

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU
FACULTÉ DE SCIENCES - DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE MASTER DE
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Option : Processus Aléatoires et
Statistique de la Décision

Chaînes de Markov et Itération de
fonctions aléatoires

présenté par :

AREZKI OUERDIA

sous la direction de :

Mr MOHAND AREZKI BOUDIBA,

le ../../2013, devant le Jury:

FELLAG HOCINE, Pr, U.M.M.T.O, Président;
BOUDIBA MOHAND AREZKI, MC, U.M.M.T.O, Rapporteur;
HAMADOUCHE DJAMEL, Pr, U.M.M.T.O, Examineur;

Remerciements

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Fellag Hocine, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury.

Je remercie également Monsieur Hamadouche Djamel pour avoir accepté de lire ce mémoire et de faire partie du jury.

Je présente mes sincères remerciements à mon directeur de mémoire, Monsieur Boudiba Mohand Arezki, pour m'avoir proposer ce thème, pour ses orientations et son immense disponibilité qui m'ont permis de mener mon travail à bien.

Enfin, J'exprime mes remerciements à tous ce qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicaces :

Je dédie ce travail à :

Mes très chers parents pour leurs sacrifices et leur soutien moral tout au long de mon cursus, ma chère maman qui ma tant aimée et conseillée, mon père qui ma encouragé.

Mes deux soeurs lynda, hasni et mes deux frères remdane et hmed et à toute ma famille.

Tous mes camarades de la section Mathématiques.

Table des matières

Introduction	5
1 Chaînes de Markov et Noyaux de transition	9
1.1 Propriétés des noyaux de transition	9
1.1.1 Exemples de noyaux de transition	22
2 La chaîne de Markov $X_n^x = F_n(X_{n-1}^x)$ avec $F_n \in \{\varphi, \psi\}$ équiprobables	29
2.1 Noyau de transition	29
2.2 Application	32
3 Comportement asymptotique des chaînes de Markov itératives	35
3.1 Cas où $(X_n^x)_n$ admet une limite p.s	35
3.2 Convergence faible de mesures	36
3.3 Mesure stationnaire pour une chaîne de Markov	38
3.4 Mesure stationnaire pour une chaîne itérative dans le cas contractant	39
3.5 Mesure stationnaire dans le cas contractant en moyenne	43
Conclusion	48

Introduction

Nous nous intéressons aux chaînes de Markov itératives *i.e.* construites par itérations de fonctions aléatoires. Plus exactement, soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et $(F_n)_n$ une suite de fonctions aléatoires à valeurs dans E indépendantes et identiquement distribuées et soit X_0 une variable aléatoire à valeurs dans E indépendante des F_n . Pour simplifier soit $x \in E$ et $X_0 = x$, considérons alors la chaîne de Markov $(X_n^x)_n$ définie par $X_0 = x$ et pour tout $n > 0$:

$$X_n^x = F_n \circ \dots \circ F_1(x).$$

Notre étude se restreint à expliciter les conditions dans lesquelles la chaîne de Markov $(X_n^x)_n$ admet une limite éventuelle ou admet une mesure stationnaire unique. En fait, on s'intéresse à la caractérisation du comportement limite du processus $(X_n^x)_n$. Ce type de chaînes de Markov est souvent désigné dans la littérature comme des "Iterated random functions systems".

Souvent les F_n sont spécialisées sur le modèle $F_n = f_{Y_n}$ avec $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées à valeurs dans E et $x \mapsto f_y(x)$ est une fonction de E dans, et $y \in E$. Les chaînes de Markov de ce type sont largement étudiées, cela s'explique par le fait qu'elles constituent un modèle d'étude pour de nombreux phénomènes, en particulier, en dynamique des populations, algorithmes aléatoires et algorithmes de simulation exacte (Cf. [6], [3], [4], [10], [11], [1]...)

Notre travail est une synthèse de quelques avancées de la théorie générale, en particulier les travaux (Cf. [3], [2]). Dans le chapitre I, nous faisons quelques rappels et mise au point sur les chaînes de Markov et les marches aléatoires. Dans le Chapitre II, nous traitons un cas d'espèce de chaîne itérative, Dans le chapitre III, nous synthétisons les conditions nécessaires pour

l'existence et l'unicité d'une mesure stationnaire et enfin nous terminons par une conclusion et les perspectives ouvertes par ce travail.

Chapitre 1

Chaînes de Markov et Noyaux de transition

1.1 Propriétés des noyaux de transition

Nous faisons une synthèse sur les noyaux de transition et les chaînes de Markov à partir de (Cf. [5], [8]).

Définition 1. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et soit $b\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions bornées et mesurables sur E et $b\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions positives, bornées et mesurables sur E . Une application

$$\mathbb{P} : E \times \mathcal{E} \longrightarrow [0, 1]$$

est un noyau de transition sur E si :

- Pour tout $x \in E$, l'application $A \mapsto \varphi_x(A) = \mathbb{P}(x, A)$ est une mesure probabilité sur $(E, \mathcal{E})$.
- Pour tout $A \in \mathcal{E}$, l'application $x \mapsto \varphi_A(x) = \mathbb{P}(x, A)$ est une fonction mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $([0, 1], \mathcal{B}_{[0, 1]})$.

Proposition 1. Si f est une fonction de E dans $\mathbb{R}$, telle que $f \in b\mathcal{E}_+$ et $\mathbb{P}$ est un noyau de transition, alors la fonction $\mathbb{P}f$ de E dans $\mathbb{R}$ définie par la formule :

$$\mathbb{P}f(x) = \int_E \mathbb{P}(x, dy) f(y) = \langle \mathbb{P}(x, \cdot), f \rangle, \forall x \in E$$

est aussi dans $b\mathcal{E}_+$.

Démonstration.

1 : Montrons que $\forall x, \mathbb{P}f(x)$ est positive, on a f positive et $\mathbb{P}(x, dy)$ est une mesure positive pour x fixé, alors :

$$\int_E f(y) \mathbb{P}(x, dy) \geq 0.$$

2 : Montrons que $\forall x, \mathbb{P}f(x)$ est bornée.
On a f bornée $\Rightarrow \exists M > 0$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad |f(x)| \leq M$$

Donc

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}f(x)| &= \left| \int_E f(y) \mathbb{P}(x, dy) \right| \\ &\leq \int_E |f(y)| \mathbb{P}(x, dy) \\ &\leq M \int_E \mathbb{P}(x, dy) = M \end{aligned}$$

car

$$\int_E \mathbb{P}(x, dy) = 1.$$

3 : Montrons que $\mathbb{P}f$ est une fonction mesurable.

• Cas où $f = \mathbb{I}_A(x)$, $A \in \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\mathbb{I}_A(x) &= \int_E \mathbb{I}_A(y) \mathbb{P}(x, dy) \\ &= \int_A \mathbb{P}(x, dy) \\ &= \mathbb{P}(x, A) \end{aligned}$$

Donc si $f = \mathbb{I}_A(x)$, $A \in \mathcal{E}$

$$\mathbb{P}f(x) = \mathbb{P}(x, A).$$

et par définition de $\mathbb{P}$, $x \rightarrow \mathbb{P}(x, A)$ est mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $([0, 1], \mathcal{B}_{[0, 1]})$ pour tout A dans $\mathcal{E}$ fixé

• Cas où f est une fonction simple *i.e.* $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}$, tel que $\forall i, A_i \in \mathcal{E}$, les A_i sont disjoints et α_i un nombre réel pour tout $i = 1, \dots, n$

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}f(x) &= \int_E \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(y) \mathbb{P}(x, dy) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_E \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(y) \mathbb{P}(x, dy) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{P}(x, A_i). \end{aligned}$$

par suite $x \rightarrow \mathbb{P}f(x)$ est une fonction mesurable comme somme finie de fonctions mesurables.

• Cas général: Si f fonction bornée et mesurable alors f est une limite d'une suite croissante de fonctions simples $(f_n)_n$.

i.e. $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}f(x) &= \mathbb{P} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \\ &= \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) \mathbb{P}(x, dy) \end{aligned}$$

par convergence monotone on a :

$$\int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) \mathbb{P}(x, dy) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(y) \mathbb{P}(x, dy)$$

Donc

$$\mathbb{P}f(x) = \mathbb{P} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}f_n(x)$$

Et comme $\mathbb{P}f_n(x)$ est mesurable d'après le deuxième cas, il résulte que $\mathbb{P}f(x)$ est mesurable comme limite simple d'une suite de fonctions mesurables.

Il reste à établir la validité du passage à la limite par convergence monotone, on a $\forall n, f_n \leq f$ et $\exists M$ tel que $|f| \leq M$

Donc

$$\forall n \quad |f_n| \leq M.$$

par suite

$$| \int_E f_n(y) \mathbb{P}(x, dy) | \leq M.$$

Alors

$$\int_E | \mathbb{P} f_n(x) | \leq M.$$

(f_n) est une suite croissante vers f sur E . $\square$

Proposition 2. Si ν est une mesure sur $(E, \mathcal{E})$ et si on définit $\nu\mathbb{P}$ sur $(E, \mathcal{E})$ par :

$$\forall A \in \mathcal{E}, \nu\mathbb{P}(A) = \int_E \nu(dx) \mathbb{P}(x, A)$$

alors $\nu\mathbb{P}$ est une mesure sur $(E, \mathcal{E})$.

Proposition 3. Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux noyaux de transition sur $(E, \mathcal{E})$, leur produit $\mathbb{P}\mathbb{Q}$ défini par :

$$\mathbb{P}\mathbb{Q}(x, A) = \int_{y \in E} \mathbb{P}(x, dy) \mathbb{Q}(y, A) \quad \forall x \in E, \forall A \in \mathcal{E}$$

est un nouveau noyau de transition sur $(E, \mathcal{E})$.

Démonstration. $\mathbb{P}\mathbb{Q}$ est un noyau de transition s'il satisfait les conditions de la définition :

Pour tout A fixé, l'application $x \mapsto f(x) = \mathbb{P}(x, A)$ est une fonction mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1])$, par définition de $\mathbb{P}$.

Et $\mathbb{Q}$ est un noyau de transition alors d'après la proposition (1) la fonction $\mathbb{Q}f(x) = \mathbb{Q}\mathbb{P}(x, A)$ est mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $([0, 1], \mathcal{B}_{[0, 1]})$.

- Alors, pour tout $A \in \mathcal{E}$, l'application $x \mapsto \mathbb{P}\mathbb{Q}(x, A)$ est une fonction mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $([0, 1], \mathcal{B}_{[0, 1]})$. (*)

Pour tout x fixé dans E , l'application $A \mapsto \varphi_x(A) = \mathbb{P}(x, A)$ est une mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$ par définition de $\mathbb{P}$.

Et $\mathbb{Q}$ est un noyau de transition alors d'après la proposition (2), on a pour tout $A \in \mathcal{E}$ la fonction $\mathbb{Q}\mathbb{P}(x, A)$ est une mesure sur $(E, \mathcal{E})$. (**)

D'après (*) et (**) on déduit que $\mathbb{P}\mathbb{Q}$ est un noyau de transition.

□

Remarque 1. *La composition de deux noyaux de transition est une opération associative.*

On notera $\mathbb{P}^n$ le noyau de transition obtenu en effectuant n produits de $\mathbb{P}$ avec lui même.

Proposition 4. *Si $\mathbb{P}$ est un noyau de transition sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, alors pour tout $n \geq 1$*

$$\mathbb{P}^{n+1}(x, A) = \int_{y \in E} \mathbb{P}(x, dy) \mathbb{P}^n(y, A), \quad \forall x \in E, \forall A \in \mathcal{E}.$$

Démonstration. (Par récurrence)

Pour $n \geq 1$, on montre que

$$\mathbb{P}^{n+1}(x, A) = \int_{y \in E} \mathbb{P}(x, dy) \mathbb{P}^n(y, A), \quad \forall x \in E, \forall A \in \mathcal{E}. \quad (1)$$

Pour $n = 1$

$$\mathbb{P}^2(x, A) = \mathbb{P} \cdot \mathbb{P}(x, A) = \int_{y \in E} \mathbb{P}(x, dy) \mathbb{P}(y, A), \quad \forall x \in E, \forall A \in \mathcal{E}.$$

Par définition de composition de deux noyaux de transition, (1) est vérifiée pour $n = 1$.

Pour $n = 2$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^3 &= \mathbb{P} \cdot \mathbb{P} \cdot \mathbb{P} = \mathbb{P}^2 \cdot \mathbb{P} \\ &= \mathbb{P} \cdot \mathbb{P}^2 \quad (\text{Par associativité}) \end{aligned}$$

D'après la proposition (3), $\mathbb{P}^2$ est un noyau de transition sur $(E, \mathcal{E})$

$$\mathbb{P} \cdot \mathbb{P}^2(x, A) = \int_{y \in E} \mathbb{P}(x, dy) \mathbb{P}^2(y, A), \quad \forall x \in E, \forall A \in \mathcal{E}.$$

Donc, (1) est vérifiée pour $n = 2$

▪ Hypothèse de reccurence : on suppose que (1) est vérifiée pour n
Montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{n+1} &= \overbrace{\mathbb{P} \cdot \mathbb{P} \dots \mathbb{P}}^{n+1 \text{ fois}} \\ &= \mathbb{P}^n \cdot \mathbb{P} \\ &= \mathbb{P} \cdot \mathbb{P}^n \quad (\text{Par associativité})\end{aligned}$$

$$\mathbb{P} \cdot \mathbb{P}^n = \int_{y \in E} \mathbb{P}(x, dy) \mathbb{P}^n(y, A), \quad \forall x \in E, \forall A \in \mathcal{E}.$$

Donc

$$\mathbb{P}^{n+1}(x, A) = \int_{y \in E} \mathbb{P}(x, dy) \mathbb{P}^n(y, A), \quad \forall x \in E, \forall A \in \mathcal{E}$$

□

Définition des chaînes de markov à espace des états E quelconque.

Définition 2. Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et μ une mesure de probabilité sur E , $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans E est une chaîne de Markov d'espace des états E de loi initiale $\mu = \mathcal{L}(X_0)$ si $\forall f$ une fonction $\mathcal{E}$ -mesurable et bornée sur E

$$\forall n > 0, \mathbb{E}[f(X_{n+1}) | X_n, \dots, X_1, X_0] = \mathbb{E}[f(X_{n+1}) | X_n] - p.s.$$

Cette définition peut être reformulée en termes de probabilité conditionnelle de la manière suivante :

Définition 3. Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans E , de loi initiale $\mu = \mathcal{L}(X_0)$, On dit que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov d'espace des états E si :

$$\forall A \in \mathcal{E}, \forall n > 0, P[X_{n+1} \in A | X_n, \dots, X_1, X_0] = P[X_{n+1} \in A | X_n] - p.s.$$

$$i.e \quad \forall A \in \mathcal{E}, \forall n > 0, P[X_{n+1} \in A | \sigma(X_n, \dots, X_1, X_0)] = P[X_{n+1} \in A | \sigma(X_n)] - p.s.$$

Le présent du processus est déterminé par les événements de la tribu engendrée par X_n , le passé est déterminé par les événements de $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_{n-1})$ et le futur est déterminé par les événements de la tribu engendrée par X_{n+1} .

Remarque 2. La définition (2) est équivalente à la définition (3).

Démonstration. La première implication:

$(X_n)_n$ une chaîne de Markov de loi initiale μ , alors d'après La définition (2) on a :

$\forall f$ une fonction $\mathcal{E}$ -mesurable et bornée sur E :

$$\forall n > 0, \mathbb{E}[f(X_{n+1}) | X_n, \dots, X_1, X_0] = \mathbb{E}[f(X_{n+1}) | X_n].$$

Nous avons $\forall A \in \mathcal{E}$, $\mathbb{I}_A$ mesurable est bornée, donc pour $f = \mathbb{I}_A$, avec $\forall A \in \mathcal{E}$:

$$\mathbb{E}[\mathbb{I}_A(X_{n+1}) | X_n, \dots, X_1, X_0] = \mathbb{E}[\mathbb{I}_A(X_{n+1}) | X_n] \quad \forall n > 0.$$

$$i.e. \quad \forall n \geq 0, P[X_{n+1} \in A | X_n, \dots, X_1, X_0] = P[X_{n+1} \in A | X_n] - p.s. \quad \forall n > 0.$$

par définition de la probabilité conditionnelle.

La deuxième implication:

$(X_n)_n$ une chaîne de Markov de loi initiale μ , alors d'après La définition (3) on a :

$$\forall A \in \mathcal{E}, \forall n \geq 0, P[X_{n+1} \in A | X_n, \dots, X_1, X_0] = P[X_{n+1} \in A | X_n] - p.s.$$

i.e.

$$\mathbb{E}[\mathbb{I}_A(X_{n+1}) | X_n, \dots, X_1, X_0] = \mathbb{E}[\mathbb{I}_A(X_{n+1}) | X_n] \quad \forall n > 0.$$

par définition de la probabilité conditionnelle.

Si f une fonction mesurable est bornée, alors f est une limite d'une suite croissante de fonctions élémentaires $(f_k)_k$

$$i.e. \quad f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$$

avec:

$$f_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

où α_i est un nombre réel pour tout $i = 1, \dots, k$ et $\forall i, A_i \in \mathcal{E}$.

On a

$$\mathbb{E}[\mathbb{I}_{A_i}(X_{n+1})|X_n, \dots, X_1, X_0] = \mathbb{E}[\mathbb{I}_{A_i}(X_{n+1})|X_n], \forall i = 1, \dots, k \text{ Pour tout } k \text{ de } \mathbb{N}$$

D'où

$$\alpha_i \mathbb{E}[\mathbb{I}_{A_i}(X_{n+1})|X_n, \dots, X_1, X_0] = \alpha_i \mathbb{E}[\mathbb{I}_{A_i}(X_{n+1})|X_n]$$

i.e.

$$\mathbb{E}[\alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(X_{n+1})|X_n, \dots, X_1, X_0] = \mathbb{E}[\alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(X_{n+1})|X_n]$$

D'où

$$\sum_{i=1}^k \mathbb{E}[\alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(X_{n+1})|X_n, \dots, X_1, X_0] = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}[\alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(X_{n+1})|X_n]$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(X_{n+1})|X_n, \dots, X_1, X_0\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(X_{n+1})|X_n\right]$$

Alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(X_{n+1})|X_n, \dots, X_1, X_0\right] = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(X_{n+1})|X_n\right]$$

i.e.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f_k(X_{n+1})|X_n, \dots, X_1, X_0] = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f_k(X_{n+1})|X_n]$$

Par convergence monotone, on a

$$\mathbb{E}\left[\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(X_{n+1})|X_n, \dots, X_1, X_0\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(X_{n+1})|X_n, \dots, X_1, X_0\right]$$

- On établit la validité du passage à la limite par convergence monotone

D'une part nous avons

$$f_k \in \mathbb{L}^1, \quad \forall k$$

$(f_k)_k$ est une suite croissante vers f

f est bornée, i.e $\exists M$ tel que $f(X) \leq M, \forall X$. Et comme $f_k \nearrow f$
Alors, $\forall k, \int_E f_k(X_{n+1})dP \leq \int_E f(X_{n+1})dP \leq M \int_E dP = M$,
Donc par la convergence monotone, nous avons

$$\lim_k \int_E f_k(X_{n+1})dP = \int_E \lim_k f_k(X_{n+1})dP$$

D'autre part, nous avons

$$\mathbb{E}[f_k(X_{n+1})|X_n] \in \mathbb{L}^1, \quad \forall k$$

$(\mathbb{E}[f_k(X_{n+1})|X_n])_k$ est une suite croissante

$\exists M$ tel que $\forall A \in \sigma(X_n)$

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{E}[f_k(X_{n+1})|X_n]dP &= \int_A f_k(X_{n+1})dP \quad \text{par définition de l'espérance conditionnelle} \\ &\leq \int_A f(X_{n+1})dP \quad \text{Par hypothèse, } f_k \nearrow f \\ &\leq M \int_A dP = M \cdot P(A) \leq M \cdot 1 = M \end{aligned}$$

Donc, par convergence monotone nous avons

$$\lim_k \int_E \mathbb{E}[f_k(X_{n+1})|X_n] = \int_E \lim_k \mathbb{E}[f_k(X_{n+1})|X_n]$$

On a alors pour tout k et pour tout $A \in \sigma(X_n)$

$$\begin{aligned} \int_A \lim_k \mathbb{E}[f_k(X_{n+1})|X_n] &= \lim_k \int_A \mathbb{E}[f_k(X_{n+1})|X_n] \\ &= \lim_k \int_A f_k(X_{n+1})dP \\ &= \int_A \mathbb{E}[\lim_k f_k(X_{n+1})|X_n]dP \quad \text{d'après la définition de l'espérance conditionnelle} \end{aligned}$$

Et par unicité presque sûre de l'espérance conditionnelle, nous avons

$$\mathbb{E}[\lim_k f_k(X_{n+1})|X_n] = \lim_k \mathbb{E}[f_k(X_{n+1})|X_n]$$

D'une manière analogue, on peut montrer que

$$\mathbb{E}[\lim_k f_k(X_{n+1})|X_0, \dots, X_n] = \lim_k \mathbb{E}[f_k(X_{n+1})|X_0, \dots, X_n]$$

Par conséquent

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_0, \dots, X_n] = \mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_n]$$

□

Proposition 5. *Si $\mathbb{P}$ un noyau de transition sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ associé à la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$, alors si f est une fonction positive et mesurable*

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{P}^n f(x) = \int_{y \in E} f(y) \mathbb{P}^n(x, dy), \quad \forall x \in E$$

Proposition 6. *Soit $\mathbb{P}$ un noyau de transition sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ associé à la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ de loi initiale μ , alors si $f \in b\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ Pour deux entiers m, n tel que $m < n$*

$$\mathbb{E}[f(X_m)|\mathcal{F}_n] = \mathbb{P}^{n-m} f(X_m) - p.s.$$

Proposition 7. *Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, $(X_n)_n$ une chaîne de Markov sur $(E, \mathcal{E})$, de noyau de transition $\mathbb{P}$ et de loi initiale $\mathcal{L}(X_0) = \pi$, alors $\forall A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$*

$$P[X_n \in A_n, X_{n-1} \in A_{n-1}, \dots, X_0 \in A_0] = \int_{A_{n-1}} \int_{A_{n-2}} \dots \int_{A_0} \mathbb{P}^{n-1}(A_n, x_{n-1}) \mathbb{P}^{n-2}(dx_{n-1}, x_{n-2}) \dots \mathbb{P}^1(dx_1, x_0) \pi dx_0.$$

Proposition 8. *Si $(X_n)_n$ une chaîne de Markov sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, de noyau de transition $\mathbb{P}$ et de loi initiale μ , alors $\mathbb{P}^n(x, A)$ s'interprète comme la probabilité de l'événement $\{X_n \in A\}$ conditionnelle à $\{X_0 = x\}$ i.e.*

$$\mathbb{P}^n(x, A) = P[X_n \in A | X_0 = x].$$

Démonstration. (Par récurrence).

Nous avons $\mathbb{P}^1(x, A) = \mathbb{P}(x, A)$, tel que les $\mathbb{P}(x, A)$ sont les probabilités de transition (de x vers A).

-Pour $n = 1$,
Par définition de la probabilité conditionnelle, nous avons

$$\forall A \in \mathcal{E}, P[X_1 \in A | X_0]$$

est l'unique variable aléatoire qui vérifie

$$\forall B \in \mathcal{E}, P[X_1 \in A, X_0 \in B] = \int_{\{X_0 \in B\}} P[X_1 \in A | X_0] dP$$

Cette variable aléatoire est $\sigma(X_0)$ -mesurable, il existe une fonction $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow [0, 1]$ mesurable tel que

$$\varphi(X_0) = P[X_1 \in A | X_0]$$

$$\begin{aligned} \forall B \in \mathcal{E}, P[X_1 \in A, X_0 \in B] &= \int_{\{X_0 \in B\}} P[X_1 \in A | X_0] dP \\ &= \int_{\{X_0 \in B\}} \varphi(X_0) dP \\ &= \int_B P[X_1 \in A | X_0 = x] dP \\ &= \int_B \varphi(x) \pi(dx) \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} P[X_1 \in A, X_0 \in A_0] &= \int_B \varphi(x) P[X_0 \in dx] \\ &= \int_B \mathbb{P}^1(x, A) \pi(dx) \end{aligned}$$

Par unicité de la probabilité conditionnelle, on a $\varphi(x) = \mathbb{P}^1(x, A)$

- Pour $n = 2$, on doit montrer que : $\mathbb{P}^2(x, A) = P[X_2 \in A | X_0 = x]$

Par définition de la probabilité conditionnelle, nous avons :

$$\forall A \in \mathcal{E}, \varphi(x) = P[X_2 \in A | X_0 = x]$$

$P[X_2 \in A \mid X_0 = x]$ est l'unique variable aléatoire qui vérifie :

$$\begin{aligned} \forall B \in \mathcal{E}, \quad P[X_2 \in A, X_0 \in B] &= \int_{\{X_0 \in B\}} P[X_2 \in A \mid X_0] dP \\ &= \int_B P[X_2 \in A \mid X_0 = x] dP \\ &= \int_B \varphi(x) P[X_0 \in dx] \\ &= \int_B \varphi(x) \mu(dx_0) \end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} P[X_2 \in A, X_0 \in B] &= \int_E \int_B \mathbb{P}(x, dy) \mathbb{P}(y, A) \mu(dx_0) \\ &= \int_B \mu(dx_0) \int_E \mathbb{P}(x, dy) \mathbb{P}(y, A) \\ &= \int_B \mu(dx_0) \mathbb{P}^2(x, A) \end{aligned}$$

Donc, par unicité de la probabilité conditionnelle : Alors $\varphi(x) = \mathbb{P}^2(x, A)$

$$\mathbb{P}^2(x, A) = P[X_2 \in A \mid X_0 = x]$$

• Hypothèse de récurrence : supposons que c'est vrai pour n
i.e. $\mathbb{P}^n(x, A) = P[X_n \in A \mid X_0 = x]$ de la même manière on montre que ca
reste vrai pour $n + 1$
c'est à dire $\mathbb{P}^n(x, A) = P[X_n \in A \mid X_0 = x]$

□

Définition 4. Une mesure π sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ est une mesure stationnaire pour la chaîne de Markov $(X_n)_n$ de noyau de transition $\mathbb{P}$, si

$$\forall A \in \mathcal{E}, \pi(A) = \int_E \mathbb{P}(x, A) \pi(dx).$$

Proposition 9. Si π est une mesure stationnaire pour la chaîne de Markov $(X_n)_n$ de noyau de transition $\mathbb{P}$, alors π vérifie

$$\forall A \in \mathcal{E}, \pi(A) = \int_E \mathbb{P}^n(x, A) \pi(dx), \forall n.$$

Démonstration.

Soit π la loi initiale de la chaîne de Markov $(X_n)_n$,

$$\begin{aligned}
\pi(A) &= \int_E \pi(dw) \mathbb{P}(w, A) \\
&= \int_E \left[\int_E \pi(dx) \mathbb{P}(x, dw) \right] \mathbb{P}(w, A) \\
&= \int_E \pi(dx) \int_E \mathbb{P}(x, dw) \mathbb{P}(w, A) \\
&= \int_E \pi(dx) \mathbb{P}^2(x, A) \\
&\vdots \\
&= \int_E \pi(dx) \mathbb{P}^n(x, A) = P(X_n \in A) \quad \text{pour } n > 0, A \in \mathcal{E}
\end{aligned}$$

Donc, pour tout n

$$P[X_n \in A] = \pi(A), \forall A \in \mathcal{E}$$

□

Ce que signifie que si π est la loi de X_0 , c'est aussi la loi de X_1 . Remarquons que si cela est le cas alors π est la loi de $X_n, \forall n$.

Définition 5. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable Une chaîne de Markov d'espace des états E , de noyau de transition $\mathbb{P}$ vérifie la condition d'équilibre (detailed balance condition) s'il existe une fonction π tel que

$$\mathbb{P}(y, x)\pi(y) = \mathbb{P}(x, y)\pi(x), \quad \forall x, y \in E.$$

Proposition 10. Si la chaîne de Markov vérifie la condition d'équilibre alors π est une loi stationnaire.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\int_E \pi(y) \mathbb{P}(y, B) dy &= \int_E \pi(y) \left[\int_B \mathbb{P}(y, x) dx \right] dy \\
&= \int_E \int_B \pi(y) \mathbb{P}(y, x) dx dy \\
&= \int_E \int_B \pi(x) \mathbb{P}(x, y) dx dy \\
&= \int_B \pi(x) \left[\int_E \mathbb{P}(x, y) dy \right] dx \\
&= \int_B \pi(x) dx \\
&= \pi(B)
\end{aligned}$$

□

C'est une condition suffisante mais pas nécessaire pour que π soit une loi stationnaire pour la chaîne de Markov.

1.1.1 Exemples de noyaux de transition

Exemple 1 : La marche aléatoire sur un groupe

Proposition 11. [16]

Soient $(\mathbf{G}, \cdot)$ un groupe, X_0 une variable aléatoire et $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{G}$ indépendantes de X_0 et de même loi μ et $\mathcal{B}_G$ les Boréliens de $\mathbf{G}$, si $(X_n)_n$ est la suite de variables aléatoires définies par X_0 et pour $n > 0$, $X_n = Y_n \cdot Y_{n-1} \cdot \dots \cdot Y_1$, alors $(X_n)_n$ est une marche aléatoire à gauche sur $\mathbf{G}$ de noyau de transition $\mathbb{P}$ défini par :

$$\forall g \in \mathbf{G}, \forall A \in \mathcal{B}_G, \mathbb{P}(g, A) = \mu(A.g^{-1}).$$

Démonstration.

On suppose que $\mathbf{G}$ est un groupe topologique par définition de la probabilité conditionnelle nous avons :

$$\forall A \in \mathcal{B}_G, P[X_{n+1} \in A \mid X_n]$$

est l'unique variable aléatoire $\sigma(X_n)$ -mesurable qui vérifie :

$$\forall B \in \mathcal{B}_G, P[X_{n+1} \in A, X_n \in B] = \int_{\{X_n \in B\}} P[X_{n+1} \in A | X_n] dP$$

Cette variable aléatoire étant $\sigma(X_n)$ -mesurable, il existe une fonction

$\varphi : G \rightarrow [0, 1]$ mesurable

Tel que

$$P[X_{n+1} \in A | X_n] = \varphi(X_n).$$

Donc avec cette notation, pour A et $B \in \mathcal{B}_G$:

$$\begin{aligned} P[X_{n+1} \in A, X_n \in B] &= \int_{\{X_n \in B\}} \varphi(X_n) dP \\ &= \int_{\{X_n \in B\}} \mathbb{E}[\mathbb{I}_A(X_{n+1}) | X_n] dP \\ &= \int_{\{X_n \in B\}} \mathbb{I}_A(X_{n+1}) dP \\ &= \int_{\{X_n \in B\}} \mathbb{I}_A(Y_{n+1} \cdot X_n) dP \end{aligned}$$

Nous avons

$$\varphi(X_n) = P[X_{n+1} \in A | X_n = x].$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_{\{X_n \in B\}} P[X_{n+1} \in A | X_n \in B] dP &= \int \int_B \varphi(x) P[X_n \in dx] \\ &= \int \int_B \mathbb{I}_A(y \cdot x) P[X_n \in dx, Y_{n+1} \in dy] \end{aligned}$$

Par indépendance de Y_{n+1} et X_n

$$\int \int_B \mathbb{I}_A(y \cdot x) P[X_n \in dx, Y_{n+1} \in dy] = \int \int_B \mathbb{I}_A(y \cdot x) P[X_n \in dx] \cdot P[Y_{n+1} \in dy]$$

En appliquant le théorème de Fubini, nous aurons :

$$\begin{aligned}
 \int \int_B \mathbb{I}_A(y \cdot x) P[X_n \in dx] \cdot P[Y_{n+1} \in dy] &= \int_B P[X_n \in dx] \int_B \mathbb{I}_{A \cdot x^{-1}}(y) P[Y_{n+1} \in dy] \\
 &= \int_B P[X_n \in dx] \mu(A \cdot x^{-1}) \\
 &= \int_B P[X_n \in dx] P[Y_{n+1} \in A \cdot x^{-1}]
 \end{aligned}$$

Par unicité de $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = P[Y_{n+1} \in (A \cdot x^{-1})]$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}(A, x) = P[Y_{n+1} \in (A \cdot x^{-1})].$$

□

Dans le cas où $G = \mathbb{R}$, on a la marche aléatoire sur $\mathbb{R}$ et $(\mathbb{R}, +)$ un groupe additif du proposition

Proposition 12. *Soit X_0 une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$, $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$ indépendantes de X_0 et de même loi μ ,
tel que si $A \in \mathcal{B}_R$, $\mu(A) = \mathbb{P}[Y_1 \in A]$ et $\forall n > 0$, $X_n = \sum_1^n Y_k$, alors $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{R}$, de noyau de transition $\mathbb{P}$ défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{B}_R$ par*

$$\mathbb{P}(A, x) = \mu(A - x)$$

Démonstration. Nous avons :

$$\forall A \in \mathcal{B}_R, \forall n, P[X_{n+1} \in A | X_n, X_{n-1}, \dots, X_0] = P[X_{n+1} \in A | X_n]$$

En effet, par définition de la probabilité conditionnelle,

$$\forall A_n, A_{n-1}, \dots, A_0, P[X_{n+1} \in A | X_n, X_{n-1}, \dots, X_0]$$

vérifie

$$\begin{aligned}
P[X_{n+1} \in A, X_n \in A_n, \dots, X_0 \in A_0] &= \int_{\{X_n \in A_n, \dots, X_0 \in A_0\}} P[X_{n+1} \in A \mid X_n, \dots, X_0] dP \\
&= \int_{\{X_n \in A_n, \dots, X_0 \in A_0\}} \mathbb{E}[\mathbb{I}_A(X_{n+1}) \mid X_n, \dots, X_0] dP \\
&= \int_{\{X_n \in A_n, \dots, X_0 \in A_0\}} \mathbb{I}_A(X_{n+1}) dP \\
&= \int_{\{X_n \in A_n, \dots, X_0 \in A_0\}} \mathbb{I}_A(Y_{n+1} + X_n) dP \\
&= \int_{\{X_n \in A_n, \dots, X_0 \in A_0\}} \mu(A - X_n) dP.
\end{aligned}$$

Soit $\phi(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0)$ une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$.
Donc si

$$\phi(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0) = P[X_{n+1} \in A \mid X_n, \dots, X_0]$$

Alors

$$\phi(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0) = \mu(A - X_n)\text{-p.s.}$$

Par unicité de la probabilité conditionnelle.

$$P[X_{n+1} \in A \mid X_n, X_{n-1}, \dots, X_0] = P[X_{n+1} \in A \mid X_n]$$

▪ Pour caractériser $(X_n)_n$, on a besoin de préciser le noyau de transition associé $\mathbb{P}$ qu'on définit par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A, x) &= P[Y_{n+1} \in A - x] \\
&= \mu(A - x)
\end{aligned}$$

Par définition de la probabilité conditionnelle nous avons :

$$\forall A \in \mathcal{B}_R, p[X_{n+1} \in A \mid X_n]$$

est l'unique variable aléatoire $\sigma(X_n)$ -mesurable qui vérifie :

$$\forall B \in \mathcal{B}_R, P[X_{n+1} \in A, X_n \in B] = \int_{\{X_n \in B\}} P[X_{n+1} \in A | X_n] dP$$

Il existe une fonction

$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ $\sigma(X_n)$ -mesurable, tel que

$$P[X_{n+1} \in A | X_n] = \varphi(X_n).$$

Donc, avec cette notation pour A et $B \in \mathcal{B}_R$:

$$\begin{aligned} P[X_{n+1} \in A, X_n \in B] &= \int_{\{X_n \in B\}} \varphi(X_n) dP \\ &= \int_{\{X_n \in B\}} \mathbb{E}[\mathbb{I}_A(X_{n+1}) | X_n] dP \\ &= \int_{\{X_n \in B\}} \mathbb{I}_A(X_{n+1}) dP \\ &= \int_{\{X_n \in B\}} \mathbb{I}_A(Y_{n+1} + X_n) dP \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\{X_n \in B\}} \varphi(X_n) dP &= \int_{\{X_n \in B\}} \mathbb{E}[\mathbb{I}_A(X_{n+1}) | X_n] dP \\ &= \int_{\{X_n \in B\}} \mathbb{I}_A(X_{n+1}) dP \\ &= \int_{\{X_n \in B\}} \mathbb{I}_A(X_n + Y_{n+1}) dP \\ &= \int_B \int \mathbb{I}_A(x + y) P[X_n \in dx, Y_{n+1} \in dy] \end{aligned}$$

Par indépendance de Y_{n+1} et X_n

$$\int_B \int \mathbb{I}_A(x + y) P[X_n \in dx, Y_{n+1} \in dy] = \int_B \int \mathbb{I}_A(x + y) p[X_n \in dx] P[Y_{n+1} \in dy]$$

En appliquant le théorème de Fubini

$$\int_B \int \mathbb{I}_A(x+y) p[X_n \in dx] P[Y_{n+1} \in dy] = \int_B P[X_n \in dx] \int \mathbb{I}_A(x+y) P[Y_{n+1} \in dy]$$

Si $\mu = \mathcal{L}(y), \forall n$

$$\begin{aligned} \int_B P[X_n \in dx] \int \mathbb{I}_A(x+y) P[Y_{n+1} \in dy] &= \int_B P[X_n \in dx] \int \mathbb{I}_A(x+y) \mu(dy) \\ &= \int_B P[X_n \in dx] \int \mathbb{I}_{A-x}(y) \mu(dy) \\ &= \int_B P[X_n \in dx] \mu(A-x) \\ &= \int_B P[Y_{n+1} \in A-x] P[X_n \in dx] \\ &= \int_{\{X_n \in B\}} P[Y_{n+1} \in A-X_n] P d(x). \end{aligned}$$

Par unicité de l'espérance conditionnelle on a :

$$\varphi(X_n) = P[Y_{n+1} \in A - X_n]$$

Donc

$$\mathbb{P}(A, x) = P[Y_{n+1} \in A - x].$$

Alors $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{R}$ de noyau de transition défini par $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{B}_R$ par $P(A, x) = \mu(A - x)$.

□

Chapitre 2

La chaîne de Markov

$X_n^x = F_n(X_{n-1}^x)$ avec $F_n \in \{\varphi, \psi\}$
équiprobables

2.1 Noyau de transition

Soient $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable, $(F, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi μ à valeurs dans F et X_0 une variable aléatoire à valeurs dans E indépendantes de $(Y_n)_n$. $(x, y) \mapsto f(x, y)$ une application mesurable de $(E \times F, \mathcal{B} \otimes \mathcal{F})$ dans $(E, \mathcal{B})$ i.e.

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{B}, \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$$

En particulier, pour y fixé, $x \mapsto f_y(x)$ est une application mesurable.

Considérons le processus défini par :
pour $x \in E$, $X_0 = x$ et pour tout $n > 0$, $X_{n+1}^x = f_{Y_{n+1}} \circ \dots \circ f_{Y_1}(x)$
Le processus défini par $X_{n+1}^x = f_{Y_{n+1}}(X_n^x)$ est une chaîne de Markov d'espace des états E , qui est par définition un système dynamique.

Proposition 1. *Avec ces données le processus $(X_n^x)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov d'espace des états E et de noyau de transition $\mathbb{P}$ tel que*

$$\mathbb{P}(x, A) = \mu\{y : f_y(x) \in A\}, \quad x \in E, A \in \mathcal{B}.$$

Démonstration.

Par définition de la probabilité conditionnelle $\forall A \in \mathcal{B}$, $P[X_{n+1} \in A | X_n]$ est l'unique variable aléatoire $\sigma(X_n)$ -mesurable qui vérifie :

$$\forall B \in \mathcal{B}, P[X_{n+1} \in A, X_n \in B] = \int_{\{X_n \in B\}} P[X_{n+1} \in A | X_n] dP$$

Cette variable aléatoire étant $\sigma(X_n)$ -mesurable, il existe une fonction $\varphi : E \rightarrow [0, 1]$ mesurable Tel que

$$P[X_{n+1} \in A | X_n] = \varphi(X_n).$$

Donc, avec cette notation, pour A et $B \in \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} P[X_{n+1} \in A, X_n \in B] &= \int_{\{X_n \in B\}} \varphi(X_n) dP \\ &= \int_{\{X_n \in B\}} \mathbb{E}[\mathbb{I}_A(X_{n+1}) | X_n] dP \\ &= \int_{\{X_n \in B\}} \mathbb{I}_A(X_{n+1}) dP \\ &= \int_{\{X_n \in B\}} \mathbb{I}_{\{X_{n+1} \in A\}}(w) dP \\ &= \int_{\{X_n \in B\}} \mathbb{I}_{\{f_{Y_{n+1}}(X_n) \in A\}}(w) dP \\ &= \int \int_B \mathbb{I}_{\{f_y(x) \in A\}} P[X_n \in dx, Y_{n+1} \in dy] dP \end{aligned}$$

Par indépendance de Y_{n+1} et X_n , nous avons

$$\int \int_B \mathbb{I}_{\{f_y(x) \in A\}} P[X_n \in dx, Y_{n+1} \in dy] dP = \int \int_B \mathbb{I}_{\{f_y(x) \in A\}} P[X_n \in dx] \cdot P[Y_{n+1} \in dy]$$

En appliquant le théorème de Fubini, nous aurons :

$$\begin{aligned}
\int \int_B \mathbb{I}_{\{f_y(x) \in A\}} P[X_n \in dx] \cdot P[Y_{n+1} \in dy] &= \int \int_B \mathbb{I}_{\{f_y(x) \in A\}} P[X_n \in dx] \mu(dy) \\
&= \int_B P[X_n \in dx] \int \mathbb{I}_{\{f_y(x) \in A\}} \mu(dy) \\
&= \int_B P[X_n \in dx] \mu\{y, f_y(x) \in A\}
\end{aligned}$$

Par unicité de φ

$$\mathbb{P}(x, A) = \mu\{y, f_y(x) \in A\}, \quad x \in E, A \in \mathcal{B}_E$$

Il reste à montrer que X_n^x vérifie la propriété de Markov *i.e.*

$$\forall B \in \mathcal{B}_E, \forall n, P[X_{n+1} \in B | X_n, X_{n-1}, \dots, X_0] = P[X_{n+1} \in B | X_n]$$

Calculons $P[X_{n+1} \in A | X_n, \dots, X_0], \forall n$

Par définition de la probabilité conditionnelle $P[X_{n+1} \in B | X_n, X_{n-1}, \dots, X_0]$ est l'unique variable aléatoire $\sigma[X_n, X_{n-1}, \dots, X_0]$ mesurable qui vérifie $\forall A_n, A_{n-1}, \dots, A_0 \in \mathcal{B}_E$.

$$\begin{aligned}
P[X_{n+1} \in B, X_n \in A_n, \dots, X_0 \in A_0] &= \int_{\{X_n \in A_n, \dots, X_0 \in A_0\}} P[X_{n+1} \in B | X_n, X_{n-1}, \dots, X_0] dP \\
&= \int_{\{X_n \in A_n, \dots, X_0 \in A_0\}} \mathbb{E}[\mathbb{I}_B(X_{n+1}) | X_n, X_{n-1}, \dots, X_0] dP \\
&= \int_{\{X_n \in A_n, \dots, X_0 \in A_0\}} \mathbb{I}_B(X_{n+1}) dP \\
&= \int_{\{X_n \in A_n, \dots, X_0 \in A_0\}} \mathbb{I}_{\{f_{Y_{n+1}}(X_n) \in B\}}(w) dP \\
&= \int_{\{X_n \in A_n, \dots, X_0 \in A_0\}} \mathbb{P}(B, X_n) dP
\end{aligned}$$

Donc si $\varphi(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0)$ est une fonction mesurable dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\varphi(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0) = P[X_{n+1} \in B | X_n, X_{n-1}, \dots, X_0]$$

Alors

$$\varphi(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0) = \mathbb{P}(B, X_n) \text{ p.s}$$

Par unicité de la probabilité conditionnelle

$$P[X_{n+1} \in B | X_n, X_{n-1}, \dots, X_0] = P[X_{n+1} \in B | X_n].$$

□

2.2 Application

Soit $S =]0, 1[$ et V une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$ et définissons les fonctions φ et ψ en posant pour $x \in]0, 1[$

$$\varphi(x) = Vx \text{ et } \psi(x) = x + V(1 - x)$$

Soit $E = \{\varphi, \psi\}$ et $(F_n)_n$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans E indépendantes identiquement distribuées de loi

$$P[F_n = \varphi] = P[F_n = \psi] = \frac{1}{2}, \forall n$$

Définissons le processus X_n^x en posant

$$X_0^x = x, x \in]0, 1[\text{ et } X_n^x = F_n(X_{n-1}^x), n > 0$$

Le processus X_n^x est une chaîne de Markov itérative.

Proposition 2. ([3])

$(X_n^x)_x$ est une chaîne de Markov de noyau de transition K qui a comme densité

$$K(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{x} \mathbb{I}_{]0, x[}(y) + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - x} \mathbb{I}_{]x, 1[}(y)$$

où

$$\mathbb{I}_A(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in A \\ 0 & \text{si } y \notin A \end{cases}$$

Nous avons supposé que la chaîne de Markov $(X_n^x)_n$ admet une mesure stationnaire. Dans le chapitre III, nous donnons une synthèse portant sur les

conditions d'existence d'une mesure stationnaire pour la chaîne de Markov itérative dans quelque cas.

Proposition 3. *Si la chaîne de Markov (X_n^x) à espace des états $S =]0, 1[$ admet une loi stationnaire π ayant une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0, 1[$ alors*

$$f(y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}}.$$

Démonstration. *On admet que la distribution a une densité $f(x)$*

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_0^1 K(x, y) f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_y^1 \frac{f(x)}{x} + \frac{1}{2} \int_0^y \frac{f(x)}{1-x} dx \end{aligned}$$

Par différenciation,

$$f'(y) = -\frac{1}{2} \frac{f(y)}{y} + \frac{1}{2} \frac{f(y)}{1-y} \quad \text{ou} \quad \frac{f'(y)}{f(y)} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} \right)$$

Alors

$$f(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{y(1-y)}}.$$

□

Chapitre 3

Comportement asymptotique des chaînes de Markov itératives

Nous précisons dans ce chapitre les méthodes d'étude du comportement limite d'une chaîne itérative. D'abord nous nous intéressons au cas où la chaîne de Markov admet une limite presque sûre, cela est rarement vérifié mais ça existe et si cette limite n'existe pas nous décrivons le cas où la chaîne de Markov admet une mesure stationnaire unique.

3.1 Cas où $(X_n^x)_n$ admet une limite p.s

Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes réelles identiquement distribuées et pour $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x, y) = f_y(x)$ une fonction réelle. Soit $(X_n)_n$ la chaîne de Markov définie sur $\mathbb{R}$ par X_0 une variable aléatoire donnée et $\forall n > 0$, $X_{n+1} = f_{Y_{n+1}} \circ X_n$.

Nous rassemblons ici quelques outils de base pour que la chaîne de Markov $(X_n^x)_n$ converge.

Dans le cas où $f_y(x) = y + g(x)$ pour $x, y \in \mathbb{R}$, nous avons la proposition suivante qui montre que dans certains cas la limite de $(X_n^x)_n$ existe.

Proposition 1. *Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées. S'il existe deux fonctions réelles k et g de la variable réelle x , k mesurable et g dérivable et de dérivé $g' < 1$ sur $\mathbb{R}$ tel que $f_y(x) = k(y) + g(x)$ pour x et $y \in \mathbb{R}$, alors le processus $(X_n^x)_n$ défini par*

$$X_0 = x, X_{n+1}^x = f_{Y_{n+1}}(X_n^x)$$

Converge en loi.

Démonstration. Définissons le processus $(H_n^x)_n$, pour $x \in \mathbb{R}$ en posant,

$$H_0^x = x, \text{ pour } n > 0, H_n^x = f_{Y_1} \circ f_{Y_2} \circ \cdots \circ f_{Y_n}$$

Remarquons que le processus $(H_n^x)_n$ n'est pas une chaîne de Markov en général. Si g est dérivable et de dérivée $g' < 1$, alors $(H_n^x)_n$ est une suite de Cauchy *p.s.* par suite $(H_n^x)_n$ converge *p.s.* il s'ensuit qu'elle converge en loi. comme les processus $(H_n^x)_n$ et $(X_n^x)_n$ sont de même loi. La proposition est donc établie. $\square$

3.2 Convergence faible de mesures

Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, $\mathcal{M}(E)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$. Nous avons besoin de la topologie de la convergence faible sur $\mathcal{M}(E)$. Soit $C_b(E)$ l'ensemble des fonctions continues et bornées sur E .

Définition 1. Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, $(\mu_n)_n$ une suite de mesure de probabilité sur $\mathcal{M}(E)$ et μ une mesure sur $\mathcal{M}(E)$. On dit que la suite de mesures $(\mu_n)_n$ converge vaguement vers la mesure μ (on note $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$) si:

$$\forall f \in C_b(E), \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f(x) \mu_n(dx) = \int_E f(x) \mu(dx).$$

Définition 2. Si $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires tel que $\mu_n = \mathcal{L}(X_n)$ et F_n la fonction de répartition de X_n . Si X une variable aléatoire de fonction de répartition F et μ la mesure associée et $(\mu_n)_n$ converge vers μ vaguement, $\lim_n F_n(x) = F(x)$ en tout point x qui n'est pas un point de discontinuité pour F , On dit alors que $(X_n)_n$ converge en loi vers la variable X et on note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Proposition 2. $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire alors

$$X_n \xrightarrow{P} X \implies X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

Démonstration. (i) On veut montrer que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ i.e. $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$
 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ i.e.

$$\forall g \in C_b(E), \quad \lim_n \int_E g(x) \mu_n(dx) = \int_E g(x) \mu(dx)$$

$X_n \xrightarrow{P} X$ alors pour tout $g \in C_b(E)$, $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$, comme g est continue.

$$\begin{aligned} \lim_n \int_E g(x) d\mu_n(x) = \int_E g(x) d\mu(x) &\Leftrightarrow \lim_n \int g(X_n) dP = \int g(X) dP \\ &\Leftrightarrow \lim_n \mathbb{E}[g(X_n)] = \mathbb{E}[g(X)] \end{aligned}$$

Si $\|g(X_n) - g(X)\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$,
 On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[g(X_n)] = \mathbb{E}[g(X)]$

$$\begin{aligned} \|g(X_n) - g(X)\| &= \int_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}} |g(X_n) - g(X)| dP + \int_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} |g(X_n) - g(X)| dP \\ &\leq \varepsilon P[\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}] + \int_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} |g(X_n) - g(X)| dP \\ &\leq \varepsilon + \int_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} |g(X_n) - g(X)| dP \end{aligned}$$

g bornée, donc $\exists M > 0$ tel que $|g(X)| \leq M, \forall n$
 Donc, on a

$$\begin{aligned} \int_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} |g(X_n) - g(X)| dP &\leq \int_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} |g(X_n)| dP + \int_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} |g(X)| dP \\ &\leq 2M \int_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} dP = 2MP[\{|X_n - X| > \varepsilon\}] \end{aligned}$$

$X_n \xrightarrow{P} X$ donc $\forall \varepsilon > 0, \quad P[\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}] \rightarrow 1, \quad$ quand $n \rightarrow \infty$,
 Alors pour n assez grand

$$P[\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}] < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Finalement, pour n assez grand

$$\|g(X_n) - g(X)\| < \varepsilon + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = 2\varepsilon$$

Ce qui montre que $\mathbb{E}[g(X_n)] = \mathbb{E}[g(X)]$ i.e. $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. $\square$

Définition 3. Soient μ et $\tilde{\mu}$ deux mesures de probabilité $\mu, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}(E)$, la distance en variation totale entre μ et $\tilde{\mu}$ est le nombre réel positif notée $\|\mu - \tilde{\mu}\|$ définie par :

$$\|\mu - \tilde{\mu}\| = \sup_{\varphi} \left| \int_E \varphi(\omega) d(\mu - \tilde{\mu}) \right|$$

Où $\varphi(\omega)$ est une fonction $\mathcal{E}$ -mesurable qui satisfait la condition $|\varphi(\omega)| \leq 1$.

Lemme 1. la distance de variation est donnée par

$$\|\mu - \tilde{\mu}\| = 2 \sup_{A \in \mathcal{E}} |\mu(A) - \tilde{\mu}(A)|.$$

Démonstration. Voir ([9]). $\square$

Proposition 3. Soit X_n une suite de variables aléatoires alors X_n converge en distance de variation vers $X \Rightarrow X_n \xrightarrow{v} X$.

Démonstration. Voir [9]. $\square$

Remarque 1. Dans $C_b(E)$, on peut donc définir deux topologies. La topologie de la convergence vague et la topologie de la distance de variation.

3.3 Mesure stationnaire pour une chaîne de Markov

Nous rappelons ici la définition d'une mesure stationnaire d'une chaîne de Markov sur un ensemble quelconque E de noyau de transition $\mathbb{P}$.

Définition 4. Une mesure π sur $(E, \mathcal{E})$ est une mesure stationnaire pour la chaîne de Markov $(X_n)_n$ de noyau de transition $\mathbb{P}$, si

$$\forall A \in \mathcal{E}, \pi(A) = \int_E \mathbb{P}(A, x) \pi(dx).$$

3.4. MESURE STATIONNAIRE POUR UNE CHAÎNE ITÉRATIVE DANS LE CAS CONTRACTANT

Dans le cas où E est dénombrable la formule ci-dessus se simplifie.

Définition 5. Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov d'espace des états E et de probabilité de transition $(p_{xy})_{x,y \in E}$. $\pi = (\pi_x)_{x \in E}$ définit une mesure stationnaire pour $(X_n)_n$, si

$$\forall x \in E, \pi_x \geq 0, \sum_x \pi_x = 1, \text{ et } \forall y \in E, \pi_y = \sum_{x \in E} \pi_x p_{xy} (*).$$

Remarque 2. Si les nombres $\pi = (\pi_y)_{y \in E}$ ainsi donnés, vérifiant $(*)$, alors ils vérifient aussi

$$\forall n, \forall y \in E, \pi_y = \sum_{x \in E} \pi_x p_{xy}^{(n)}.$$

La relation $(*)$ équivaut à dire que si la famille de nombres réels $\pi = (\pi_x)_{x \in E}$ est la loi de X_0 alors π est aussi la loi de $X_n, \forall n$.

3.4 Mesure stationnaire pour une chaîne itérative dans le cas contractant

Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, $(F, \mathcal{F}, Q)$ un espace de probabilité et $f : E \times F \rightarrow E$ une fonction mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$. Pour tout y fixé dans F , $x \mapsto f_y(x) = f(x, y)$ une fonction.

Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées à valeurs dans F de loi Q et X_0 Une variable aléatoire à valeurs dans E indépendantes de $(Y_n)_n$.

La suite de variables aléatoires $(X_n^x)_n$ définie par :

Pour tout x dans E

$$\begin{aligned} X_0 &= x \\ X_n^x &= f_{Y_n} \circ X_{n-1}^x, n > 0 \end{aligned}$$

est une chaîne de Markov d'espace des états E et de noyau de transition $\mathbb{P}$ défini par

$$\mathbb{P}(x, A) = Q\{y : f_y(x) \in A\}, \quad x \in E, A \in \mathcal{E}$$

de loi initiale $\mu = \mathcal{L}(X_0)$.

Définissons le processus $(H_n^x)_n$, pour $x \in E$ en posant $H_0^x = x$

$$\text{Et pour } n > 0, \quad H_n^x = f_{Y_1} \circ \cdots \circ f_{Y_n}(x).$$

Le processus $(H_n^x)_n$ n'est pas une chaîne de Markov en général, mais $(H_n^x)_n$ et la chaîne de Markov $(X_n^x)_n$ sont de même loi $\mathcal{L}(X_n^x) = \mathcal{L}(H_n^x)$, $x \in E$
 $n = 0, 1, 2, \dots$

On veut savoir dans quelles conditions la chaîne de Markov $(X_n^x)_n$ admet une mesure stationnaire unique. Ce problème est difficile à résoudre dans le cas général. Cependant, si les fonctions f_y sont contractantes, G. Letac a dégagé un principe qui le résoud. Nous en donnons une synthèse de ses résultats.

Théorème 1. ([2])

Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable avec E localement compact, $(F, \mathcal{F}, Q)$ un espace de probabilité et pour tout y fixé dans F , $x \mapsto f_y(x) = f(x, y)$ une fonction continue alors si $H = \lim H_n^x$ existe p.s. et ne dépend pas de x alors la chaîne de Markov $(X_n^x)_n$ admet $\pi = \mathcal{L}(H)$ comme mesure stationnaire et elle est unique.

On énonce la proposition suivante pour démontrer ce théorème.

Proposition 4. On note $(\pi_n^x)_n = \mathcal{L}(X_n^x)_n$, $\forall n$, si $(\pi_n^x)_n$ converge vaguement vers π et ne dépend pas de x . Alors π est une loi stationnaire unique pour le noyau $\mathbb{P}$.

Démonstration. On a $(\pi_n^x)_n$ converge vaguement vers π i.e.

$$\forall g \in C_b(E), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g(x) \mu_n(dx) = \int_E g(x) \mu(dx)$$

Montrons que

$$\int_E g(x_1) \pi_n^x(dx_1) = \int_{E \times F} g(f_y(x_1)) \pi_{n-1}^x(dx_1) Q(dy)$$

On a

$$\begin{aligned} \pi_n^x(dx_1) &= P[X_n^x \in dx_1] \\ &= P[f_{Y_n}(X_{n-1}^x) \in dx_1] \\ &= P[X_{n-1}^x \in f_y^{-1}(dx_1), Y_n \in dy] \end{aligned}$$

3.4. MESURE STATIONNAIRE POUR UNE CHAÎNE ITÉRATIVE DANS LE CAS CONTRACTANT

Par indépendance de X_{n-1}^x et Y_n

$$\begin{aligned}\pi_n^x(dx_1) &= P[X_{n-1}^x \in f_y^{-1}(dx_1)] \cdot P[Y_n \in dy] \\ &= \int_E \pi_{n-1}^x(f_y^{-1}(dx_1))Q(dy)\end{aligned}$$

Donc

$$g(x_1)\pi_n^x(dx_1) = \int_{E \times F} g(f_y(x_1))\pi_{n-1}^x(dx_1)Q(dy)$$

Montrons que

$$x_1 \rightarrow \int_F g(f_y(x_1))Q(dy) \quad \text{est continue}$$

En effet, $x \rightarrow f_y(x_1)$ est continue (par hypothèse). Donc, si $(x_n)_n$ converge vers x_1 , alors

$$f_y(x_n) \rightarrow f_y(x_1)$$

D'autre part g est continue car $g \in C_b(E)$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(f_y(x_n)) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} f_y(x_n)) = g(f_y(x_1))$$

Et comme g est bornée, on a

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_F g(f_y(x_n))Q(dy) &= \int_F \lim_{n \rightarrow \infty} g(f_y(x_n))Q(dy) \\ &= \int_F g(f_y(x_1))Q(dy)\end{aligned}$$

En passant à la limite dans

$$\int_E g(x_1)\pi_n^x(dx_1) = \int_{E \times F} g(f_y(x_1))\pi_{n-1}^x(dx_1)Q(dy) \quad (1)$$

On aura

$$\int_E g(x_1)\pi(dx_1) = \int_{E \times F} g(f_y(x_1))\pi(dx_1)Q(dy)$$

En effet

$$\int_E g(x_1)\pi_n^x(dx_1) = \int_E g(x_1)\pi(dx_1)$$

(Car $g \in C_b(E)$ et π_n^x converge vaguement vers π)

Et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E \times F} g(f_y(x_1)) \pi_{n-1}^x(dx_1) Q(dy) = \int_{E \times F} g(f_y(x_1)) \pi(dx_1) Q(dy)$$

(Car $x_1 \rightarrow \int_F \lim_{n \rightarrow \infty} g(f_y(x_n)) Q(dy)$ est continue et π_n^x converge vaguement vers π)

En posant $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ avec $g_n = \mathbb{I}_B$, $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ Dans la relation (1) on aura

$$(1) \Leftrightarrow \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x_1) \pi(dx_1) = \int_{E \times F} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(f_y(x_1)) \pi(dx_1) Q(dy)$$

$$(1) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n(x_1) \pi(dx_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E \times F} g_n(f_y(x_1)) \pi(dx_1) Q(dy)$$

$$(1) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \mathbb{I}_B(x_1) \pi(dx_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E \times F} \mathbb{I}_B(x_1)(f_y(x_1)) \pi(dx_1) Q(dy)$$

$$\int_E g(x_1) \pi_n^x(dx_1) = \int_{E \times F} g(f_y(x_1)) \pi_{n-1}^x(dx_1) Q(dy) \Rightarrow \pi(B) = \int P(B, x_1) \pi(dx_1)$$

.i.e π est stationnaire pour le noyau $\mathbb{P}$. $\square$

Démonstration. (Théorème (2))

$\lim H_n^x = H$ existe -p.s $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(H_n^x) = \mathcal{L}(H)$

Comme

$$\mathcal{L}(H_n^x) = \mathcal{L}(X_n^x), \quad x \in E, n = 0, 1, 2, \dots$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(H_n^x) = \pi.$$

Donc

$\pi = \mathcal{L}(H)$ est une loi stationnaire unique pour le noyau de transition $\mathbb{P}$.

$\square$

Si les fonctions f_y ne sont pas contractantes, le principe de contraction ne peut pas s'appliquer. Cependant, on a les résultats d'existence et d'unicité dans le cas non contractant mais contractant en moyenne. cela découle des travaux de Diaconis et Freedman. Nous n'allons pas rentrer dans les détails, mais nous donnons une idée des résultats obtenus par ces deux auteurs.

3.5 Mesure stationnaire dans le cas contractant en moyenne

$(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi μ à valeurs dans Θ . Considérons alors la chaîne de Markov X_n^x définie par :

pour $x \in E$, $X_0 = x$ qui est une variable aléatoire indépendante des Y_n et à valeurs dans E et pour tout $n > 0$

$$X_{n+1} = f_{Y_{n+1}}(X_n) = (f_{Y_{n+1}} \circ \cdots \circ f_{Y_2} \circ f_{Y_1})(x)$$

On définit le processus

$$H_{n+1}(x) = (f_{Y_1} \circ \cdots \circ f_{Y_n} \circ f_{Y_{n+1}})(x)$$

Définition 6. Si P et Q deux lois de probabilité sur E , soit $\rho(P, Q)$ est le plus petit nombre réel $\delta > 0$, tel que

$$P(C) < Q(C_\delta) + \delta \quad \text{et} \quad Q(C) < P(C_\delta) + \delta$$

Avec $C \subset E$, $C_\delta = \{y \in E, \rho(x, y) < \delta \text{ pour } x \in C\}$ où C est un compact de E .

$\rho(P, Q)$ est appelée la distance de Prokhorov.

Remarque 3. $\rho(P, Q) \leq 1$.

Définition 7. Une variable aléatoire U a une loi à queue lourde si il existe deux constantes positives α, β et $u > 0$ tel que, pour tout u assez grand :

$$P\{U > u\} < \frac{\alpha}{u^\beta}, \quad \forall u > 0.$$

Définition 8. Soit (E, ρ) un espace métrique, $f : E \rightarrow E$, et dite une fonction lipschitzienne de rapport K_f si :

$$\forall x, x' \in E, \quad \rho(f(x), f(x')) \leq K_f \rho(x, x').$$

Définition 9. (E, ρ) un espace métrique, la fonction lipschitzienne $f : E \rightarrow E$ est contractante en moyenne si

$$\int \log(K_f) \mu(df) < 0.$$

Théorème 2. ([3])

Soit (E, ρ) un espace métrique séparable complet. Soit $\{f_y : y \in \Theta\}$ une famille de fonctions, et soit μ une loi de distribution sur Θ . Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\forall y \in \Theta, f_y : E \rightarrow E$, est une fonction lipschitzienne de constante lipschitzienne K_y .
2. la constante lipschitzienne K_y est finie presque sûrement i.e.

$$\int K_y \mu(dy) < \infty.$$

3. la constante lipschitzienne K_y est contractante en moyenne.
4. $\exists x \in E$ tel que $\int \rho[f_y(x), x] \mu(dy) < \infty$.

Alors, il en résulte que :

- (i) La chaîne de Markov $(X_n^x)_n$ admet une loi stationnaire π unique.
- (ii) Pour deux constantes A_x et r avec $0 < A_x < \infty$ et $0 < r < 1$, on a $\rho(P_n(x, \cdot), \pi) \leq A_x r^n$.
- (iii) La constante r ne dépend pas de n ou x , et la constante A_x ne dépend pas de n .
- (iiii) $A_x < a + b \rho(x, x_0)$ où $0 < a, b < \infty$.

Lemme 2. Soit ξ_i une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, $P\{\xi_i = -\infty\} > 0$.

Supposons qu'il existe deux constantes positives α, β tel que

$P\{\xi_i > v\} < \alpha \exp^{-\beta v} \forall v > 0$. Soit ξ de même loi que ξ_i , alors :

- (i) $-\infty \leq \mathbb{E}\{\xi\} < \infty$.
- (ii) Si c est un nombre réel tel que $c > \mathbb{E}[\xi_i]$, il existe deux constantes positives A et r tel que $r < 1$ et $P\{\xi_i + \dots + \xi_n > nc\} < Ar^n \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$ les constantes A et r dépendent de c et la loi de ξ_i et ne dépendent pas de n .

Soit $\{f_i\}$ une famille de fonctions lipschitziennes de $E \rightarrow E$.

Considérons le processus X_n par :

$$X_n(x) = (f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1)(x)$$

Et on définit le processus inverse par :

$$H_n(x) = (f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n)(x)$$

Lemme 3. $\rho[X_n(x), X_n(y)] \leq \prod_{j=1}^n [K_{f_j}] \rho(x, y)$

Démonstration. (Par récurrence)

Pour $n = 1$

$$\begin{aligned} \rho[X_1(x), X_1(y)] &\leq K_{f_1} \rho(x, y) \\ \text{Donc } \rho[f_1(x), f_1(y)] &\leq K_{f_1} \rho(x, y) \end{aligned}$$

Donc l'inégalité est vérifiée pour $n = 1$ par définition d'une fonction lipschitzienne.

Pour $n = 2$

$$\begin{aligned} \rho[X_2(x), X_2(y)] &\leq K_{f_2} \rho(X_1(x), X_1(y)) \\ \text{alors } \rho[f_2(X_1(x)), f_2(X_1(y))] &\leq K_{f_2} K_{f_1} \rho(x, y) \end{aligned}$$

donc l'inégalité est vérifiée pour $n = 2$ par définition d'une fonction lipschitzienne.

Hypothèse de récurrence : supposons que l'inégalité est vraie pour n , montrons qu'elle reste vraie pour $n + 1$

$$\begin{aligned} \rho[X_{n+1}(x), X_{n+1}(y)] &\leq K_{f_{n+1}} \rho(X_n(x), X_n(y)) \\ \text{alors } \rho[f_{n+1}(X_n(x)), f_{n+1}(X_n(y))] &\leq K_{f_{n+1}} \prod_{j=1}^n [K_{f_j}] \rho(x, y) \\ &\leq \prod_{j=1}^{n+1} [K_{f_j}] \rho(x, y) \end{aligned}$$

Donc, $\forall n \geq 1$

$$\rho[X_n(x), X_n(y)] \leq \prod_{j=1}^n [K_{f_j}] \rho(x, y).$$

□

Lemme 4. $\rho[(f \circ g)(x), x] \leq \rho[f(x), x] + K_f \rho[g(x), x]$

Démonstration.

$$\rho((f \circ g)(x), x) \leq \rho((f \circ g)(x), f(x)) + \rho(f(x), x) \quad (\text{l'inégalité triangulaire})$$

$$\rho[(f \circ g)(x), f(x)] + \rho(f(x), x) \leq \rho[f(x), x] + K_f \rho[g(x), x] \quad (f \text{ est une fonction lipschitzienne})$$

□

Lemme 5. supposons Les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $f \longrightarrow K_f$ a une loi à queue lourde.

(ii) La fonction lipschitzienne f est contractante en moyenne.

Alors si $\varepsilon > 0$, il existe deux constantes positives A et r avec $r < 1$ on a

$$p\left\{\sum_{i=1}^n \log K_{f_i} > -n\varepsilon\right\} < Ar^n$$

Pour tout $n = 1, 2, \dots$ les constantes A et r dépendent de ε et pas de n .

Lemme 6. Si Les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) La fonction lipschitzienne f est contractante en moyenne .

(ii) $f \longrightarrow K_f$ a une loi à queue lourde.

Alors pour $\varepsilon > 0$,

$$\rho[X_n(x), X_n(y)] \leq \exp(-n\varepsilon) \rho(x, y) \quad \forall x, y \in E$$

Avec A et r dépendent de n mais pas de ε .

Proposition 5. Soit $\{g_i\}$ une suite de fonctions de E dans E , soit $x \in E$ alors :

$$\begin{aligned} \rho[(g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_m)(x), x] &\leq \rho[g_1(x), x] + K_{g_1} \rho[g_2(x), x] \\ &+ K_{g_1} K_{g_2} \rho[g_3(x), x] \\ &+ \dots + K_{g_1} K_{g_2} \dots K_{g_{m-1}} \rho[g_m(x), x]. \end{aligned}$$

Théorème 3. ([3])

Soit μ une loi de distribution sur Θ . Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1.) $f \longrightarrow K_f$ a une loi à queue lourde .
- (2.) Il existe $x_0 \in E$ tel que :

$$f \longrightarrow \zeta(f) = \rho(f(x_0), x_0)$$

est aussi de loi à queue lourde

- (3.) La fonction lipschitzienne f est contractante en moyenne .

Alors, il en résulte que :

- (i) La chaîne de Markov $(X_n^x)_n$ admet une loi stationnaire π unique.
- (ii) Pour deux constantes A_x et r avec $0 < A_x < \infty$ et $0 < r < 1$, on a $\rho(P_n(x, \cdot), \pi) \leq A_x r^n$.
- (iii) La constante r ne dépend pas de n ou x , et la constante A_x ne dépend pas de n , et $A_x < a + b \rho(x, x_0)$ où $0 < a, b < \infty$.

Proposition 6. ([3])

Si Les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) $f \longrightarrow K_f$ a une loi à queue lourde.
- (ii) La fonction lipschitzienne f est contractante en moyenne.
- (iii) Il existe $x_0 \in E$ tel que :

$$f \longrightarrow \zeta(f) = \rho(f(x_0), x_0)$$

est aussi de loi à queue lourde

Alors le processus $(H_n^x)_n$ associé converge presque sûrement vers sa limite et ne dépend pas de x .

Démonstration.

Supposons que Les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) $f \longrightarrow K_f$ a une loi à queue lourde.
- (2) La fonction lipschitzienne f est contractante en moyenne.

On montre que $H_n(x) = (f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n)(x)$ est un processus de Cauchy.

On prend x comme point initial.

$$H_{n+m}(x) = H_n \circ (f_{n+1} \circ f_{n+2} \circ \cdots \circ f_m)(x)$$

D'après le lemme (3) :

$$\rho[H_{n+m}(x), H_n(x)] = \prod_{j=1}^n K_{f_j} \rho[f_{n+1} \circ f_{n+2} \circ \cdots \circ f_{n+m}(x), x]$$

D'après la proposition (4), où on considère f_{i+1} pour g_i dans l'inégalité :

$$\rho[H_{n+m}(x), H_n(x)] \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{n+i} K_{f_j} \right) \rho[f_{n+i+1}(x), x]$$

D'après le lemme (5)

$$\prod_{j=1}^{n+i} K_{f_j} \leq \exp^{-(n+i)\varepsilon}.$$

$\forall n \geq n_0$ et tout $i = 0, 1, \dots$

D'autre part, pour tout $x_0 \in E$

$$f \rightarrow \zeta(f) = \rho[f(x_0), x_0]$$

a une loi à queue lourde relativement à μ .

On pose $\zeta_j = \rho[f_j(x), x]$, en utilisant la définition (9), il existe deux constantes positives finies α, β , tel que $P\{\zeta_j > s^j\} < \alpha/s^{\beta j}$

On choisit $s > 1$ de telle manière que $se^{-\varepsilon} < 1$

$$\zeta_{n+i+1} \leq s^{n+i+1}$$

Alors, $\forall n \geq n_0$ et tout $i = 0, 1, \dots$

$\exists r_1$ avec $r_1 < 1$, $\forall n_0, \forall n > n_0$ et tout $m = 0, 1, \dots$

$$\rho[H_{n+m}(x), H_n(x)] \leq r_1^n$$

Donc le processus $H_n(x)$ est de Cauchy et comme l'espace métrique (E, ρ) est complet, alors, $H_n(x)$ converge vers une limite unique H_∞ et elle ne dépend pas de x .

□

Conclusion

Nous avons introduit la thématique des chaînes de Markov itératives et les outils actuels de leur étude. De nombreux exemples existent qui ne sont pas circonscrits dans ces résultats. C'est le cas par exemple (Cf. [10]) de la chaîne de Markov

$$X_{n+2} = a_n X_n + b_{n+1} X_{n+1}$$

C'est le cas aussi de la chaîne de Markov $X_{n+1} = Y_{n+1} X_n (1 - X_n)$ où les Y_n sont des variables aléatoires i.i.d. où $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont des suites de variables indépendantes. Cela impose d'étendre la théorie un peu plus et c'est une première direction de travail.

D'autre part, la mise au point d'algorithmes de simulation exacte et leur amélioration recentre l'étude des chaînes itératives dans l'actualité. Cette motivation fournit une deuxième direction de travail (Cf [1], [4], [14], [13], [12] ...).

D'autres perspectives peuvent être envisagées pour les chaînes de Markov itératives, en particulier comme application à la dynamique des populations (Cf. [15]).

Bibliographie

- [1] K.B. Athreya et Ö. Stenflo: *Perfect Sampling For Doeblin Chains*,
<http://ecommons.library.cornell.edu/bitstream/1813/9159/1/TR001279.pdf>
- [2] G. Letac: *A contraction principle for certain Markov chains and its applications*, Contemporary Mathematics, 50 (1986) 263-273.
- [3] P. Diaconis, D. Freedman: *Iterated Random Functions*, SIAM Rev, 41 (1999) 45-76.
- [4] Ö. Stenflo: *Iterated Function systems controled by a semi-Markov chain*, 2(18)(1996)305-313
<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdocdownload?doi=10.1.44.608rep=rep1 type=pdf>.
- [5] D. Revuz: *Markov chains*, Edition révisée, North-Holland, New York, 11 (1984).
- [6] M. Mirek: *Heavy tail phenomenon and convergence to stable laws for iterated Lipschitz maps*
Probability Theory and Related Fields, (2011) 151 pp. 705-734.
- [7] B. Bessad, F. Ladjimi et M.A. Boudiba: *Itérations de fonctions aléatoires et application à la simulation*, Communication en workshop, EP-QOS Bejaia, (Mai 2013).
- [8] L. Breiman: *Probability*, Siam edition, (1992).
- [9] A. N. Shiryaev: *Probability*, Springer-verlag, Second edition, (1989).
- [10] F. R. K. Chung, P. Diaconis and R. L. Graham: *random walks arising in random number generation*, The annals of probability, (1987) pp. 1148-1165.
- [11] F. R. K. Chung, P. Diaconis, R. L. Graham: *A random walk problem involving random number generation*, Technical report No. 212, Department of statistics, Stanford university, (1984).

- [12] J. G. Propp and D. B. Wilson: *Exact sampling with coupled Markov chains and application to statistical mechanics*, Random structures and algorithms, 9 (1996) pp. 223-252 .
- [13] J. G. Propp and D. B. Wilson: *How to get perfectly random sample from generic Markov chain and generate a random spanning tree of a directed graph* , Journal of algorithms, 27 (1998) pp. 170-217.
- [14] J. N. Corcoran and R. L. Tweedie, *Perfect sampling of Harris recurrent Markov chains* , Preprint, (1999)
<http://citessrx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.44.608rep=rep1&type=pdf>.
- [15] R. Bhattacharya and M. Majumdar, *"Random iterates of monotone maps"*, Review of economic design, (Juin 2007).
- [16] Guivarch's et Roynette, *Marche aléatoire dans un groupe*, Lectures Notes, Springer Verlag, Berlin-NY, (1975).
- [17] A. Hedjem, *Fractions continues et systèmes dynamiques*
 Memoire de Master "Maths. Appli. Procéssus aléatoires et Statistique de la Décision" UMMTO, (2012).
- [18] K. Tedlout, *Marches aléatoires et chaînes de Markov dans un groupe*
 Memoire de Master "Maths. Appli. Procéssus aléatoires et Statistique de la Décision", UMMTO, (2011).