sont des coefficients de diffusion, χ_v, $\chi_w > 0$ coefficients de chimiotactique, et $\alpha, \gamma > 0$, β, $\delta \geq 0$. Ce modèle a été proposé par [15] pour décrire l'aggrégation de microglia observé dans la maladie d'Alzheimer et dans [10] pour décrire l'effet de quorum dans le processus chimiotactique. Dans leur approche, les auteurs ont introduit un second signal chimique noté w, appelé signal chimiorépulsif pour répondre au signal chimioattractif v. Mais, aucun résultat rigoreux n'a été avancé pour le modéle de chimotaxie avec ces deux signaux opposés (chimioattractif et chimiorépulsif).

L'objectif de ce travail est d'établir l'existence globale et la stabilité d'une solution classique du système (0.1) sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$ avec des conditions de type "Neumann" aux bords.

Notre travail est organisé selon l'ordre suivant, nous commençons par donner une introduction où l'on donne un bref historique sur la problématique, viennent ensuite les préliminaires où nous rappelons les différents outils et résultats classiques utilisés afin de réaliser ce travail.

Le premier chapitre consacre l'étude de l'existence globale d'une solution classique du problème. Dans un premier temps, nous donnons la position du problème et son intérprétation ainsi qu'un résultat d'existence locale. Dans un second temps, nous établissons des estimations a priori nécessaires afin de montrer notre résultat d'existence globale. Dans le deuxième et dernier chapitre, nous étudions le comportement asymptotique de la solution classique et nous donnons quelques situations d'états stables. Nous terminons ce travail par une petite conclusion.

Préliminaires

Dans ce paragraphe, nous introduisons les différents résultats utilisés pour la démonstration de l'existence globale d'une solution classique positive et son comportement asymptotique.

0.1 Notations

On se donne Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, de frontière régulière $\partial\Omega$.
On note C une constante générique qui peut changer d'une ligne à l'autre.
$L^p = L^p(\Omega)(1 \leq p \leq \infty)$ désigne l'espace de Lebesque dans un intervalle ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ avec la norme $\|f\|_{L^p} = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{1/p}$ pour $1 \leq p \leq \infty$ et $\|f\|_{L^\infty} = sup_{x\in\Omega}|f(x)|$.
Quand $p = 2$, on écrit $\|f\|_{L^2} = \|f\|$ pour la commodité de notation.
H^l désigne l'espace de Sobolev $W^{l,2}$ du l-ème ordre avec la norme $\|f\|_{H^l} = \|f\|_l = (\sum_{i=0}^{l} \left\|\partial_x^i f\right\|^2)^{1/2}$.
Pour la simplicité, $\|f(., t)\|_{L^p}$ et $\|f(., t)\|_l$ seront notés par $\|f(t)\|_{L^p}$ et $\|f(t)\|_l$ respectivement.
De plus, on note $\|(f, g)\|_{L^p} = \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$ pour $1 \leq p \leq \infty$ et $\|(f, g)\|_{H^l} = \|f\|_{H^l} + \|g\|_{H^l}$ pour $l = 1, 2, 3, ...$

Définition 0.1.1. (Equilibre) Soit le système d'équations différentielles $\dot{y} = f(y)$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$. On dit que y_0 est un équilibre si la fonction constante $t \mapsto y_0$ est solution pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui équivaut à dire que $f(y_0) = 0$.

Définition 0.1.2. (Linéarisé) Soit l'équation différentielle $\dot{y} = f(y)$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ et $y_0 \in \mathbb{R}^d$. Le système linéarisé en y_0 est le système d'équations différentielles suivante :

$$\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial y}(y_0)(y - y_0) + f(y_0)$$

C'est le système obtenu en remplaçant $f(y)$ par son développement de Taylor à l'ordre 1 en y_0.

0.2 Espaces fonctionnels

0.2.1 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, soit $T > 0$ et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$: on pose $Q_T = \Omega \times [0, T[$.

Définition 0.2.1. On désigne par $H^{1,2}(Q_T)$, l'espace de fonctions f définies sur Q_T telles que : $f,\ f_{x_i},\ f_{x_i,x_i},\ f_t \in L^2(Q_T) \quad i = 1,\ N$

0.2.2 Espaces $W^{1,p}(Q_T)$

Définition 0.2.2. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :
$u \in L^p(\Omega), \exists f_1,\ .....,\ f_N \in L^p(\Omega)$ tels que $\int_\Omega u.\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega f_i \varphi$, $\forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, $\forall i = 1,\ .....,\ N$
En d'autres termes,

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega),\ \forall i = 1,\ .....,\ N,\ \frac{\partial u}{\partial x_i}\} \in L^p(\Omega)\}$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

ou parfois de la norme :

$$\left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} si 1 \leq p < \infty$$

0.3 Quelques inégalités et résultats classiques

On rappelle le problème général introduit par [6] suivant

$$\begin{aligned} \partial_t u + A(u)u &= f(., u, \partial u), \quad dans \quad \Omega \times [0, +\infty), \\ B(u)u &= g(., u), \qquad sur \quad \partial\Omega \times [0, +\infty), \\ u(., 0) &= u^0 \qquad\quad sur \;\; \Omega \end{aligned} \tag{0.2}$$

Où $\quad A(u)u := -\partial_j(a_{jk}(., u)\partial_j u + a_j(., u)u) + b_j(., u)\partial_j u + a_0(., u)$
$1 < j, k < n$

et $\quad B(u)u := \delta\{\nu^j \gamma_\partial(a_{jk}(., u)\partial_k u + a_j(., u)) + c(., u)\gamma_\partial u\} + (1 - \delta)\gamma_\partial u$

δ : la mesure de Dirac , ν : la normale unitaire

Avec $\quad a_{jk},\, a_j,\, b_j,\, a_0 \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega} \times D_0, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^N))$, $c \in \mathcal{C}^2(\partial\Omega \times D_0, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^N))$

$f \in \mathcal{C}^{1,2}((\overline{\Omega} \times D) \times \mathbb{R}^{N\times n}, \mathbb{R}^N)$, $\;g \in \mathcal{C}^1(\partial\Omega \times D, (\mathbb{R}^N))$

Théorème 0.3.1. *On suppose que $g = 0$. Alors u est une solution classique du système (0.2), tel que,*
$u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times [0, T]; \mathbb{R}^3) \cap \mathcal{C}^{2,1}(\overline{\Omega} \times]0, T[; \mathbb{R}^3)$

Théorème 0.3.2. *Supposons que f est indépendent du gradient. Aussi on suppose que $u_{|[0,T]}$ est borné tout le long de $\partial\Omega$ pour chaque $T > 0$. Si il existe $\varepsilon > 0$ tel que*
$\|u(t)\|_{\mathcal{C}^\varepsilon} \leq c(T)$, $0 \leq t \leq T < \infty$, $t < t^+$,
Alors $t^+ = +\infty$.

Théorème 0.3.3. *Soit $r \in \{1, ..., N\}$ fixe et définissons $\widehat{\eta_r} :=$*
$(\eta_1, ..., \eta_{r-1}, \eta_{r+1}, ..., \eta_N)$
$(\widehat{\eta_r}, \eta_r) := \eta = (\eta_1, ..., \eta_N)$.
Supposons que
$\eta \in D \Rightarrow (\widehat{\eta_r}, t\eta_r) \in D_0, \quad 0 \leq t \leq 1$
et que $a^{r,s}_{j,k}$, $a^{r,s}_j$, $b^{r,s}_j$, $a^{r,s}_0$, $c^{r,s}_r$ s'annulent
$D_r := \{(\widehat{\eta_r}, 0) \in D_0; \exists r > 0 : (\widehat{\eta_r}, r) \in D\}$
pour $1 \leq j, k \leq n$ et $1 \leq s \leq N$ avec $s \neq r$.
et on suppose que
$f_r \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times D_0, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}^1(\partial\Omega \times D_0, \mathbb{R})$ *avec* $(1-\delta)g = 0$ *et que*
$f_r(., (\widehat{\eta_r}, 0)) > 0$, $g_r(., (\widehat{\eta_r}, 0)) \geq 0$, $(\widehat{\eta_r}, 0) \in D_r$.
et soit $u^0_r \geq 0$. Alors $u_r(t) \geq 0$ pour $t \in J$.

Théorème 0.3.4. *(Grobman-Hartman 1967) Soit $\dot{y} = f(y)$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ un système d'équations différentielles sur $\mathbb{R}^d$. Supposons que $f(0) = 0$ et que la matrice $A = \frac{\partial f}{\partial y}(y_0)$ n'a pas de valeur propre de partie réelle nulle. Alors il existe des voisinages U et V de l'origine 0 dans $\mathbb{R}^d$, et un homéomorphisme (bijection bi-continue) $h : U \to V$ qui envoie les trajectoires de $\dot{y} = f(y)$ sur les trajectoires de $\dot{y} = Ay$ en préservant le sens du temps.*
Plus précisément, si $y_0 \in \mathbb{R}^d$ est une valeur initiale et si $y(t; y_0) \in U$, alors $e^{At}h(y_0) \in V$ et on a :

$$y(t; y_0) = (h^{-1} \circ e^{At} \circ h)(y_0)$$

Ainsi, au voisinage d'un point d'équilibre $y_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $f(y_0) = 0$, les solutions du système $\dot{y} = f(y)$ se comportent comme celles de

$$\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial y}(y_0)(y - y_0)$$

Lemme 0.3.1. *Pour tout $q \geq 0$, il existe une constante positive C_q, dépendant de N, q, Ω tels que pour tout $f \in W^{1,2}(\Omega)$.*

$$\|f\|_{L^q} \leq C_q(\|\nabla f\|_{L^2}^a \|f\|_{L^1}^{1-a} + \|f\|_{L^1}). \tag{0.3}$$

Où $a = (1 - (1/q))/((1/n) + \frac{1}{2}$ et $0 \leq a < 1$.
Laissant $N = 1, q = 4$ et $\alpha = 1/2$ dans l'équation (0.3) et utilisant l'inégalité
$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on obtient l'inégalité suivante

$$\|f\|_{L^4}^2 \leq C(\|f\|_{L^2} \|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^1}^2). \tag{0.4}$$

a/ Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient$f$, $g \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$. Alors $\displaystyle\int_\Omega |fg| \leq \left(\int_\Omega |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |g|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (0.5)

b/ Inégalité de Hölder

Soit $1 < p, q < \infty$ tel que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. ALors

$$\int |fg| \leq \left(\int |f|^p\right)^{1/p} \left(\int |g|^q\right)^{1/q} \tag{0.6}$$

c/ Inégalité de Young généralisée

Soit $1 < p, q < \infty$ tel que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; et soit $\varepsilon > 0$:

$$ab \leq \varepsilon a^p + c(\varepsilon)b^q \tag{0.7}$$

d/ Inégalité de Gronwall

Soit $\eta(.)$ une fonction positive différentiable sur $[0, \infty)$ satisfaisant l'inégalité

$\eta\prime(t) + l\eta(t) \leq \omega(t)$, où l est une constante et $\omega(t)$ est une fonction positive continue sur $[0, \infty)$. ALors,

$$\eta(t) \leq \left(\eta(0) + \int_0^t e^{l\tau}\omega(\tau)d\tau\right) e^{-lt}. \qquad (0.8)$$

Alternativement, si pour $t \geq 0$, $\phi(t) \geq 0$ et $\psi(t) \geq 0$ sont des fonctions continues tels que l'inégalité $\phi(t) \leq Cexp(rt) + L\int_0^t \psi(s)\phi(s)ds$, $t \geq 0$, avec C et L des constantes positives, alors

$$\phi(t) \leq Cexp(rt)exp\left(L\int_0^t \psi(s)ds\right). \qquad (0.9)$$

e/ Inégalité de Cauchy généralisé

$$\forall a,\, b \in \mathbb{R}^+,\, \forall\epsilon > 0 : ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon} \qquad (0.10)$$

Chapitre 1

Existence globale d'une solution positive

Dans ce chapitre, nous introduisons la position du problème, son interprétation, ainsi que le résultat d'existence et les estimations a priori.

1.1 Position du problème

Soit $]a, b[$ un ouvert borné de $\mathbb{R}$. Considérons dans $]a, b[\times[0, T[$ le système d'équations de réaction-diffusion quasi-linéaires suivant

$$u_t = u_{xx} - (uv_x)_x + (uw_x)_x \tag{1.1}$$

$$v_t = D_v v_{xx} + u - \beta v \tag{1.2}$$

$$w_t = D_w w_{xx} + \gamma u - \delta w \tag{1.3}$$

où β,γ et δ sont des constantes strictement positives, D_v et D_w sont des coefficients de diffusion que l'on suppose positifs.
Ce système d'équations est assujetti aux conditions initiales :

$$u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), w(x, 0) = w_0(x) \tag{1.4}$$

et aux conditions aux limites, de type Neumann :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial \nu} = \frac{\partial w(x,t)}{\partial \nu} = 0 \tag{1.5}$$

où ν est la normale unitaire extérieure à $\{a,\, b\}$.

1.2 Interprétation

Le système (1.1)-(1.5) est un modèle pour la propagation d'un cancer dans une population qui est soumise à deux processus :
-Réaction : la contamination ou la résistance.
-Diffusion : la propagation de la maladie afin de contaminer d'autres parties.

On considère que l'infection se propage dans l'intervalle borné $]a,\, b[$ et qu'il n'y a pas de migration à travers $\{a,\, b\}$ (ce qui est traduit par (1.5)). $u(x,\, t)$ représente la densité des cellules, $v(x,\, t)$ est la concentration du signal chimique attractif et $w(x,\, t)$ est la concentration du signal répulsif. Le terme $-(uv_x)_x$ reflète le mouvement attractif des cellules, tandis que le terme $+(uw_x)_x$ représente le mouvement de répulsion. Dans la deuxième équation (1.2) du système, le signal attractif est produit par les cellules elles-mêmes et se dégradent à un rythme constant.

1.3 Existence locale

Dans cette partie, on s'intéresse à l'étude de l'existence locale d'une solution classique du système parabolique (1.1)-(1.5).

Théorème 1.3.1. *Soit $]a,\, b[$ un ouvert borné de $\mathbb{R}$. Alors,*

(i) pour toutes données initiales $(u_0, v_0, w_0) \in (H^1(]a,\, b[))^3$, il existe un temps constant maximal $T_0 \in (0,\, +\infty)$ dépendant des données initiales (u_0, v_0, w_0) tel que le système (1.1)-(1.5) admet une solution maximale (u, v, w) définie sur $]a,\, b[\times(0,\, T_0)$

satisfaisant :
$(u,\, v,\, w) \in [\mathcal{C}^0([a,\, b] \times [0,\, T_0[;\, \mathbb{R}^3)]^3 \cap [\mathcal{C}^{2,1}([a,\, b] \times]0,\, T_0];\, \mathbb{R}^3)]^3$

(ii) si $sup_{0<t<T_0 \cap T} \|(u,\, v,\, w)(.,\, t)\|_{L^\infty} < \infty$ *pour chaque* $T > 0$*, alors* $T_0 = \infty$*,* $(u,\, v,\, w)$ *est une solution classique globale du système (1.1)-(1.5).*

Pour la démonstration de ce théorème, on aura besoin des deux résultats de [6] cités précédemment.

Démonstration. On définit $\eta = (u,\, v,\, w) \in \mathbb{R}^3$. Le système (1.1)-(1.5) peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} \eta_t - \nabla.(a(\eta)\nabla(\eta)) = F(\eta), &\quad \text{dans }]a,\, b[\times[0,\, +\infty), \\ \frac{\partial \eta}{\partial \nu} = 0, &\quad \text{sur } \{a,\, b\} \times [0,\, +\infty), \\ \eta(.,\, 0) = (u_0,\, v_0,\, w_0), &\quad \text{dans }]a,\, b[, \end{aligned}$$

Où

$$a(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & -u & u \\ 0 & D_v & 0 \\ 0 & 0 & D_w \end{pmatrix},\ F(\eta) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u - \beta v \\ \gamma u - \delta w \end{pmatrix}$$

(i) D'après le théorème (0.3.1) de [6], on a :

$g = \frac{\partial \eta}{\partial \nu} = 0$, sur $\{a,\, b\} \times [0,\, +\infty[$

Donc η est une solution classique du système.

et donc $\eta \in (\mathcal{C}([a,\, b] \times [0,\, T_0[;\, \mathbb{R}^3))^3 \cap (\mathcal{C}^{2,1}([a,\, b] \times]0,\, T_0[;\, \mathbb{R}^3))^3$

D'où : $\eta \in (\mathcal{C}^0([a,\, b] \times [0,\, T_0[;\, \mathbb{R}^3))^3 \cap (\mathcal{C}^{2,1}([a,\, b] \times]0,\, T_0[;\, \mathbb{R}^3))^3$

(ii) Par l'utilisation du théorème (0.3.2) de [6], , on obtient :

On a $\quad \digamma(\eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ u - \beta v \\ \gamma u - \delta w \end{pmatrix}$

Donc $\digamma$ ne dépend pas du gradient.

et on a $\quad \eta_t - \nabla.(a(\eta)\nabla(\eta)) = \digamma(\eta)$

On intègre sur $]a,\, b[$ et on utilise la formule de Green, on obtient :

$$\int_a^b u_t dx = \int_a^b u_{xx} dx + \int_a^b (uv_x)_x dx + \int_a^b (uw_x)_x dx$$

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u dx = 0$$

Ce qui se traduit par :

$$\int_a^b u dx = \int_a^b u_0(x) dx.$$

ce qui implique

$$mes(]a,\, b[) sup_{[0,T]} |u(t,x)| \leq \|u_0\|_{L^1(]a,\, b[)}$$

D'où

$$\|u(t,x)\|_{L^\infty} \leq C\, \|u_0\|_{L^1(]a,\, b[)}$$

On somme les équations (1.2) et (1.3) puis on intègre sur $]a,\, b[$, on aura :

$$\int_a^b (v+w)_t dx = (1+\gamma)\int_a^b u dx - \beta \int_a^b v dx - \delta \int_a^b w dx$$

$$\frac{d}{dt}\int_a^b (v+w)dx + \beta\int_a^b vdx + \delta\int_a^b wdx = (1+\gamma)\int_a^b udx$$

Par la formule de Gronwall, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\int_a^b (v+w)dx + \alpha\int_a^b (v+w)dx = (1+\gamma)\left\|u\right\|_{L^1(]a,\,b[)}$$

$$\int_a^b (v+w)(t)dx \le \left(\int_a^b (v_0+w_0)(x)dx + \int_0^t e^{\alpha\tau}\left\|u\right\|_{L^1} d\tau\right) e^{-\alpha t},\ \forall 0 \le$$

$$\le \int_a^b (v_0+w_0)(x)dx\frac{C}{\alpha}e^{\alpha T},\ \forall t$$

D'où

$$sup_{[0,\,T]}\int_a^b (v+w)(t)dq \le C$$

Donc

$$\left\|\int_a^b (v+w)dx\right\|_{L^\infty} \le C.$$

D'où, η est borné sur $]a,\, b[$.

Comme η est nulle sur $\{a,\, b\}$.

Donc, $\eta_{|[0,\,T]}$ est borné sur $\{a,\, b\}$.

Ainsi les conditions du théorème (0.3.2) sont vérifiées.

Par conséquent, η est une solution classique globale du système (1.1)-(1.5).

1.4 Positivité.

Dans cette section, on étudie la positivité de la solution $(u,\, v,\, w)$.

Proposition 1.4.1. *Supposons* $u_0(x) > 0$, $v_0(x) > 0$, $w_0(x) > 0$ *et*
,
soit $(u(x,\, t),\, v(x,\, t),\, w(x,\, t))$ *une solution classique du système (1.1)-(1.5) sur*
$]a,\, b[\times[0,\, T[$, *alors*
$u(x,\, t),\, v(x,\, t),\, w(x,\, t) > 0$ *sur* $]a,\, b[\times[0,\, T[$

Pour démontrer cette proposition, on vérifie les conditions du théorème (0.3.3) de [6].

Démonstration. 1. Soit $r \in \{1,\, 2,\, 3\}$ avec $D = D_0 = \mathbb{R}^3$
et soit $\widehat{\eta} = (\eta_1,\, ...,\, \eta_{r-1},\, \eta_{r+1},\, ...,\, \eta_N)$
On a $\eta \in \mathbb{R}^3$, et $\widehat{\eta_1} = (\eta_2,\, \eta_3)$, $\widehat{\eta_2} = (\eta_1,\, \eta_3)$, $\widehat{\eta_3} = (\eta_1,\, \eta_2)$

Ce qui implique $(\widehat{\eta},\, t\eta_r) \in \mathbb{R}^3$.

2. On pose $D_r = \{(\widehat{\eta_r},\, 0) \in D_0;\, \exists \tau > 0 : (\widehat{\eta_r},\, \tau) \in D\}$

Pour $r \in \{1,\, 2,\, 3\}$, on a $(\widehat{\eta_r},\, \tau) \in D = \mathbb{R}^3$.
En effet :
$r = 1 : (\widehat{\eta_1},\, 0) = (\eta_2,\, \eta_3,\, 0) \in D_0 = \mathbb{R}^3$
$r = 2 : (\widehat{\eta_2},\, 0) = (\eta_1,\, \eta_3,\, 0) \in D_0$
$r = 3 : (\widehat{\eta_3},\, 0) = (\eta_1,\, \eta_2,\, 0) \in D_0$.
Comme $D_0 = D = \mathbb{R}3$
Donc $\exists \tau > 0;\; (\widehat{\eta_r},\, \tau) \in D$.

3. On vérifie que $F \geq 0$ et $g \geq 0$ pour tout $u,\, v,\, w \geq 0$.

On suppose que $u,\, v,\, w \geq 0$.
$f_r \in \mathcal{C}^1([a,\, b] \times \mathbb{R}^3,\, \mathbb{R})$, $g_r \in \mathcal{C}^1(\{a,\, b\} \times \mathbb{R}^3,\, \mathbb{R})$.
On a $g_r(.,(\widehat{\eta_r},\, 0)) = 0$, $(\widehat{\eta_r},\, 0) \in D = \mathbb{R}^3$ et
$f_1(.,\, (\widehat{\eta_1},\, 0)) = 0$
$f_2(.,\, (\widehat{\eta_2},\, 0)) = u \geq 0$
$f_3(.,\, (\widehat{\eta_3},\, 0)) = \gamma u \geq 0$.

Donc les conditions du théorème sont satisfaites pour $r \in \{1,\, 2,\, 3\}$.

On conclue que $(u,\, v,\, w) \geq 0$.

1.5 Estimation a priori.

Le but de ce paragraphe est d'établir des etimations a priori afin de prouver l'existence globale de notre solution. Remarquons d'abord que la première équation (1.1) est une équation de conservation. Si on note

$$\int_a^b u_0(x)dx =: m \tag{1.6}$$

On intègre la première équation (1.1) du système, en utilisant les conditions au bord (1.5) et la formule de Green, on a :

(i).

$$\int_0^T \int_a^b u_t(t,x)dxdt = \int_0^T \frac{d}{dt}\left[\int_a^b u(t,x)dx\right] dt$$

$$= \int_a^b \left[\int_0^T \frac{d}{dt} u(t,x) dt \right] dx$$

$$= \int_a^b u(t,x) dx - \int_a^b u_0(t,x) dx$$

Ce qui donne :

$$\int_0^T \int_a^b u_t(t,x) dx dt = \int_a^b u(t,x) dx - m$$

(ii).

$$\int_0^T \int_a^b u_{xx} dx dt = \int_0^T \int_a^b u_x 1_x dx dt + \int_0^T \int_{\{a,\, b\}} \frac{\partial u}{\partial \nu} dx dt$$

Donc

$$\int_0^T \int_a^b u_{xx} dx dt = 0$$

(iii).

$$\int_0^T \int_a^b (uv_x)_x dx dt = \int_0^T \int_a^b u_x v_x dx dt + \int_0^T \int_a^b uv_{xx} dx dt$$

D'après la formule de Green, on obtient :

$$\int_0^T \int_a^b uv_{xx} dx dt = -\int_0^T \int_a^b u_x v_x dx dt + \int_0^T \int_{\{a,\, b\}} \frac{\partial v}{\partial \nu} u dx dt$$

Donc

$$\int_0^T \int_a^b (uv_x)_x dx dt = -\int_0^T \int_a^b u_x v_x dx dt + \int_0^T \int_a^b u_x v_x dx dt \; = 0$$

De manière analogue, on trouve :

(iv).

$$\int_0^T \int_a^b (uw_x)_x dxdt = 0$$

On obtient donc

$$\int_0^T \int_a^b u_t(t,x)dxdt = \int_a^b u(t,x)dx - m = 0$$

Ce qui implique

$$\int_a^b u(t,x)dx = m$$

D'où

$$\|u\|_{L^1} = \int_a^b u(t,x)dx = m \tag{1.7}$$

Lemme 1.5.1. *Soit* $(v_0,\, w_0) \in (L^2(]a,\, b[))^2$.
Soit,$(u,\, v,\, w)$ *solution du système (1.1)-(1.5).*
Alors, pour tout $T > 0$, *il existe une constante* C *tel que :*
pour tout $0 < t < T$, *on a l'inégalité suivante*

$$\|(v,\, w)(t)\|^2 \leq C. \int_0^t \|(v,\, w)(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|(v_x,\, w_x)(\tau)\|^2 d\tau \leq C(1+t) \tag{1.8}$$

Démonstration. 1./ On multiplie la deuxième équation (1.2) du système par v et on intègre par rapport à x sur $]a,\, b[$.

$$\int_a^b v_t v dx = D_v \int_a^b v_{xx} v dx + \int_a^b uv dx - \beta \int_a^b v^2 dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b v^2 dx + \beta \int_a^b v^2 dx = D_v \int_a^b v_{xx} v dx + \int_a^b uv dx$$

D'après la formule de Green :

$$\int_a^b v_{xx} v dx = -\int_a^b v_x^2 dx + \int_{\{a,b\}} \frac{\partial v}{\partial \nu} v dx$$

Ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b v^2 dx + \beta \int_a^b v^2 dx + D_v \int_a^b v_x^2 dx = \int_a^b uvdx$$

On a

$$\int_a^b uvdx \leq sup_{]}a,\, b[|v| \int_a^b udx \leq m \left\| v \right\|_{L^\infty}$$

Donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b v^2 dx + \beta \int_a^b v^2 dx = \int_a^b uvdx \leq m \left\| v \right\|_{L^\infty}$$

Par l'injection de Sobolev de $H^1 \hookrightarrow L^\infty$, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b v^2 dx + \beta \int_a^b v^2 dx \leq Cm \left\| v \right\|_{H^1} \leq Cm \left(\left\| v \right\| + \left\| v_x \right\| \right)$$

D'après l'inégalité (0.7), on a

$$\begin{aligned} Cm \left(\left\| v \right\| + \left\| v_x \right\| \right) &\leq \frac{D_v}{2} \left\| v_x \right\|^2 + \frac{\beta}{2} \left\| v \right\|^2 + C^2 m^2 \\ &\leq \frac{D_v}{2} \left\| v_x \right\|^2 + \frac{\beta}{2} \left\| v \right\|^2 + C \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{1}{2} \left\| v \right\|^2 + \beta \left\| v \right\|^2 + D_v \left\| v_x \right\|^2 - \frac{D_v}{2} \left\| v_x \right\|^2 + \frac{\beta}{2} \left\| v \right\|^2 \leq C$$

Ce qui implique

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \left\| v \right\|^2 + \frac{D_v}{2} \left\| v_x \right\|^2 + \frac{\beta}{2} \left\| v \right\|^2 \leq C$$

D'où

$$\frac{d}{dt}\left\|v\right\|^2 + D_v\left\|v_x\right\|^2 + \beta\left\|v\right\|^2 \leq C \tag{1.9}$$

Or

$$\frac{d}{dt}\left\|v\right\|^2 + D_v\left\|v_x\right\|^2 \leq C$$

En appliquant l'inégalité (0.8), on obtient :

$$\begin{aligned}\left\|v\right\|^2 &\leq \left(\left\|v_0\right\|^2 + C\int_0^t e^{\beta\tau}d\tau\right)e^{-\beta t} \leq C\\ &\leq \left(\left\|v_0\right\|^2 + C\left(\frac{1}{\beta}e^{\beta t} - \frac{1}{\beta}\right)\right)e^{-\beta t}\\ &\leq \left(\left\|v_0\right\|^2 - \frac{C}{\beta}\right)e^{-\beta t} + \frac{C}{\beta} \leq C\end{aligned}$$

On intègre l'équation (1.9) par rapport à t sur $[0,\, T]$, on aura :

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\left\|v\right\|^2 d\tau + \beta\int_0^t \left\|v\right\|^2 d\tau + D_v\int_0^t \left\|v_x\right\|^2 d\tau \leq Ct$$

Ainsi

$$\left\|v(t)\right\|^2 + \int_0^t \left\|v(\tau)\right\|^2 d\tau + \int_0^t \left\|v_x(\tau)\right\|^2 d\tau \leq Ct + \left\|v_0\right\|^2 + C$$

D'où

$$\int_0^t \left\|v(\tau)\right\|^2 d\tau + \int_0^t \left\|v_x(\tau)\right\|^2 d\tau \leq C(1+t) \tag{1.10}$$

2./ On multiplie la troisième équation (1.3) du système par w puis on intègre par rapport à x sur $]a,\, b[$ et par rapport à t.
De manière analogue à ce qui précèdent, on obtient :

$$\int_0^t \left\|w(\tau)\right\|^2 d\tau + \int_0^t \left\|w_x(\tau)\right\|^2 d\tau \leq C(1+t) \tag{1.11}$$

On combine l'équation (1.10) et (1.11), on obtient :

$$\int_0^t \|(v,\, w)(\tau)\|^2\, d\tau + \int_0^t \|(v_x,\, w_x)(\tau)\|^2\, d\tau \leq C(1+t)$$

Lemme 1.5.2. *Soit* $u_0 \in L^2(]a,\, b[),\ (v_0,\, w_0) \in (H^1(]a,\, b[))^2$ *et soit* $(u,\, v,\, w)$ *solution du système (1.1)-(1.5).*
Alors, pour tout $T > 0,$ *il existe une constante* $C > 0$ *tel que pour tout* $0 < t < T,$ *il suit que :*

$$\|u(t)\|^2 + \int_0^t \|u_x(\tau)\|^2\, d\tau + \|(v,\, w)(t)\|_{L^1}^2 + \int_0^t \|(v,\, w)(\tau)\|^2\, d\tau \leq C(1+$$

Démonstration. On multiplie la première équation (1.1) du système par u, puis on intègre par parties et on utilise l'inégalité (0.4), l'inégalité (0.6) et l'inégalité (0.7).

$$\int_a^b u_t u dx = \int_a^b u_{xx} u dx - \int_a^b (uv_x)_x u dx + \int_a^b (uw_x)_x u dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b u^2 dx = \int_a^b u_{xx} u dx - \int_a^b (uv_x)_x u dx + \int_a^b (uw_x)_x u dx$$

D'après la formule de Green :

$$\int_a^b u_{xx} u dx = -\int_a^b u_x^2 dx + \int_{\{a,\, b\}} \frac{\partial u}{\partial \nu} u dx$$

$$\int_a^b (uv_x)_x u dx = \int_a^b uv_x u dx + \int_a^b u^2 v_{xx} dx$$

Par intégration par parties, on a :

$$\int_a^b (uv_x)_x u dx = -\frac{1}{2}\int_a^b u^2 v_{xx} dx + \int_a^b u^2 v_{xx} dx = \frac{1}{2}\int_a^b u^2 v_{xx} dx$$

De même , on trouve :

$$\int_a^b (uw_x)_x u dx = -\frac{1}{2}\int_a^b u^2 w_{xx} dx + \int_a^b u^2 w_{xx} dx = \frac{1}{2}\int_a^b u^2 w_{xx} dx$$

On aura donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b u^2dx = -\int_a^b u_x^2dx - \frac{1}{2}\int_a^b u^2v_{xx}dx + \frac{1}{2}\int_a^b u^2w_{xx}dx$$

C'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b u^2dx + \int_a^b u_x^2dx = -\frac{1}{2}\int_a^b u^2v_{xx}dx + \frac{1}{2}\int_a^b u^2w_{xx}dx$$

En utilisant l'inégalité (0.6) et l'inégalité (0.4), on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b u^2dx + \int_a^b u_x^2dx = -\frac{1}{2}\int_a^b u^2v_{xx}dx + \frac{1}{2}\int_a^b u^2w_{xx}dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\int_a^b (u^2)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b v_{xx}^2dx\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(\int_a^b (u^2)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b w_{xx}^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\int_a^b u^4dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b v_{xx}^2dx\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(\int_a^b u^4dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b w_{xx}^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\left(\int_a^b u^4dx\right)^{\frac{1}{4}}\right]^2\left[\|v_{xx}\|^2 + \|w_{xx}\|^2\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^2\left[\|v_{xx}\|^2 + \|w_{xx}\|^2\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}C\left(\|u_x\|\,\|u\|_{L^1} + \|u\|_{L1}^2\right)(\|v_{xx}\| + \|w_{xx}\|)$$

$$\leq \frac{1}{2}C\left(m\,\|u_x\| + m^2\right)(\|v_{xx}\| + \|w_{xx}\|)$$

Ainsi

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b u^2dx + \int_a^b u_x^2dx \leq \frac{1}{2}Cm\left[\|u_x\|\,\|v_{xx}\| + \|u_x\|\,\|w_{xx}\| + m\,\|v_{xx}\| + m\,\|u\right.$$

$$\leq \frac{1}{2}Cm\left(\|u_x\|\|v_{xx}\|+\|u_x\|\|w_{xx}\|\right)+\frac{1}{2}Cm^2\left(\|v_{xx}\|+\|w_{xx}\|\right)$$

D'après l'inégalité (0.7), on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b u^2dx+\int_a^b u_x^2dx \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left\|u_x^2\right\|+\frac{1}{2}Cm\left\|v_{xx}\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|u_x^2\right\|+\frac{1}{2}Cm\left\|w_{xx}\right\|\right.$$

$$\leq \frac{1}{2}\|u_x\|^2+C\left(\|v_{xx}\|^2+\|w_{xx}\|^2+\|v_{xx}\|+\|w_{xx}\|\right)$$

On utilise l'inégalité (0.5), on a

$$C\left(\|v_{xx}\|+\|w_{xx}\|\right)\leq \frac{C^2}{2}+\frac{1}{2}\|v_{xx}\|^2+\frac{C^2}{2}+\frac{1}{2}\|w_{xx}\|^2$$

$$\leq \frac{C^2}{2}+\frac{C^2}{2}+\frac{1}{2}\|v_{xx}\|^2+\frac{1}{2}\|v_{xx}\|^2$$

$$\leq 2C^2+\|v_{xx}\|^2+\|w_{xx}\|^2$$

On trouve que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b u^2dx+\frac{1}{2}\int_a^b u_x^2dx \leq C\left(\|v_{xx}\|^2+\|w_{xx}\|^2\right)+\|v_{xx}\|^2+\|w_{xx}\|^2+2C^2$$

$$\leq C\left(\|v_{xx}\|^2+\|w_{xx}\|^2\right)+2C^2$$

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u^2dx+\int_a^b u_x^2dx \leq C\left(1+\|v_{xx}\|^2+\|w_{xx}\|^2\right) \qquad (1.13)$$

D'où le résultat.

En suite, on multiplie la deuxième équation (1.2) du système par $-v_{xx}$ et on intègre par rapport à x sur $]a,\, b[$.

$$\int_a^b -v_{xx}v_tdx=-D_v\int_a^b v_{xx}^2dx-\int_a^b uv_{xx}dx+\beta\int_a^b vv_{xx}dx$$

Ce qui implique

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b v_x^2dx + D_v\int_a^b v_{xx}^2dx = -\int_a^b uv_{xx}dx + \beta\int_a^b vv_{xx}dx$$

Par la formule de Green :

$$\int_a^b vv_{xx}dx = -\int_a^b v_x^2dx + \int_{\{a,b\}}\frac{\partial v}{\partial \nu}vdx$$

On obtient donc

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b v_x^2dx + D_v\int_a^b v_{xx}^2dx + \beta\int_a^b v_x^2dx = -\int_a^b uv_{xx}dx$$

On applique l'inégalité (0.6), on trouve :

$$\frac{d}{dt}\int_a^b v_x^2dx + \int_a^b v_{xx}^2dx + \int_a^b v_x^2dx \le \int_a^b u^2dx\,\|v_{xx}\|^2 \le C\int_a^b u^2dx \tag{1.14}$$

La même procédure pour l'équation (1.3) du système, on trouve :

$$\frac{d}{dt}\int_a^b w_x^2dx + \int_a^b w_{xx}^2dx + \int_a^b w_x^2dx \le C\int_a^b u^2dx \tag{1.15}$$

On combine (1.14) et (1.15), on trouve :

$$\frac{d}{dt}\int_a^b(w_x^2+v_x^2)dx + \int_a^b(w_{xx}^2+v_{xx}^2)dx + \int_a^b(w_x^2+v_x^2)dx \le C\int_a^b u^2dx \tag{1.16}$$

Puis on intègre l'équation (1.16) par rapport à t.

$$\int_0^t\frac{d}{dt}\|(v_x,\,w_x)\|^2d\tau + \int_0^t\|(v_{xx},\,w_{xx})\|^2d\tau + \int_0^t\|(v_x,\,w_x)\|^2d\tau \le C\int_0^t\|u(\tau)\|$$

Ce qui implique

$$\|(v_x,\,w_x)(t)\|^2 + \int_0^t\|(v_{xx},\,w_{xx})(\tau)\|^2d\tau + \int_0^t\|(v_x,\,w_x)(\tau)\|^2d\tau \le C\int_0^t\|u(\tau)\|^2$$

D'où

$$\|(v_x,\, w_x)(t)\|^2 + \int_0^t \|(v_{xx},\, w_{xx})(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|(v_x,\, w_x)(\tau)\|^2 d\tau \leq C\left(1 + \int_0\right.$$

Maintenant, on intègre l'équation (1.13) par rapport à t, on obtient :

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\|u(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|u_x(\tau)\|^2 d\tau \leq C\int_0^t d\tau + C\int_0^t \|v_{xx}(\tau)\|^2 d\tau + C\int_0^t d\tau + C$$

$$\leq Ct + \|u(0)\|^2 + C\int_0^t \|(v_{xx},\, w_{xx})(\tau)\|^2 d\tau$$

D'où

$$\|u(t)\|^2 + \int_0^t \|u_x(\tau)\|^2 d\tau \leq C(1+t) + C\int_0^t \|(v_{xx},\, w_{xx})(\tau)\|^2 d\tau \quad (1.18)$$

On applique l'inégalité (0.9) à (1.18), on aura :

$$\|u(t)\|^2 \leq C(1+t) + \int_0^t C\,\|u(\tau)\|^2 d\tau$$

$$\leq C(1+t) + \int_0^t C^2(1+\tau)\exp\left(\int_\tau^t C ds\right) d\tau$$

$$\leq C(1+t) + e^{Ct}\int_0^t C(1+\tau)\exp C(t-\tau) d\tau$$

$$\leq C(1+t) + (t + e^{Ct} - 1) - \frac{1}{C} + \frac{1}{C}e^{Ct}$$

$$\leq C(1+t) + Ce^{Ct}$$

$$\leq C(1+t)e^{Ct} + Ce^{2Ct}$$

$$\|u(t)\|^2 \leq C(1+t)e^{Ct} \quad (1.19)$$

Donc, la substitution de l'équation (1.19) dans l'équation (1.17) donne :

$$\|(v_x,\, w_x)(t)\|^2+\int_0^t \|(v_{xx},\, w_{xx})(\tau)\|^2 d\tau+\int_0^t \|(v_x,\, w_x)(\tau)\|^2 d\tau \leq C\left(1+\int_0^t C\right.$$

$$\leq C + C\left[(1+t)e^{Ct} + 1 - \frac{1}{C}e^{Ct} - \frac{1}{C}\right]$$

$$\leq C + C(1+t)e^{Ct} - e^{Ct} + C$$

$$\leq C(1+t)e^{Ct}$$

$$\|(v_x,\, w_x)(t)\|^2 + \int_0^t \|(v_{xx},\, w_{xx})(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|(v_x,\, w_x)(\tau)\|^2 d\tau \leq Ce^{2Ct} \leq C$$

On combine (1.19) et (1.20) avec l'équation (1.10), on obtient :

$$\|u(t)\|^2+\|(v_x,\, w_x)\|^2+\int_0^t \|(v_x,\, w_x)(\tau)\|^2 d\tau+\int_0^t \|(v_{xx},\, w_{xx})(\tau)\|^2 d\tau \leq Ce^{Ct} \leq$$

D'où le résultat.

Lemme 1.5.3. *Soit* $(v_0,\, w_0) \in [H^2(]a,\, b[)]^2$. *Soit* $(u,\, v,\, w)$ *solution du problème (1.1)-(1.5).*
Alors, pour tout $T > 0$, *il existe une constante positive tel que pour tout* $0 < t < T$, *il est vrai que*

$$\|(v_{xx},\, w_{xx})(t)\|^2 + \int_0^t \|(v_{xx},\, w_{xx})(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|(v_{xxx},\, w_{xxx})(\tau)\|^2 d\tau \leq C(1+$$

Démonstration. On dérive la deuxième équation du système (1.1)-(1.3) par rapport à x deux fois puis on multiplie le résultat par v_{xx}.

$$(v_t)_{xx} = D_v v_{xxxx} + u_{xx} - \beta v_{xx}$$

Alors,

$$\left(\frac{d}{dt}v_{xx}\right) v_{xx} = D_v v_{xxxx} v_{xx} + u_{xx} v_{xx} - \beta v_{xx}^2$$

On intègre sur $]a,\, b[,$ on obtient :

$$\frac{1}{2}\int_a^b v_{xx}^2 dx + D_v \int_a^b v_{xxxx} v_{xx} dx + \int_a^b u_{xx} v_{xx} dx - \beta \int_a^b v_{xx}^2 dx$$

On applique la formule de Green, on aura :

$$\frac{1}{2}\int_a^b v_{xx}^2 dx + D_v \int_a^b v_{xxx}^2 dx + \beta \int_a^b v_{xx}^2 dx = \int_a^b u_{xx} v_{xx} dx = -\int_a^b u_x v_{xxx} dx$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$-u_x v_{xxx} \leq \frac{D_v}{2} v_{xxx}^2 + \frac{2}{D_v} u_x^2$$

On obtient donc :

$$\frac{1}{2}\int_a^b v_{xx}^2 dx + D_v \int_a^b v_{xxx}^2 dx + \beta \int_a^b v_{xx}^2 dx \leq \frac{D_v}{2}\int_a^b v_{xxx}^2 dx + \frac{2}{D_v}\int_a^b u_x^2 dx$$

On intègre sur $[0,\, t],$ on aura :

$$\|v_{xx}\|^2 + \int_0^t \|v_{xx}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|v_{xxx}(\tau)\|^2 d\tau \leq C \int_0^t \|u_x(\tau)\|^2 d\tau + \frac{1}{2}\|v_{xx}(0)\|^2$$

Comme $v_0 \in H^2(]a,\, b[),$ donc $\|v_{xx}(0)\|^2 \leq \infty$

Il vient que

$$\|v_{xx}\|^2 + \int_0^t \|v_{xx}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|v_{xxx}(\tau)\|^2 d\tau \leq C\left(1 + \int_0^t \|u_x(\tau)\|^2 d\tau\right)$$

En appliquant le lemme (1.5.2) à cette dernière, on obtient

$$\|v_{xx}\|^2 + \int_0^t \|v_{xx}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|v_{xxx}(\tau)\|^2 d\tau \leq C(1 + e^{Ct})$$

De la même manière, on aura l'estimation de w suivante

$$\|w_{xx}\|^2 + \int_0^t \|w_{xx}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|w_{xxx}(\tau)\|^2 d\tau \leq C(1 + e^{Ct})$$

En combinant le lemme (1.5.2) et le lemme (1.5.3) et en utilisant l'injection de Sobolev $H^1 \hookrightarrow L^\infty$, on obtient

$$\|v_x\|_{L^\infty} + \|w_x\|_{L^\infty} \leq C(1 + e^{Ct}) \tag{1.21}$$

Lemme 1.5.4. *Soit $u_0 \in H^1(]a, b[)$. Supposons que (u, v, w) solution du problème (1.1)-(1.5). Alors*
pour tout $T > 0$, il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout $0 < t < T$

$$\|u_x\|^2 + \int_0^t \|u_{xx}(\tau)\|^2 d\tau \leq C(1 + e^{Ct})$$

Démonstration. En multipliant la première équation (1.1) du système (1.1)-(1.3) par $(-u_{xx})$ et intègrant le résultant, on aura

$$-u_t u_{xx} = -u_{xx}^2 + u_{xx}(uv_x)_x - u_{xx}(uw_x)_x$$

Il vient que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b u_x^2 dx + \int_a^b u_{xx}^2 dx = \int_a^b u_{xx}(uv_x)_x dx - \int_a^b u_{xx}(uw_x)_x dx \tag{1.22}$$

Estimons le terme à droite de l'équation (1.22). Pour cela, on dérive la deuxième équation (1.2) du système trois fois puis on multiplie le résultat par v_{xxx}.

$$(v_t)_{xx} = D_v(v_{xx})_{xxx} + u_{xxx} - \beta v_{xxx}$$

Ce qui implique

$$\frac{d}{dt}v_{xxx} = D_v v_{xxxxx} + u_{xxx} - \beta v_{xxx}$$

Il vient que

$$\left(\frac{d}{dt}v_{xxx}\right)v_{xxx} = D_v v_{xxxxx}v_{xxx} + u_{xxx}v_{xxx} - \beta v_{xxx}^2$$

D'où

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b v_{xxx}^2 dx = D_v\int_a^b v_{xxxxx}v_{xxx}dx + \int_a^b u_{xxx}v_{xxx}dx - \beta\int_a^b v_{xxx}^2 dx$$

Par la formulation de Green, on obient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b v_{xxx}^2 dx + \beta\int_a^b v_{xxx}^2 dx + \int_a^b v_{xxx}^2 dx = -\int_a^b u_{xx}v_{xxxx}dx$$

Par l'application de Cauchy-Schwarz, on aura :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b v_{xxx}^2 dx + \int_a^b v_{xxx}^2 dx + \int_a^b v_{xxx}^2 dx \leq \int_a^b u_{xx}^2 dx \left\|v_{xxx}\right\|^2$$

On intègre par rapport à t, on aura :

$$\left\|v_{xxx}\right\|^2 + \int_0^t \left\|v_{xxx}(\tau)\right\|^2 d\tau + \int_0^t \left\|v_{xxxx}(\tau)\right\|^2 d\tau \leq C_0\int_0^t \left\|u_{xx}(\tau)\right\|^2 d\tau \quad (1.23)$$

On a

$$\int_a^b u_{xx}(uv_x)_x dx = \int_a^b u_{xx}u_x v_x dx + \int_a^b u_{xx}uv_{xx}dx$$

Par la formule d'intégration par parties, on trouve :

$$\int_a^b u_{xx}(uv_{xx})dx = -\int_a^b u_x(uv_{xx})_x dx = -\int_a^b u_x^2 v_{xx}dx - \int_a^b u_x u v_{xxx}dx$$

$$= 2\int_a^b u_x u_{xx}v_x dx + \frac{1}{2}\int_a^b u^2 v_{xxxx}dx$$

On aura alors

$$\int_a^b u_{xx}(uv_x)_x dx = \frac{1}{2}\int_a^b u^2 v_{xxxx} dx + 3\int_a^b u_{xx}u_x v_x dx$$

En utilisant Hölder, on obtient :

$$\int_a^b u_{xx}(uv_x)_x dx \leq \left(\int_a^b (u^2)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b v_{xxxx}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + 3\int_a^b |u_{xx}u_x v_x| dx$$

$$\leq \|u\|_{L^4}^2 \|v_{xxxx}\| + 3\|v_x\|_{L^\infty} \int_a^b |u_{xx}u_{xx}| dx$$

Par Cauchy-Schwarz et l'inégaltité (1.23), on aura :

$$\int_0^t \int_a^b u_{xx}(uv_x)_x dx \leq \int_0^t \int_a^b (\|u\|_{L^4}^2)^2 dx d\tau + \frac{1}{8C_0}\int_0^t \|v_{xxxx}\|^2 d\tau + 3\int_0^t \|v_x\|_{L^\infty}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy généralisé et l'inégalité (1.21), on obtient :

$$\int_0^t \int_a^b u_{xx}(uv_x)_x dx \leq \int_0^t \int_a^b (\|u\|_{L^4}^2)^2 dx d\tau + \frac{1}{8C_0}\int_0^t \|v_{xxxx}\|^2 d\tau$$

$$+ \int_0^t C(1+e^{Ct}) \int_a^b u_x^2 dx d\tau + \frac{1}{8}\int_0^t \int_a^b u_{xx}^2 dx d\tau$$

En appliquant l'inégalité (0.4) et l'équation (1.7), on obtient :

$$\int_0^t \int_a^b u_{xx}(uv_x)_x dx \leq C\int_0^t (Cm\|u_x\| + m^2)^2 d\tau + \frac{1}{8}\int_0^t \|u_{xx}(\tau)\|^2 d\tau$$

$$+C(1+e^{Ct})\int_0^t \|u_x(\tau)\|^2 d\tau + \frac{1}{8}\int_0^t \|u_{xx}(\tau)\|^2 d\tau$$

$$\leq C\int_0^t (1+\|u_x\|)^2 d\tau + C(1+e^{Ct})\int_0^t \|u_x(\tau)\|^2 d\tau + \frac{1}{4}\int_0^t \|u_{xx}(\tau)\|^2 d\tau$$

En utilisant l'inégalité (1.12), on aura :

$$\int_0^t \int_a^b u_{xx}(uv_x)_x dx \leq C \int_0^t (1+\|u_x\|)^2 d\tau + C(1+e^{Ct})^2 + \frac{1}{4}\int_0^t \|u_{xx}(\tau)\|^2 d\tau$$

$$\leq C \int_0^t (1+\|u_x\|)^2 d\tau + C(1+2e^{Ct}+e^{2Ct}) + \frac{1}{4}\int_0^t \|u_{xx}(\tau)\|^2 d\tau$$

$$\leq C \int_0^t (1+2\|u_x(\tau)\|) d\tau + C\int_0^t \|u_x\|^2 d\tau + C(1+e^{Ct}) + \frac{1}{4}\int_0^t \|u_{xx}(\tau)\|^2 d\tau$$

$$\leq C \int_0^t (1+\|u_x(\tau)\|) d\tau + C(1+e^{Ct}) + \frac{1}{4}\int_0^t \|u_{xx}(\tau)\|^2 d\tau$$

$$\int_0^t \int_a^b u_{xx}(uv_x)_x dx \leq C(1+e^{Ct}) + \frac{1}{4}\int_0^t \|u_{xx}(\tau)\|^2 d\tau \quad (1.24)$$

D'où le résultat.

Le même argument que ci-dessus appliqué à w donne également lieu à

$$\int_0^t \int_a^b u_{xx}(uw_x)_x dx \leq C(1+e^{Ct}) + \frac{1}{4}\int_0^t \|u_{xx}(\tau)\|^2 d\tau \quad (1.25)$$

Ainsi, en intégrant l'équation (1.22) par rapport à t et en appliquant les inégalités (1.24) et (1.25), on obtient le résultat demandé.

1.6 Existence globale

Théorème 1.6.1. *Soit* $(u_0, v_0, w_0) \in H^2(]a, b[)$. *ALors, il existe une unique solution globale* (u, v, w) *du problème (1.1)-(1.5) tels que*
$(u, v, w) \in \left[\mathcal{C}^0([a, b] \times [0, \infty); \mathbb{R}^3)\right]^3 \bigcap \left[\mathcal{C}^{2,1}([a, b] \times (0, \infty); \mathbb{R}^3)\right]^3.$
De plus, $u, v, w \geq 0$ *si* $u_0, v_0, w_0 \geq 0$.

Démonstration. D'après le lemme (1.5.2) et lemme (1.5.4), on a

$$\|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1} + \|w\|_{H^1} + \leq C(1 + e^{Ct})$$

Ce qui donne

$$\|(u,\, v,\, w)\|_{H^1} \leq C(1 + e^{Ct})$$

et par l'injection de Soblev $H^1 \hookrightarrow L^\infty$

$$\|(u,\, v,\, w)\|_{L^\infty} \leq C(1 + e^{Ct})$$

D'où

$$sup_{0<t<T_0 \cap T} \|(u,\, v,\, w)\|_{L^\infty} \leq C(1 + e^{Ct})$$

pour tout $T > 0$.
Ce qui veut dire, pour tout t fini avec $0 < t < T_0 \cap T$, $\|(u,\, v,\, w)\|_{L^\infty}$ est borné.
Par la propriété (ii) du théorème (1.3.1), le temps maximal T_0 d'existence de la solution classique obtenue dans le théorème (1.3.1) doit être infini.
La positivité de la solution résulte de la propriété (ii) du théorème (1.3.1) directement.

Chapitre 2

Comportement asymptotique

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude des états stables non-triviaux du sytème (1.1)-(1.3) avec les conditions au bord homogènes (1.5). Les états stables du système satisfaient le système suivant :

$$\begin{aligned} u_{xx} - (uv_x)_x + (uw_x)_x &= 0 \\ D_v v_{xx} + u - \beta v &= 0 \\ D_w w_{xx} + \gamma u - \delta w &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

L'état stable du systéme (1.1)-(1.3) est solution du système (2.1), avec u, v, w non constants. Dans cette étude, on considère seulement le cas simple $\frac{\beta}{D_v} = \frac{\delta}{D_w} = \mu$. Ce qui veut dire que le chimioattractant et le chimiorépidant ont le même taux de mortalité par rapport à leur diffusion. On définit $\phi = v - w$, le système (2.1) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} u_{xx} - (u\phi_x)_x &= 0 \\ v_{xx} + 1/D_v u - \beta/D_v v &= 0 \\ w_{xx} + \gamma/D_w u - \delta/D_w w &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} u_{xx} - (u\phi_x)_x &= 0 \\ \phi_{xx} + \lambda u - \mu\phi &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Où
$$\lambda = 1/D_v - \gamma/D_w \tag{2.3}$$
On intègre la première équation du système (2.2).
On a
$$(u_x - (u\phi_x))_x = 0$$
Ce qui implique
$$u_x - (u\phi_x) = C_1$$
On peut prendre $C_1 = 0,$ on aura donc
$$\ln u = \phi(x) + C$$
D'où
$$u = \eta e^{\phi}$$
avec η une constante positive.

Par substitution de l'expression de u dans la deuxième équation de (2.2), on obtient l'équation elliptique suivante :
$$\phi_{xx} = \mu\phi - \lambda\eta e^{\phi}. \tag{2.4}$$
Cette dernière est étudiée de manière approfondie quand $\phi \geq 0$ et $\lambda > 0$ par [3, 17]
Dans notre cas, ϕ et λ ne sont pas positifs. On écrit alors le système Hamiltonien du premier ordre pour l'équation (2.4).

$$\begin{aligned} \phi_x &= y \\ y_x &= \mu\phi - \lambda\eta e^{\phi} \end{aligned} \tag{2.5}$$
Sans perte de généralité, on suppose $]a, b[= (0, L)$ avec $L > 0$. Les conditions de Neumann deviennent :
$$y(0) = y(L) = 0. \tag{2.6}$$

Soit (ϕ^*, y^*) un point d'équilibre pour le système (2.5).
C'est-à-dire

$$\phi_x = f(\phi^*, y^*) = y^* = 0$$
$$y_x = g(\phi^*, y^*) = \mu\phi^* - \lambda\eta e^{\phi^*} = 0$$

Le système linéarisé s'écrit comme suit :

$$\phi_x = f(\phi^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial \phi} |_{(\phi^*, y^*)} (\phi - \phi^*) + \frac{\partial f}{\partial y} |_{(\phi^*, y^*)} (y - y^*)$$
$$y_x = g(\phi^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial \phi} |_{(\phi^*, y^*)} (\phi - \phi^*) + \frac{\partial g}{\partial y} |_{(\phi^*, y^*)} (y - y^*)$$

La martice jacobienne du système s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \phi} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial \phi} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu - \lambda\eta e^{\phi} & 0 \end{pmatrix},$$

Donc la matrice jacobienne au point d'équilibre est :

$$M^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu - \lambda\eta e^{\phi^*} & 0 \end{pmatrix}$$

Le point d'équilibre satisfait donc : $y = 0$

et

$$\mu\phi = \lambda\eta e^{\phi}. \tag{2.7}$$

On considère deux cas :

1. Si $\lambda \leq 0,$ alors $D_w \leq \gamma D_v$.
   Donc l'équation (2.7) admet une unique solution $\phi^* < 0$.
   On a
   $detM^* = -\mu + \lambda\eta e^{\phi^*} < 0$ et les valeurs propres de la matrice M^* sont de signe opposé.
   Donc le point d'équilibre $(\phi^*, 0)$ est un point selle du système linéarisé.
   D'après le théorème de Hartmann-Grobman, $(\phi^*, 0)$ est un point selle du système non linéaire (2.5).
   La fonction Hamiltonienne du système non linéaire est :
   $$H(\phi, y) = y^2/2 - (\mu/2)\phi^2 + \lambda\eta e^{\phi}$$
   Il y a aucune solution stable non triviale satisfaisant les conditions aux limites par une simple analyse de plan de phase.

2. Si $\lambda > 0,$ alors $D_w > \gamma D_v$.
   L'équation (2.7) peut avoir une ou deux solutions qui dépendent des paramétres. Il est simple de vérifier que le seul cas où on a les états stables non triviaux est le cas de deux solutions.
   L'équation (2.7) admet deux soluions $0 < \phi_1^* < \phi_2^*$ si et seulement si $\mu > \lambda\eta e$,
   où ϕ_1^* satistait $\mu > \lambda\eta e^{\phi_1^*}$ et ϕ_2^* satisfait $\mu < \lambda\eta e^{\phi_2^*}$.
   On vérifie facilement que le point d'équilibre $(\phi_1^*, 0)$ est un point selle et l'équilibre $(\phi_2^*, 0)$ est un centre.
   Puisque l'intervalle $[0, L]$ est borné et le système (2.5) est un système Hamiltonien, pour chaque L il existe une solution non triviale de l'équation (2.5) et (2.6) qui est une orbite fermée.
   Les états stables non triviaux sont imbriqués autour du centre $(\phi_2^*, 0)$.
   Donc, lorsque $D_w > \gamma D_v$, il n'y a pas de solution régulière

non triviale de l'équation (2.4) qui satisfait la condition aux limites $\partial\phi/\partial\nu = 0$ en $x = 0,\ L$.
Par conséquent, l'état stable $u = \eta e^{\phi}$ existe. En substituant cette dernière dans la deuxième équation de (2.1) en relation avec l'équation (1.5), on obtient :

$$\begin{aligned} -v_{xx} + \mu v &= \frac{\eta}{D_v} e^{\phi(x)}, \quad 0 < x < L, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} u &= 0, \quad x = 0 \ \ ou \ \ L \end{aligned} \tag{2.8}$$

qui est une équation linéaire elliptique avec des conditions aux limites de Neumann. Puisque le terme non homogène e^{ϕ} est suffisamment régulier pour $x \in (0,\ L)$, la solution régulière de l'équation (2.8) existe. Par les mêmes arguments, on obtient la solution w de la troisième équation de (2.1) avec les conditions aux limites de Neumann.

En résumé, l'état stable du système (1.1)-(1.3) avec les conditions aux limites de Neumann est donné par le théorème suivant :

Théorème 2.0.2. *Soit* $]a,\ b[= (0,\ L)$. *Supposons que* $\beta/D_v = \delta/D_w$. *Si* $D_w \le \gamma D_v$, *le système (1.1)-(1.3) avec les conditions aux limites de Neumann (1.5) n'a pas d'états stables non triviaux.*
Si $D_w > \gamma D_v$, *alors l'état stable du système (1.1)-(1.3) sous réserve de l'équation (1.5) existe pour chaque* $L > 0$.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons établi l'existence globale et la stabilité d'une solution classique du modèle de la chimiotaxie attractif-répulsif en dimension une. Notre résultat n'exclue pas l'explosion en temps fini.

A travers l'analyse de l'état stable, nous déduisons que l'existence de points de stabilité non triviaux dépend du signe de λ qui est le rapport entre la diffusion chimioattractive et la diffusion chimiorépulsive (voir (2.3)). Ceci nous permet de conclure que si les taux de mortalité β, γ et δ sont fixés, la diffusion relative du signal chimioattractif au signal chimiorépulsif joue un rôle important dans la détermination de la nature des états stationnaires.

Bibliographie

[1] Lucas C.F.Ferreira Elder J.Villamizar-Roa. Abelardo Duarte-Rodriguez, ˙ Global existence for an attraction-repulsion chemotaxis fluid model with logistic source. Septembre 2017.

[2] C.Li. The existence of solutions of elliptic equations with neumann boundary conditions for superlinear problems. *Acta.Math.Sin*, pages 965–976, 20(2004).

[3] D.Horstmann. The keller-segel model in chemotaxis and its consequences. *I,Jahresber.Deutsch.Math.-Verein*, pages 103–165, 105(3)(2003).

[4] S.Charles et C.Lopes. Systèmes dynamiques dans $\mathbb{R}^2$. *Biologie Mathématiques et Modélisation*, Mai 2008.

[5] J.Liu et Zhi-An Wang. Classical solutions and stady states of an attraction-repulsion chemotaxis in one dimension. *Journal of Biological Dynamics*, 6 :31–41, Mai 2012.

[6] H.Amann. Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value.

[7] H.Brezis. *Partial differential equations in the 20th century.* 135(1998).

[8] H.Brezis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications.* Paris, masson edition, 1938.

[9] J.M-C.Rayan. *Global existence of reaction-diffusion equations over multiple domains.* Mathematics, Texas A-M University, December 2004.

[10] K.J.Painter and T.Hillen. Volume-filling and quorum-sensing in models for chemosensitive movement.

[11] L.C.Evans. *Partial differential equations.* 1999.

[12] L.Taleb. Etude d'un système de réaction-diffusion quasi-linéaire fortement couple dégénéré. Mathématiques, USTHB, 2002.

[13] V.M.Coupe- E.M.Torres R.A.Fricker-Gates et S.B...Dunnett M.A.Gates, ˙Spatially and temporally restricted chemoattractant and repulsive cues direct the formation of the nigro-sriatal circuit. *Eur.J.Neurosci*, 19(2004).

[14] M.Eisenbach. Chemotaxis. *Imperial College Press, London*, 2004.

[15] L.Edelstein-Keshet and A.Mogilner M.Luca, A.Chavez-Ross. Chemotactic signalling,microglia, and alzheimer's disease sentile plagues : is there a connection. *Bull Math.Biol*, pages pp. 693–730, 65 (2003).

[16] P.Chartier. Stabilité des systèmes non-linéaires. Novembre 2013.

[17] R.Schaaf. *Stationary solutions of chemotaxis systems.* 292(1985).

[18] Zhao-Wang. Global dynamics and diffusion limit of one-dimensional repulsive chemotaxis model. *Communications on Pure and applied analysis*, 12(6) :3027–3046, Novembre 2013.