République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU

FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE

DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

Mémoire de Fin d'Etudes

de MASTER ACADEMIQUE

Spécialité : **Automatique et Informatique Industrielle**

Présenté par

MESSAR Noura

Mémoire dirigé par **Mme NAIT ABDESSELAM**

Thème

Synthèse d'un observateur d'ordre réduit dans L'algèbre des dioïdes

Mémoire soutenu en Septembre 2018 devant le jury composé de :

M. A.MAIDI
Professeur, UMMTO, Président
Mme, A. NAIT ABDESSELAM
MAA, UMMTO, Rapporteur
Mme, K.TEBANI
MCB, CDTA, Examinateur
Mme, H.HAMRI
MAB, UMMTO, Examinateur

Remerciements

Je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné le courage, la patience, la force, et la volonté pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma profonde gratitude et Je remercie plus sincère ma promotrice Madame Nait Abdesselam Aldjia, pour son aide tout au long de mon travail, ainsi que pour toutes les informations et l'encouragement qu'elle n'hésite jamais de me fournir pendant toute la période consacrée à la réalisation de mon projet de fin d'étude.

Je tiens aussi à exprimer mon profonde gratitude à Mr KARA REDOUANE qui ma offert le privilège de travailler sous sa direction.

Je porte également un témoignage de gratitude aux membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont attribué pour évaluer et juger mon modeste travail.

Enfin, Mes remerciement s'adressent également à tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Notations

Notations

$\oplus$: addition dans un dioïde .

$\otimes$: Multiplication dans un dioïde .

e : Elément neutre pour La loi $\otimes$.

ε : Elément neutre pour La loi $\oplus$.

D : Dioïde .

$D^{n\times n}$: Dioïde matriciel .

$\mathbb{R}_{max}$: Le dioïde (R,$\{-\infty\}$, max, +) , appelé aussi algébre $(max,+)$

$\mathbb{R}_{min}$: Le dioïde (R,$\{+\infty\}$, min, +) , appelé aussi algébre $(min,+)$

T : plus grand élément dans un dioïde .

$\preceq$: L'ordre dans $\mathbb{R}_{max}$ coincide avec l'ordre usuel $\preceq$.

$\preceq$: L'ordre dans $\mathbb{R}_{min}$ coincide avec l'ordre usuel $\succeq$.

a^* : étoile de Kleene $a^* = e \oplus a \oplus a^2 \oplus$......

a^+ : dérivé de l'étoile de Kleene $a^+ = a^*a$

sci : Semi-continue inferieur .

scs : Semi-continue supérieure .

L_a : produit à gauche par a, $L_a(x) = a \otimes x$.

R_a : produit à droite par a, $R_a(x) = x \otimes a$.

$L_a^{\#}$: résidué de l'application L_a.

$R_a^{\#}$: résidué de l'application R_a.

$a \backslash\!\!\circ b$: notation utilisée pour représenter $L_a^{\#}(b)$

$a \phi b$: notation utilisée pour représenter $R_a^{\#}(b)$

Rdp : Réseau de petrie .

GET : Graphe d'événement temporisé .

SED : Systéme à événement discret .

P : Ensemble des places $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$

X : Ensemble des transition $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$B\,[\![\gamma,\delta]\!]$: Dioïde des séries formelle en γ et δ a exposant dans $\mathbb{R}$ et a coefficient booléens.

$M_{ax}^{in}\,[\![\gamma,\delta]\!]$: Dioïde des séries formelle en γ et δ a exposant dans $\mathbb{R}$.

Introduction générale

Les Systèmes à événement discrets (SED) désignent des systèmes généralement de conception humaine. Leur évolution obéit à l'apparition d'événements qui ont lieu à des instants discrets . Cette classe de systémes regroupe aussi bien les systèmes de production (ateliers flexibles lignes d'assemblage)(voir [11]), les réseaux de transport (routier ,ferroviaire ou aérien)(voir[21, 22, 20]) et les systèmes informatiques (voir [17]) qui sont , par exemple, des processus que l'on peut considérer comme des systèmes à événements discrets.

De façon informelle, les systèmes continus classiques, c'est-à-dire ceux qui obéissent aux lois de la Physique, peuvent être modélisés par des équations différentielles qui sont dépendantes du temps . Tandisque les systèmes à événements discrets peuvent être définis comme des systèmes dans lesquels les variables d'état changent sous l'occurrence d'événements . Ces systèmes sont alors souvent représentés par des modèles états-transitions . La théorie des langages et des automates permet d'obtenir des modèles adaptés pour la description et la commande des systèmes uniquement concernés par les phénomènes de concurrence. Les systèmes qui mettent en jeu des phénomènes de synchronisation (mais pas de concurrence), peuvent quant à eux être appréhendés à travers la théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes, et les réseaux de Petri pour des systèmes plus complexes qui comportent à la fois des phénomènes de synchronisation et de concurrence .

Au début des années 80 une nouvelle théorie, permettant d'étudier une catégorie de SED, a vu le jour. Cette théorie concerne une sous classe de réseaux de petri, appelés graphes d'événements temporisés (GET), caractérisés par des phénomènes de saturation et de synchronisation. Il s'avère que l'évolution de l'état de ces graphes est représentée par des équations linéaires dans une structure algébrique particulière, appelée l'algèbre $(max, +)$, ce qui rend cette théorie particulièrement appréciée par les automaticiens.

Ces dernières années, des efforts particuliers de recherches se sont intéressés à l'étude et à la résolution des problèmes d'estimation ou d'observation du vecteur d'état (ou d'une partie de ce vecteur) . Ces recherches sont motivées par le fait que de nombreuses méthodes de commande des processus sont élaborées à partir de la connaissance de l'état du système (commande par retour d'état, commande optimale,etc) . En général, seules les variables d'entrée et de sortie sont connues. Il est alors nécessaire, à partir de ces informations de reconstruire l'état du modèle choisi afin d'élaborer la commande appropriée.

Dans le cadre d'étude de systémes à événement discrets, L'objectif est le même que dans le cas des systémes continues, donc observer un vecteur d'état revient à estimer ou à reconstruire ses composantes en utilisant les entrées et les sorties disponibles . les résultat sont inspiré par des travaux de Luenberger, (voir [16]) et introduite dans max plus par Harduoin et Carlos Maia (voir [18]).

Le probléme posé c'est qu'en partant d'un systéme représentable par un GET ses états sont pas entièrement accessible à la mesure pour des raisons techniques ou économiques (construction, positionnement et coût des capteurs) . Afin de remédier à ces inconvénients, un observateur d'ordre réduit ou reconstructeur d'état, qui donne une estimation des état non accessibles, à partir des sorties et des entrées, qui doit alors être utilisé (voir [16] et [15]).

L'objectif de ce mémoire est de pouvoir fournir une synthése observateurs d'ordre réduit qui s'appliquant sur des systèmes à événement discrets .

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

— Dans le premier chapitre, nous présentons un ensemble de définitions, de notations et de résultats relatifs à l'algèbre $(max, +)$, également appelée algèbre des dioïdes. Une partie du chapitre est consacrée à la théorie de la résiduation, laquelle propose des solutions alternatives au problème d'inversion d'applications ainsi que l'étoile de kleene est présentée .

— Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des RdP et plus particulièrement une de ses sous classes, à savoir les GET qui modélisent des phénomènes de synchronisation, qui nous permet d'obtenir une représentation d'état linéaire a partir de ça mise en équations . Une part importante de ce deuxième chapitre est ensuite consacrée à la présentation du dioïde $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$, qui sera le dioïde considéré pour toutes les illustrations présentées dans ce mémoire . Cette dérnier structure permet de représenter le GET par leur fonction de transfert.

— Le troisième chapitre traite la synthèse d'un observateur d'ordre réduit dans l'agébre $(max, +)$. Nous commençons par donner quelque définitions nécessaires pour l'étude des observateurs dans le domaine des systèmes à événement discrets (SED), et puis par rappeler des résultats se rapportant à l'observation et à la synthèse d'observateurs standards d'ordre plein (voir [16, 18, 15]), Ainsi, nous nous intéresserons a la synthèse d'observateurs d'ordre réduit, où nous proposons d'éliminer la partie mesurée du vecteur d'état et d'estimée seulement les états non mesurées . Et nous terminons le chapitre en ajoutons une pérturbation à notre systéme.

Une annexe présente les scripts Scilab qui ont permis de calculer les exemples proposés tout au long du mémoire. Il s'agit de scripts utilisant la boîte à outils $MinMaxGD$.

Chapitre 1

Outils algébriques

1.1 Introduction

Ce premier chapitre a pour objectif d'expliciter les outils algébriques utilisés dans ce mémoire , ainsi que les possibilités de résolution des équations du type $f(x) = b$ et $x = ax \oplus b$. Sans être exhaustif, nous présentons,tout d'abord un ensemble de définitions, de notations et résultats relatifs à l'algèbre des dioïdes . Nous débutons cette partie par les définitions des dioïdes Max-Plus et Min-plus, ensuite nous nous intéressons à la structure ordonnée dans un dioïde , la deuxième partie est consacrée à la théorie de la résiduation qui est une alternative au problème d'inversion d'applications définies sur des dioïdes . pour des exposées plus complets,on renvoie le lecteur aux ouvrages [1],[3] et à la thése de S.Gaubert (voir[2]).

1.2 Algébre des dioïdes

Cette section a pour but de présenter d'une maniére informelle quelque définitions et théorie nécessaire a l'utilisation de la structure algébrique d'un dioïde ou encore d'un semi anneau idempotent appliqué a l'étude des systémes a événement discret .

1.2.1 Rappels algébrique

Définition 1.1 (Dioïde) On appelle un dioïde (ou semi-anneau idempotent) un ensemble D muni de deux lois internes , l'une notée additivement $\oplus$, et l'autre notée multiplicativement $\otimes$ telles que $\forall$ a , b , c $\in$ D :

— la loi $\oplus$ est associative : (a $\oplus$ b)$\oplus$ c = a $\oplus$(b $\oplus$ c) = a $\oplus$ b $\oplus$ c ,
— la loi $\oplus$ est Commutative : a $\oplus$ b = b $\oplus$ a ,
— la loi $\oplus$ est idempotente : a $\oplus$ a = a ,
— la loi $\oplus$ admet un eléments neutres noté "ε" est appelé zéro : a $\oplus$ ε = ε $\oplus$ a = a ,
— la loi $\otimes$ est associative : (a $\otimes$ b)$\otimes$ c = a $\otimes$ (b $\otimes$ c) = a $\otimes$ b $\otimes$ c,

— la loi $\otimes$ est distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition : a $\otimes$ (b $\oplus$ c) = (a $\otimes$ b)$\oplus$ (a $\otimes$ c) et (b $\oplus$ c)$\otimes$a = (b $\otimes$ a) $\oplus$ (c $\otimes$ a),

— la loi $\otimes$ admet un élément neutre noté "e" et appelé identité : a $\otimes$ e = e $\otimes$ a = a ,

— l'élément "ε" est absorbant pour la multiplication : $\varepsilon \otimes$ a = a $\otimes\, \varepsilon = \varepsilon$,

On dit q'un semi-anneau idempotent est commutatif si la loi multiplicative $\otimes$ est commutatif, soit lorsque a $\otimes$ b = b $\otimes$ a .

Exemple1.1.(Algébre (max,+)) L'ensemble (R$\bigcup\{-\infty,+\infty\}$,max,+) muni de l'opérateur max,+ est un dioïde commutatif pour lequel $\varepsilon = -\infty$ et e = 0 . Ce dioïde noté $\mathbb{R}_{max}$ est appelé l'algèbre (max,+) où la loi additive $\oplus$ correspond à l'opération maximum 6 $\oplus\, \varepsilon$ = 6 $\Leftrightarrow$ max(6, ε) = 6 , et la loi multiplicative $\otimes$ est équivalente à la somme usuelle 2 $\otimes$ 3 = 5 $\Leftrightarrow$ 2 + 3 = 5 .

• **Application :** On s'intéresse au temps de production des bicyclettes 1.1 , ce temps est donné par le temps maximal entre le temps de fabrication de deux roue et le temps de production de cadre , On suppose que le temps de fabrication de deux roue est de 6 unités de temps , et le temps de production de cadre est de 3 unité de temps . Alors le temps de production d'une bicyclette et de (6 $\oplus$ 3) = 6 ce qui est équivalent dans l'algébre usuelle au max (6,3) = 6 .

Exemple1.2.(Algébre (min,+)) L'ensemble (R$\bigcup\{-\infty,+\infty\}$,min,+) muni de l'opérateur min,+ est un dioïde commutatif pour lequel $\varepsilon = +\infty$ et e = 0 . Ce dioïde noté Rmin est appelé l'algèbre (min,+) où la loi additive $\oplus$ correspond à l'opération minimum 6 $\oplus$ 3 = 3 $\Leftrightarrow$ min(6,3) = 3 , et la loi multiplicative $\otimes$ est équivalente à la somme usuelle 2 $\otimes$ 3 = 5 $\Leftrightarrow$ 2 + 3 = 5 .

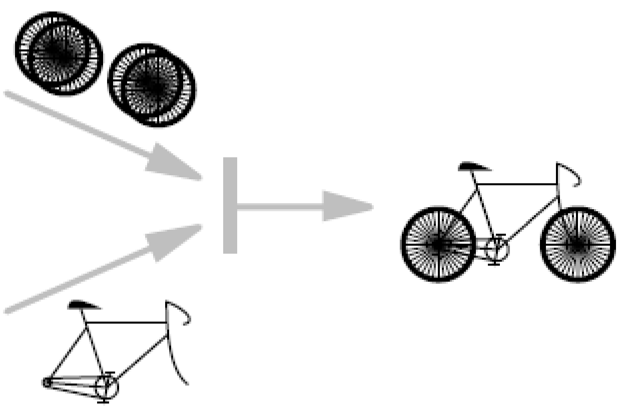


FIGURE 1.1 – Assemblage de bicyclettes

• **Application :** On prend toujour l'exemple de bicyclettes est on s'intérsse maintenant a la production des bicyclette on peut dire qu'une bicyclette est la "somme" d'une paire de roues et d'un cadre. Cette nouvelle "somme", notée $\oplus$ pour la distinguer du + habituel , correspond à l'opération d'assemblage . On notera que l'on se permet alors d'ajouter des grandeurs qui ne s'expriment pas dans les mêmes unités. Si on a 2 roues et 1 cadre, on ne peut fabriquer qu'une seule bicyclette, donc $1 \oplus 2 = 1$, ce qui est équivalent dans l'algèbre usuelle au min(2,1) = 1.

1.2.2 propriétes des dioïdes

1.2.2.1 Dioïde complet

Définition 1.2 (Dioïde complet) Un dioïde est dit complet s'il est férmée pour tout sommes infines de ces élements , et si la loi $\otimes$est distrubutive par rapport à ces sommes infinies c'est -à-dire si pour tout a $\in$ D et tout sous-ensemble $A \subseteq D$ les propréite suivant sont vérifiers : a $\otimes(\bigoplus_{b\in A} b) = \bigoplus_{b\in A}(a \otimes b)$ et $(\bigoplus_{b\in A} b) \otimes a = \bigoplus_{b\in A}(b \otimes a)$

$$a \otimes \left(\bigoplus b\right)_{b\in B} = \bigoplus_{b\in B} (a \otimes b)$$

$$\left(\bigoplus b_{b\in B}\right) \otimes a = \bigoplus_{b\in B} (b \otimes a)$$

Un dioïde complet admet un élément maximum $\bigoplus_{a\in D} a$, que l'on notera T . Il est absorbant pour l'addition , autrement dit, $\forall$ a $\in$ D, T $\oplus$ a = T.

Notons que d'après la définition d'un dioïde, l'élément zéro ε est absorbant pour la multiplication pour tout élément de D, aussi, on a : T $\otimes$ ε = ε $\otimes$ T = ε .

1.2.2.2 Dioïde de séries formelles

Soit $(D, \oplus, \otimes)$. un dioïde, on définit une série formelle en q variables, notées p_1 à p_q, à coefficients dans D comme une application $\prod$ de Z^qdans D :$\forall_k = (k_1, ..., k_q) \in Z^q, \prod(k)$ représente le coefficient de $p_1^{k1}....p_q^{k_q}$. Une autre représentation équivalente de la série$\prod$ est :

$\prod = \bigoplus_{k\in Z^q} \prod(k_{1,....,k_p}) p_1^{k_1}...p_q^{k_q}$.

L'ensemble des séries formelles muni des opérations :

$\prod \oplus \Psi : (\prod \oplus \Psi)(k) = \prod(k) \oplus \Psi(k)$,

$\prod \oplus \Psi : (\prod \oplus \Psi)(k) = \bigoplus_{i+j=k} \prod(i) \oplus \Psi(j)$,

est un dioïde noté$D\,[\![p_1, ..., p_q]\!]$.

On appelle support de la série formelle $\prod$ l'ensemble :

$Supp(\prod) = \kappa \in Z^q | \prod(\kappa) 6 \neq \varepsilon$.

Une série formelle à support fini est appelée polynôme. Une série formelle dont le support est un singleton (de Z^q) est appelée monôme.

1.2.2.3 Dioïde matricielle

Un dioïde matriciel ($D^{n\times n}, \oplus, \otimes$)est l'ensemble des matrices d'ordre n à coefficients dans le dioïde($D, \oplus, \otimes$). la somme et le produit de deux matrices ou d'une matrice sont définies par :

pour A , B $\in D^{n\times n}$et pour $A \epsilon D$:

$A \oplus B : (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}, \forall i, j = 1, ..., n, ,$

$A \otimes B : (A \otimes B)_{ij} = \oplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes B_{kj} \ \forall i, j = 1, ..., n.$

L'élément identité de D$^{n\times n}$ est la matrice , notées Id$_n$,composée de e sur la diagonale de ε partout ailleurs. L'élément zéro est la matrice composée exclusivement de ε.

la somme et le produit de deux matrices de dimensions compatibles , pas nécessairement caréées, peuvent être définis de la façon suivante :

— $A\in D^{n\times p}, B\in D^{n\times p}$;

$A \oplus B : (A \oplus B)A_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}, \ \forall i = 1, ..., n, \forall j = 1, ..., p,$

— $C\in D_{n\times p}, D\in D_{p\times q}$;

$C \otimes D : (C \otimes D)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{p} A_{ik} \otimes B_{kj}. \ \forall i = 1, ..., n, \forall j = 1, ..., q.$

Exemple 1.3 : soit A et B $\in D^{2\times 2}$ deux matrices dans l'algébre (max,+) tel que :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \ ; \ B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Ona :

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} max(4,2) & max(5,7) \\ max(3,6) & max(7,5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

ET :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} max(4+2, 5+6) & max(4+7, 5+5) \\ max(3+2, 7+6) & max(3+7, 7+5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 11 \\ 13 & 12 \end{bmatrix}$$

Exemple 1.4 : soit A et B $\in D^{2\times 2}$ deux matrices dans l'algébre (min,+) tel que :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \ ; \ B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Ona :

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} min(4,2) & min(5,7) \\ min(3,6) & min(7,5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

ET :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} min(4+2, 5+6) & min(4+7, 5+5) \\ min(3+2, 7+6) & min(3+7, 7+5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

1.2.2.4 Structure ordonnée dans un dioïde

Pour un dioïde D donné, la propriété d'idempotence de la loi additive $\oplus$ induit une relation d'ordre , notée $\preceq$, définie par :

$$\forall (a,b) \in D^2, a \preceq b \Leftrightarrow a \oplus b = b.$$

Cette relation d'ordre est compatible avec les lois $\oplus$ et $\otimes$, c'est-à-dire,

$$\forall (a,b,c) \in D^3, a \preceq b \Rightarrow a \oplus c \preceq b \oplus c.$$

$$a \preceq b \Rightarrow a \otimes c \preceq b \otimes c.$$

Exemple 1.5 : Les dioïdes ($\mathbb{R} \bigcup \{-\infty,+\infty\}$,min,+) et ($\mathbb{R} \bigcup \{-\infty,+\infty\}$,max,+) sont des dioïdes complets. La relation $\preceq$, associée à l'application min (respectivement l'application max) est une relation d'ordre qui correspond à l'inverse de l'ordre usuel $\geq$,

$$a \preceq b \Leftrightarrow min(a,b) = b$$

(respectivement à l'ordre usuel $\leq$, $a \preceq b \Leftrightarrow max(a,b) = b$.

.

Définition 1.3 (Isotonie). Une application f d'un dioïdes $(D, \oplus, \otimes)$ dans un dioïdes $(C, \oplus, \otimes)$ est dite isotonie si $\forall a, b \in D, a \preceq b \Rightarrow f(a) \preceq f(b)$.

Définition 1.4 (Antitone). Une application f d'un dioïdes $(D, \oplus, \otimes)$ dans un dioïdes $(C, \oplus, \otimes)$ est dite antitone si $\forall a, b \in D, a \preceq b \Rightarrow f(a) \succeq f(b)$.

Définition 1.5 (Continuité). $(A, \oplus, \otimes)$ et $(B, \oplus, \otimes)$ deux dioïdes complets , une application f de A dans B .

- f est semi-continue inférieurement (s.c.i) si pour tout sous-ensemble $C \subset A$, $f(\bigoplus_{x \in C} x) = \bigoplus_{x \in C} f(x)$
- f est semi-continue supérieurement (s.c.s) si pour tout sous-ensemble $C \subset A$, $f(\bigwedge_{x \in C} x) = \bigwedge_{x \in C} f(x)$
- f est dite continue si elle à la fois (s.c.i) et (s.c.s) .

Remarque 1.1. Une application (s.c.i) est nécessairement isotone puisque :

$$a \succeq b \Leftrightarrow a = a \oplus b \Rightarrow f(a) = f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b) \succeq f(b) \Leftrightarrow f(a) \succeq f(b)$$

Une application (s.c.i) est nécessairement isotone puisque :

$$a \succeq b \Leftrightarrow b = a \wedge b \Rightarrow f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \preceq f(b) \Leftrightarrow f(a) \preceq f(b)$$

1.2.3 Résolution d'équations dans les dioïdes

1.2.3.1 L'équation $x = ax \oplus b$ dans les dioïdes complets

Certaines équations définies dans des dioïdes complets admettent des solutions particulières extrêmes, des solutions plus petite ou plus grande que toutes autre solution. Des résultats généraux relatif à la résolution des équations sur des dioïdes complets sont fournis dans Baccelli (voir [1]). Nous rappelons ici le résultat concernant la résolution de l'équation implicite $x = ax \oplus b$ et x qu'on va utiliser par la suite.

Déffinition 1.6 (étoile de Kleene) : Dans un dioïde complet D, l'application étoile de Kleene définie sur D, noté a, est définie comme suit :$a^* = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} a^k$ avec $a^0 = e$.

l'étoile de Kleene d'une matrice carrée $A \in D^{n \times n}$, notée A^*, est définie par :

$$A^* = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} A^k$$

avec : $A_0 = I_n$ et I_n designe la matrice identité.

L'opérateur « + », qui dérive de l'étoile est défini par :

$$a^+ = a^* a$$

On a de plus la relation : $e \oplus a^+ = a^*$.

Théoreme 1 Dans un dioïde complet, la quantité $(a^* b)$ est la plus petite solution de l'équation $x = ax \oplus b$ et de l'inéquation $x \succeq ax \oplus b$.

Exemple 1. 7

On considère l'équation suivante qui est définie sur le dioïde $\mathbb{R}_{max}$:

$$x = Ax \oplus B$$

tel que :

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e \\ 2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

D'après le théorème 1, cette équation admet une solution qui est $A^* B$.

L'étoile de Kleene de la matrice A est donnée comme suit :

$$A^* = I \oplus A \oplus A^2$$

ou :

$$I = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

calcule de A^* :

$$A^* = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 2 & 1 \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

La plus petite solution de l'équation est le vecteur suivant :

$$x = A^*B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

propriétés :quelque propriétés de l'étoile de Kleene
Soit D un dioïde complet, $\forall a, b \in D$. On a :

$$a^+ \preceq a^* \tag{1.1}$$

$$(a^*)^* = a^* \tag{1.2}$$

$$(a^+)^* = (a^*)^+ = a^* \tag{1.3}$$

$$a(ba)^* = (ab)^*a \tag{1.4}$$

$$(a \oplus b)^* = (a^*b)^*a^* = a^*(ba^*)^* = b^*(ab^*)^* = (b^*a)^*b \tag{1.5}$$

$$a^*a^* = a^* \tag{1.6}$$

$$(a^*)^*a = a^+ \tag{1.7}$$

$$(a^+)^+ = a^+ \tag{1.8}$$

$$(ab^*)^+ = a(a \oplus b)^* \quad (1.9)$$

$$(ab^*)^* = e \oplus a(a \oplus b)^* \quad (1.10)$$

$$a^* \preceq b^* \Rightarrow a \preceq b \quad (1.11)$$

1.2.3.2 Théorie de la résiduation dans un dioïde

Dans ce rapport, nous sommes amenés à résoudre des équations de la forme $f(x) = b$ qui sont définies sur un dioïde. Les lois $\oplus$ et $\otimes$ n'étant pas inversibles, en particulier pour les applications matricielles, il n'est donc pas possible, en général, d'inverser les applications définies sous forme analytique dans un dioïde. La théorie de la résiduation permet néanmoins de définir des pseudo inverses pour certaines de ces applications et, par conséquent, permet de déterminer la plus petite solution de l'inéquation $f(x) \succeq b$ et la plus grande solution de l'inéquation $f(x) \preceq b$.

Résolution des équations $ax \preceq b$ et $xa \preceq b$:

Soit L_a et R_a, respectivement appelées produit à gauche et produit à droite, les applications suivantes définies sur des dioïde complet D comme suit :

$$L_a : x \to a \otimes x$$

$$R_a : x \to x \otimes a$$

Le fait que le dioïde D soit complet , le produit distribue à gauche comme à droite sont semi-continues inférieurement . De plus , ε est absorbant pour le produit , ainsi $L_a(\varepsilon) = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$ et $R_a(\varepsilon) = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$. Autrement dit , $L_a$et R_a sont isotones donc résiduables , et leurs applications résiduées sont notées :

$$L_a^{\#} : x \to a \backslash\!\!\!\circ\, x$$

$$R_a^{\#} : x \to x \phi a$$

Ainsi , $L_a^{\#}(b) = a \backslash\!\!\!\circ\, b$ et $R_a^{\#}(b) = b \phi a$ sont les plus grandes solutions des inégalités $ax \preceq b$

et $xa \preceq b$

Donc :

$$ax \preceq b \Leftrightarrow x \preceq a \circ\!\!\!\backslash b$$

$$xa \preceq b \Leftrightarrow x \preceq b \oslash a$$

Remarque 1.2 : Lorsque D est commutatif, $L_a = R_a$ Cela implique donc également que $L_a^{\#} = R_a^{\#}$.

La Résiduation posséde certaines propriétés dont les plus courantes son données comme suit :

Propriétés de $L_a^{\#}$:

$$a \circ\!\!\!\backslash T = T \tag{1.12}$$

$$a(a \circ\!\!\!\backslash x) \preceq x \tag{1.13}$$

$$a \circ\!\!\!\backslash (ax) \succeq x \tag{1.14}$$

$$a \circ\!\!\!\backslash a = (a \circ\!\!\!\backslash a)^* \tag{1.15}$$

$$a(a \circ\!\!\!\backslash (ax)) = ax \tag{1.16}$$

$$a(a \circ\!\!\!\backslash (a \circ\!\!\!\backslash x)) = a \circ\!\!\!\backslash x \tag{1.17}$$

$$a \circ\!\!\!\backslash (x \oplus y) \succeq (a \circ\!\!\!\backslash x) \oplus (a \circ\!\!\!\backslash y) \tag{1.18}$$

$$a \circ\!\!\!\backslash (x \wedge y) \succeq (a \circ\!\!\!\backslash x) \wedge (a \circ\!\!\!\backslash y) \tag{1.19}$$

$$(a \wedge b) \circ\!\!\!\backslash x \succeq (a \circ\!\!\!\backslash x) \oplus (b \circ\!\!\!\backslash x) \tag{1.20}$$

$$(a \oplus b) \circ\!\!\!\backslash x = a \circ\!\!\!\backslash x \wedge b \circ\!\!\!\backslash x \tag{1.21}$$

$$(ab) \circ\!\!\!\backslash x = b \circ\!\!\!\backslash (a \circ\!\!\!\backslash x) \tag{1.22}$$

$$b\circ\!\!\!\backslash a\circ\!\!\!\backslash x = (ab)\circ\!\!\!\backslash x \tag{1.23}$$

$$(a\circ\!\!\!\backslash x)b \preceq a\circ\!\!\!\backslash(xb) \tag{1.24}$$

$$b(a\circ\!\!\!\backslash x) \preceq (a\circ\!\!\!\backslash b)\circ\!\!\!\backslash x \tag{1.25}$$

$$a^*\circ\!\!\!\backslash(a^*x) = a^*x \tag{1.26}$$

Propriétés de $R_a^{\#}$:

$$T\phi a = T \tag{1.27}$$

$$(x\phi a)a \preceq x \tag{1.28}$$

$$(xa)\phi a \succeq x \tag{1.29}$$

$$a\phi a = (a\phi a)^* \tag{1.30}$$

$$((xa)\phi a)a = xa \tag{1.31}$$

$$((x\phi a)a)\phi a = x\phi a \tag{1.32}$$

$$(x \oplus y)\phi a \succeq (x\phi a) \oplus (y\phi a) \tag{1.33}$$

$$(x \wedge y)\phi a \succeq x\phi a \wedge y\phi a \tag{1.34}$$

$$x\phi(a \wedge b) \succeq (x\phi a) \oplus (x\phi b) \tag{1.35}$$

$$x\phi(a \oplus b) = x\phi a \wedge x\phi b \tag{1.36}$$

$$x\phi(ba) = (x\phi a)\phi b \tag{1.37}$$

$$x\phi a\phi b = x\phi(ba) \tag{1.38}$$

$$b(x \phi a) \preceq (bx) \phi a \tag{1.39}$$

$$(x \phi a) b \preceq x \phi (b \phi a) \tag{1.40}$$

$$(a^* x) \phi a^* = a^* x \tag{1.41}$$

le lecteur pourra trouver les preuves dans [1],[4]et[2]

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté le cadre mathématique utile aux différentes approches d'étude des SED qui seront utilisés par la suite. Il s'agit d'un bref rappel sur la structure algébrique des dioïdes la structure ordonnée a été présentée , Dans la dernière partie de ce chapitre, nous avons donné un ensemble de définitions sur la théorie de la résiduation .Cette théorie permet de donner une alternative à la notion d'inverse pour les applications définies sur des ensembles ordonnés. Dans le chapitre suivant , On s'intéresse à la modélisation de graphes d'événements temporisés qui est une classe des Réseaux de Petri dans l'algébre des dioïdes.

Chapitre 2

Modélisation des GET dans les dioïdes

2.1 Introduction

L'étude des systèmes à événements discrets (SED) constitue, depuis bientôt 40 ans, un domaine de recherche très actif ayant donné lieu à de nombreuses publications. De cette littérature se dégagent de multiples classes de systèmes mettant en jeu des phénomènes de natures différentes : parallélisme, saturation, synchronisation, exclusion mutuelle , choix , séquencement .... , et autant de modèles mathématiques.

La classe des systèmes à événements discrets que nous étudions ici est celle qui met en jeu des phénomènes de synchronisation et de parallélisme.Ceux-ci se rencontre régulièrement dans les systèmes de production ,les systèmes de transport et les systéme d'informatique .

Ce deuxième chapitre est consacrée à la modélisation de systèmes à événements discrets par Réseaux de Petri (RdP) ils sont largement utilisés et permettent de modéliser, d'évaluer voire de piloter des systèmes dynamiques (voir[13],[7]). Ensuite on s'intéresse dans ce survol à la modélisation de graphes d'événements temporisés une sous-classe des RdP ,On présente deux mises en équations des GET qui conduisent toutes deux à des modèles linéaires mais dans des dioïdes différents. La suite est dédiée à la modélisation des GET sous forme d'état dans les dioïdes. Les références qui ont servi à sa rédaction sont Baccelli et Cohen (voir[8],[1]). Ce chapitre se termine par l'introduction de la transformées en γ et δ qui jouent un rôle analogue à la transformée en $\mathbb{Z}$ des signaux discrets dans l'algèbre conventionnelle , l'intérêt réside dans le fait que l'on peut alors représenter ces systèmes par leur fonction de transfert . Pour une représentation plus détaillée, le lecteur est invité à consulter l'ouvrage de Cohen et al (voir[12]et[8]).

2.2 Réseaux de Petri (RDP)

Un réseaux de Petri (RdP) est un modèle graphiques permettant de modéliser et de vérifier le comportement dynamique des systèmes à événements discretsservant , ils sont apparus en 1962, dans la thèse de doctorat de Carl Adam Petri (voir [14]).Ils constituent un outil riche en termes de propriétés et de résultats analytiques. Par rapport à d'autres modèles, leur principal avantage est de proposer une modélisation graphique simple et qui permet de plus l'utilisation d'une algèbre mathématique (algèbre linéaire usuelle ou algèbre des dioïdes) pour l'analyse du système étudié, ces modeles ont fait l'objet de trés nombreux travaux de recherche ces 40 derniéres années.

2.2.1 Définitions (Réseaux de Petri)

Un réseau de Petri est un graphe biparti constitué de deux types de sommets . les places (représentées par des cercles) et les transitions (représentées par des barres).Les arcs orientés relient les transitions aux places et les places aux transitions, mais deux sommets d'un même type ne peuvent être directement reliés. Chaque place, peut contenir un ou plusieurs jetons (représentés par des points) qui modélisent la dynamique du système.

D'une façon plus formelle, un RdP est un quadruplet $R =< P,\ X,\ Pre, Post>$ où :

$P = \{P_1, P_2, \ldots, Pn\}$ est un ensemble fini, non vide de places ;

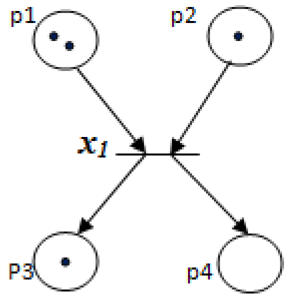
$X = \{x_1, x_2, \ldots, xn\}$ est un ensemble fini, non vide de transitions ;

$Pre : P{\times}X \rightarrow IN$ est l'application places précédentes ;

$Post : P{\times}X \rightarrow IN$ est l'application places suivantes ;

Le marquage du réseau est une fonction $M : P \longrightarrow \mathbb{N}$. $M(P_i)$ qui signifie le nombre de marques (ou jetons) contenus dans la place P_i représentant généralement des ressources disponibles.

Marquage : Chaque place contient un nombre entier positif ou nul de marques ou jetons. Le marquage M définit l'état du système décrit par le réseau à un instant donné. C'est un vecteur colonne de dimension le nombre de places dans le réseau. Le i éme élément du vecteur correspond au nombre de jetons contenus dans la place Pi. Par exemple :



$$M = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

FIGURE 2.1 – Représentation de marquage d'un RDP

Les entrées d'une transition sont les places des quelles part une flèche pointée vers cette transition, et les sorties d'une transition sont les places pointées par une flèche ayant pour origine cette transition.

Un réseau de petri évolue lorsqu'on exécute une transition : des jetons sont pris dans les places d'entrée de cette transition et envoyés dans les places de sortie de cette transition suivant certaines règles.Le tir ou le franchissement d'une transition est une opération indivisible qui est déterminée par la présence de jetons dans les places d'entrée.

Une transition est franchissable si et seulement si $\forall P_j \in P : M(Pj) \succeq Pre(P_j, Xi)$. Apres le tir de la transition , le marquage M obtenu est défini par :

$$\forall P_j \in P : M(Pj) = M(P_j) - Pre(Pj, Xi) + Post(Pj, Xi)$$

Le franchissement consiste a retiré un nombre des jeton de chacune des places d'entrée et à rajouter un nombre des jeton à chacune des places de sortie de la même transition.

Exemple 2.1 : Franchissement d'une transition .

Le franchissement de x_1 consiste à enlever un jeton de P_1 et un jeton de P_2 et à rajouter un jeton dans P_3 et un jeton dans P_4 .comme la montre la figure 2.2

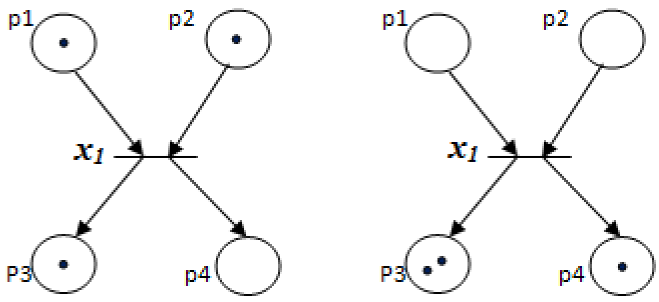


FIGURE 2.2 – Avant et Après franchissemen

2.2.2 Quelques propriétés des RdP

Définitions 2.1 (vivacité) :

Un RDP est vivant si quelque soit le marquage atteint depuis M_0, il est toujours possible de tirer n'importe quelle transition en suivant une séquence de tirs donnée . Autrement dit, un *RdP* vivant garantit qu'il n'y aura pas de blocage, quelque soit la séquence de tirs choisie.

Un RdP est dit vivant si toutes ses transitions sont vivante.

Définitions 2.2 (blocage) :

un marquage atteignable M d'un RdP marqué M_0 est une situation de bloquage tel qu'aucune transition n'est validée à partir de ce marquage.

Un réseau de Petri est dit sans blocage pour un marquage initial M_0 si aucun marquage accessible n'est un blocage.

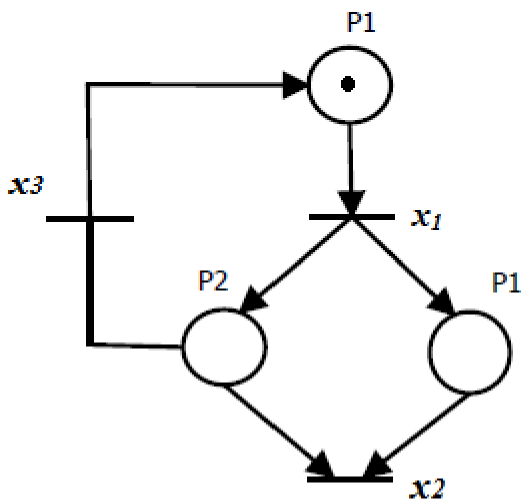


FIGURE 2.3 – Représentation d'un RDP

Définitions 2.3 (Bornitude) :

Une place P_i est dite bornée pour un marquage initial M_0 si pour tout marquage accessible à partir de M_0. le nombre de marquage dans P_i est fini.

Un *RdP* est dit borné si toutes ses place sont bornées .

2.3 Graphes d'événements temporisés

Suite à cette présentation des réseaux de Petri, notre intérêt va maintenant se porter sur une sous-classe des réseaux de Petri : les graphes d'événements. On peut définir formellement les graphes d'événements à partir des réseaux de Petri.

Définition 2.4 (Graphe d'événements) :

Un graphe d'événements (GE) est une classe des RdP pour laquelle :

(i) chaque place a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie ;

(ii) tous les arcs orientés place-transition ou transition-place sont pondérés à 1.

Dans le cas où on associe aux places (resp. aux transitions du modèle) des entiers, appelés par la suite temporisations, le graphe d'événements sera appelé graphe d'événements P-temporisés (resp. T-temporisés). Dans notre étude, nous allons nous intéresser à la classe graphe d'événements P-temporisés que nous appelons tout simplement graphes d'événements temporisés (GET) .

Définition 2.5 (Graphe d'événements temporisé) :

Un graphe d'événements temporisé (GET) est un RdP tel que toute place a exactement une transition en amont et une transition en aval dont le fonctionnement dépend du temps . Cette structure permet de modéliser la synchronisation .Dans le cadre de la modélisation des systèmes à événements discrets, nous considérerons qu'une transition d'un GET correspond à un événement et que le tir de celle-ci est une occurrence de cet événement.

Dans le cadre de la modélisation des GET , nous proposons l'exemple suivant .

Exemple 2.2 . (Atelier de coupe de bois)

Le graphe d'événements temporisé de la figure 2.4 modélise une machine de coupe de bois. Quand une pièce arrive, elle est traitée (découpée) pour autant qu'une ressource machine soit disponible.

Le nombre de jetons dans une place s'interprète comme le nombre de ressources disponibles. Par exemple, le nombre de jetons dans la place p_1, ici zéro , correspond au nombre de pièces initialement en attente d'être traitées par la machine de coupe, c.-à-d. le nombre de "ressources" qui vont être consommées. la présence de trois piéces dans la place p_2 signifie que cette machine peut traiter trois pièces simultanément et indépendamment,

Le nombre de jetons dans la place p_3 indique le nombre de pièces qui est entrain d'étre traité par la machine de coup de bois . Le temps associé à la place p_3 indique la durée du traitement, à savoir 2 u.t.

Le début de la coupe par la machine se traduit par la présence d'un jeton dans la place p_3, le coupe d'une piéce prend au moins 2 unité de temps. finalement la pièce coupé est déposée dans un stock aval p_4 qui va aller directe vers la sortie du système et la machine redevient disponible et le jeton revient dans la place p_2 .

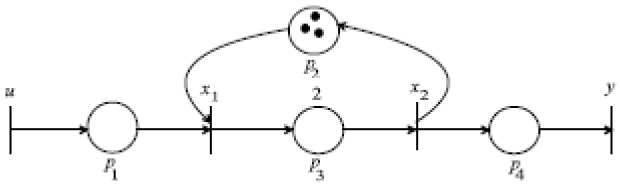


FIGURE 2.4 – Modéle GET d'une atelier de bois

2.4 Représentation des graphes d'événements temporisés dans les différents dioïde

Les SED modélisée par des GET, bénéficient d'un modèle d'état linéaire. La représentation d'état permet une description interne d'un processus. Plus précisément, le système va être caractérisé par un ensemble de variables internes au système appelées variables d'état. Le modèle d'état est obtenu en établissant des équations liant les variables d'état les unes aux autres. C'est-à-dire un modéle sous forme :

$$\begin{cases} x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (2.1)$$

2.4.1 Représentation dateur et compteur

2.4.1.1 Dateurs, domaine évènementiel

la représentation en dateurs amène à manipuler des variables discrètes qui correspondent aux dates d'activation des transitions du GET. Plus précisément, on associe à l'événement x la variable discrète $x(.)$ pour laquelle l'itéré $x(k)$ désigne la date de la $k+1^{ème}$ occurrence de l'événement (en effet, on considère que la date de la première occurrence de x est $x(0)$). Il est ensuite possible d'exprimer les variables dateurs les unes en fonction des autres.

Dans le cadre de la représentation de l'équation en dateurs nous considérerons que les transition d'un GET correspond à un événement et que le tir de celle-ci est une occurrence de cet événement. Dans la figure2.4, il est clair que la transition x_1 exprime la synchronisation des événements x_2 et u . Les places temporisés qui induisent un temps minimum de séjour pour les jetons, ont pour rôle de traduire une tâche qui possède une durée. Les jetons qui sont initialement présents dans le système induisent un décalage. Par exemple, le tir numéro k de la transition x_1 sera engendré par le tir numéro k de la transition u et l'activation numéro $k-3$ de x_2.

De cette facon l'expression résultante est la suivante :

$$\begin{cases} x_1(k) \geq max\,\{u(k), x_2(k-3)\} \\ x_2(k) \geq max\,\{x_1(k)+2\} \\ y(k) \geq max\,\{x_2(k)\} \end{cases} \tag{2.2}$$

En utilisant les notations des dioïdes,nous traduisons ensuite le système 2.2 sous forme d'un système d'équations (max, plus) linéaires stationnaires, donc la solution au plus tôt est donné comme suit :

$$\begin{cases} x_1(k) = e \otimes u(k) \oplus e \otimes x_2(k-3) \\ x_2(k) = 2 \otimes x_1(k) \\ y(k) = e \otimes x_2(k) \end{cases} \tag{2.3}$$

La représentation matricielle du système 2.3 est alors donnée sous forme de l'équation implicite 2.4.

$$x(k) = A_0 \otimes x(k) \oplus A_1 \otimes x(k-1) \oplus A_2 \otimes x(k-2) \oplus A_3 \otimes x(k-3) \oplus B \otimes u(k) \tag{2.4}$$

Avec :

$$A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

Il en résulte la forme implicite suivante :

$$x(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon \end{bmatrix} x(k) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} x(k-1) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} x(k-2) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} x(k-3) \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon & e \end{bmatrix} x(k)$$

L'équation implicite 2.4 peut être transformée en une équation de récurrence explicite en calculant l'étoile de Kleene A_0^*. La plus petite solution de 2.4 est alors donnée sous forme de l'équation récurrente 2.5 :

$$x(k) = A_0^* A_1 x(k-1) \oplus A_0^* A_2 x(k-2) \oplus A_0^* A_3 x(k-3) \oplus A_0^* B u(k) \qquad (2.5)$$

Avec :

$$A_0^* = I \oplus A_0 \oplus A_0^2 \oplus A_0^3$$

Ou I est une matrice identité :

$$I = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

Calcule de A_0^* :

$$A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A_0^2 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A_0^* = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ 2 & e \end{bmatrix}$$

$$A_0^* A_1 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ 2 & e \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A_0^* A_2 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ 2 & e \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A_0^* A_3 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ 2 & e \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & e \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_0^* B = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ 2 & e \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ 2 \end{bmatrix}$$

— **L'équation explicite est :**

$$x(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon & e \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix} x(k-3) \oplus \begin{bmatrix} e \\ 2 \end{bmatrix} u(k)$$

— **Mise sous forme d'état :**

Pour avoir une représentation d'état sous la forme :

$$\begin{cases} x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \qquad (2.6)$$

Il faut transformer le graphe afin que :

– le marquage d'une place située entre deux transitions internes soit égal à un ;

– le marquage d'une place située entre une transition source ou puits et une transition interne soit nul.

Donc on va étendu le graphe d'évenment temporisés de la $figure$ 2.4 pour un nouveau graphe équivalent et On obtient la $figure$ 2.5 :

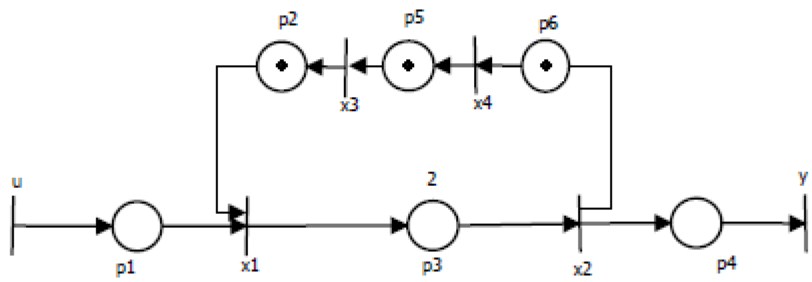


Figure 2.5 – Extension évémentielle

On aura donc :

$$\begin{cases} x_1(k) = x_3(k-1) \oplus u(k) \\ x_2(k) = x_1(k) \otimes 2 = x_3(k-1) \otimes 2 \oplus u(k) \otimes 2 \\ x_3(k) = x_4(k-1) \\ x_4(k) = x_2(k-1) \end{cases}$$

Le modéle d'état correspond à ce graphe d'évenment temporisé étendu est :

$$x(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} x(k-1) \oplus \begin{bmatrix} e \\ 2 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

2.4.1.2 compteur, domaine temporel

Dans la représentation en compteur, on ne s'intéresse plus aux dates d'activation des transitions mais au nombre d'activations de ces dernières jusqu'à un moment donné. En effet, cette représentation consiste à associer à chaque transition une variable discrète $x(.)$. Le compteur $x(t)$ désigne le nombre d'activations de la transition x survenues avant ou à la date t.

On peut mettre en équation le GET de la$figure$ 2.4comme suite :

$$\begin{cases} x_1(t) \leq min\{u(t), x_2(t)+3\} \\ x_2(t) \leq min\{x_1(t-2)\} \\ y(t) \leq min\{x_2(t)\} \end{cases} \tag{2.7}$$

En utilisant les notations des dioïdes,nous traduisons ensuite le système 2.7 sous forme d'un système d'équations $(min, plus)$ linéaires stationnaires. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{cases} x_1(t) = e \otimes u(t) \oplus 3 \otimes x_2(t) \\ x_2(t) = e \otimes x_1(t-2) \\ y(t) = e \otimes x_2(t) \end{cases} \tag{2.8}$$

La représentation matricielle du système 2.8 est alors donnée sous forme de l'équation implicite 2.9.

$$x(t) = A_0 \otimes x(t) \oplus A_1 \otimes x(t-1) \oplus A_2 \otimes x(t-2) \oplus B \otimes u(t) \tag{2.9}$$

Avec :

$$A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

Il en résulte la forme implicite suivante :

$$x(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} x(t) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} x(t-1) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon \end{bmatrix} x(t-2) \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon & e \end{bmatrix} x(t)$$

L'équation implicite 2.9 peut être transformée en une équation de récurrence explicite en calculant l'étoile de Kleene A_0^* (définition). La plus petite solution de 2.9 est alors donnée sous forme de l'équation récurrente d'ordre 2.10 :

$$x(k) = A_0^* A_1 x(t-1) \oplus A_0^* A_2 x(t-2) \oplus A_0^* B u(k) \tag{2.10}$$

Avec :

$$A_0^* = I \oplus A_0 \oplus A_0^2$$

Ou I est une matrice identité :

$$I = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

Calcule de A_0^* :

$$A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A_0^2 = \begin{bmatrix} \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A_0^* = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A_0^* A_1 = \begin{bmatrix} e & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A_0^* A_2 = \begin{bmatrix} e & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A_0^* B = \begin{bmatrix} e & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

— **Donc l'équation explicite est :**

$$x(k) = \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} x(t-2) \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon & e \end{bmatrix} x(t)$$

— **Mise sous forme d'état :**

Pour avoir une représentation d'état sous la forme :

$$\begin{cases} x(t) = Ax(t-1) \oplus Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{2.11}$$

Nous avons étendu le graphe d'évenment temporisés de la figure 2.4 pour avoir un nouveau graphe équivalent avec des temporisations égale à 1 ou 0. Nous obtenons alors le graphe de la figure 2.6 :

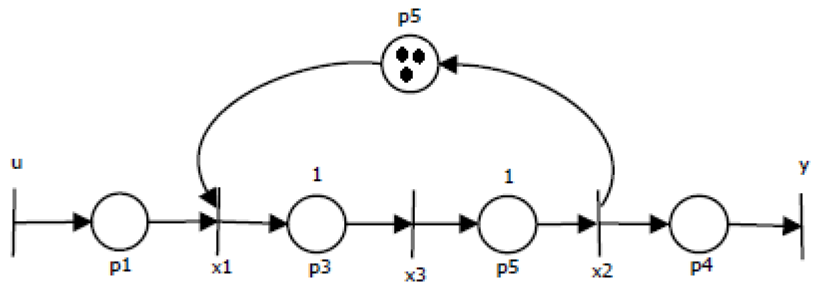


FIGURE 2.6 – extention temporelle

On aura donc :

$$\begin{cases} x_1(t) = 3 \otimes x_2(t) \oplus e \otimes u(t) = 3 \otimes x_3(t-1) \oplus e \otimes u(t) \\ x_2(t) = e \otimes x_3(t-1) \\ x_3(t) = e \otimes x_1(t-1) \end{cases}$$

Le modéle d'état correspond à ce graphe d'évenment temporisé étendu est :

$$x(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & e \\ e & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} x(t-1) \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

2.4.2 Représentation en séries formelles

Dans la théorie conventionnelle des systèmes, face à un produit de convolution, il est classique d'introduire la transformée de Fourier ou de Laplace des fonctions considérées. Les modèles discrets ont aussi une représentation fréquentielle : la transformée en z . La classe de systèmes considérés ici disposent également d'une transformée. Cette transformation, introduite par Cohen et al (voir [8]) , permet de prendre en compte les deux aspects des représentations en dateurs ou en compteurs.

2.4.2.1 Le dioïde $Z_{max}[\![\gamma]\!]$

Définition 2.6 La transformée en γ d'un signal est définie de la manière suivante :

$$d(\gamma) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} d(k) \otimes \gamma^k$$

Remarque 1.1 : La transformée en γ est l'analogue de la transformée en z de l'automatique classique qui permet de coder une trajectoire discrete sous la forme de série .

l'opérateur γ peut être vu comme un opérateur de retard, puisque :

$$\gamma \otimes d(\gamma) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} d(k) \otimes \gamma^{k+1} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} d(k-1) \otimes \gamma^k$$

Définition 2.7 (Dioïde $Z_{max}[\![\gamma]\!]$) L'ensemble des séries formelles en γ à exposant dans $\mathbb{Z}$ et coefficients dans Z_{max} a une structure de dioïde.

L'élément neutre de l'addition est la série $\varepsilon = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \varepsilon \gamma^k$ (où $\varepsilon = -\infty$ est l'élément neutre de l'addition dans Z_{max}).

L'élément neutre de la multiplication est la série $e(\gamma) = e\gamma^0$ (où $e = 0$ est l'élément neutre de la multiplication de Z_{max}). La somme et le produit de séries formelles sont définis comme suit :

$$d_1(\gamma) \oplus d_2(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (d_1(k) \oplus d_2(k))\gamma^k$$

$$d_1(\gamma) \otimes d_2(\gamma) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (d_1(j) \oplus d_2(k-j))\gamma^k$$

Le système d'équations dans(2.11) peut s'écrire en fonction de la variable γ :

$$x(\gamma) = \gamma A x(\gamma) \oplus B u(\gamma)$$

$$y(\gamma) = C x(\gamma)$$

On à l'équation implicite suivante : $x = a \otimes x \oplus b$

Cette équation admet $x = a^* b$ comme petite solution.

D'ou l' équation précedente peut s'écrire comme suit :

$$x(\gamma) = (\gamma A)^* B u(\gamma)$$

$$y(\gamma) = C(\gamma A)^* B u(\gamma)$$

$$y(\gamma) = H u(\gamma)$$

avec H est la matrice de transfert entrée/sortie du système y :

$$H = C(\gamma A)^* B$$

Trajectoires monotones

Les trajectoires solutions des systèmes d'équations précédentes ne sont pas nécessairement monotones, néanmoins par définition une trajectoire issue d'un GET est nécessairement monotone croissante (la date d'occurrence de $d(k)$ est nécessairement supérieure à $d(k-1)$). Formellement,

$$\forall k \in \mathbb{Z} d(k) \geq d(k-1) \Leftrightarrow d(k) = d(k) \oplus d(k-1)$$

qui est équivalent à

$$d(\gamma) = d(\gamma) \oplus \gamma d(\gamma) \Leftrightarrow d(\gamma) = \gamma^* d(\gamma)$$

C'est à dire que la transformée en γ d'une trajectoire monotone s'écrit forcément $\gamma^* d(\gamma)$ et que la multiplication par γ^* d'une trajectoire non monotone donne une trajectoire monotone croissante. Il s'agit d'une sorte de filtre. L'ensemble des trajectoires monotones (qui s'écrivent $\gamma^* d(\gamma)$) forment un dioïde noté $\gamma^* \mathbb{Z}_{max} [\![\gamma]\!]$. Pour s'en persuader il faut noté que la somme et le produit d'éléments de cet ensemble sont fermés. Il en découle que l'égalité d'éléments doit s'entendre "modulo γ^*". Par exemple :

$$2\gamma \oplus 1\gamma^7 \oplus 5\gamma^9 = 2\gamma \oplus 5\gamma^9$$

De façon plus générale les règles de calcul suivantes devront être considérées :

$$\gamma^n \oplus \gamma^{n'} = \gamma^{min(n,n')}$$

L'élément neutre pour la multiplication de $\gamma^* \mathbb{Z}_{max} [\![\gamma]\!]$ est donc la série $e(\gamma) = e \oplus e\gamma \oplus e\gamma^2 \oplus ..... \oplus e\gamma^{+\infty}$.

L'élément neutre pour l'addition de $\gamma^* \mathbb{Z}_{max} [\![\gamma]\!]$ est donc $\varepsilon(\gamma) = \varepsilon \oplus \varepsilon\gamma \oplus \varepsilon\gamma^2 \oplus ..... \oplus \varepsilon\gamma^{+\infty}$, avec

$\varepsilon = -\infty$l'élément neutre de l'addition de $\mathbb{Z}_{max}$.

Exemple 2.3 : Soit le GET de la figure 2.4 précedente :

Les fonctions dateur $x_i(k)$ qui correspond à chaque transition de la figure (1.5) pour un franchissement au plus tot :

$$\begin{cases} x_1(k) = u(k) \oplus x_2(k-3) \\ x_2(k) = 2 \otimes x_1(k) \\ y(k) = x_2(k) \end{cases}$$

L'interprétation de ces équation en γ donne :

$$\begin{cases} x_1(\gamma) = u(\gamma) \oplus \gamma^3 x_2(\gamma) \\ x_2(\gamma) = 2 \otimes x_1(\gamma) \\ y(\gamma) = x_2(\gamma) \end{cases}$$

On obtient la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} x(\gamma) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma^3 \\ 2 & \varepsilon \end{bmatrix} x(\gamma) \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix} \\ y(\gamma) = \begin{bmatrix} \varepsilon & e \end{bmatrix} \end{cases}$$

2.4.2.2 Le dioïde $Z_{min}[\![\delta]\!]$

De manière duale il est possible de définir une transformée pour les séries considérées dans le domaine temporel.

Définition La transformée en δ d'un signal est définie de la manière suivante :

$$d(\delta) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} c(t) \otimes \delta^k$$

Définition 2.4 (Dioïde $Z_{min}[\![\delta]\!]$) L'ensemble des séries formelles en δ à exposant dans $\mathbb{Z}$ et coefficients dans Z_{min} a une structure de dioïde.

L'élément neutre de l'addition est la série $\varepsilon = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \varepsilon \gamma^k$ (où $\varepsilon = -\infty$est l'élément neutre de l'addition dans Z_{min}). L'élément neutre de la multiplication est la série $e(\delta) = e\delta^0$ (où $e = 0$ est l'élément neutre de la multiplication de Z_{min}). La somme et le produit de séries formelles sont définis comme suit :

$$c_1(\delta) \oplus c_2(\delta) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} (c_1(t) \oplus c_2(t))\delta^t$$

$$c_1(\delta) \otimes c_2(\delta) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (c_1(j) \oplus c_2(t-j))\delta^t$$

Le système d'équations (2.11) correspond au modèle standard d'un GET dans Z_{min} et peut se transposer dans le dioïde $Z_{min}[\![\delta]\!]$:

$$x(\delta) = \delta A x(\delta) \oplus B u(\delta)$$

$$y(\delta) = C x(\delta)$$

On à l'équation implicite suivante : $x = a \otimes x \oplus b$

Cette équation admet $x = a^* b$ comme petite solution.

Donc l' équation précedente peut s'écrire comme suit :

$$x(\delta) = (\delta A)^* B u(\delta)$$

$$y(\delta) = C(\delta A)^* B u(\delta)$$

$$y(\delta) = Hu(\delta)$$

avec H est la matrice de transfert entrée/sortie du système y :

$$H = C(\delta A)^* B$$

Trajectoires monotones Tout comme dans le domaine événementiel les trajectoires associées à un graphe d'événements sont monotones (le nombre d'événements ayant eu lieu à l'instant $(t+1), c(t+1)$, est nécessairement supérieur au nombre ayant eu lieu à l'instant$t, c(t)$. Formellement,

$$\forall t \in \mathbb{Z} c(t) \geq c(t+1) \Leftrightarrow c(t) = c(t+1) \oplus c(t)$$

qui est équivalent à

$$c(\delta) = \delta^{-1} c(\delta) \oplus c(\delta) \Leftrightarrow c(\delta) = (\delta^{-1}) * c(\delta).$$

C'est à dire que la transformée en δ d'une trajectoire monotone appartient au dioïde $(\delta^{-1})^* \mathbb{Z}_{min} [\![\delta]\!]$.

Il en découle les règles de calcul suivantes :

$$\delta^t \oplus \delta^{t'} = \delta^{max(t,t')}$$

L'élément neutre pour la multiplication de $(\delta^{-1})^* \mathbb{Z}_{min} [\![\delta]\!]$ est donc la série $e(\delta) = e \oplus e\delta \oplus e\delta^2 \oplus ..... \oplus e\delta^{+\infty}$.

L'élément neutre pour l'addition de $(\delta^{-1})^* \mathbb{Z}_{min} [\![\delta]\!]$ est donc $\varepsilon(\delta) = \varepsilon \oplus \varepsilon\delta^1 \oplus \varepsilon\delta^2 \oplus ..... \oplus \varepsilon\delta^{+\infty}$, avec

$\varepsilon = +\infty$l'élément neutre de l'addition de$\mathbb{Z}_{min}$.

Exemple 2.4 : Soit le GET de la figure 2.4 précedente :

Les fonctions compteur $x_i(t)$ qui correspond à chaque transition de la figure 2.4 pour un franchissement au plus tot :

$$\begin{cases} x_1(t) = u(t) \oplus 3 \otimes x_2(t) \\ x_2(t) = x_1(t-2) \\ y(t) = x_2(t) \end{cases}$$

L'interprétation de ces équation en γ donne :

$$\begin{cases} x_1(\delta) = u(\delta) \oplus 3 \otimes x_2(\delta) \\ x_2(\delta) = \delta^2 x_1(\delta) \\ y(\delta) = x_2(\delta) \end{cases}$$

On obtient la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} x(\gamma) = \begin{bmatrix} \varepsilon & 3 \\ \delta^2 & \varepsilon \end{bmatrix} x(\gamma) \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix} \\ y(\gamma) = \begin{bmatrix} \varepsilon & e \end{bmatrix} \end{cases}$$

2.4.2.3 Le dioïde $M_{ax}^{in} [\![\gamma, \delta]\!]$

Le dioïde $M_{ax}^{in} [\![\gamma, \delta]\!]$ est un dioïde de séries formelles particulièrement bien adapté à la modélisation des GET. En effet, il permet de manipuler uniquement des séries croissantes et comme on va le voir par la suite, ce sont ces séries qui permettent de coder les tirs des transitions d'un GET. Dans ce dioïde, on manipule des séries formelles en deux indéterminées commutatives γ et δà exposants dans $\mathbb{Z}$ et à coefficients booléens.

Définition 2.5 (Dioïde $B [\![\gamma, \delta]\!]$). On appelle$B [\![\gamma, \delta]\!]$ le dioïde des séries formelles commutatives à coefficients booléens en deux indéterminées γ et δ et à exposants dans $\mathbb{Z}$. Une série formelle de$B [\![\gamma, \delta]\!]$ s'écrira de manière unique

$$s = \bigoplus_{n,t \in \mathbb{Z}} s(n,t) \otimes \gamma^n \delta^t$$

avec $s(n,t) = e$ ou $\varepsilon, B [\![\gamma, \delta]\!]$, est un dioïde complet.

Avant de presenter $M_{ax}^{in} [\![\gamma, \delta]\!]$ comme outil de modelisation, nous rappelons quelques caracteristiques de ce diode.

Manipulation des éléments de $M_{ax}^{in} [\![\gamma, \delta]\!]$:

La manipulation des éléments de $M_{ax}^{in} [\![\gamma, \delta]\!]$ se fait donc avec les règles de somme et de produit du dioïde $B [\![\gamma, \delta]\!]$, auxquelles on ajoute les règles de simplifications suivantes :

$$\gamma^n \delta^t \oplus \gamma^{n'} \delta^t = \gamma^{min(n,n')} \delta^t$$

$$\gamma^n \delta^t \oplus \gamma^n \delta^{t'} = \gamma^n \delta^{max(t,t')}$$

Modelisation des graphes d'evenements temporises sur $M_{ax}^{in} [\![\gamma, \delta]\!]$:

Exemple 2.5 : représentation d' un système de production à deux machine :

Le GET donnée par la figure 2.7 presente un système de production, qui est un atelier flexible de deux machines qui travaillent en série .

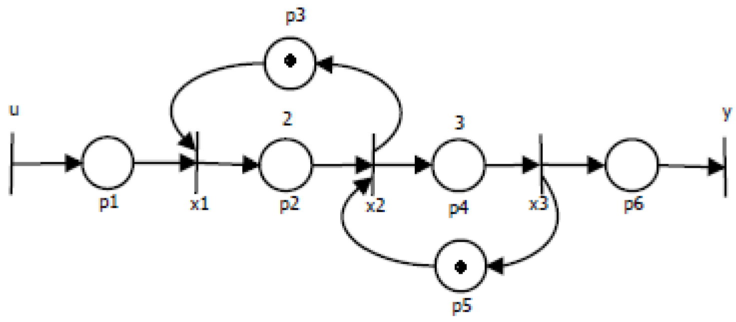


FIGURE 2.7 – Modèle GET de deux machine en série

Ces machines, nommées machine 1 et machine 2, utilisent un nombre fini de ressources pour effectuer leurs tâches. Nous supposons que les produits entrants sont d'abord traités dans la première machine, et ensuite dans la deuxième. Les durées opératoires sont données et sont fixées à l'état initial.

un jetons dans la place p_1, ici zéro , correspond au nombre de pièces initialement en attente d'être traitées par la machine

Le couple de places (p_2, p_3) représente la machine 1 et ses moyens de travail et les places (p_4, p_5) modélisent la machine 2 et ses ressources.

Un jeton dans la place p_2 représente un produit en cours de traitement dans la machine 1, et les jetons dans la place p_3 expriment la production dans la machine 2. Les temporisations des places p_2 et p_3 sont respectivement les durées opératoires dans les machines 1 et 2.

pour cet exemple , on peut écrire sa forme d'état en utilisant les deux transformer (γ, δ) :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma & \varepsilon \\ \delta^2 & \varepsilon & \gamma \\ \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Avec $x \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$ (vecteur associé aux transitions internes, ici $n = 3$) , $u \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^m$ (vecteur associé aux transitionsd'entrée, ici $m = 1$),et $y \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^l$ (vecteur associé aux transitions de sortie , ici $(l = 1$) . Et les matrice $A \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times n}$,$B \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times m}$et $C \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times n}$sont des matrices d'état, de commande et d'observation.

La résolution de l'équation permet d'établir un modèle entrée-sortie du système. dans notre exemple , cette matrice de transfére $H \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times m}$, est la suivante :

$$H = \delta^5 (\gamma \delta^3)^*$$

2.5 Réalisabilité, rationalité et périodicité

Tout transfert de GET peut se représenter par une matrice constituée de séries périodiques de$M_{ax}^{in}[\![\gamma,\delta]\!]$.

Définition 2.6 (Causalité). Une série $s \in M_{ax}^{in}[\![\gamma,\delta]\!]$ est dite causale si $s = \varepsilon$(la série est nulle) ou si son représentant minimal est à exposants dans $\mathbb{N}$. Une matrice est dite causale si toutes ses composantes sont causales.

Définition 2.7 (Rationalité). Un élément $s \in M_{ax}^{in}[\![\gamma,\delta]\!]$ est dit rationnel si l'un de ses représentants au moins peut être obtenu par un nombre fini d'opérations $\oplus$,$\otimes$et * à partir de l'ensemble $(\varepsilon, e, \gamma, \delta)$. On dira qu'une matrice à coefficients dans $M_{ax}^{in}[\![\gamma,\delta]\!]$ est rationnelle si tous ses coefficients sont rationnels.

Remarque Par définition, un élément rationnel est également causal.

Définition 2.8 (Réalisabilité). Un élément $s \in M_{ax}^{in}[\![\gamma,\delta]\!]$ est réalisable s'il existe un GET mono-entrée/ mono-sortie dont cet élément est la fonction de transfert, ou plus précisément, s'il existe trois matrices C, A, B de tailles respectivement q x n , n x n , et p x n à coefficients dans l'ensemble (ε, e) telles que cet élément puisse s'écrire CA^*B.

Définition 2.9 (Périodicité). Un élément $s \in M_{ax}^{in}[\![\gamma,\delta]\!]$ est périodique s'il existe deux polynômes p et q de $M_{ax}^{in}[\![\gamma,\delta]\!]$

$$p = \bigoplus_{i=0}^{a} \gamma^{ni}\delta^{ti}$$

et

$$q = \bigoplus_{j=0}^{b} \gamma^{Nj}\delta^{Tj}$$

et r un monôme à exposants dans N.

$$r = \gamma^{v}\delta^{T}$$

une séries périodiques et causales de la forme :

$$p \oplus qr^*$$

Ou le polynôme p caractérise le comportement transitoire de la série,

le polynôme q représente un motif qui se répète périodiquement,

la périodicité étant fournie par$r = \gamma^{v}\delta^{T}$ ou v/T caractérise le taux de production de la série.

Une matrice est périodique si tous ses coefficients sont périodiques.

conclusion :

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés en particulaire aux réseaux de Petri et aux Graphes d'Evènements Temporisés où nous avons présenté les définitions et les formalismes que nous allons utiliser plus tard dans les chapitres suivants , Par la suite, on a montré comment obtenir des modèles linéaires dans l'algèbre $(max, +)$ et $(min, +)$ et leur avantage de point de vue entrée-sortie et la possibilité de le représenter par sa fonction de transfére . Dans le chapitre qui suit , nous nous intéressons à la synthèse d'un observateur d'ordre réduit .

Chapitre 3

Synthèse d'un observateur d'ordre réduit

3.1 Introduction

Afin de concevoir des méthodes de commande il est essentiel d'avoir des informations sur le système étudié. Classiquement sur un système, on connaît les entrées qui correspondent aux variables de commandes et qui permettent de piloter le système et on connaît aussi directement par la mesure les sorties du système étudié . Cependant, ces informations ne sont très souvent, pas suffisantes pour concevoir des méthodes de commande. En effet, il est parfois nécessaire de connaître des informations relatives aux variables internes du système . Afin d'obtenir ces informations sur les états on peut :

— Rajouter des capteurs quand ceci est physiquement possible, on augmente alors les mesures et les états mesurés correspondront à de nouvelles sorties.

— Utiliser des observateurs quand le système est observable, on pourra toujours estimer analytiquement les états internes du système.

Un observateur est un système dynamique qui peut également servir à la surveillance des systèmes, en particulier la détection de panne, ou même à l'identification de paramètres, en considérant un système, avec ces paramètres comme nouvelles variables d'état. Donc, la question de la synthèse d'observateurs constitue un grand domaine d'intérêt et d'étude.

L'utilisation d'observateurs revêt ainsi une grande importance dans l'étude des systèmes dynamiques à événements discréte qui sont représentés par des Graphes d'Evènements Temporisés.

Dans ce contexte, nous proposons dans ce chapitre un survol sur les différents types d'observateurs pouvant s'appliquer sur des systèmes déterministes en se référant sur différents travaux (voir [15] et [16]). nous nous focaliserons tout d'abord sur la synthése d'un observateur ensuit on va s'intéresser au dimensionnement des observateurs d'ordre plein ($q = n$, on estime alors tout le vecteur d'état) et des observateurs d'ordre réduit

($q = n - l$) qui nous propose d'estimée seulement les états non mesurés à partir de sa sorties .

3.2 Principe d'un observateur

3.2.1 Objectif d'un observateur

En général, pour des raisons techniques et économiques, l'état du système n'est pas complètement accessible. En effet, la complexité de la réalisabilité technique ainsi que des coûts prohibitifs pour l'implantation de plusieurs capteurs peuvent réduire considérablement le nombre d'états mesurés. On peut alors considérer que pour la grande majorité des systèmes, la dimension du vecteur d'état est supérieure à celle du vecteur de sortie ($l \prec n$) .Cette considération signifie que le vecteur$x$ ne peut pas être complètement mesuré ou déduit des sorties. Cependant, moyennant des conditions d'existence, l'état peut être reconstruit à l'aide d'un observateur ce résultat est inspiré par des travaux de Luenberger (voir[16]) et à été traité par une approche $(max, +)$ la premiers fois par Harduoin et Carlos Maia (voir[18]).

Soit, de façon plus générale, le système $(max, +)$ est défini par :

$$SYS \begin{cases} x = Ax \oplus Bu = A^*Bu \\ y = Cx = CA^*Bu = Hu \end{cases} \tag{3.1}$$

Avec $x \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$ (vecteur associé aux transitions internes) , $u \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^m$ (vecteur associé aux transitions d'entrée),et $y \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^l$ (vecteur associé aux transitions de sortie) . Et les matrice $A \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times n}$,$B \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times m}$et $C \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times n}$sont des matrices d'état, de commande et d'observation.

dont l'état x est estimé (ou reconstruit) par un système dynamique appelé observateur et noté OBS, dont la structure est donnée par :

$$OBS \begin{cases} \hat{x} = A\hat{x} \oplus Bu \oplus L(\hat{y} \oplus y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \tag{3.2}$$

Avec $\hat{x}$ l'état estimée et $\hat{y}$ la sorie estimée .

3.2.2 Quelques définitions relatives aux observateurs

La notion d'observabilité est donc essentielle lorsqu'on va procéder à l'élaboration d'observateurs, ce qui constitue l'objet du ce chapitre.

Définition 3.1 (Observabilité Structurelle) (voir[9]). Un graphe d'événements temporisé est structurellememt observable si depuis toute transition interne il existe un chemin vers au moins une transition de sortie tel que $(CA^*)_{i,j} \neq \varepsilon$.

Dans la suite du document les systèmes considérés seront supposés structurellement observables. Ci-dessous nous donnons les définitions de l'observabilité, elles sont inspirées des travaux de cohen et al (voir[10]), qui caractérisent l'existence et l'unicité de la projection dans l'image d'une application parallèlement au noyau d'une autre.

Définition 3.2 (Observabilité). Un graphe d'événements temporisé est observable si pour toutes commandes u et $u\prime$ telles que $CA^*Bu = CA^*Bu'$, il existe un seul état $x = A^*Bu' = A^*Bu$.

Théorème : Un graphe d'événements temporisé est observable si et seulement si : $A^*B(CA^*B \,\circ\!\!\!\backslash\, CA^*B) = A^*B$.

3.2.3 Structure d'un observateur d'ordre plein

Afin d'expliquer la procédure générale de la conception d'un observateur, nous allons nous appuyer sur la construction d'un observateur d'ordre plein .Un observateur d'ordre plein permet de reconstruire entièrement le vecteur d'état x , on note par z la grandeur observée . Ainsi , pour un ordre plein , on a directement $z = \hat{x}$ avec $\hat{x}$ étant l'estimation de x. La structure de l'observateur peut être représentée par la $figure$ 3.1 exprimée sous la forme présedente 3.2 :

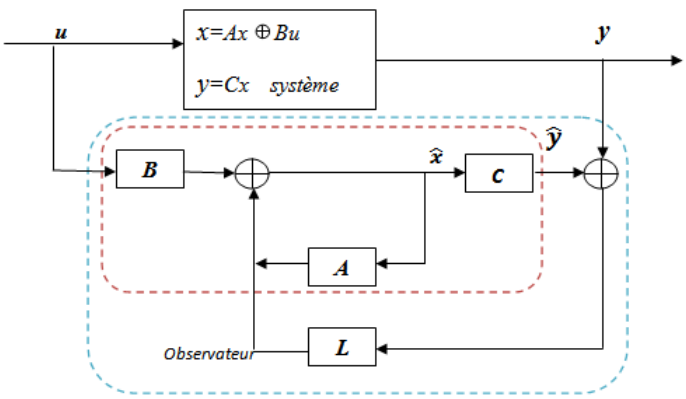


FIGURE 3.1 – structure de l'observateur

L'équation décrite dans 3.2 peut être écrite sous la forme :

$$\hat{x} = A\hat{x} \oplus Bu \oplus LC\hat{x} \oplus LCx$$

$$\hat{x} = (A \oplus LC)\hat{x} \oplus Bu \oplus LCA^*Bu$$

$$\hat{x} = (A \oplus LC)^*Bu \oplus (A \oplus LC)^*LCA^*Bu \tag{3.3}$$

D'aprés la propriétés 1.9 de l'étoile de Kleene définie dans le chapitre précédent

On a :

$$(A \oplus LC)^* = A^*(LCA^*)^*$$

En l'introduisant dans L'équation 3.3 , nous obtenons :

$$\hat{x} = A^*(LCA^*)^*Bu \oplus A^*(LCA^*)^*LCA^*Bu$$

D'aprés la propriétés 1.11 de l'étoile de Kleene :
On a :

$$(LCA^*)^*LCA^* = (LCA^*)^+$$

Donc l'équation peut s'écrire :

$$\hat{x} = A^*(LCA^*)^*Bu \oplus A^*(LCA^*)^+Bu$$

D'aprés la propriétés 1.2 de l'étoile de Kleene voir le Chapitre 1
On a :

$$(LCA^*)^+ \preceq (LCA^*)^*$$

Ce qui conduit à :

$$\hat{x} = A^*(LCA^*)^*Bu = \hat{x} = (A \oplus LC)^*Bu \tag{3.4}$$

3.2.3.1 Calcule du gain d'observateur d'ordre plein

Cette section est consacrée au calcul de la matrice d'observation L dans le cas de la synthése d'un observateur d'ordre plein . On supposons que le systéme est observable notre objectif est de calculer la plus grand matrice d'observation L pour assurer que l'état estimée $\hat{x}$ soit aussi proche que possible de l'état x , sous la contrainte :

$$\hat{x} \preceq x$$

D'apres l'équation 3.1 on a :

$$\hat{x} \preceq A^*Bu$$

D'apres l'équation 3.4 on a :

$$(A \oplus LC)^*Bu \preceq A^*Bu$$

$$A^*(LCA^*)^*Bu \preceq A^*Bu$$

Ou encore :

$$A^*(LCA^*)^*B \preceq A^*B$$

D'aprés la propriétés 1.2 de l'étoile de Kleene voir le Chapitre 1

On a :

$$(A^*LC)^*A^*B \preceq A^*B$$

En utilisant la propriétes de la résiduation $R_a^{\#}$:

On a :

$$(A^*LC)^* \preceq A^*B \oslash A^*B$$

En utilisant la propriétes 1.30 de la résiduation :

On a :

$$A^*B \oslash A^*B = (A^*B \oslash A^*B)^*$$

Donc :

$$(A^*LC)^* \preceq (A^*B \oslash A^*B)^*$$

D'aprés la propriétés 1.11 de l'étoile de Kleene voir le Chapitre 1

On aura :

$$A^*LC \preceq A^*B \oslash A^*B$$

En utilisant la propriétes de la résiduation $R_a^{\#}$:

On a :

$$A^*L \preceq A^*B \oslash A^*B \oslash C$$

D'aprés la propriétés 1.37 de la résiduation :

On a :

$$A^*L \preceq A^*B \oslash CA^*B$$

D'aprés la propriétés de la résiduation $L_a^{\#}$:

On a :

$$L \preceq A^* \obslash A^*B \oslash CA^*B$$

D'aprés la propriétés 1.26 de la résiduation :

On a :

$$L \preceq A^*B \oslash CA^*B = L_{opt} \tag{3.5}$$

Illustration 4.1 : Considérons le graphe d'événement temporisé de la figure 2.7 la matrice de transfert du systéme est donnée par la fonction de transfert suivante :

$$H = \delta^5(\gamma\delta^3)^*$$

Dans cette exemple les élement de la matrice de transfert qui représente le graphe d'événement temporisé est une série périodiques. le taux de production de cette série $r = \gamma\delta^3$ce qui donne $r = \frac{1}{3}ut$.

Nous avons la représentation d'état suivante :

$$x_{sys} = Ax \oplus Bu = A^* Bu$$

Le calcule nous donne :

$$x_{sys} = \begin{bmatrix} e \oplus \gamma\delta^2(\gamma\delta^3)^* \\ \delta^2(\gamma\delta^3)^* \\ \delta^5(\gamma\delta^3)^* \end{bmatrix}$$

On rajoute un Observateur d'état qu'on a présenté par la figure

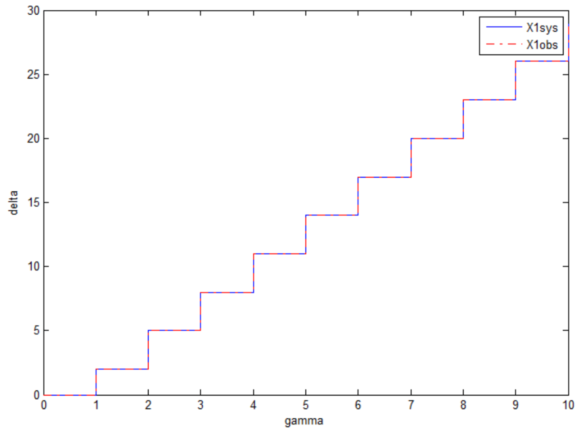
Le calcule de gain optimal obtenu dans L'equation 3.5 nous donne :

$$L_{opt} = \begin{bmatrix} \gamma^2(\gamma\delta^3)^* \\ \gamma(\gamma\delta^3)^* \\ (\gamma\delta^3)^* \end{bmatrix}$$

D'apres L'équation de l'observateur 3.4 , le calcule nous donne :

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} e \oplus \gamma\delta^2(\gamma\delta^3)^* \\ \delta^2(\gamma\delta^3)^* \\ \delta^5(\gamma\delta^3)^* \end{bmatrix}$$

La figure suivante représente l'état du systéme et l'état éstimée qui sont parfaitement confondus , ce qui prouve la bonne observation .



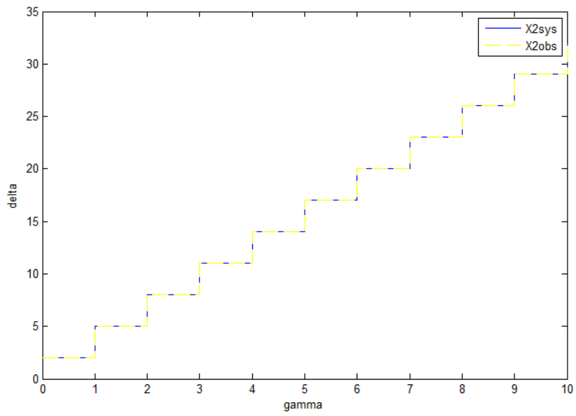


FIGURE 3.2 – représentation de x_{sys}et $\hat{x}$ au niveau de la transition $t_1$et t_2

Nous avons la sortie de systéme :

$$y_{sys} = CA^*Bu = Hu$$

Ce qui donne par calcule :

$$y_{sys} = \delta^5(\gamma\delta^3)^*$$

Et la srtie estimée :

$$\hat{y} = \delta^5(\gamma\delta^3)^*$$

La figure suivante représent la sortie du systéme et la sortie de systéme estimée, les deux courbes sont identiques ce qui prouve la bonne observation.

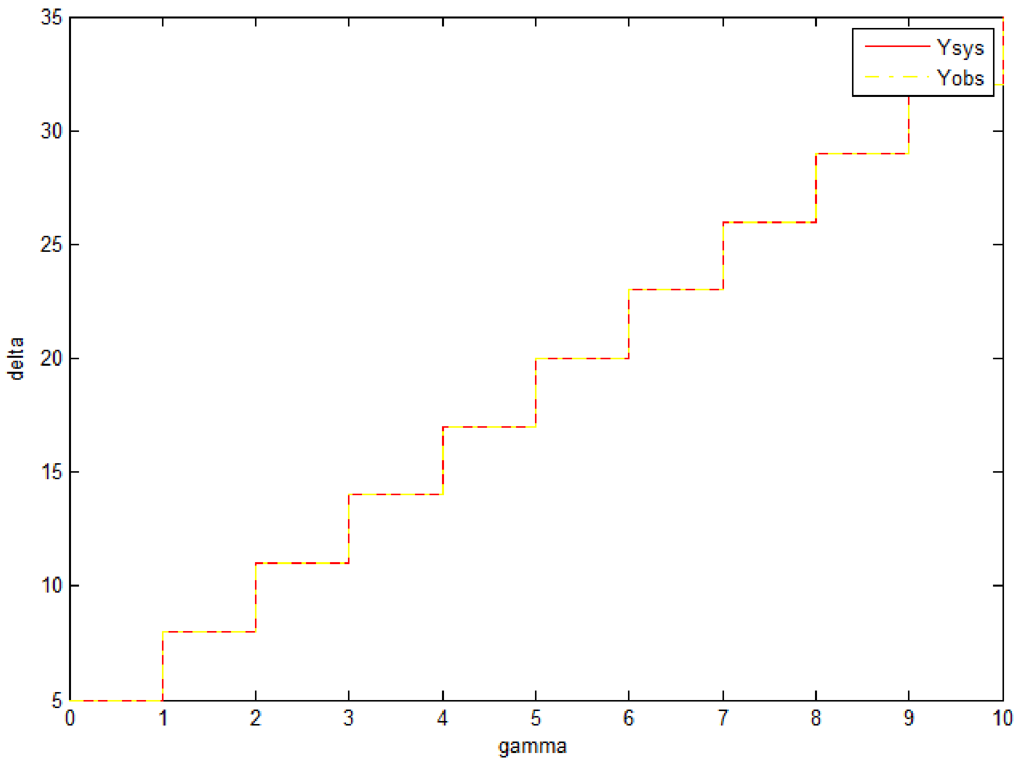


FIGURE 3.3 – représentation de y_{sys}et $\hat{y}$

3.3 Réduction de l'ordre des observateurs

Dans la partie précédente, nous avons déterminé des systèmes observateurs de même dimension que l'état du système à reconstruire. Nous allons montrer que l'on peut construire, en réalité, des reconstructeurs d'ordre inférieur. Plusieurs principes peuvent être utilisés. Nous regarderons successivement : le reconstructeur réduit de Luenberger qui estime la partie non accessible de l'état . Nous verrons que si dans le premier cas l'observateur est assez facile à déterminer, il n'en est pas de même dans le deuxième. Cependant cette dernière solution est très intéressante car elle permet d'obtenir des observateurs de taille beaucoup plus petite.

3.3.1 Observateur d'ordre réduit

L'observateur d'ordre réduit introduit par luenberger (voir[15, 16]) conssiste à reconstruire uniquement les états manquants, les autres étant mesurés. Ainsi pour un système défini par 3.1 l'observateur réduit sera d'ordre $n - l$.

On suppose que l'état est partitionné en deux sous-ensemble $V_1 = y$ accessibles et V_2 non accessibles

Le système dynamique original peut alors s'écrire :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \tag{3.6}$$

$$y = V_1 \tag{3.7}$$

L'équation d'état peut étre s'écrie comme suit :

$$\begin{cases} V_1 = A_{11}V_1 \oplus A_{12}V_2 \oplus B_1 u \\ V_2 = A_{21}V_1 \oplus A_{22}V_2 \oplus B_2 u \\ y = V_1 \end{cases} \tag{3.8}$$

V_1 : vecteur d'observation .

V_2 : vecteut d'état contient des information et composant non mesurable .

Selon les cas d'étude seule les état non accessibles doit étre estimée les variable d'état accéssibles n'ont pas besoin d'étre reconstruites puisqu'elles sont disponible par les information de la sortie . L'équation qui régit l'évolution de V_1 peut alors être considérée comme une mesure dépendante de l'état à reconstruire V_2.

on pose une nouvelle équation de sortie :

$$V_1 = A_{11}V_1 \oplus A_{12}V_2 \oplus B_1 u = A_{11}^* A_{12}V_2 \oplus A_{11}^* B_1 u$$

puisqu'il n'ya aucune relation entre la sortie et l'entrée u , donc : $B_1 = 0$

D'ou :

$$W = V_1 = A_{11}^* A_{12} V_2$$

on effectue provisoirement le changement de variables suivant :

$$V_2 = A_{22}V_2 \oplus \overbrace{A_{21}V_1 \oplus B_2 u} = V_2 = A_{22}V_2 \oplus \tilde{u}$$

Ou $\tilde{u}$ est une nouvelle commande :

$$\tilde{u} = A_{21}V_1 \oplus B_2 u \tag{3.9}$$

Finalement, nous obtenons un nouveau systéme dynamique d'ordre réduit $n - l$ dont la matrice d'état est ,A_{22} et la matrice de sortie est $A_{11}^* A_{12}$.

$$\begin{cases} V_2 = A_{22}V_2 \oplus \tilde{u} = A_{22}^* \tilde{u} \\ W = A_{11}^* A_{12} V_2 \end{cases} \tag{3.10}$$

Ou $\tilde{u}$ et W sont respectivement une nouvelle commande et une nouvelle sortie .

On propose alors de construire un observateur pour le système d'ordre réduit 3.10 en s'inspirant de la structure de l'observateur d'ordre complet 3.2 .

soit :

$$\begin{cases} \hat{V}_2 = A_{22}\hat{V}_2 \oplus \tilde{u} \oplus L(\hat{W} \oplus W) \\ \hat{W} = A_{11}^* A_{12}\hat{V}_2 \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\hat{V}_2 = A_{22}\hat{V}_2 \oplus \tilde{u} \oplus LA_{11}^* A_{12}\hat{V}_2 \oplus LW$$

$$\hat{V}_2 = (A_{22} \oplus LA_{11}^* A_{12})\hat{V}_2 \oplus \tilde{u} \oplus LW$$

$$\hat{V}_2 = (A_{22} \oplus LA_{11}^* A_{12})^* \tilde{u} \oplus (A_{22} \oplus LA_{11}^* A_{12})^* LW \tag{3.12}$$

On remplace W par l'équation 3.10 .

On aura donc :

$$\hat{V}_2 = (A_{22} \oplus LA_{11}^* A_{12})^* \tilde{u} \oplus (A_{22} \oplus LA_{11}^* A_{12})^* LA_{11}^* A_{12} V_2$$

On remplace V_2 par son équation :

$$\hat{V}_2 = (A_{22} \oplus LA_{11}^* A_{12})^* \tilde{u} \oplus (A_{22} \oplus LA_{11}^* A_{12})^* LA_{11}^* A_{12} A_{22}^* \tilde{u} \tag{3.13}$$

D'aprés la propriétés 1.9 de l'étoile de Kleene définie dans le chapitre précédent

On a :

$$(A_{22} \oplus LA_{11}^* A_{12})^* = A_{22}^* (LA_{11}^* A_{12} A_{22}^*)^*$$

En l'introduisant dans L'équation 3.13 , nous obtenons :

$$\hat{V}_2 = A_{22}^* (LA_{11}^* A_{12} A_{22}^*)^* \tilde{u} \oplus A_{22}^* (LA_{11}^* A_{12} A_{22}^*)^* LA_{11}^* A_{12} A_{22}^* \tilde{u}$$

D'aprés la propriétés 1.11 de l'étoile de Kleene :

On a :

$$(LA_{11}^* A_{12} A_{22}^*)^* LA_{11}^* A_{12} A_{22}^* = (LA_{11}^* A_{12} A_{22}^*)^+$$

donc l'équation peut s'écrire :

$$\hat{V}_2 = A_{22}^* (LA_{11}^* A_{12} A_{22}^*)^* \tilde{u} \oplus A_{22}^* (LA_{11}^* A_{12} A_{22}^*)^+ \tilde{u}$$

D'aprés la propriétés 1.2 de l'étoile de Kleene voir le Chapitre 1

On a :

$$(LA_{11}^* A_{12} A_{22}^*)^+ \preceq (LA_{11}^* A_{12} A_{22}^*)^*$$

Ce qui conduit à :

$$\hat{V_2} = A_{22}^*(LA_{11}^*A_{12}A_{22}^*)^*\tilde{u} = (A_{22} \oplus LA_{11}^*A_{12})^*\tilde{u} \tag{3.14}$$

Afin d'écrire le système en fonction des signaux disponibles y et u du système original on remplace $\tilde{u}$ par son équation ainsi :

$$\hat{V_2} = (A_{22} \oplus LA_{11}^*A_{12})^*(A_{21}y \oplus B_2u)$$

pour obtenir finalement :

$$\begin{cases} \hat{V_2} = (A_{22} \oplus LA_{11}^*A_{12})^*(A_{21}y \oplus B_2u) \\ \hat{W} = A_{11}^*A_{12}(A_{22} \oplus LA_{11}^*A_{12})^*(A_{21}y \oplus B_2u) \end{cases} \tag{3.15}$$

Ces derniéres équations représentent bien un systéme dynamique, observateur d'entrée u et de sortie y dont l'état V_2 est de dimension réduite ($V_2 \in R^{n-l}$) par rapport à l'observateur d'ordre complet .

3.3.2 Calcul du gain de l'Observateur d'ordre réduit

Cette section est consacrée au calcul du gain L dans le cas de la synthése d'un observateur réduit . On suppose que le systéme est observable ou L est le gain de l'observateur . L'objectif est alors de déterminer la plus grand matrice d'observation L_{opt} afin que le vecteur d'état éstimé $\hat{V_2}$ soit aussi proche que possible de l'état V_2, sous la contrainte $\hat{V_2} \preceq V_2$.

Cela peut s'écrire comme suit :

$$(A_{22} \oplus LA_{11}^*A_{12})^*\tilde{u} \preceq A_{22}^*\tilde{u}$$

D'aprés la propriétés 1.2 de l'étoile de Kleene voir le Chapitre 1

On a :

$$(A_{22}^*LA_{11}^*A_{12})^*A_{22}^*\tilde{u} \preceq A_{22}^*\tilde{u}$$

En utilisant la propriétes de la résiduation $R_a^{\#}$:

On a :

$$(A_{22}^*LA_{11}^*A_{12})^* \preceq A_{22}^*\tilde{u} \phi A_{22}^*\tilde{u}$$

En utilisant la propriétes 1.30 de la résiduation :

On a :

$$A_{22}^*\tilde{u} \phi A_{22}^*\tilde{u} = (A_{22}^*\tilde{u} \phi A_{22}^*\tilde{u})^*$$

donc :

$$(A_{22}^*LA_{11}^*A_{12})^* \preceq (A_{22}^*\tilde{u}\phi A_{22}^*\tilde{u})^*$$

D'aprés la propriétés 1.11 de l'étoile de Kleene voir le Chapitre 1

On aura :

$$A_{22}^*LA_{11}^*A_{12} \preceq A_{22}^*\tilde{u}\phi A_{22}^*\tilde{u}$$

En utilisant la propriétes de la résiduation $R_a^\#$:

On a :

$$A_{22}^*L \preceq A_{22}^*\tilde{u}\phi A_{22}^*\tilde{u}\phi A_{11}^*A_{12}$$

D'aprés la propriétés 1.37 de la résiduation :

On a :

$$A_{22}^*L \preceq A_{22}^*\tilde{u}\phi A_{11}^*A_{12}A_{22}^*\tilde{u}$$

D'aprés la propriétés de la résiduation $L_a^\#$:

On a :

$$L \preceq A_{22}^*\backslash A_{22}^*\tilde{u}\phi A_{11}^*A_{12}A_{22}^*\tilde{u}$$

D'aprés la propriétés 1.26 de la résiduation :

On a :

$$L \preceq A_{22}^*\tilde{u}\phi A_{11}^*A_{12}A_{22}^*\tilde{u}$$

On remplacent $\tilde{u}$ par l'equation 3.9

On obtient :

$$L \preceq A_{22}^*(A_{21}y \oplus B_2u)\phi A_{11}^*A_{12}A_{22}^*(A_{21}y \oplus B_2u) = L_{optr} \tag{3.16}$$

Remarque : Lors de la construction de l'observateur réduit, on avait supposé que les équations d'état sont structurées de la manière suivante :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y = V_1 \end{cases}$$

Si ce n'est pas le cas, il est possible de s'y ramener moyennant une transformation. En effet, après une permutation des variables d'état, les matrices A, B, C, et le vecteur x sont de la forme :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Ou : $C \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l}$ et $V_1 \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times l}$ et $B_1 \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times m}$.
en définissant le changement de variables $\tilde{x} = Px$, avec :

$$P = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ \varepsilon_{n-l,l} & I_{n-l} \end{bmatrix}$$

le système 3.1 devient :

$$\begin{cases} \tilde{x} = \tilde{A}\tilde{x} \oplus \tilde{B}u \\ \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} = \begin{bmatrix} I_l & \varepsilon_{l,n-l} \end{bmatrix} \tilde{x} \end{cases}$$

avec $\tilde{A} = PAP^{-1}$, $\tilde{B} = PB$ et $\tilde{C} = CP^{-1}$.

Exemple 3.1 : Pour illustrer la possibilité de réduire les état à estimé pour un graphes d'´evénements temporisés, on va examiner le modéle d'un atelier flexible de type "*flowshops*" c'est-'a-dire ou toutes les piéces circulent dans l'atelier dans le méme sens de parcours des machines (par opposition aux "jobshop") . De plus toutes les piéces passent nécessairement sur toutes les machines. Ici, il y a trois machines M_1, M_2 , M_3, et l'atelier fabrique trois types de piéces P_1 , P_2 , P_3. Chaque type de piéce doit subir un certain nombre d'opérations sur les machines dans un ordre précis . On suppose ici les étapes suivantes pour chaque type de piéce :

$$P_1 \colon M_1 \to M_2 \to M_3,$$

$$P_2 \colon M_1 \to M_2 \to M_3,$$

$$P_3 \colon M_1 \to M_2 \to M_3,$$

On doit de plus respecter des ratios de production . Pour cela, on constitue une "séquence de base" P_1 - P_2 - P_3 respectant les ratios de production, et on doit définir l'ordre de passage de cette séquence de base pour chaque machine , cet ordre étant répété indéfiniment. Ici on adopte :

$$M_1 \colon P_1 \to P_2 \to P_3,$$

$$M_2 \colon P_1 \to P_2 \to P_3,$$

$$M_3 \colon P_1 \to P_2 \to P_3,$$

Enfin, on suppose que les piéces sont portées par des palettes spécialisées par type de piéce et qu'on a mis en service une palette pour P_1, une palette pour P_2 et enfin une palettes pour P_3, ce qui est consistant avec les ratios de production d´esirés. Lorsqu'une piéce a subi les opérations requises, elle est retirée et mise en stock , et la palette revient au point de départ pour transportée une nouvelle piéce de méme type . Cette opération de déchargement / rechargement peut étre modélisée par le passage sur une "machine" .

La Figure 3.4 représente le modéle de l'atelier qui vient d'étre décrit . On peut voir que chacune des 9 transition correspond à une combinaisons d'une machine et d'un type de piéce par exemple la transition x_4 correspond à la combinaison de la machine M_2 et le type de piéce P_1 .

Pour chaque transition en associée une variable $x(k)$ qui indique le moment le plus précoce auquel une machine spécifique peut commencé à traité une piéce spécifique pour un temps k .

les places entre les transitions exprime les contraintes de priorité entre les machines . par exemple x_6 dépend de x_3 ce qui correspond à le traitement de la piéce de type P_3 par la machine M_1 et sur x_5 ce qui correspond à la machine M_2 qui traite la piéce de type P_2.

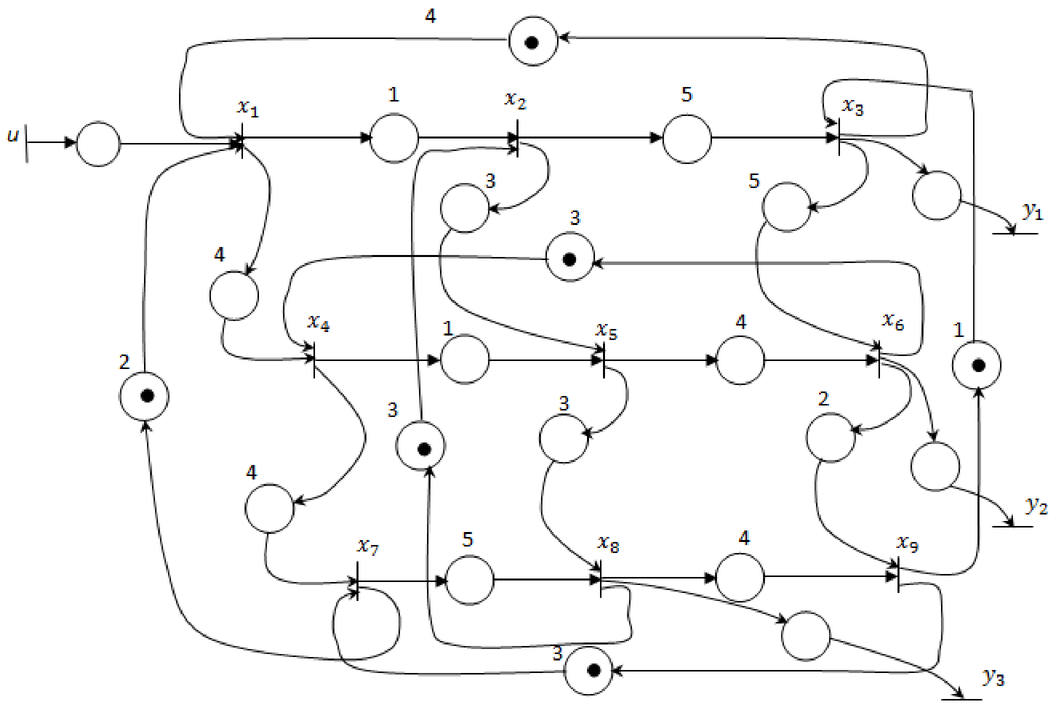


FIGURE 3.4 – Modèle GET d'un systéme de type "flowshops" , 3 machines, 3 type de piéces

Il est possible d'établir dans le dioïde $M_{in}^{ax}[\gamma,\delta]$ un modèle dynamique de ce graphe d'événements temporisé sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
\varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^2 & \varepsilon & \varepsilon \\
\delta & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^3 & \varepsilon \\
\varepsilon & \delta^5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta \\
\delta^4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \delta & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \delta^5 & \varepsilon & \delta^4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^3 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \delta^5 & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^2 & \varepsilon & \delta^4 & \varepsilon
\end{bmatrix} x \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} u \\
y = \begin{bmatrix}
\varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon
\end{bmatrix} x
\end{array}\right. \tag{3.17}$$

A chaque transition du GET est associée une composante des vecteurs $x \in M_{in}^{ax}[\gamma,\delta]^n$ (vecteur associé aux transitions internes, ici $n = 9$) , $u \in M_{in}^{ax}[\gamma,\delta]^m$ (vecteur associé aux transitionsd'entrée, ici $m = 1$),et $y \in M_{in}^{ax}[\gamma,\delta]^{l}$ (vecteur associé aux transitions de sortie , ici ($l = 3$) . Et les matrice $A \in M_{in}^{ax}[\gamma,\delta]^{n\times n}$,$B \in M_{in}^{ax}[\gamma,\delta]^{n\times m}$et $C \in M_{in}^{ax}[\gamma,\delta]^{l\times n}$, représentent l'interaction entre ces transitions.

La composante $A_{4,6} = \gamma\delta^3$ traduit la présence d'un seule jeton et une temporisation de 3 unités de temps attachés à la place qui sépare les transitions x_4 et x_6.

La résolution de l'équation permet d'établir un modèle entrée-sortie du système. dans notre exemple , cette matrice de transfére $H \in M_{in}^{ax}[\gamma,\delta]^{l\times m}$, est la suivante :

$$H = CA^*B$$

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ h_{31} \end{bmatrix}$$

$h_{11=}\left[\delta^6 \oplus (\gamma^1\delta^{21} \oplus \gamma^2\delta^{33})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$h_{21=}\left[\delta^{11} \oplus (\gamma^1\delta^{26} \oplus \gamma^2\delta^{38})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$h_{31=}\left[(\delta^{13} \oplus \gamma^1\delta^{25})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$

Dans cette exemple on à le taux de production de la série qui est égale à :

$$r = \gamma^2\delta^{25}$$

ce qui donne :

$$r = \frac{2}{25}ut$$

En étudiant l'exemple on constate qu'une simple permutation dans les variables d'état permettrait d'avoir la forme désirée pour la matrice de sortie C . Ainsi, on définit la matrice de permutation des variables d'état notée $\bar{P}$:

$$\bar{P} = \begin{bmatrix}
\varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\
e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e
\end{bmatrix}$$

calcule de $\bar{A}$:

$$\bar{A} = \bar{P}A\bar{P}^T$$

avec :

$$\bar{P}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \bar{P}A\bar{P}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta \\ \delta^4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \delta & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \delta^5 & \varepsilon & \delta^4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \delta^5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^2 & \varepsilon & \delta^4 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta \\ \delta^5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^3 & \delta^5 & \varepsilon \\ \gamma\delta^4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^3 & \delta & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \gamma\delta^3 & \varepsilon & \delta^4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^3 & \delta & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^4 & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^3 \\ \varepsilon & \delta^2 & \delta^4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

calcule de $\bar{B}$:

$$\bar{B} = \bar{P}B = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

calcule de$\bar{C}$:

$$\bar{C} = C\bar{P}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

ce qui donne :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta \\ \delta^5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^3 & \delta^5 & \varepsilon \\ \gamma\delta^4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^3 & \delta & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \gamma\delta^3 & \varepsilon & \delta^4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^3 & \delta & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^4 & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^3 \\ \varepsilon & \delta^2 & \delta^4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

Et :

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

Et :

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

La matrice $\bar{C}$ 3.20 est donc de la forme $\begin{bmatrix} I_l & \varepsilon_{l,n-l} \end{bmatrix}$ qui correspond à la structure initialement souhaitée. Dans cet exemple, il n'est donc pas nécessaire d'effectuer le changement de variable d'état défini par P .

3.3.3 synthése d'un observateur d'ordre réduit

considérons le systéme 3.17 est observable , la reconstruction des variables d'état est basée sur les sorties mesurées , nous avons effectué une simple pérmutation pour que les sorties apparaissent directement comme des composantes du vecteur d'état . sans perte de généralité les état sans partitionné en deux sous-ensemble $V_1 = y$ -accessibles-, V_2–non accessibles-, avec V_1 de dimension l (x_3, x_6,x_8 correspondent aux sorties y du systéme : $l = 3$) et V_2 de dimension $n - l$ ($x_1, x_2, x_4, x_5, x_7, x_9$ correspondent aux états quand vas reconstruire : $n - l = 6$) . le systéme peut etre réécrit sous la forme 3.6 :

Les matrices A, B, C et le vecteur d'état x sont partitionnés comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} I_l & \varepsilon \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

avec :

$$A_{11=} \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Et :

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \delta^5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^3 & \delta^5 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Et :

$$A_{21} = \begin{bmatrix} \gamma\delta^4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^3 \\ \varepsilon & \gamma\delta^3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^2 & \delta^4 \end{bmatrix}$$

Et :

$$A_{22} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^2 & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^3 & \delta & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \delta^4 & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

Nous avons la représentation d'état réduit 3.10 :

$$V_{2sys} = \begin{bmatrix} e \oplus \gamma^1\delta^{10} \oplus (\gamma^2\delta^{25} \oplus \gamma^3\delta^{37})(\gamma^2\delta^{25})^* \\ \delta \oplus (\gamma^1\delta^{16} \oplus \gamma^2\delta^{28})(\gamma^2\delta^{25})^* \\ \delta^4 \oplus \gamma^1\delta^{14} \oplus (\gamma^2\delta^{29} \oplus \gamma^3\delta^{41})(\gamma^2\delta^{25})^* \\ \delta^5 \oplus (\gamma^1\delta^{19} \oplus \gamma^2\delta^{31})(\gamma^2\delta^{25})^* \\ (\delta^8 \oplus \gamma^1\delta^{20})(\gamma^2\delta^{25})^* \\ (\delta^{17} \oplus \gamma^1\delta^{29})(\gamma^2\delta^{25})^* \end{bmatrix}$$

Le gain optimal reduit dans ce cas est le suivant :

$$L_{optr} = A_{22}^*(A_{21}y \oplus B_2u)/A_{11}^*A_{12}A_{22}^*(A_{21}y \oplus B_2u)$$

$$L_{optr} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} \\ l_{51} & l_{52} & l_{53} \\ l_{61} & l_{62} & l_{63} \end{bmatrix}$$

$l_{11=}\left[(\gamma\delta^4 \oplus \gamma^2\delta^{16})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{12=}\left[(\gamma^2\delta^{11} \oplus \gamma^3\delta^{24})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{13} =\left[(\gamma^2\delta^{12} \oplus \gamma^3\delta^{24})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{21=}\left[(\gamma^1\delta^7 \oplus \gamma^2\delta^{20})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{22=}\left[(\gamma^1\delta^2 \oplus \gamma^2\delta^{15})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{23} =\left[(\gamma^1\delta^3 \oplus \gamma^2\delta^{15})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{31=}\left[(\gamma^1\delta^8 \oplus \gamma^2\delta^{20})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{32=}\left[(\gamma^1\delta^3 \oplus \gamma^2\delta^{15})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{33} =\left[\gamma^1\delta^1 \oplus (\gamma^2\delta^{16} \oplus \gamma^3\delta^{28})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{41=}\left[(\gamma^1\delta^{10} \oplus \gamma^2\delta^{23})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{42=}\left[(\gamma^1\delta^5 \oplus \gamma^2\delta^{18})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{43} =\left[(\gamma^1\delta^6 \oplus \gamma^2\delta^{18})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{51=}\left[(\gamma^1\delta^{12} \oplus \gamma^2\delta^{24})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{52=}\left[(\gamma^1\delta^7 \oplus \gamma^2\delta^{19})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{53} =\left[(\gamma^1\delta^7 \oplus \gamma^2\delta^{20})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{61=}\left[(\delta^8 \oplus \gamma^1\delta^{21})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{62=}\left[(\delta^3 \oplus \gamma^1\delta^{16})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{63} =\left[(\delta^4 \oplus \gamma^1\delta^{16})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$

Le calcul de l'équation de l'observateur d'ordre reduit de la forme :

$$\hat{V_2} = (A_{22} \oplus LA_{11}^* A_{12})^*(A_{21}y \oplus B_2u)$$

Nous donne :

$$\hat{V_2} = \begin{bmatrix} e \oplus \gamma^1\delta^{10} \oplus (\gamma^2\delta^{25} \oplus \gamma^3\delta^{37})(\gamma^2\delta^{25})^* \\ \delta \oplus (\gamma^1\delta^{16} \oplus \gamma^2\delta^{28})(\gamma^2\delta^{25})^* \\ \delta^4 \oplus \gamma^1\delta^{14} \oplus (\gamma^2\delta^{29} \oplus \gamma^3\delta^{41})(\gamma^2\delta^{25})^* \\ \delta^5 \oplus (\gamma^1\delta^{19} \oplus \gamma^2\delta^{31})(\gamma^2\delta^{25})^* \\ (\delta^8 \oplus \gamma^1\delta^{20})(\gamma^2\delta^{25})^* \\ (\delta^{17} \oplus \gamma^1\delta^{29})(\gamma^2\delta^{25})^* \end{bmatrix}$$

Ces calcules vérifient que la contrainte $\hat{V_2} \preceq V_2$ est bien respectée . de plus cela ce voit au niveau de la figure 3.5 ou les trajectoire son bien confondues ce qui prouve la bonne observation .

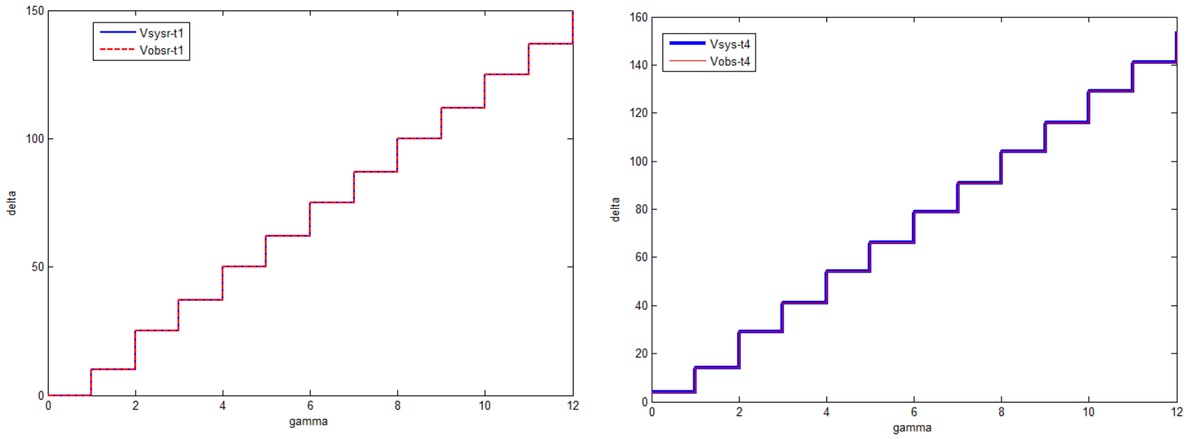


FIGURE 3.5 – représentation de V_2 et $\hat{V_2}$ au niveau de la transition $t_1$et t_4

Le calcul de la sortie de systéme 3.10 nous donne :

$$W = A_{11}^* A_{12} V_2$$

$$W_{sys} = \begin{bmatrix} \delta^6 \oplus (\gamma^1\delta^{21} \oplus \gamma^2\delta^{33})(\gamma^2\delta^{25})^* \\ \delta^{11} \oplus (\gamma^1\delta^{26} \oplus \gamma^2\delta^{38})(\gamma^2\delta^{25})^* \\ (\delta^{13} \oplus \gamma^1\delta^{25})(\gamma^2\delta^{25})^* \end{bmatrix}$$

Le calcul de la sortie estimé nous donne :

$$\hat{W} = A_{11}^* A_{12}(A_{22} \oplus L A_{11}^* A_{12})^*(A_{21} y \oplus B_2 u)$$

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} \delta^6 \oplus (\gamma^1\delta^{21} \oplus \gamma^2\delta^{33})(\gamma^2\delta^{25})^* \\ \delta^{11} \oplus (\gamma^1\delta^{26} \oplus \gamma^2\delta^{38})(\gamma^2\delta^{25})^* \\ (\delta^{13} \oplus \gamma^1\delta^{25})(\gamma^2\delta^{25})^* \end{bmatrix}$$

La figure 3.6 représnt la sortie de systéme reduit et la sortie estimé . W_{sys} et $\hat{W}$ sont parfaitement confondus ce qui prouve la bonne observation .

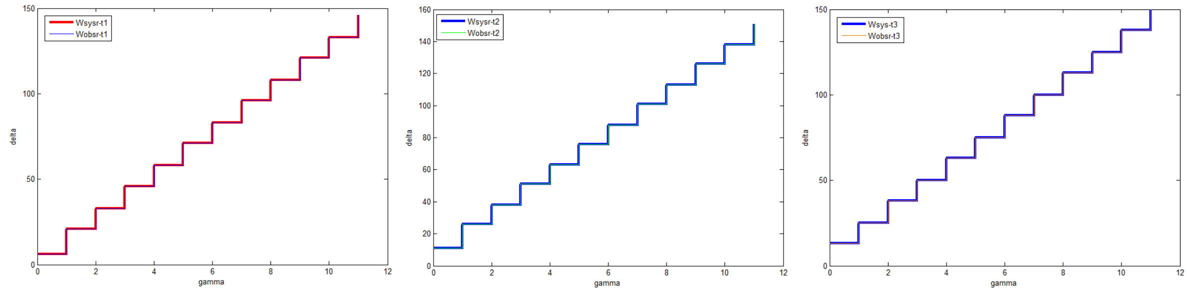


FIGURE 3.6 – représentation des sorties W et $\hat{W}$

3.3.4 Observateur d'ordre réduit avec présence de perturbation

La structure d'un Observateur d'ordre réduit avec présence de perturbation pour les systémes max plus est inspirée de la théorie des systémes linéaires classiques et est donnée par la figure suivante :

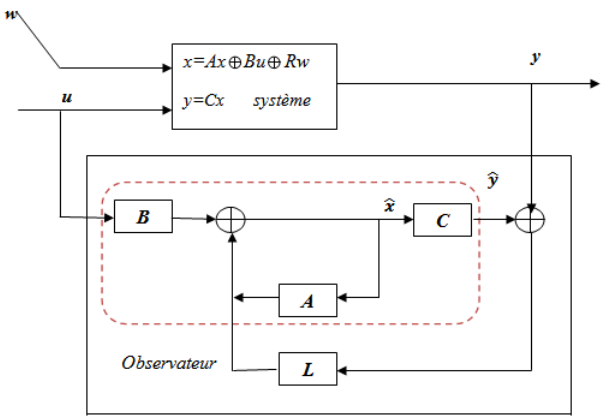


FIGURE 3.7 – Structure de l'observateur avec perturbation

Dans ce cas nous avons L'équation d'état du graphe d'évenement temporisé peut étre s'écrie comme suit :

$$\begin{cases} x = Ax \oplus Bu \oplus Rw = A^{*}Bu \oplus A^{*}Rw \\ y = Cx \end{cases} \tag{3.21}$$

Avec x (vecteur de l'état de systéme) , u (vecteur de commande), y (vecteur associé aux transitions de sortie) et w (vecteur de perturbation) . Et les matrice $A\in M_{in}^{ax}[\gamma,\delta]^{n\times n}$,$B \in M_{in}^{ax}[\gamma,\delta]^{n\times m}$, $C \in M_{in}^{ax}[\gamma,\delta]^{l\times n}$ et $R \in M_{in}^{ax}[\gamma,\delta]^{n\times p}$sont des matrices d'état, de commande , d'observation et de perturbation .

Dans le cas d'Observateur d'ordre réduit L'équation d'état du graphe d'évenement temporisé est exprimée sous la forme suivante :

$$\begin{cases} V_1 = A_{11}V_1 \oplus A_{12}V_2 \oplus B_1u \oplus R_1w \\ V_2 = A_{21}V_1 \oplus A_{22}V_2 \oplus B_2u \oplus R_2w \\ y = V_1 \end{cases} \tag{3.22}$$

$$\begin{cases} V_2 = A_{22}V_2 \oplus \tilde{u} \oplus R_2w = A_{22}^*\tilde{u} \oplus A_{22}^*R_2w \\ W = A_{11}^*A_{12}V_2 \end{cases} \tag{3.23}$$

Notre représentation d'état de l'observateur d'ordre réduit est donné par :

$$\begin{cases} \hat{V}_2 = A_{22}\hat{V}_2 \oplus \tilde{u} \oplus L(\hat{W} \oplus W) \\ \hat{W} = A_{11}^*A_{12}\hat{V}_2 \end{cases}$$

On introduisant l'équation 3.23 dans cette équation on aura la forme suivante :

$$\hat{V}_2 = A_{22}\hat{V}_2 \oplus \tilde{u} \oplus LA_{11}^*A_{12}\hat{V}_2 \oplus LA_{11}^*A_{12}V_2$$

$$\hat{V}_2 = (A_{22} \oplus LA_{11}^*A_{12})\hat{V}_2 \oplus \tilde{u} \oplus LA_{11}^*A_{12}(A_{22}^*\tilde{u} \oplus A_{22}^*R_2w)$$

$$\hat{V}_2 = (A_{22} \oplus LA_{11}^*A_{12})^*\tilde{u} \oplus (A_{22} \oplus LA_{11}^*A_{12})^*LA_{11}^*A_{12}(A_{22}^*\tilde{u} \oplus A_{22}^*R_2w)$$

$$\hat{V}_2 = (A_{22}\oplus LA_{11}^*A_{12})^*\tilde{u}\oplus(A_{22}\oplus LA_{11}^*A_{12})^*LA_{11}^*A_{12}A_{22}^*\tilde{u}\oplus(A_{22}\oplus LA_{11}^*A_{12})^*LA_{11}^*A_{12}A_{22}^*R_2w \tag{3.24}$$

D'aprés la propriétés 1.9 de l'étoile de Kleene définie dans le chapitre précédent
On a :

$$(A_{22} \oplus LA_{11}^*A_{12})^* = A_{22}^*(LA_{11}^*A_{12}A_{22}^*)^*$$

En l'introduisant dans L'équation 3.24 , nous obtenons :

$$\hat{V}_2 = A_{22}^*(LA_{11}^*A_{12}A_{22}^*)^*\tilde{u}\oplus A_{22}^*(LA_{11}^*A_{12}A_{22}^*)^*LA_{11}^*A_{12}A_{22}^*\tilde{u}\oplus A_{22}^*(LA_{11}^*A_{12}A_{22}^*)^*LA_{11}^*A_{12}A_{22}^*R_2w$$

D'aprés la propriétés 1.11 de l'étoile de Kleene :
On a :

$$(LA_{11}^*A_{12}A_{22}^*)^*LA_{11}^*A_{12}A_{22}^* = (LA_{11}^*A_{12}A_{22}^*)^+$$

donc l'équation peut s'écrire :

$$\hat{V_2} = A_{22}^*(LA_{11}^*A_{12}A_{22}^*)^*\tilde{u} \oplus A_{22}^*(LA_{11}^*A_{12}A_{22}^*)^+\tilde{u} \oplus A_{22}^*(LA_{11}^*A_{12}A_{22}^*)^+R_2w$$

D'aprés la propriétés 1.2 de l'étoile de Kleene voir le Chapitre 1
On a :

$$(LA_{11}^*A_{12}A_{22}^*)^+ \preceq (LA_{11}^*A_{12}A_{22}^*)^*$$

Ce qui conduit à :

$$\hat{V_2} = A_{22}^*(LA_{11}^*A_{12}A_{22}^*)^*\tilde{u} \oplus A_{22}^*(LA_{11}^*A_{12}A_{22}^*)^+R_2w \tag{3.25}$$

On peut exprimée le système en fonction des signaux disponibles y et u du système original on remplace $\tilde{u}$ par son équation ainsi :

$$\hat{V_2} = A_{22}^*(LA_{11}^*A_{12}A_{22}^*)^*(A_{21}y \oplus B_2u) \oplus A_{22}^*(LA_{11}^*A_{12}A_{22}^*)^*)^*LA_{11}^*A_{12}A_{22}^*R_2w$$

On obtient finalement :

$$\begin{cases} \hat{V_2} = (A_{22} \oplus LA_{11}^*A_{12})^*\tilde{u} \oplus (A_{22} \oplus LA_{11}^*A_{12})^*)^*LA_{11}^*A_{12}A_{22}^*R_2w \\ \hat{W} = A_{11}^*A_{12}\hat{V_2} \end{cases} \tag{3.26}$$

3.3.5 Calcul du gain d'Observateur d'ordre réduit en présence de pérturbation

Notre objectif dans cette section est alors de déterminer la plus grand matrice d'observation L_{opt} afin que le vecteur d'état éstimé $\hat{V_2}$soit aussi proche que possible de l'état V_2, sous la contrainte $\hat{V_2} \preceq V_2$.

donc on peut écrire :

$$(A_{22} \oplus LA_{11}^*A_{12})^*\tilde{u} \oplus (A_{22} \oplus LA_{11}^*A_{12})^*)^*LA_{11}^*A_{12}A_{22}^*R_2w \preceq A_{22}^*\tilde{u} \oplus A_{22}^*R_2w$$

Cela est équivalent à :

$$(A_{22} \oplus L_1A_{11}^*A_{12})^*\tilde{u} \preceq A_{22}^*\tilde{u} \tag{3.27}$$

$$(A_{22} \oplus L_2A_{11}^*A_{12})^*)^*L_2A_{11}^*A_{12}A_{22}^*R_2w \preceq A_{22}^*R_2w \tag{3.28}$$

pour l'équiation 3.27 on à le L_{opt} à été calculé précédemment dans le cas sans pérturbation
.

$$L_1 = L_{optr} = A_{22}^*\tilde{u}\phi A_{11}^*A_{12}A_{22}^*\tilde{u} \tag{3.29}$$

pour l'équiation 3.28 on obtient les équivalences suivantes :

$$(A_{22} \oplus L_2A_{11}^*A_{12})^*)^*L_2A_{11}^*A_{12}A_{22}^*R_2w \preceq A_{22}^*R_2w$$

$$A_{22}^*(L_2A_{11}^*A_{12}A_{22}^*)^*L_2A_{11}^*A_{12}A_{22}^*R_2w \preceq A_{22}^*R_2w$$

En utilisant la propriétes de la résiduation $L_a^{\#}$:

$$(L_2A_{11}^*A_{12}A_{22}^*)^*L_2A_{11}^*A_{12}A_{22}^*R_2w \preceq A_{22}\backslash A_{22}^*R_2w$$

aussi cette equation est équivalente à :

$$(L_2A_{11}^*A_{12}A_{22}^*)^*L_2A_{11}^*A_{12}A_{22}^*R_2w \preceq A_{22}^*R_2w$$

D'aprés la propriétés 1.6 de l'étoile de Kleene voir
On aura :

$$(L_2A_{11}^*A_{12}A_{22}^*)^*L_2A_{11}^*A_{12}A_{22}^*A_{22}^*R_2w \preceq A_{22}^*R_2w$$

D'aprés la propriétés 1.2 de l'étoile de Kleene voir le Chapitre 1
On aura :

$$(L_2A_{11}^*A_{12}A_{22}^*)^+A_{22}^*R_2w \preceq A_{22}^*R_2w$$

En utilisant la propriétes de la résiduation $R_a^{\#}$:

$$(L_2A_{11}^*A_{12}A_{22}^*)^+ \preceq A_{22}^*R_2w\phi A_{22}^*R_2w$$

En utilisant la propriétes 1.30 de la résiduation :
On aura :

$$((L_2A_{11}^*A_{12}A_{22}^*)^+)^* \preceq (A_{22}^*R_2w\phi A_{22}^*R_2w)^*$$

D'aprés la propriétés 1.3 de l'étoile de Kleene voir le Chapitre 1
On aura :

$$L_2A_{11}^*A_{12}A_{22}^* \preceq A_{22}R_2w\phi A_{22}^*R_2w$$

En utilisant la propriétes de la résiduation $R_a^{\#}$:

$$L_2 \preceq A_{22}^* R_2 w \phi A_{22}^* R_2 w \phi A_{11}^* A_{12} A_{22}^*$$

D'aprés la propriétés 1.6 de l'étoile de Kleene et la propriétes de la résiduation 1.41 voir le Chapitre 1 .

On aura :

$$L_2 \preceq A_{22}^* R_2 w \phi A_{11}^* A_{12} A_{22}^* R_2 w$$

$$L_{2optr} = A_{22}^* R_2 w \phi A_{11}^* A_{12} A_{22}^* R_2 w \tag{3.30}$$

A partir des deux inégalités 3.29 et 3.30 on obtient deux solution L_{1opt} et L_{2opt} d'ou la solution optimale pour le systéme pérturbé est donnée come suit :

$$L_{optrp} = L_{2optr}$$

illustration : Nous reprenons l'exemple de la figure 3.4 , on rajoute une perturbation w au niveaux de la transition x_4 et on obtient le graphe d'événement temporisé représenté dans la figure 3.8

La transition w représente une perturbation qui se place à l'entrée de la *machine*2 qui sensée de produire les piéce de type p_2.Cela implique une panne lors de la production des piéce et qui à pour effet de retardée la sortie de graphe d'événement temporisé .

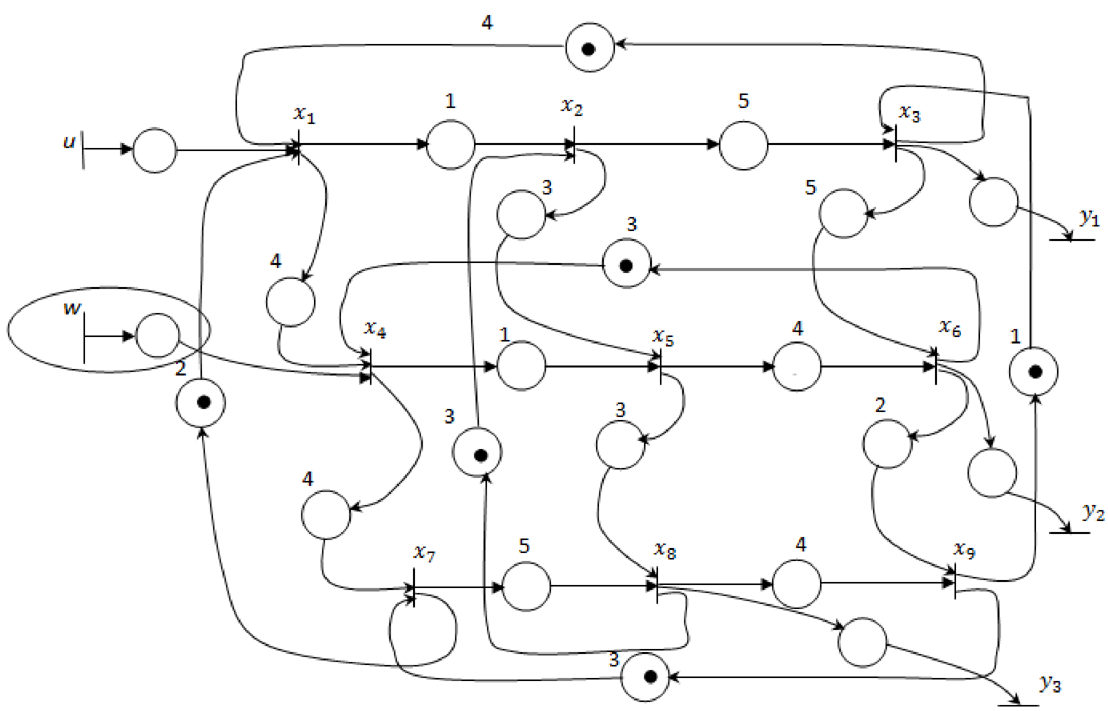


FIGURE 3.8 – Modèle GET d'un systéme de type flowshops avec perturbation

On suppose que la panne intervient à l'événement 3 et que cette perturbation repousse le tir de la transition x_4 à l'instant 45 ($\gamma^3\delta^{45}$) au lieu de l'instant 41 ($\gamma^3\delta^{41}$) .

la représentation d'état de systéme d'ordre réduit perturbé nous donne les résultat suivant :

$$V_{2p} = \begin{bmatrix} e \oplus \gamma^1\delta^{10} \oplus \gamma^2\delta^{25} \oplus \gamma^3\delta^{37} \oplus \gamma^4\delta^{51} \oplus (\gamma^5\delta^{62} \oplus \gamma^6\delta^{75}\oplus)(\gamma^2\delta^{25})^* \\ \delta \oplus (\gamma^1\delta^{16} \oplus \gamma^2\delta^{28})(\gamma^2\delta^{25})^* \\ \delta^4 \oplus \gamma^1\delta^{14} \oplus \gamma^2\delta^{29} \oplus \gamma^3\delta^{45} \oplus \gamma^4\delta^{55} \oplus (\gamma^5\delta^{66} \oplus \gamma^6\delta^{79}\oplus)(\gamma^2\delta^{25})^* \\ \delta^5 \oplus \gamma\delta^{19} \oplus \gamma^2\delta^{31} \oplus \gamma^3\delta^{46} \oplus (\gamma^4\delta^{56} \oplus \gamma^5\delta^{69}\oplus)(\gamma^2\delta^{25})^* \\ \delta^8 \oplus \gamma^1\delta^{20} \oplus \gamma^2\delta^{33} \oplus \gamma^3\delta^{49} \oplus \gamma^4\delta^{59}(\gamma^5\delta^{70} \oplus \gamma^6\delta^{83}\oplus)(\gamma^2\delta^{25})^* \\ (\delta^{17} \oplus \gamma^1\delta^{29})(\gamma^2\delta^{25})^* \end{bmatrix}$$

Notre gain optimal dans ce cas est le suivant :

$$L_{optrp} = L_{1optr} \wedge L_{2optr}$$

Le résultat de l'équation 3.29 est le suivant :

$$L_{1optr} = \begin{bmatrix} l_{11p} & l_{12p} & l_{13p} \\ l_{21p} & l_{22p} & l_{23p} \\ l_{31p} & l_{32p} & l_{33p} \\ l_{41p} & l_{42p} & l_{43p} \\ l_{51p} & l_{52p} & l_{53p} \\ l_{61p} & l_{62p} & l_{63p} \end{bmatrix}$$

$l_{11p=}\left[(\gamma\delta^4 \oplus \gamma^2\delta^{16})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{12p=}\left[(\gamma^2\delta^{11} \oplus \gamma^3\delta^{24})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{13p} =\left[(\gamma^2\delta^{12} \oplus \gamma^3\delta^{24})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{21p=}\left[(\gamma^1\delta^7 \oplus \gamma^2\delta^{20})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{22p=}\left[(\gamma^1\delta^2 \oplus \gamma^2\delta^{15})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{23p} =\left[(\gamma^1\delta^3 \oplus \gamma^2\delta^{15})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{31p=}\left[(\gamma^1\delta^8 \oplus \gamma^2\delta^{20})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{32p=}\left[(\gamma^1\delta^3 \oplus \gamma^2\delta^{15})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{33p} =\left[\gamma^1\delta^1 \oplus (\gamma^2\delta^{16} \oplus \gamma^3\delta^{28})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{41p=}\left[(\gamma^1\delta^{10} \oplus \gamma^2\delta^{23})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{42p=}\left[(\gamma^1\delta^5 \oplus \gamma^2\delta^{18})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{43p} =\left[(\gamma^1\delta^6 \oplus \gamma^2\delta^{18})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{51p=}\left[(\gamma^1\delta^{12} \oplus \gamma^2\delta^{24})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$
$l_{52p=}\left[(\gamma^1\delta^7 \oplus \gamma^2\delta^{19})(\gamma^2\delta^{25})^*\right]$

$l_{53p} = \left[(\gamma^1\delta^7 \oplus \gamma^2\delta^{20})(\gamma^2\delta^{25})^* \right]$
$l_{61p=} \left[(\delta^8 \oplus \gamma^1\delta^{21})(\gamma^2\delta^{25})^* \right]$
$l_{62p=} \left[(\delta^3 \oplus \gamma^1\delta^{16})(\gamma^2\delta^{25})^* \right]$
$l_{63p} = \left[(\delta^4 \oplus \gamma^1\delta^{16})(\gamma^2\delta^{25})^* \right]$
Et :

$$L_{2optr} = \begin{bmatrix} l_{11p} & l_{12p} & l_{13p} \\ l_{21p} & l_{22p} & l_{23p} \\ l_{31p} & l_{32p} & l_{33p} \\ l_{41p} & l_{42p} & l_{43p} \\ l_{51p} & l_{52p} & l_{53p} \\ l_{61p} & l_{62p} & l_{63p} \end{bmatrix}$$

$l_{11p=} \left[(\gamma\delta^4)(\gamma^2\delta^{25})^* \right]$
$l_{12p=} \left[(\gamma^2\delta^9)(\gamma^2\delta^{25})^* \right]$
$l_{13p} = \left[(\gamma^2\delta^7)(\gamma^2\delta^{25})^* \right]$
$l_{21p=} \left[(\gamma^1\delta^5)(\gamma^2\delta^{25})^* \right]$
$l_{22p=} \left[(\gamma^1\delta^0)(\gamma^2\delta^{25})^* \right]$
$l_{23p} = \left[(\gamma^2\delta^8)(\gamma^2\delta^{25})^* \right]$
$l_{31p=} \left[(\gamma^1\delta^8)(\gamma^2\delta^{25})^* \right]$
$l_{32p=} \left[(\gamma^1\delta^3)(\gamma^2\delta^{25})^* \right]$
$l_{33p} = \left[\gamma^1\delta^1(\gamma^2\delta^{25})^* \right]$
$l_{41p=} \left[(\gamma^1\delta^9)(\gamma^2\delta^{25})^* \right]$
$l_{42p=} \left[(\gamma^1\delta^4)(\gamma^2\delta^{25})^* \right]$
$l_{43p} = \left[(\gamma^1\delta^2)(\gamma^2\delta^{25})^* \right]$
$l_{51p=} \left[(\delta^2)(\gamma^2\delta^{25})^* \right]$
$l_{52p=} \left[(\gamma^1\delta^7)(\gamma^2\delta^{25})^* \right]$
$l_{53p} = \left[(\gamma^1\delta^5)(\gamma^2\delta^{25})^* \right]$
$l_{61p=} \left[\varepsilon \right]$
$l_{62p=} \left[\varepsilon \right]$
$l_{63p} = \left[\varepsilon \right]$
D'ou :

$$L_{optrp} = L_{1optr} \wedge L_{2optr}$$

$$L_{optrp} = L_{2opt}$$

L'équation de l'observateur 3.15 nous donne :

$$\hat{V_{2p}} = \begin{bmatrix} e \oplus \gamma^1\delta^{10} \oplus (\gamma^2\delta^{25} \oplus \gamma^3\delta^{37} \oplus (\gamma^2\delta^{25})^* \\ \delta \oplus (\gamma^1\delta^{16} \oplus \gamma^2\delta^{28})(\gamma^2\delta^{25})^* \\ \delta^4 \oplus \gamma^1\delta^{14} \oplus (\gamma^2\delta^{29} \oplus \gamma^3\delta^{41} \oplus)(\gamma^2\delta^{25})^* \\ \delta^5 \oplus (\gamma\delta^{19} \oplus \gamma^2\delta^{31} \oplus)(\gamma^2\delta^{25})^* \\ (\delta^8 \oplus \gamma^1\delta^{20} \oplus)(\gamma^2\delta^{25})^* \\ (\delta^{17} \oplus \gamma^1\delta^{29})(\gamma^2\delta^{25})^* \end{bmatrix}$$

Les résultat sont illustrés sur la figure 3.9 qui suit . clairement au départ les deux courbe sont superposées mais aprés avoir appliqué la perturbation au niveaux de la transition x_4 à partir de 3^{eme}frenchissement , ils s'est avéré un décalage entre les deux courbes , ce décalage est due au retardement du passage du la piéce qui est passé à 45 au lieu de 41 $u.t$. Cette perturbation a eu un effet sur le passage du jeton 4 qui a été retardé d'une $u.t$. A l'instant 66 les deux courbes se rejoignent et superpose .

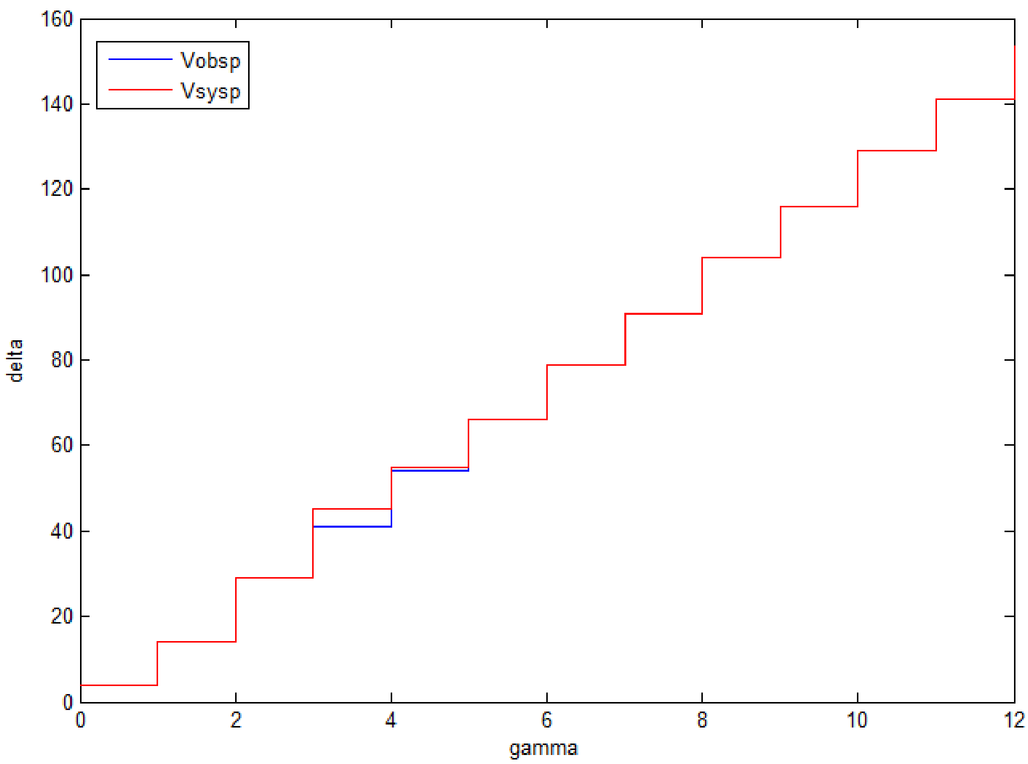


FIGURE 3.9 – représentation de V_{2sysp} et V_{2obsp} au niveau de la transition t_4

Calcule de la sortie perturbé :

$$W_{sp} = \begin{bmatrix} \delta^6 \oplus (\gamma^1\delta^{21} \oplus \gamma^2\delta^{33})(\gamma^2\delta^{25})^* \\ \delta^{11} \oplus (\gamma^1\delta^{26} \oplus \gamma^2\delta^{38})(\gamma^2\delta^{25})^* \\ \delta^{13} \oplus \gamma^1\delta^{25} \oplus \gamma^2\delta^{38} \oplus \gamma^3\delta^{54} \oplus \gamma^4\delta^{64} \oplus)(\gamma^5\delta^{75} \oplus \gamma^6\delta^{88} \oplus)(\gamma^2\delta^{25})^* \end{bmatrix}$$

La figure 3.10 représente le sortie du systéme idéal et la sortie du systéme perturbé .

L'application de la perturbation affecte le comportement de systéme , cela se voie dans la figure 3.10 qui à pour effet de retarder la sortie du GET .

Au départ les deux courbes sont superposées mais aprés avoir appliqué la perturbation au niveaux de la transition x_4 à partir de 3^{eme} franchissement , il s'est avéré un décalage entre les deux courbes et à l'instant 75 que les deux courbe se rejoingnent et se superposent .

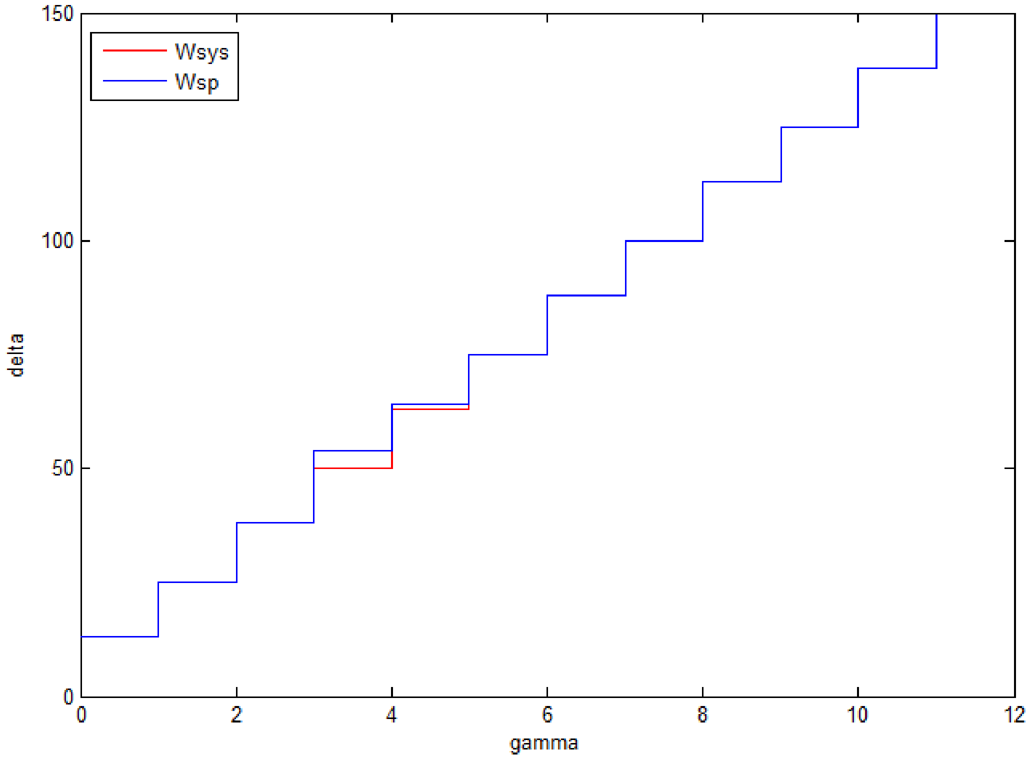


FIGURE 3.10 – représentation de la 3^{eme}sortie W_{sys} et W_p

Conclusion :

L'estimation d'état d'un graphe d'évenment temporisé a été abordée dans ce chapitre . Tout d'abord nous avons commencé par rappelé quelques définitions relatives à l'observbilité des systémes à événement discrete , ensuite nous nous sommes intéressés à la synthèse d'observateurs standards, d'ordre plein proposé par luenberger .

Dans un second temps , nous avons abordé l'estimation d'observateurs d'ordre réduit dans le but de récupérer les informations sur l'état via la sortie mesurée tout en réduisant les état à éstimée .

Enfin, nous avons clôturé le chapitre par une proposition d'une méthode de synthèse d'observateurs d'ordre réduit avec présence de perturbation .

Conclusion générale

Nous présentons dans ce mémoire des travaux et des résultats relatifs à la synthése de l'observateur d'ordre réduit modélisée par les graphes d'événements temporisés et représentée par un modéles $M_{ax}^{in}[\![\gamma, \delta]\!]$.

Ce mémoire s'articule autour de trois chapitres.

Dans le premier chapitre en a donné quelques rappele fondamentaux concernant les propriétés mathématiques des dioïdes, La théorie de la résiduation qui est une alternative au problème d'inversion d'applications définies sur des dioïdes , Ainsi que l'application de l'étoile de Kleene qui joue un rôle important dans le probléme de la synthése d'un observateur .

Le deuxième chapitre traite la modélisation de systémes à événeent discrets par une sous-classe des réseaux de petri applée les graphes d'événements temporisés dans différent dioïdes (représentation aux dateurs et aux compteur , représentation en séries formelles) qui nous permet d'obtenire une représentation d'état linéaires afin de représenter les graphes d'événements temporisés par leur fonction de transfert .

Dans le troisiéme chapitre , Nous avons présenté pour la premiere fois des travaux portant sur la synthése d'un observateur d'ordre réduit d' un graphes d'événements temporisés dans l'lgébre max-plus . Le principe de l'observateur d'ordre réduit est comme suit : partant d'un système représentable par un graphe d'événements temporisé en reconstruit ces états à partir des informations récupérer par les sorties mesurée tout en réduisant les état à éstimée . La démarche adoptée correspond à celle suggérée lors de la synthése d'observateur d'ordre réduit pour les systèmes continus classiques . Le probléme est résolu en introduisant une petite pérmutation ainsi que la théorie de la résiduation et l'étoile de Kleene .

Annexes

1.Introduction :

La librairie $MinMaxGD$ [5] se présente comme un ensemble de routines écrites en C++, liées au logiciel Scilab. Cette librairie permet de manipuler des séries rationnelles dans le dioïde $M_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$.

Une partie des travaux de thèse a porté sur le développement des interfaces entre la librairie C++ et Scilab .

Notons également que le groupe Max Plus de l'INRIA a également développé une librairie pour Scilab, permettant le calcul dans le dioïde $\overline{Z}max$.

Dans la suite de cette annexe, on trouvera l'ensemble des scripts Scilab utilisés pour effectuer les calculs des différents exemples de ce mémoire.

Tout d'abord, nous allons découvrir l'utilisation de la $MinMaxGD$ dans Scilab à travers un exemple. L'exemple traité dans la suite correspond à l'illustration présentée dans le chapitre 3 . Il s'agit d'un systèmes de production de type flowshops.

scilab-3.1.1

Copyright(C) 1989-2005

Consortium Scilab (INRIA, ENPC)

Startup execution :

Loading initial environment

— Commençons par charger la librairie dans l'environnement Scilab

-->scipad ('C :\PROGRA~2\SCILAB~1.1\MINMAX~1.1\loader.sce') ;

-->shared archive loaded

MACROS =

C :\Program Files (x86)\scilab-3.1.1\minmaxgd1.1\macros\

La commande $A = smatrix(m,n)$ permet de déclarer une matrice (notée A) de m lignes et n colonnes. Après la déclaration, tous les termes de la matrices sont initialisés à ε .

l'initialisation des termes de la matrice s'effectue à l'aide de la commande $series$.

2. Syntaxe générale : $MinMaxGD$ reconnaît les types élémentaires suivants : type série (noté *series*) et le type matrice (noté *smatrix*) correspondant au dioïde $M_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$. $MinMaxGD$ reconnaît les opérations algébriques de base suivantes (pour deux élémentsa ; $b \in M_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$:

opération	syntaxe
$\oplus$ (somme)	$a + b$
$\otimes$ (produit)	a^*b
$\backslash$ (résiduation à gauche)	$a \backslash b$
/ (résiduation à droite)	b/a
* (étoile de Kleene)	$stargd(a)$
Pr_+ (projection dans les causaux)	$prcaus(a)$
$\wedge$ (inf)	a $\wedge$ b

Table 3.1 – les syntaxe algébriques utilisée dans $MinMaxGD$

Script scilab clc

```
// initialisation des matrices
A= smatrix(9,9) ;
B= smatrix(9,1) ;
C= smatrix(3,9) ;
P= smatrix(9,9) ;
a11=smatrix(3,3) ;
a12=smatrix(3,6) ;
a21=smatrix(6,3) ;
a22=smatrix(6,6) ;
b1=smatrix(3,1) ;
b2=smatrix(6,1) ;
// affectation des valeurs des matrices
// matrice d'état
A(1,3)= series(eps,[1 4],e) ;
A(1,7)= series(eps,[1 2],e) ;
A(2,1)= series(eps,[0 1],e) ;
A(2,8)= series(eps,[1 3],e) ;
A(3,2)= series(eps,[0 5],e) ;
A(3,9)= series(eps,[1 1],e) ;
A(4,1)= series(eps,[0 4],e) ;
A(4,6)= series(eps,[1 3],e) ;
A(5,2)= series(eps,[0 3],e) ;
A(5,4)= series(eps,[0 1],e) ;
A(6,3)= series(eps,[0 5],e) ;
A(6,5)= series(eps,[0 4],e) ;
A(7,4)= series(eps,[0 4],e) ;
A(7,9)= series(eps,[1 3],e) ;
A(8,5)= series(eps,[0 3],e) ;
A(8,7)= series(eps,[0 5],e) ;
```

```
A(9,6)= series(eps,[0 2],e);
A(9,8)= series(eps,[0 4],e);
// matrice de commande
B(1,1)=s_e;
// vecteur de commande
u(1,1)=s_e;
// matrice d'observation
C(1,3)=s_e;
C(2,6)=s_e;
C(3,8)=s_e;
// matrice de permutation
P(1,3)=s_e;
P(2,6)=s_e;
P(3,8)=s_e;
P(4,1)=s_e;
P(5,2)=s_e;
P(6,4)=s_e;
P(7,5)=s_e;
P(8,7)=s_e;
P(9,9)=s_e;
//
a11(2,1)=series(eps,[0 5],e);
a12(1,2)=series(eps,[0 5],e);
a12(1,6)=series(eps,[1 1],e);
a12(2,4)=series(eps,[0 4],e);
a12(3,4)=series(eps,[0 3],e);
a12(3,5)=series(eps,[0 5],e);
a21(1,1)=series(eps,[1 4],e);
a21(2,3)=series(eps,[1 3],e);
a21(3,2)=series(eps,[1 3],e);
a21(6,2)=series(eps,[0 2],e);
a21(6,3)=series(eps,[0 4],e);
a22(1,5)=series(eps,[1 2],e);
a22(2,1)=series(eps,[0 1],e);
a22(3,1)=series(eps,[0 4],e);
a22(4,2)=series(eps,[0 3],e);
a22(4,3)=series(eps,[0 1],e);
a22(5,3)=series(eps,[0 4],e);
a22(5,6)=series(eps,[1 3],e);
```

```
b2(1,1)=series(eps,[0 0],e) ;
//calcule l'état de système d'ordre complet
Xsys=stargd(A)*B*u
//calcule la sortie de système d'ordre complet
y=C*Xsys
// calcule de la fonction de transfert
H=C*stargd(A)*B
// calcule de la matrice d'état apres permutation
A1=P*A*P'
B1=P*B
C1=C*P'
//calcule l'état de système d'ordre complet apres permutation
Xsys1= stargd(A1)*B1*u
//calcule la sortie de système d'ordre complet apres permutation
y=C1*Xsys1
// calcule du fonction de transfert apres permutation
H1=C1*stargd(A1)*B1
// calcul de Lopt d'ordre complet
L1= stargd(A1)*B1/H1 ;
Lopt= prcaus(L1)
// calcule de système d'ordre réduit
v=(a21*y)+(b2*u)
v2=stargd(a22)*v
// calcule la sortie de systéme d'ordre réduit
Wsys=stargd(a11)*a12*v2
// calcul de Lopt d'ordre reduit
L2=stargd(a22)*v/((stargd(a11))*a12*(stargd(a22))*v) ;
Lopt2= prcaus(L2)
```

Bibliographie

[1] F. Baccelli, G. Cohen, G.-J. Olsder et J.-P. Quadrat. Synchronization and linearity : An Algebra for Discrete Event Systems. Wiley and Sons, 1992.

[2] S. Gaubert. Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes. Thèse, Ecole des Mines de Paris, July 1992.

[3] J. Gunawardena, editeur. Idempotency. Publications of the Newton Institute. Cambridge University Press, 1998.

[4] Cottenceau, B. (1999). Contribution à la commande de systèmes à événements discrets : synthèse de correcteurs pour les graphes d'événements temporisés dans les dioïdes. Thèse, LISA - Université d'Angers.

[5] Cottenceau, B., Lhommeau, M., Hardouin, L., and Boimond, J.-L. (2000). Data Processing Tool for Calculation in Dioid. In Workshop On Discrete Event Systems (WODES' 2000), Ghent, Belgium.

[6] Cottenceau, B.,Hardouin.L,Boimond,j-L.,and Ferrier,j.-L.(2001).Model reference control for timed event graphs in dioids.Automatica,vol.37 :1451_1458.

[7] David, R. and Alla, H. (1989). Du grafcet aux réseaux de Petri. Hermès, Paris, France.

[8] Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J.-P., and Viot, M. (1989). Algebraic Tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems. IEEE Proceedings : Special issue on Discrete Event Systems, 77(1) :39–58.

[9] Cohen, G. (1994). Dioids and Discrete Event Systems. In Proc. of the 11th Conf. on Anal. and Opt. of Systems : Discrete Event Systems, number 199 in Lect. Notes. in Control and Inf. Sci, Sophia Antipolis. Springer.

[10] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J. (1996). Kernels, images and projections in dioids. In Proceedings of WODES'96, Edinburgh.

[11] Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J., and Viot, M. (1983). Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioïdes. Rapport de recherche 191, INRIA, Le Chesnay, France.

[12] Cohen, G. (1998). Residuation and Applications. In Algèbres Max-PLus et applications en informatique et automatique : Ecole de printemps d'informatique théorique, Noirmoutier : INRIA.

[13] T. Murata. Petri Nets : Properties, Analysis and Applications. In IEEE Proceedings : Special issue on Discrete Event Systems, volume 77, pages 541–581, 1989.

[14] C.-A. Petri. Kommunikation mit Automaten. Thèse, Institut für Instrumentelle Mathematik, Bonn, Germany, 1962.

[15] Observers for multivariable systems. IEEE Trans. Automatic Control, 11 :190–197.

[16] Luenberger, D. (1971). An introduction to observers. IEEE Trans. on Automatic Control, 16(6) :596–602.

[17] LeBoudec, J.-Y. and Thiran, P. (2002). Network Calculus. Springer Verlag.

[18] C.A. Maia, L. Hardouin, R. Santos-Mendes, and B. Cottenceau. On the Model Reference Control for Max-Plus Linear Systems. In 44th IEEE CDC-ECC'05, pages 7799–7803, Sevilla, Spain, 2005. http ://dx.doi.org/ 10.1109/CDC.2005.1583422.

[19] Sur la commande linéaire de systèmes à événements discrets dans l'algèbre (max,+). Automatique et Informatique Appliquée . Université d'Angers 2004.

[20] Lotito, P., Mancinelli, E., and Quadrat, J. (2001). A minplus derivation of the fundamental car-traffic law. Report 324 inria.

[21] Braker, H. (1993). Algorithms and Applications in Timed Discrete Event Systems. PhD thesis, Delft University of Technology

[22] Olsder, G., Subiono, and Gettrick, M. (1998). Course notes : On large scale maxplus algebra model in railway systems. Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique, Ecole de printemps d'informatique théorique.