

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

Mémoire de Fin d'Etudes de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Génie électrique

Spécialité : **Entrainements Electriques**

Présenté par
Amirouche HAROUZ

Thème

Reconstitution de Défauts Complexes avec la Méthode des Réseaux de Neurones. Application pour l'Evaluation Non Destructive.

Mémoire soutenu publiquement le 30 / 09 / 2015 devant le jury composé de :

M. Kamal HAMMOUCHE

Professeur, UMMTO, Président

M. Hassane MOHELLEBI

Professeur, UMMTO, Encadreur

M. Meziane HAMEL

Doctorant, UMMTO, Co-Encadreur

M. Farid HOCINI

MCB, UMMTO, Examineur

Remerciements

Je remercie Dieu de m'avoir fourni la volonté nécessaire pour mener à terme ce modeste travail.

Ce mémoire de Master a été proposé et dirigé par Monsieur MOUHILLEBI Hassane, Professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou (UMMTO). Ce moment est pour moi l'occasion de vous témoigner ma plus grande estime, mon profond respect et mon immense reconnaissance.

Je souhaite aussi remercier vivement Monsieur HAMMOUCHE Kamal, Professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou (UMMTO) de m'avoir aidé à finaliser la plus importante partie de mon travail avec clairvoyance, d'être disponible à chacune de mes sollicitations, pour ses riches discussions et ses précieux conseil et de m'avoir honoré en présidant mon jury de soutenance. Qu'il trouve ici ma profonde reconnaissance et mon témoignage respectueux.

Je souhaite aussi exprimer toute ma reconnaissance à mon co-promoteur Monsieur HAMEL Meziane, Doctorant à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou (UMMTO), pour ses encouragements et ses conseils avisés.

Je tiens à remercier tous les membres du jury, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'examiner ce travail et de leur présence en ce jury.

Mes remerciements vont aussi à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Enfin, je tiens à exprimer mes sincères remerciements à l'ensemble des enseignants et de tout le personnel de la Faculté de Génie Electrique et d'Informatique (FGEI), sans oublier tout le personnel de la bibliothèque centrale.

Je dédie ce modeste travail...

*A la lumière de ma vie, ma **mère**. A mon très cher **père**... Sans vos sacrifices et efforts, je ne serai guère là, à écrire ces mots qui décrivent et témoignent peu mes vrais sentiments pour vous, ma fierté de vous avoir à mes côtés durant toutes les étapes de ma modeste mais heureuse vie. J'espère que je saurai à la hauteur des valeurs que vous avez semées en moi... Que vous serez fière de moi comme moi je le suis.*

*A mes grandes sœurs **Lynda** et **Nadia**, leurs conjoints **Redouane** et **Med Ouremdane** ainsi qu'à leurs petits anges **Melyna** et **Yacine**.*

*A mes grandes sœurs **Razika** et **Samira**.*

*A mon grand frère **Hamid**, avec lequel je n'aurais pas le plaisir de partagé cet événement, vis pleinement ton rêve américain.*

A toute ma grande famille...

*A la mémoire d'un frère d'une autre mère, **Hocine HAMLA** « **Mahou** »... La maladie t'a emporté si jeune, mais tu es et tu demeureras dans mon cœur jusqu'au jour où je te rejoindrai.*

*A tous mes amis(es) et camarades... Particulièrement : **Hocine.K**, **Naim.H**, **Azouaou.B**, **Nadia.M**, **Thanina.K**,... ainsi que leurs familles. Tous et toutes ne peuvent pas figurer sur cette liste mais sont à jamais dans mon cœur.*

Sans oublier tous les enseignants qui ont contribué à ma formation, tous cycles confondus : primaire, secondaire, lycée et université. Je leur serai éternellement reconnaissant.

Sommaire

Sommaire

Introduction générale.....1

Chapitre I

Généralités sur le contrôle non destructif (CND)

I.1. Introduction.....3

I.2. Historique.....4

I.3. Définition du contrôle non destructif.....5

I.4. Différents défauts détectés en CND.....5

 I.4.1. Défauts de surface.....6

 I.4.2. Défauts internes.....6

I.5. Principe de détection de défauts.....6

I.6. Principaux procédés du CND.....8

 I.6.1. Procédés surfaciques.....8

 I.6.1.1. Procédés optiques.....8

 I.6.1.1.1. Examen visuel.....9

 I.6.1.1.2. Ressuage.....10

 I.6.1.2. Procédés électromagnétiques.....11

 I.6.1.2.1. Magnétoscopie.....11

 I.6.1.2.2. Courants de Foucault.....13

 I.6.2. Procédés volumiques.....22

 I.6.2.1. Ultrasons.....22

 I.6.2.2. Emission acoustique.....24

 I.6.2.3. Thermographie.....24

 I.6.2.4. Radiographie.....25

I.7. Evaluation non destructive (END).....26

I.8. Conclusion.....27

Chapitre II

Lois classiques et équations de bases de l'électromagnétisme

II.1. Introduction.....28

II.2. Historique.....	28
II.3. Lois classiques et équations de base de base de l'électromagnétisme.....	29
II.3.1. Flux du champ magnétique.....	29
II.3.2. Circulation du champ magnétique, théorème d'Ampère.....	30
II.3.2.1. Enoncé du théorème d'Ampère généralisé.....	30
II.3.3. Lois d'induction électromagnétique.....	31
II.3.3.1. Lois de Faraday.....	31
II.3.3.2. Lois de Lenz.....	31
II.3.4. Equations de Maxwell.....	32
II.3.5. Lois de comportement des milieux.....	33
II.3.5.1. Relations du milieu.....	33
II.3.5.2. Loi d'ohm.....	35
II.3.5.3. Equations de continuité.....	35
II.3.5.4. Relations de passage.....	35
II.3.5.4.1. Discontinuité de la composante normale de l'induction électrique.....	36
II.3.5.4.2. Conservation de la composante tangentielle du champ électrique.....	36
II.3.5.4.3. Conservation de la composante normale de l'induction magnétique.....	36
II.3.5.4.4. Discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique.....	36
II.3.6. Conditions aux limites.....	37
II.3.6.1. Condition type Dirichlet.....	37
II.3.6.2. Condition type Neumann.....	37
II.3.6.3. Condition mixte.....	37
II.3.6.4. Condition de périodicité et d'anti-périodicité.....	37
II.3.7. Electromagnétisme en régime quasi-stationnaire.....	38
II.3.7.1. Hypothèses simplificatrices.....	38
II.3.8. Formulation en potentiel vecteur magnétique.....	38
II.3.9. Equations des différentes régions d'un système électromagnétique.....	40

II.3.9.1. Equation dans le vide.....	40
II.3.9.2. Equation dans l'inducteur.....	40
II.3.9.3. Equation dans la charge (l'induit).....	40
II.3.10. Technique de calcul d'impédance.....	40
II.3.10.1. Hypothèses.....	40
II.3.10.2. Impédance à travers les énergies électromagnétiques.....	41
II.3.10.3. Impédance à travers la théorie des circuits.....	42
II.3.10.4. Impédance à travers l'induction ou le flux magnétique.....	43
II.4. Conclusion.....	44

Chapitre III

Modèles numériques et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

III.1. Introduction.....	45
III.2. Modèles.....	45
III.2.1. Modèle analytique.....	46
III.2.2. Modèle intermédiaire.....	46
III.2.3. Modèle numérique.....	46
III.2.3.1. Méthode des différences finies (MDF).....	47
III.2.3.2. Méthode des intégrales de frontières (MIF).....	48
III.2.3.3. Méthode des volumes finis (MVF).....	49
III.2.3.4. Méthode des éléments finis (MEF).....	50
III.2.4. Etapes de résolution par la MEF.....	51
III.2.5. Formulation éléments finis.....	51
III.2.5.1. Formulation variationnelle.....	51
III.2.5.2. Méthode des résidus pondérés (projective).....	53
a) Principe de la méthode.....	53
b) Différentes méthodes déduites des résidus pondérés.....	54
III.2.5.3. Discrétisation du domaine d'étude (maillage).....	55
a) Eléments finis réels.....	55
b) Fonction d'interpolation.....	57
c) Fonction d'interpolation sur élément.....	58
d) Fonction d'approximation sur le domaine.....	59

III.2.6. Formulation éléments finis des équations électromagnétiques.....	59
III.2.6.1. Equation magnétostatique.....	59
a) Cas cartésien.....	59
b) Cas axisymétrique.....	61
III.2.6.2. Equation magnétodynamique.....	62
a) Cas cartésien.....	62
b) Cas axisymétrique.....	64
III.3. Conclusion.....	65

Chapitre IV

Réseaux de neurones

IV.1. Introduction et historique.....	66
IV.2. Neurone biologique.....	67
IV.2.1. Physiologie.....	68
IV.2.2. Création d'un potentiel d'action.....	70
IV.3. Neurone artificiel (formel).....	71
IV.4. Fonctions d'activations.....	74
IV.5. Réseaux de neurones formels (RNF).....	76
IV.5.1. Architecture des réseaux de neurones formels.....	76
IV.5.2. Réseaux de neurones non bouclés (<i>feedforward neronal network</i>).....	77
IV.5.3. Réseaux de neurones bouclés (<i>feedback neronal network</i>).....	79
IV.5.3.1. Forme canonique des réseaux de neurones bouclés.....	80
IV.6. Structure d'interconnexion.....	81
IV.6.1. Réseau monocouche.....	82
IV.6.1.1. Fonctionnement.....	82
A. Mode perceptron.....	82
B. Mode ADALINE.....	84
C. Perceptron multicouche.....	85
IV.6.2. Réseau multicouche.....	85
IV.6.2.1. Réseau multicouche classique.....	86
IV.6.2.2. Réseau multicouche à connexions locales.....	86

IV.6.2.3. Réseau à connexions récurrentes.....	87
IV.6.2.4. Réseau d’Hopfield (réseau à connexions complexes).....	87
IV.6.2.5. Réseau de Kohonen.....	88
IV.7. Apprentissages des réseaux de neurones.....	88
IV.7.1. Types d’apprentissage des réseaux de neurones.....	89
IV.7.1.1. Apprentissage supervisé.....	89
IV.7.1.2. Apprentissage non-supervisé.....	90
IV.7.2. Algorithme d’apprentissage.....	91
IV.7.2.1. Algorithme de la rétro-propagation du gradient.....	91
IV.7.2.1.1. Principe de la rétro-propagation.....	93
IV.7.2.2. Algorithme de Levenberg-Marquardt.....	94
IV.8. Aspects pratiques pour la mise en œuvre d’un réseau de neurones.....	95
IV.9. Quelques exemples d’applications des réseaux de neurones à divers domaines des sciences de l’ingénieur.....	97
IV.10. Conclusion.....	98

Chapitre V

Application et validation

V.1. Introduction.....	100
V.2. Présentation du réseau et des géométries.....	101
V.3. Reconstitution de défauts.....	102
V.3.1. Résultats obtenus.....	103
V.3.2. Interprétation des résultats obtenus.....	112
V.4. Conclusion.....	116
Conclusion générale.....	119

Bibliographie

Introduction générale

Les exigences croissantes sans cesse dans la matière de qualité et de fiabilité des installations et des produits industriels notamment dans la métallurgie, l'aéronautique et le nucléaire ont conduit à l'apparition et au développement des méthodes dites : Evaluation non destructive (END) et contrôle non destructif (CND).

Le contrôle non destructif, constitue un champ d'application privilégié des découvertes de la physique, cette appellation regroupe les méthodes d'investigation qui permettent l'examen du matériau d'une pièce sans altérer son utilisation future, ni modifier ses caractéristiques. Cette étape du processus industriel est destinée à garantir la sécurité d'utilisation des pièces contrôlées. Elle joue aussi un rôle économique non négligeable, dans le sens où elle permet une gestion optimisée de la maintenance.

La connaissance de la forme du défaut est un paramètre très important pour l'ingénieur, afin de lui permettre de décider de l'avenir de la pièce. La plupart des méthodes de CND ne nous renseignent pas beaucoup sur la forme du défaut. Actuellement, il y a une forte demande pour une caractérisation plus quantitative et qualitative des défauts. Dans ce cas, on parle plus souvent d'une évaluation non destructive ou du problème inverse, généralement difficile à résoudre.

La difficulté pratique de l'étude des problèmes inverses est qu'elle demande souvent une bonne connaissance du problème direct, ce qui se traduit par le recours à une grande variété de notions tant physique que mathématique. Il existe toutefois quelques techniques qui possèdent un domaine d'applicabilité étendu tels que : la méthode des réseaux de neurones, qui nécessite pas une grande connaissance de ces notions. Une méthode que nous allons mettre en œuvre, afin de satisfaire aux besoins d'une évaluation non destructive.

Ce choix est motivé par la capacité des réseaux de neurones de modéliser aussi bien de façon linéaire que non linéaire, les relations entre les données présentées à son entrée et les sorties désirées. Le réel pouvoir des réseaux de neurones réside dans leur capacité d'apprendre ces relations directement à partir des données modélisées sous forme d'exemples. Cette méthode est actuellement très utilisée dans le domaine de la reconstitution des défauts, vu qu'elle offre la possibilité d'une modélisation dite « boîte noire ». Cependant, un réseau de neurones possède, en plus de ses coefficients réglables, un grand nombre d'éléments variables. Il faut en effet déterminer en particulier le nombre de couches internes sur

lesquelles sont fixés les neurones, le nombre de neurones sur chaque couche, le type de fonction d'activation pour chaque neurone. Donc, il est nécessaire de posséder une certaine expertise avant de pouvoir construire un réseau de neurones efficace.

En se basant sur une étude concernant le contrôle non destructif par courant de Foucault, cette technique qui offre la possibilité d'un contrôle sans contact entre le capteur et la pièce ainsi que le déplacement rapide du capteur sur la pièce, font d'elle une technique très appréciée.

Dans ce contexte, nous allons toucher au problème inverse, en implémentant un réseau neuronal capable d'évaluer les données fournies par un capteur différentiel à courant de Foucault. L'objectif de cette évaluation est la reconstitution des dimensions d'un défaut de type fissure.

Le manuscrit s'articule autour de quatre chapitres :

- Dans le premier chapitre, on a présenté les généralités sur le contrôle non destructif.
- Dans le deuxième et troisième chapitre, on a fourni une présentation des plus exhaustives possible sur les phénomènes électromagnétique et quelques de leurs méthodes de résolution.
- Dans le quatrième chapitre, on a estimé bon de faire une recherche approfondie sur les réseaux de neurones, afin de comprendre mieux notre approche neuronale pour reconstituer des défauts.
- Le dernier chapitre, se porte sur la présentation de l'application effectuée sous environnement MATLAB et les résultats obtenus.

Nous terminerons cette étude par une conclusion générale et des perspectives concernant la reconstitution des défauts.

Chapitre I

Généralités sur le Contrôle Non Destructif (CND)

I.1. Introduction

Les enjeux de sûreté, les contrôles de qualité et de santé des pièces deviennent un impératif incontournable. Le contrôle non destructif (CND) regroupe un ensemble de méthodes dont le but est de caractériser les structures testées sans que leur intégrité n'en soit affectée. Celui-ci correspond à la détection et la caractérisation des différents défauts et imperfections qui menacent la sécurité de fonctionnement des systèmes soumis à des contraintes mécaniques, thermique ou chimique. L'idée est ainsi de déterminer un traceur de caractérisation qui peut être une propriété (physique, optique, thermique...) ou bien une grandeur scalaire dont on peut surveiller les variations relatives par rapport à une valeur de référence (évaluation non destructive : END). Aujourd'hui, on assiste à une demande très importante et généralisée, émanant de tous les secteurs industriels comme l'industrie automobile, aéronautique, pétrolière, navale et nucléaire [1], [2], [3].

La localisation de défauts est aussi une application des méthodes de CND. Le principe est alors de procéder à des tests en différents points de la structure et de comparer les différentes valeurs du traceur obtenues. Une valeur différente des autres peut être la conséquence de la détection d'un défaut [2].

On regroupe le vocable essais non destructifs ou encore contrôles non destructifs (ce dernier évoquant mieux l'aspect qualité industrielle que le premier qui évoque plutôt les examens en laboratoire) l'ensemble des techniques et procédés aptes à fournir des informations sur la santé d'une pièce ou d'une structure sans qu'il en résulte des altérations préjudiciables à leur utilisation ultérieure.

Cette procédure de contrôle se produit souvent soit en cours de fabrication, ou au cours de la vie d'une pièce et doit satisfaire au mieux les critères suivants [4] :

- La rapidité d'exécution : il faut que le contrôle soit rapide pour qu'il ne soit pas trop pénalisant à la fois en termes d'immobilisation physique de chaque pièce, mais aussi au niveau des couts du travail de la main d'œuvre ou des frais de fonctionnement de l'usine.
- La fiabilité : le contrôle doit remplir son cahier de charges, comme détecter tous les défauts qu'il est censé être capable de détecter.
- La reproductibilité : une même pièce contrôlée plusieurs fois doit toujours donner le même résultat.

- La sensibilité : c'est le rapport entre la variation que l'on veut mesurer. Plus la sensibilité est grande, plus les petites variations de la grandeur mesurée sont détectables, comme par exemple les défauts de faibles dimensions.
- Le cout : le contrôle qualité représente sur les pièces complexes un cout non négligeable qui doit être minimisé dans la mesure du possible.
- La résolution : la résolution est la plus petite variation de signal pouvant être détectée, par exemple la dimension du plus petit défaut. Le pouvoir de résolution est fort si cette dimension est petite.
- La possibilité d'inspection globale et locale : il s'agit de la manière dont l'inspection est réalisée.

I.2. Historique

Comme l'instrumentation scientifique, le contrôle non destructif constitue un champ d'applications privilégié des découvertes de la physique. Ce n'est toutefois qu'à partir de la seconde guerre mondiale que les techniques du CND ont pris leur essor dans l'industrie, en particulier dans la métallurgie : contrôle des aciers, radiographie des soudures.

Une vigoureuse accélération du progrès et du développement des CND s'est manifestée ensuite vers les années 1960-1970 avec le développement rapide des secteurs très demandeurs tels que l'industrie automobile, l'aéronautique civile, le génie des centrales électriques-nucléaires, le secteur pétrolier et le génie civil. La dernière décennie enfin voit l'émergence des techniques de CND qui ne pouvaient pas être mises en œuvre sans l'apport d'une électronique intégrée et d'une informatique puissante ; on assiste ainsi au développement rapide des contrôles entièrement automatiques et à l'essor des techniques gourmandes en traitement informatique, comme les contrôles optiques [5].

Globalement, en tant qu'outil majeur de la politique de qualité d'une entreprise, les techniques de CND continueront à élargir leur champ d'application vers de nouveaux secteurs d'activité économique tel que le secteur médical (capteurs biomédical). On constate que l'objectif du CND évolue, il ne suffit plus aujourd'hui de détecter un défaut, il faut aussi le localiser et le caractériser (c'est l'évaluation non destructive). Ces objectifs sont souvent difficiles à atteindre car les lois de la physique sont ce quelles sont et aussi, dans ce domaine, les progrès sont lents. Il n'en va pas de même l'automatisation des CND qui bénéficie pleinement des progrès de l'informatique ; il en résulte l'arrivée sur le marché, d'année en

année, d'appareillages plus performants, plus fiables et surtout plus faciles à utiliser dans le cadre du respect de procédures des contrôles très stricts. L'évolution des CND doit prendre toutefois en compte l'aspect coût, ce dernier pouvant freiner l'essor de nouvelles techniques très performantes [5].

I.3. Définition du contrôle non destructif

Le contrôle non destructif (CND), constitue un champ d'application privilégié des découvertes de la physique, cette appellation regroupe les méthodes d'investigation qui permettent l'examen du matériau d'une pièce sans altérer son utilisation future, ni modifier ses caractéristiques. Son application s'est trouvée dans les industries de pointe telles que l'industrie aéronautique, spatiale, nucléaire... etc. le but des contrôles est de déterminer la capacité pièce à satisfaire les spécifications en matière de qualité et de tenue en service dans son cahier des charges.

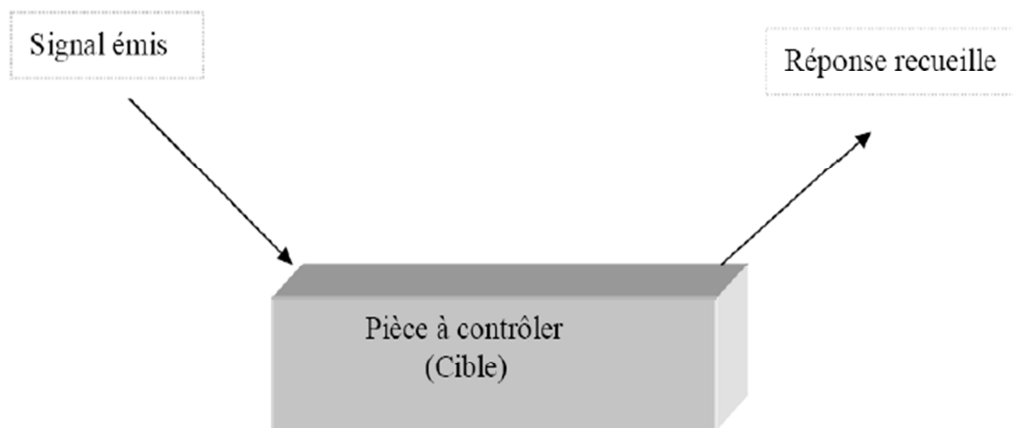


Figure I.1 : Représentation schématique du principe du CND.

I.4. Différents défauts détectés en CND

Détecter un défaut dans une pièce, c'est physiquement mettre en évidence une hétérogénéité de matière, une variation locale de propriété physique ou chimique préjudiciable au bon emploi de celle-ci. Ça peut être des porosités, criques, rivets, soudures, fissures, délaminages, corrosion, collages, taux de fibre/matrice, décohésion fibre matrice, cotation, forme,...

D'habitude, on classe les défauts en deux grandes catégories liées à leur emplacement : les défauts de surface et les défauts internes.

I.4.1. Défauts de surface

Accessibles à l'observation directe mais pas toujours visibles à l'œil nu, peuvent se classer en deux types distincts : les défauts ponctuels et les défauts d'aspect.

- **Défauts ponctuels** : correspondent aux défauts les plus nocifs sur le plan technologique, puisqu'ils s'agissent des criques, piqûres, fissures et craquelures, généralement capables de provoquer à long terme la rupture de la pièce, en initiant par exemple des fissures de fatigue. Dans les pièces métalliques, l'épaisseur de ces fissures est souvent infime (quelques μm) et elles peuvent être nocives dès que leur profondeur dépasse quelque dixièmes de millimètre, ce qui implique l'emploi des méthodes non destructives sensibles pour leur détection, telles que le ressuage, la magnétoscopie, les ultrasons et les courant de Foucault.
- **Défauts d'aspect** : c'est-à-dire à des plages dans lesquelles une variation de paramètres géométriques ou physiques (rugosité, taches divers) attire le regard et rend le produit inutilisable. Ici, le contrôle visuel est possible, mais on cherche à le remplacer par des contrôles optiques automatiques.

I.4.2. Défauts internes

Ce sont des hétérogénéités de natures, de formes, de dimensions extrêmement variées, localisées dans le volume du corps à contrôler. Dans les industries des métaux, ils s'agissent de criques internes, de porosités, d'inclusions diverses susceptibles d'affecter la santé des pièces moulées, laminées, soudées. Dans d'autres cas, il s'agit simplement de la présence d'un corps étranger au sein d'une enceinte ou d'un produit emballé. Ici, le contrôle visuel est généralement exclu et on utilise donc la radiographie, le sondage ultrasonore, ou encore des techniques mieux adaptées à certains cas comme l'émission acoustique, l'holographe, l'imagerie infrarouge, neutronographie... [5], [6], [7].

I.5. Principe de détection de défauts

Les méthodes de CND sont fondées sur la déformation du champ d'une grandeur physique par une discontinuité. On exploite donc un phénomène physique pour détecter une hétérogénéité dans un matériau. Le principe de la détection d'un défaut consiste à exciter celui-ci et à recueillir sa réponse. Les phénomènes physiques comme l'atténuation ou diffraction des rayons X, réflexion ou diffraction des ultrasons, perturbation des courants de

Foucault ; sont à la base des essais non destructifs où ils peuvent servir à caractériser les matériaux (présence de fissures...). En effet, par CND, on sous-entend toujours qu'il ne s'agit pas d'une simple mesure d'une grandeur physique, mais d'un contrôle d'homogénéité.

Les techniques CND diffèrent généralement par l'énergie employée : énergie mécanique (ultrasons, ressuage), électromagnétique (magnétoscopie, courants de Foucault) ou thermique (thermographie infrarouge). Cependant, quelle que soit la méthode employée, un processus de détection de défauts est généralement mis en place. Il est constitué de deux étapes principales : la détection et la localisation des défauts (décider que le système est en défaut ou non et déterminer quelle partie du système est affectée) et l'identification (estimer l'ampleur et le type du défaut) [8].

Schématiquement, on peut généralement distinguer les étapes citées auparavant, quelle que soit la méthode employée, et cela grâce à la représentation graphique ci-dessous.

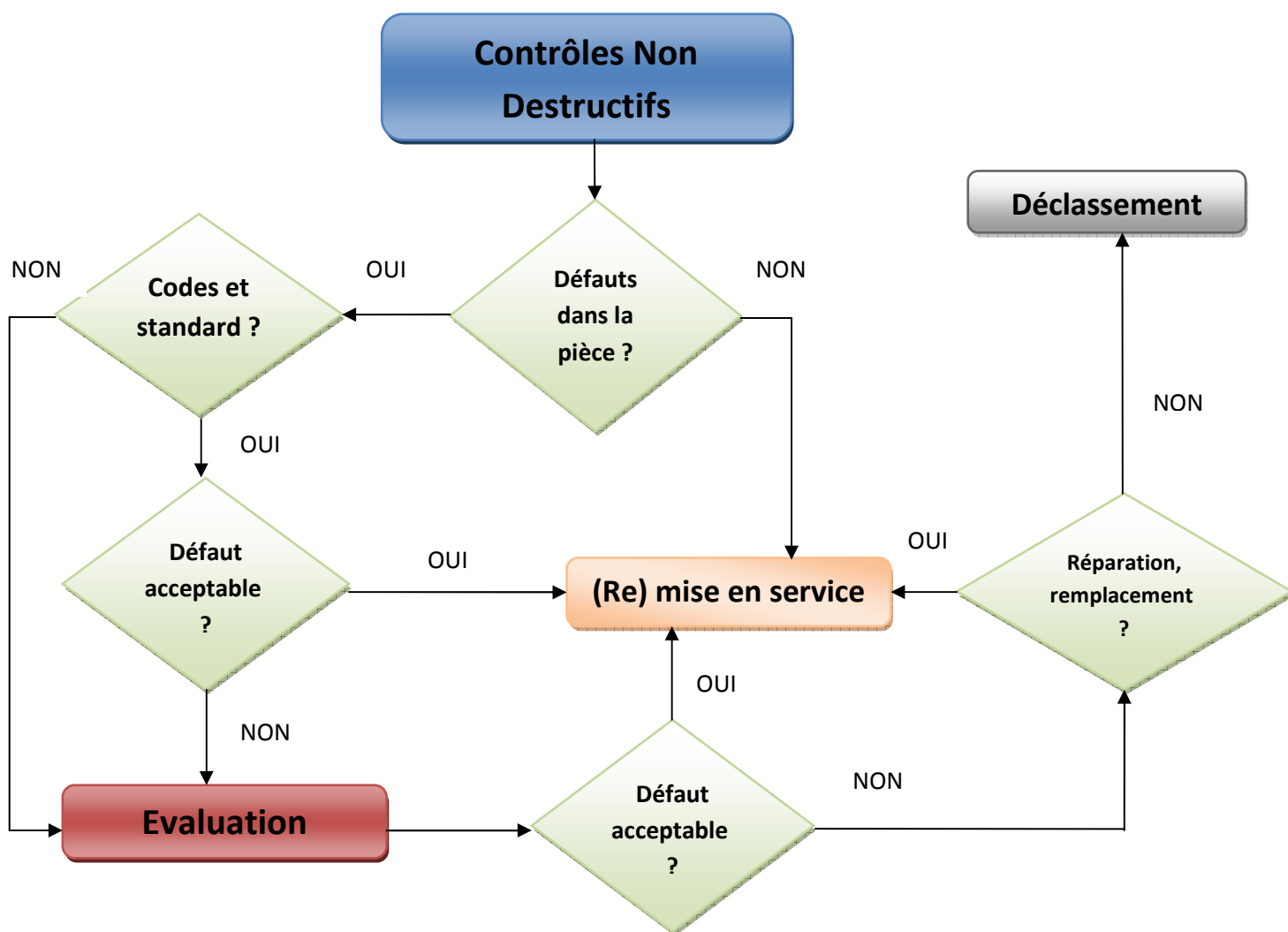


Figure I.2 : Processus de détection et de traitement des défauts.

I.6. Principaux procédés du CND

Les procédés du contrôle non destructif sont nombreux, cependant, les plus couramment employés peuvent être classés en deux familles principales en fonction du type d'anomalie recherchée dans la pièce.

➔ **Procédés surfaciques**, (anomalies en surface de la pièce) sont les suivantes :

- ✓ Examen visuel.
- ✓ Ressuage.
- ✓ Magnétoscopie.
- ✓ Courant de Foucault.

➔ **Procédés volumiques**, (anomalies au sein de la pièce) sont les suivantes :

- ✓ Ultrasons.
- ✓ Radiographie.

D'autres procédés existent et ont l'avantage d'être globales et en temps réel. Il s'agit en particulier de :

- ✓ La thermographie.
- ✓ L'émission acoustique.

Le choix d'un de ces procédés est souvent conditionné par un certain nombre de paramètres dont les principaux sont :

- La nature du matériau à contrôler (propriétés physiques) ;
- L'information recherchée (détection, mesure, dimensionnement du défaut, ...etc.) ;
- L'environnement du contrôle (nature des perturbations externes, ...etc.) ;
- Le type de contrôle à effectuer (pièce mobile, possibilité de contact ou non, ... etc.) ;
- Contraintes économiques (le cout des essais et du matériel utilisé, ... etc.).

I.6.1. Procédés surfaciques

Les procédés surfaciques se subdivisent en deux procédés distincts, qui sont : « les procédés optiques et les procédés électromagnétiques ».

I.6.1.1. Procédés optiques

Ils sont repartis comme suit :

I.6.1.1.1. Examen visuel

Chronologiquement, l'examen visuel est le plus ancien. Cette procédure techniquement très simple fait toutefois appel à un véritable expertise et d'un sens aigu de l'observation des agents qui l'effectuent. L'examen visuel direct des pièces peut constituer un contrôle suffisant pour la détection des défauts débouchant en surface et surtout des hétérogénéités locales et superficielles (taches de différentes natures) constituant des défauts d'aspect inadmissibles pour des produits plats du type : tôles, tissus, verre, ...etc.

Toutefois, l'examen purement visuel présente des limitations de différentes natures tel que : les conditions de l'éclairage et la limitation de l'œil. Afin de y remédier à ce genre de problèmes, généralement, on fait recours à des appareils d'aides optiques à la vision comme : loupe, verre grossissants, microscope métallographique, microscope électronique à balayage (MEB), l'endoscope et le stroboscope.

Le processus mis en jeu se décompose en trois phases essentielles :

- **L'excitation**, qui consiste à produire le faisceau lumineux de lumière blanche ou monochromatique.
- **La perturbation**, qui consiste à placer la pièce dans le champ optique du faisceau et à rechercher l'orientation la plus favorable à la mise en évidence d'éventuels défauts de surface.
- **La révélation**, qui consiste à placer l'œil dans le champ du faisceau réfléchi par la surface de la pièce.

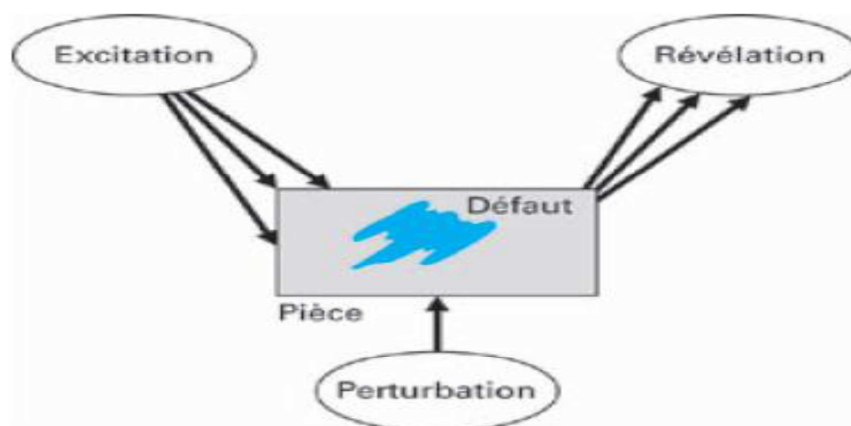


Figure I.3 : Représentation schématique du processus d'un examen visuel.

I.6.1.1.2. Ressuage

Le ressuage est un terme qui désigne l'extraction d'un fluide d'une discontinuité dans laquelle il s'était préalablement accumulé au cours d'une opération d'imprégnation.

L'imprégnation d'une fissure par un liquide, tirant profit de ses propriétés tensio-superficielles, conduit, par l'intermédiaire d'un ressuage avant l'observation visuelle, à un moyen de recherche de défauts de surface qui est parmi les plus anciens, les plus simples et les plus largement utilisés de nos jours.

Le contrôle non destructif par ressuage a pour objectif de détecter des défauts débouchant en surface sur des matériaux non absorbants [5], [9].

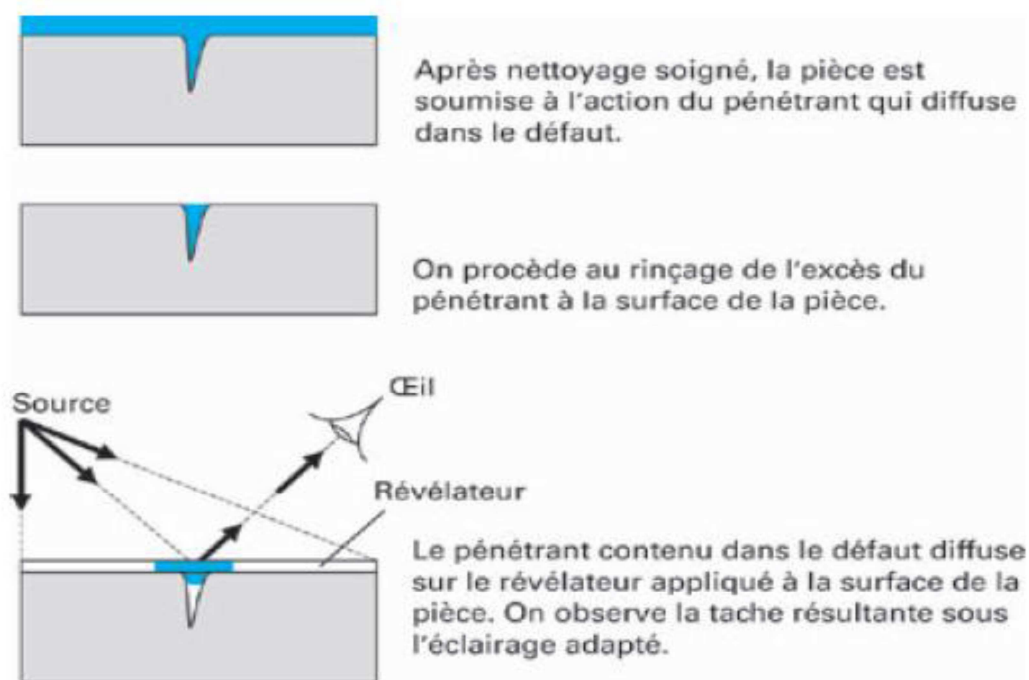


Figure I.4 : Principe du processus de ressuage.

Les phases successives du procédé par ressuage sont les suivantes :

- Un nettoyage soigné de la pièce ;
- L'application d'un produit coloré ou fluorescent appelé pénétrant, soit par immersion ou par pulvérisation, suivie d'un temps d'imprégnation ;
- L'élimination de l'excès du pénétrant ;
- L'application d'un révélateur, il peut être liquide ou sous forme de poudre, dans lequel le pénétrant – accumulé dans les fissures – va se diffuser et former des images interprétable par le contrôleur. La détection est améliorée à la fois par le contraste de

couleur entre pénétrant et révélateur et par le fait que la diffusion du pénétrant dans le révélateur élargit considérablement l'aspect du défaut.

Le champ d'application du ressuage est très vaste car le procédé est simple à employer et permet de détecter la plupart des défauts débouchant en surface sur les matériaux non poreux et ne présentent pas trop grande rugosité (matériaux métallique, plastiques, composites...).

Cette méthode peut être utilisée à la fois pour le contrôle de pièces en petite ou moyenne série et en contrôle de pièces à l'unité au cours de leur fabrication ou au cours des opérations de maintenance.

I.6.1.2. Procédés électromagnétiques

I.6.1.2.1. Magnétoscopie

Le procédé de magnétoscopie peut être relativement simple de mise en œuvre. Il permet une localisation précise des défauts de surface ou légèrement sous-jacents et une appréciation de leur longueur. Les différentes phases de sa mise en œuvre se prêtent bien à l'automatisation et qui sont :

- **Phase d'excitation :** la pièce est soumise à l'action du champ magnétique. Trois paramètres différents sont à considérer :
 - ✓ Sa nature, la forme d'onde utilisée conditionne la pénétration des lignes d'induction dans la section de la pièce. Plus on est proche de l'onde correspondant au champ continu, plus on pénètre dans la section et plus on peut détecter les défauts sous-jacents. On peut rencontrer, suivant les installations utilisées, diverses formes d'ondes : monophasée sinusoïdale, monophasée redressée une ou deux alternances, triphasée redressée une ou deux alternances ;
 - ✓ Son intensité, elle influe sur les conditions d'aimantation du matériau : une valeur trop élevée provoque la saturation de l'induction dans le matériau, ce qui n'est pas souhaitable ;
 - ✓ Sa direction, la sensibilité est optimale lorsque la direction est perpendiculaire à la direction présumée du défaut. C'est pourquoi, on réalise généralement un contrôle suivant deux directions orthogonales de champ.

- **Phase de perturbation** : cette phase traduit l'interaction entre le matériau, le défaut et le champ excitateur. Les paramètres à considérer sont les suivants :
 - ✓ Nature ferromagnétique du matériau, la courbe d'évolution de la perméabilité magnétique relative en fonction du champ magnétique est une caractéristique propre du matériau et présente un maximum pour une valeur précise du champ excitateur ;
 - ✓ Géométrie de la pièce, la répartition des lignes d'induction dans la pièce, ou son voisinage immédiat, est influencée par le profil de la pièce ;
 - ✓ Géométrie et position du défaut, la perturbation des lignes d'induction localement à l'aplomb du défaut conduit à un gradient d'induction dont l'intensité est fonction de la largeur du défaut, de sa profondeur et de sa position sous la surface ;
 - ✓ Nature du milieu constitutif, la déviation des lignes d'induction au passage d'un milieu dans un autre obéit à une loi faisant intervenir les perméabilités magnétiques relatives des deux milieux. Si le milieu constitutif du défaut a une perméabilité très proche de celle du matériau, les lignes d'induction ne sont pas déviées et le procédé est inefficace.
- **Phase de révélation** : le mécanisme mis en jeu résulte d'un équilibre des forces auxquelles sont soumises les particules de révélateur : force due à la pesanteur, force due à l'action mécanique de projection et force magnétique due au gradient local d'induction. Cette dernière force dépend du volume de la particule et de son aimantation.

L'efficacité globale du procédé est liée à la maîtrise des paramètres évoqués ci-avant et du jugement apporté par l'opérateur chargé d'interpréter les spectres magnétiques obtenus :

- Seule l'appréciation de la longueur du défaut est possible ;
- Un doute subsiste parfois sur la distinction entre défaut réellement préjudiciable et effet géométrique ayant engendré un spectre sans caractère de nocivité.

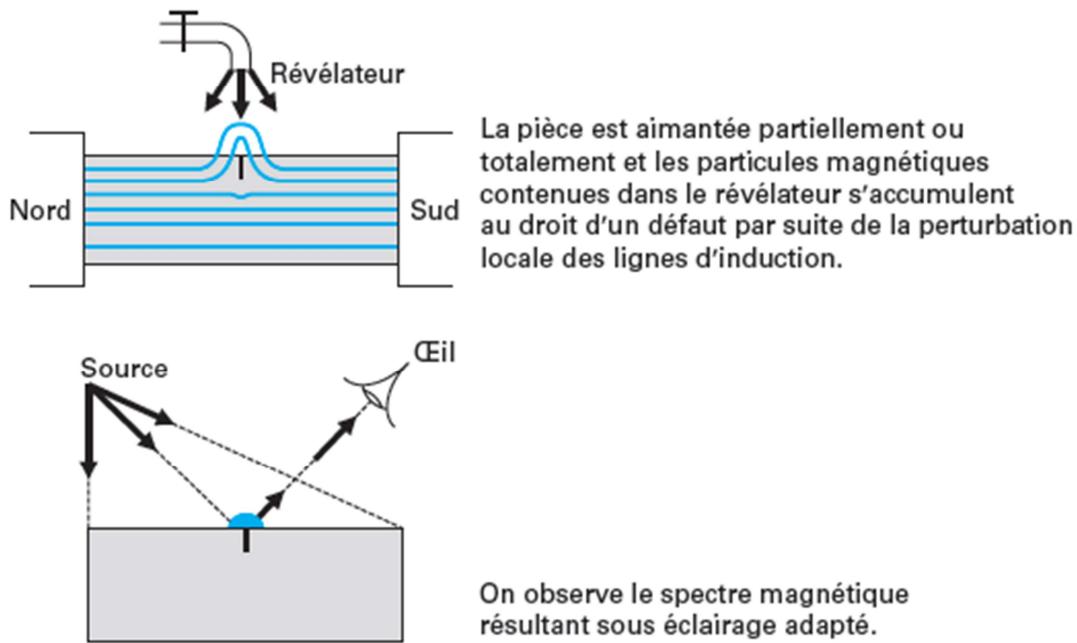


Figure I.5 : Principe du procédé du contrôle par magnétoscopie.

Néanmoins, le procédé ne s'applique qu'à des matériaux ferromagnétiques (aciers en particulier : pièces en acier moulé, tôles en acier, tubes en acier, joints soudés) et la sensibilité est dépendante de l'orientation du défaut par rapport à la direction générale des lignes d'induction. Il ne permet pas une appréciation de la profondeur et l'interprétation dans la phase de révélation reste parfois très délicate et aussi difficile à automatiser.

I.6.1.2.2. Courant de Foucault

A. Principe de la détection par courant de Foucault

Le contrôle par courant Foucault est l'un des procédés les plus privilégiés parmi les procédés électromagnétiques du CND. Ce procédé ne s'applique qu'aux pièces électriquement conductrices et s'adapte très bien aux géométries des pièces à contrôler afin de mettre en évidence les défauts surfaciques ou sous-cutanés ou une quelconque variation des paramètres physiques du matériau à contrôler (σ, μ) [5], [10].

Les courants de Foucault peuvent être synthétisés de la manière suivante : lorsque l'on place un matériau conducteur dans un champ magnétique variable dans le temps, des courants induits se développent à l'intérieur de celui-ci sans en altérer les caractéristiques.

Ces courants, créent un champ magnétique induit opposé au champ d'excitation. Ainsi, une bobine parcourue par un courant variable crée un champ magnétique variable et,

placée en vis-à-vis d'un objet conducteur, donne lieu au phénomène de courant de Foucault. Le flux magnétique créé par les courants induits modifie la force électromotrice de la bobine et l'analyse de cette variation fournit les informations exploitables pour le contrôle de l'objet. Dès qu'ils rencontrent une fissure, une inhomogénéité, un changement de géométrie, les lignes de courants induits sont déviées, ce qui entraîne une modification du champ de réaction. La figure ci-dessous est une illustration de cette technique de contrôle [1].

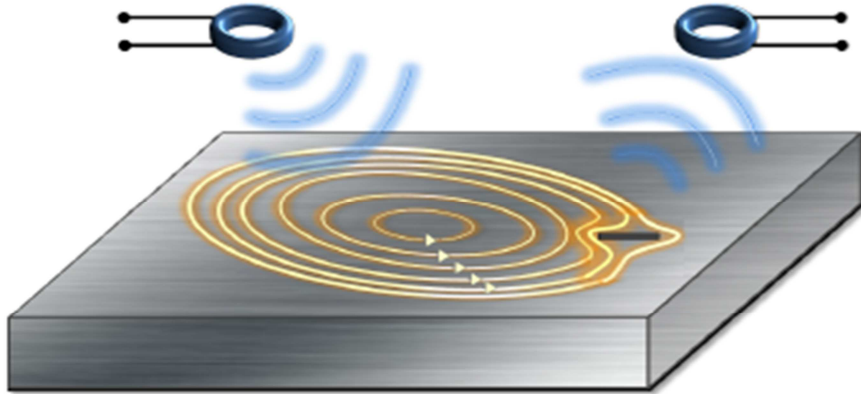


Figure I.6 : Principe de fonctionnement du CND par courants de Foucault.

On se place en régime harmonique et on considère une bobine caractérisée par N spires, parcourues par un courant d'excitation $I = I_0 e^{-j\omega t}$ (avec $\omega = 2\pi f$, la pulsation et f la fréquence), comme montré sur la figure suivante :

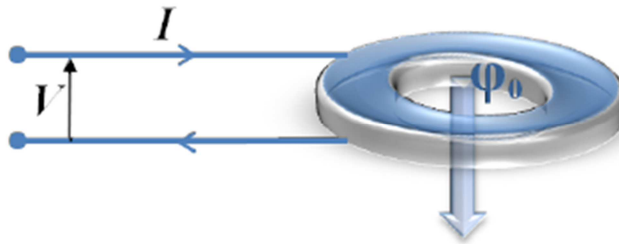


Figure I.7 : Bobine parcourue par un courant I et flux magnétique ϕ_0 généré par ce courant.

L'impédance de la bobine dans l'air, en Ω , peut être définie :

$$Z_b = Z_0 = R_0 + jX_0 \quad (\text{I.1})$$

Avec $X_0 = \omega L_0$. R_0 , X_0 et L_0 sont respectivement la résistance (en Ω), la réactance (en Ω) et l'inductance (en H) de la bobine dans l'air. A proximité d'une pièce conductrice, un champ de

réaction s'oppose au champ d'excitation de la bobine, ϕ_0 sur la figure I.7, modifiant ainsi la valeur de l'impédance :

$$Z_b = Z_{pièce} = R_{pièce} + jX_{pièce} \quad (I.2)$$

En présence d'un défaut dans la pièce, une variation supplémentaire due à la modification du champ causée par la déviation des courants de Foucault affecte l'impédance de la bobine qui devient :

$$Z_b = Z_{pièce} + (\Delta R_{défaut} + j\Delta X_{défaut}) \quad (I.3)$$

Nous pouvons considérer le plan d'impédance afin de mettre en évidence l'effet du défaut sur l'impédance du bobinage, figure I.8. Le point 1 correspond à la valeur Z_b dans l'air, le point 2 à la valeur $Z_{pièce}$ sur la plaque et le point 3 à la valeur Z_b sur la plaque avec défaut. L'écart entre les points 2 et 3 représente la signature du défaut et c'est cette variation qui est exploitée pour détecter sa présence [1].

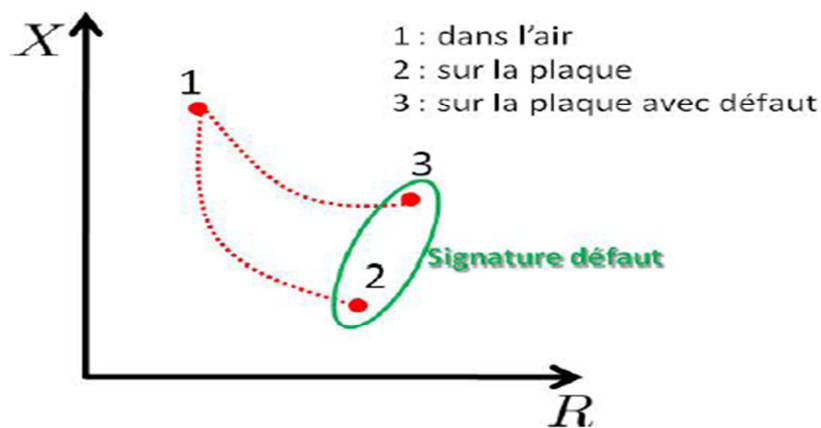


Figure I.8 : Effet du défaut sur la valeur de l'impédance de la bobine.

Le principe de ce procédé consiste à soumettre une pièce à l'action d'un champ magnétique variable dans le temps de manière à induire des courants dans le matériau. C'est généralement une onde sinusoïdale qui est utilisée. Sa fréquence peut varier suivant la nature des applications envisagées et des points contrôlés, dans une plage comprise entre quelques hertz et plusieurs mégahertz. La sensibilité du procédé pour chaque application est fortement liée au choix de la fréquence qui conditionne la pénétration des courants induits : c'est « l'effet de peau » s'étendant sur une profondeur qui dépend de la perméabilité magnétique absolue du matériau et de sa conductivité électrique.

Les courants induits dans le matériau créés par la circulation d'un courant variable dans la bobine (du capteur) sont appelés courants de Foucault. Les caractéristiques de ces courants dépendent des positions respectives des pièces et des conducteurs, des

caractéristiques du matériau (conductivité, perméabilité, forme). Les courants de Foucault induisent eux-mêmes des courants soit dans la bobine placée à proximité, soit dans la bobine excitatrice elle-même. Si un défaut vient perturber la circulation des courants de Foucault, l'induction en retour sur la bobine excitatrice ou sur la bobine de mesure sera elle-même modifiée et l'impédance de cette bobine variera.

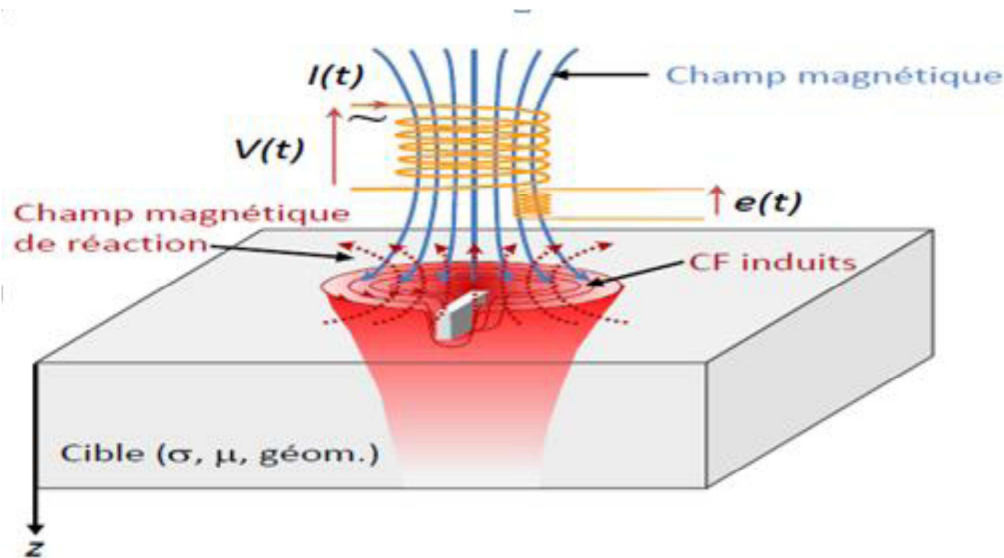


Figure I.9 : Principe de fonctionnement du CND par courants de Foucault.

❖ L'effet de peau

L'intensité des courants de Foucault dans une cible constituée d'un matériau conducteur caractérisé par une conductivité électrique σ (en $S m^{-1}$) et une perméabilité magnétique μ (en $H m^{-1}$), diminue avec la profondeur. Cet effet est décrit par la profondeur de pénétration conventionnelle δ (en m), souvent nommée épaisseur de peau. En pratique, on peut détecter des défauts jusqu'à une profondeur de quelques δ . L'épaisseur de peau est définie :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f\sigma\mu}} \quad (I.4)$$

Si on considère une pièce plane infinie en épaisseur et en (x, y) , excitée par un courant extérieur, de fréquence f (en Hz), 63% des courants circulent dans l'épaisseur de peau. Le module de la densité de courants dans la pièce est donné par la relation [1] :

$$J(z) = J_s e^{-\frac{z}{\delta}} \quad (I.5)$$

avec z la profondeur considérée à l'intérieur de la pièce, $J(z)$ le module de la densité de courant à la profondeur z et J_s le module de la densité de courant à la surface de la pièce ($z = 0$).

Nous pouvons constater que la densité de courant décroît de manière exponentielle dans la pièce, comme montré dans la figure suivante :

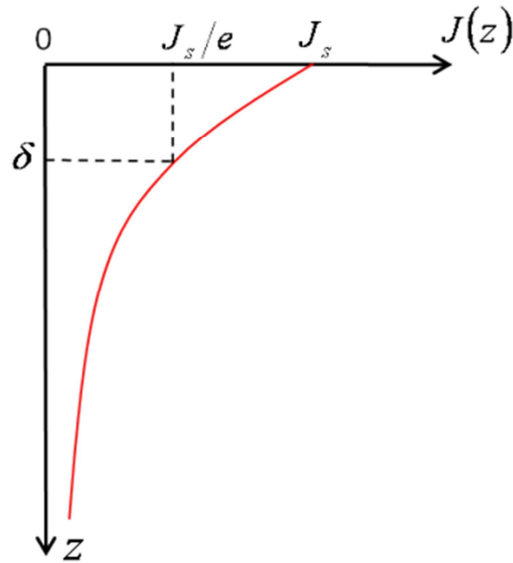


Figure I.10 : Répartition des courants de Foucault dans une pièce en fonction de la profondeur z .

Dans le tableau I.1 ci-dessous, les valeurs théoriques de la conductivité σ et de la perméabilité μ_r de certains matériaux sont données. La figure I.11 montre l'évolution de la profondeur de peau en fonction de la fréquence pour les matériaux cités ci-dessus. On peut remarquer qu'aux basses fréquences l'épaisseur de peau est plus élevée, et dans le cas ferromagnétique (le nickel et le fer), elle est beaucoup plus faible que dans les cas non-magnétiques à cause des valeurs élevées de μ_r . Nous pouvons déjà en conclure que pour pouvoir détecter des défauts enfouis dans un matériau ferromagnétique, les fréquences à utiliser doivent être de l'ordre de quelques centaines de Hz.

Pour les matériaux ferromagnétiques, la perméabilité magnétique est un paramètre difficile à estimer, qui nécessite de mesures expérimentales effectuées sur l'échantillon que l'on souhaite caractériser.

La plage générale d'utilisation des CF se situe entre 10 Hz et 10 MHz. En effet, pour une fréquence trop basse, l'amplitude des CF sera faible. Une fréquence trop élevée fait apparaître des phénomènes capacitifs parasites engendrés par les capacités inter-spires de la sonde. Celles-ci provoquent des résonances et tendent à court-circuiter le circuit inductif [1].

Matériau	σ [MSm^{-1}]	μ_r
Alliage Titane	0.74	1
Inconel 600	1.02	1.009
Acier inoxydable 304 L	1.39	1.04
Alliage Aluminium	18	1
Aluminium	35.4	1
Nickel	14.3	110
Fer	10	10000

Tableau I.1 : Conductivité électrique et perméabilité magnétique théoriques de matériaux à contrôler dans l'industrie.

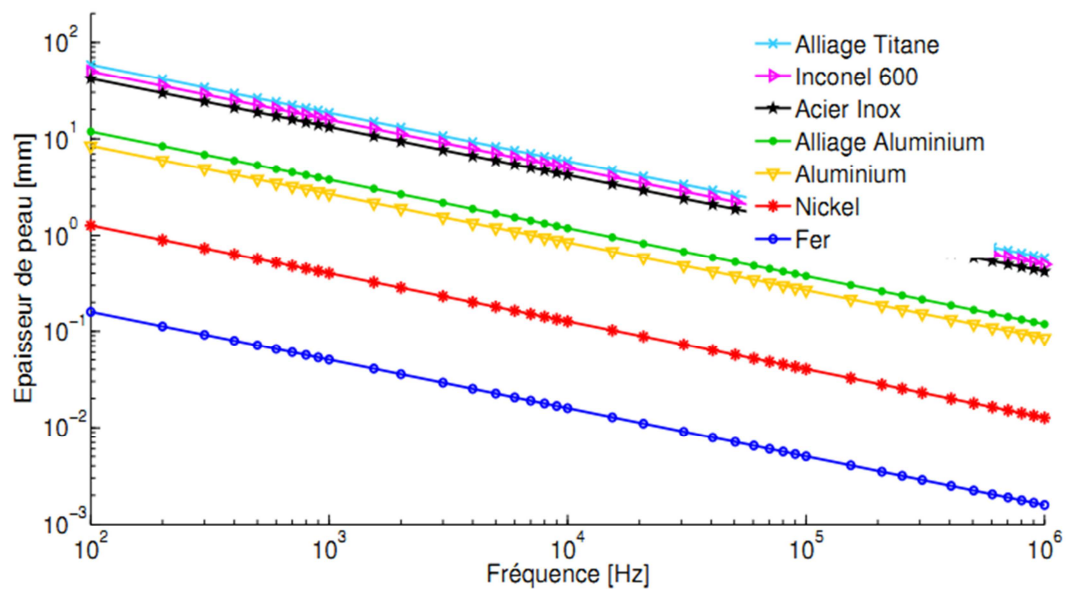


Figure I.11 : Evolution de l'épaisseur de peau en fonction de la fréquence dans les matériaux dont les paramètres caractéristiques théoriques sont donnés dans le tableau I.1.

B. Différent types de capteurs

Du point de vue géométrique, on distingue trois types de capteur :

❖ Bobine encerclante

Les bobines encerclantes sont des capteurs dont les enroulements de mesure entourent la pièce à contrôler, ils sont destinés au contrôle des produits long ou des pièces au défilé (tubes, barres,...).

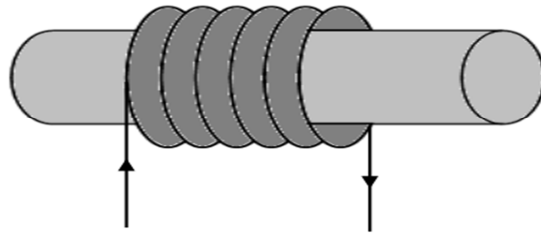


Figure I.12 : Représentation d'une bobine encerclante.

❖ Palpeur

C'est une petite bobine qui est destinée à l'examen local d'un produit ou une pièce en se déplaçant sur sa surface.

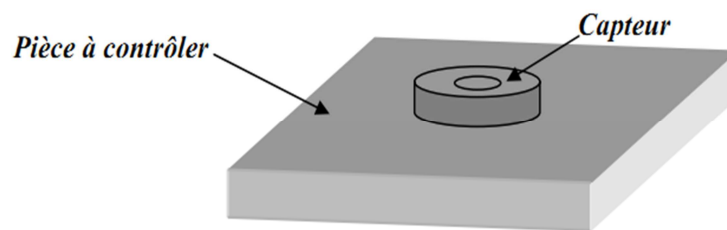


Figure I.13 : Représentation d'un palpeur.

❖ Sonde

Elle est destinée à l'examen des tubes par l'intérieur, développée principalement pour l'inspection des tubes des générateurs de vapeur dans les installations nucléaires. Il existe des sondes dites « axiales » pour lesquelles les enroulements sont bobinés autour de leurs axes de translation, et des sondes dites « tournantes » constituées de bobines ponctuelles autour de leurs axes de translation [11].

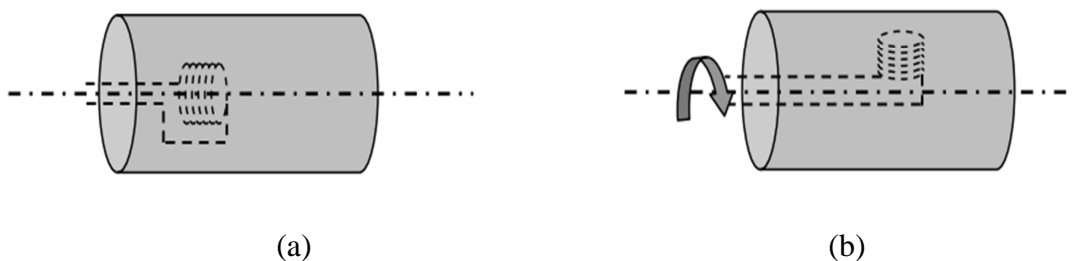


Figure I.14 : Représentation d'une sonde.

a) Sonde axiale

b) Sonde tournante.

C. Modes de fonctionnement des capteurs

On distingue deux modes de fonctionnements des capteurs :

- ❖ Les capteurs à double fonctions, pour lesquels les fonctions d'excitation et de mesure sont assurées par la même bobine.

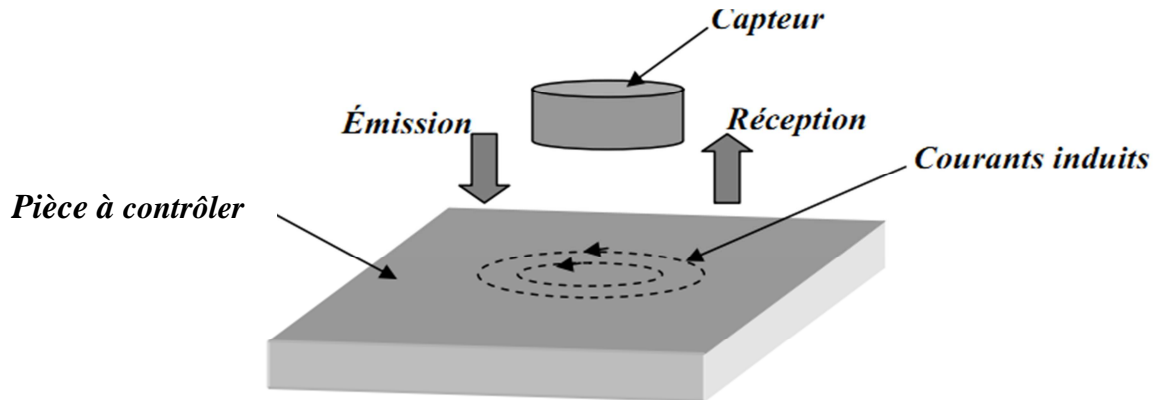


Figure I.15 : Représentation d'un capteur à double fonctions.

- ❖ Les capteurs à fonction séparées, pour lesquels les fonctions d'excitation et de mesure sont assurées par des éléments distincts.

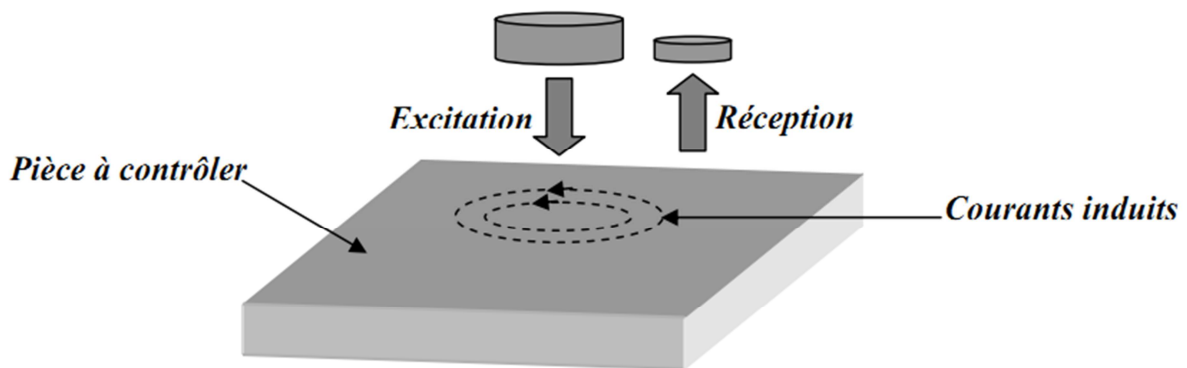


Figure I.16 : Représentation d'un capteur à fonction séparée.

D. Différents modes d'excitation

On distingue trois modes d'excitation :

- ❖ **Excitation mono fréquence**

Les courants de Foucault sont obtenus par une excitation sinusoïdale, de fréquence fixe, le choix de cette dernière dépend essentiellement de l'application visée et de la sensibilité aux paramètres recherchés.

Pour une fréquence très basse, l'amplitude des courants de Foucault sera faible et la précision de mesure insuffisante à cause des bruits.

Pour une fréquence trop élevée, font apparaître des phénomènes capacitifs parasites, engendrés notamment par les capacités inter spires du capteur.

❖ Excitation multifréquences

Le contrôle par courant de Foucault multifréquence est très utilisé pour l'inversion des données fournies par le capteur dans le but de déterminer des paramètres du matériau en vue.

Cette méthode consiste à choisir judicieusement les fréquences d'excitation du capteur de manière à recueillir des informations riches et complémentaires sur le matériau à contrôler.

Le principe de la technique multifréquence permet aussi, dans le cas de contrôle difficiles, d'atténuer fortement l'effet des facteurs perturbateurs, ou encore dans d'autres, d'effectuer simultanément la détection de plusieurs types de défauts bien différenciés [12], [13].

❖ Excitation pulsée

L'utilisation de courants pulsés conduit à une technique particulière en courant de Foucault, qui consiste à exciter la bobine sonde par des impulsions plutôt que par un tension sinusoïdale entretenue.

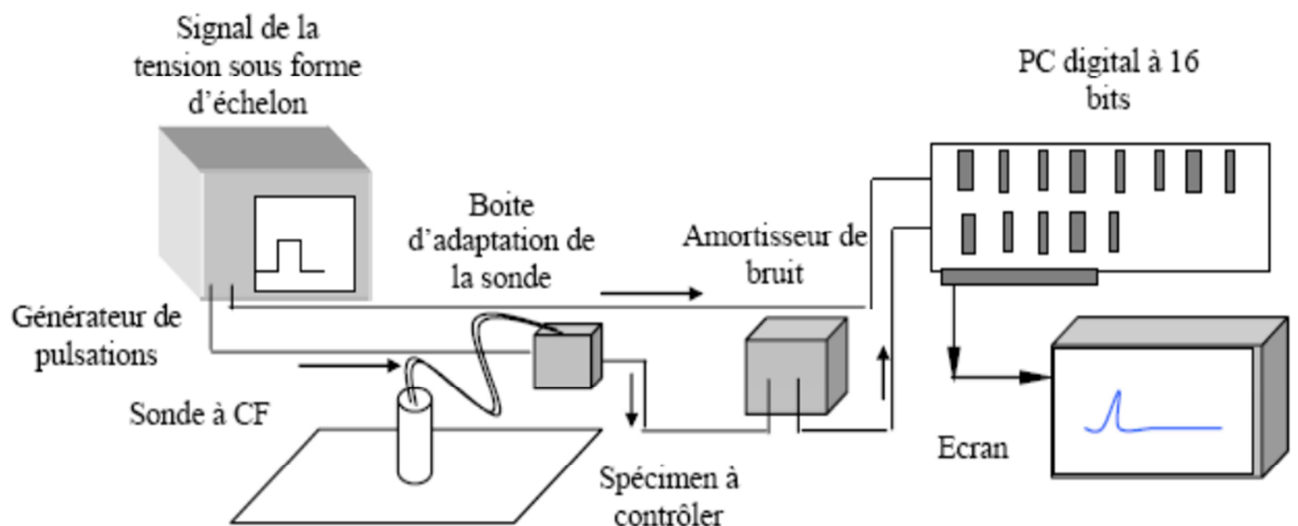


Figure I.17 : Représentation de l'appareillage utilisé pour la technique par courant pulsé.

E. Gammes de fréquences

❖ Gamme basse fréquence [1Hz :1kHz]

Les courants de Foucault à basse fréquence permettent de déterminer l'état global d'une pièce en la mettant au centre de la bobine. Cette technique convient pour le contrôle de produits de forte épaisseur ou le contrôle de qualité (tri de matériaux selon leur nuance à cœur) et les défauts volumiques et profonds. Elle est utilisée préférentiellement pour les produits ferromagnétiques en raison des problèmes liés à la profondeur de pénétration. C'est une technique très répandue dans l'industrie. Elle est relativement simple à mettre en œuvre, très peu coûteuse, très sensible au manque de matière et une résolution spatiale réduite. Néanmoins, si la fréquence est trop basse, l'amplitude des courants de Foucault sera faible et la mesure ne sera pas précise à cause du bruit [3].

❖ Gamme moyenne fréquence [1kHz :1MHz]

C'est le domaine le plus employé en mesure de faibles épaisseurs, telles que les plaques ou barres co-filées. Ce domaine fréquentiel couvre également le contrôle de santé (détection d'hétérogénéité du type fissures débouchantes, inclusions, occlusion,...) ainsi que le contrôle de caractéristiques métallurgiques (traitements superficiels, conductivités,...) [3].

❖ Gamme haute fréquence [$>1\text{MHz}$]

Les fréquences supérieures à 1 MHz sont très peu utilisées. Elles peuvent engendrer des capacités parasites entre les spires du capteur et entre le capteur et le matériau. Son utilisation se limite essentiellement à des mesures d'entrefer, la détection de micro fissure de surface et la modélisation de micro-bobines utilisées dans le domaine de la télécommunication et de la résonance magnétique nucléaire [3].

I.6.2. Procédés volumiques

I.6.2.1. Ultrasons

Les ultrasons sont des vibrations mécaniques qui se propagent dans la matière. Le principe de ce contrôle est simple, un signal électrique est envoyé à un transducteur ultrasonore qui émet une onde élastique qui se propage à l'intérieur du matériau à contrôler, puis se réfléchit sur les obstacles présents (défaut, face de la pièce...), les échos reviennent ensuite et ils sont détectés par un récepteur ultrasonore, et ils sont convertis en signal électrique que l'on peut mesurer facilement. Ce principe met en jeu des phénomènes

physiques tels que la diffraction de la source, la réflexion/réfraction aux différentes interfaces, l'interaction de l'onde avec le défaut [11].

Connaissant la vitesse de propagation des ultrasons dans le matériau et le temps d'aller-retour d'une impulsion ultrasonore envoyée par le transducteur, on en déduit la distance parcourue par cette impulsion et, en définitive, la profondeur du défaut.

Dans la pratique l'onde ultrasonore est émise par un élément piézo-électrique, sous forme d'impulsion de quelques microsecondes. Lorsqu'elle est réfléchiée par une surface de séparation, cette onde est détectée par l'élément piézo-électrique qui agit alors comme récepteur, et transforme la vibration ultrasonore reçue en tension électrique. Le CND par ultrason se prête bien au contrôle du cœur de pièces, même très épaisses, il est couramment utilisé pour rechercher des défauts dans des pièces métallurgiques, dans l'industrie nucléaire [11].

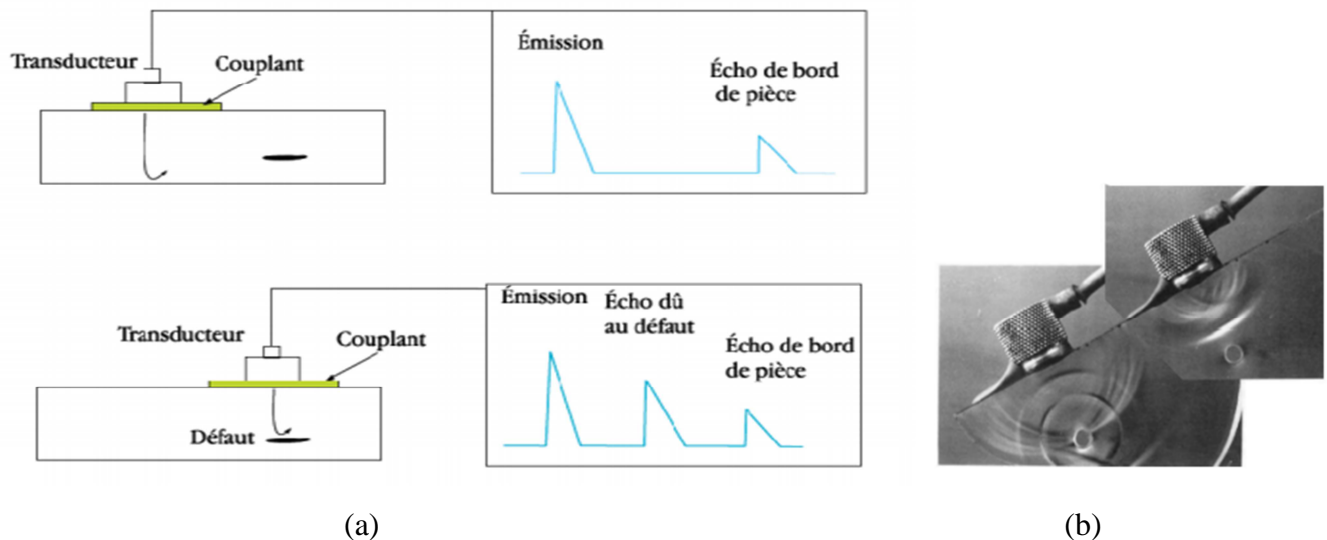


Figure I.18 : Principe du contrôle par ultrasons.

- a) Représentation graphique de l'émission et de la réception du signal.
- b) Photographie microscopique montrant la propagation et la réflexion/réfraction de l'onde ultrasonore [11].

Le contact entre le transducteur et la cible n'est jamais parfait, il existe une couche d'air les séparant. La quasi-totalité de l'énergie émise par le transducteur à l'interface air-matériau ne pénètre pas à l'intérieur du matériau. Il y a ainsi nécessité de déposer un couplant (eau, huile, gel par exemple) entre le transducteur et le matériau [3].

I.6.2.2. Emission acoustique

L'émission acoustique est un phénomène de libération d'énergie sous forme d'ondes élastiques transitoires au sein d'un matériau soumis à une sollicitation. Autrement dit, l'émission acoustique est analogue à l'activité sismique enregistrée sur la terre [11]. La détection et l'analyse des signaux acoustiques permettent d'obtenir des informations sur la présence de défauts.



Figure I.19 : Photographie illustrant l'outil utilisé pour le contrôle par émission acoustique.

I.6.2.3. Thermographie

La thermographie repose sur l'étude de la diffusion de la chaleur dans la cible à contrôler. Une quantité de chaleur est une quantité d'énergie stockée dans la matière et la température en est un indicateur mesurable, cette dernière est émise sous forme de rayonnements thermiques d'un objet ou d'une installation. Ce contrôle consiste en l'interprétation des cartes thermiques (thermogrammes) des surfaces observées, ce qui permet de dresser une cartographie des valeurs des températures en tous points de la scène observée ou contrôlée via d'une caméra thermographique (infrarouges) [3], [11].

Par exemple, l'inspection thermographique d'une installation se fait dans les conditions normales de travail. Les points anormalement chauds dans les tableaux électriques seront analysés avec le technicien de maintenance. Ces points chauds sont généralement l'indice d'une panne latente. En détectant précocement ces anomalies, on peut organiser les réparations et éviter les arrêts de production, l'inspection périodique est donc un outil idéal de maintenance préventive.

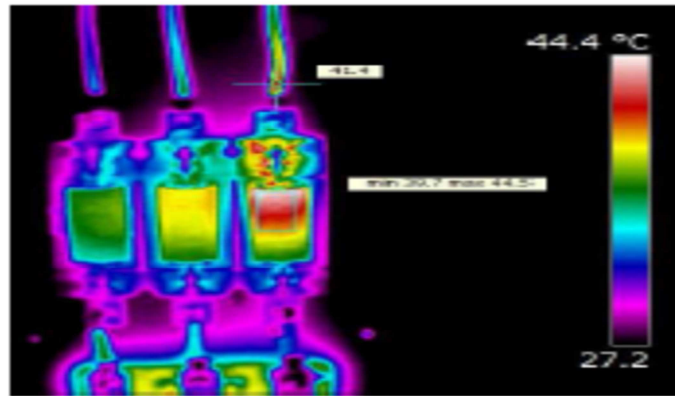


Figure I.20 : Photographie infrarouge d'un disjoncteur inspecté par le procédé de thermographie.

I.6.2.4. Radiographie

Le principe de la radiographie est le même que celui du domaine médical. La méthode met à profil l'absorption par la matière des rayonnements électromagnétiques ionisants. L'examen de la structure ou de l'état interne d'un objet par radiographie consiste à le faire traverser par un rayonnement électromagnétique de très courte longueur d'onde (rayon X ou rayon γ) et accueillir le rayonnement résiduel non absorbé sur un récepteur approprié ; un film dans la plupart des cas [5].

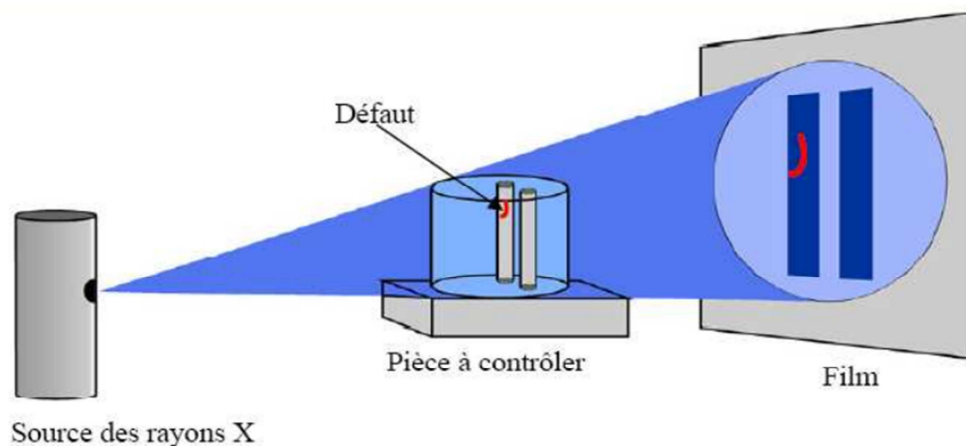


Figure I.21 : Représentation graphique du principe de contrôle par radiographie.

La radiographie ne permet pas d'avoir des informations sur la localisation du défaut en profondeur dans la pièce examinée. Pour cela, il faut réaliser plusieurs clichés sous des angles de tir différents, ce qui n'est pas toujours possible. Afin d'y remédier à cette insuffisance, cette méthode de contrôle a été développée et améliorée, les experts du domaine l'ont

nommée la tomographie industrielle. Elle a le même principe que le scanner médical, elle consiste à reconstruire une coupe de la pièce par des algorithmes complexes à partir d'une succession d'acquisitions suivant des angles différents. La répétition de ce processus selon différentes hauteurs de tir permet d'obtenir une image 3D virtuelle complète de l'objet [3].

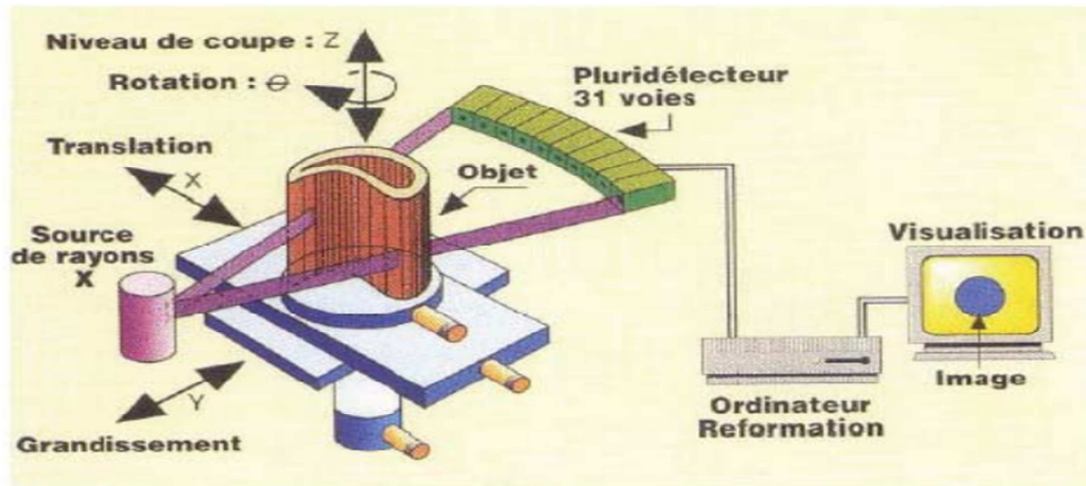


Figure I.22 : Représentation du principe de la tomographie industrielle.

L'essor de cette méthode est essentiellement dû aux progrès de l'informatique et à l'augmentation des capacités de traitement d'images, que se soit dans le domaine médical ou industriel.

I.7. Evaluation non destructive (END)

Parmi les méthodes CND, beaucoup détectent les défauts surfaciques ou débouchant en surface (craquelures, fissures, corrosion, revêtement, décollement, défauts de soudure...), aussi des défauts ou des fissures cachées dans des matériaux diélectriques. Mais les dimensions réelles du défaut ne sont pas toujours accessibles par ces méthodes.

La connaissance des grandeurs du défaut s'avère être un paramètre clé pour la compréhension de la mécanique de rupture de matériaux causée par ce type de défauts [10]. En conséquence, il existe une forte demande pour une caractérisation plus quantitative que qualitative des défauts.

L'évaluation non destructive (END) par rapport au contrôle non destructif (CND) a la vocation à apporter une caractérisation plus quantitative que qualitative [14]. En effet, lors d'un contrôle non destructif (problème direct), nous cherchons à détecter et localiser des défauts. Par contre, lors d'une évaluation non destructive (problème inverse), nous partons des

résultats fournis par un problème direct et à l'aide des méthodes d'inversion (les réseaux de neurones : la rétropropagation ; dans notre cas), nous récupérons des paramètres, tels que la forme et les dimensions du défaut... etc.

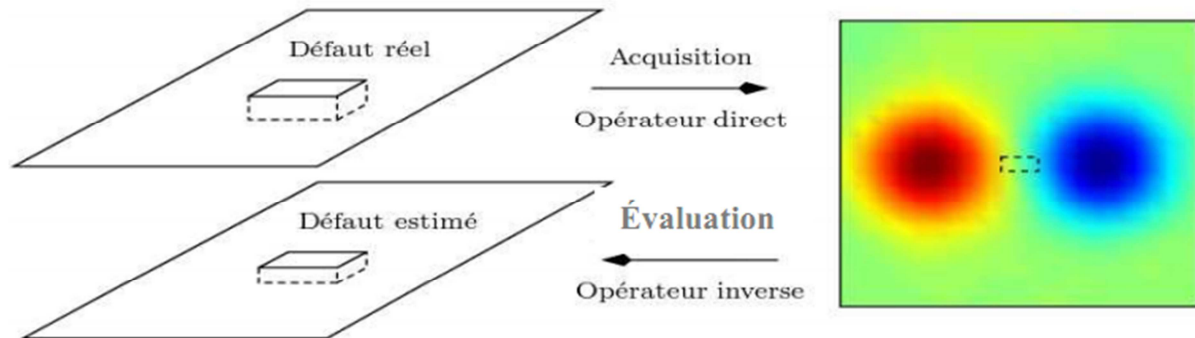


Figure I.23 : Représentation graphique du principe du problème direct et problème inverse.

I.8. Conclusion

Après avoir rappelé de la manière la plus exhaustive possible la nature, le but et le domaine d'application du contrôle non destructif, nous avons tout d'abord évoqué les grands principes de détection des défauts et les bases physiques qui gouvernent les procédés et leurs performances.

Dans ce chapitre, nous avons décrit plus en détail les principes physiques, la réalisation et la mise en œuvre du procédé par courant de Foucault.

Les perspectives d'extension du champ d'application des procédés de contrôle non destructif sont très grandes, en particulier en direction des secteurs industriels plus proches de la consommation courante que de la haute technologie. Le contrôle par courant de Foucault vit actuellement avec l'évolution des moyens informatiques qui apportent une aide importante dans les domaines suivants [9]:

- Aspect théorique de la modélisation du capteur ;
- Gestion des paramètres de réglage et l'acquisition des mesures ;
- Traitement du signal et exploitation des résultats.

Chapitre II

*Lois classiques et équations de
base de l'électromagnétisme*

II.1. Introduction.

Le magnétisme est l'une des plus anciennes disciplines de la physique. Depuis l'antiquité où nos ancêtres avaient déjà reconnu les propriétés particulières de la pierre aimant, les phénomènes magnétiques ont toujours retenu l'attention notamment en raison de leur action à distance. On les trouve partout de nos jours, au quotidien, de la fermeture des portes jusqu'aux suspensions des trains à grande vitesse, et à toutes les échelles et dimensions depuis les particules élémentaires jusqu'aux amas de galaxies en passant par la terre.

L'objectif de ce chapitre est de résumer les équations mathématiques de base qui décrivent les phénomènes intervenant dans le contrôle non destructif par courants de Foucault. Nous présentons la simplification de ces équations aux cas de régime quasi-stationnaire ainsi que leurs formulations à des configurations géométriques spécifiques. Nous établissons différentes formulations de l'impédance et cela en fonction de la grandeur d'état, selon laquelle les équations simplifiées de Maxwell sont résolues.

II.2. Historique

Le mot « magnétisme » provient du mot magnétite « pierre aimant », qui est constituée spécialement d'un Oxyde de Fer naturel Fe_3O_4 (c'est pourquoi on appelle ce type de matériaux ferromagnétiques). Il semblerait que l'on avait trouvé ce minerai magnétique pour la première fois à proximité de la cité Thessalonique de Magnésie, les restes de cette ville se trouvent dans l'actuelle Anatolie occidentale en Turquie. Même Aristote avait parlé à son époque de l'aimantation du fer doux [15].

Au dix-huitième siècle, **Benjamin Franklin** découvrit la nature électrique de la foudre (1752). Or, il y avait déjà à cette époque de nombreux témoignages de marins attirant l'attention sur des faits étranges (la perturbation des boussoles par les orages, l'aimantation de tous les objets métalliques d'un navire frappé par la foudre).

Benjamin Franklin déduisit la possibilité d'une association de nature entre les phénomènes électrique et magnétique. Les premières études quantitatives sont dues à **Charles Augustin Coulomb**.

L'étude quantitative des interactions entre aimants et courants fut faite par les physiciens **Jean-Baptiste Biot** et **Félix Savart** (1820) ; une aiguille aimantée suspendue à un fil de

coton et rendue sensiblement astatique par un aimant convenablement placé, fut mise en regard d'un courant rectiligne très long faisant partie d'un circuit très étendu [16].

Pierre Simon Laplace déduisit ce qu'on appelle aujourd'hui « *la loi de Biot et Savart* ».

Toutes fois, au début, les phénomènes électriques et magnétiques ont été étudiés séparément. Les interactions entre ces deux phénomènes ont été mises en évidence pour la première fois par : **André Marie Ampère** (1775-1836), qui a prouvé que la source du magnétisme est le courant électrique, puis **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), qui a démontré que la source du champ électrique est la charge électrique statique, puis **Michael Faraday** (1791-1867) qui relie la création de l'un des champs électrique et magnétique par l'autre et vice versa. Le couplage des deux phénomènes qu'on regroupe en un mot « Electromagnétisme » était élaboré sous forme de la théorie électromagnétique par **Hans Christian Oersted** en 1820, mais sa mise en équations fut en 1873 par **James Clerk Maxwell** (1831-1879). Ce génie a exploité les découvertes des précédents en passant par **Ampère, Arago, Faraday, Foucault, Henry, Lenz, Weber, Helmholtz, Hertz, Thomson, Lorentz** et bien d'autres pour donner une formulation des plus exhaustive de l'électromagnétisme liant les grandeurs électriques et magnétiques, mais malgré cela l'interprétation et la clarification satisfaisante ne furent trouvées qu'en 1905 avec l'avènement de la relativité d'**Albert Einstein** dont le postulat fondamental s'énonce ainsi : « *il est impossible de détecter physiquement le mouvement uniforme d'un repère au moyen d'observations faites entièrement à l'intérieur de ce repère* », ce postulat de l'électromagnétisme signifie que toutes les lois de la nature doivent être invariantes lors du passage d'un repère à un autre [16], [17], [18], [19].

II.3. Lois classiques et équations de base de l'électromagnétisme

II.3.1. Flux du champ magnétique

Le mot flux est associé fréquemment à la notion de débit ou d'écoulement [20]. on peut ; comme pour tout champ de vecteur ; définir le flux du champ magnétique \vec{B} à travers une surface orientée S par la relation :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (\text{II.1})$$

C'est une grandeur physique mesurable caractérisant l'intensité de la répartition spatiale du champ magnétique. Son unité d'expression dans le système MKSA est le Weber [W].

II.3.2. Circulation du champ magnétique, théorème d'Ampère

La notion de circulation s'introduit tout naturellement lorsqu'on examine le travail d'une force qu'il faut déplacer (faire circuler) d'un point A à un point B le long d'une courbe (Γ).

II.3.2.1. Enoncé du théorème d'Ampère généralisé

Peu de temps après l'exposé d'Oersted, Ampère donna l'explication de ce que celui-ci avait observé. Il prit comme objet élémentaire le fil conducteur parcouru par un courant électrique (plus exactement, une portion infime de ce fil) et ramena le problème du magnétisme à celui de l'interaction entre fils électriques. Si un fil est susceptible d'agir sur un aimant, c'est parce qu'un aimant est au fond lui-même équivalent à une multitude de boucles (spires) de courants élémentaires. Ampère trouvait ainsi la clé de l'ensemble des phénomènes magnétiques observés, mettant le doigt sur l'origine commune des phénomènes magnétiques et électriques [20] : le magnétisme résulte simplement de la présence de courants électriques, c'est-à-dire du déplacement de charges électriques. Il énonça alors son théorème comme suit :

La circulation du champ magnétique \vec{B} le long d'un contour orienté Γ appelé contour d'Ampère, est égal au produit par la constante μ_0 de la somme algébrique des courants I_{int} qui traversent la surface délimitée par le contour Γ [21], le signe du courant étant défini par rapport à l'orientation positive de la normal \vec{n} au contour. La circulation ne dépend pas de dimension du circuit :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_{int} \quad (\text{II.2})$$

La circulation de \vec{B} sur une courbe fermée est donc directement liée au courant qui traverse la surface délimitée par cette courbe.

Le choix du sens de la circulation sur le contour d'Ampère choisi, est purement arbitraire. Une fois ce choix fait, la règle de l'observateur d'Ampère ou du tire bouchon permet d'attribuer un signe aux courants qui traversent la surfaces ainsi délimitée [20].

II.3.3. Lois de l'induction électromagnétique

L'induction électromagnétique souvent appelée Induction, repose sur la force de Lorentz. En effet, les électrons libres d'un conducteur placé dans un champ magnétique subissent cette force s'il y a déplacement.

Faraday étudia ces phénomènes déjà observés et suite à de nouvelles expériences formula en 1831 la loi de *l'induction électromagnétique* [20]. Faraday réalise plus de douze situations expérimentales, donnant toute le même résultat, et qui stipule que : quand le flux de \vec{B} à travers une boucle change, il apparaît dans cette boucle un courant électrique. Par conséquent, cette variation de flux entraîne l'apparition dans la boucle d'une « force électromotrice » [21].

II.3.3.1. Loi de Faraday

Les phénomènes d'inductions prennent naissance dans un circuit électrique traversé par des flux Φ variables dans le temps : une variation temporelle de Φ fait apparaître dans le circuit une f.e.m. e donnée par la loi de Faraday.

La f.e.m. induite dans un circuit fermé est égale à l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux magnétique à travers ce circuit :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{II.3})$$

Cette relation (loi fondamentale de l'électromagnétisme) est valable quelque que soit la cause de la variation du flux que ce soit un circuit fixe dans un champ variable, un circuit mobile dans un champ permanent, un champ du à des courants ou à des aimants, ou qu'il y ait superposition de tous ces aspects [20].

II.3.3.2. Loi de Lenz

Cette loi qui tient son nom d'**Heinrich Friedrich Emil Lenz** (1804-1865), précise le sens du courant induit (l'expression du signe « - » contenu dans la loi de Faraday (II.3)) et s'énonce ainsi :

" *La force électromotrice induite tend à produire un courant de sens tel que le flux qu'il envoie à travers le circuit s'oppose à la variation du flux qui lui donne naissance*".

En effet, si on considère une boucle conductrice plongée dans un champ magnétique et si le flux varie au cours du temps, il apparaît dans la boucle une force électromotrice et un courant électrique par induction.

La loi de Lenz peut être appliquée en utilisant la règle du tire bouchon : si le pouce indique le sens de \vec{B} induit, alors les quatre autres doigts courbés vers l'intérieur de la main indique le sens du courant induit.

Des lignes de champs magnétiques fermées encerclent le courant induit. Des lignes de champ électrique formées encerclant à leur tour ces lignes d'induction, puis elles sont elles-mêmes à nouveau encerclées par des lignes de champ magnétique et ainsi de suite [20].

II.3.4. Equations de Maxwell

Les équations de Maxwell spécifient que toute variation spatiale ou temporelle d'un champ électromagnétique en un point de l'espace entraîne ou due à l'existence d'un autre champ au même point. Ces équations sont donc locales et sont valables dans n'importe quel système d'axes. Ainsi, dans tous les problèmes nécessitant le calcul de champ électromagnétique qui règne dans un système matériel, on utilise les quatre équations fondamentales aux dérivées partielles de Maxwell, qui sous leurs formes les plus générales s'écrivent [22] [23]:

$$\text{Maxwell-Gauss:} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{II.4})$$

$$\text{Maxwell-Faraday:} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.5})$$

$$\text{Conservation de flux:} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{II.6})$$

$$\text{Maxwell-Ampere:} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{II.7})$$

\vec{E} [V/m] et \vec{H} [A/m] : Champs électrique et magnétique respectivement.

\vec{D} [C/m²] et \vec{B} [T] : Inductions électrique et magnétique respectivement.

\vec{J}_c [A/m²] et ρ [C/m³] : Densités de courants de conduction et de charge électrique respectivement.

Les équations (II.4) et (II.6) traduisent respectivement la conservation de la charge électrique et du champ magnétique.

L'équation (II.5) correspond à la loi d'induction de Faraday, qui établit le lien entre un champ électrique et un flux magnétique. Cette loi traduit le phénomène inductif qui se produit dans un conducteur soumis à un champ magnétique variable ou dans un conducteur en mouvement soumis à un champ magnétique constant.

L'équation (II.7) est une généralisation du théorème d'Ampère. Elle permet d'établir la relation entre le champ électromagnétique et les courants électriques. Elle traduit la création d'un champ magnétique par les courants électriques de conduction et de déplacement.

Les équations (II.5) et (II.7) définissent la relation entre les champs et leurs sources.

II.3.5. Lois de comportement des milieux

Les grandeurs et les liaisons des cinq champs vectoriels précédents dépendent des caractéristiques électromagnétiques du milieu où ils règnent. Ainsi, pour définir exhaustivement le phénomène électromagnétique à l'intérieur d'un milieu isotrope et homogène, on rajoute aux équations précédentes les lois de comportement de ce milieu [24] [25] :

II.3.5.1. Relations du milieu

L'expérience montre que sous l'effet d'un champ magnétique \vec{H} , la matière s'aimante ; chaque élément de volume est le siège d'un moment magnétique qui représente la polarisation de la matière. Dans le cas idéal, cette polarisation magnétique est proportionnelle au champ magnétique. Elle est représentée par l'intensité d'aimantation \vec{M} [26] :

$$\vec{M} = \chi \cdot \vec{H} \quad (\text{II.8})$$

$$\chi = \frac{\vec{M}}{\vec{H}} \quad (\text{II.9})$$

χ : est la susceptibilité magnétique du matériau.

La relation entre le vecteur induction \vec{B} et le vecteur champ magnétique \vec{H} est donnée par la relation dite magnétique suivante :

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \chi) & \text{(a)} \\ \vec{B} = \mu_0\vec{H}(1 + \chi) & \text{(b)} \\ \vec{B} = \mu_0\mu_r \cdot \vec{H} & \text{(c)} \end{cases} \quad \text{(II.10)}$$

D'où : $\vec{B} = \mu(\vec{H}) \cdot \vec{H}$ (II.11)

La relation entre le vecteur induction électrique \vec{D} et le vecteur champ électrique \vec{E} est donnée par la relation dite diélectrique suivante [24]:

$$\vec{D} = \varepsilon(\vec{E}) \cdot \vec{E} \quad \text{(II.12)}$$

❖ Dans le cas linéaire, nous avons :

$$\mu = \mu_0\mu_r = C^{te} \quad \text{(II.13)}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r = C^{te} \quad \text{(II.14)}$$

❖ Dans le cas non linéaire :

$$\mu_r(H)$$

$$\mu_r(\|\vec{B}\|) \Rightarrow \text{Tenseur}$$

μ : Perméabilité magnétique [H/m].

$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$: Perméabilité magnétique du vide [H/m].

μ_r : Perméabilité magnétique relative du milieu considéré.

ε : Permittivité électrique [F/m].

$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9}$: Permittivité électrique du vide [F/m].

ε_r : Permittivité relative du milieu considéré.

II.3.5.2. Loi d'Ohm

Elle exprime la relation liant la densité du courant \vec{J} au champ électrique \vec{E} à travers la conductivité électrique σ , elle est donnée par [26]:

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (\text{II.15})$$

σ : Conductivité électrique [$(\Omega \cdot m)^{-1}$].

La densité de courant \vec{J} s'exprime en fonction de la nature du milieu étudié.

- **Pour un milieu conducteur avec source :**

$$\vec{J} = \vec{J}_s + \sigma \vec{E} \quad (\text{II.16})$$

\vec{J}_s : La densité du courant source [A/m^2].

\vec{E} : Le champ électrique induit [V/m].

- **Pour un milieu en mouvement :**

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}') \quad (\text{II.17})$$

Avec : $\vec{E}' = \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (\text{II.18})$

\vec{E}' : Le champ électromoteur.

\vec{v} : La vitesse de déplacement du milieu en mouvement [m/s].

\vec{B} : L'induction magnétique [T].

II.3.5.3. Equations de continuité

L'équation de continuité, appelée aussi équation de la conservation de la charge électrique est donnée par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.19})$$

ρ : La densité volumique de la charge électrique [C/m^3].

II.3.5.4. Relations de passage

A l'interface entre deux milieux différents respectivement (1) et (2), les champs de vecteurs doivent vérifier certaines conditions dites relations de passages. Elles s'énoncent comme suit [27], [28] :

II.3.5.4.1. Discontinuité de la composante normale de l'induction électrique

$$(\vec{D}_{n1} - \vec{D}_{n2}) \cdot \vec{n} = \sigma_s \quad (\text{II.20})$$

\vec{D}_{n1} : La composante normale de l'induction électrique dans le milieu 1.

\vec{D}_{n2} : La composante normale de l'induction électrique dans le milieu 2.

σ_s : La densité de charge électrique portée par la surface de séparation.

\vec{n} : Le vecteur unité suivant la normale de l'interface.

II.3.5.4.2. Conservation de la composante tangentielle du champ électrique

$$(\vec{E}_{t1} - \vec{E}_{t2}) \wedge \vec{n} = 0 \quad (\text{II.21})$$

\vec{E}_{t1} : La composante tangentielle du champ électrique dans le milieu 1.

\vec{E}_{t2} : La composante tangentielle du champ électrique dans le milieu 2.

II.3.5.4.3. Conservation de la composante normale de l'induction magnétique

$$(\vec{B}_{n1} - \vec{B}_{n2}) \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{II.22})$$

\vec{B}_{n1} : La composante normale de l'induction magnétique dans le milieu 1.

\vec{B}_{n2} : La composante normale de l'induction magnétique dans le milieu 2.

II.3.5.4.4. Discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique

$$(\vec{H}_{t1} - \vec{H}_{t2}) \wedge \vec{n} = k \quad (\text{II.23})$$

\vec{H}_{t1} : La composante tangentielle du champ magnétique dans le milieu 1.

\vec{H}_{t2} : La composante tangentielle du champ magnétique dans le milieu 2.

k : Densité de courant porté par la surface de séparation.

II.3.6. Conditions aux limites

II.3.6.1. Condition type Dirichlet

Cette condition nous informe sur la valeur exacte de l'inconnue sur la frontière du domaine d'étude [32].

Elle est sous forme :

$$A = A_0 \quad (\text{II.24})$$

A : La fonction inconnue.

A_0 : Constante.

II.3.6.2. Condition type Neumann

Elle est appliquée sur la frontière lorsque la valeur de la grandeur calculée n'est pas connue à la frontière du domaine d'étude.

$$\frac{\partial A}{\partial n} = A_0 \quad (\text{II.25})$$

II.3.6.3. Condition mixte

C'est la combinaison des deux types précédents, elle s'exprime de la manière suivante :

$$\alpha A + \beta \frac{\partial A}{\partial n} = \gamma \quad (\text{II.26})$$

Où : α , β et γ sont des constantes.

II.3.6.4. Condition de périodicité et d'anti-périodicité

Cette périodicité du champ peut être utilisée pour définir un autre type de conditions aux limites pour réduire la taille du modèle numérique. On parle alors de condition de périodicité. La condition de l'anti-périodicité est appliquée lorsque nous avons les mêmes contraintes en module mais de polarité inverse.

Elle s'exprime comme suit :

$$A|_{\Gamma} = K \cdot A|_{\Gamma+d\Gamma} \quad (\text{II.27})$$

A : Fonction inconnue.

$d\Gamma$: Période spatiale suivant le contour Γ .

Si : $K = 1$, condition périodique.

Si : $K = -1$, condition anti-périodique.

II.3.7. Electromagnétisme en régime quasi-stationnaire

II.3.7.1. Hypothèses simplificatrices

Les équations qui précèdent décrivent globalement les phénomènes électromagnétiques et s'appliquent à des états quelconques [3], [17]. Dans la pratique, en fonction du domaine d'utilisation, on a tendance à simplifier ces équations. Ces dernières donnent naissance à des modèles plus simples [18].

Dans le cas d'une excitation sinusoïdale, les courants de conduction et de déplacement sont définis respectivement comme suit :

$$\vec{J}_c = \sigma \vec{E} \quad (\text{II.28})$$

$$\vec{J}_D = j2\pi f \varepsilon \vec{E} \quad (\text{II.29})$$

Dans le domaine de l'électrotechnique, la fréquence utilisée est inférieure à 10^{12} Hz. Les distances de la région où on observe les phénomènes sont faibles devant la longueur d'onde du champ électromagnétique.

Les matériaux utilisés dans le contrôle non destructif par courant de Foucault sont suffisamment conducteurs pour considérer que le rapport (ε/σ) très faible.

De ces trois hypothèses, on conclut que l'approximation de régimes quasi-stationnaire est valable. En termes de courant, cela revient à négliger le courant de déplacement $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ devant le courant de conduction \vec{J}_c .

II.3.8. Formulation en potentiel vecteur magnétique

Bien que les équations de Maxwell permettant de modéliser le phénomène des courants de Foucault soient connues depuis longtemps, l'acquisition de cette connaissance se heurte à de nombreuses situations de contrôle [29], ce qui demande un temps de résolution très couteux. De plus, les formulations en champs présentent un inconvénient majeur ; c'est celui de la discontinuité aux interfaces et particulièrement aux coins (les aspérités).

Pour y remédier à ces problèmes, on fait appel à une entité mathématique connue sous le nom de potentiel. Celle-ci provient de considération purement mathématique (les identités vectorielles) plutôt que physique. Par ailleurs ; même si le potentiel n'a à ce jour aucun sens physique, la nature de sa variation par contre ; est significative [30].

Dans ce qui suit nous présenterons la formulation en termes de potentiel vecteur magnétique décrivant le phénomène étudié (les courants de Foucault).

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \exists \vec{A} \text{ tel que } \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (\text{II.30})$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{B} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} &\Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\ &\Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \exists \vec{V} / \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \vec{V} \\ &\Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \vec{V} \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

$$\text{Or } \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \Rightarrow \vec{J} = -\sigma \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \sigma \cdot \vec{\nabla} \vec{V} \quad (\text{II.32})$$

$$\text{On pose } \vec{J}_s = -\sigma \cdot \vec{\nabla} \vec{V} \quad (\text{II.33})$$

$$\text{On aura } \vec{J} = -\sigma \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{J}_s \quad (\text{II.34})$$

Pour un problème de courants induits, on considère l'hypothèse suivante : $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$ d'où l'équation (II.7) devient :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_c \quad (\text{II.35})$$

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_c \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = -\sigma \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{J}_s \end{cases} \Rightarrow \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{B}}{\mu} = \vec{J}_s - \sigma \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

On a $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ d'où :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{A}}{\mu} \right) &= \vec{J}_s - \sigma \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{A}}{\mu} \right) + \sigma \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= \vec{J}_s \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

$$\text{Avec } \vec{J}_s = -\sigma \cdot \vec{\nabla} \vec{V}$$

L'équation (II.34) représente l'équation magnétodynamique transitoire en termes de potentiel vecteur magnétique \vec{A} . Cette équation traduit les phénomènes d'effet de peau dans les conducteurs ou le régime transitoire des dispositifs électromagnétiques.

II.3.9. Equations des différentes régions d'un système électromagnétique

II.3.9.1. Equation dans le vide

Les régions non conductrices sont caractérisées par une conductivité nulle, l'équation en termes de \vec{A} est donnée par [32]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{A} = 0 \quad (\text{II.37})$$

II.3.9.2. Equation dans l'inducteur

L'inducteur est caractérisé par une perméabilité égale à celle du vide. Lorsque celui-ci est alimenté par un générateur de tension, l'équation en terme de \vec{A} devient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{A} = -\mu \vec{J}_s \quad (\text{II.38})$$

Dans ce cas, le potentiel scalaire V doit être relié à la tension du générateur alimentant l'inducteur, le courant de celui-ci étant inconnu.

II.3.9.3. Equation dans la charge (l'induit)

Dans ce cas le courant n'est créé que par la variation temporelle du potentiel vecteur magnétique par conséquent on a :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{A} = -\mu \vec{J}_i \quad (\text{II.39})$$

Avec :

$$\vec{J}_i = -j\omega\sigma A \quad (\text{II.40})$$

II.3.10. Technique de calcul d'impédance

II.3.10.1. Hypothèses

Considérant une bobine de section Ω et formée de N spires jointives disposées en séries. La densité de courant est de répartition uniforme. La spire élémentaire de la bobine est soumise à une tension (du) et parcourue par une intensité de courant (I).

$$I = \iint_{\Omega} \vec{J} \cdot d\Omega \quad (\text{II.41})$$

$$I = \frac{J\Omega}{N} \quad (\text{II.42})$$

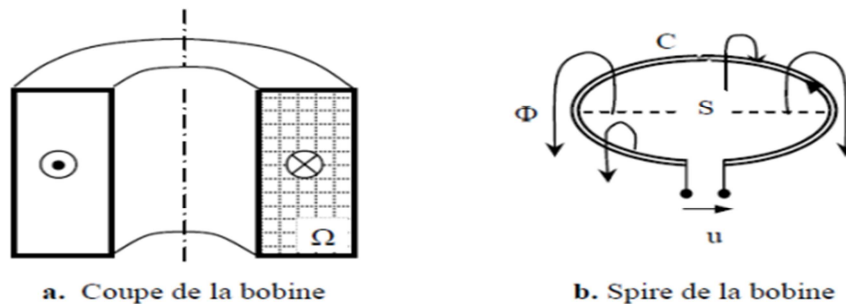


Figure II.1 : Représentation de la bobine à N jointives.

La tension totale est la somme des tensions élémentaires de chaque spire car elles sont disposées en séries, soit :

$$U = \frac{1}{\Omega} \iint_{\Omega} u d\Omega \quad (\text{II.43})$$

Différents types de formulation de l'impédance sont possibles. Ces formulations différencient dans la variable d'état utilisée. Le choix de la variable d'état est relatif aux configurations du problème et à la solution issue des équations de Maxwell.

II.3.10.2. Impédance à travers les énergies électromagnétiques

Le comportement électromagnétique de l'ensemble bobine – matériau à contrôler peut être étudié au moyen d'une analogie électrique : un circuit constitué de deux bobines couplées de manière inductive est équivalent à un seul circuit dont les paramètres sont ramenés à la bobine source. D'après cette équivalence, l'énergie magnétique du circuit est équivalente. Il en est de même pour l'énergie dissipée par effet Joule [17] [31].

La résistance R vue par le capteur peut être évaluée à travers le calcul de la puissance perdue par effet Joule, soit :

$$P_J = \iiint_v \frac{J^2}{\sigma} dv \quad (\text{II.44})$$

$$P_J = RI^2 \quad (\text{II.45})$$

D'où :

$$R = \frac{N^2}{S^2 J^2} P_J \quad (\text{II.46})$$

De même, l'énergie magnétique emmagasinée nous permet de déduire l'inductance du système.

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_v \frac{B^2}{\mu} dv \quad (\text{II.47})$$

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad (\text{II.48})$$

D'où :

$$L = \frac{2N^2}{S^2 J^2} W_m \quad (\text{II.49})$$

Cette méthode permet de calculer la résistance et l'inductance (réactance) d'une bobine de manière extrêmement simple et rapide même si cette bobine est en présence d'un matériau réactif. Néanmoins, cette méthode est applicable uniquement aux capteurs double fonctions, c'est-à-dire aux capteurs faisant office d'émetteur et récepteur en même temps.

II.3.10.3. Impédance à travers la théorie des circuits

La théorie des circuits est généralisée par les équations (II.4) et (II.7) de Maxwell. L'équation (II.4) traduit la continuité électrique (loi des nœuds en théorie des circuits). L'équation (II.7) de Maxwell – Ampère généralise la deuxième loi de Kirchhoff (loi des mailles). Cette équation écrite en fonction du potentiel vecteur magnétique et du potentiel scalaire électrique est donnée par l'équation (II.6) ; réécrite en fonction du champ électrique et en notation complexe, elle devient [3] :

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - \nabla V \quad (\text{II.50})$$

Après intégration sur le contour d'une spire élémentaire, cette équation devient :

$$- \iint_C \nabla V \cdot \vec{dl} = \int_C \vec{E} \cdot \vec{dl} + j\omega \int_C \vec{A} \cdot \vec{dl} = 0 \quad (\text{II.51})$$

Elle exprime que la somme algébrique de toutes les tensions le long d'un contour C ou d'une maille est nulle. Autrement dit, la tension appliquée aux bornes d'un contour ou d'un circuit est égal à la somme des chutes de tensions résistive et inductive le long de celui-ci.

Notant que du est la tension appliquée à ce contour, soit :

$$u = - \iint_C \nabla V \cdot \vec{dl} \quad (\text{II.52})$$

Ainsi, l'équation (II.51) devient :

$$u = \int_C \vec{E} \cdot \vec{dl} + j\omega \int_C \vec{A} \cdot \vec{dl} \quad (\text{II.53})$$

La combinaison de (II.43) et (II.53) aboutit à l'expression de la tension totale en fonction des champs.

$$U = \frac{1}{\Omega} \iint_{\Omega} \left(\int_C \vec{E} \cdot \vec{dl} \right) d\Omega + j \frac{\omega}{\Omega} \iint_{\Omega} \left(\int_C \vec{A} \cdot \vec{dl} \right) d\Omega \quad (\text{II.54})$$

Faisant intervenir le courant total traversant la section du contour, l'impédance n'est autre que :

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{N U}{\Omega J} = R + jX \quad (\text{II.55})$$

$$Z = \frac{1}{\Omega} \left[\frac{1}{\Omega} \iint_{\Omega} \left(\int_C \vec{E} \cdot \vec{dl} \right) d\Omega + j \frac{\omega}{\Omega} \iint_{\Omega} \left(\int_C \vec{A} \cdot \vec{dl} \right) d\Omega \right] \quad (\text{II.56})$$

Si dans l'entourage de la bobine se trouve un matériau qui provoque une réaction sur celle-ci, le potentiel vecteur magnétique ne sera plus réel et sera composé d'une partie réelle et d'une partie imaginaire. Ainsi, le potentiel vecteur magnétique peut être écrit sous la forme complexe suivante :

$$\vec{A} = A e^{j\omega t} = \text{Re}(\vec{A}) - j \text{Im}(\vec{A}) \quad (\text{II.57})$$

En injectant cette forme complexe du potentiel (II.57) dans l'expression de la tension totale (II.54), cette dernière devient :

$$U = \iint_{\Omega} (\int_C \vec{E} \cdot \vec{dl}) d\Omega - \omega \iint_{\Omega} \text{Im}(\int_C \vec{A} \cdot \vec{dl}) d\Omega + j\omega \iint_{\Omega} \text{Re}(\int_C \vec{A} \cdot \vec{dl}) d\Omega \quad (\text{II.58})$$

En appliquant la relation (II.55) de l'impédance en fonction de la tension et du courant, nous arrivons à la forme générale de l'impédance :

$$Z = \frac{1}{I} \iint_{\Omega} (\int_C \vec{E} \cdot \vec{dl}) d\Omega - \frac{\omega}{I} \iint_{\Omega} \text{Im}(\int_C \vec{A} \cdot \vec{dl}) d\Omega + j \frac{\omega}{I} \iint_{\Omega} \text{Re}(\int_C \vec{A} \cdot \vec{dl}) d\Omega \quad (\text{II.58})$$

$$\text{Avec : } R = \frac{1}{I} \iint_{\Omega} (\int_C \vec{E} \cdot \vec{dl}) d\Omega - \frac{\omega}{I} \iint_{\Omega} \text{Im}(\int_C \vec{A} \cdot \vec{dl}) d\Omega \quad (\text{II.59})$$

$$X = j \frac{\omega}{I} \iint_{\Omega} \text{Re}(\int_C \vec{A} \cdot \vec{dl}) d\Omega \quad (\text{II.60})$$

Ces expressions des paramètres de l'impédance s'appliquent que ce soit à une bobine seule ou en présence d'un matériau conducteur.

II.3.10.4. Impédance à travers l'induction ou le flux magnétique

En double fonction ou fonction séparées, l'impédance du bobinage peut être calculée à l'aide d'une méthode reposant sur le calcul du flux et l'induction magnétique [3], [18].

Partant de l'équation Maxwell-Faraday (II.5), après intégration sur la surface S enveloppée par le contour C de la bobine (II.1.b) et application du théorème de Stokes [3], nous arrivons à :

$$\int_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = -j\omega \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} \quad (\text{II.61})$$

Pour obtenir la tension aux bornes de la bobine, nous ferions la somme de toutes les tensions élémentaires des spires. Ainsi, l'équation (II.43) appliquée à l'ensemble des spires formant la bobine devient :

$$\iint_{\Omega} (\int_C \vec{E} \cdot \vec{dl}) d\Omega = -j\omega \iint_{\Omega} (\iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS}) d\Omega = -j\omega \iint_{\Omega} \Phi d\Omega \quad (\text{II.62})$$

Sachant que l'impédance électrique peut être évaluée à partir de :

$$Z = R + jX = \frac{1}{I} \iint_{\Omega} (\int_C \vec{E} \cdot \vec{dl}) d\Omega \quad (\text{II.63})$$

En introduisant la forme complexe du flux magnétique, la combinaison des équations (II.62) et (II.63) donne :

$$Z = \frac{\omega}{I} (\iint_{\Omega} \text{Im}(\Phi) d\Omega - j \iint_{\Omega} \text{Re}(\Phi) d\Omega) \quad (\text{II.64})$$

Les paramètres de l'impédance sont alors :

$$R = \frac{\omega}{I} \iint_{\Omega} \text{Im}(\Phi) d\Omega \quad (\text{II.65})$$

$$X = -j \frac{\omega}{I} \iint_{\Omega} \operatorname{Re}(\Phi) d\Omega \quad (\text{II.66})$$

Ou bien:

$$R = \frac{\omega}{I} \iint_{\Omega} (\iint_S \operatorname{Im}(\vec{B} \cdot \vec{dS})) d\Omega \quad (\text{II.67})$$

$$X = -j \frac{\omega}{I} \iint_{\Omega} (\iint_S \operatorname{Re}(\vec{B} \cdot \vec{dS})) d\Omega \quad (\text{II.68})$$

L'expression de l'impédance ainsi établi peut s'appliquer indifféremment aux capteurs à double fonction ou à fonctions séparées. Cependant, la majorité des méthodes de résolution utilisent une variable d'état autre que l'induction ou le flux magnétique. Par conséquent, il est préférable de formuler l'impédance en fonction du potentiel vecteur magnétique.

En introduisant le potentiel vecteur magnétique, les équations (II.67) et (II.68) deviennent comme suit :

$$\operatorname{Re}(Z) = \frac{N^2}{J.S^2} \omega \cdot \iint_S 2\pi r \cdot \operatorname{Im}(A) \cdot dS \quad (\text{II.69})$$

$$\operatorname{Im}(Z) = \frac{N^2}{J.S^2} \omega \cdot \iint_S 2\pi r \cdot \operatorname{Re}(A) \cdot dS \quad (\text{II.70})$$

Avec: r le rayon de la bobine.

II.4. Conclusion

Une bonne connaissance de l'*électromagnétisme*, partie de la physique qui traite des relations entre les phénomènes électriques et magnétiques, est une des bases nécessaires à l'électrotechnicien. Nous nous sommes donc efforcés de présenter un exposé logique, précis ; certes peu exhaustif ; mais utile sur les lois classiques et générales de l'électromagnétisme.

En se limitant aux configurations cartésiennes et aux caractéristiques électromagnétiques linéaires en utilisant l'approximation quasi-stationnaire, nous avons simplifiés les équations de Maxwell à deux équations exprimant le couplage entre le potentiel vecteur magnétique et la densité de courant électrique. Les grandeurs électromagnétiques peuvent être réduites à une variable d'état. Cette variable peut ainsi être soit le potentiel vecteur magnétique, le flux magnétique, l'induction magnétique ou le courant électrique. A chaque variable d'état correspond une formulation de calcul d'impédance.

Chapitre III

*Modèles numériques et
méthodes de résolution des
équations électromagnétiques*

III.1. Introduction

La simulation consiste à reproduire par le calcul le fonctionnement d'un système. Elle s'appuie sur une modélisation et fait appel à des méthodes mathématiques et informatiques spécifiques. En chaque point du système considéré, plusieurs grandeurs physiques (vitesse, température, champ électromagnétique...) décrivent son état. Ces grandeurs physiques ne sont pas indépendantes, mais liées par des équations, généralement aux dérivées partielles. Ces équations constituent la traduction mathématique des lois de la physique qui régissent le comportement du système.

Les équations aux dérivées partielles interviennent dans de nombreux domaines de la physique, qui comprennent les problèmes de diffusion et les phénomènes de propagation. Ces équations différentielles n'ont généralement pas de solutions analytiques, lorsque les géométries sont complexes ou que les propriétés physiques des matériaux dépendent de la variable d'état, une résolution numérique est alors nécessaire.

Les méthodes numériques de discrétisation transforment les équations aux dérivées partielles, caractéristiques aux champs, à des systèmes d'équations algébriques dont la solution fournit une approximation de ces champs en une grille discrète de points dans le plan ou dans l'espace. Ceci consiste à ramener la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles dans le domaine d'étude, compte tenu des conditions aux limites et de symétrie, à un système d'équation algébrique dont la solution conduit à la détermination des champs.

Parmi ces méthodes, on cite la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis et la méthode des intégrales de frontières.

D'une façon générale, on peut classer les méthodes de résolution en trois modèles : les modèles analytiques, les modèles hybrides et les modèles numériques.

III.2. Modèles

Un modèle est toujours lié à ce que l'on veut en faire. Il permet de décrire les performances d'un dispositif. Il peut aussi représenter une partie plus ou moins importante de performances. Un modèle d'un système est souvent composé d'un assemblage de modèles provenant des éléments du système. D'un autre point de vue, un modèle peut aussi représenter un phénomène physique à simuler, et des modèles de plusieurs phénomènes physiques peuvent être assemblés afin d'aboutir à un modèle multi-physique [33].

III.2.1. Modèle analytique

Un modèle analytique est un ensemble d'équations mathématiques qui déduit des phénomènes physiques propres au dispositif. Il permet de connaître les performances à partir des paramètres d'entrées. Le modèle analytique peut fournir très rapidement un résultat, et il est très utile dans un processus d'optimisation. Pour construire un modèle analytique, il faut une connaissance experte du dispositif ou phénomène étudié. Le processus de sa construction est long. Certains coefficients empiriques, des hypothèses et des simplifications sur certains phénomènes doivent être bien souvent intégrés. Ce modèle peut devenir complexe, suivant les hypothèses prises par le concepteur et l'application envisagée.

Les résultats obtenus par un modèle analytique sont souvent moins précis que ceux fournis par un modèle numérique. Les modèles analytiques sont fréquemment utilisés comme la première étape lors de l'étude d'un quelconque phénomène physique pour fournir une base de données préliminaire puis un modèle numérique est utilisé pour valider ou ajuster quelques éléments [33].

Les méthodes de résolution analytiques utilisées pour la résolution des problèmes électromagnétiques régis par des équations aux dérivées partielles sont : la méthode de séparation de variables, la méthode des séries exponentielles, la méthode des transformations conformes [11].

III.2.2. Modèle intermédiaire

Les modèles analytiques et numériques peuvent être mixés pour former un modèle hybride (intermédiaire ou bien semi-analytique). Ce type de modèle a des performances intermédiaires en termes du temps de calcul et de précision. Il existe plusieurs types de modèle semi-analytique, par exemple : les réseaux de perméances, les modèles thermiques nodaux, les réseaux de Kirchhoff... etc. ils sont également très utilisés et permettent de coupler de nombreux phénomènes physiques [33].

III.2.3. Modèle numérique

Le modèle numérique a pris un essor considérable avec l'avènement des moyens informatiques dans les années 50. Celui-ci est d'autant plus utilisé que les configurations à traiter sont complexes. Et parmi les méthodes qu'il nous offre, on trouve la méthode des

différences finies, la méthode des intégrales de frontières, la méthode des volumes finis et la méthode des éléments finis, [11].

Ces méthodes sont très utilisables en électromagnétisme, l'objectif de ces méthodes est la discrétisation des équations mathématiques établies qui consiste à ramener la résolution des équations aux dérivées partielles dans le domaine d'étude, compte tenu des conditions aux limites, à celle d'une équation algébrique dont la solution donne la valeur et la distribution des grandeurs recherchées.

III.2.3.1. Méthode des différences finies (MDF)

La méthode des différences finies est la plus simple et historiquement la première, cette méthode est basée sur la transformation de l'opérateur différentiel en un opérateur aux différences où chaque dérivée est approchée par une différence de valeurs de l'inconnu aux points de calcul (nœuds) du domaine de résolution [34].

La méthode des différences finies a été la première méthode numérique utilisée pour la résolution d'équations aux dérivées partielles de types « Laplace » ou « Poisson ». Elle a été rendu populaire grâce à l'invention du calculateur numérique qui s'est fait vers 1949. Les équations aux dérivées partielles résolues sont considérées avec des conditions aux limites de types : Dirichlet, Neumann et mixte [32].

Considérons le domaine suivant :

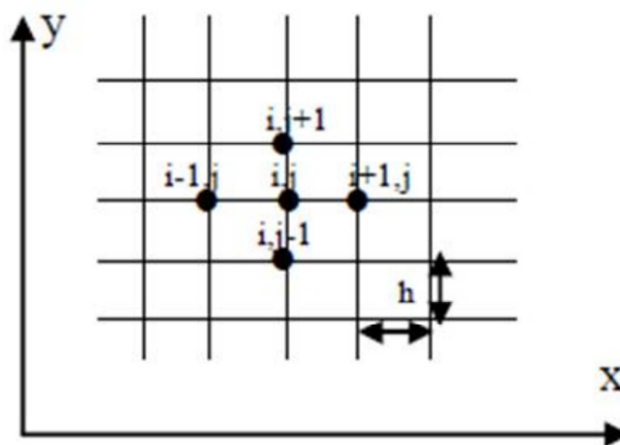


Figure III.1 : Représentation du maillage type différences finies.

Si on applique un développement limité en série de Taylor de la fonction à déterminer en chacun des nœuds du maillage, l'approximation des dérivées aux points (i, j) est :

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j}}{2h} \quad (\text{III.1})$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{A_{i,j+1} - A_{i,j-1}}{2h} \quad (\text{III.2})$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j}}{h^2} \quad (\text{III.3})$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{h^2} \quad (\text{III.4})$$

Ce qui permet de déduire l'expression du Laplacien :

$$\begin{aligned} (\Delta A)_{i,j} &= \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_{i,j} + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j}}{h^2} + \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{h^2} \\ (\Delta A)_{i,j} &= \frac{A_{i+1,j} + A_{i-1,j} + A_{i,j+1} + A_{i,j-1} - 4A_{i,j}}{h^2} \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

L'équation (III.5) est appelée la forme à cinq points. Elle s'écrit avec le système matriciel suivant :

$$[M][A] = [S] \quad (\text{III.6})$$

Avec : $[M]$ la matrice inversible, $[A]$ la matrice des inconnus et $[S]$ la matrice source.

Cette méthode est rarement utilisée à cause de son maillage qui s'adapte mal aux géométries à frontières complexes et à cause de l'importance de la taille des systèmes algébriques, ce qui induit un temps de résolution important et une précision des calculs coûteuse [11].

De nos jours, elle est supplantée par la méthode des éléments finis dans presque toutes les applications en ingénierie.

III.2.3.2. Méthode des intégrales de frontières (MIF)

Lorsqu'on utilise la MDF ou la MEF (la méthode des éléments finis), on calcul les variables inconnues dans tout le domaine. La MIF permet de ramener le maillage à la frontière du domaine. Ainsi, le calcul des valeurs de l'inconnue sur les frontières du domaine

suffit pour obtenir la solution en tout point du domaine. Cette méthode utilise le théorème d'Ostrogradski-Green.

Cette méthode peut être intéressante pour l'étude de structure tridimensionnelle ou lorsque l'air ou les milieux passifs occupent une grande partie du domaine d'étude. Elle est utilisée en magnétostatique ou bien elle est couplée avec la MEF pour calculer des champs électromagnétiques dans les milieux linéaires et non conducteurs. Cependant, la MIF a la difficulté de prendre en considération la saturation, alors elle nécessite un espace mémoire et un temps de calcul importants, car elle conduit à un système algébrique à matrice pleine (pas de termes nuls) [35].

Elle trouve son application lorsque les fréquences de travail sont très importantes car la profondeur de pénétration devient très faible vis-à-vis des autres dimensions géométriques du dispositif étudié et une discrétisation en éléments finis ferait aboutir à des difficultés insurmontables à cause du grand nombre d'éléments nécessaires à cette discrétisation [11], [24].

III.2.3.3. Méthode des volumes finis (MVF)

La MVF se déduit de la MDF. Le domaine d'étude (Ω) est subdivisé en un nombre d'élément finis. Chaque élément contient quatre nœuds, pour le cas bidimensionnel axisymétrique, un volume fini entoure chaque nœud.

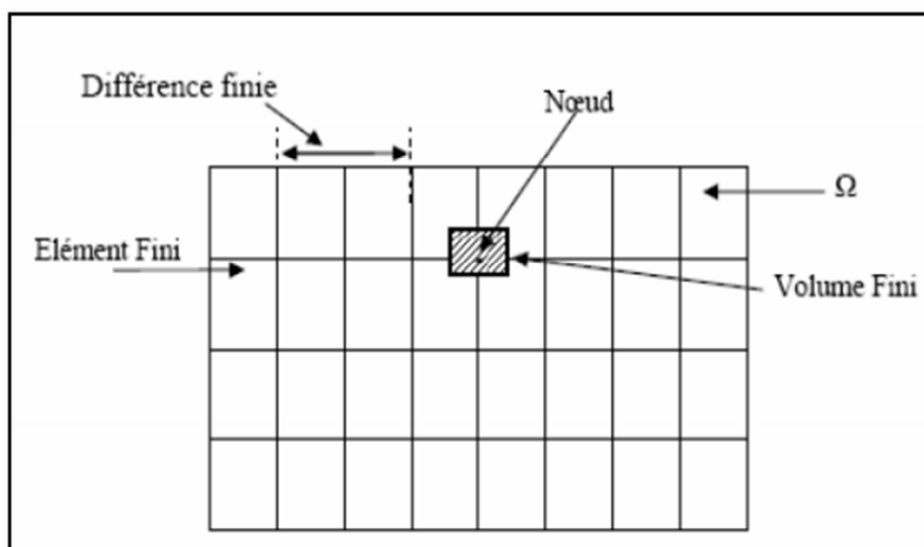


Figure III.2 : Représentation du maillage type volumes finis.

L'équation différentielle est projetée sur une fonction de projection bien déterminée et ensuite intégrée dans chacun des volumes élémentaires. Pour calculer l'intégrale dans le volume élémentaire, la fonction inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, parabolique, exponentielle, ...etc.) entre deux nœuds consécutifs. Ensuite, la forme intégrale est discrétisée dans le domaine d'étude. L'équation discrétisée de cette façon exprime le principe de conservation pour l'inconnu dans l'élément de volume et la solution obtenue est constituée uniquement par les valeurs nodales. Lors de l'assemblage des équations discrétisées, la matrice du système globale est construite par arrête contrairement aux matrices globales issues d'une discrétisation par éléments finis, pour laquelle la construction s'effectue par élément.

Cette méthode est utilisée en particulier en mécanique de fluides (l'équation d'écoulement), où elle est apparue depuis une vingtaine d'année, sa procédure donne une solution plus précise que celle par la MDF [35], [36].

III.2.3.4. Méthode des éléments finis (MEF)

La méthode des éléments a été utilisée pour la première fois pour simuler les problèmes de mécanique des milieux continus déformables (calcul de structure). Le champ d'application s'est considérablement étendu et les fondements théoriques de la méthode se sont amplement consolidés.

Il existe de nos jours un nombre important de logiciels commerciaux et académiques de conception assistée par ordinateur (C.A.O), qui utilisent la MEF comme un outil de simulation robuste pour des problèmes de mécanique des milieux continus, de mécanique des fluides, de thermique, d'électromagnétisme ou de finance, pour ne citer que quelques exemples. Cette méthode a été introduite pour la première fois en électromagnétisme par P.P. Silvestre et M.V.K. Chari vers 1970 [24], [32].

La MEF consiste donc à remplacer un problème continu par un problème discret équivalent. La discrétisation se fait sur deux fronts, d'une part le domaine est subdivisé en sous domaines de géométrie simples appelés éléments, et d'autre part les équations aux dérivées partielles sont remplacées par des équations algébriques à l'aide du calcul variationnel ou des méthodes de minimisation de l'erreur comme la méthode des résidus pondérés.

Elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes et aux domaines complexes. La solution finale s'obtient en résolvant les équations algébriques obtenues sur tous les éléments constituant le domaine [24].

C'est cette méthode que nous avons retenue. Elle est présentée plus en détail dans la suite de ce chapitre.

III.2.4. Etapes de résolution par la MEF

D'une manière générale, la résolution par MEF inclut les étapes suivantes :

- Obtention de la formulation du problème et définition des espaces fonctionnels de solutions admissibles.
- Réalisation d'un maillage, correspondant à la discrétisation du domaine d'étude en éléments (triangles, tétraèdres, hexaèdres...) sur lesquels les champs sont écrits en termes d'un nombre fini de degrés de liberté et de fonctions de base à support local.
- Calcul des matrices élémentaires qui, après assemblage, génèrent un système matriciel creux.
- Résolution du système algébrique pour l'obtention d'une solution approchée du problème.

III.2.5. Formulation éléments finis

Nous définissons la méthode des éléments finis comme une méthode de discrétisation des formes intégrales de type Galerkin : elle remplace la forme intégrale globale par la somme de formes intégrales élémentaires puis discrétiser celles-ci en utilisant une approximation par éléments finis [24].

La formulation intégrale peut se faire par deux types :

- ✓ Variationnelle
- ✓ Résidus pondérés

III.2.5.1. Formulation variationnelle

La méthode variationnelle exige la connaissance au préalable de la fonctionnelle d'énergie du système à étudier. Cette fonctionnelle est déterminée à partir de l'action

Hamiltonnienne qui stipule l'existence d'une fonctionnelle de type intégrale définie par [2], [3], [24] :

$$F(A) = \int_{\Omega} L(x_i, q_i, q'_{ik}) d\Omega \quad (\text{III.7})$$

L : Fonction de Lagrange (Lagrangien) qui résulte de la coénergie du système de type cinétique et de son énergie potentielle.

Ω : Domaine de résolution.

Avec :

$$L(x_i, q_i, q'_{ik}) = W_c - W_p \quad (\text{III.8})$$

W_c : Energie cinétique.

W_p : Energie potentielle.

x_i : Variables.

q_i : Variables d'état.

$q'_{ik} = \frac{\partial q_i}{\partial x_{ik}}$: Dérivées des fonctions d'état.

Résoudre le problème variationnel défini par la fonctionnelle d'énergie $F(A)$ revient à minimiser cette fonctionnelle.

❖ Cas d'un phénomène magnétique

Dans ce cas, la fonction de Lagrange est donnée par l'expression :

$$L = \int_0^B v B dB - JA \quad (\text{III.9})$$

A : Potentiel vecteur magnétique [T. m].

J : Densité de courant [A/m^2].

$v = \frac{1}{\mu}$: Réductivité magnétique [H/m]⁻¹.

B : Induction magnétique [T].

L'expression de la fonctionnelle d'énergie est donnée comme suit :

$$F(A) = \int_{\Omega} \left[\int_0^B \nu B dB - JA \right] d\Omega \quad (\text{III.10})$$

La résolution du problème variationnel défini par la fonctionnelle d'énergie $F(A)$ revient à minimiser cette fonctionnelle ; la minimisation est effectuée en utilisant le principe de Rayleigh-Ritz qui s'énonce comme suit [24]: « la dérivée de la fonctionnelle d'énergie $F(A)$ par rapport à chaque inconnue au nœud est nulle ».

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (\text{III.11})$$

Où :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_1} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_2} = \dots = \frac{\partial F(A)}{\partial A_n} = 0 \quad (\text{III.12})$$

n : Nombre de nœuds du domaine d'étude.

A_i : L'inconnu aux nœuds i du domaine.

III.2.5.2. Méthode des résidus pondérés (projective)

a) Principe de la méthode

Le principe fondamental des méthodes projectives est basé sur le théorème applicable dans un espace de « Hilbert », qui stipule que seul un vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace [32].

La méthode des résidus pondérés est basée sur la détermination du résidu par [3]:

$$R = L(A) - f_V \quad (\text{III.13})$$

R : Représente le résidu de l'approximation.

$L(A)$: Opérateur différentiel.

f_V : Fonction définie sur le domaine d'étude Ω .

A : L'inconnue du problème.

A l'aide de fonctions de pondération bien choisies, on impose à l'intégrale du résidu de s'annuler en n points du domaine Ω :

$$\int_{\Omega} R_i \cdot \phi_i \cdot d\Omega = 0 \quad (\text{III.14})$$

ϕ_i : Fonction de projection.

Le choix des fonctions de projection ϕ_i induit une erreur de méthode mais elles présentent un avantage par rapport à la méthode variationnelle car elle ne nécessite pas la connaissance au préalable de la fonctionnelle d'énergie du système à étudier.

Les valeurs de A qui permettent d'annuler l'intégrale sont la solution du système algébrique obtenu.

b) Différentes méthodes déduites des résidus pondérés

Le choix des fonctions de pondération appelées aussi fonctions de projection, conduit à plusieurs méthodes. Parmi celles-ci nous citerons :

- ✓ La méthode de collation par point.
- ✓ La méthode des moindres carrés.
- ✓ La méthode de Petrov Galerkin.

La méthode de collation par point utilise les fonctions de Dirac comme fonction de pondération (projection), la méthode des moindres carrés est basée sur la minimisation de la norme quadratique de l'erreur (erreur quadratique) sur l'équation et les conditions aux limites. La méthode de Galerkin consiste à choisir des fonctions de projection identiques aux fonctions d'approximation (elle permet d'avoir un système matriciel symétrique).

Contrairement à la méthode variationnelle, la méthode des résidus pondérés ne nécessite pas la connaissance au préalable de la fonctionnelle d'énergie du système.

Dans le cas de l'utilisation de la méthode de Galerkin, on obtient un système algébrique symétrique facile à résoudre. On se limitera dans ce qui suit, à la méthode projective de Galerkin qui sera employée pour le traitement des problèmes à équations aux dérivées partielles étudiées et cela pour deux raisons [24] :

1. Elle s'applique indépendamment de la connaissance au préalable de la fonctionnelle d'énergie du système à étudier.
2. En choisissant les fonctions de pondérations identiques aux fonctions de formes, nous obtenons un système algébrique dont la résolution devient relativement rapide.

III.2.5.3. Discrétisation du domaine d'étude (maillage)

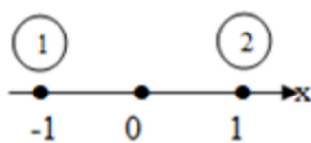
L'approche de base de la méthode des éléments finis est de subdiviser le domaine d'étude en un nombre finis de sous domaines appelés éléments. L'approximation de l'inconnue se fait en chaque élément à l'aide des fonctions d'interpolations. La fonction d'interpolation est aussi définie en fonction de la géométrie de l'élément qu'on choisit préalablement et coïncide avec les nœuds de cet élément relatif aux valeurs de l'inconnue. On parle alors d'interpolation nodale [3].

a) Eléments finis réels

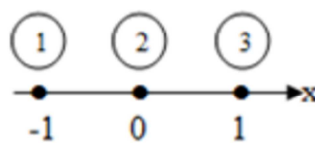
Pour des domaines d'étude à une, deux ou trois dimensions, des éléments classiques peuvent être définis selon le degré de la courbe d'interpolation qui lui est associés. On rencontre généralement, des éléments linéaires, quadratiques ou cubiques.

Nous présenterons dans ce qui suit quelques éléments de bases appelés aussi éléments de références :

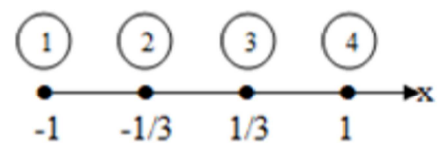
❖ Eléments à une dimension (1D)



Linéaire (02 nœuds)



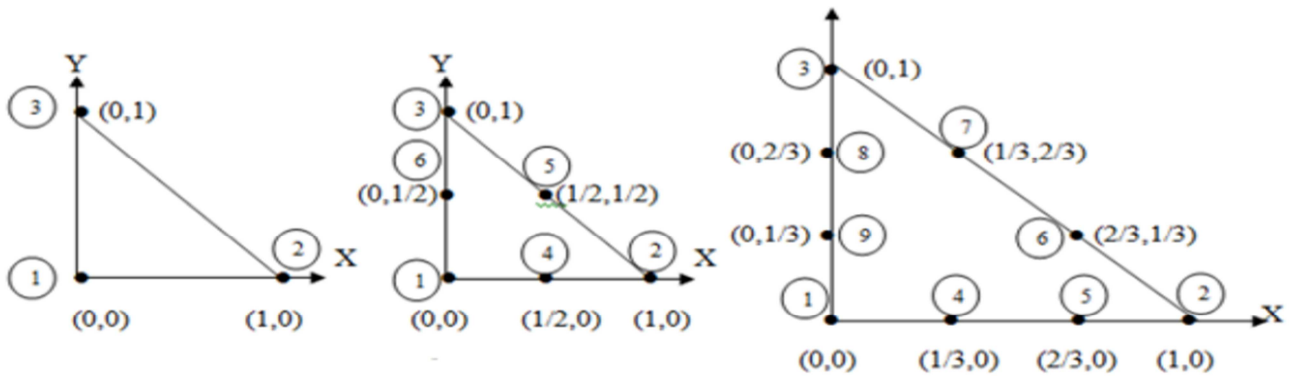
Quadratique (03 nœuds)



Cubique (04 nœuds)

❖ **Éléments à deux dimensions (2D)**

• **Éléments triangulaires**

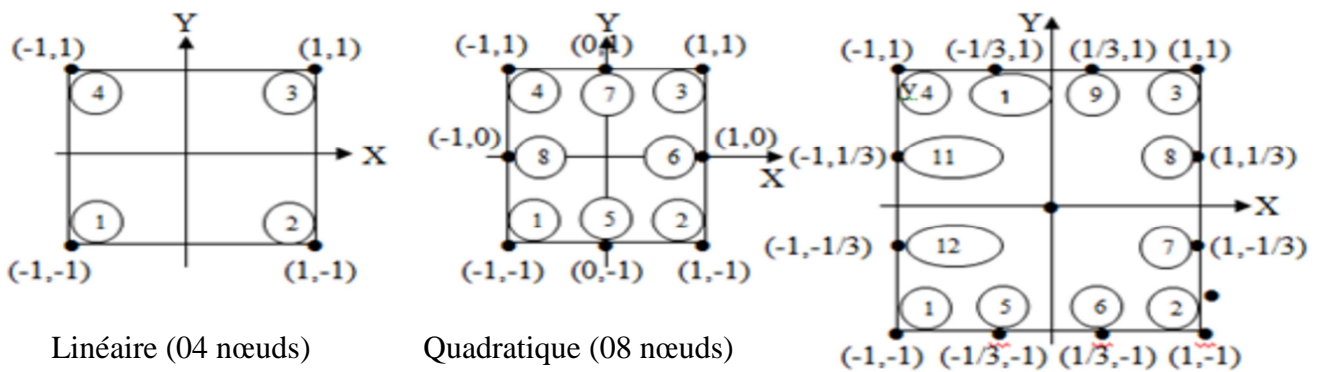


Linéaire (03 nœuds)

Quadratique (06 nœuds)

Cubique (09 nœuds)

• **Éléments carrés**

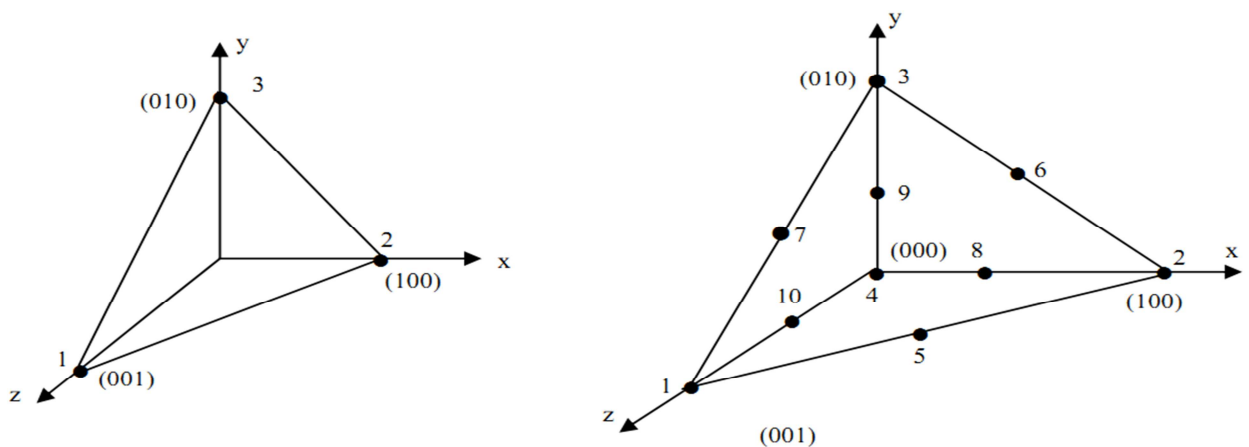


Linéaire (04 nœuds)

Quadratique (08 nœuds)

Cubique (12 nœuds)

❖ **Éléments à trois dimensions (3D)**



Linéaire (04 nœuds)

Quadratique (10 nœuds)

Etant donné que le logiciel de simulation utilisé (MATLAB) fait appel à l'élément triangulaire linéaire, on ne s'intéressera dans la suite qu'à celui-ci.

b) Fonction d'interpolation

Les fonctions d'interpolation sont obtenues à partir du triangle de Pascal, donné ci-dessous :

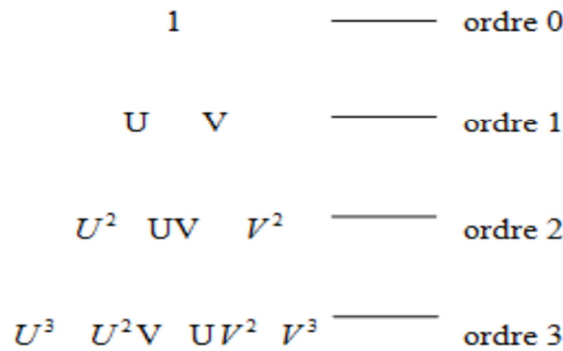


Figure III. 3 : Représentation du triangle de Pascal.

La construction de ces fonctions doit vérifier les conditions suivantes :

1) Principe de l'état complet

- Le nombre de termes de la fonction doit être égal au nombre de nœuds de l'élément.
- La fonction doit contenir un terme constant.

2) Principe de compatibilité

- La fonction doit être continue (c'est-à-dire la première dérivée existe).

On peut citer un exemple d'une fonction d'interpolation (ordre 2) :

$$A(U, V) = a + bU + cV + dUV + eU^2 + fV^2 \tag{III.15}$$

La base polynômiale sera alors :

$$P = [1 \quad U \quad V \quad UV \quad U^2 \quad V^2] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} \tag{III.16}$$

La construction d'une fonction approchée $U^e(x)$, avec (e) comme indice relatif à l'élément étudié est différente sur chaque élément par la méthode d'approximation nodale. Donc la fonction d'approximation aura la forme suivante :

$$U(x) = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_n] \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \phi \cdot U \quad (\text{III.17})$$

$U(x)$: C'est la fonction d'approximation qui est identifiée à la fonction exacte.

$\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_n$: Les fonctions de forme de l'élément.

$U_1 \quad U_2 \quad \cdots \quad U_n$: Les variables associées aux nœuds du domaine.

c) Fonction d'interpolation sur élément

Dans le cas élément triangulaire linéaire, l'approximation d'une fonction $u(x, y)$ de valeurs u_1, u_2 et u_3 respectivement aux sommets 1, 2 et 3, est de la forme suivante :

$$u(x, y) = [N_1(x, y) \quad N_2(x, y) \quad N_3(x, y)] \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

Avec : $N_1(x, y) = \frac{1}{2T} \cdot [(y_3 - y_2) \cdot (x_2 - x) - (x_3 - x_2) \cdot (y_2 - y)]$

$N_2(x, y) = \frac{1}{2T} \cdot [(y_1 - y_3) \cdot (x_3 - x) - (x_1 - x_3) \cdot (y_3 - y)]$

$N_3(x, y) = \frac{1}{2T} \cdot [(y_2 - y_1) \cdot (x_1 - x) - (x_2 - x_1) \cdot (y_1 - y)]$

Où : T est la surface du triangle décrit par les sommets (1), (2) et (3). On remarque que :

$$N_1(x_1, y_1) = 1$$

$$N_2(x_2, y_2) = 0$$

$$N_3(x_3, y_3) = 0$$

d) Fonction d'approximation sur le domaine

Dans le cas global contenant n nœuds, l'inconnue s'exprime alors comme suit :

$$A = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot A_j \quad (\text{III.19})$$

n : Le nombre de nœuds.

A_j : La valeur de l'inconnue au nœud j .

α_j : La fonction d'interpolation au nœud j .

III.2.6. Formulation éléments finis des équations électromagnétiques

III.2.6.1. Equation magnétostatique

a) Cas cartésien

L'équation magnétostatique dans ce cas est donnée par l'expression suivante :

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(v \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) = J_s \quad (\text{III.20})$$

La formulation intégrale de l'équation (III.20) est donnée comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(v \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) + J_s \right) \cdot dx dy = 0 \quad (\text{III.21})$$

L'équation (III.21) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(v \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(v \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) \cdot dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_s \cdot dx dy \quad (\text{III.22})$$

L'application du théorème de Green au premier terme de l'équation (III.22) nous permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(v \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(v \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) \cdot dx dy = & (\text{III.23}) \\ & \left(= - \iint_{\Omega} v \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \cdot dx dy + \int_{\Gamma} v \cdot \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \cdot \cos(n, x) + \frac{\partial A_z}{\partial y} \cdot \cos(n, y) \right) \alpha_i \cdot d\Gamma \right) \end{aligned} \right.$$

Où $\cos(n, x)$ et $\cos(n, y)$ sont les cosinus directeurs au point considéré de la frontière Γ .

L'équation (III.23) peut être écrite comme suit :

$$\iint_{\Omega} v \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \cdot dx dy - \int_{\Gamma} v \cdot \frac{\partial A_z}{\partial n} \alpha_i \cdot d\Gamma = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_s \cdot dx dy \quad (III.24)$$

Dans le cas de conditions aux limites type Dirichlet ou Neumann homogène, le terme sur la frontière s'annule, c'est-à-dire :

$$\int_{\Gamma} v \cdot \frac{\partial A_z}{\partial n} \alpha_i \cdot d\Gamma = 0 \quad (III.25)$$

L'expression (III.24) devient alors :

$$\iint_{\Omega} v \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \cdot dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_s \cdot dx dy \quad (III.26)$$

L'équation (III.26) en écriture condensée devient ;

$$\iint_{\Omega} v \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla A_z} dx dy \quad (III.27)$$

Sachant que :

$$A_z = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot A_j$$

Et en remplaçant dans (III.27), on aboutira à :

$$\sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} v \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} dx dy \right] \cdot A_j = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_s \cdot dx dy \quad (III.28)$$

i, j : Entiers naturels variant de 1 à n .

n : Nombre de nœuds du domaine.

L'écriture de l'équation (III.28) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'aboutir au système matriciel suivant :

$$[M] \cdot [A] = [K] \quad (III.29)$$

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} v \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} dx dy$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_s \cdot dx dy$$

[A] : Vecteur des inconnues du domaine d'étude.

b) Cas axisymétrique

Dans ce cas, l'équation magnétostatique est donné par :

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(r.A_\varphi)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(r.A_\varphi)}{\partial z} \right) \right) = J_\varphi \quad (\text{III.30})$$

En considérant comme inconnu le potentiel vecteur modifié donné par $A = r.A_\varphi$ l'équation (III.30) devient :

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) = J_\varphi \quad (\text{III.31})$$

La formulation intégrale de l'expression (III.31) est donnée comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left(\left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) - J_\varphi \right) drdz = 0 \quad (\text{III.32})$$

L'équation (III.32) peut être écrite comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left(\left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) \right) drdz = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_\varphi \cdot drdz \quad (\text{III.33})$$

L'application du théorème de Green au premier terme de (III.33) nous permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_{\Omega} \alpha_i \left(\left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) \right) \cdot drdz = \\ & = - \iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) \cdot drdz + \int_{\Gamma} \frac{v}{r} \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial r} \alpha_i \cdot \cos(n, r) + \frac{\partial A}{\partial z} \alpha_i \cdot \cos(n, z) \right) \cdot d\Gamma \end{aligned} \right. \quad (\text{III.34})$$

En remplaçant (III.33) dans (III.34), on obtient :

$$\iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla A} \cdot drdz - \int_{\Gamma} v \cdot \frac{\partial A}{\partial n} \alpha_i \cdot d\Gamma = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_\varphi \cdot drdz \quad (\text{III.35})$$

Dans le cas de conditions aux limites type Dirichlet ou Neumann homogène le terme sur la frontière s'annule, ce qui revient à écrire :

$$\int_{\Gamma} v \cdot \frac{\partial A}{\partial n} \alpha_i \cdot d\Gamma = 0$$

L'équation (III.35) devient :

$$\iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_1} \cdot \overrightarrow{\nabla A} dr dz = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_{\varphi} \cdot dr dz \quad (\text{III.36})$$

Sachant que : $A = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot A_j$

Et en remplaçant dans (III.36), on obtient alors :

$$\sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_1} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} dr dz \right] \cdot A_j = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_{\varphi} \cdot dr dz \quad (\text{III.37})$$

L'écriture de l'équation (III.37) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'aboutir au système matriciel suivant :

$$[M] \cdot [A] = [K] \quad (\text{III.38})$$

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_1} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} dr dz$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_{\varphi} \cdot dr dz$$

III.2.6.2. Equation magnétodynamique

a) Cas cartésien

L'équation magnétodynamique dans le cas comportant une source est donnée par :

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge (v \overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_s \quad (\text{III.39})$$

En considérant le régime harmonique, l'équation (III.39) s'écrit :

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge (v \overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{A}) + j\sigma\omega \vec{A} = \vec{J}_s \quad (\text{III.40})$$

Après transformation, l'équation (III.40) devient :

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) + j\sigma\omega A_z = J_s \quad (\text{III.41})$$

La formulation intégrale de l'équation (III.41) est donnée par :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(- \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) + j\sigma\omega A_z - J_s \right) \cdot dx dy = 0 \quad (\text{III.42})$$

L'équation (III.42) peut être réécrite comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(- \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) \cdot dx dy + j\omega \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot A_z \cdot dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_s \cdot dx dy \quad (\text{III.43})$$

L'application du théorème de Green nous permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) \cdot dx dy = & (\text{III.44}) \\ & = - \iint_{\Omega} v \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \cdot dx dy + \int_{\Gamma} v \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \cdot \alpha_i \cdot \cos(n, x) + \frac{\partial A_z}{\partial y} \cdot \alpha_i \cdot \cos(n, y) \right) \cdot d\Gamma = \\ & = \iint_{\Omega} v \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla A_z} dx dy + \int_{\Gamma} v \cdot \alpha_i \cdot \frac{\partial A_z}{\partial n} \cdot d\Gamma \end{aligned} \right.$$

En remplaçant (III.43) dans (III.44), on obtient :

$$\iint_{\Omega} v \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla A_z} dx dy - \int_{\Gamma} v \cdot \alpha_i \cdot \frac{\partial A_z}{\partial n} \cdot d\Gamma + j\omega \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot A_z \cdot dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_s \cdot dx dy \quad (\text{III.45})$$

Dans le cas de conditions aux limites type Dirichlet ou Neumann homogène le terme sur la frontière s'annule, ce qui revient à écrire :

$$\int_{\Gamma} v \cdot \alpha_i \cdot \frac{\partial A_z}{\partial n} \cdot d\Gamma = 0$$

L'expression (III.45) devient alors :

$$\iint_{\Omega} v \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla A_z} dx dy + j\omega \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot A_z \cdot dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_s \cdot dx dy \quad (\text{III.46})$$

Sachant que : $A = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot A_j$

Et en remplaçant dans (III.46), on obtient :

$$\sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} v \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} dx dy \right] \cdot A_j + j\omega \sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot dx dy \right] \cdot A_j = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_s \cdot dx dy \quad (\text{III.47})$$

L'écriture de l'équation (III.47) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'aboutir au système matriciel suivant :

$$[M] \cdot [A] + j\omega \cdot [L] \cdot [A] = [K] \quad (\text{III.48})$$

Avec : $M_{ij} = \iint_{\Omega} v \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} dx dy$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot dx dy$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_s \cdot dx dy$$

$$\bar{A} = A_r + jA_i$$

b) Cas axisymétrique

En considérant comme précédemment le régime harmonique, la formulation intégrale dans ce cas est donnée par l'expression suivante :

$$- \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) \right) \cdot dr dz + j\omega \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot A_z \cdot \frac{dr dz}{r} = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_{\varphi} \cdot dr dz \quad (III.49)$$

L'application du théorème de Green nous permettra d'écrire :

$$\iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) \cdot dr dz - \int_{\Gamma} \frac{v}{r} \cdot \alpha_i \cdot \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma + j\omega \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot A \cdot \frac{dr dz}{r} = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_{\varphi} \cdot dr dz \quad (III.50)$$

Dans le cas de conditions au limites Dirichlet ou Neumann homogène, le terme sur la frontière s'annule, ce qui revient à écrire :

$$\sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} dr dz \right] \cdot A_j + j\omega \sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot \frac{dr dz}{r} \right] \cdot A_j = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_{\varphi} \cdot dr dz \quad (III.51)$$

L'écriture de l'équation (III.51) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'aboutir au système matriciel suivant :

$$[M] \cdot [A] + j\omega \cdot [L] \cdot [A] = [K] \quad (III.52)$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} dr dz$$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot \frac{dr dz}{r}$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_{\varphi} \cdot dr dz$$

$$\bar{A} = A_r + jA_i$$

III.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différentes méthodes de résolutions des équations aux dérivées partielles ainsi les différentes formulations électromagnétiques qui résolvent les équations de la magnétostatique et la magnétodynamique. La méthode des éléments finis ayant été retenue pour notre travail, elle été vue de la manière la plus exhaustive possible.

Chapitre IV

Réseaux de neurones

IV.1. Introduction et historique

Les réseaux de neurones artificiels connaissent depuis quelques années un succès croissant dans divers domaines des Sciences de l'Ingénieur. Ils mènent à élaborer une technique de traitement de données qui fera bientôt partie de la boîte à outils de tout ingénieur préoccupé de tirer le maximum d'informations pertinentes des données qu'il possède: faire des prévisions, élaborer des modèles, reconnaître des formes ou des signaux, etc.

L'objectif principal de la recherche sur réseaux de neurones était d'accroître nos connaissances sur le mécanisme cérébral via l'élaboration de systèmes artificiels capables de reproduire des calculs complexes, similaires à ceux qu'effectue le cerveau humain, donc l'étude approfondie des concepts de base de ces réseaux est toujours nécessaire pour qu'on puisse aboutir à des solutions pour des applications différentes.

Les caractéristiques essentielles des modèles mathématiques des réseaux de neurones biologiques concernent le nombre de connexions, la non-linéarité des relations entrée-sortie et la faculté d'apprentissage. Ces caractéristiques, même simplifiées, leur confèrent déjà de multiples possibilités en traitement des signaux et des informations ainsi que la faculté d'apprendre à classer, à reconnaître des formes ou à réaliser des tâches complexes.

Les premières tentatives pour proposer un modèle simulant le fonctionnement du cerveau ont été menées par les deux biophysiciens McCulloch et Pitts, qui proposent en 1943 le premier neurone formel qui portera leurs noms (neurone de McCulloch-Pitts). En 1949, Donald Hebb propose un nouveau mécanisme dit mécanisme d'apprentissage, sous la forme d'une règle de modification des connexions synaptiques dite « règle de Hebb ». Cette règle, basée sur des données biologiques, modélise le fait que si des neurones, de part et d'autre d'une synapse, sont activés de façon synchrone et répétée, la force de la connexion synaptique sera renforcée.

L'intérêt s'accroît au fil des années jusqu'en 1958 où les travaux de Frank Rosenblatt donnent naissance au premier réseau de neurones artificiels: le Perceptron. Ce nouveau réseau est inspiré du système visuel (en termes d'architecture neurobiologique) et possède une couche de neurones d'entrée "perceptive" ainsi qu'une couche de neurones de sortie "décisionnelle". Ce réseau parvient à apprendre, à identifier des formes simples et à calculer certaines fonctions logiques. Il constitue donc le premier système artificiel présentant la faculté et la capacité d'apprendre par l'expérience.

Malgré tout le succès que soulève le travail de Rosenblatt dans le début des années 60, un ouvrage publié par Marvin Lee Minsky et Seymour Papert à la fin de cette décennie (1969)

montre les limites du « Perceptron », et soulève particulièrement l'incapacité du Perceptron à résoudre les problèmes non linéairement séparables, tels que le célèbre problème du XOR (OU exclusif). Ils critiquent non seulement le modèle du Perceptron mais ils généralisent implicitement, ces limitations à tous modèles de réseaux de neurones artificiels. Il s'en suivra alors, face à la déception, une période creuse d'une quinzaine d'années dans le domaine des réseaux de neurones artificiels.

Au début des années 80, le physicien John Joseph Hopfield publie (1982) un article où il présente un nouveau modèle de réseau de neurones. En effet, Hopfield démontre tout l'intérêt d'utiliser des réseaux récurrents. Un réseau de neurones récurrent est un réseau de neurones où il existe au moins un cycle (boucle) dans la structure (topologie). Ce type de réseaux constitue alors la deuxième grande classe de réseaux de neurones, après les réseaux de type Perceptron.

En parallèle des travaux de Hopfield, Werbos conçoit son algorithme de rétropropagation de l'erreur, qui offre un mécanisme d'apprentissage pour les réseaux multicouches de type Perceptron (appelés MLP pour Multi-layer Perceptron), fournissant ainsi un moyen simple d'entraîner les neurones des couches cachées. Cet algorithme ne sera pourtant popularisé qu'en 1986 par Rumelhart [37].

IV.2. Neurone Biologique

Un neurone est une cellule qui est un élément de base du système nerveux central, se compose essentiellement de :

- ✓ **Corps cellulaire (soma)** : il est centré par un noyau, toutes les informations recueillies par les synapses sont acheminées vers le corps cellulaire.
- ✓ **Synapses** : une synapse est une jonction entre deux neurones ; et généralement entre l'axone d'un neurone et une dendrite d'un autre neurone.
- ✓ **Dendrites** : ce sont de fines extensions tubulaires qui se ramifient autour du neurone et forment une sorte de vaste arborescence. Elles captent les signaux envoyés au neurone.
- ✓ **L'axone** : qui est la partie qui s'occupe de la transmission de l'information issue du corps cellulaire ; conduisent des signaux électriques de la sortie d'un neurone vers l'entrée d'un autre neurone (synapse).

Le neurone biologique est une cellule vivante spécialisée dans le traitement des signaux électriques (impulsions). Les neurones sont une sommation des signaux électriques reçus en entrée et en fonction du résultat obtenu vont fournir un courant en sortie. Ces signaux n'opèrent pas de manière linéaire : effet de seuil.

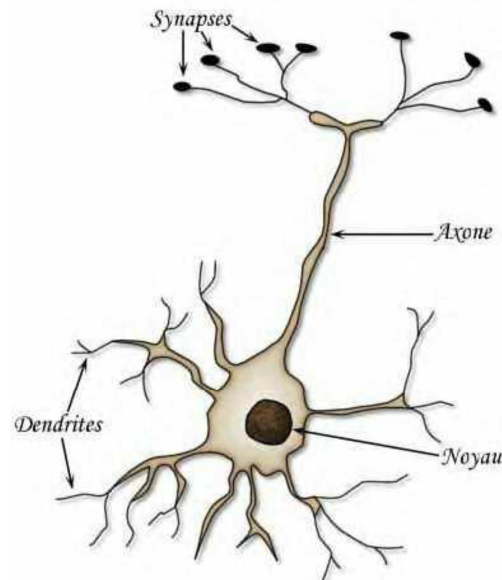


Figure IV.1 : Représentation schématique d'un neurone biologique.

IV.2.1. Physiologie

La physiologie du neurone est liée aux propriétés de la membrane nerveuse et au métabolisme de la cellule. La différence de potentiel mesurée entre le milieu intérieur de la cellule et le milieu extérieur est de -60 mV. Pour maintenir une telle différence de potentiel, la cellule fait appel à des pompes ioniques (Na^+ , K^+ , ...). Cependant, une faible dépolarisation de la membrane entraîne une certaine perméabilité aux ions sodiums (Na^+), dont l'effet peut être catastrophique au niveau cellulaire. En effet, à partir d'une certaine valeur seuil de dépolarisation de la membrane, il y a rupture des équilibres ioniques et création d'un potentiel d'action (aussi nommé "spike" en anglais).

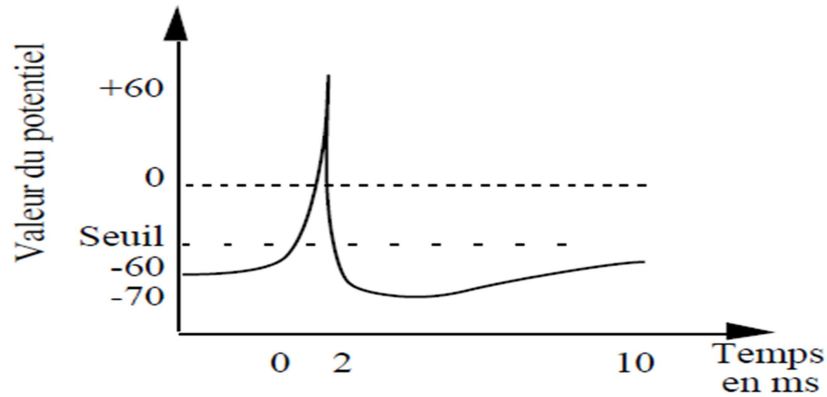


Figure IV.2 : Représentation du potentiel d'action.

Les ions, Na^+ en particulier, s'engouffrent en nombre dans la cellule (aidés en cela par l'ouverture des canaux Na^+ et une différence de potentiel très attirante de -60 mV). En une milliseconde, la différence de potentiel devient égale à $+60 \text{ mV}$ (figure 03). En fait, à partir d'une valeur de potentiel nulle, l'équilibre ionique est établi et les ions ne devraient plus pénétrer dans la cellule. Cependant, l'effet d'entraînement est tel que cette valeur d'équilibre théorique est largement dépassée. Les différents canaux ioniques se referment alors, les pompes ioniques se remettent à fonctionner, rejetant à l'extérieur de la cellule les ions en excès. Là aussi, on constate un certain effet d'entraînement : le retour à la normale passe d'abord par une phase d'hyperpolarisation. Le potentiel de repos (-60 mV) est dépassé jusqu'à atteindre (-70 mV).

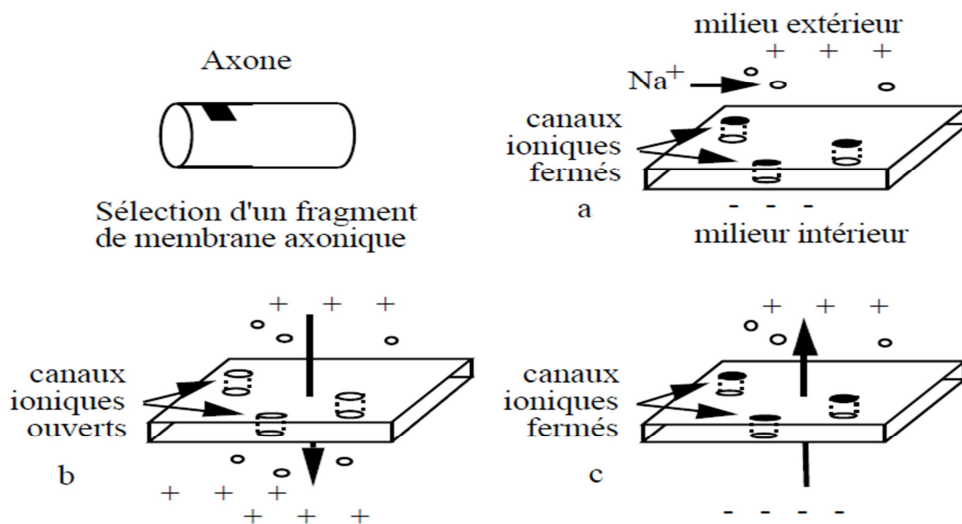


Figure IV.3 : Passage d'un potentiel d'action au niveau de la membrane de l'axone

- a) Equilibre ionique (au repos).
- b) Arrivée d'un potentiel d'action (dépolariation).
- c) Après la dépolariation : l'hyperpolarisation.

Toute cette série d'évènements cataclysmiques au niveau cellulaire n'aura duré que 5 à 10 millisecondes. Durant la phase d'hyperpolarisation, le neurone est très difficilement excitable. Ce qui s'explique par le fait que la différence de potentiel par rapport à la valeur seuil (S) est plus importante que celle au repos.

IV.2.2. Création d'un potentiel d'action

La dépolarisation initiale de la membrane axonique est créée par l'arrivée de potentiels d'action des neurones afférents sur les synapses dendritiques et somatiques. En fait, à l'arrivée d'un potentiel d'action sur une synapse, un neuromédiateur est libéré dans l'espace synaptique. Il va ouvrir des canaux ioniques sur la membrane post-synaptique, créant ainsi une dépolarisation (aussi appelée potentiel évoqué) qui s'étend jusqu'à l'axone.

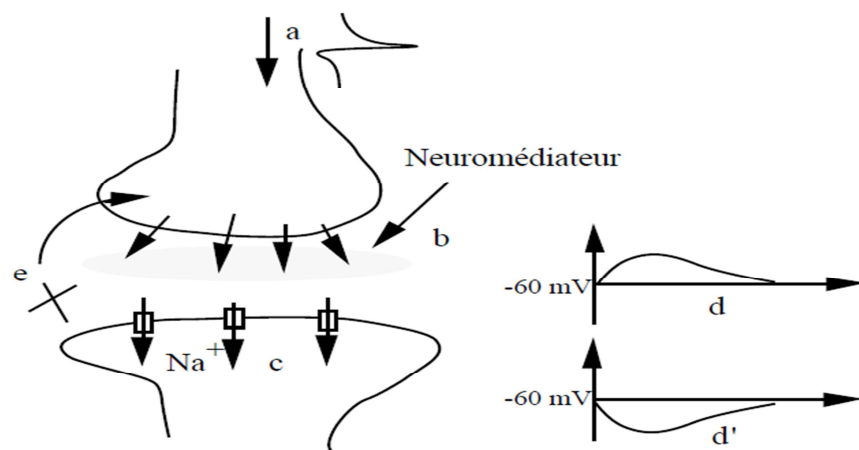


Figure IV.4 : Fonctionnement au niveau synaptique :

- a) Arrivée d'un potentiel d'action.
- b) Libération du neuromédiateur dans l'espace synaptique.
- c) Ouvertures des canaux ioniques dues au neuromédiateur.
- d) Génération d'un potentiel évoqué excitateur.
- d') Génération d'un potentiel évoqué inhibiteur. Les synapses inhibitrices empêchent la génération de potentiel d'action.
- e) Fermeture des canaux, élimination ou recapture du neuromédiateur.

Les dépolarisations unitaires sont sommées dans l'espace (toutes les synapses du neurone) et dans le temps (sur une période de quelques millisecondes) et génèrent, éventuellement, un potentiel d'action sur le neurone post-synaptique. Ainsi que le montre la figure IV.5, la génération d'un potentiel d'action est le fruit de nombreuses dépolarisations, l'action d'une seule synapse est pratiquement sans effet.

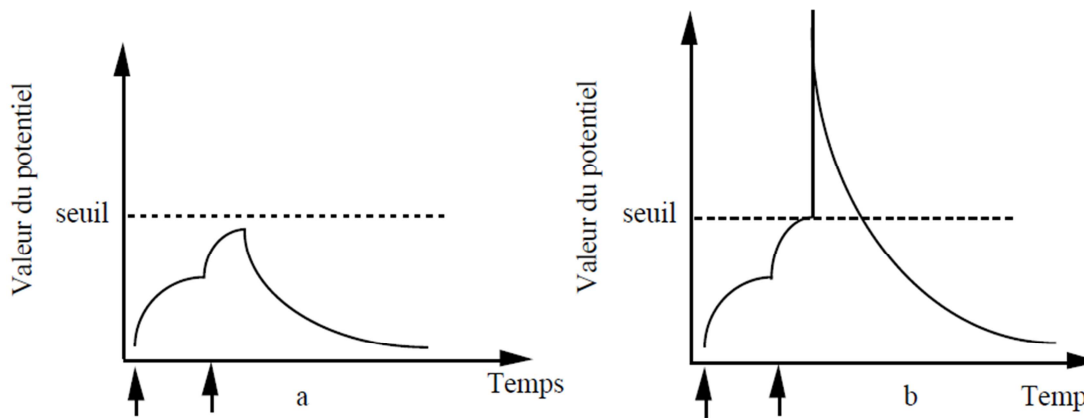


Figure IV.5 : Somme spatio-temporelle : addition des potentiels évoqués à la fois dans l'espace et dans le temps [39].

- a) 2 potentiels évoqués (repérés par les flèches) ne dépassent pas la valeur seuil.
- b) 2 potentiels évoqués qui dépassent la valeur seuil génèrent un potentiel d'action

IV.3. Neurone artificiel (formel)

L'organisation et le fonctionnement des neurones biologiques a suscité la création de réseaux de neurones dits « artificiels » ou « formels » (RNF) composés d'un ensemble de neurones reliés entre eux et agissant selon une dynamique qui est différente en fonction du type de réseau. On peut par conséquent établir une correspondance entre un réseau de neurones biologiques et un réseau de neurones artificiels en termes de dynamique et de topologie. [37].

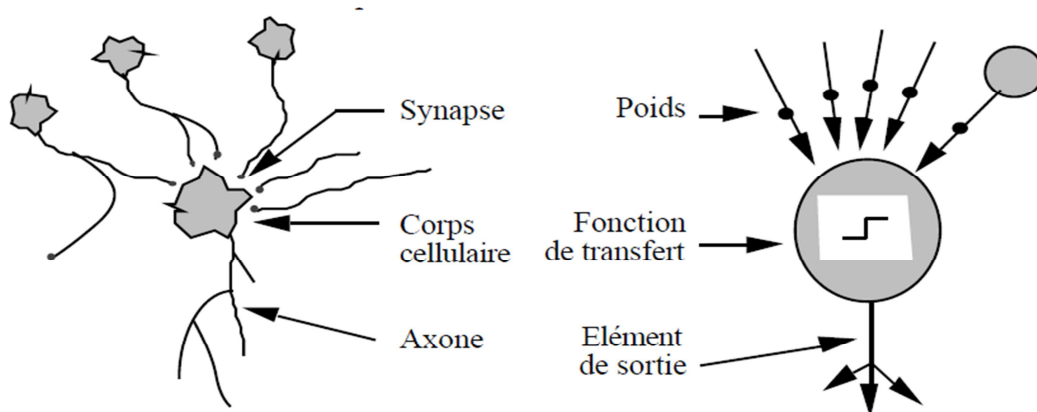


Figure IV.6 : Mise en correspondance neurone biologique / neurone artificiel « formel ».

Un neurone artificiel est un modèle simplifié de neurone biologique, c'est un processeur élémentaire ayant pour entrées -(chacune d'elle est associée à un poids représentatif de la force de connexion)- un certain nombre de variables en provenance de neurones appartenant à un niveau situé en amont, simulant les dendrites, et pour sortie une réponse par analogie à l'axone alimentant d'autres neurones. Cette sortie; qui est unique, qui se ramifie ensuite pour alimenter un nombre variable de neurones appartenant à un niveau situé en aval ; est calculée selon une fonction dite de *transfert* (ou fonction d'activation) sur la base des entrées pondérées par des poids. Ce modèle imite quelques fonctions du neurone biologique, comme la mémorisation associative, l'apprentissage et le travail en parallèle.

Les variables sur lesquelles opère le neurone sont habituellement désignées sous le terme d'entrées du neurone, et la valeur de la fonction sous celui de sortie ; il est commode de représenter graphiquement un neurone artificiel (formel) comme indiqué sur la figure ci-dessous.

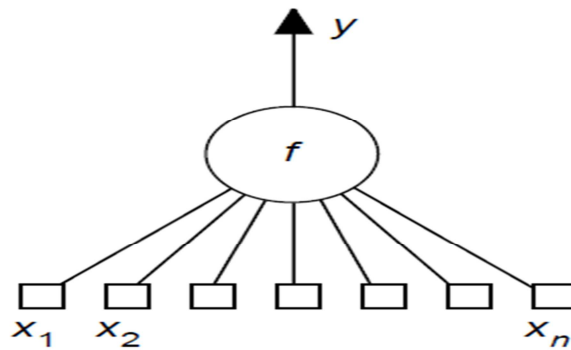


Figure IV.7 : Représentation schématique d'un neurone artificiel « formel ».

➤ **Définition**

Un neurone est une fonction algébrique non linéaire, paramétrée, à valeurs bornées.

La fonction f qui est appelée *fonction d'activation* peut être paramétrée de manière quelconque. Deux types de paramétrages sont fréquemment utilisés :

- ✓ Les paramètres qui sont attachés aux entrées du neurone : La sortie du neurone est une fonction non linéaire d'une combinaison des entrées $\{x_i\}$ pondérées par les paramètres $\{w_i\}$, qui sont alors souvent désignés sous le nom de « poids » ou, en raison de l'inspiration biologique des réseaux de neurones, « poids synaptiques ».

Conformément à l'usage (également inspiré par la biologie), cette combinaison linéaire sera appelée « potentiel ». Le potentiel v le plus fréquemment utilisé est la somme pondérée, à laquelle s'ajoute un terme constant ou « biais : w_0 » :

$$v = w_0 + \sum_{i=1}^{n-1} w_i x_i \quad (\text{IV.1})$$

La sortie d'un neurone en utilisant une fonction d'activation de type « sigmoïde » (c'est-à-dire en forme de « s »), qu'on va citer dans la suite de ce chapitre ; a pour équation :

$$y = th[w_0 + \sum_{i=1}^{n-1} w_i x_i] \quad (\text{IV.2})$$

- ✓ Les paramètres sont attachés à la non-linéarité du neurone: ils interviennent dans la fonction f ; cette dernière peut être une fonction radiale ou RBF (en anglais *Radial Basis Function*), ou encore une ondelette ; les premières tirent leur origine de la théorie de l'approximation, les secondes de la théorie du signal.

Par exemple, la sortie d'un neurone RBF à non-linéarité gaussienne a pour équation :

$$y = \exp \left[-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - w_i)^2}{2w_{n+1}^2} \right] \quad (\text{IV.3})$$

où les paramètres w_i , $i=1$ à n sont les coordonnées du centre de la gaussienne, et w_{n+1} est son écart-type.

La différence pratique essentielle entre les deux types de neurones que nous venons d'introduire au préalable est la suivante : les neurones tels que les RBF ou les ondelettes ont les non-linéarités *locales*, qui tendent vers zéro dans toutes les directions de l'espace des entrées ; leur zone d'influence est donc limitée dans l'espace, ce qui n'est pas le cas des neurones à potentiel à fonction d'activation sigmoïde [38].

➤ Le modèle mathématique d'un neurone

Le neurone formel transforme un vecteur d'entrée $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ en un scalaire noté v . La transformation de l'entrée dépend d'un certain vecteur de poids $\underline{w}^T = [w_1 \dots w_n]$

sélectionnés suivant une certaine information donnée au préalable ou ajustée pour satisfaire certains critères de performance. La transformation qualifie la relation entre x et w . Cette transformation est notée par :

$$v = \underline{w} \odot \underline{x} \quad (\text{IV.4})$$

Plusieurs transformations ont été utilisées dans le passé, les plus connues sont le produit scalaire et la distance Euclidienne.

Le produit scalaire est donné par :

$$v = \sum_{i=1}^n w_i x_i = \underline{w}^T \cdot \underline{x} \quad (\text{IV.5})$$

qui est une mesure de la similarité entre les orientations des vecteurs \underline{x} et \underline{w} . Ainsi si \underline{x} et \underline{w} sont orthogonaux alors $v=0$, et plus ils sont colinéaires plus la similarité augmente.

La distance Euclidienne est donnée par :

$$v = |\underline{x} - \underline{w}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - w_i)^2} = \sqrt{(\underline{x} - \underline{w})^T (\underline{x} - \underline{w})} \quad (\text{IV.6})$$

➤ Ajout d'un biais

En plus des entrées variables, le neurone peut avoir un biais constant comme entrée supplémentaire tel que le vecteur d'entrées devient $\underline{x}^T = [1 \ x_1 \ \dots \ x_n] \in \mathbb{R}^{n+1}$ et le vecteur des poids devient $\underline{w}^T = [w_0 \ w_1 \ \dots \ w_n] \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Les transformations décrites précédemment restent valables dans ce cas aussi [40].

IV.4. Fonctions d'activations

Après la transformation, le neurone produit une sortie en utilisant une fonction d'activation. La fonction d'activation produit une valeur réelle souhaitable pour un autre neurone, ou utilisable par un système externe.

➤ Définition

Une fonction $f(v): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite fonction d'activation si elle est continue par morceau, elle est dite bornée si $|f(v)| < \infty$ pour $v \rightarrow \infty$.

Quelques-unes des fonctions d'activations, utilisées dans les réseaux de neurones, sont définies dans ce qui suit :

- ✓ **Linéaire** : C'est la plus simple des fonctions d'activation, elle est définie par :

$$f(v) = v \quad (\text{IV.7})$$

Elle est généralement utilisée pour générer la sortie d'un réseau multicouche.

- ✓ **Tangente hyperbolique** : C'est une approximation continue de la saturation, elle est définie par :

$$f(v) = \frac{1 - \exp(-av)}{1 + \exp(-av)} \quad (\text{IV.8})$$

Pour $a > 0$.

- ✓ **Sigmoïde** : C'est une fonction d'activation fréquemment utilisée, elle est définie par :

$$f(v) = \frac{1}{1 + \exp(-av)} \quad (\text{IV.9})$$

- ✓ **Gaussienne** : C'est une fonction d'activation très connue, elle est définie par :

$$f(v) = \exp\left(\frac{-v^2}{\sigma^2}\right) \quad (\text{IV.10})$$

Avec $\sigma \in \mathbb{R}$.

- ✓ **Multi-Quadratique** : Elle est définie par :

$$f(v) = (v^2 + \sigma^2)^\alpha \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (\text{IV.11})$$

Avec $0 < \alpha \leq 1$

- ✓ **Multi-Quadratique inverse** : Elle est définie par :

$$f(v) = (v^2 + \sigma^2)^{-\alpha} \quad (\text{IV.12})$$

Avec $\alpha > 0$

Les fonctions d'activations précédentes sont représentées sur la figure ci-dessous. Il existe beaucoup d'autres fonctions d'activation moins connues (fonction de saturation, fonction seuil asymétrique : hard time...), mais qui peuvent remplir certaines tâches bien spécifiques.

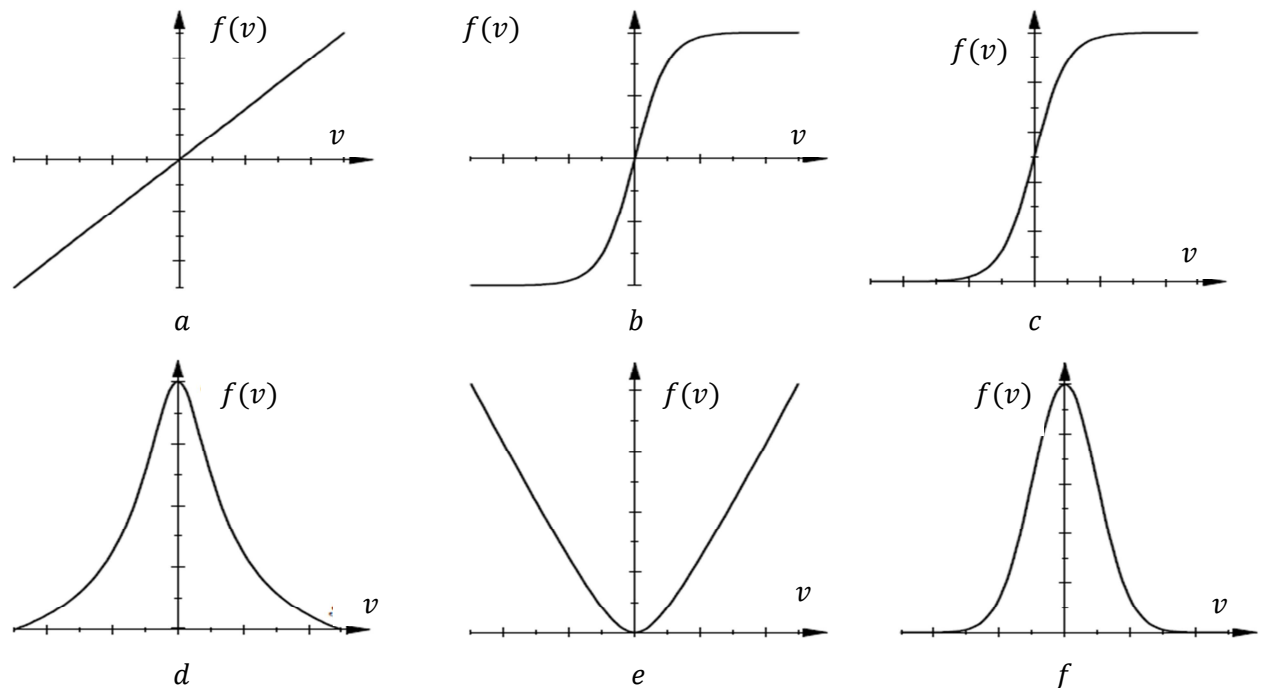


Figure IV.8 : Les allures des fonctions d'activations utilisées dans les neurones formels : (a) linéaire, (b) tangente, hyperbolique (c) sigmoïde (d) gaussienne (e) quadratique (f) quadratique inverse [40].

IV.5. Réseaux de neurones formels (RNF)

Les réseaux de neurones formels utilisent un nombre d'éléments simples de calcul (neurones) interconnectés pour accomplir des tâches compliquées de classification et d'approximation. L'habilité à ajuster les paramètres du réseau de neurones (poids et biais) rend possible l'apprentissage des nouvelles informations au sujet du processus considéré à partir des données. Les RNF possèdent la caractéristique désirable qu'un peu d'information au sujet du processus est nécessaire pour le succès de l'application du réseau au problème en main. En d'autres termes, les réseaux de neurones sont considérés comme des techniques "boîte noire". Cette approche conduit à des solutions en un temps relativement court, puisque les modèles des systèmes, nécessaires pour beaucoup de méthodes conventionnelles, ne sont pas requis

IV.5.1. Architecture des réseaux de neurones formels

Un RNF ; est constitué généralement de trois couches :

- ➔ **Une couche d'entrée** : elle est constituée de l'ensemble des neurones du réseau qui reçoivent les données du problème. Sa taille est directement liée au nombre de variable d'entrées.
- ➔ **Une couche de sortie** : elle est constituée de l'ensemble des neurones de sortie du réseau (effectue le dernier calcul de la composition). Les résultats souhaités sont fournis par cette couche.
- ➔ **Les couches cachées** : ce sont les couches qui se trouvent entre la couche d'entrée et la couche de sortie. Elles définissent l'activité interne du réseau (effectuent les calculs intermédiaires). En générale, les fonctions d'activations sont non linéaires sur ces couches.

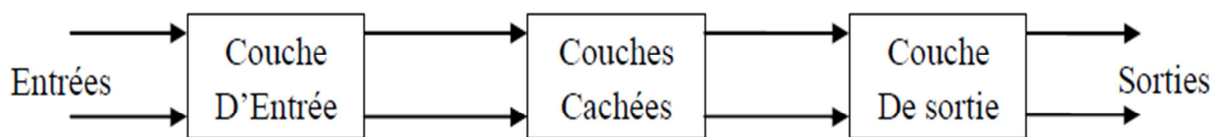


Figure IV.9 : Architecture généralisée d'un réseau de neurones formel.

Comme nous venons de le voir au préalable, un neurone réalise simplement une fonction linéaire, paramétrée, de ses variables d'entrées. L'intérêt de ses neurones réside dans les propriétés qui résultent de leur association en réseaux, c'est-à-dire de la *composition* des fonctions non linéaires réalisées par chacun des neurones.

Suivant la logique d'interconnexions choisie, les RNFs se distinguent en deux grandes familles : les réseaux non bouclés (statiques ou acycliques) et les réseaux bouclés (dynamiques ou récurrents).

IV.5.2. Réseaux de neurones non bouclés (*feedforward neronal network*)

➤ Définition

Un réseau de neurones non bouclé réalise une (ou plusieurs) fonctions *algébriques* (scalaire ou vectorielle) de ses entrées, par composition des fonctions réalisées par chacun des neurones. La sortie d'un réseau de neurones non bouclé est une fonction *algébrique* non linéaire de ses entrées et de ses paramètres.

Un réseau de neurones non bouclé est donc représenté graphiquement par un ensemble de neurones « connectés » entre eux, l'information circulant des entrées vers les sorties sans « retour en arrière (sans bouclage) » : si l'on représente le réseau comme un graphe dont les

nœuds sont les neurones et les arêtes les « connexions » entre ceux-ci, le graphe d'un réseau non bouclé est *acyclique* : si l'on se déplace dans le réseau, à partir d'un neurone quelconque, en suivant les connexions, on ne peut pas revenir au neurone de départ. Les réseaux de neurones non bouclés sont des outils statiques, utilisés principalement pour effectuer des tâches d'approximation de fonctions non linéaires, de modélisation de processus statiques non linéaires.

Il existe deux types de connexions des réseaux non bouclés : « réseau à connexions totales » et « réseau à connexions partielles », vu que les réseaux complètement connectés sont les plus utilisés que ceux partiellement connectés ; on exposera plus bas quelques propriétés sur les réseaux complètement connectés [10] [38].

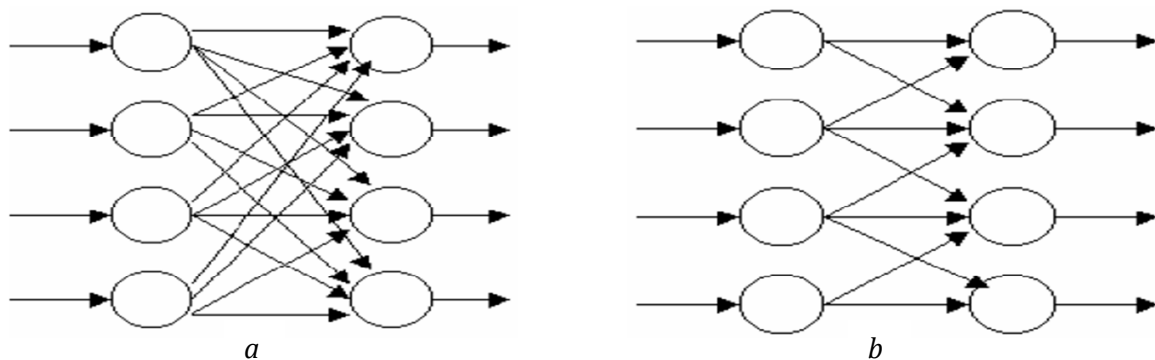


Figure IV.10 : Représentation graphique d'un réseau non bouclé : (a) réseau à connexions complètes (b) réseau à connexions partielles.

Notamment, il est commode de mentionner l'existence des réseaux à couche (RNC) en plus des réseaux connectés (complètement ou partiellement). La figure ci-dessous représente graphiquement l'architecture du RNC.

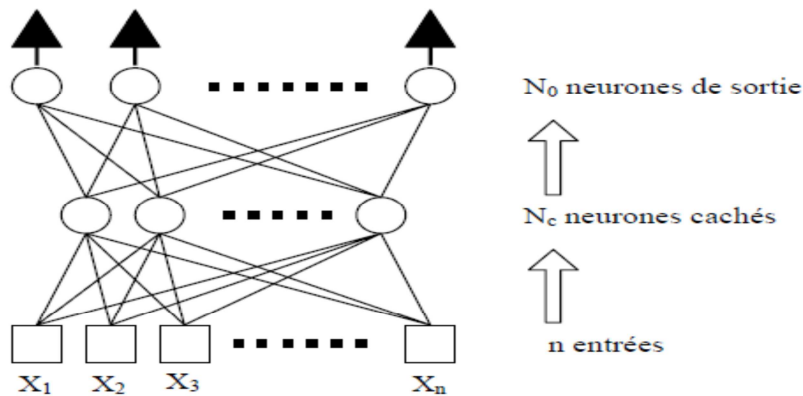


Figure IV.11 : Réseau de neurones à n entrées, une couche de N_c neurones cachés et N_o neurones de sortie.

Il convient d'insister sur le fait que le temps ne joue aucun rôle fonctionnel dans un réseau de neurones non bouclé : si les entrées sont constantes, les sorties le sont également. Le temps nécessaire pour le calcul de la fonction réalisée par chaque neurone est négligeable et, fonctionnellement, on peut considérer ce calcul comme instantané. Pour cette raison, les réseaux non bouclés sont souvent appelés « réseaux statiques », par opposition aux réseaux bouclés ou « dynamique ». Ils sont utilisés en classification, reconnaissance de formes (caractères, parole,...) et en prédiction.

IV.5.3. Réseaux de neurones bouclés (*feedback neural network*)

➤ Définition

Un réseau de neurones bouclé à temps discret réalise une (ou plusieurs) *équations aux différences non linéaires*, par composition des fonctions réalisées par chacun des neurones et des retards associés à chacune des connexions.

➤ Propriété

Tout cycle du graphe des connexions d'un réseau de neurones bouclé doit comprendre au moins une connexion de retard non nul.

L'architecture la plus générale pour un réseau de neurones est le « réseau bouclé », dont le graphe des connexions est cyclique : lorsqu'on se déplace dans le réseau en suivant le sens des connexions, il est possible de trouver au moins un chemin qui revient à son point de départ (un tel chemin est désigné sous le terme de « cycle »). La sortie d'un neurone du réseau peut donc être fonction d'elle-même (ce bouclage rajoute donc un effet de mémorisation du passé); cela n'est évidemment concevable que si la notion de temps est explicitement prise en considération.

Ainsi, à chaque connexion d'un réseau de neurones bouclé (ou à chaque arête de son graphe) est attaché, outre un poids comme pour les réseaux non bouclés, un retard, multiple entier (éventuellement nul) de l'unité de temps choisie (temps discret). Une grandeur, à un instant donné, ne pouvant pas être fonction de sa propre valeur au même instant, tout cycle du graphe du réseau doit avoir un retard non nul [38].

Les connexions récurrentes ramènent l'information en arrière par rapport au sens de propagation défini dans un multicouche. Ces connexions sont plus souvent locales. Pour éliminer le problème de la détermination de l'état du réseau par bouclage, on introduit sur chaque connexion « en retour » un retard qui permet de conserver le mode de fonctionnement séquentiel du réseau.

Les réseaux de neurones bouclés sont utilisés pour effectuer des tâches de modélisation et d'adaptation de système dynamique, de commande de processus, ou de filtrage. La figure ci-après représente graphiquement son architecture.

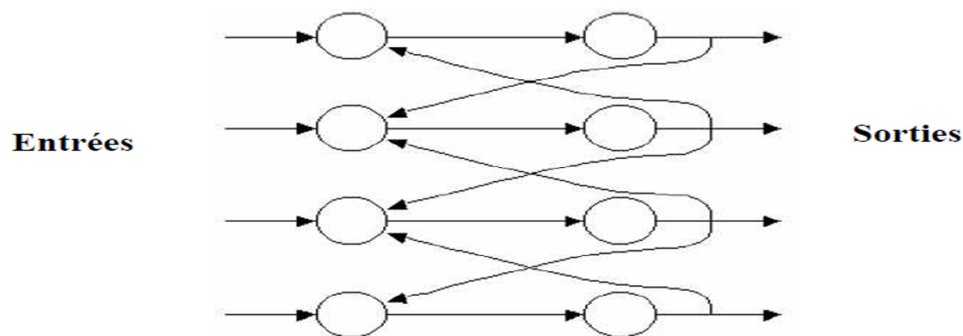


Figure IV.12 : Représentation graphique du réseau de neurones bouclé (dont on distingue les connexions récurrentes).

Tout réseau de neurones bouclé est un système dynamique non linéaire que l'on peut mettre sous la forme d'une représentation d'état faisant intervenir un (ou des) réseau(x) de neurone(s) non bouclé(s). Cette représentation particulière est appelée *forme canonique*.

IV.5.3.1. Forme canonique des réseaux de neurones bouclés

➤ Propriété

Tout réseau de neurones bouclé, aussi complexe soit-il, peut être mis sous une forme canonique, comportant un réseau de neurones non bouclé dont certaines sorties (les variables d'états) sont ramenées aux entrées par des bouclages de retard unité.

La forme canonique est constituée d'un graphe acyclique, et de connexions à retard unité ($q^{-1} = 1$) reliant certaines sorties de ce graphe à des entrées. Elle est particulièrement utile pour une formulation simple des algorithmes d'apprentissage. Elle est illustrée par la figure ci-dessous. Le symbole q^{-1} représente un retard à une unité de temps [38].

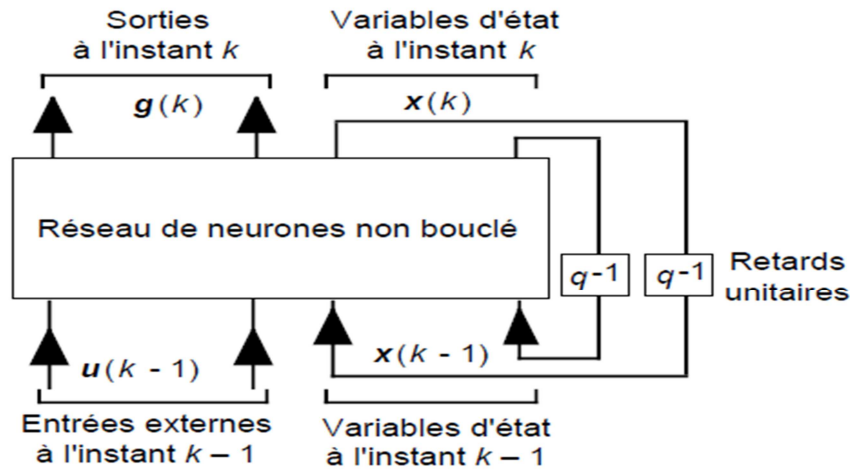


Figure IV.13 : Forme canonique d'un réseau de neurones bouclé.

On définit la *forme canonique* d'un système non linéaire à temps discret par les équations suivantes :

$$x(k) = \varphi[x(k-1), u(k-1)] \quad (\text{IV.13})$$

$$g(k) = \psi[x(k)] \quad (\text{IV.14})$$

Où k est l'instant discret, φ et ψ sont des fonctions non linéaires (des réseaux de neurones par exemple), x et g sont : le vecteur des variables d'état et le vecteur des sorties respectivement. Les variables d'état sont un ensemble de variables, *en nombre minimal*, qui permet de décrire complètement le système à l'instant k si l'on connaît leurs valeurs initiales et si l'on connaît les valeurs des entrées à tout instant compris entre 0 et $k-1$ [38].

IV.6. Structure d'interconnexion

Les connexions entre neurones décrivent la topologie du réseau. La complexité du réseau biologique ainsi que le nombre important des neurones que contient le cerveau humain (environ 100 milliards de neurones) rend impossible la transposition directe en réseau de neurones formels de même taille (on compte de quelques centaines à plusieurs dizaines de milliers de contacts synaptiques par neurone. Le nombre total de connexions est estimé à environ 10^{15}). Il s'agit donc de simuler une partie de la topologie du réseau biologique. Le

plus souvent cette topologie présente une certaine régularité de l'arrangement de neurones, cependant, celui-ci (l'arrangement) peut être quelconque [39].

IV.6.1. Réseau monocouche

La structure de ce réseau est telle que des neurones organisés en entrée et qui soient entièrement connectés à d'autres neurones organisés en sortie par des poids synaptiques modifiables.

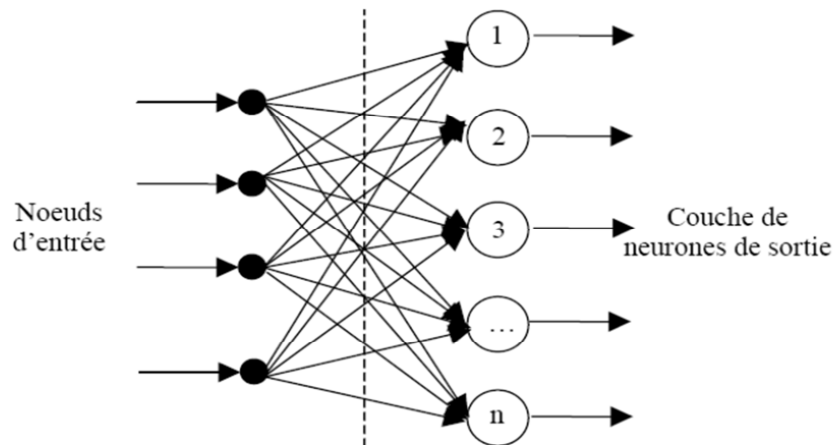


Figure IV.14 : Représentation graphique d'un réseau monocouche.

IV.6.1.1. Fonctionnement

Parmi les réseaux de neurones monocouches (ou à une seule couche), on distingue deux modes de fonctionnement : le mode *perceptron* et le mode *Adaline*.

A. Mode perceptron :

Le Perceptron (linéaire à seuil) est historiquement le premier réseau de neurones formel. C'est un réseau simple, puisque il ne se compose que d'une couche d'entrée et d'une couche de sortie (voir figure IV.15) [10].

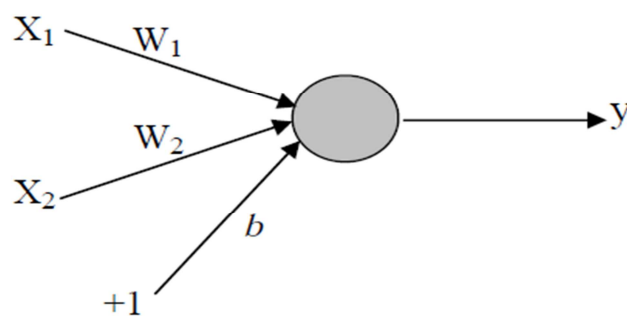


Figure IV.15 : Représentation schématique du perceptron.

Il est calqué, à la base, sur le système visuel et de ce fait a été conçu initialement pour la reconnaissance de formes qui désigne un ensemble de techniques et méthodes visant à identifier des motifs à partir de données brutes pour prendre une décision dépendant de la catégorie attribuée à ce motif. Cependant, il peut aussi être utilisé pour faire de la classification qui désigne l'action de classer méthodiquement ou de distribuer par classes d'êtres, de choses ou de notions fondées sur la considération d'un seul ou de plusieurs caractères. La notion de classification est plus générale relativement à la reconnaissance des formes que ce soit du point de vue apprentissage que du point de vue des objets considérés. Le perceptron peut aussi être utilisé pour résoudre des opérations logiques simples telles que "ET" ou "OU". Sa principale limite est qu'il ne peut résoudre que des problèmes linéairement séparables. Il suit généralement un apprentissage supervisé selon la règle de correction de l'erreur (ou règle de Hebb) [37].

Un perceptron linéaire à seuil prend en entrées n valeurs x_1, \dots, x_n et calcul une sortie y . Un perceptron est défini par la donnée $n + 1$ constante : les coefficients synaptiques w_1, \dots, w_n et le seuil (ou le biais) b . La sortie y est calculée par la forme :

$$y = F(\sum_{i=1}^n w_i x_i + b) \quad (\text{IV.15})$$

La fonction F choisie pour cette section est une fonction d'activation à seuil symétrique définie comme suit :

$$F(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (\text{IV.16})$$

Ce type de fonctions d'activations confère au perceptron des aptitudes de classification. En effet, lorsque la somme pondérée des composantes du vecteur d'entrée est positive, ce dernier est assigné à la classe +1, sinon il est assigné à la classe -1. La séparation entre ces deux classes est une ligne droite, appelée frontière de décision, donnée par l'équation suivante :

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n + b = 0 \quad (\text{IV.17})$$

Durant le processus d'apprentissage, le mouvement de la droite de décision dans le cas d'un perceptron monocouche, est régi par la règle de correction de l'erreur plus généralement appelée règle d'apprentissage du perceptron [10].

$$w_{ij}(k + 1) = w_{ij}(k) + \alpha(d_i - y_i(k))X_j \quad (\text{IV.18})$$

α : Constante positive.

y_i : Sortie du $i^{\text{ème}}$ neurone

d_i : $i^{\text{ème}}$ sortie désirée

k : $k^{\text{ème}}$ itération

w_{ij} : Poids reliant la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur d'entrée au $i^{\text{ème}}$ neurone

Si $d_i = y_i(k)$, les poids ne sont pas modifiés.

B. Mode ADALINE

En 1960 Widrow a développé l'ADALINE (ADaptive LINear Element), qui est un réseau à une seule couche, de même structure que le perceptron de Rosenblatt avec une fonction d'activation linéaire et une règle d'apprentissage des moindres carrés aussi connue comme la règle de DELTA.

Le réseau ADALINE trouve son application en classification de problème linéairement séparable ou l'approximation linéaire de fonctions.

⇒ Limitation des réseaux à une seule couche

Les réseaux à une seule couche ont ouvert la voie à beaucoup d'applications. Ces réseaux peuvent par exemple représenter les fonctions AND et OR mais ils sont incapables de représenter la fonction XOR, ces limitations ont été mises en évidence par Minsky et Papert en 1969.

La figure suivante montre l'incapacité du réseau à couche unique de reproduire la fonction XOR [10].

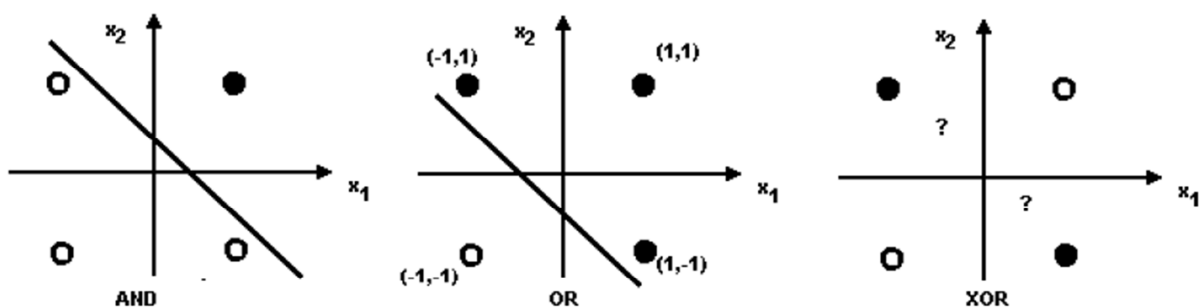


Figure IV.16 : Représentation géométrique du problème XOR.

Le problème de la fonction XOR a été résolu avec l'apparition d'un nouveau type perceptron appelé *perceptron multicouche*.

C. Perceptron multicouche

Le *perceptron multicouche* PMC ou MLP (Multi Layer Perceptron)(Figure IV.17), représente une extension du perceptron monocouche, avec une ou plusieurs couches cachées entre la couche d'entrée et celle de sortie. Chaque neurone dans une couche est connecté à tous les neurones de la couche précédente et ceux de la couche suivante (à l'exception des couches d'entrée et de sortie). Il n'existe aucune connexion entre les neurones de la même couche. Les neurones de la première couche sont reliés au monde extérieur et reçoivent tous le même vecteur d'entrée, les entrées des neurones de la deuxième couche sont donc en fait les sorties des neurones de la première couche. Ils calculent alors leurs sorties qui sont transmises aux neurones de la deuxième couche, etc. les sorties des neurones de la dernière couche forment la sortie du réseau. Les fonctions d'activation utilisées dans ce type de réseaux sont principalement les fonctions à seuil ou sigmoïdes. Son problème majeur été l'impossibilité de faire l'apprentissage des couches cachées jusqu'à 1958 avec l'introduction de l'algorithme de rétro-propagation. Du coup, il peut résoudre des problèmes non-linéairement séparables et des problèmes logiques plus compliqués, et notamment le fameux problème du XOR. Il suit aussi un apprentissage supervisé selon la règle de correction de l'erreur [10] [37].

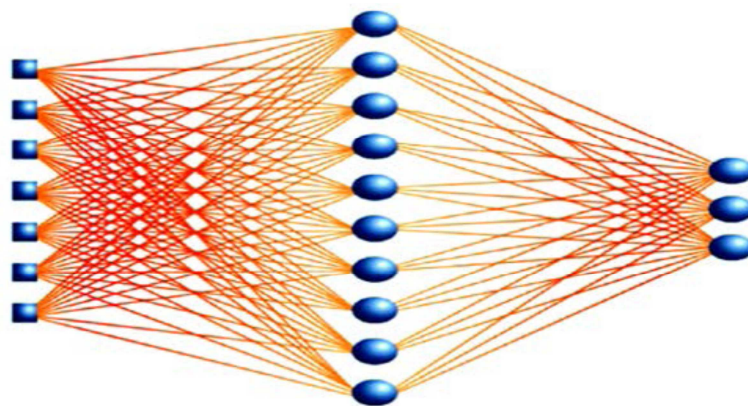


Figure IV.17 : Représentation graphique du perceptron multicouche.

IV.6.2. Réseau multicouche

Les problèmes rencontrés avec les réseaux à couche unique, ont poussé les chercheurs à développer d'autres réseaux, à savoir le réseau de Kohonen en 1981, le réseau d'Hopfield en

1982 et le perceptron multicouche (qu'on vient de le citer au préalable). On retrouve aussi les réseaux multicouches classiques, à connexions locales, à connexions récurrentes.

IV.6.2.1. Réseau multicouche classique

Dans un réseau multicouche classique, il n'y a pas de connexion entre neurones d'une même couche et les connexions ne se font qu'avec les neurones de la couche aval. Tous les neurones de la couche amont sont connectés à tous les neurones de la couche aval.

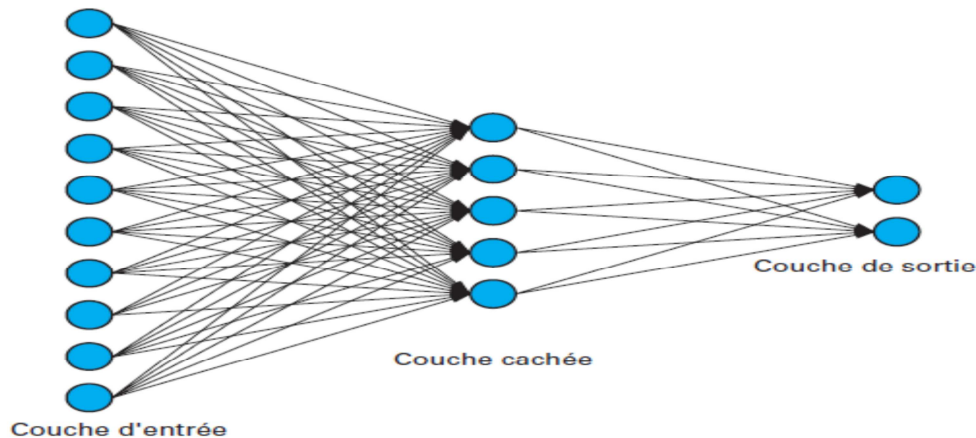


Figure IV.18 : Représentation graphique du réseau multicouche classique.

IV.6.2.2. Réseau multicouche à connexions locales

C'est aussi un réseau multicouche, mais tous les neurones d'une couche amont ne sont pas connectés à tous les neurones de la couche aval (figure IV.19). Nous avons donc dans ce type de réseau de neurones un nombre de connexions moins important que dans le type précédemment cité.

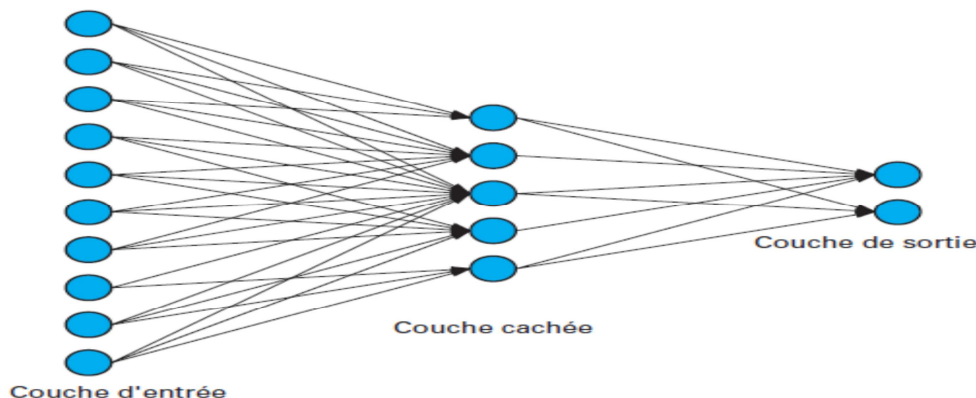


Figure IV.19 : Représentation graphique du réseau multicouche à connexions locales.

IV.6.2.3. Réseau à connexions récurrentes

Un réseau de ce type signifie qu'une ou plusieurs sorties de neurones d'une couche aval sont connectées aux entrées des neurones de la couche amont ou de la même couche (figure IV.20). Ces connexions récurrentes ramènent l'information en arrière par rapport au sens de propagation défini dans un réseau multicouche. Ils sont des réseaux plus puissants car ils sont séquentiels plutôt que combinatoires comme l'étaient ceux décrits précédemment. La rétroaction de la sortie vers l'entrée permet à un réseau de ce type de présenter un comportement temporel.

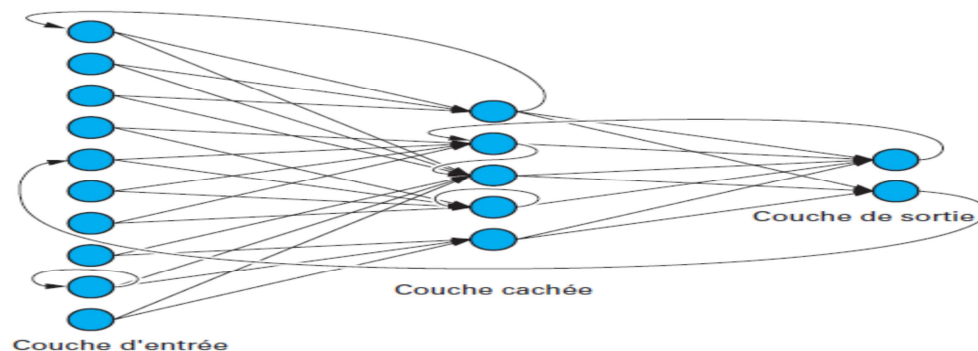


Figure IV.20 : Représentation graphique du réseau multicouche à connexions récurrentes.

IV.6.2.4. Réseau d'Hopfield (réseau à connexions complexes)

Les réseaux d'Hopfield sont donc des réseaux récurrents et entièrement connectés. Dans ce type de réseau, chaque neurone est connecté à chaque autre neurone et il n'y a aucune différenciation entre les neurones d'entrée et de sortie, c'est la structure d'interconnexion la plus générale. Ils fonctionnent comme une mémoire associative non linéaire. L'application principale des réseaux d'Hopfield est l'entrepôt de connaissances mais aussi la résolution de problèmes d'optimisation.

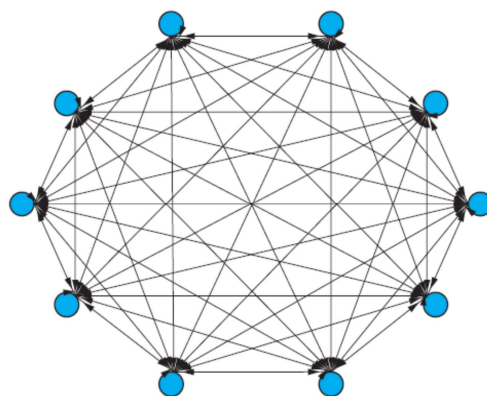


Figure IV.21 : Représentation graphique du réseau multicouche à connexions complexes.

IV.6.2.5. Réseau de Kohonen

Il est de type auto organisateur (auto adaptative) de Kohonen, appelé aussi SOM (Self Organised Maps) sont des réseaux compétitifs et dynamiques, dans le sens où ils ont tendance à élire un neurone vainqueur et à le favoriser, ça d'une part, et à créer ou détruire des neurones, d'autre part. Le processus, l'apprentissage n'est donc supervisé, on parle d'apprentissage non supervisé ou bien compétitif [10].

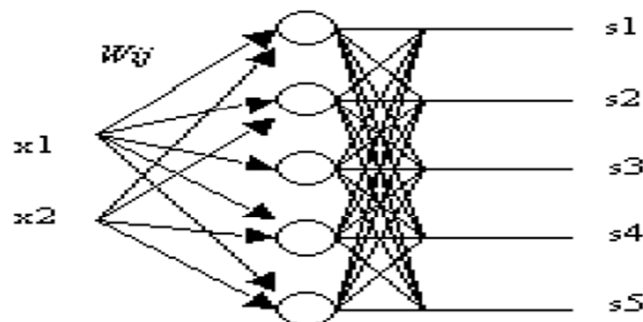


Figure IV.22 : Représentation graphique de la structure du réseau de Kohonen.

IV.7. Apprentissage des réseaux de neurones

Une fois l'architecture est choisie, elle doit subir une phase d'apprentissage qui est un point crucial du développement d'un réseau de neurone. Il s'agit d'une procédure adaptative par laquelle les connexions des neurones sont ajustées face à une source d'information, généralement par des algorithmes spécifiques.

➤ Définition

On appelle «apprentissage» des réseaux de neurones la procédure qui consiste à estimer les paramètres des neurones du réseau, afin que celui-ci remplisse au mieux la tâche qui lui est affectée [38].

Autrement dit, c'est une phase du développement du réseau de neurones durant laquelle on calcule les poids des neurones de telle manière que les sorties du réseau soient aussi proches que possible des sorties désirées.

A la fin de cette phase, le réseau converge vers un fonctionnement adapté au problème qu'on désire résoudre, tout en fournissant, au préalable des exemples d'apprentissage (L'apprentissage fait appel à des exemples de comportement du processus à modéliser). Ces derniers doivent être suffisamment représentatifs ; autrement dit ; il faudra qu'ils couvrent

aussi exhaustivement que possible le domaine de fonctionnement désiré pour le réseau. Cette technique permet de conserver au réseau un comportement adapté malgré les fluctuations dans les données d'entrées (l'apprentissage d'un réseau de neurones conduit soit à établir de nouvelles connexions entre neurones, soit à modifier des connexions existantes) [10] [39].

IV.7.1. Types d'apprentissage des réseaux de neurones

Dans le cadre de la définition précédemment citée et au niveau des algorithmes d'apprentissage (règles d'apprentissage), il a été défini deux grandes classes : apprentissage supervisé, apprentissage non-supervisé. Mais l'objectif fondamental de l'apprentissage demeure le même : soit la classification, l'approximation de fonction ou encore la prévision.

IV.7.1.1. Apprentissage supervisé

L'apprentissage est dit supervisé lorsque les exemples sont constitués de couples de valeurs (Base d'apprentissage) du type : « valeur d'entrée, valeur de sortie désirée » (on présente au réseau de neurone les entrées et les sorties désirées correspondantes).

Tout le problème de l'apprentissage supervisé consiste ; étant donné un vecteur d'apprentissage de n couples (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$; à faire adapter le réseau par une comparaison entre les résultats qu'il a calculés, en fonction des entrées fournies et la réponse attendue en sortie. Ensuite, le réseau va modifier ses poids jusqu'à ce que le résultat soit le plus proche possible de la sortie désirée, correspondant à une entrée donnée. Autrement dit, c'est déterminer le vecteur des poids des neurones capables de prédire le même vecteur de sortie à partir du même vecteur d'entrée.

Cet apprentissage n'est possible que si les solutions sont connues pour les exemples de la base d'apprentissage.

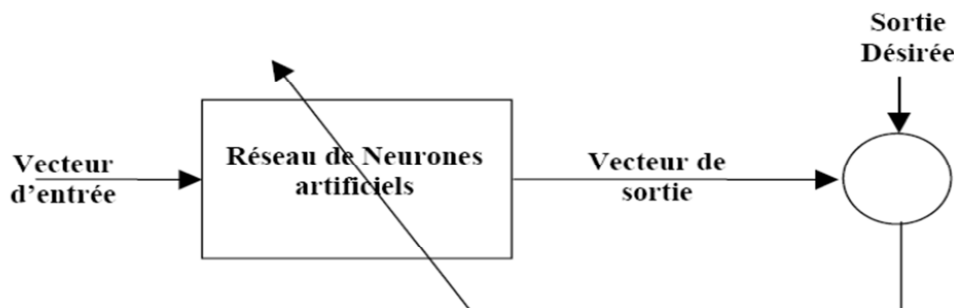


Figure IV.23 : Forme canonique de l'apprentissage supervisé.

IV.7.1.2. Apprentissage non-supervisé

L'apprentissage est dit non supervisé lorsque seuls les vecteurs d'entrées sont disponibles (on fournira seulement à l'algorithme d'apprentissage des exemples d'entrées, on n'indiquera donc pas les sorties désirées mais on laissera le réseau s'organiser tout seul). Dans ce cas, les exemples présentés à l'entrée provoquent une auto adaptation du réseau afin de produire des valeurs de sortie qui soient proches en réponse pour des valeurs d'entrées similaires.

L'apprentissage non supervisé est surtout utilisé pour le traitement du signal, l'analyse fonctionnelle, et plus souvent pour la classification. L'avantage de ce type d'apprentissage réside dans sa grande capacité d'adaptation reconnue comme auto-organisation (self-organizing) [10].

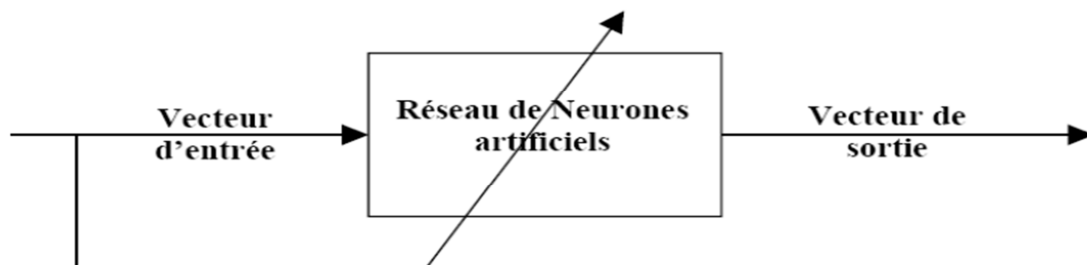


Figure IV.24 : Forme canonique de l'apprentissage non-supervisé.

- **Remarque**

Dans pas mal d'ouvrages, on mentionne l'existence d'un troisième type d'apprentissage dont l'appellation diffère (apprentissage semi-supervisé, apprentissage renforcé et aussi le sur-apprentissage), qui rien d'autre qu'un cas particulier ou bien une manœuvre (technique, procédure...) pratique de l'un des deux principaux apprentissages.

Afin de bien cerner cette thématique d'apprentissage, on a songé à présenter cet suivant éclaircissement sur la façon dont le réseau de neurone évolue lors de la phase l'apprentissage afin d'atteindre le comportement désiré : on peut observer qu'au début de l'apprentissage - pour les premières itérations- que l'erreur sur la base d'apprentissage est trop importante et peut augmenter d'avantage étant donné que les poids synaptiques initiaux ont été choisis aléatoirement. Ensuite, cette erreur diminue au fil des itérations (le réseau s'auto-adapte). L'erreur sur la base de test (la base d'essai) diminue puis augmente (elle varie) au fil des itérations. Les poids synaptiques retenus sont ceux qui minimisent l'erreur sur la base de

test et non ceux sur la base d'apprentissage. La figure ci-dessous représente graphiquement ces variations en fonction du nombre d'itérations.

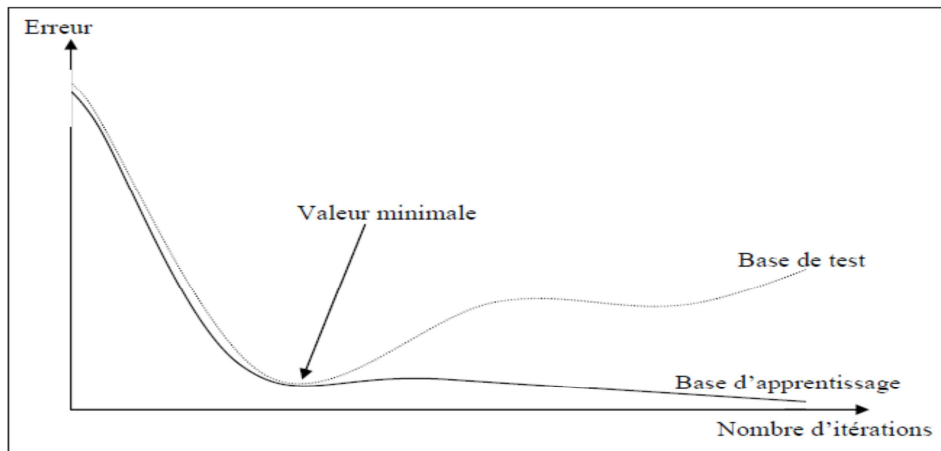


Figure IV.25 : Représentation graphique de la variation d'erreur sur la base d'apprentissage et la base de test (base d'essai) en fonction du nombre d'itérations.

IV.7.2. Algorithmes d'apprentissage

L'algorithme d'apprentissage est la méthode qui va modifier les poids de connexions afin de converger vers une solution qui permettra au réseau d'accomplir la tâche désirée. L'apprentissage est une méthode d'identification paramétrique qui permet d'optimiser les valeurs des poids du réseau [10].

Il existe plusieurs algorithmes d'apprentissage, parmi les plus utilisés on citera :

IV.7.2.1. Algorithme de la rétro-propagation du gradient

L'algorithme de la rétro-propagation du gradient est un algorithme itératif conçu pour minimiser un critère quadratique d'erreur entre la sortie obtenue d'un réseau multicouche et la sortie désirée. Cette minimisation est réalisée par une configuration des poids adéquate. L'erreur est la différence entre la valeur désirée pour le neurone de sortie et sa valeur calculée par propagation. En effet, l'algorithme nécessite une fonction continue, non-linéaire et différentiable comme fonction de transfert du neurone.

Mathématiquement, cette méthode est basée sur l'algorithme de descente du gradient et utilise les règles de dérivation des fonctions dérivables. Dans cette méthode, l'erreur commise en sortie du réseau sera rétro-propagée vers les couches cachées d'où le nom de rétro-propagation.

L'objectif de la méthode de la rétro-propagation est d'adapter les paramètres w_{ij} de façon à minimiser une fonction de cout donnée par :

$$E(w) = \sum_{p=1}^N E_p(w) \quad (\text{IV.19})$$

Avec : $E_p(w) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n [y_i^d(k) - y_i(k)]^2$

Où : $E(w)$: l'erreur quadratique au niveau de la couche de sortie du réseau ;

$E_p(w)$: L'erreur quadratique au niveau de la sortie du réseau ;

$y_i^d(k)$: Le vecteur de la sortie désirée du réseau : « le vecteur cible » ;

$y_i(k)$: Le vecteur de sortie élaboré par le réseau ;

N : Le nombre d'exemples dans la base d'apprentissage.

L'algorithme de la rétro-propagation du gradient de l'erreur se résume aux étapes suivantes :

- ❶ Initialisation des poids synaptiques de connexions et les seuils internes des réseaux de neurones.
- ❷ Calcul du couple des valeurs (vecteur d'entrée et de sortie désirée) de la base d'apprentissage correspondante.
- ❸ Présentation de la forme d'entrée sur la couche d'entrée du réseau.
- ❹ Calcul par propagation de la sortie du réseau avec l'expression suivante :

$$y_i(k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} y_j(k-1) \quad (\text{IV.20})$$

- ❺ Calcul des différentes erreurs des différentes couches :

- Calcul de l'erreur de la sortie :

$$\frac{\partial E_p(w)}{\partial w_i(k)} = -(y_i^d(k) - y_i) \quad (\text{IV.21})$$

- Calcul de l'erreur dans les couches de sortie :

$$\frac{\partial E(w)}{\partial w_i(k)} = \sum_{p=1}^N \frac{\partial E_p(w)}{\partial w_p(k+1)} \frac{\partial w_p(k+1)}{\partial w_i(k)} \quad (\text{IV.22})$$

- ❻ Mise à jour des matrices de connexions (calcul du gradient de l'erreur par rapport aux poids synaptiques : la minimisation de l'erreur \Rightarrow les poids à retenir).
- ❼ Tant que l'erreur est importante, retourner à l'étape (2). Sinon aller à l'étape (8).
- ❽ Fin.

IV.7.2.1.1. Principe de la rétro-propagation

L'approche la plus utilisée pour la minimisation de la fonction E est basée sur la méthode du gradient. On commence l'entraînement par un choix aléatoire des vecteurs initiaux du poids (base d'apprentissage).

Le principe de la rétro-propagation peut être décrit en trois étapes fondamentales : acheminement de l'information à travers le réseau, rétro-propagation des sensibilités et calcul du gradient et ajustement des paramètres par la règle du gradient approximé. On refait la même procédure pour tous les exemples d'apprentissage. Ce processus est répété jusqu'à ce que les sorties soient suffisamment proches des sorties désirées (ciblées).

❖ Adaptation des poids

L'adaptation des poids se fait par la méthode du gradient basée sur la minimisation de l'erreur E dans l'espace des poids synaptiques du réseau de neurones. Ce qui conduit à l'équation de mise à jour du j^{ieme} poids et du i^{ieme} neurone suivante :

$$w_{ij}(k + 1) = w_{ij}(k) + \Delta w_{ij}(k) \quad (IV.23)$$

Avec :

$$\Delta w_{ij}(k) = -\eta \left(\frac{\partial E(w)}{\partial w_{ij}(k)} \right)$$

Où : η est le taux d'apprentissage ;

$w_{ij}(k + 1)$ est le nouveau poids ;

$w_{ij}(k)$ est l'ancien poids.

Bien que l'algorithme de la rétro-propagation soit le plus utilisé pour l'apprentissage supervisé, son implantation de heurte à plusieurs difficultés techniques. Il n'existe pas de méthode permettant de :

- Trouver une architecture appropriée (nombre de couches, nombre de neurones).
- Choisir une taille et une qualité adéquate d'exemples d'entraînement (base d'apprentissage).
- Choisir des valeurs initiales satisfaisantes pour les poids, et des valeurs convenables pour les paramètres d'apprentissage permettant d'accélérer la vitesse de convergence de l'algorithme.

- Problème de la convergence vers un minimum local, qui empêche la convergence et cause l'oscillation de l'erreur (rien ne garantit que le minimum trouvé est un minimum global).

IV.7.2.2. Algorithme de Levenberg-Marquardt

C'est un algorithme itératif de minimisation, permet d'obtenir une solution numérique au problème de minimisation d'une fonction, souvent non linéaire et dépendant de plusieurs variables. Il appartient à la classe des méthodes quasi-Newtoniennes, il obéit à la formule suivante de mise à jour des paramètres :

$$w^{k+1} = w^k - [H(w^k) + \mu_{k+1}I]^{-1} \cdot \nabla E(w^k) \quad (\text{IV.24})$$

Où $H(w^k)$: La matrice Hessienne d'une fonction de coût appelée E ;

I : La matrice identité ;

μ_{k+1} : Un scalaire appelé *pas*.

Le principe des méthodes de résolution de type Quasi-Newton est de générer une séquence de matrices symétriques définies positives qui soient des approximations, toujours améliorées, de la matrice Hessienne réelle ou de son inverse. Désignons par H_k la suite d'approximation de l'inverse de la matrice Hessienne $[H(w^k) + \mu_{k+1}I]^{-1}$ et par B_k la suite des estimations de la matrice $H(w^k) + \mu_{k+1}I$.

On recherche une méthode telle que, dans le cas d'un problème quadratique, la matrice B_k converge vers la valeur exacte des dérivées secondes (constantes dans ce cas), de sorte qu'en fin de convergence, on retrouve une convergence de type Newton. Si l'on applique la méthode à une fonction quelconque, B_k peut être considérée -à chaque instant- comme une approximation (définie positive) du Hessien.

L'algorithme de Levenberg-Marquardt interpole l'algorithme de *Gauss-Newton* et l'algorithme du *gradient*. Plus stable que celui de Gauss-Newton, il trouve une solution même s'il est démarré très loin d'un minimum. Cependant, pour certaines fonctions très régulières, il peut converger légèrement moins vite. L'algorithme fut découvert par *Kenneth Levenberg*, puis publié par *Donald Marquardt*.

Pour de petites valeurs du pas μ_{k+1} , cette méthode s'approche de celle de Newton, tandis que pour des grandes valeurs du pas, la méthode tend vers celle du gradient simple. En choisissant judicieusement la valeur du pas au cours de l'algorithme, il est donc possible de

s'affranchir de la mise en œuvre préalable d'une méthode de gradient simple pour s'approcher du minimum. Le calcul de l'inverse de la matrice B_k peut s'effectuer par des méthodes d'inversion directe. Néanmoins, compte tenu de la fonction de coût des moindres carrés E , il est préférable de mettre en œuvre une méthode d'inversion itérative.

IV.8. Aspects pratiques pour la mise en œuvre d'un réseau de neurones

Les réseaux de neurones réalisent des fonctions non linéaires paramétrées, ils peuvent approcher toute fonction de régression si l'on trouve un réseau de neurones qui rend minimum la fonction de coût des moindres carrés (somme des carrés des différences entre les valeurs calculées par le réseau de neurones et les valeurs mesurées). La détermination et le choix du réseau optimal pour un processus donné (processus industriel, processus naturel complexe : écologique, processus économique, social ou financier...) sont des problèmes ouverts à de amples perspectives, malgré l'existence de quelques travaux qui permettent pour une vaste classe de réseaux de déterminer l'architecture optimale. La mise en œuvre d'un réseau de neurones nécessite donc [10] [38] :

- ✓ La détermination des entrées pertinentes, c'est-à-dire les grandeurs qui ont une influence significative sur le phénomène que l'on cherche à modéliser. Ce problème (et, plus généralement, le problème de la sélection de modèle) n'est pas spécifique aux réseaux de neurones : il se pose pour toutes les techniques de modélisation, qu'elles soient linéaires ou non.
- ✓ La collecte des données nécessaires à l'apprentissage et à l'évaluation des performances du réseau de neurones, celles-ci doivent être en nombre suffisant, et être suffisamment représentatives des données qui seront présentées au modèle lors de son utilisation, il faut donc trouver une méthode permettant de réaliser uniquement des expériences qui apportent une information significative pour l'apprentissage du modèle : il faut réaliser un « plan d'expériences ».
- ✓ La fixation du nombre de couches cachées, car mis à part des couches d'entrée et de sortie, l'analyste doit décider du nombre de couches intermédiaires ou cachées. Sans couche cachée, le réseau n'offre que de faibles possibilités d'adaptation ; avec une

couche cachée et un nombre suffisant de neurones, il est capable d'approximer toute fonction continue.

- ✓ La détermination du nombre de neurones par couches cachées, il n'existe pas actuellement une loi qui nous dicte exactement le nombre de neurones nécessaires au niveau des couches cachées. Donc on ne sait pas comment construire le réseau, ni combien de neurones sont dans la couche cachée, ni combien de liens synaptiques. En effet, si le réseau possède un très grand nombre de poids et de neurones, le réseau est souple et si ce nombre est trop petit, le réseau est trop rigide et présente des mauvaises performances. Pour résoudre ce problème, plusieurs techniques ont été proposées, la plus intéressante est d'ajuster la taille du réseau (nombre de couches cachées, nombre de neurones par chaque couche, et nombre de poids) pendant la phase d'apprentissage, afin que sa complexité soit adaptée au problème à résoudre et obtenir une approximation satisfaisante.

- ✓ L'estimation des valeurs des paramètres correspondant à un minimum de la fonction de coût, c'est-à-dire d'effectuer un apprentissage tout en respectant le « taux d'apprentissage : η » : ce paramètre détermine la vitesse d'apprentissage. Si la valeur de démarrage de η est grande, alors on aura un apprentissage très rapide mais au prix de la création des oscillations dans l'erreur totale qui empêcheront l'algorithme de converger vers un minimum désiré : le réseau devient instable. Dans la plupart des cas si la fonction d'erreur possède plusieurs minimums locaux, le réseau subira un blocage dans l'un d'eux. Toutes ces conditions nous obligent à commencer l'apprentissage avec une petite valeur de η , si on veut atteindre un minimum globale même si l'apprentissage sera long.

- ✓ L'évaluation des performances du réseau de neurones à l'issue de l'apprentissage en effectuant un « test d'arrêt », la détermination du critère d'arrêt est crucial dans la mesure où la convergence peut passer par des minimums locaux. En effet, le test d'arrêt est la mesure des performances du réseau pour savoir si la convergence du réseau est atteinte. D'une façon générale, on cherche à arrêter l'algorithme si l'erreur E est minimale, c'est-à-dire si le gradient de l'erreur est proche de zéro. Généralement, le test d'arrêt est effectué en découpant la base de données en deux parties, une base d'apprentissage (BA) et une base de test (BT), et on alterne les étapes d'apprentissage

sur la (BA) et on mesure les performances sur la (BT) jusqu'à atteindre des résultats satisfaisant.

- ✓ La fixation d'un seuil de tolérance, ce paramètre critique détermine la précision de la réponse du réseau. Théoriquement, l'algorithme doit se terminer dès que le minimum de l'erreur commise par le réseau sera atteint, correspondant à un gradient nul, ce qui n'est jamais rencontré en pratique. C'est pourquoi on fixe à priori ce seuil afin d'arrêter l'apprentissage.

IV.9. Quelques exemples d'applications des réseaux de neurones à divers domaines des sciences de l'ingénieur

- ✓ Système de mise en correspondance [39].
- ✓ Reconnaissance de formes : la lecture automatique de codes postaux [38].
- ✓ Les réseaux de neurones dans la commande des systèmes [38].
- ✓ Fouille de données : le filtrage de documents [38].
- ✓ Modélisation de procédés industriels : la modélisation du soudage par points [38].
- ✓ Robotique mobile : le pilotage automatique d'un véhicule autonome (REMI) [38], [43].

NB : Les exemples ci-dessus sont très bien détaillés dans les références bibliographiques qui leurs correspondes.

- ✓ **Contrôle non destructif : la détection de défauts dans des rails par courants de Foucault**

C'est un exemple de reconnaissance de signaux dans le domaine du contrôle non destructif. Cette application consiste à détecter les défauts dans les rails du métro parisien à l'aide de courants de Foucault. Elle a été développée par l'Institut de la Recherche Sur les Transports et leurs Sécurité (INRESTS) pour la RAPT.

La détection de défauts dans les pièces métalliques à l'aide de courants de Foucault est une technique classique dans le domaine du contrôle non destructif. Son principe est simple : un bobinage crée un champ magnétique alternatif dans la pièce à contrôler, ce qui engendre des courants de Foucault au voisinage de celui-ci, dans une épaisseur qui dépend de la fréquence du champ magnétique. Ces courants sont détectés par un second bobinage ; la présence de défauts dans le métal modifie le signal recueilli, à la fois en amplitude et en

phase. Ainsi, le signal induit constitue une « signature » des défauts. Comme il existe toujours plusieurs catégories de défauts, qui peuvent être plus ou moins graves, il est important de pouvoir non seulement détecter ces défauts, mais encore les classer. Il faut aussi pouvoir faire une distinction entre des défauts et des phénomènes normaux qui peuvent également avoir une influence sur le signal : la jointure entre deux rails provoque une modification des courants de Foucault, analogue à celle qui est provoquée par une fissure, alors qu'il s'agit d'un événement normal (mais sa position est connue, ce qui facilite la discrimination). Dans l'application considérée, le système de création et de détection des courants de Foucault est monté sous la voiture, à quelques dizaines de millimètres du rail, comme représenté sur la figure ci-dessous [44].

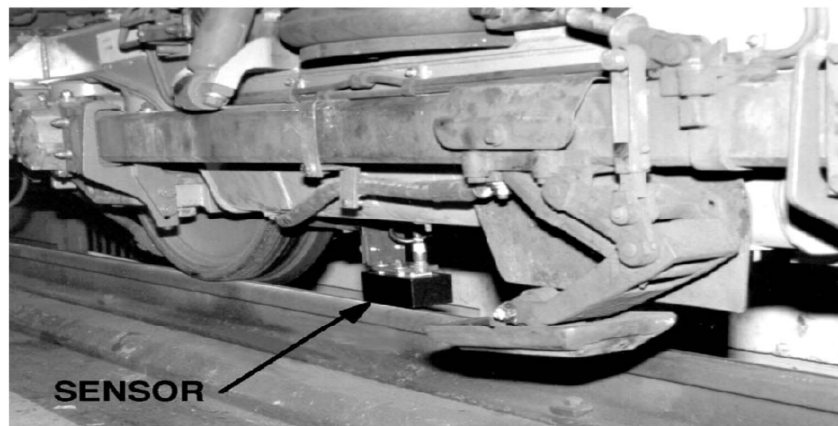


Figure IV.26 : Photographie du système de création et de détection des courants de Foucault.

IV.10. Conclusion

L'objectif pédagogique visé dans ce chapitre est de réaliser un survol du monde biologique et mathématique (formel) des réseaux de neurones.

L'apprentissage implique des modifications physiques des connexions entre neurones. L'association entre plusieurs structures neuronales (réseaux de neurones), dotées chacune d'une fonction précise, permet l'émergence d'une fonction d'ordre supérieur pour l'ensemble.

Les réseaux de neurones artificiels, constitués de structures élémentaires, permettent d'aborder sous des angles nouveaux les différentes problématiques liées à l'apprentissage et au raisonnement. De nos jours, ce n'est pas le paradigme neurobiologique qui contribue au développement des réseaux de neurones formels ; au contraire, ce sont les réseaux de neurones formels qui constituent, de plus en plus fréquemment, à la compréhension des

systèmes neuronaux vivants, car ils constituent des outils précieux pour en construire des modèles, simples mais utiles. Peut-être cette situation changera-t-elle dans l'avenir : les progrès réalisés dans l'analyse des systèmes vivants pourraient conduire, à leur tour, à la conception de réseaux de neurones formels plus efficaces que ceux que nous décrivons aujourd'hui. Il y a là un champ de recherche fascinant, complètement ouvert.

Les années qui viennent concrétiseront cet optimisme ou bien relègueront cette technique parmi les nombreuses " recettes " informatiques.

Chapitre V

Application et validation

V.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons mettre en œuvre les réseaux de neurones artificiels (RNA) dans le but de reconstruire des défauts à partir des résultats obtenus lors d'un contrôle non destructif par courants de Foucault, donc, on va effectuer une évaluation non destructive afin de, non seulement qualifier ces défauts mais aussi les quantifier.

L'application considérée concernera l'évaluation de défauts de type fissures qui sont fréquemment rencontrés en CND, leur géométrie est caractérisée par le fait qu'une des dimensions est très petite par rapport aux deux autres.

Les réseaux de neurones utilisés pour l'évaluation de ces défauts sont implémentés sous l'environnement MATLAB. Les différentes étapes ont été détaillées dans le chapitre ci-avant (Aspects pratiques pour la mise en œuvre d'un réseau de neurone).

Comme nous l'avons cité auparavant, il existe plusieurs types de RNA, dans notre étude, nous avons adopté pour le perceptron multi couches (PMC). Durant cette partie, nous considérerons un PMC contenant une seule couche d'entrée contenant un neurone à fonction d'activation linéaire, une couche cachée avec un nombre de neurones qu'on peut varier à fonction d'activation type sigmoïde et une couche de sortie contenant un neurone à fonction d'activation linéaire. Le réseau en question est sous un apprentissage supervisé avec l'algorithme de la rétropropagation de l'erreur du gradient, le réseau fait adapter le calcul des poids afin que sa sortie corresponde bien à la sortie désirée. Il reçoit à son entrée les valeurs d'impédance et fournit à sa sortie les valeurs de la profondeur du défaut.

Dans ce qui suit, on a effectué une approche dans laquelle on a fourni au réseau des valeurs d'impédances, récupérées d'un contrôle non destructif à courants de Foucault de géométries qu'on impose au réseau comme étant les sorties désirées, pour avoir au final la reconstitution optimale (sorties obtenues) de ces géométries.

V.2. Présentation du réseau et des géométries

Comme cité ci-dessus, on a opté pour un PMC ayant les caractéristiques citées aussi au préalable, ayant la représentation graphique illustrée dans la figure suivante :

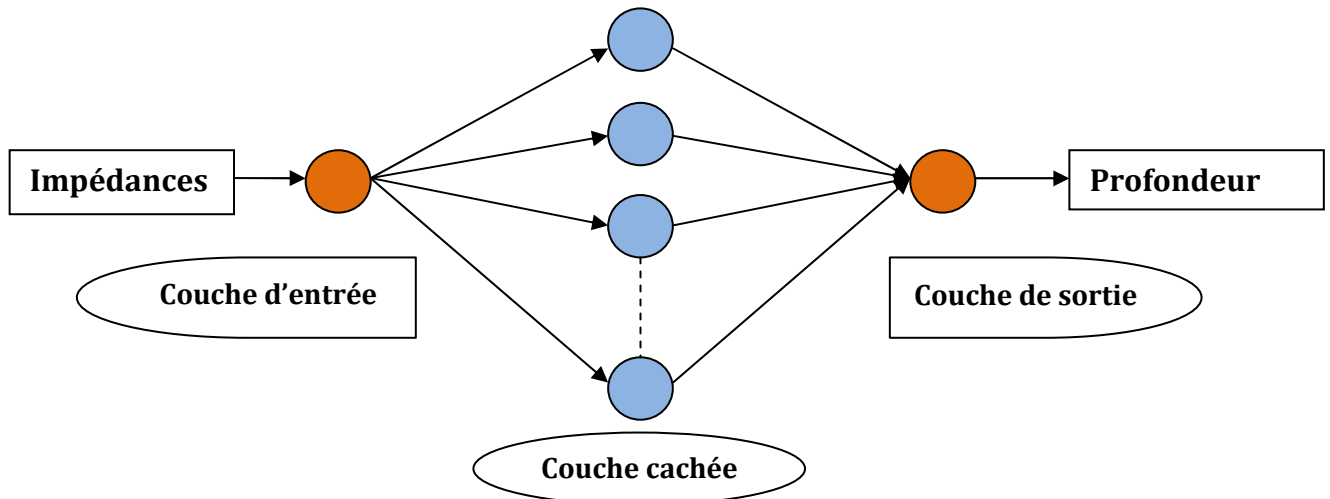




Figure V.1 : Allure du PMC utilisée dans notre approche.

-  : Neurones à fonction d'activation linéaire.
-  : Neurones à fonction d'activation sigmoïde.

Les géométries qui ont fait l'objet d'évaluation afin d'effectuer leurs reconstitution dans notre travail sont représentées ci-dessous :

❖ Géométrie 01

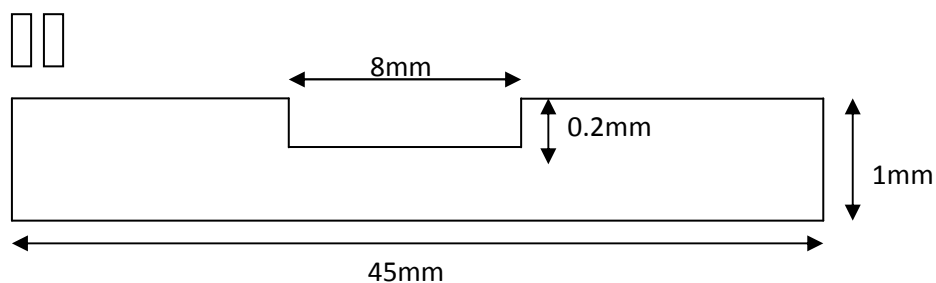
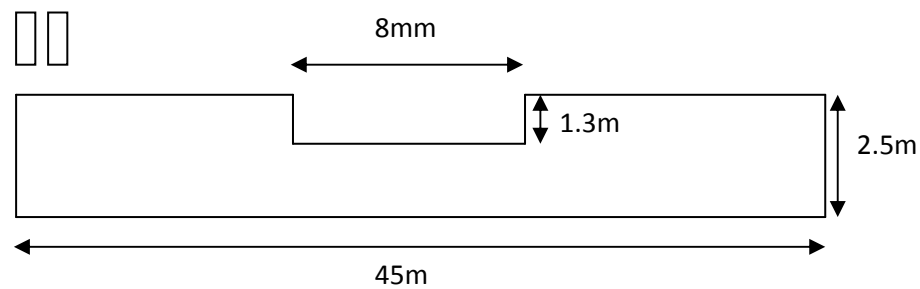


Figure V.2 : Illustration graphique de la géométrie 01 à évaluer.

❖ Géométrie 02



❖ Géométrie 03

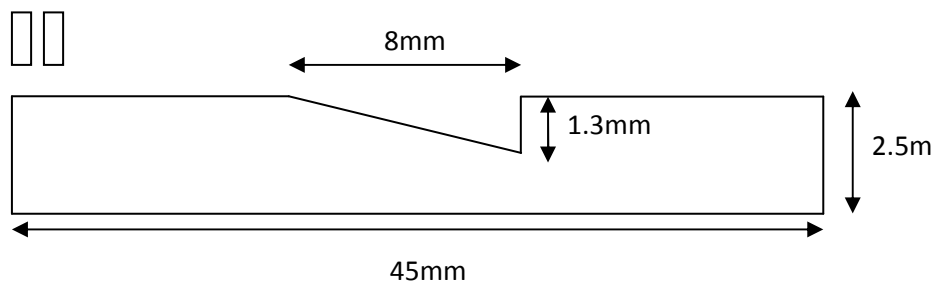


Figure V.3 : Illustration graphique de la géométrie 02 à évaluer.

❖ Géométrie 04

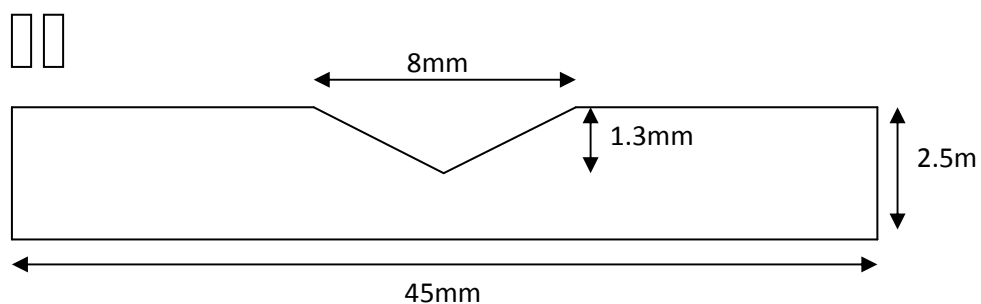


Figure V.4 : Illustration graphique de la géométrie 03 à évaluer.

V.3. Reconstitution de défauts

On a élaboré une base d'apprentissage correspondante à chaque géométrie à partir des résultats expérimentaux (Impédances acquises dans un CND par courants de Foucault), qui serviront à l'entraînement (apprentissage) du PMC.

V.3.1. Résultats obtenus

On a effectué sous environnement MATLAB nos simulations en utilisant les paramètres du réseau suivants :

- ✓ Nombre de neurones dans la couche cachée = 05 neurones (donnée que nous pouvons varier).
- ✓ Taux d'apprentissage = 0.01 (donnée que nous avons fixé pour des raisons de stabilité du réseau).
- ✓ Nombre maximal d'itérations = 500 itérations (donnée qu'on peut varier)

Les résultats obtenus lors de nos simulations pour les différentes géométries (quatre géométries), sont donnés ci-dessous :

❖ Géométrie 01

Les valeurs fournies au réseau sont :

```
IMP=[0.000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0050 0.0080 0.0100 0.0166
0.0258 0.0565 0.0921 0.2663 0.5692 1.3925 2.0287 2.7590 3.1267
3.4225 2.6417 1.5341 0.0632 1.5294 2.7644 3.4214 3.0622 2.6519
2.0446 1.2780 0.6420 0.2748 0.1354 0.1020 0.0806 0.0510 0.0080
0.0050 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000];
```

```
dep_c=[0.0000 0.0010 0.0020 0.0030 0.0040 0.0050 0.0060 0.0070
0.0080 0.0090 0.010 0.011 0.012 0.013 0.014 0.015 0.016 0.017
0.018 0.019 0.020 0.021 0.022 0.023 0.024 0.025 0.026 0.027
0.028 0.029 0.030 0.031 0.032 0.033 0.034 0.035 0.036 0.037
0.038 0.039 0.040];
```

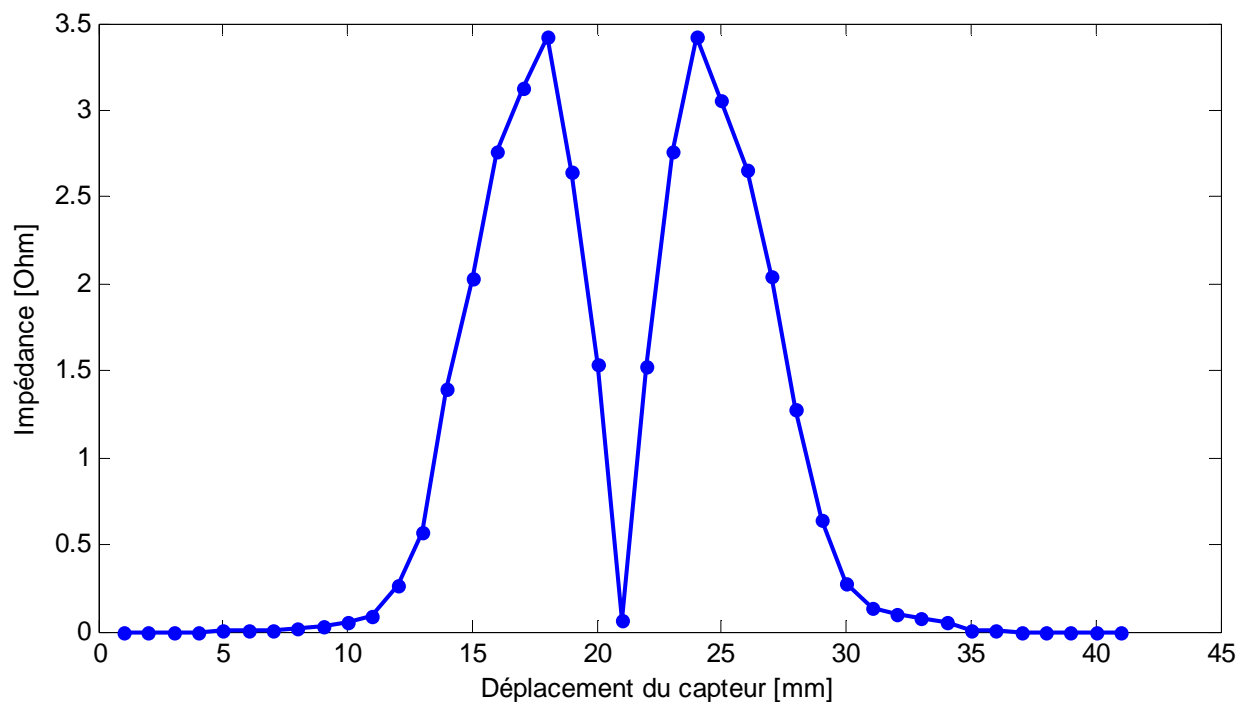


Figure V.6 : Evolution de l'impédance en fonction du déplacement du capteur.

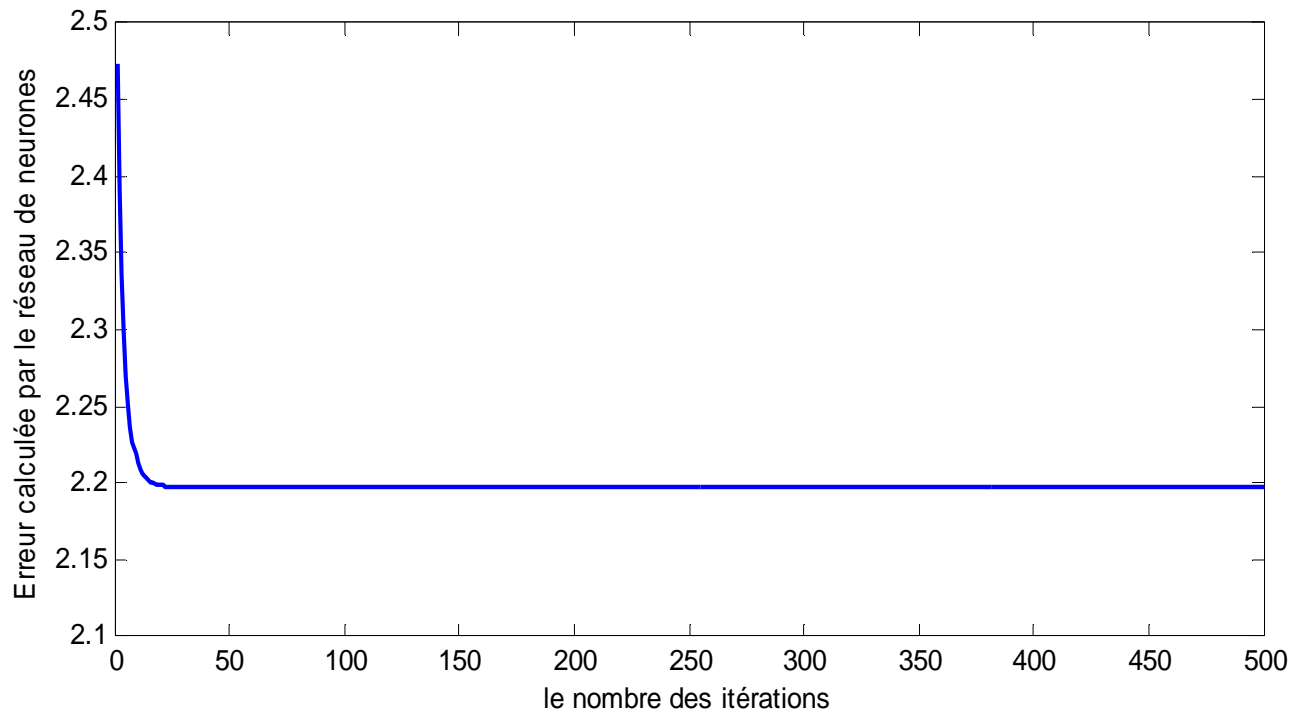


Figure V.7 : L'allure de l'erreur quadratique moyenne en fonction du nombre d'itérations.

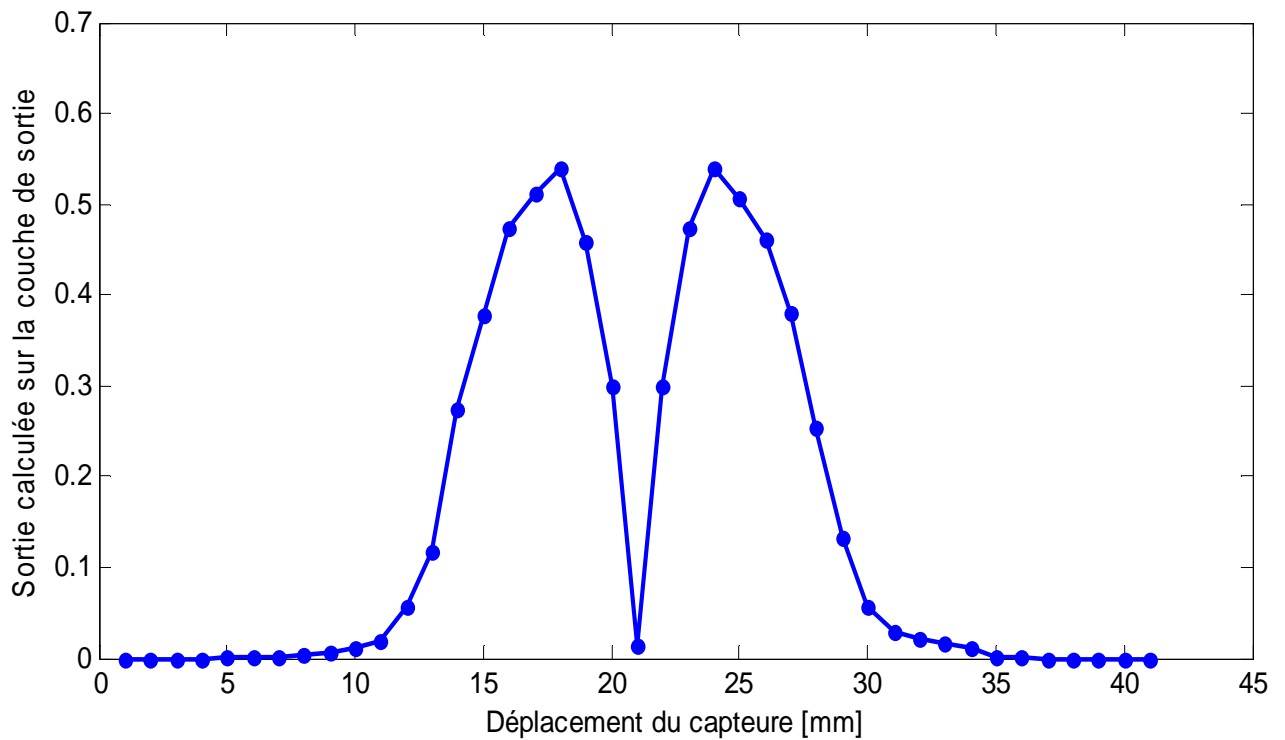


Figure V.8 : L'allure de la réponse du réseau en fonction du déplacement du capteur.

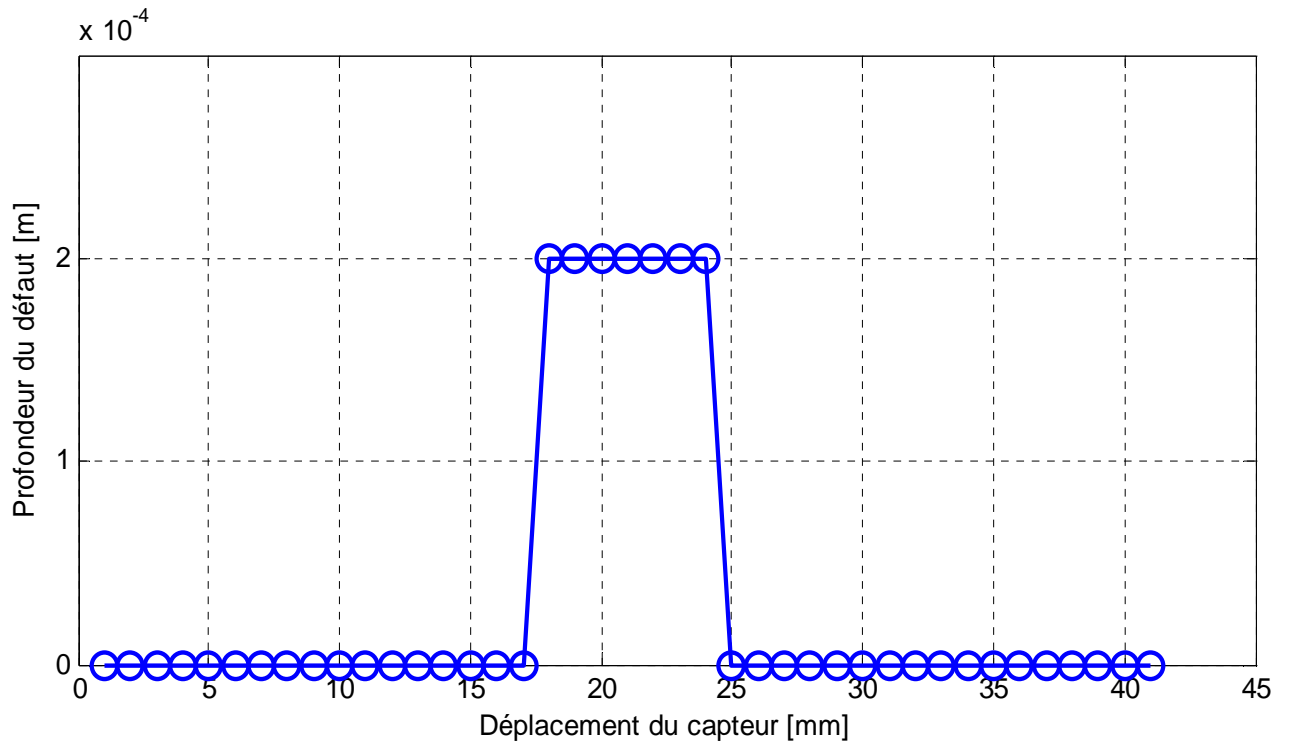


Figure V.9 : L'allure de la sortie désirée.

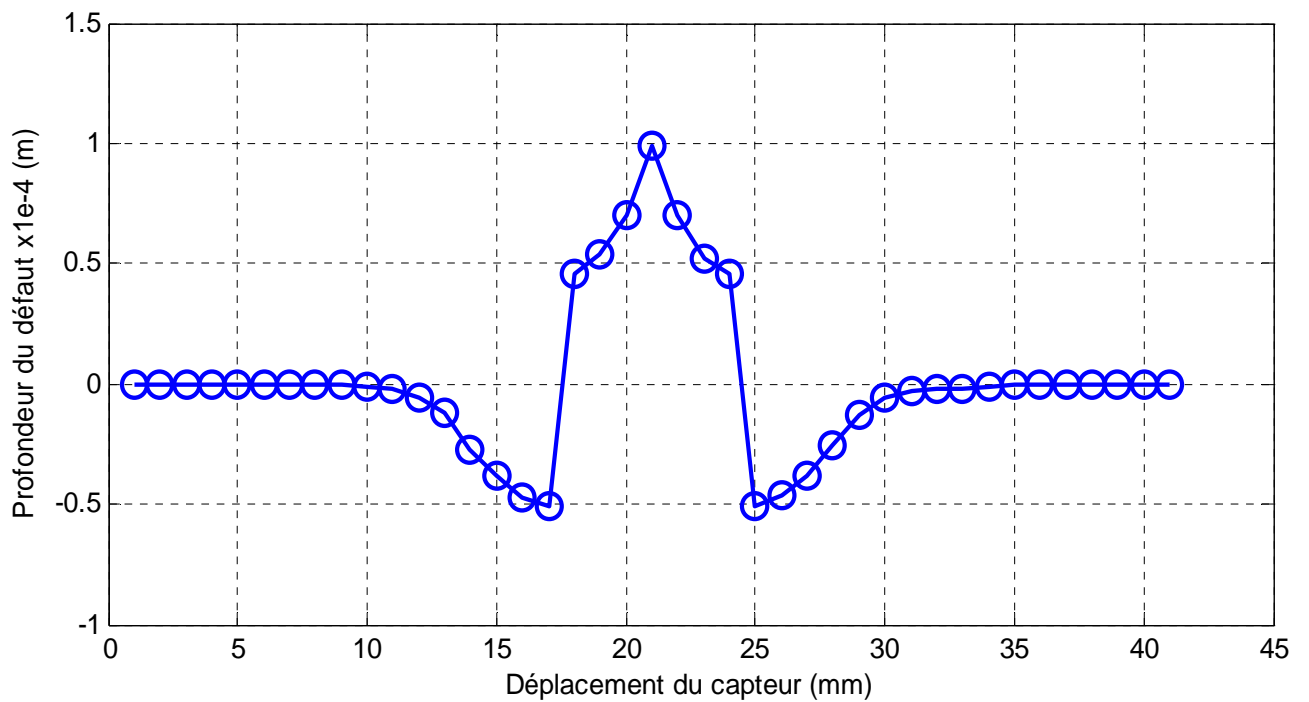


Figure V.10 : L'allure de la sortie obtenue.

❖ Géométrie 02

```
IMP=[0.0640 0.0120 0.0329 0.0939 0.0410 0.0755 0.0714 0.0547
0.1536 0.1489 0.5000 1.0578 1.9329 2.3657 2.9013 3.0835 3.0667
2.9397 2.5409 1.3734 0.0549 1.4077 2.5341 2.9292 3.0644 3.0719
2.9617 2.3698 1.9105 1.1028 0.5013 0.1569 0.1356 0.0652 0.0631
0.0816 0.0686 0.0536 0.0276 0.0750 0.0498];
```

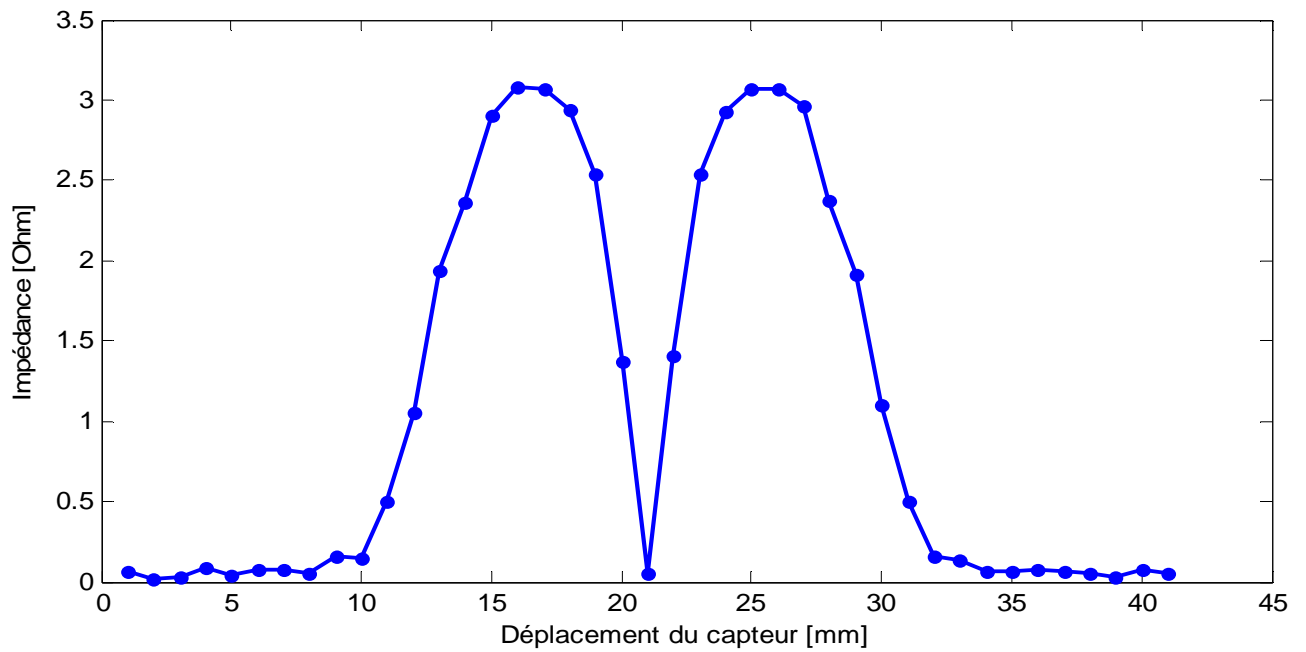


Figure V.11 : Evolution de l'impédance en fonction du déplacement du capteur.

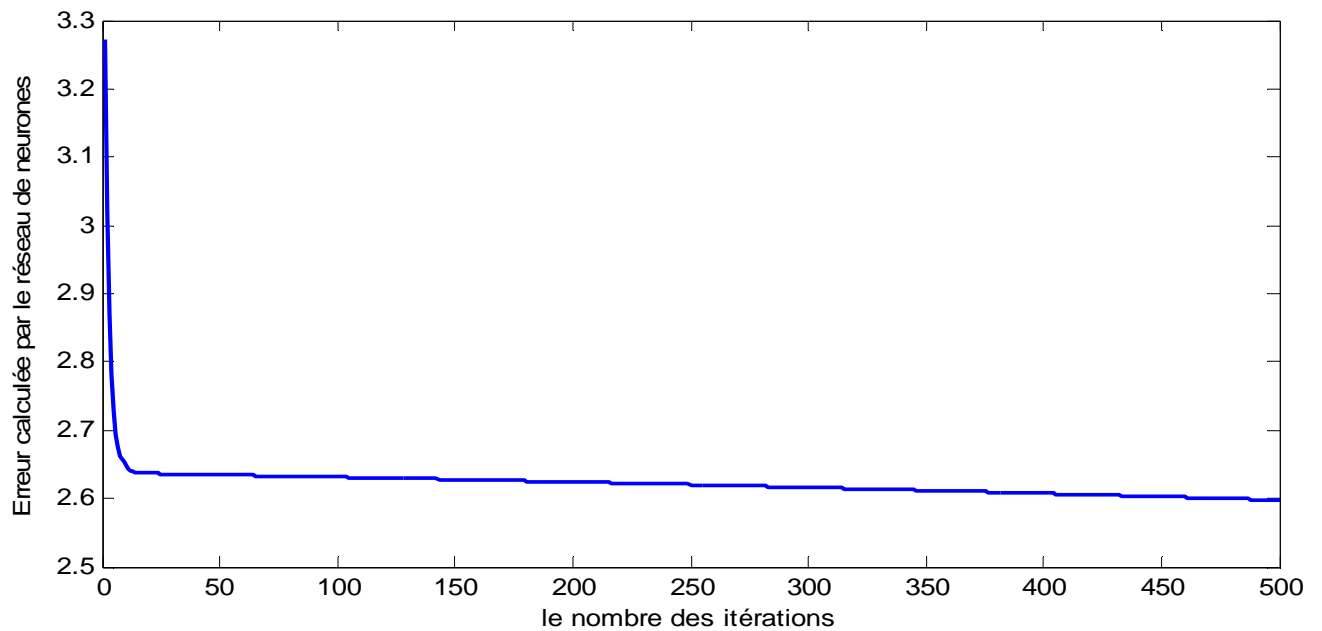


Figure V.12 : L'allure de l'erreur quadratique moyenne en fonction du nombre d'itérations.

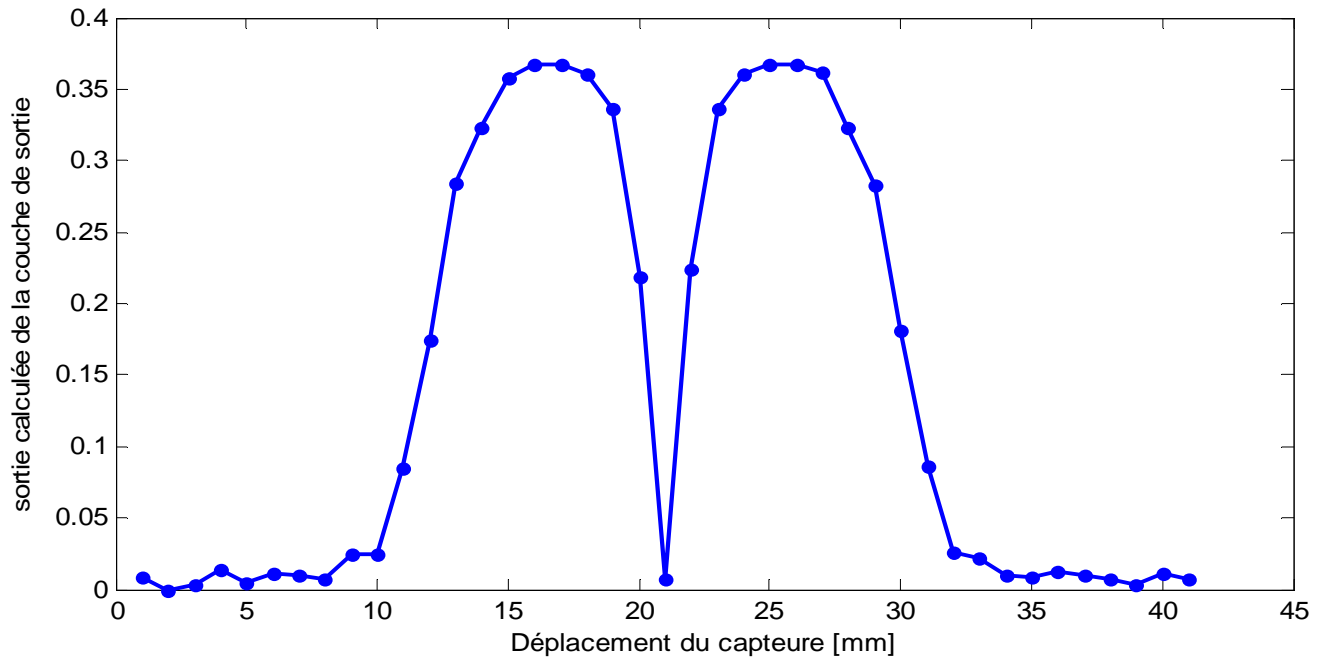


Figure V.13 : L'allure de la réponse du réseau en fonction du déplacement du capteur.

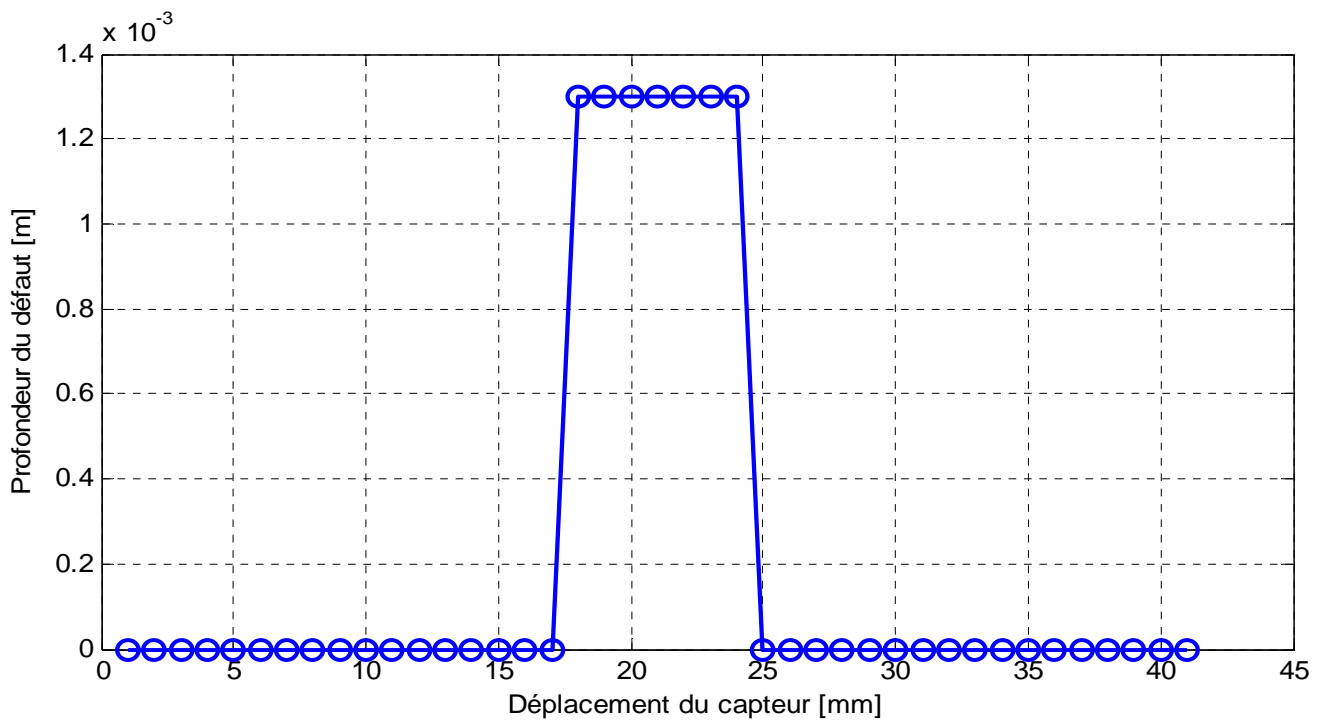


Figure V.13 : L'allure de la sortie désirée.

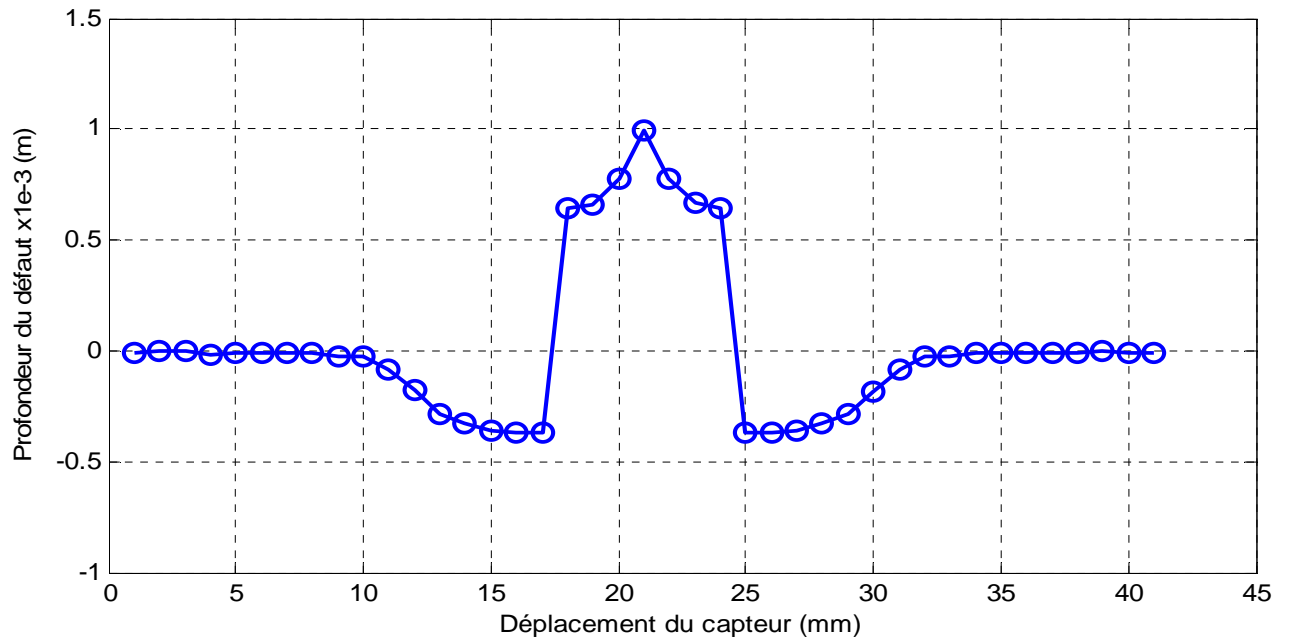


Figure V.14 : L'allure de la sortie obtenue.

❖ Géométrie 03

```
IMP=[0.0350 0.0555 0.0696 0.0735 0.4122 0.0138 0.0947 0.2648
0.0886 0.0055 0.0085 0.0517 0.2681 0.5296 0.8400 1.2209 1.8461
2.1955 2.2908 2.1935 1.5910 0.1971 0.8382 1.6934 2.3126 2.2995
2.5394 1.8886 0.9623 0.3876 0.1203 0.0355 0.1464 0.2618 0.1105
0.0205 0.4121 0.1168 0.3182 0.2386 0.0264];
```

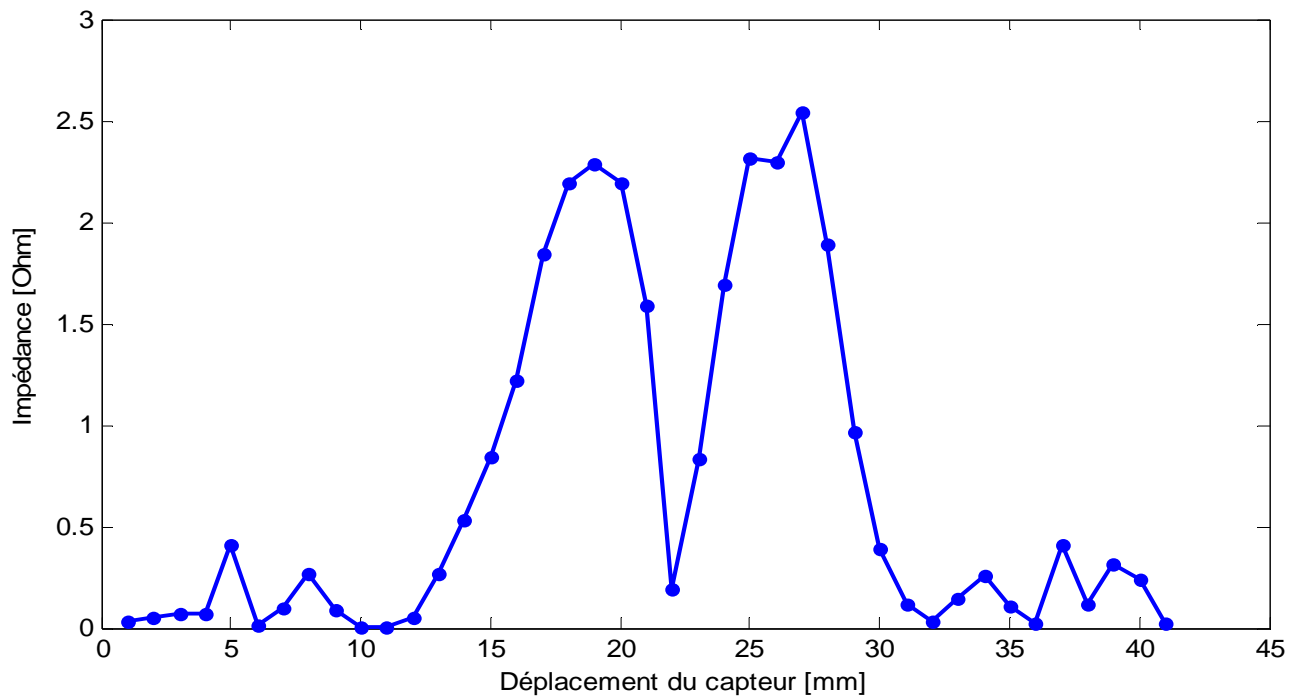


Figure V.15 : Evolution de l'impédance en fonction du déplacement du capteur.

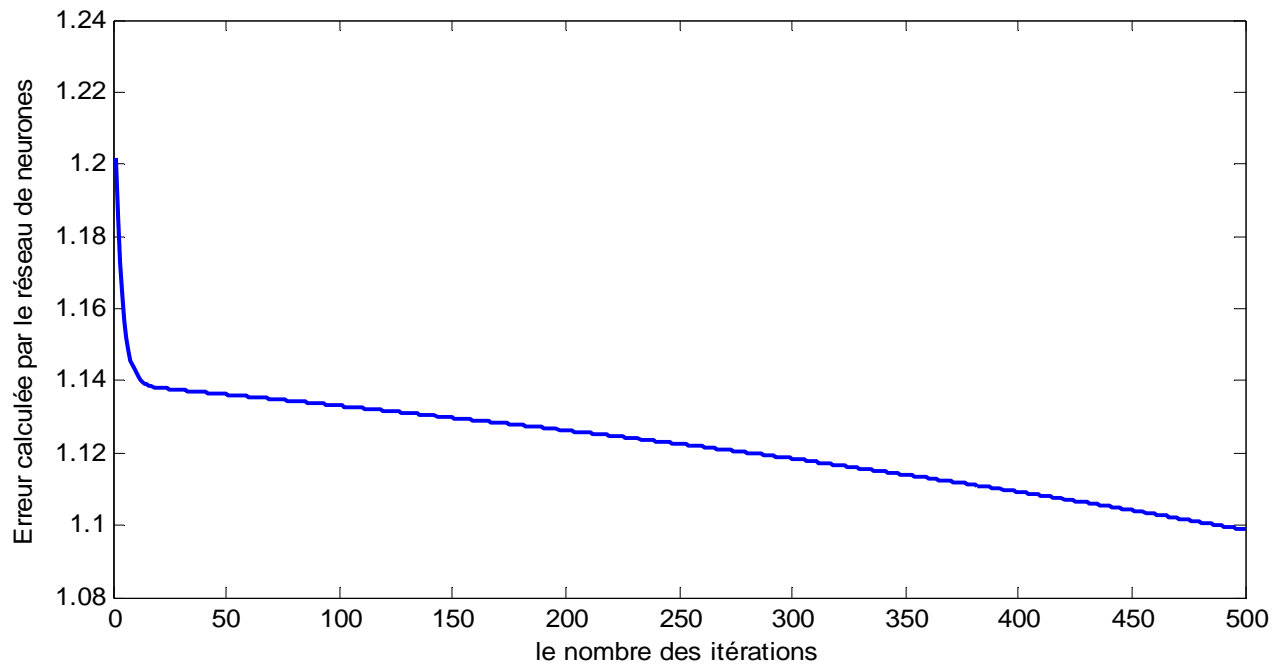


Figure V.16 : L'allure de l'erreur quadratique moyenne en fonction du nombre d'itérations.

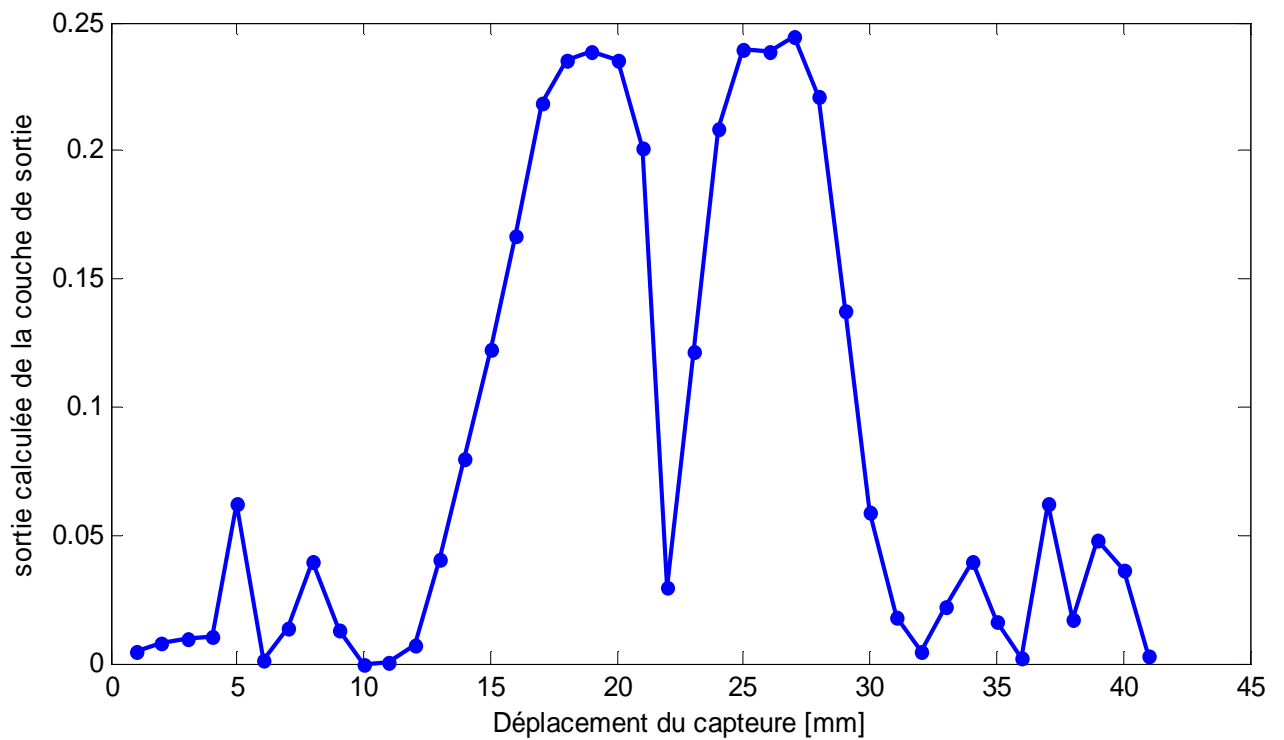


Figure V.17 : L'allure de la réponse du réseau en fonction du déplacement du capteur.

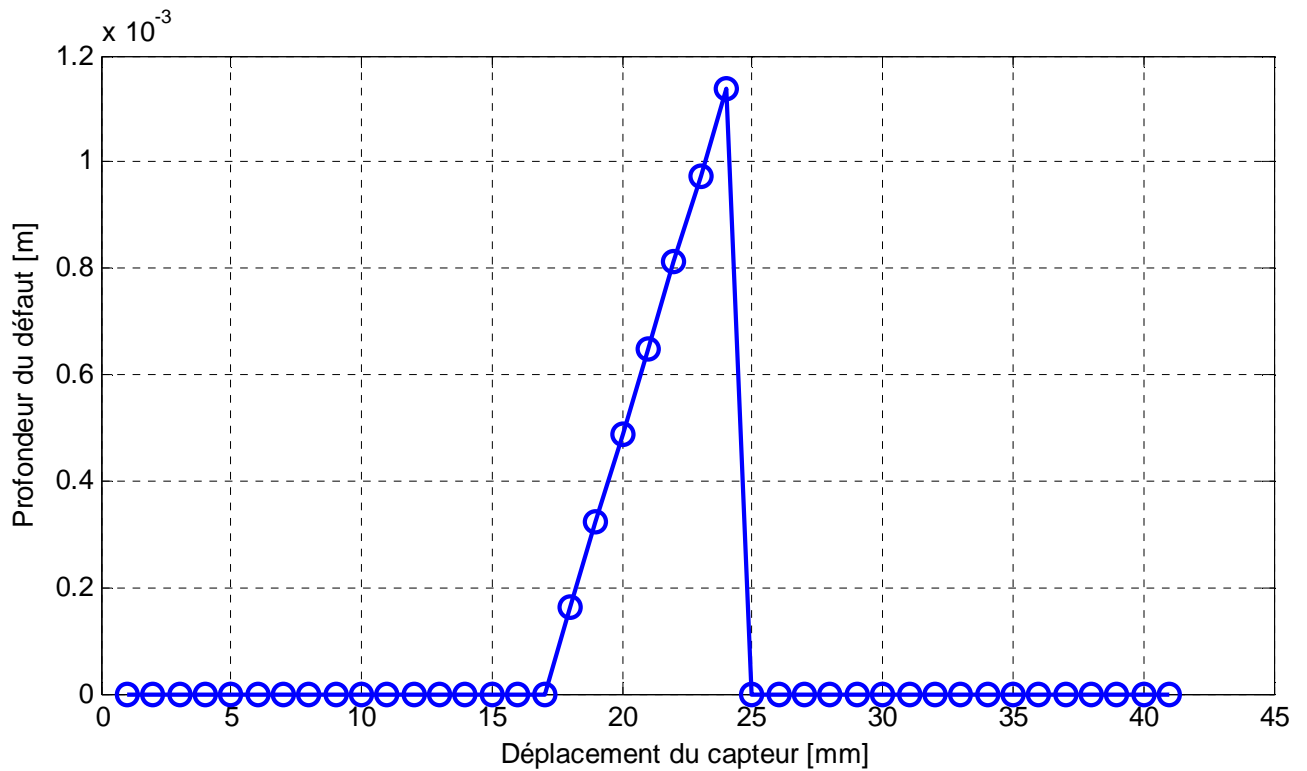


Figure V.18 : L'allure de la sortie désirée.

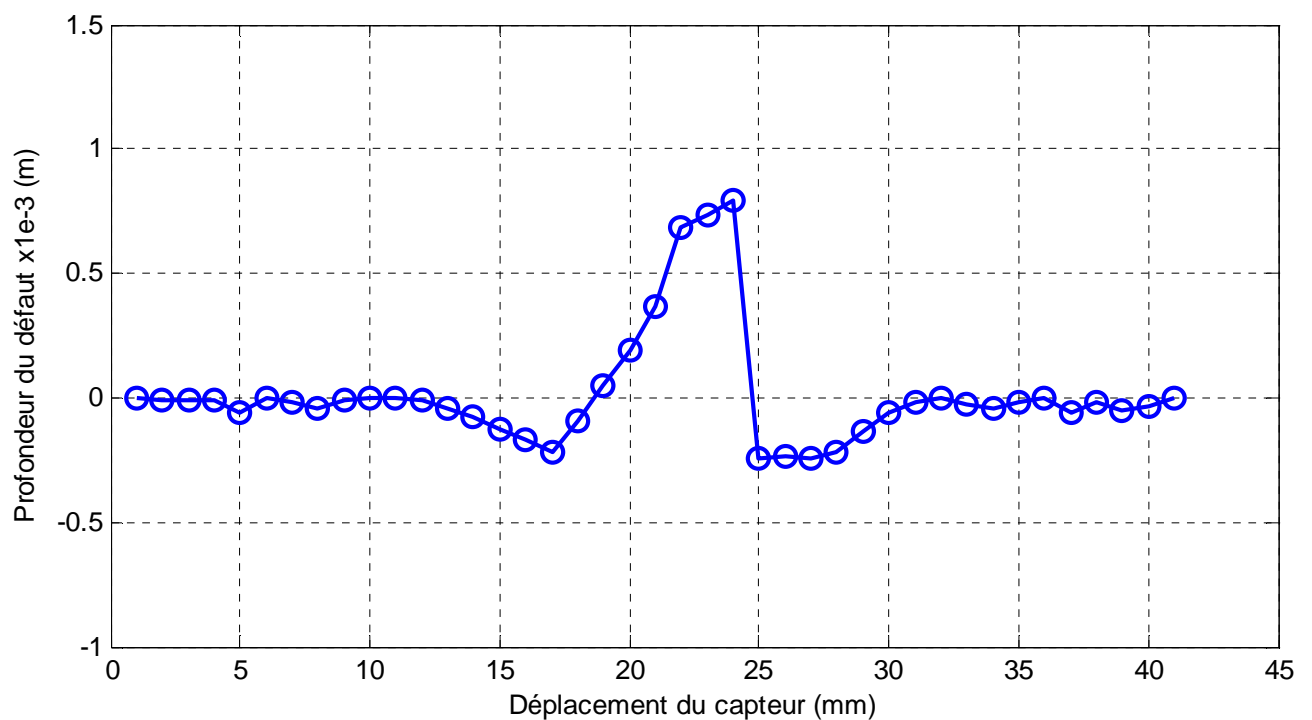


Figure V.19 : L'allure de la sortie obtenue.

❖ Géométrie 04

```
IMP=[0.0693 0.0179 0.0298 0.0783 0.1574 0.0236 0.0957 0.2651
0.2760 0.1031 0.0061 0.1170 0.4362 0.8486 1.5339 2.0812 2.5957
2.6598 2.1230 1.0947 0.0509 1.1104 2.0840 2.6246 2.5740 2.1330
1.4399 0.7311 0.2942 0.2193 0.0544 0.0141 0.1182 0.2449 0.0891
0.0051 0.0338 0.02161 0.0778 0.0441 0.0629];
```

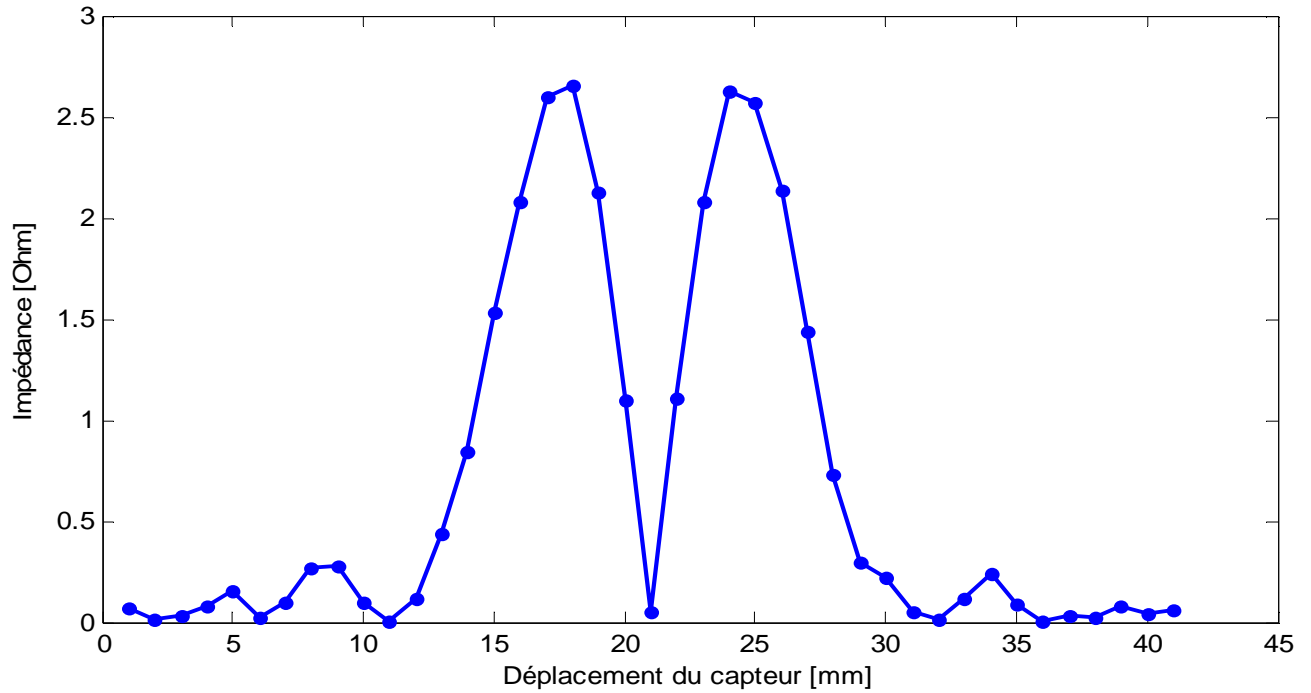


Figure V.20 : Evolution de l'impédance en fonction du déplacement du capteur.

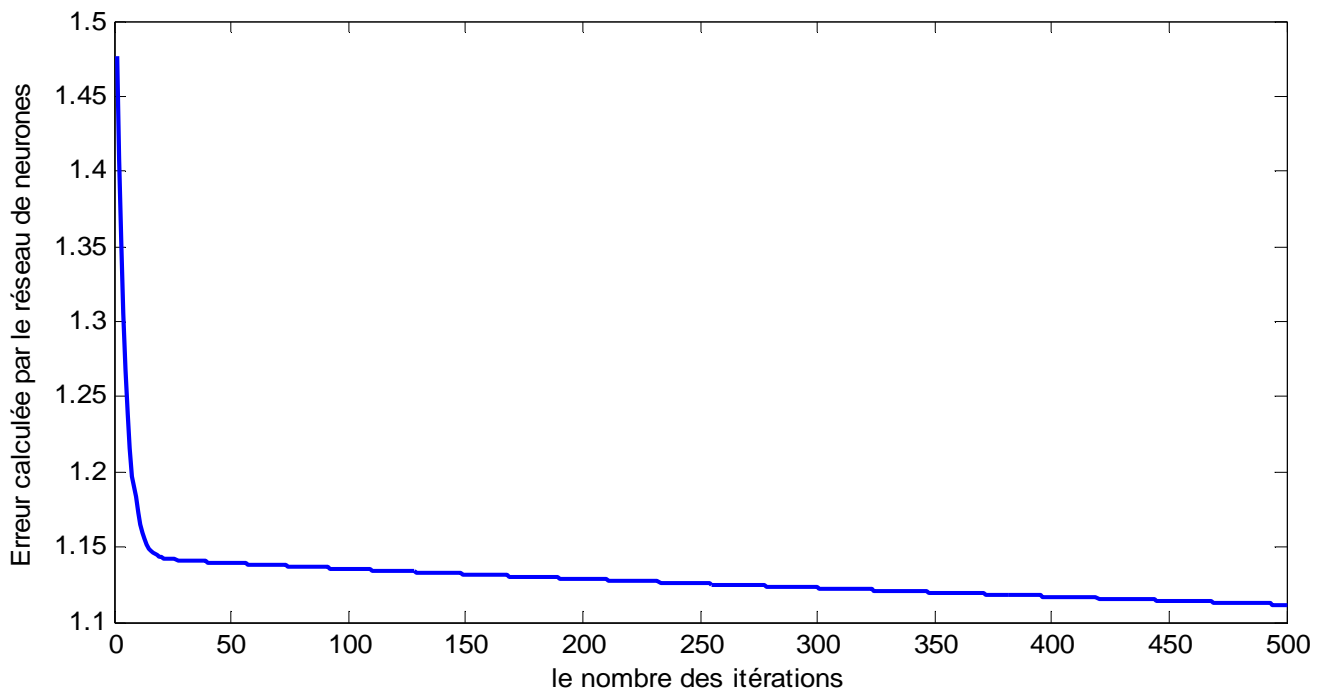


Figure V.21 : L'allure de l'erreur quadratique moyenne en fonction du nombre d'itérations.

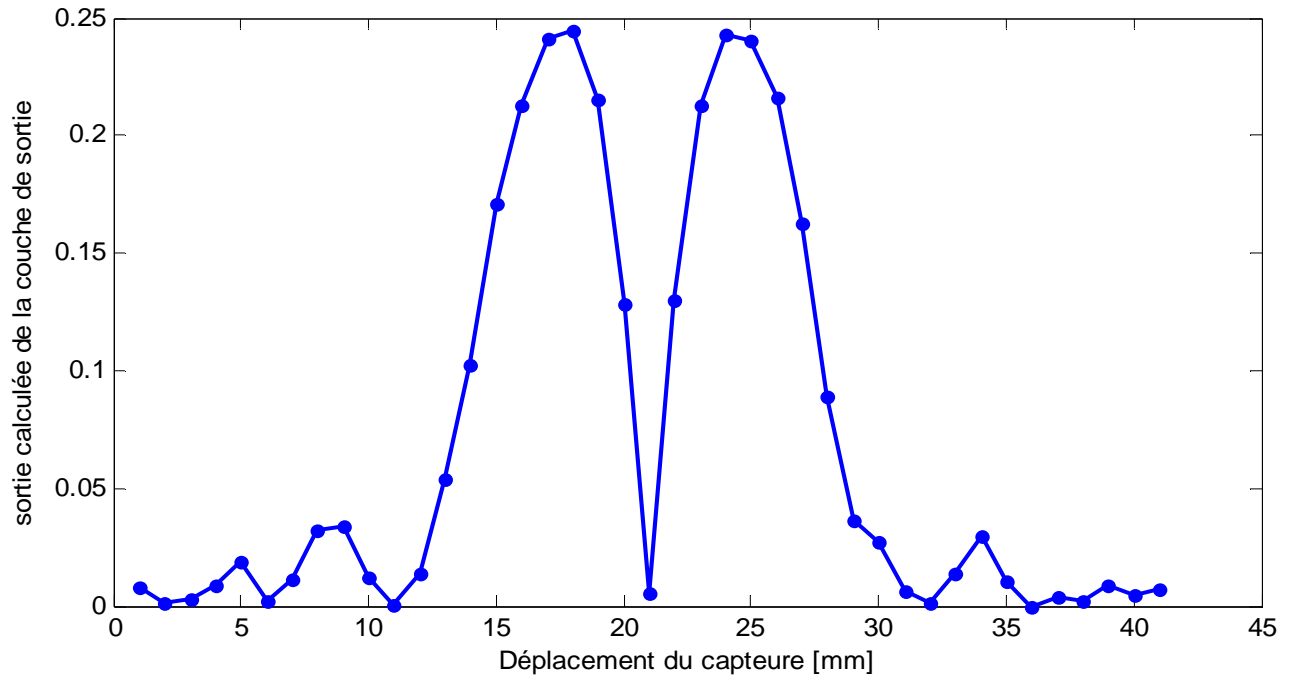


Figure V.22 : L'allure de la réponse du réseau en fonction du déplacement du capteur.

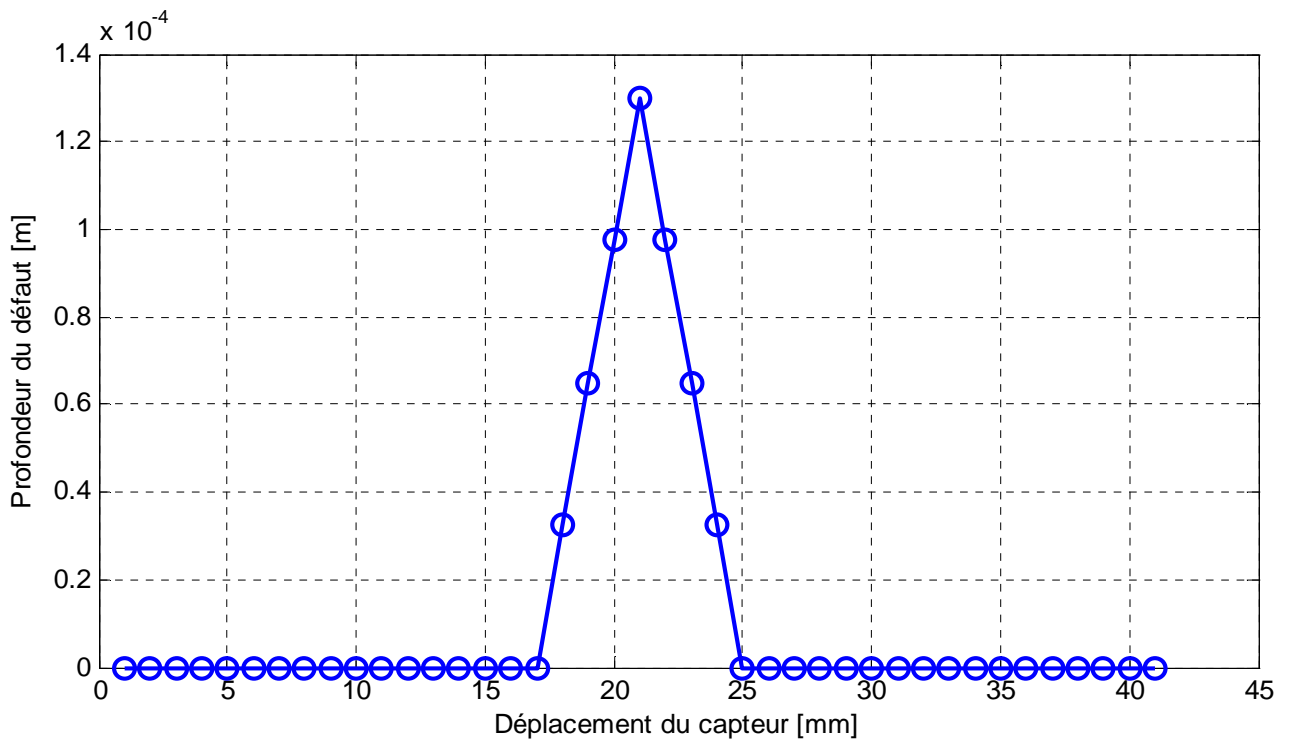


Figure V.23 : L'allure de la sortie désirée.

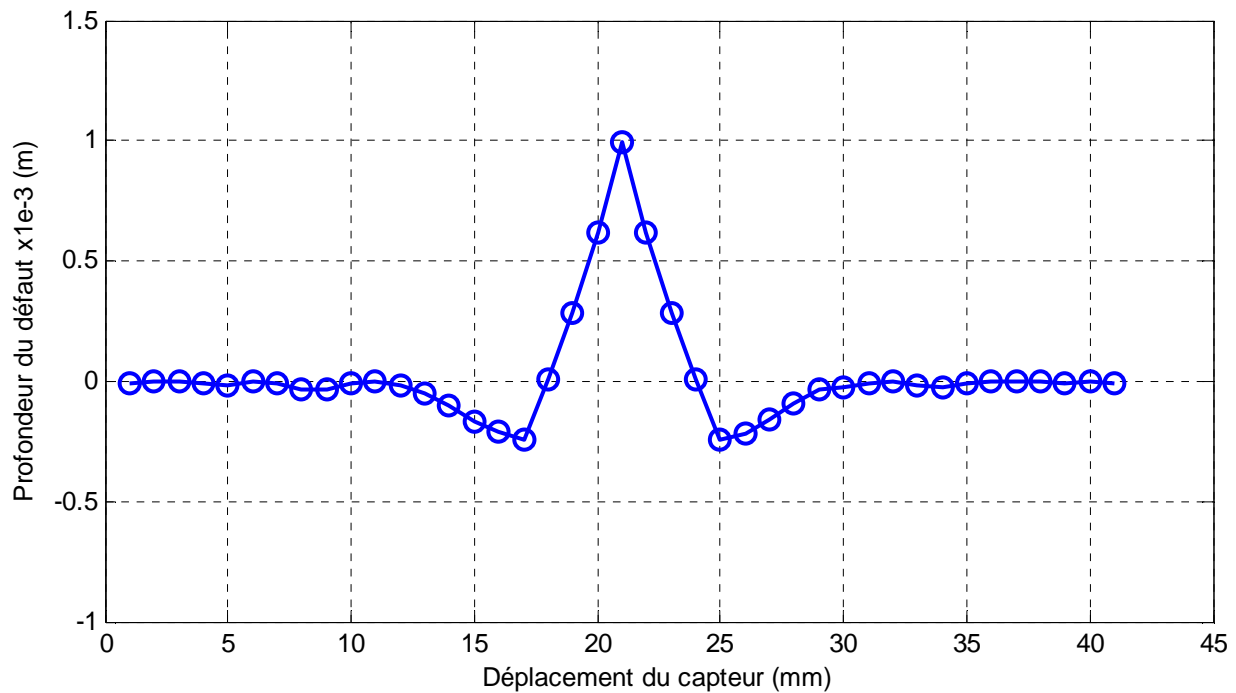


Figure V.24 : L'allure de la sortie obtenue.

V.3.2. Interprétation des résultats obtenus

Nous avons constaté que le réseau de neurones (PMC) réagit différemment pour chaque géométrie. Cela est dû aux données d'apprentissage fournies ; vu que chaque géométrie est différente de l'autre, chaque sortie désirée l'est. Ce qui est illustré dans les figures ci-dessus ; chaque sortie désirée fournie en conséquent la sortie obtenue après simulation sur le réseau (PMC) qui est optimal. On remarque bien évidemment que les formes reconstituées sont assimilables aux formes désirées, mais avec une imprécision remarquable.

On constate que l'erreur quadratique moyenne est minimisée pour chaque géométrie. Cependant, on remarque que sa plage diffère d'une géométrie à une autre, cette différence apparaît au niveau de la valeur maximale et minimale de l'erreur calculée par l'algorithme développé pour ; après un certain nombre d'itérations, le PMC arrive à minimiser cette erreur et la rend quasiment constante.

L'algorithme converge vers l'erreur minimale tolérée tout en ajustant les valeurs des poids du réseau qui sont données comme suit :

$$W_h = \begin{bmatrix} 0,8771 \\ -0,4127 \\ 0,2739 \\ -0,4671 \\ 0,6969 \end{bmatrix} \quad W_o = [0,0990 \quad -0,8648 \quad 0,6077 \quad -0,4009 \quad -0,1923]$$

W_h : étant les poids de la couche cachée.

W_o : étant les poids de la couche de sortie.

Il est préjudiciable de préciser que ses valeurs données ci-dessus, sont obtenues pour la géométrie 01. Chaque géométrie donne différentes valeurs de ses poids.

Dans ce qui suit, on donnera les résultats obtenus en variant quelques caractéristiques du réseau (PMC), telles que le nombre de neurones dans la couche cachée et le nombre d'itérations maximales. On tient à préciser que lors de ces simulations, on a constaté que l'erreur quadratique moyenne change (ces valeurs maximales et minimales qui changent), la réponse du réseau qui dans certaines simulations oscille vers le négatif ce qui engendre une légère déformation de la sortie désirée, ainsi que le temps de calcul qui de plus en plus devient considérable vu le nombre important de données à traiter (calculer).

Pour ne pas encombrer notre manuscrit avec des résultats quasiment similaires, on a opté à présenter que les résultats obtenues pour la géométrie 04 tout en variant les caractéristiques ci-avant citées, notre choix s'est posé sur cette géométrie vu la complexité qu'elle présente.

- ✓ Nombre de neurones dans la couche cachée = 20.
- ✓ Nombres maximal d'itérations = 1000.

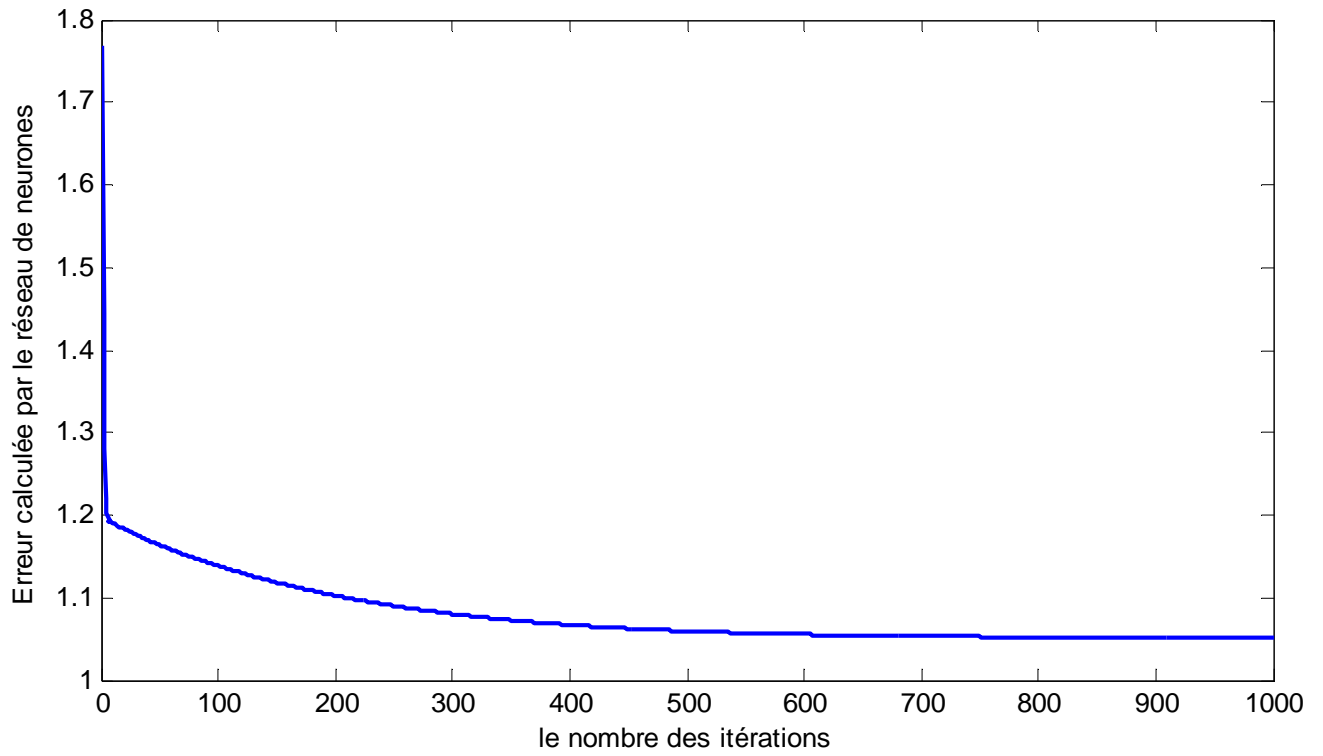


Figure V.25 : L'allure de l'erreur quadratique moyenne en fonction du nombre d'itérations.

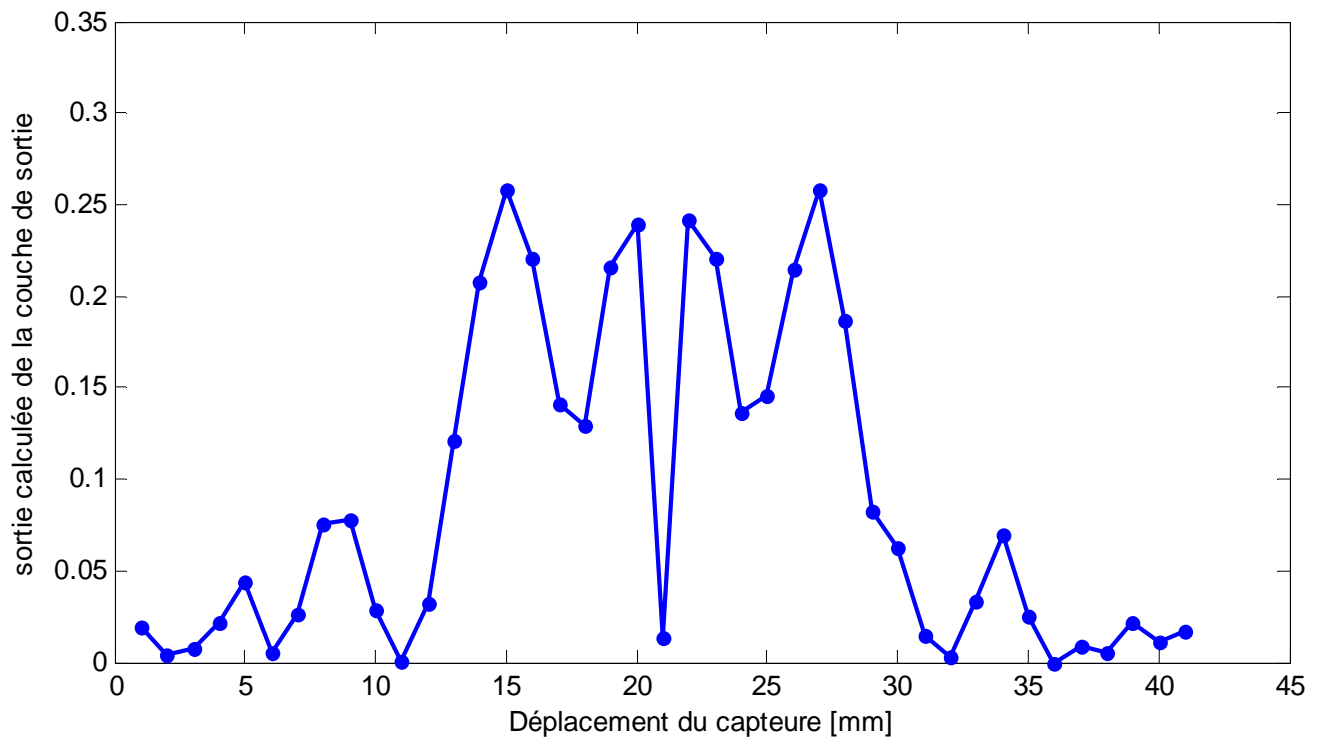


Figure V.26 : L'allure de la réponse du réseau en fonction du déplacement du capteur.

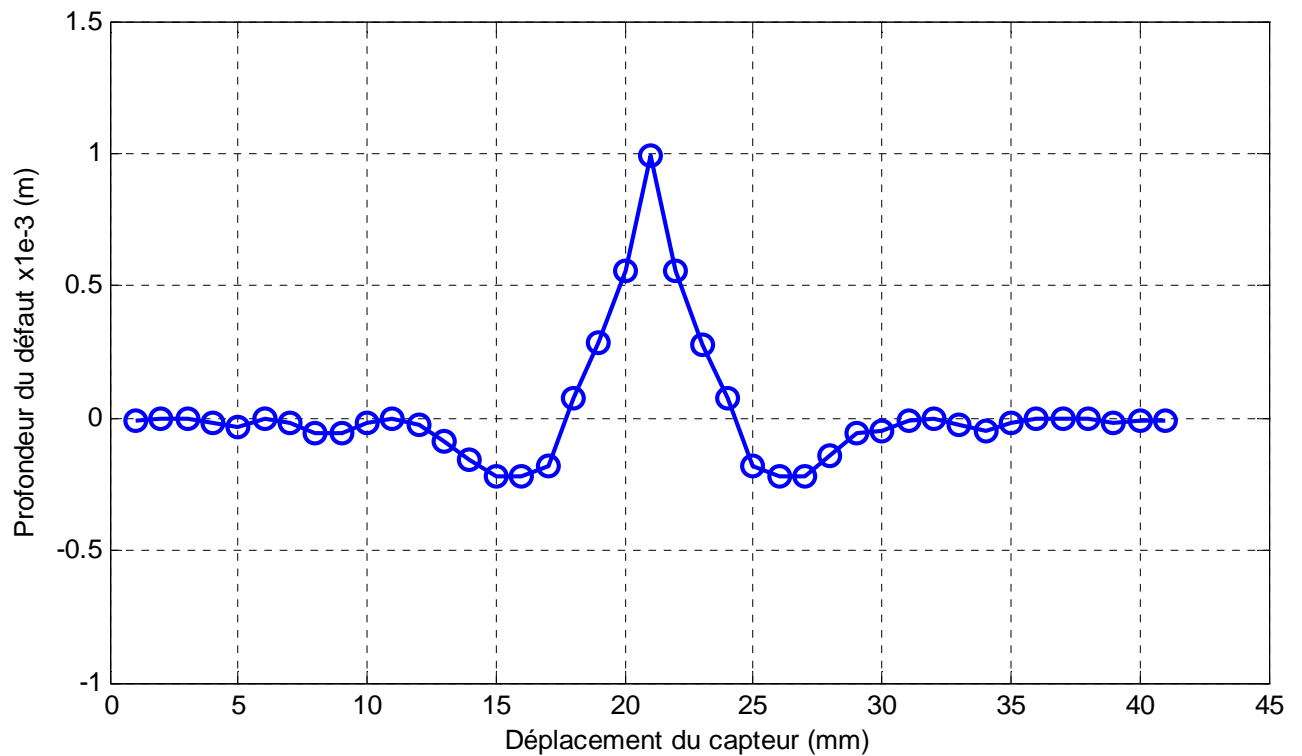


Figure 27 : L'allure de la sortie obtenue.

- ✓ Nombre de neurones dans la couche cachée = 100.
- ✓ Nombre maximal d'itérations = 1500.

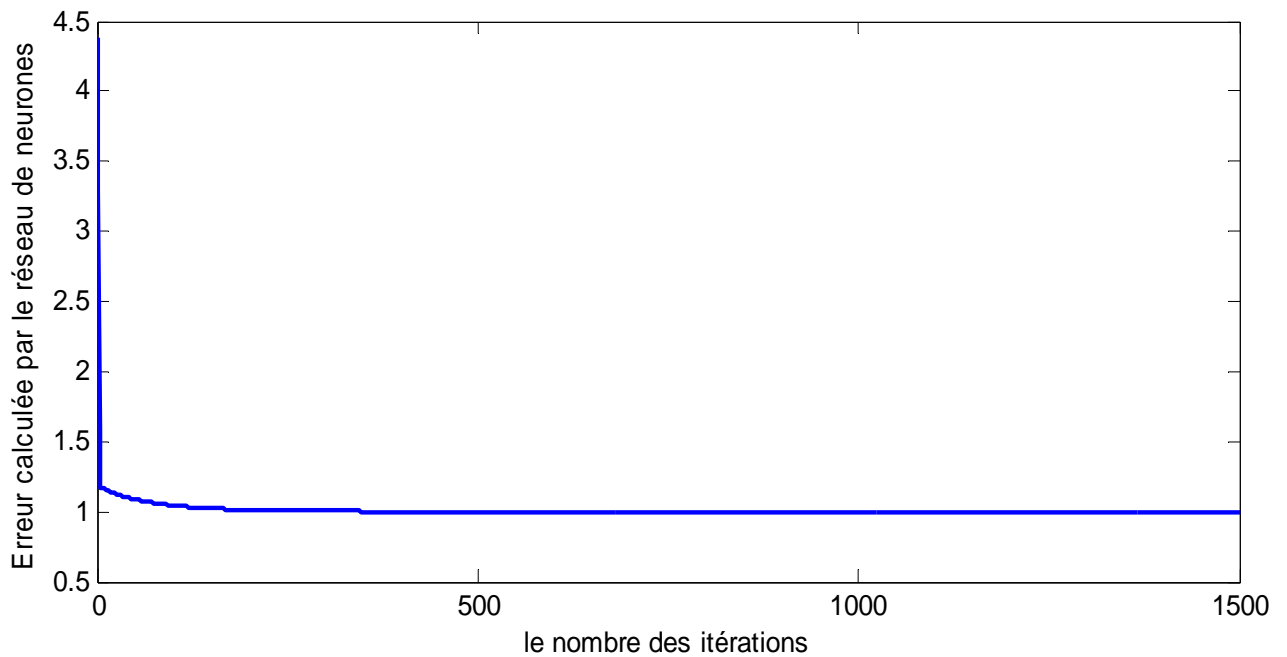


Figure V.28 : L'allure de l'erreur quadratique moyenne en fonction du nombre d'itérations.

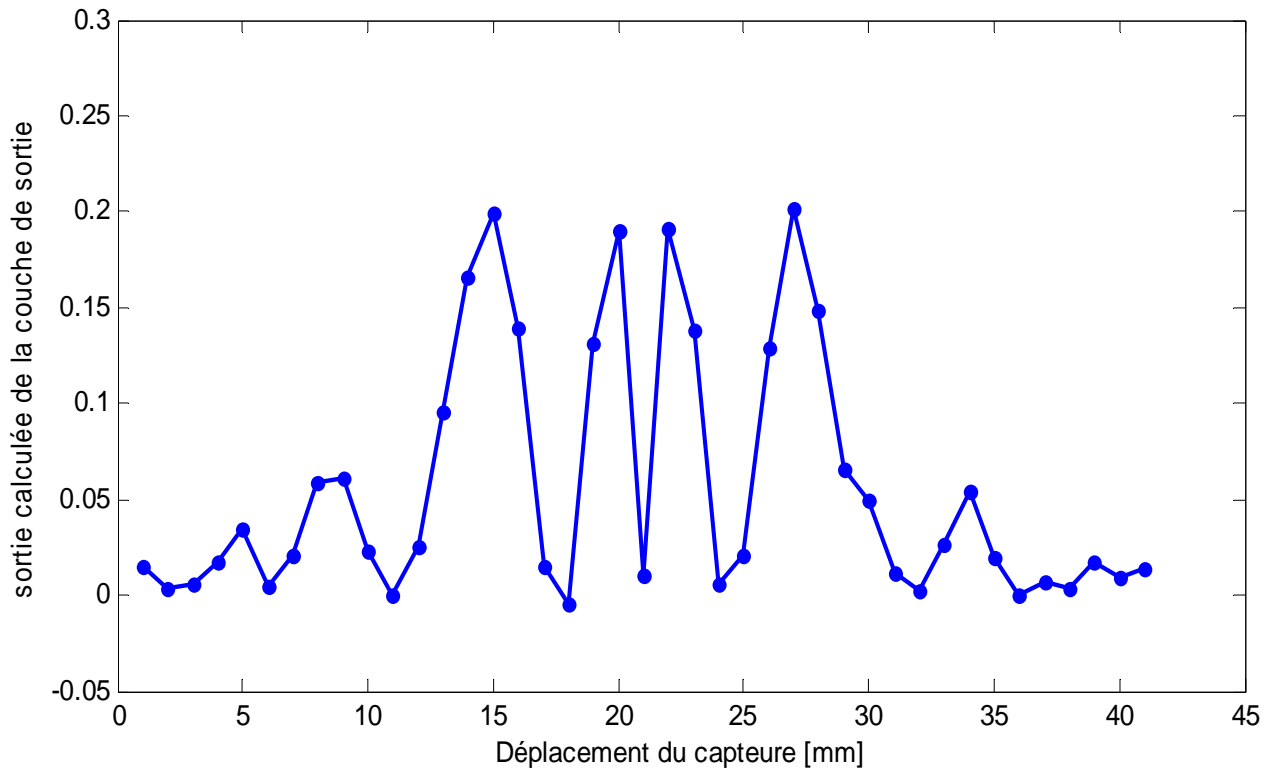


Figure V.29 : L'allure de la réponse du réseau en fonction du déplacement du capteur.

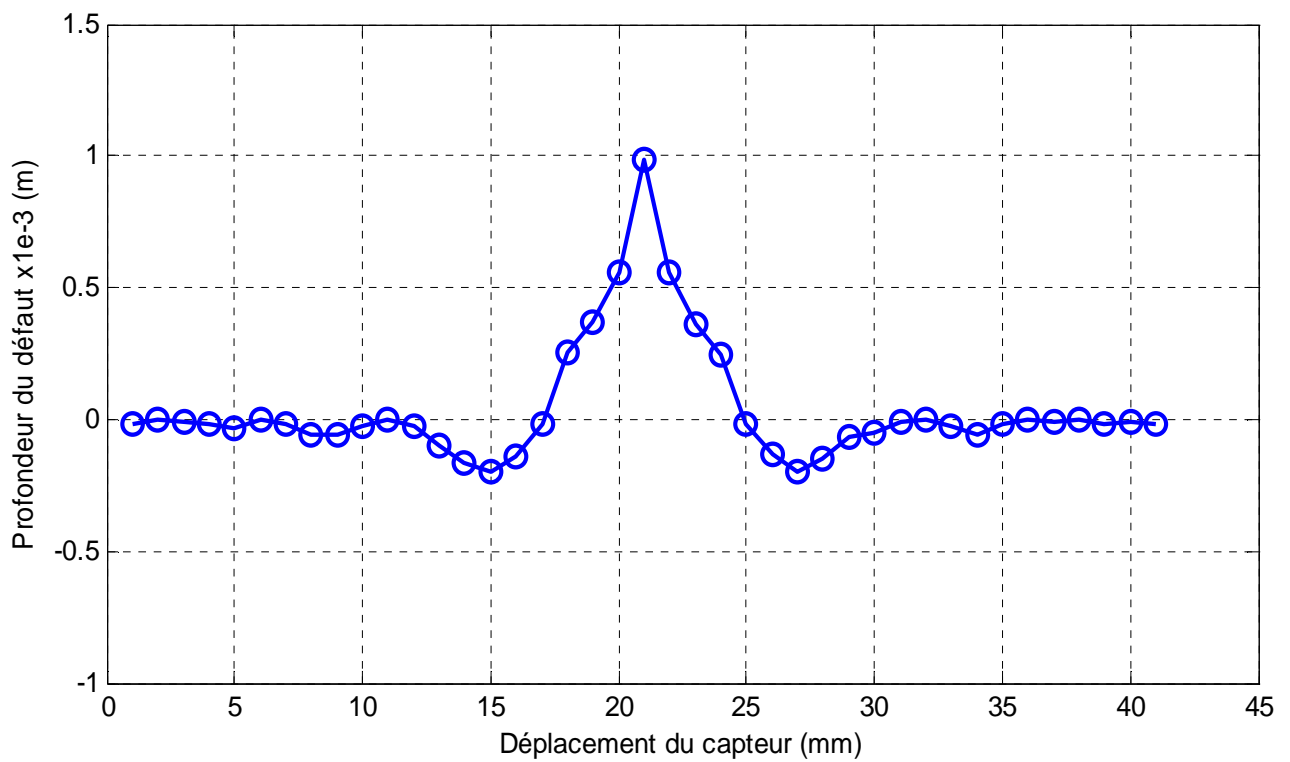


Figure V.30 : L'allure de la sortie obtenue.

V.4. Conclusion

Dans cette partie, nous avons développé un réseau de neurones pour le traitement d'un modèle inverse, qui consiste à reconstituer la profondeur d'un défaut à partir des données obtenues expérimentalement afin de revenir aux dimensions du défaut. Autrement dit, on a essayé d'effectuer une approche neuronale qui consiste à l'optimisation de ce réseau afin qu'il fournisse la dimension ou la forme désirée.

Nous pouvons dire que le réseau de neurones développé nous a permis de reconstituer au moins d'une manière approximative les formes géométriques fournies.

Conclusion générale

Devant la nécessité de trouver des solutions satisfaisant les problèmes inverses dans le cadre du contrôle non destructif (CND), une approche basée sur les réseaux de neurones artificiels (RNA) a été proposée pour satisfaire les besoins d'une évaluation non destructive (END) des défauts proposés.

Nous avons commencé notre travail par une recherche bibliographique des plus exhaustives possible relative aux différents procédés et méthodes de traitement du contrôle non destructif. Dans un second temps, nous avons présenté les phénomènes électromagnétiques ainsi que les différentes modélisations mathématiques de ce dernier. Ensuite, nous avons évoqué la notion du neurone artificiel en détaillant la méthode des réseaux de neurones qui a fait l'objet de notre travail.

L'objectif principal de ce travail consiste à développer une approche neuronale, cette approche en question nous permettra la reconstitution de défauts en évaluation non destructive.

Le développement de cette approche s'est effectué par deux étapes distinctes mais complémentaires. La première s'agissait de proposer une architecture optimale du réseau, en définissant ses caractéristiques ; à savoir, le nombre de neurones dans la couche cachée ainsi que les fonctions d'activation dans les différentes couches du réseau (entrée, cachée et sortie). La deuxième faisait l'objet du choix de l'algorithme d'apprentissage, ainsi que le taux d'apprentissage et l'erreur tolérée (epsilon dans notre cas). Enfin, après avoir mis en œuvre ce réseau, on a passé à la simulation sous environnement MATLAB.

Nous pouvons conclure que la fiabilité et les bonnes performances pour un réseau de neurones dépendent de sa structure et de son algorithme d'apprentissage utilisé toute en tenant compte du genre d'application auquel il est destiné : la reconstitution, la reconnaissance de formes, la classification, la prévision, la robotique, l'intelligence artificielle...etc.

Nous pouvons dire que le réseau développé dans ce présent travail, répond d'une manière approximative (manque de précision remarquable) aux besoins auquel il a été destiné. Cependant, il nous a permis de reconstruire quatre géométries différentes. Mais, nous pouvons dire tout de même que les résultats obtenus sont jugés acceptables et nous permettent d'envisager le traitement de problèmes divers dans la reconstitution de défauts et même dans l'évaluation non destructive (END).

Bien que beaucoup de travaux aient été réalisés dans ce domaine, la reconstitution de la forme réelle du défaut reste un défi et un axe de recherche très privilégiée des chercheurs. Nous souhaitons que ce modeste travail puisse servir aux promotions futures.

En guise de perspectives, il est envisageable de construire un réseau de neurones (PMC) utilisant plusieurs couches (cachées et de sorties) afin d'avoir un large spectre d'applications pour le traitement des problèmes 2D et 3D qui sont beaucoup plus complexes.

Bibliographie

- [1] **C.ZORNI**, « Contrôle non destructif par courants de Foucault de milieux ferromagnétiques : de l'expérience au modèle d'interaction », Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud 11, 2012.
- [2] **O.FAUGEROU, S.GRIEU, A.TRAORE**, « Outils de l'intelligence artificielle appliquée », Technique de l'ingénieur, r1403, 2013.
- [3] **M.HAMEL**, « Etude et réalisation d'un dispositif de détection de défauts par méthodes électromagnétiques », Mémoire de Magister, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2012.
- [4] **C.RAVAT**, « Conception de multicapteurs à courants de Foucault et inversion des signaux associés pour le contrôler non destructif », Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud 11, 2008.
- [5] **J.DUMONT-FILLON**, « Contrôle Non Destructif (CND) », Technique de l'ingénieur, R1400, 10/01/1996.
- [6] **G.FOURNET**, « Electromagnétisme », Technique de l'ingénieur, D1020, 2003.
- [7] **A.ZAOUI**, « Contribution à la modélisation du CND par matrice de capteurs à courants de Foucault », Thèses de Doctorat en cotutelle, EMP Alger, Université de Nantes, 2008.
- [8] **B.RAMDANE**, « Contribution à la modélisation tridimensionnelles de la technique thermo-inductive de contrôle no destructif : Développement d'un outil de conception, d'analyse et d'aide à la décision », Thèse de Doctorat, Saint Nazaire, 2009.
- [9] **M.CHERFAOUI**, « Essais Non Destructifs », Technique de l'ingénieur, bm6450, 10/07/2006.
- [10] **N.OUKACINE**, «Utilisation des réseaux de neurones pour la reconstitution des défauts en évaluation non destructive », Mémoire de Magister, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2012.
- [11] **F.BOUALI**, « Utilisation d'une méthode semi-analytique pour l'étude du contrôle non destructif en régime pulsé », Mémoire de Magister, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2010.

- [12] **N.BENHADDA**, « Modélisation des capteurs inductifs à courant de Foucault », Mémoire de Magister, Université de Batna, 2006.
- [13] **W.SLIMANE**, « Conception d'un système multicapteurs à courant de Foucault pour le contrôle non destructif », Mémoire de Magister, Université de Batna, 2008.
- [14] **O.BENZAÏM**, « Technique multi port pour la conception et la réalisation de systèmes Micro-ondes dédiés à l'évaluation non destructive de matériaux », Thèse de Doctorat, Université de Lille 1, 2009.
- [15] **A.MARICANI**, « Electromagnétisme 1 », Edition Masson, 1996.
- [16] **M.CYROT, M.DECORPS, B.DIERY**, « Magnétisme : Fondement », EDP science 2000.
- [17] **E.DURAND**, « Magnétostatique », Université de Paris VI, 1969.
- [18] **P.LORRAIN, D.P.CORSON, F.LORRAIN**, « Electromagnetic field and waves, W.H. Freeman and Co. New York, 1988.
- [19] **R.PETIT**, « Ondes électromagnétiques », Edition Masson, Paris, 1989.
- [20] **J.P.FARROUX**, Electromagnétisme : « Magnétostatique », EDP science 2000.
- [21] **M.HULIN, J.P.MAURY**, « Les bases de l'électromagnétisme », Edition Dunod, 1991.
- [22] **A.V.VORST**, « Electromagnétisme, champs, forces et circuits », Université catholique de Lovin, 1983.
- [23] **H.DORDIER, D.OBERT**, « Phénomènes d'induction, Equations de Maxwell, Milieux diélectriques et aimantés », Edition Vuibert Supérieur, 1992.
- [24] **F.HOCINI**, « Association de la commande pour l'étude par EF des phénomènes magnéto-élastiques et vibratoires dans les systèmes Electrotechnique », Thèse de doctorat, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2013.
- [25] **B.MAUCHE**, «Elaboration de modèles couplés basés sur la modélisation de structures électromagnétiques. Applications à l'étude du contrôle non destructif par induction », Thèse de Doctorat, Université Ferhat Abbas, Sétif, 2008.

- [26] **M.FELIACHI**, « Electroaimants pour systèmes Electromagnétiques », Technique de l'ingénieur, d5350, 10/02/2003.
- [27] **E.AMZALLAG, N.PICOLLI**, «Electromagnétisme », Tome 3, Edition Ediscience, Paris, 1996.
- [28] **B.THIDE**, « Electromagnetic field theory », Edition Upsilon, Uppsala, 2001.
- [29] **F.THOLLON**, « Conception et optimisation de capteur à courant de Foucault pour la détection de défauts profonds dans des matériaux amagnétiques ». Thèse de doctorat, spécialité Génie électrique, école doctorale de LYON des sciences pour l'ingénieur électronique, électrotechnique, automatique, 1995.
- [30] **A.DICHE**, « Développement de modèles de transformations pour l'étude des capteurs à courant de Foucault ». Mémoire de Magister, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Avril 2003.
- [31] **M.BENSETTI**, « Etude et modélisation de capteur destinés au contrôle non destructif par courant de Foucault. Mise en œuvre de méthodes d'inversion », Thèse se Doctorat, Paris, 2004.
- [32] **H. MOHELLEBI**, « Cours de cinquième année Master II : Modélisation Numériques des Systèmes d'Entraînements Electriques (MEE₃₆), Année Universitaire 2014-2015.
- [33] **G.JINLIN**, « Modélisation et conception optimale d'un moteur linéaire à induction pour un pour traction ferroviaire », Thèse de Doctorat, Ecole centrale de Lille, 2011.
- [34] **A.KENNANE**, « Méthode des éléments finis », Office des publications universitaire (OPU), 1995.
- [35] **A. ABOU**, « Contrôle non destructif par courant de Foucault, étude et réalisation d'un capteur inductif », Mémoire de Magister, Université de Batna, 2006.
- [36] **O.BENEZAIM**, « Technique multi port pour la conception et la réalisation de systèmes Micro-ondes dédiés à l'évaluation non destructive de matériaux », Thèse de Doctorat, Université de Lille 1, 2009.
- [37] **M. BERKANE**, « Estimation et analyse de mouvement par approches neuronales »Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2010.

- [38] **G.DREYFUS, J.M.MARTINEZ, M.SAMUELIDES, M.B.GORDON, F.BADRAN, S.THIRIA, L.HERAULT**, « Réseaux de Neurones : Méthodologie et Application », Edition EYROLLES, 2004.
- [39] **C.TOUZET**, « Les réseaux de neurones artificiels, introduction au connexionnisme, Cours, Exercices et Travaux pratiques » Juillet 1992.
- [40] **G. DEBBACHE**, « Contribution à la commande neuronale adaptative des systèmes non linéaires incertains » Thèse de Doctorat, Université MENTOURI de Constantine, 2011.
- [41] **L.PERSONNAZ, I.RIVALS** « Réseaux de neurones formels pour la modélisation, la commande et la classification », CNRS Editions, Paris, 2003.
- [42] **G.PETITJEAN**, « Introduction aux réseaux de neurones ».
- [43] **I.RIVALS**, « Les réseaux de neurones formels pour le pilotage de robots mobiles », Laboratoire d'Electronique de l'ESPCI (Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles), FLUX, revue de l'association amicale Les Ingénieurs SUPELEC : la robotique mobile ; la fonction achats-logistique, No 178, septembre-octobre 1996, ISSN 0766-3536.
- [44] **L.OUKHELLOU**, « Paramétrisation et classification de signaux en contrôle non destructif. Application à la reconnaissance des défauts de rails par courants de Foucault », Thèse de Doctorat, Université Paris 11 Orsay, 1997.