

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU



FACULTÉ DE GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

Mémoire de Fin d'Études
de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et technologie

Filière : Automatique

Spécialité : Automatique et Systèmes

Présenté par

AMAZOUZ Melissa

Mémoire proposé et dirigé par M. HAMMOUCHE Sofiane

**Synthèse d'un régulateur linéaire quadratique
(LQR) pour la commande d'un pendule inversé
monté sur un chariot mobile.**

Projet soutenu publiquement le 29/09/2024 devant le jury composé de :

M^{me}. NAIT ABDESLAM Aldjia Présidente UMMTO MAA

M^r. HAMMOUCHE Sofiane Encadreur UMMTO MAA

M^{me}. ARKOUB Nouara Examinatrice UMMTO MAB

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU



FACULTÉ DE GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

Mémoire de Fin d'Études
de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et technologie

Filière : Automatique

Spécialité : Automatique et Informatique Industrielle

Présenté par

DJAROUN Ramdane

Mémoire proposé et dirigé par M. HAMMOUCHE Sofiane

**Synthèse d'un régulateur linéaire quadratique
(LQR) pour la commande d'un pendule inversé
monté sur un chariot mobile.**

Projet soutenu publiquement le 29/09/2024 devant le jury composé de :

M^{me}. NAIT ABDESLAM Aldjia Présidente UMMTO MAA

M^r. HAMMOUCHE Sofiane Encadreur UMMTO MAA

M^{me}. ARKOUB Nouara Examinatrice UMMTO MAB

Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP) de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou (UMMTO).

Nous tenons à remercier, en premier lieu, monsieur HAMMOUCHE Sofiane Maître assistant (A) à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, pour ses conseils et pour ses recommandations, ses orientations éclairées et le soutien qu'il nous a apporté.

Nous tenons aussi à remercier chaleureusement les membres du jury qui ont accepté de lire et d'évaluer ce travail.

Enfin, nous remercions toutes nos famille, et tous nos amis, qui de près ou de loin nous ont supportés, soutenu et encouragés tout au long de ces années.

Dédicaces

Ce travail est dédié...

À ma très chère mère FATIHA, pour son amour, son encouragement, son soutien, ses sacrifices et ses prières durant toute sa vie pour que je puisse réussir.

À mon chère père MADJID et mon frère AGHILES, pour leurs soutien, leur affection et la confiance qu'ils m'ont accordée.

À La mémoire de mes très chères grand-pères.

À tous ceux qui m'aiment...

AMAZOUZ Melissa

Dédicaces

Ce travail est dédié...

À moi même et tous ceux qui m'ont soutenu...

DJAROUN Ramdane

Table des matières

Introduction générale	1
1 Description, modélisation et commande de redressement du pendule inversé	2
1.1 Introduction	2
1.2 Pendule simple	2
1.3 Pendule inversé	3
1.4 Domaines d'application du pendule inversé	3
1.5 Description du banc d'essai	5
1.6 Méthode d'action	6
1.7 Modélisation mathématique de l'ensemble chariot pendule	7
1.8 Modélisation du moteur à courant continu	13
1.9 Modèle d'état du moteur	15
1.10 Modélisation du système global "Moteur-chariot- pendule"	16
1.11 Modèle d'état de l'ensemble "Moteur-chariot-pendule"	17
1.12 Modélisation sous Matlab Simulink et résultats de simulation	18
1.13 Linéarisation du modèle autour du point d'équilibre instable ($\theta = 0$)	21
1.14 Redressement du pendule inversé par une commande non linéaire	25
1.14.1 Théorème de stabilité de Lyapunov	25
1.14.2 Calcul de la commande de redressement	26
1.14.3 Simulation	29
1.14.4 Résultats de simulation	30
1.14.5 Interprétation des résultats	31
1.15 Conclusion	31
2 La commande linéaire quadratique LQR	32
2.1 Intoduction	32
2.2 Commande optimale	32

2.3	Commande linéaire quadratique (LQR)	33
2.4	Principes de la commande par retour d'état	35
2.5	Développement de la commande linéaire quadratique (LQR)	36
2.6	Application de la commande LQR	38
2.6.1	Exemple numérique	38
2.6.2	Modèle chariot-pendule	40
	Résultats de simulation du modèle chariot-pendule	42
	Test de robustesse face aux perturbations de la position angulaire θ	44
2.7	Conclusion	46
3	Testes et résultats	47
3.1	Introduction	47
3.2	Application des deux commandes sur le modèle non linéaire	47
3.2.1	Perturbation externe sur le pendule	51
3.2.2	Perturbation externe sur le chariot	53
3.2.3	Perturbation paramétrique sur la masse du chariot	55
3.3	Conclusion	58
	Conclusion générale	59
	Bibliographie	60

Liste des tableaux

- 1.1 *Récapitulatif des variables du chariot-pendule utilisées dans la modélisation.* . . . 8
- 1.2 *Récapitulatif des paramètres de la machine utilisées dans la modélisation.* 14

Table des figures

1.1	<i>Pendule simple.</i>	2
1.2	<i>Pendule inversé.</i>	3
1.3	<i>Exemples d'application réels de pendule inversé dans divers domaines.</i>	4
1.4	<i>Banc d'essai du pendule inversé.</i>	5
1.5	<i>Schéma illustrant les connexions entre les dispositifs de contrôle et de commande.</i>	6
1.6	<i>Schéma de l'ensemble chariot et pendule inversé.</i>	7
1.7	<i>Schéma électrique et mécanique de l'induit.</i>	13
1.8	<i>Relation entre la force mécanique $F(t)$ et la tension $V_c(t)$.</i>	16
1.9	<i>Schéma de simulation du système "Moteur-chariot-pendule".</i>	19
1.10	<i>Résultats de simulation du système "moteur-chariot-pendule" pour des conditions initiales $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, 0, 0]$. (a et b -Position et vitesse du pendule, c et d - Position et vitesse du chariot.)</i>	20
1.11	<i>Résultats de simulation du système "moteur-chariot-pendule" pour des conditions initiales $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$. (a et b -Position et vitesse du pendule, c et d - Position et vitesse du chariot.)</i>	20
1.12	<i>Les différentes étapes de redressement du pendule.</i>	25
1.13	<i>Redressement du pendule.</i>	26
1.14	<i>Schéma de Simulink de la commande de redressement.</i>	29
1.15	<i>Résultats de simulation de la commande de redressement pour $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$. (a et b -Position et vitesse du pendule, c et d -Position et vitesse du chariot, e -Signal de commande.)</i>	30
2.1	<i>Courbe d'évolution des états x_1 et x_2 du système avec le contrôleur LQR ($x(0) = [1; 0]$).</i>	39
2.2	<i>Schéma Simulink du système "chariot-pendule" avec la commande LQR.</i>	42

2.3	<i>Résultat de simulation du modèle linéaire avec le régulateur LQR, $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, 0.2, 0]$. (a et b -Position et vitesse du pendule, c et d -Position et vitesse du chariot, e -Signal de commande.)</i>	43
2.4	<i>Schéma Simulink de la commande LQR du système "chariot-pendule", avec perturbation sur le pendule.</i>	44
2.5	<i>Réponse temporelles de la commande LQR du système "chariot-pendule" en présence de perturbation sur le pendule. (a et b -Position et vitesse du pendule, c et d -Position et vitesse du chariot, e -Signal de commande.)</i>	45
3.1	<i>Schéma Simulink de commande de redressement et de stabilisation du pendule inversé.</i>	48
3.2	<i>Réponses temporelles du système "Moteur-chariot-pendule" avec les deux commandes. (a et b -Position et vitesse du pendule, c et d -Position et vitesse du chariot, e -Signal de commande.)</i>	49
3.3	<i>Schéma Simulink de redressement et de stabilisation LQR du pendule inversé avec la perturbation sur le pendule.</i>	51
3.4	<i>Réponse du système à une perturbation externe sur le pendule.(a -Position du chariot, b et c -Signal de perturbation et de la commande, d -Agrandissement sur la zone de perturbation, e -Position du pendule.)</i>	52
3.5	<i>Schéma de la commande de redressement et de stabilisation du pendule inversé avec perturbation sur le chariot.</i>	53
3.6	<i>Réponse du système à une perturbation externe sur le chariot. (a -Position du chariot, b et c -Signal de perturbation et de la commande, d -Agrandissement sur la zone de perturbation, e -Position du pendule.)</i>	54
3.7	<i>Perturbation de la masse du chariot à 40%.(a et b -Position du pendule sans et avec perturbation, c et d -Position du chariot sans et avec perturbation, e et f -Signal de commande sans et avec perturbation.)</i>	55
3.8	<i>Perturbation de la masse du chariot à 65%. (a et b -Position du pendule sans et avec perturbation, c et d -Position du chariot sans et avec perturbation, e et f -Signal de commande sans et avec perturbation.)</i>	56
3.9	<i>Perturbation de la masse du chariot à 75%. (a et b -Position du pendule sans et avec perturbation, c et d -Position du chariot sans et avec perturbation, e et f -Signal de commande sans et avec perturbation.)</i>	57

Introduction générale

Un jour, nous avons tous essayé d'équilibrer un grand bâton de bois sur notre index. Pour éviter qu'il ne tombe, il faut constamment ajuster notre doigt. Ce défi est similaire à celui du système de commande d'un pendule inversé, dont la position d'équilibre est instable. En effet, il s'agit de maintenir une tige avec une masse cylindrique en position verticale par rapport à son point d'équilibre, qui, pour un pendule simple, correspond à un angle de 180° .

Bien que cet exercice d'équilibrer un bâton de bois sur notre index puisse sembler simple et naturel, il requiert en réalité le développement de stratégies précises pour maintenir un pendule inversé de manière automatique. Les performances d'un système automatisé surpassent de loin celles que pourrait obtenir un être humain.

Pour stabiliser le pendule inversé, plusieurs techniques de commande ont été utilisées avec succès, notamment la commande PID [CHA.01], la commande PD [FRE.02], la commande LQR [CHA.01], les réseaux de neurones artificiels [LAH.01] et la logique floue [NEN.01].

L'objectif de ce mémoire est d'étudier le système "Moteur-chariot-pendule", de développer une commande non linéaire pour redresser le pendule de sa position basse vers sa position haute, puis d'appliquer une commande optimale, à savoir la commande linéaire quadratique (LQR : Linear Quadratic Regulator), pour stabiliser le pendule inversé à sa position d'équilibre instable même en présence de perturbation. Pour cela, nous avons structuré notre mémoire en trois chapitres, comme suit :

Le chapitre initial se focalise sur la modélisation mathématique du pendule inversé. Ensuite, le redressement de ce pendule.

Le deuxième chapitre présente quelques notions de base sur la commande LQR et montre son efficacité dans la stabilisation du système linéaire.

Le troisième chapitre donne les résultats obtenus en simulation de la commande LQR du pendule inversé.

Enfin une conclusion générale clôture ce mémoire.

Chapitre 1

Description, modélisation et commande
de redressement du pendule inversé

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous commencerons par examiner plusieurs types de pendules, en mettant particulièrement l'accent sur les pendules inversés, nous accorderons ensuite la représentation de quelques exemples spécifiques de systèmes réels dérivés du concept du pendule inversé. L'un des systèmes que nous étudions, est celui disponible au laboratoire de conception et conduite des systèmes de production (L2CSP), ce système se compose d'un moteur a courant continue, un chariot mobile se déplaçant le long d'un rail et d'un pendule suspendu sur le chariot. Nous procéderons ensuite à la modélisation mathématique de l'ensemble chariot-pendule, qui nous servira d'illustration pour les commandes que nous développerons dans ce mémoire.

Enfin, nous allons aborder et expliquer la commande de redressement et appliquer a l'ensemble moteur-chariot-pendule et quelques rappels théoriques sur les notions de stabilité de Lyapunov.

1.2 Pendule simple

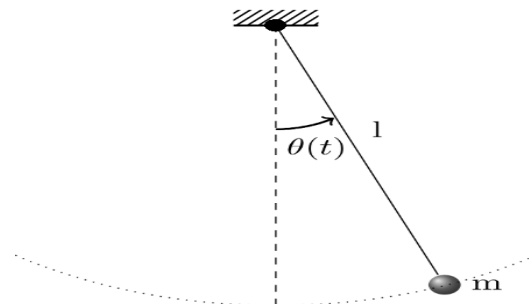


FIGURE 1.1 – *Pendule simple.*

Son nom provient du mot latin pondère qui signifie "accrocher". Le pendule est l'un des exemples les plus importants, dans la théorie de la dynamique et du contrôle. Il a été étudié depuis Galilée. En fait, les recherches empiriques de Galilée sur le mouvement du pendule ont soulevé de nombreuses questions mécaniques auxquelles on ne peut répondre qu'en utilisant les lois de mouvement de Newton.

Après des expériences approfondies, Galilée a démontré que lorsqu'il n'y a pas de force de contrôle, le pendule se stabilise et revient à la hauteur de son déclenchement [LAM.02]. Il a démontré que les périodes d'oscillation dépendent de sa longueur (l), mais pas de son poids (m). Et que la période est presque indépendante de l'amplitude.

Un pendule peut être ramené à sa position d'équilibre lorsqu'il est déplacé horizontalement grâce à la force de rappel due à la gravité. Lorsqu'il est relâché, cette force, en conjonction avec

la masse du pendule, le fait osciller d'avant en arrière autour de la position d'équilibre.

1.3 Pendule inversé

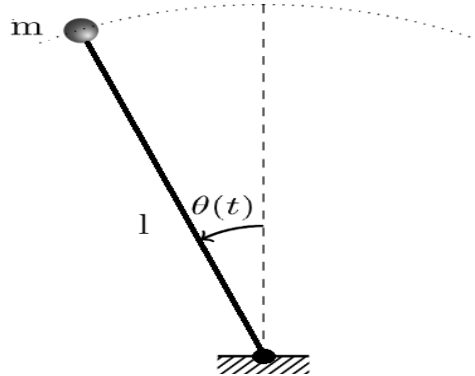


FIGURE 1.2 – *Pendule inversé.*

Un pendule inversé est un pendule dont la position d'équilibre est instable, c'est à dire maintenir une tige avec une masse cylindrique en équilibre vertical par rapport au point d'équilibre d'un pendule simple faisant un angle de 180° avec ce dernier.

Ce système est non linéaire et instable, classé comme un système SIMO (Single Input Multiple Output). Il sert à évaluer les performances des techniques de commande pour des périodes de temps très rapides. Ce système est généralement constitué d'un pendule suspendu sur un chariot, il est souvent utilisé pour modéliser les problèmes de commande...(fusées, missiles, robots marcheurs, Segway)...

1.4 Domaines d'application du pendule inversé

Le pendule inversé est utilisé pour tester les performances des commandes et des techniques de commande, un pendule inversé fait intervenir de nombreuses notions intéressantes pour les étudiants en automatisme et en robotique, telles que la programmation et l'automatisation, ce qui en fait une bonne initiation et un bon apprentissage.

Voici quelques exemples réels dans divers domaines exploités sur le concept du pendule inversé :

- **Robotique** : La robotique utilise le principe du pendule inversé, pour assurer l'équilibre du robot, il s'agit stabiliser le pendule inversé en fonction de sa position verticale pendant son déplacement, même en cas de perturbations externes.
- **Appareil de transport personnel SEGWAY** : Dans les nouveaux moyens de transports à deux roues, tels que le segway, l'utilisateur se tient sur le même axe. L'accélération se produit en s'inclinant vers l'avant tant dit que le ralentissement se fait en penchant en arrière. Le principe est identique à celui du pendule inversé.
- **Médecine** : En réalité, l'homme est un double pendule dont les deux axes de rotation sont les chevilles et les hanches. Pour se maintenir debout, les articulations sont constamment sollicitées, et l'étude de ce modèle revêt une importance capitale dans la conception de prothèses.
- **Aérospatiale** : Il est également important d'étudier les systèmes pendulaires, tels que le contrôle et la stabilisation de l'attitude des satellites, ainsi que le lancement de fusées. Pour maintenir l'orientation du satellite en utilisant l'actionnement gyroscopique.
- **Loisir** : On retrouve les tours dans les parcs d'attractions. La machine oscille vers le haut autour d'un axe, ce qui lui donne l'apparence d'un pendule inversé, mais lors de sa première phase de mouvement, elle s'agit comme un pendule normal.



FIGURE 1.3 – Exemples d'application réels de pendule inversé dans divers domaines.

1.5 Description du banc d'essai

Pour maintenir une tige en aluminium en équilibre vertical avec une masse de forme cylindrique à l'extrémité, une articulation pivotante relie cette tige au chariot qui peut se déplacer en glissant le long d'une raille de guidage horizontal. Pour maintenir l'équilibre vertical du bras du pendule, une courroie est utilisée pour faire déplacer le chariot dans un sens ou un autre.

Au départ, le pendule se trouve en position basse, l'objectif est de le ramener à sa position verticale haute tout en le maintenant stable dans cette position.

Le chariot sur la voie est commandé par un système numérique pour redresser et maintenir le pendule en équilibre dans une position haute stable, ou pour déplacer le chariot avec le pendule dans une position basse sans perturbation. La maquette contient un ensemble de capteurs et d'actionneurs.

Il y a deux capteurs disponibles : Un capteur de position indique la position du chariot sur la raille de guidage par rapport au centre et un capteur de position angulaire mesure l'angle entre la verticale et les bras des pendules. Et l'actionneur est un moteur électrique à aimant permanent et à courant continu commandé par l'induit. De plus, pour garantir la sécurité du moteur d'entraînement du chariot, deux butées de fin de course limitent le déplacement du chariot vers la gauche et vers la droite. Deux interrupteurs de fin de course sont placés en avant des butées mécaniques.

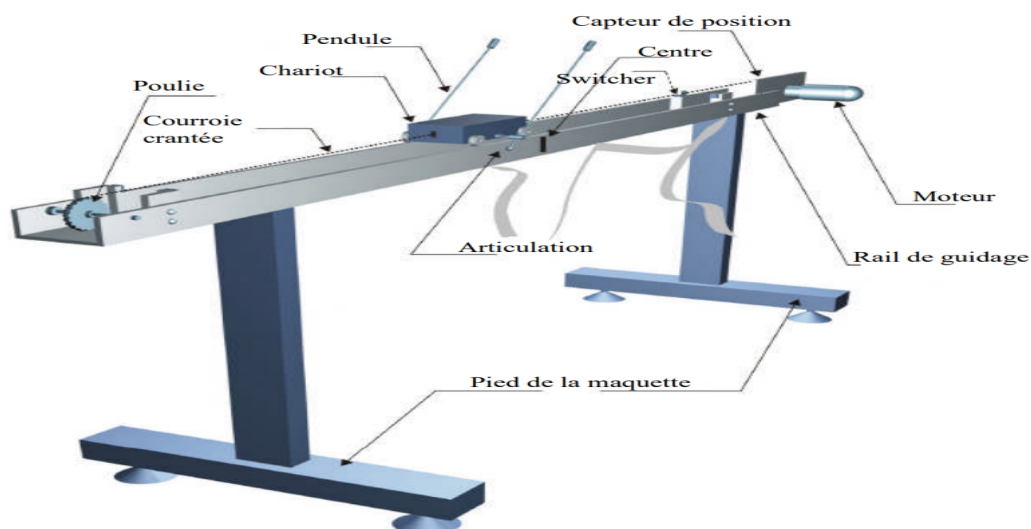


FIGURE 1.4 – Banc d'essai du pendule inversé.

Boitier de commande

Le boitier de commande illustré par la figure (1.5) est constitué de différentes interfaces.

- Connecteur ON / Off
- Sélecteur 110/220v
- Fiche d'alimentation 110/220 V
- Connecteur CN1
- Connecteur CN2
- Connecteur CN3

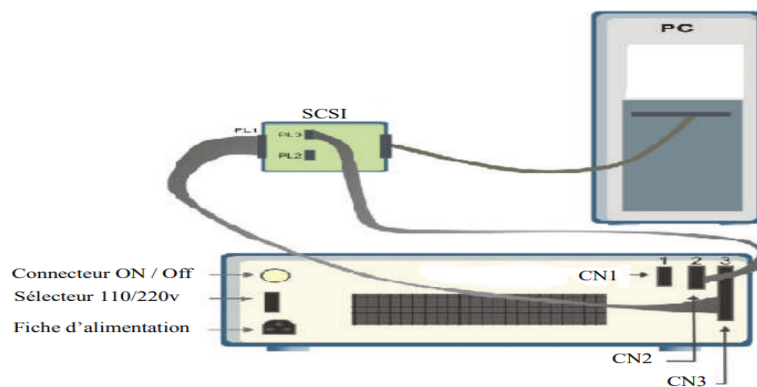


FIGURE 1.5 – Schéma illustrant les connexions entre les dispositifs de contrôle et de commande.

1.6 Méthode d'action

La méthode d'action du système est très simple : lorsque le pendule se penche vers la droite, le chariot doit le rattraper en faisant un mouvement vers la droite, et inversement.

Le problème consiste à régler la dynamique du comportement du système, tels que :

- La stabilité
- La linéarité
- Modèle de connaissance.
- Nombre d'actionneur (Un seul actionneur).
- Nombre de grandeurs à asservir(2 grandeurs).

1.7 Modélisation mathématique de l'ensemble chariot pendule

- Afin d'étudier correctement le comportement dynamique d'un système "Chariot-pendule", nous allons utiliser une approche basée sur des calculs mathématiques.

En premier lieu on pose les coordonnées généralisées de notre système. Par la suite, nous passons à la présentation des équations du mouvement, puis à leur linéarisation.

Finalement, nous obtenons le modèle d'état ainsi que le comportement du système.

- Dans le chariot-pendule inversé, il existe deux degrés de liberté, avec les coordonnées généralisées $x(t)$ pour le déplacement horizontal du chariot, et $\theta(t)$ pour la rotation du pendule. La direction positive de $x(t)$ est la direction à droite en mètre, tandis que l'angle est la direction des aiguilles d'une montre en radian.

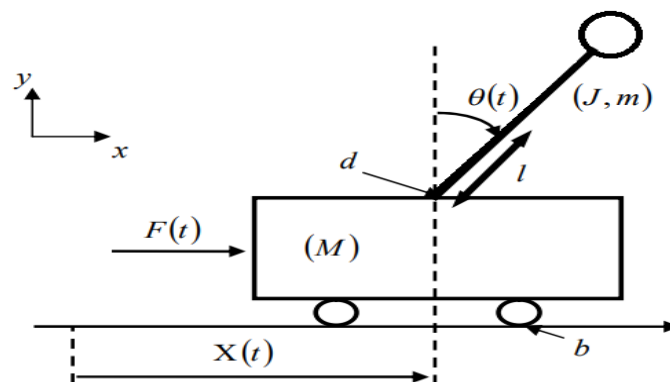


FIGURE 1.6 – Schéma de l'ensemble chariot et pendule inversé.

Les paramètres utilisés sont les suivants :

Paramètre	Description	Valeur	Unité
m	masse du pendule	0.2	k_g
M	masse du chariot	2.3	k_g
l	demi longueur du pendule	0.3	m
$\theta(t)$	angle du pendule	/	rad
$x(t)$	position du chariot	/	m
d	frottements du pendule	0.005	$N.m.s/rad$
b	frottements de déplacement du chariot	0.00005	$N.s/m$
$F(t)$	force exercée sur le chariot	/	N
G	force de gravité	9.81	m/s^2
J	Moment d'inertie du pendule	0.099	$K_g.m^2$

TABLE 1.1 – Récapitulatif des variables du chariot-pendule utilisées dans la modélisation.

- Les équations du mouvement du pendule sont obtenues à l'aide du formalisme d'Euler-Lagrange [BUG.01][LAH.01], lequel repose sur le principe de conservation de l'énergie mécanique, en contraste avec le principe de Newton qui se fonde sur le concept de force.

- Ayant un système à n degré de liberté ou n coordonnées généralisées, l'équation d'Euler-Lagrange s'écrit comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = u_i \quad / i = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

Le Lagrangien est défini comme étant la différence entre l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p du système, il s'exprime par :

$$L(t) = E_c(t) - E_p(t) \quad (1.2)$$

L'énergie cinétique du chariot en mouvement (translation) est donnée par l'équation :

$$E_{cM}(t) = \frac{1}{2} M v^2(t) = \frac{1}{2} M \dot{x}^2(t) \quad (1.3)$$

L'énergie cinétique du pendule (translation+rotation) est exprimée par l'équation :

$$E_{cm}(t) = \frac{1}{2}mv_c^2(t) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2(t) \quad (1.4)$$

$v_c(t)$: La vitesse de centre de gravité du pendule.

$\dot{\theta}(t)$: La vitesse angulaire du pendule.

Soit r_c la position du centre de gravité du pendule avec \vec{i}, \vec{j} étant les vecteurs unitaires du repère x, y

$$\vec{r}_c = (x + l \sin \theta)\vec{i} + l \cos \theta \vec{j} \quad (1.5)$$

La vitesse du centre de gravité du pendule est donc :

$$v_c(t) = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = (\dot{x}(t) + l \cos \theta \dot{\theta}(t))\vec{i} - l \sin \theta \dot{\theta}(t)\vec{j} \quad (1.6)$$

En substituant les équations (1.6) dans l'équation (1.4), l'expression de l'énergie cinétique du pendule devient :

$$E_{cm} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l \cos \theta \dot{\theta} + l^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad (1.7)$$

L'énergie cinétique totale de l'ensemble chariot et pendule est exprimée par :

$$E_c = E_{cM} + E_{cm} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l \cos \theta \dot{\theta} + l^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad (1.8)$$

L'énergie potentielle du centre de gravité du pendule est donnée par :

$$E_p = mgH = mgl \cos \theta \quad (1.9)$$

Remarque :

Le chariot étant en mouvement sur une raille horizontale, seul le pendule en mouvement possède une énergie potentielle.

Le Lagrangien s'écrit, alors, sous la forme :

$$L = \frac{1}{2}(m + M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(ml^2 + J)\dot{\theta}^2 + ml\dot{\theta}\dot{x} \cos \theta - mgl \cos \theta \quad (1.10)$$

Pour établir l'équation (1.1), on procède aux calculs suivant :

1. On commence par la première coordonnée généralisée :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F - b\dot{x} \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m + M)\dot{x} + ml\dot{\theta} \cos \theta \quad (1.12)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = (m + M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (1.13)$$

On à :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (1.14)$$

On remplace (1.13) et (1.14) dans (1.11) :

$$(m + M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = F - b\dot{x} \quad (1.15)$$

$$(m + M)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = F$$

2. la deuxième coordonnée généralisée :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -d\dot{\theta} \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (ml^2 + J)\dot{\theta} + ml\dot{x} \cos \theta \quad (1.17)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = (ml^2 + J)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta - ml\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml\dot{\theta}\dot{x} \sin \theta + mlg \cos \theta \quad (1.19)$$

On remplace (1.18) et (1.19) dans (1.16) :

$$(ml^2 + J)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta - mgl \sin \theta = -d\dot{\theta} \quad (1.20)$$

$$(ml^2 + J)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta + d\dot{\theta} - mgl \sin \theta = 0$$

Donc on obtient les équations du mouvement suivantes :

$$\begin{cases} (m + M)\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + ml\ddot{\theta}(t) \cos \theta - ml\dot{\theta}(t)^2 \sin \theta = F(t) \\ (ml^2 + J)\ddot{\theta}(t) + ml\ddot{x}(t) \cos \theta + d\dot{\theta}(t) - mgl \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

Où : $h = m + M$ et $N = ml^2 + J$

- D'après les équations du mouvement (1.21) le modèle d'état est :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \frac{-b\dot{x}(t)}{h} - \frac{ml\ddot{\theta}(t) \cos \theta}{h} + \frac{ml\dot{\theta}(t)^2 \sin \theta}{h} + \frac{F(t)}{h} \\ \ddot{\theta}(t) = \frac{-ml\ddot{x}(t) \cos \theta}{N} - \frac{d\dot{\theta}(t)}{N} + \frac{mgl \sin \theta}{N} \end{cases} \quad (1.22)$$

$$x_1(t) = x(t) \Rightarrow \dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}(t) \Rightarrow \dot{x}_2(t) = \ddot{x}(t)$$

$$x_3(t) = \theta(t) \Rightarrow \dot{x}_3(t) = \dot{\theta}(t) = x_4(t)$$

$$x_4(t) = \dot{\theta}(t) \Rightarrow \dot{x}_4(t) = \ddot{\theta}(t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{-bN}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} x_2(t) + \frac{mld \cos x_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} x_4(t) - \frac{m^2l^2 g \sin x_3 \cos x_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} \\ \quad + \frac{Nml \sin x_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} x_4^2(t) + \frac{N}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} F(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = \frac{mlg}{N} \sin x_3 - \frac{d}{N} x_4(t) + \frac{mlb \cos x_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} x_2(t) + \frac{m^3l^3 g \cos^2 x_3 \sin x_3}{N(hN-m^2l^2 \cos^2 x_3)} \\ \quad - \frac{m^2l^2 d \cos^2 x_3}{N(hN-m^2l^2 \cos^2 x_3)} x_4(t) - \frac{m^2l^2 \cos x_3 \sin x_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} x_4^2(t) - \frac{ml \cos x_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} F(t) \end{array} \right. \quad (1.23)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-bN}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} & 0 & \frac{mld \cos x_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} + \frac{Nml \sin x_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} x_4(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{mlb \cos x_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} & 0 & -\frac{d}{N} - \frac{m^2l^2 d \cos^2 x_3}{N(hN-m^2l^2 \cos^2 x_3)} - \frac{m^2l^2 \cos x_3 \sin x_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} x_4(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{N}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} \\ 0 \\ -\frac{ml \cos x_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} \end{bmatrix} F(t) \quad (1.24)$$

1.8 Modélisation du moteur à courant continu

La force $F(t)$ est la seule entrée de ce système couplé, qui peut être employée dans un environnement de simulation. Cependant, dans les systèmes du monde réel, il n'est pas possible de fournir la force comme entrée.

Une courroie est connectée à un moteur à courant continu pour faire déplacer le chariot. Ainsi, il est nécessaire de modéliser la dynamique du moteur à courant continu dans les équations du système pour remplacer la force.

Étant donné que le chariot est entraîné par un moteur à courant continu à aimant permanent, le flux inducteur est constant. Le schéma électrique et mécanique équivalent de l'induit est donné par la figure (1.7).

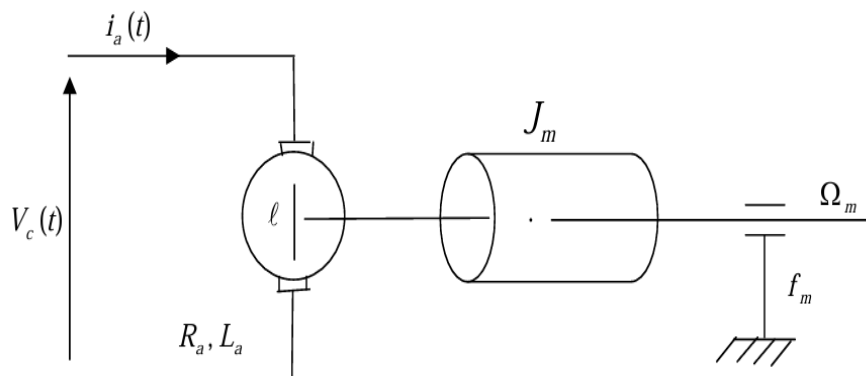


FIGURE 1.7 – Schéma électrique et mécanique de l'induit.

Les paramètres du moteur à courant continu utilisés sont les suivants : [CHA.01] [FEE.01]

Paramètre	Description	Valeur	Unité
R_a	Résistance de l'induit	2.5	Ω (ohm)
L_a	Inductance de l'induit	0.0025	H (henry)
$V_c(t)$	La tension d'alimentation de l'induit du moteur	$[-2.5, 2.5]$	v (volt)
$i_a(t)$	Intensité du courant	/	A (ampère)
K_b	Constante électrique du moteur	0.05	N/m
K_m	Constante mécanique	0.5	Nm
$\ell(t)$	Fcem	/	
J_m	Moment d'inertie	$1.4 \cdot 10^{-5}$	$Kg.m^2$
$C_r(t)$	Couple résistant	/	
$C_m(t)$	Couple moteur	/	
f_m	Coefficient de frottement visqueux	10^{-6}	$Kg.m^2/s$
$\Omega_m(t)$	Vitesse angulaire de moteur	/	
r	Rayon de la poulie	0.027	m

TABLE 1.2 – *Récapitulatif des paramètres de la machine utilisées dans la modélisation.*

- Sur le plan électrique, on peut affirmer que le moteur à courant continu est constitué d'un circuit d'induit et d'un circuit inducteur (aimant permanent). L'induit peut être représenté par une résistance R_a , et une inductance L_a en série avec une source de tension commandée $V_c(t)$ qui est proportionnelle à la vitesse angulaire $\Omega_m(t)$.

- D'un point de vue mécanique, la machine à courant continu est représentée par l'inertie de l'induit qui est augmentée par celle de la charge entraînée.

- Les équations régissant le fonctionnement du moteur à courant continu à aimant permanent sont :

L'application de la loi d'Ohm donne l'équation électrique de l'induit :

$$V_C(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + \ell(t) \quad (1.25)$$

Équation de la fcem :

$$\ell(t) = K_b \Omega_m(t) \quad (1.26)$$

Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire l'équation mécanique du moteur en rotation suivante :

$$J_m \frac{d\Omega_m(t)}{dt} = C_m(t) + C_r(t) + f_m \Omega_m(t) \quad (1.27)$$

Équation de couple :

$$C_m(t) = K_m i_a(t) \quad (1.28)$$

En distinguant la vitesse angulaire de l'arbre de moteur comme sortie et le couple résistant ($C_r(t) = 0$), puis de (1.25), (1.26), (1.27) et (1.28) on aura :

$$\frac{d\Omega_m(t)}{dt} = \frac{-f_m}{J_m} \Omega_m(t) + \frac{K_m}{J_m} i_a(t) + C_r(t) \quad (1.29)$$

$$\frac{di_a(t)}{dt} = \frac{-K_b}{L_a} \Omega_m(t) - \frac{R_a}{L_a} i_a(t) + \frac{1}{L_a} V_c(t) \quad (1.30)$$

$$y_m = \Omega_m(t) \quad (1.31)$$

1.9 Modèle d'état du moteur

En considérant les équations (1.29), (1.30) et (1.31), et en prenant le vecteur

$z(t) = \begin{bmatrix} \Omega_m(t) & i_a(t) \end{bmatrix}^T$ nous obtenons le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = Az(t) + BV_c(t) \\ Y(t) = Cz(t) \end{cases} \quad (1.32)$$

Où :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-f_m}{J_m} & \frac{K_m}{J_m} \\ \frac{-K_b}{L_a} & \frac{-R_a}{L_a} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} V_c(t)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si le courant de l'induit est la sortie, la matrice de sortie devient $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, mais l'équation dynamique du modèle reste la même.

1.10 Modélisation du système global "Moteur-chariot- pendule"

Lorsque l'entrée est une force extérieure $F(t)$, le modèle (1.21) décrit le régime transitoire de l'ensemble pendule-chariot. Dans le banc d'essai que nous utilisons la force $F(t)$ est créée par le moteur à courant continu. La relation existante entre le moteur commandé par la tension $V_c(t)$ et la force $F(t)$ qui permet l'entraînement du chariot, le balancement du pendule et l'équilibrage du pendule, est illustrée par le schéma de la figure (1.8). [CHA.01]

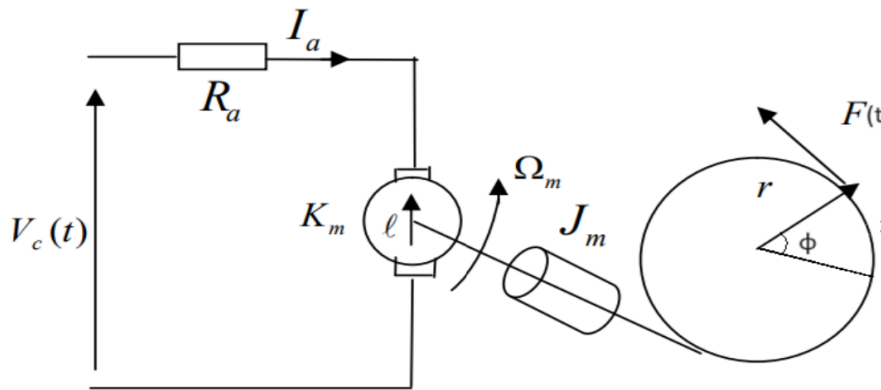


FIGURE 1.8 – Relation entre la force mécanique $F(t)$ et la tension $V_c(t)$.

Afin de ne pas rendre le modèle global de l'ensemble moteur-chariot-pendule plus complexe, et de trouver l'expression de la force $F(t)$ en fonction de la tension d'alimentation du moteur $V_c(t)$, la dynamique du moteur est négligée. Par conséquent, l'équation électrique (1.25) est remplacée par l'équation (1.26) [LAM.02], [AND.01].

$$V_c(t) = R_a i_a(t) + K_b \Omega_m(t) \quad (1.33)$$

Comme

$$x(t) = r\phi(t) \quad (1.34)$$

La dérivée de l'équation (1.34) par rapport à t , donne :

$$\frac{d}{dt}x(t) = r \frac{d}{dt}\phi(t) = r\Omega_m(t) \quad (1.35)$$

$\phi(t)$ est la position angulaire d'un point sur le périmètre de la polie. Et $r = 0.027m$ représente le rayon de la polie.

Par conséquent, la vitesse angulaire du moteur $\Omega_m(t)$ est exprimée par rapport à la vitesse du chariot $\dot{x}(t)$ par la relation :

$$\Omega_m(t) = \frac{\dot{x}(t)}{r} \quad (1.36)$$

En remplaçant l'équation (1.36) par l'équation (1.33), l'expression du courant inductif $i_a(t)$ s'écrit :

$$i_a(t) = \frac{V_c(t)}{R_a} - \frac{K_b}{rR_a} \dot{x}(t) \quad (1.37)$$

La force est produite par le couple produit à l'arbre du moteur (l'équation (1.28)).

$$F(t) = \frac{C_m(t)}{r} = \frac{K_m i_a(t)}{r} \quad (1.38)$$

En remplaçant l'équation (1.37) dans l'équation (1.38), on obtient finalement :

$$F(t) = \frac{K_m}{rR_a} V_c(t) - \frac{K_m K_b}{r^2 R_a} \dot{x}(t) \quad (1.39)$$

1.11 Modèle d'état de l'ensemble "Moteur-chariot-pendule"

Le vecteur d'état est :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) & x_4(t) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x(t) & \dot{x}(t) & \theta(t) & \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}^T \quad (1.40)$$

En utilisant le modèle dynamique du pendule inversé équation(1.23), on remplace la force $F(t)$ par son expression donnée par l'équation (1.39).

Après quelques manipulations mathématiques, on obtient le modèle non linéaire (1.41) où la grandeur de commande est la tension $V_c(t)$.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\
 \dot{x}_2(t) = \frac{-bN}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} x_2(t) + \frac{mld \cos x_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} x_4(t) - \frac{m^2l^2 g \sin x_3 \cos x_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} + \\
 \quad \frac{Nml \sin x_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} x_4^2(t) + \frac{N}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} \frac{K_m}{R_a r} V_c(t) - \frac{N}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} \frac{K_m K_b}{R_a r^2} x_2(t) \\
 \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\
 \dot{x}_4(t) = \frac{mlg}{N} \sin x_3 - \frac{d}{N} x_4(t) + \frac{mlb \cos x_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} x_2(t) + \frac{m^3l^3 g \cos^2 x_3 \sin x_3}{N(hN-m^2l^2 \cos^2 x_3)} \\
 \quad - \frac{m^2l^2 d \cos^2 x_3}{N(hN-m^2l^2 \cos^2 x_3)} x_4(t) - \frac{m^2l^2 \cos x_3 \sin x_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} x_4^2(t) - \frac{ml \cos x_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} \frac{K_m}{R_a r} V_c(t) \\
 \quad + \frac{ml \cos x_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 x_3} \frac{K_m K_b}{R_a r^2} x_2(t) \\
 y_1(t) = x_1(t) \\
 y_2(t) = x_3(t)
 \end{array} \right. \quad (1.41)$$

1.12 Modélisation sous Matlab Simulink et résultats de simulation

Pour visualiser le comportement de notre système nous allons schématiser nos équations de mouvement en un schéma Simulink donné par la figure (1.9).

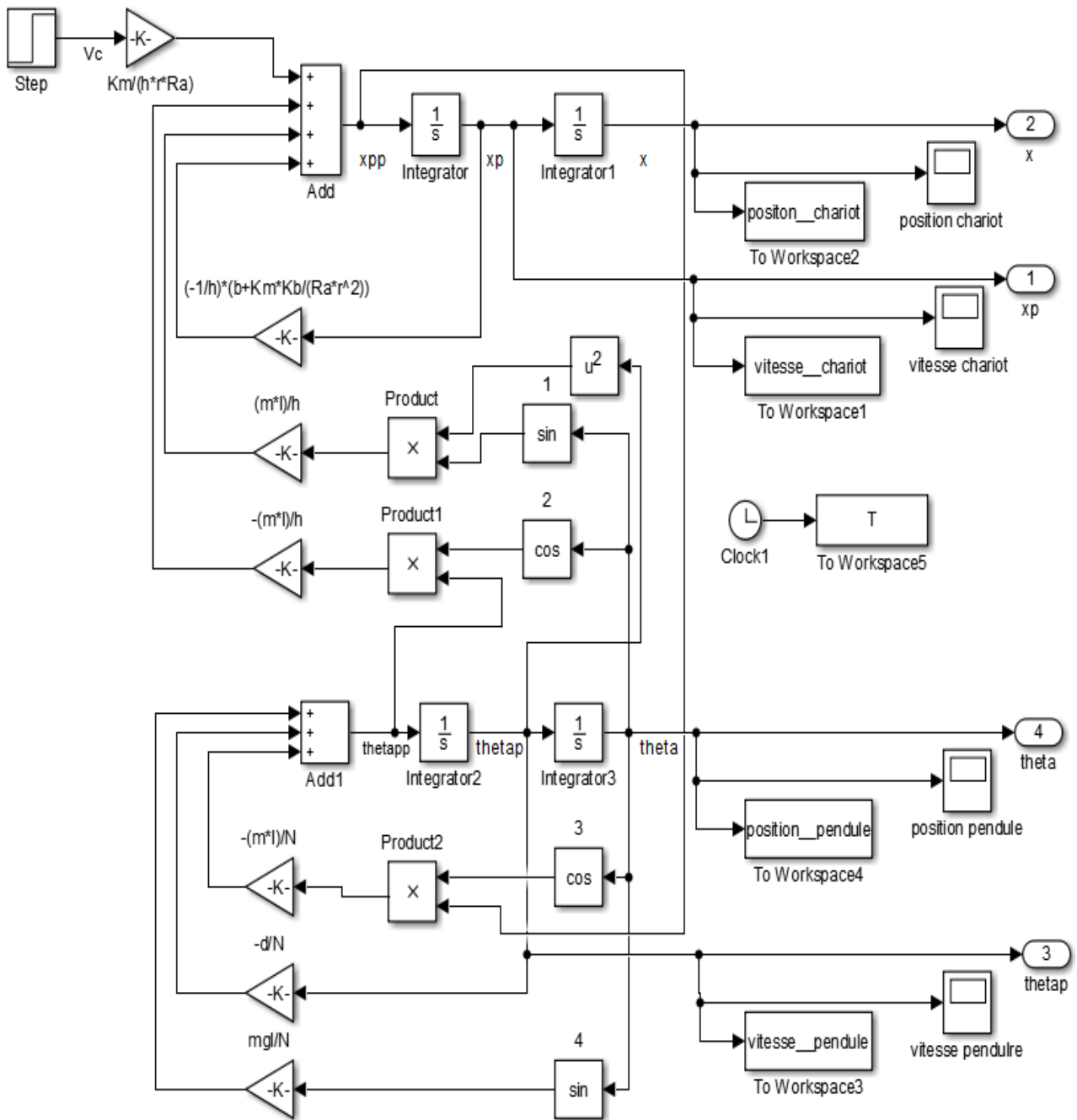


FIGURE 1.9 – Schéma de simulation du système "Moteur-chariot-pendule".

Pour déterminer les points d'équilibres stables et instables de notre système, deux conditions initiales sont utilisées pour simuler notre système "Moteur-chariot-pendule".

Les figures (1.10), (1.11) montrent respectivement les courbes de simulation de la position et de la vitesse du système "Moteur-chariot-pendule", pour des conditions initiales nulles et non nulles.

- Conditions initiales nulles : $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, 0, 0]$

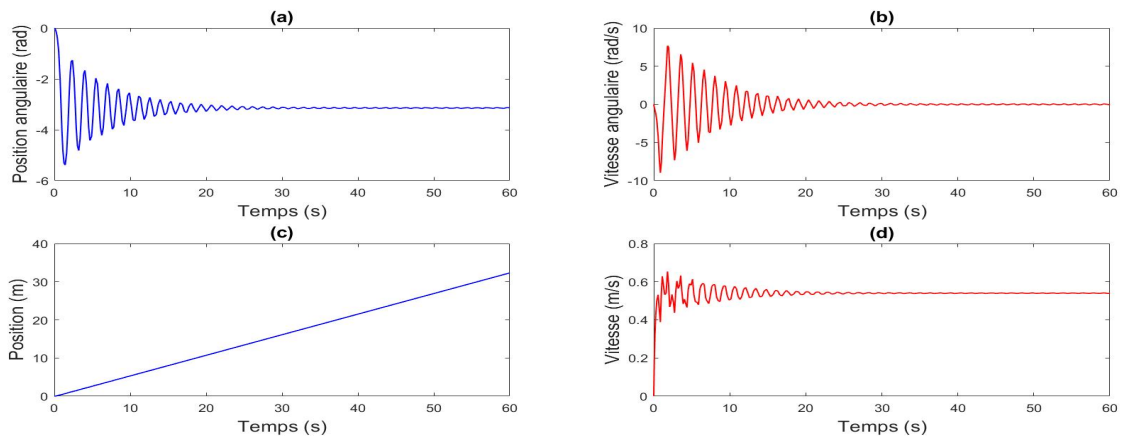


FIGURE 1.10 – Résultats de simulation du système "moteur-chariot-pendule" pour des conditions initiales $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, 0, 0]$. (a et b -Position et vitesse du pendule, c et d -Position et vitesse du chariot.)

Les résultats de simulation montrent que le vecteur $[0, 0, 0, 0]$ est un point d'équilibre instable haut, car lorsque le pendule se trouve en position instable ($\theta = 0$), ce dernier se stabilise après un régime transitoire autour de sa position d'équilibre stable ($\theta = \pi$).

- Conditions initiales non nulles : $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$

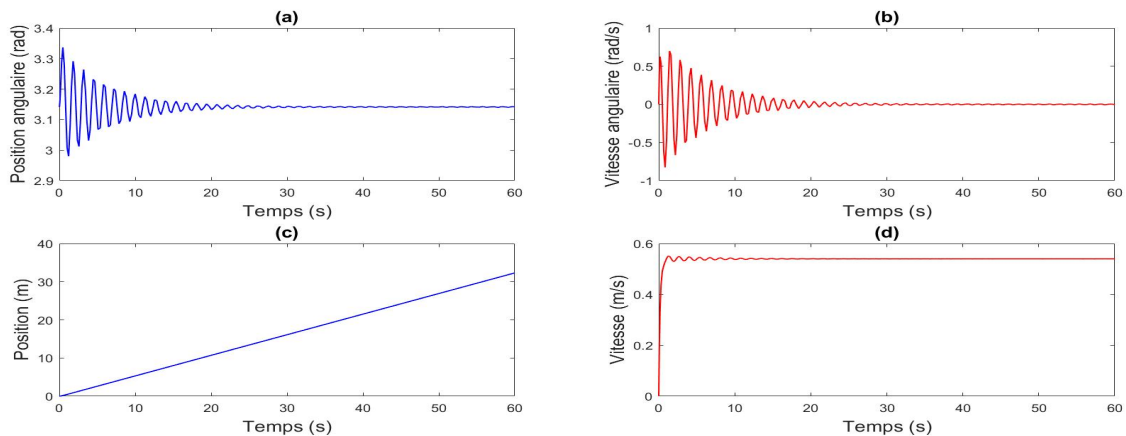


FIGURE 1.11 – Résultats de simulation du système "moteur-chariot-pendule" pour des conditions initiales $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$. (a et b -Position et vitesse du pendule, c et d -Position et vitesse du chariot.)

Les résultats de la simulation montrent que le vecteur $[0, 0, \pi, 0]$ est un point d'équilibre stable bas, car lorsque le pendule est écarté grâce à la tension $V_c(t)$, ce dernier revient après le régime transitoire.

1.13 Linéarisation du modèle autour du point d'équilibre instable ($\theta = 0$)

Afin de concevoir une commande visant à maintenir l'équilibre du système stabilisation du pendule en position haute. La linéarisation est fréquemment employée pour simplifier l'analyse et le contrôle des systèmes non linéaires. Cette méthode consiste à approximer les équations du système autour d'un point d'équilibre, en utilisant le développement en série de Taylor. Grâce à cela, nous obtenons un modèle linéaire, plus facile à analyser, sur lequel nous pouvons mettre en œuvre des méthodes de commande plus simples et plus efficaces afin de stabiliser le système autour de cet équilibre.

Avant de procéder à l'analyse du modèle du système, on linéarise les deux équations différentielles (1.21). Ce système présente deux points d'équilibre : $\theta = 0$ (point d'équilibre instable (position haute)) et $\theta = \pi$ (point d'équilibre stable (position basse)).

Pour des petites variations de θ autour du point d'équilibre θ_0 , on a :

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 + \varepsilon \\ \dot{\theta} = \dot{\varepsilon} \end{cases} \quad (1.42)$$

Le développement en série de Taylor du premier ordre d'une fonction de θ est donné par :

$$f(\theta) \simeq f(\theta_0) + \varepsilon \frac{df(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0} \quad (1.43)$$

On considère que tous les termes d'ordre supérieurs sont nuls, comme suit :

$$\varepsilon^2 \simeq 0 \quad \text{alors} \quad \dot{\varepsilon}^2 \simeq 0 \quad (1.44)$$

Si on se limite aux petites variations de θ autour du point de fonctionnement $\theta_0 = 0$ correspondant à la position haute du pendule et en utilisant le développement limité du premier ordre (1.42) et (1.43) on obtient les approximations suivantes :

$$\begin{cases} \cos \theta \simeq \cos 0 + \theta[-\sin 0] = 1 \\ \sin \theta \simeq \sin 0 + \theta[\cos 0] = \theta \\ \dot{\theta}^2 \simeq 0 \end{cases} \quad (1.45)$$

On substituant les linéarisations (1.45) dans l'équation (1.41) on aura le modèle linéaire du système "Moteur-chariot-pendule" suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \left(\frac{-bN}{hN-m^2l^2} - \frac{NK_mK_b}{r^2R_a(hN-m^2l^2)} \right) x_2(t) + \frac{mld}{hN-m^2l^2} x_4(t) - \frac{m^2l^2g}{hN-m^2l^2} x_3(t) \\ \quad + \frac{NK_m}{rR_a(Nh-m^2l^2)} V_c(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = \left(\frac{mlb}{hN-m^2l^2} + \frac{mlK_mK_b}{r^2R_a(hN-m^2l^2)} \right) x_2(t) + \left(\frac{mgl}{N} + \frac{m^3l^3g}{N(hN-m^2l^2)} \right) x_3(t) - \frac{d}{N} x_4(t) \\ \quad - \frac{m^2l^2d}{N(hN-m^2l^2)} x_4(t) - \frac{mlK_m}{rR_a(Nh-m^2l^2)} V_c(t) \\ y_1(t) = x_1(t) \\ y_2(t) = x_3(t) \end{array} \right. \quad (1.46)$$

Le modèle d'état (1.46) peut alors être mis sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}(t) = Ax(t) + BV_c(t) \\ Y(t) = Cx(t) \end{array} \right. \quad (1.47)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-bN}{hN-m^2l^2} - \frac{NK_mK_b}{(hN-m^2l^2)r^2R_a} & \frac{-gm^2l^2}{hN-m^2l^2} & \frac{mld}{hN-m^2l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{mlb}{hN-m^2l^2} + \frac{mlK_mK_b}{(hN-m^2l^2)r^2R_a} & \frac{mgl}{N} + \frac{m^3l^3g}{(hN-m^2l^2)N} & \frac{-d}{N} - \frac{m^2l^2d}{(hN-m^2l^2)N} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{K_mN}{(hN-m^2l^2)r^2R_a} & 0 & \frac{-mlK_m}{(hN-m^2l^2)r^2R_a} \end{bmatrix}^T, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

Application numérique

En remplaçant les paramètres du modèle linéaire (1.46) par leurs valeurs numériques données dans les tableaux (1.1) et (1.2), on obtient les valeurs numériques des matrices A, B et C du système "Moteur-chariot-pendule".

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5786 & -0.5339 & 0.0045 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1.2443 & 22.2449 & -0.1890 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3124 \\ 0 \\ -0.6719 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

Les valeurs propres de la matrice A sont données par :

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -0.5483, \quad \lambda_3 = -4.8291, \quad \lambda_4 = 4.6093$$

Nous remarquons que la matrice A contiens des valeurs propres à partie réel positive, nous concluons alors que le modèle linéaire autour du point d'équilibre ($\theta = 0$) est instable. Afin de stabiliser ce système nous proposons d'utiliser la commande LQR dans la 2^{em} partie de ce travail.

D'autre part, en substituant les linéarisation (1.45) dans (1.23), on obtient le système d'équation linéarisé du système pendule inversé sans moteur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{-bN}{hN-m^2l^2}x_2(t) + \frac{mld}{hN-m^2l^2}x_4(t) - \frac{m^2l^2g}{hN-m^2l^2}x_3(t) + \frac{N}{hN-m^2l^2}F(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = \frac{mlg}{N}x_3(t) - \frac{d}{N}x_4(t) + \frac{mlb}{hN-m^2l^2}x_2(t) + \frac{m^3l^3g}{N(hN-m^2l^2)}x_3(t) - \frac{m^2l^2d}{N(hN-m^2l^2)}x_4(t) \\ \quad - \frac{ml}{hN-m^2l^2}F(t) \\ y_1(t) = x_1(t) \\ y_2(t) = x_3(t) \end{array} \right. \quad (1.50)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-bN}{hN-m^2l^2} & \frac{-gm^2l^2}{hN-m^2l^2} & \frac{mld}{hN-m^2l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{mlb}{hN-m^2l^2} & \frac{mgl}{N} + \frac{m^3l^3g}{(hN-m^2l^2)N} & \frac{-d}{N} - \frac{m^2l^2d}{(hN-m^2l^2)N} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{N}{(hN-m^2l^2)} & 0 & \frac{-ml}{(hN-m^2l^2)} \end{bmatrix}^T, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

L'application numérique donne :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5339 & 0.0045 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 22.2449 & -0.1890 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4218 \\ 0 \\ -0.9070 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

Les valeurs propres obtenues pour ce modèle, sont donné par :

$$\lambda_{BO} = \{0 ; 0 ; -4.8119 ; 4.6229\} \quad (1.53)$$

On remarque que ce système est instable, car il possède une valeur propre à partie réelle positive ($\lambda_4 = 4.6229$).

1.14 Redressement du pendule inversé par une commande non linéaire

La commande de redressement d'un pendule inversé consiste à ramener le pendule de sa position d'équilibre basse ($\theta = \pi$) vers sa position inversée haute ($\theta = 0$), tel que illustré par la figure (1.12).

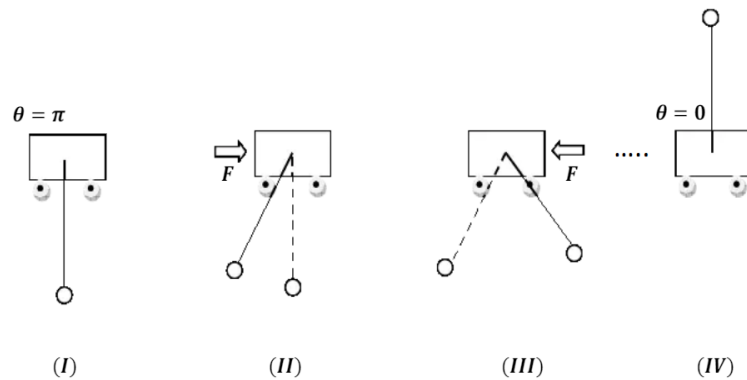


FIGURE 1.12 – Les différentes étapes de redressement du pendule.

1.14.1 Théorème de stabilité de Lyapunov

La méthode directe de Lyapunov a été suggérée par Lyapunov, en se basant sur l'idée de l'énergie mécanique de Lagrange, qui a élaboré le principe de stabilité des systèmes mécaniques, qui stipule que : « un système qui est dans un état où son énergie potentielle possède un minimum isolé est dans un état d'équilibre stable ».

Le théorème de stabilité de Lyapunov fournit des conditions pour analyser la stabilité des points d'équilibre d'un système dynamique à l'aide de fonctions de Lyapunov.

Considérons un système dynamique avec un point d'équilibre à l'origine $x = 0$. Ce point d'équilibre est stable s'il existe une fonction $V(x)$ dérivable telle que :

- $V(0) = 0$ La fonction $V(x)$ prend la valeur zéro à l'origine.
- $V(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$: La fonction $V(x)$ est strictement positive pour toutes les valeurs de x différentes de zéro. Cela signifie que $V(x)$ est définie positive dans une région autour de l'origine.
- $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout $x \neq 0$: La dérivée temporelle de $V(x)$, notée $\dot{V}(x)$, est négative ou nulle pour toutes les valeurs de x différentes de zéro. Cela implique que $V(x)$ ne croît pas au fil du temps, elle est soit constante soit décroissante.

• $\dot{V}(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$: La dérivée temporelle de $V(x)$ est strictement négative pour toutes les valeurs de x différentes de zéro. Cela signifie que $V(x)$ décroît strictement avec le temps.

Alors, l'état d'équilibre $x = 0$ est asymptotiquement stable.

La fonction $V(x)$ qui satisfait ces conditions est appelée fonction de Lyapunov.

1.14.2 Calcul de la commande de redressement

Cette méthode est basée sur le théorème de stabilité de Lyapunov et elle consiste à converger l'énergie du système vers la valeur de l'énergie en position haute.

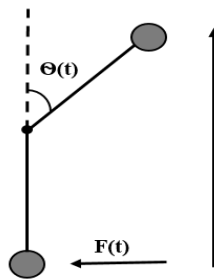


FIGURE 1.13 – Redressement du pendule.

Dans cette méthode nous considérons le pendule tout seul commandé par la force $F(t)$, le coefficient de frottement d du pendule est négligé. En utilisant le modèle dynamique du pendule inversé de l'équation(1.21),

$$N\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta - mgl \sin \theta = 0 \quad (1.54)$$

avec $N = ml^2 + J$,

Étant donné notre intérêt pour le redressement du pendule, nous prenons en compte son énergie mécanique, qui est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. La définition simplifiée de l'énergie du pendule est donnée par : [LAH.01]

$$E_m = E_{cm} + E_p = \frac{1}{2}N\dot{\theta}^2 + mgl(\cos \theta - 1) \quad (1.55)$$

Notre objectif est d'augmenter l'énergie du pendule jusqu'à ce que la position verticale soit atteinte,

$$\dot{E}_m = N\dot{\theta}\ddot{\theta} - mgl\dot{\theta} \sin \theta \quad (1.56)$$

d'après l'équation (1.55), en position haute $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ l'énergie mécanique du système est nulle et dans la position basse $(\theta, \dot{\theta}) = (\pm\pi, 0)$ l'énergie mécanique E_m^* vaut $-2mgl$.

Pour déterminer la loi de commande permettant de redresser le pendule, on considère la fonction de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}(E_m)^2 \quad (1.57)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov V par rapport au temps, s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= E_m(\dot{E}_m) \\ \dot{V} &= E_m(N\ddot{\theta} - mgl\dot{\theta} \sin \theta) \end{aligned} \quad (1.58)$$

De (1.54) on a :

$$N\ddot{\theta} = -ml\ddot{x} \cos \theta + mgl \sin \theta \quad (1.59)$$

En remplaçant (1.59) dans l'équation (1.58) on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= E_m(-ml\ddot{x}\dot{\theta} \cos \theta + mgl\dot{\theta} \sin \theta - mgl\dot{\theta} \sin \theta) \\ \dot{V} &= E_m(-ml\ddot{x}\dot{\theta} \cos \theta) \\ \dot{V} &= -E_m ml\ddot{x}\dot{\theta} \cos \theta \end{aligned} \quad (1.60)$$

En prenant la commande :

$$u = \ddot{x} = \gamma E_m \text{sign}(\dot{\theta} \cos \theta), \quad \gamma > 0 \quad (1.61)$$

avec

$$\text{sign}(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.62)$$

Finalement, la dérivée de la fonction de Lyapunov \dot{V} est exprimée par :

$$\dot{V} = -\gamma E_m^2 ml\dot{\theta} \cos \theta \text{sign}(\dot{\theta} \cos \theta) \quad (1.63)$$

Pour la position basse $\theta = \pi > 0$, alors $\text{sign}(\dot{\theta} \cos \theta) = 1$ et $\frac{dV}{dt} \leq 0$.

Donc cette commande permet de faire converger l'énergie E vers la valeur $E^* = 0$, ce qui permet alors de redresser le pendule à la position haute. Une fois que l'énergie mécanique atteint zéro, le pendule est dans une position d'équilibre verticale. Si aucune perturbation n'est appliquée, cette position est maintenue.

En résumé, la méthode de redressement basée sur l'énergie et la fonction de Lyapunov représente une méthode efficace pour redresser le pendule. Elle utilise les caractéristiques énergétiques du système afin de garantir la convergence vers l'équilibre vertical, ce qui lui permet de proposer une solution solide et performante pour superviser des systèmes instables. Il est possible d'effectuer des simulations concrètes afin de vérifier cette approche dans des situations réelles.

Après que le pendule atteint la position vertical au voisinage de ($|\theta| < 0.2$ rad), une commande de stabilisation telle que la commande LQR (Linear Quadratic Regulator) est nécessaire pour stabiliser le pendule à cette position.

1.14.3 Simulation

Le schéma simulink du redressement du pendule inversé est illustré par la figure (1.14). Les deux blocs : "Redressement" et "pendule inversé", représentent respectivement la loi de commande (1.61) et le modèle non linéaire "Moteur-chariot-pendule". Initialement, pour écarter le pendule de sa position d'équilibre stable ($\theta = \pi$), une impulsion de 0.1 sec et d'amplitude de 0.6 volts est additionnée à la commande $u(t)$ avec $\gamma = 1.8$. Pour assurer une tension d'alimentation de l'induit du moteur à courant continu entre -2.5 et $+2.5$ volts, un bloc de saturation de ± 2.5 volts est inséré à la sortie de la commande $u(t)$.

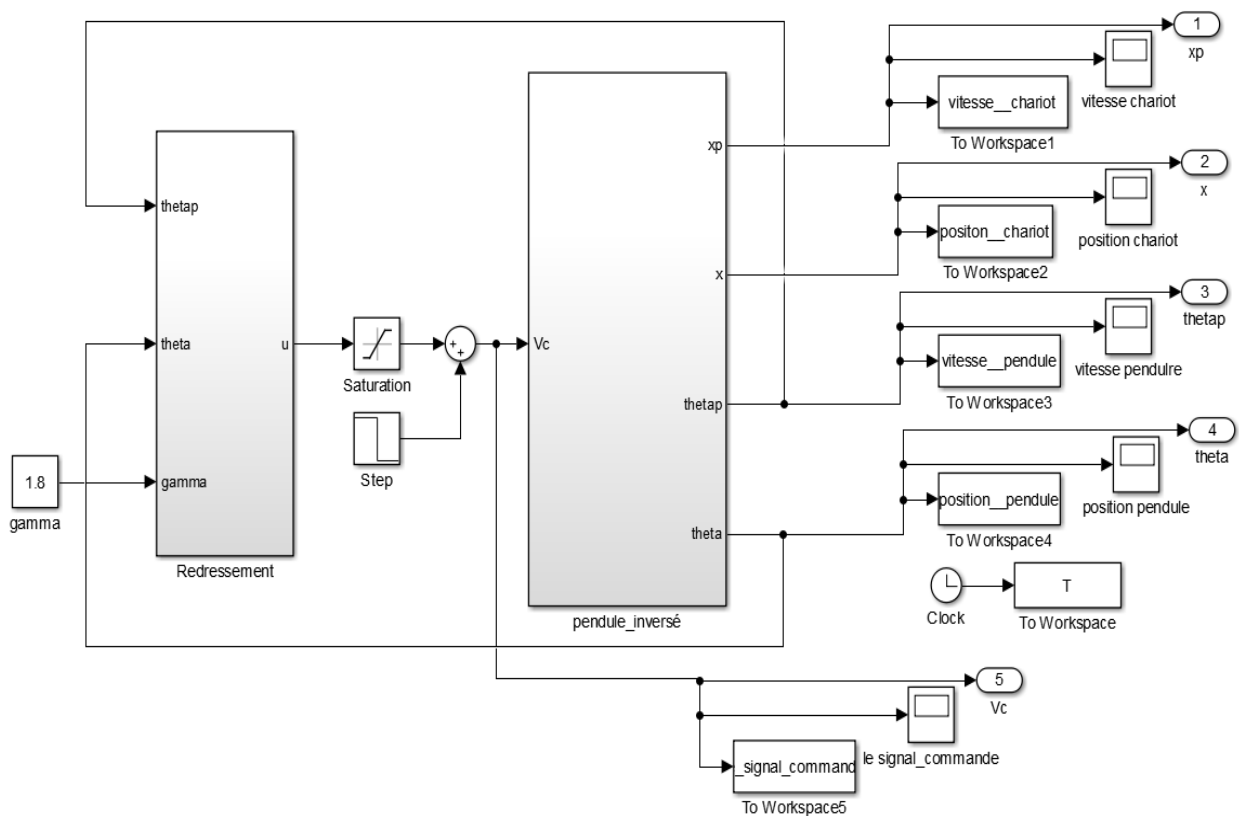


FIGURE 1.14 – Schéma de Simulink de la commande de redressement.

1.14.4 Résultats de simulation

La figure (1.15), montre les courbes de position et de vitesse du pendule et du chariot, ainsi que le signal de commande $v_c(t)$ obtenus à partir du schéma simulink (1.14) pour les conditions initiales $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pm\pi, 0]$.

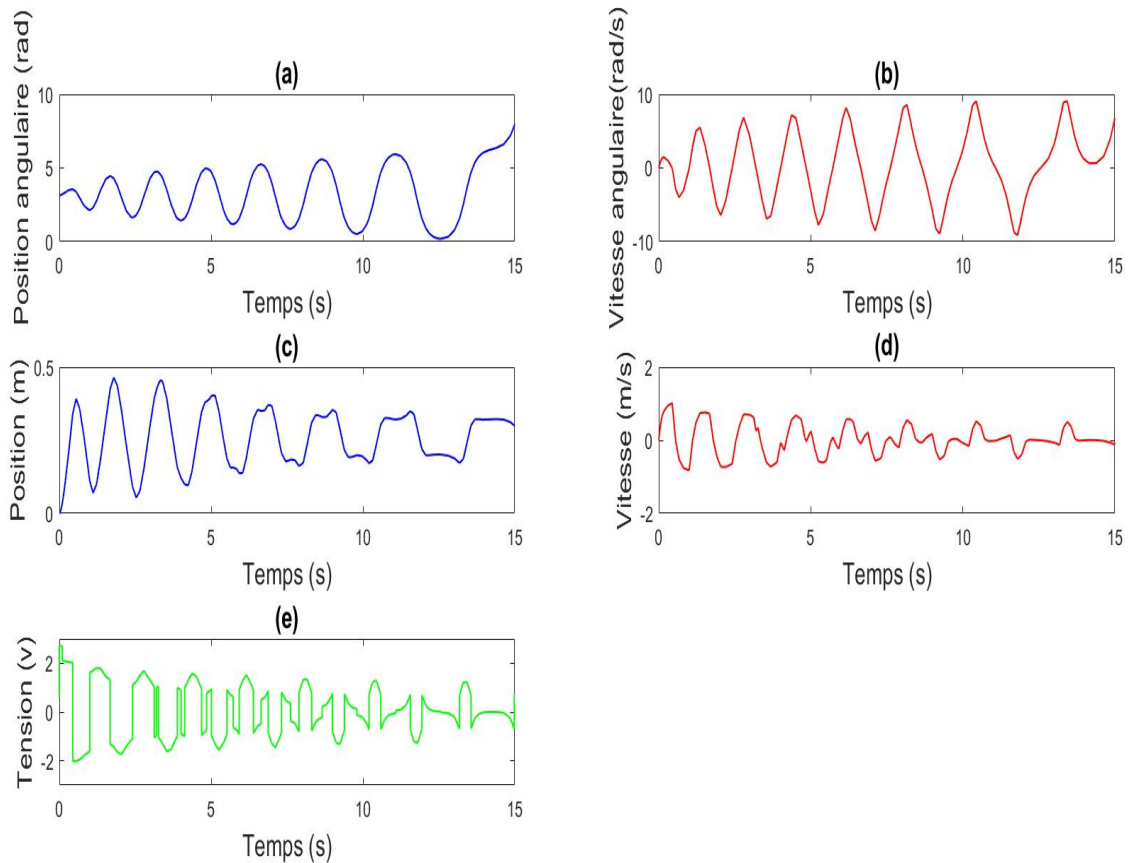


FIGURE 1.15 – Résultats de simulation de la commande de redressement pour $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$. (a et b -Position et vitesse du pendule, c et d -Position et vitesse du chariot, e -Signal de commande.)

1.14.5 Interprétation des résultats

La figure (1.15) nous montre les résultats obtenus lors de l'implémentation de cette commande, on constate dans la figure (1.15-a) une croissance des oscillations du pendule, et dans la figure (1.15-c) une diminution du déplacement du chariot ainsi que leurs vitesses, jusqu'à ce que l'amplitude des oscillations atteigne 6.28 rad et le pendule atteigne sa position haute $\theta = 0 \text{ rad}$ en 14 sec .

La commande de redressement permet de ramener le pendule de sa position d'équilibre stable $\theta = \pi$ vers la position d'équilibre instable $\theta = 0$, toute en respectant les limites de la longueur du rail $[-0.5; 0.5] \text{ m}$, et la tension d'alimentation du moteur ($-2.5 \leq u \leq 2.5$) volts, représentée dans la figure (1.15-e).

1.15 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé la modélisation du pendule inversé et nous avons développé un modèle sur Simulink pour visualiser le comportement de notre système non linéaire.

Ensuite, en appliquant le théorème de stabilité de Lyapunov, nous avons synthétisé une commande de redressement pour ramener le pendule à sa position d'équilibre instable. Cependant, cette commande ne permet pas de maintenir le pendule à cette position ($\theta = \pi$).

Par conséquent dans le prochain chapitre, nous allons explorer la théorie de commande linéaire quadratique (LQR) pour déterminer la commande nécessaire à la stabilisation complète de notre système.

Chapitre 2

La commande linéaire quadratique LQR

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à la commande optimale, plus précisément à la commande linéaire quadratique (LQR)(linear quadratic regulator). La commande LQR s'avère être une approche puissante et largement utilisée pour stabiliser des systèmes linéaires en minimisant une fonction de coût quadratique.

Ce chapitre couvre les principes fondamentaux de la commande LQR, ses applications pratiques, et l'importance des matrices de pondération dans la conception. Les matrices de pondération permettent de spécifier l'importance relative des différents états et des commandes dans le système. En ajustant les valeurs de ces matrices, on peut influencer le comportement de la commande LQR pour obtenir une performance optimale.

Pour montrer l'efficacité de la commande LQR, un exemple de simulation numérique est présenté.

De plus, nous allons appliquer la commande linéaire quadratique(LQ) au système "chariot-pendule" pour stabiliser le pendule autour de son point d'équilibre instable.

2.2 Commande optimale

La commande optimale est une méthode de contrôle qui permet de trouver la meilleure façon de contrôler un système dynamique en minimisant un critère de performance. Ce critère peut prendre en compte différents facteurs tels que le temps de réponse, la consommation d'énergie, l'usure des composants, etc. La commande optimale permet donc de trouver un équilibre entre les performances du système et les contraintes imposées.[DON.01]

Il existe différentes méthodes pour trouver la commande optimale. La méthode la plus courante est la programmation dynamique, qui consiste à diviser le problème en sous-problèmes plus simples à résoudre. Cette méthode permet de trouver la commande optimale en minimisant le critère de performance à chaque étape du processus. Cependant, elle nécessite une grande puissance de calcul et peut devenir rapidement complexe pour des systèmes de grande dimension.

Une autre méthode courante est la commande linéaire quadratique (LQR), qui consiste à minimiser une fonction de coût quadratique en fonction des états et des entrées du système, sous contrainte d'une équation d'état linéaire. Cette méthode permet de trouver une commande optimale sous forme de gain de rétroaction, qui est fonction des états du système. La commande LQR est largement utilisée pour les systèmes linéaires, et elle est simple à mettre en œuvre.

Il est important de noter que la commande optimale dépend du modèle mathématique du système. Plus le modèle est précis, plus la commande optimale sera efficace. Cependant, il est souvent difficile d'obtenir un modèle parfaitement précis, en particulier pour les systèmes non linéaires.

2.3 Commande linéaire quadratique (LQR)

La commande linéaire quadratique dénommée LQ ou LQR (linear quadratic regulator), où la commande est quadratique et le système est linéaire [EDO.01].

L'idée consiste en la recherche de la matrice de gains d'une commande optimale par retour d'état, qui est quadratique en l'état $x(t)$ et la commande $u(t)$, et qui est une somme pondérée de l'énergie de $x(t)$ et de celle de $u(t)$. [CHA.01]

$$u(t) = -Kx(t) \quad (2.1)$$

Qui a pour but de stabiliser le système et minimiser les critères quadratique de performances : [MAI.01]

- Poursuite : L'objectif est de minimiser la distance entre l'état du système $x(t)$ et la consigne désirée $x^d(t)$, c'est à dire minimiser l'erreur $e(t) = x^d(t) - x(t)$. Mathématiquement, la poursuite s'exprime sous la forme :

$$J = \int_0^{+\infty} \{(x^d(t) - x(t))^T Q (x^d(t) - x(t))\} dt \quad (2.2)$$

Q est la matrice de pondération sur les états $x(t)$.

- Régulation : C'est un cas particulier de la poursuite c'est à dire $x^d(t) = 0$, (dans ce cas la variable de x est une variable d'état). Mathématiquement le critère est de la forme :

$$J = \int_0^{+\infty} \{x^T(t) Q x(t)\} dt \quad (2.3)$$

- Énergie minimale : L'objectif est de minimiser l'énergie mise en œuvre, mathématiquement le problème revient à minimiser l'énergie de la commande u donnée comme suite :

$$J = \int_0^{+\infty} \{u^T(t) R u(t)\} dt \quad (2.4)$$

R est la matrice de pondération sur la commande $u(t)$.

• Temps minimale : L'objectif est de ramener l'état du système de l'état initiale vers l'état final en un temps faible. Dans ce cas t_f est inconnu. Mathématiquement on doit minimiser :

$$J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt \quad (2.5)$$

Remarque :

Lorsqu'on a plusieurs objectifs le critère est donné sous forme d'une somme des différents objectifs. Par exemple :

★ Poursuite avec énergie minimale. La formulation mathématique du critère quadratique est donnée par :

$$J = \int_0^{+\infty} \{(x^d(t) - x(t))^T Q (x^d(t) - x(t)) + u(t)^T R u(t)\} dt \quad (2.6)$$

Le critère quadratique de performance est utilisé pour définir l'objectif de la commande optimale dans le cadre d'un régulateur quadratique linéaire (LQR). Ce critère mesure l'écart entre les états du système et les états désirés, ainsi que l'effort de commande nécessaire pour atteindre ces états désirés.

Où x^d est le vecteur des états désirés.

$(x^d(t) - x(t))^T Q (x^d(t) - x(t))$: Ce terme pénalise l'écart entre les états réels du système et les états désirés. Une grande valeur des éléments diagonaux de la matrice Q signifie que les écarts correspondants sont fortement pénalisés, poussant le système à minimiser ces écarts.

$u(t)^T R u(t)$: Ce terme pénalise l'effort de commande. Une grande valeur des éléments de la matrice R signifie que les efforts de commande sont fortement pénalisés, poussant le système à utiliser des efforts de commande moindres.

★ Régulation avec énergie minimale. Le critère quadratique de performance J qui s'exprime par la formule suivant :

$$J = \int_0^{+\infty} \{x^T(t) Q x(t) + u(t)^T R u(t)\} dt \quad (2.7)$$

dans le but de ramener notre système à son état d'équilibre rapidement suite à une perturbation quelconque en tenant compte des contraintes liées à un cahier des charges.

2.4 Principes de la commande par retour d'état

Le but de la commande linéaire quadratique est de formuler le problème de commande par retour d'état en termes d'optimisation d'un critère qui traduit le compromis entre l'effort demandé à la commande (actionneurs) et les contraintes qu'on veut imposer à l'état. En effet ces contraintes sont les actions demandées aux actionneurs. On fixe dans cette partie l'objectif suivant :

★ Stabilisation du système pendule inversé par retour d'état de type LQR.

Stabilisation

La stabilisation d'un système dynamique consiste à concevoir une loi de commande qui assure que, pour toute perturbation initiale, l'état du système converge vers l'état d'équilibre désiré.

De nombreuses méthodes de commande des processus utilisent le principe du retour d'état (commande optimale, placement de pôles, . . .).

Le principe de cette commande est de déterminer une commande telle que les pôles du système soient convenablement placés dans le plan complexe et satisfasse des performances de précision, de rapidité, de stabilité.

Les pôles du système correspondent aux valeurs propres de sa matrice d'état (A). Notre objectif consiste alors à modifier la position des pôles de la matrice d'état (A) du système.

2.5 Développement de la commande linéaire quadratique (LQR)

En Automatique la commande linéaire quadratique (LQ), est une méthode qui permet de calculer la matrice de gains d'une commande par retour d'état. L'initiateur de cette approche est Kalman, auteur des trois articles fondamentaux :

La synthèse linéaire quadratique [LAR.03] consiste à la recherche d'une matrice gain K , pour le système linéaire continu :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

telle que la commande par retour d'état $u(t) = -Kx(t)$ stabilise le système et minimise le critère quadratique suivantes :

$$J(u) = \int_0^{+\infty} \{x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\}dt \quad (2.9)$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ désigne le vecteur d'état

$u(t) \in \mathbb{R}^m$ le vecteur de commande

$y(t) \in \mathbb{R}^q$ vecteur de sortie

x_0 désigne l'état initial à l'instant initial $t = 0$

A est la matrice d'évolution ou d'état,

B la matrice de commande ou d'entrée,

C la matrice de sortie ou de mesure,

Les matrices de pondération Q et R satisfont :

$$Q = Q^T \geq 0, R = R^T > 0 \quad (2.10)$$

La matrice gain K optimale est donnée par :

$$K = -R^{-1}B^T\rho_0 \quad (2.11)$$

Où ρ_0 est la solution positive de l'équation algébrique de Riccati :

$$\rho_0 A + \rho_0 A^T - \rho_0 B R^{-1} B^T \rho_0 + Q = 0 \quad (2.12)$$

Afin d'obtenir le gain K , il est nécessaire de passer par la recherche de la solution ρ_0 symétrique définie positive de l'équation de Riccati, qui est rapportée dans l'équation (2.12).

Choix des matrices de pondération

Les matrices de pondération sont généralement choisies diagonales. Au départ, ces matrices (Q et R) doivent être choisies comme des matrices identités. Ensuite, par les essais/erreurs on fixe les bons poids de pondération de chaque composant de l'erreur ou de commande pour avoir une poursuite et une régulation souhaitée. [SEL.01]

$$Q = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (2.13)$$

$$R = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_m) \quad (2.14)$$

Pour faire une évaluation initiale de Q et R , on se basera sur le calibrage physique des entrées-sorties correspondantes, en prenant :

$$r_i = \left[\frac{1}{\text{sup}(u_i)} \right]^2, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.15)$$

$$q_i = \left[\frac{1}{\text{sup}(y_i)} \right]^2, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.16)$$

2.6 Application de la commande LQR

Pour illustrer l'application de la commande LQR nous considérons deux exemples : Un exemple académique, et un exemple expérimental donné par le modèle chariot-pendule.

2.6.1 Exemple numérique

Considérons le système linéaire, représenté par le modèle d'état suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Les valeurs propres correspondant à ce modèle sont données par :

$$\lambda_{BO} = \{5 \ ; \ -2\} \quad (2.18)$$

on remarque que ce système est instable, car il possède une valeur propre à partie réelle positive ($\lambda_1 = 5$).

Pour des matrices de pondération :

$$R = 1 \quad \text{et} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

La matrice de gain K qui minimise la fonction quadratique (2.7), calculée avec la fonction 'lqr' de Matlab $K = lqr(A, B, Q, R)$, est donnée par :

$$K = [13.6498 \ 10.1596] \quad (2.20)$$

Les valeurs propres obtenues pour le modèle du système en boucle fermée (A-BK) sont :

$$\lambda_{BF} = \{-2.1017; -5.0580\} \quad (2.21)$$

Nous constatons que l'application de la commande LQR a réussi à stabiliser le système en boucle fermée, car toutes les valeurs propres de la matrice d'état (A - BK) présentent des parties réelles négatives. Les résultats de simulation de la réponse temporelle des états $x_1(t)$ et $x_2(t)$ du modèle d'état (2.17), avec des conditions initiales $x_0 = [1; 0]$, sont illustrées par la figure (2.1) ci dessous :

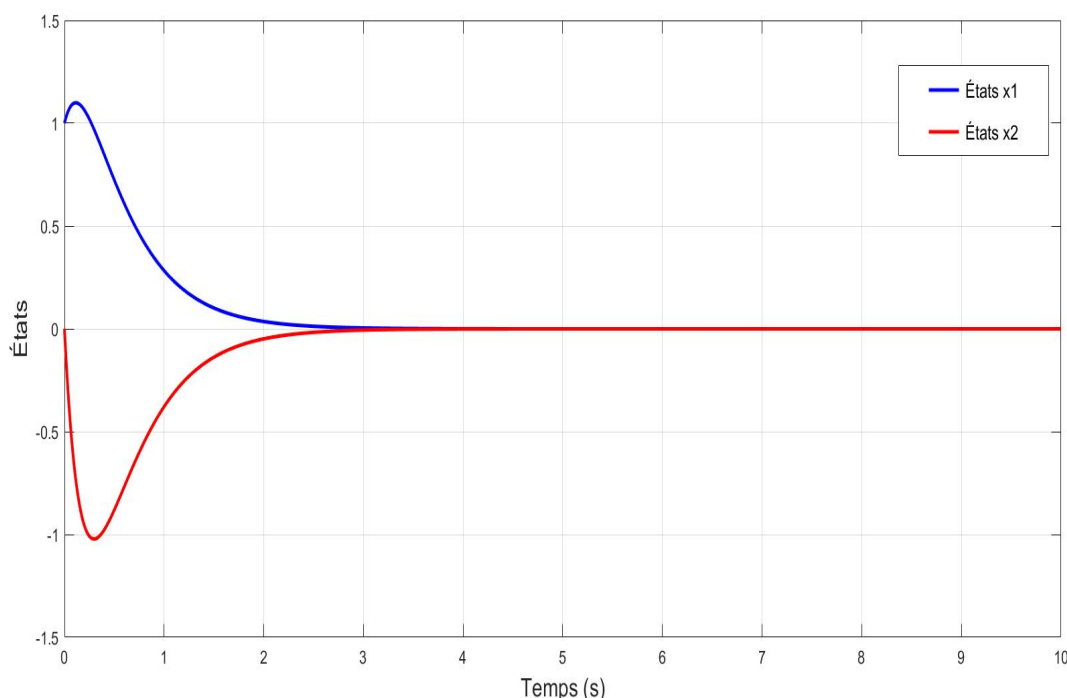


FIGURE 2.1 – Courbe d'évolution des états x_1 et x_2 du système avec le contrôleur LQR ($x(0) = [1; 0]$).

Dans la figure (2.1), on observe que le système linéaire se stabilise après 3 sec. La variable $x_1(t)$ débute à 1 et décroît rapidement vers 0, sans jamais le dépasser, atteignant le régime permanent aux alentours de 3 sec. Quant à $x_2(t)$, elle commence à 0, oscille légèrement, puis converge vers 0 à $t = 3$ sec.

Ces résultats indiquent que la commande LQR parvient à ramener les états $x_1(t)$ et $x_2(t)$ à l'origine, sans dépassement significatif et avec un temps de réponse optimal.

2.6.2 Modèle chariot-pendule

Pour le deuxième exemple, considérons le modelé d'état linéaire instable, donné par l'équation (1.50) avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5339 & 0.0045 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 22.2449 & -0.1890 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0.4218 & 0 & -0.9070 \end{bmatrix}^T, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Le nombre d'état du modèle étant égal à $n = 4$ et le nombre d'entrées de commande étant $m = 1$. Afin de synthétiser la loi de commande LQR correspondante, on prend :

$$R = 0.05, \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Ces matrices sont choisies de manière à pénaliser les variables d'états par rapport aux entrées lorsqu'elles s'écartent de la consigne, ou inversement.

En appliquant la commande "lqr" de Matlab $K = lqr(A, B, Q, R)$, on obtient la matrice gain suivante :

$$K = [-6.3246 \quad -9.5636 \quad -87.7105 \quad -20.1826] \quad (2.24)$$

La matrice d'état du système en boucle fermé $(A - BK)$ est donnée par :

$$(A - BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2.6677 & 4.0339 & 36.4624 & 8.5175 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5.7364 & -8.6742 & -57.3086 & -18.1166 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Ces valeurs propres sont données par :

$$\lambda_{BF} = \{-8.8111 \quad -2.9646 \quad -1.1535 + 0.9078i \quad -1.1535 - 0.9078i\} \quad (2.26)$$

Comme toutes les valeurs propres du système muni du contrôleur LQR sont toutes à partie réelle négative, on conclut alors que le système en boucle fermé est stable.

Résultats de simulation du modèle chariot-pendule

La figure (2.2) représente le schéma Simulink du modèle d'état (1.50).
 Les paramètres de la matrice de gain K , sont donnés par l'équation (2.24).

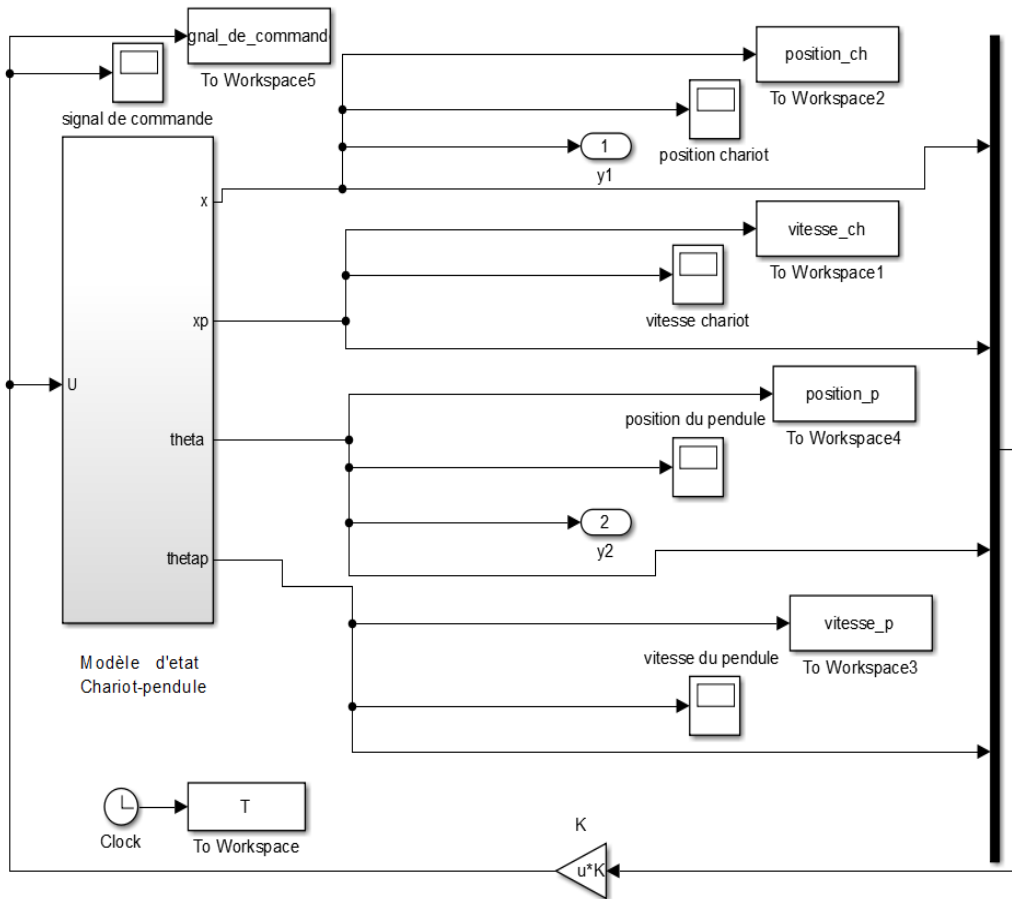


FIGURE 2.2 – Schéma Simulink du système "chariot-pendule" avec la commande LQR.

La figure (2.3), représente la position et la vitesse du pendule et du chariot, ainsi que le signal de commande pour les conditions initiales : $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, 0.2, 0]$.

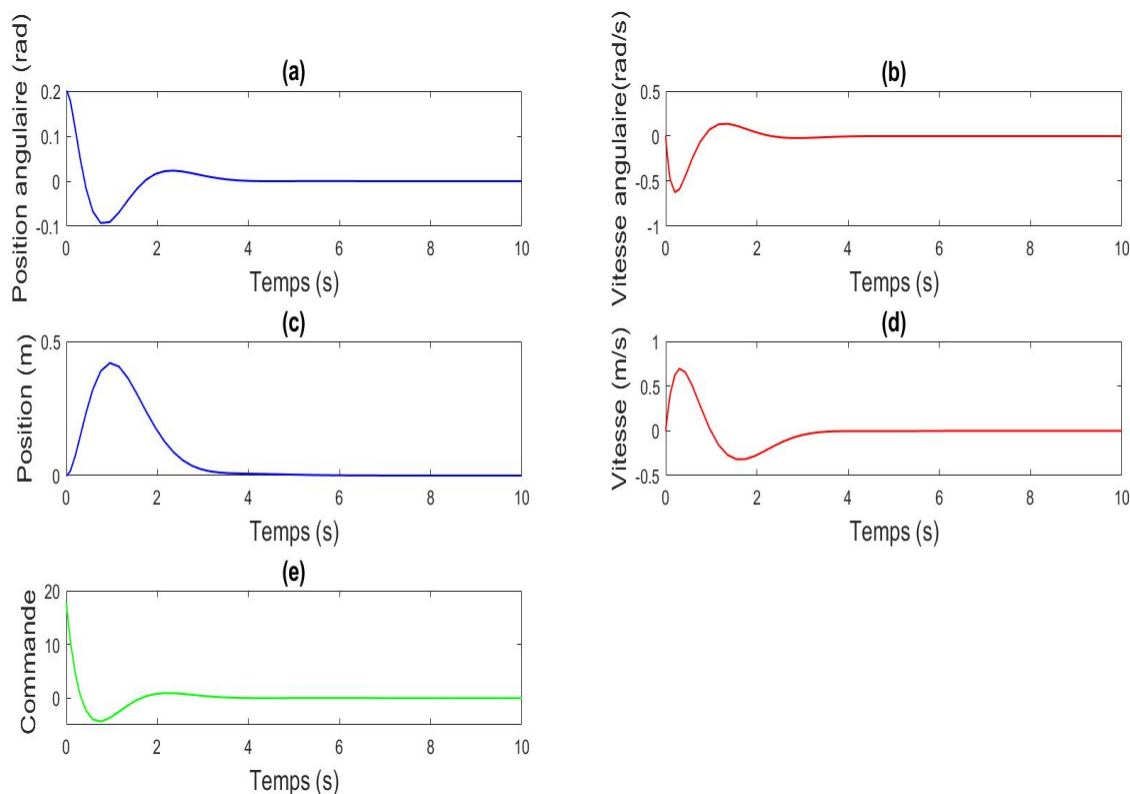


FIGURE 2.3 – *Résultat de simulation du modèle linéaire avec le régulateur LQR, $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, 0.2, 0]$. (a et b -Position et vitesse du pendule, c et d -Position et vitesse du chariot, e -Signal de commande.)*

Dans la figure (2.3), on peut observer dans la figure (2.3-a) que le système pendule inversé se stabilise après 4 sec tout en respectant les limites imposées : la distance du rail ($x \in [-0.5, 0.5]$ m).

Effectivement, dans la figure (2.3-c) le mouvement du chariot ne dépasse pas les limites physiques du rail.

Test de robustesse face aux perturbations de la position angulaire θ

La figure (2.4) représente le schéma de simulation d'une perturbation externe sur la position angulaire du pendule après la phase de stabilisation. En effet, à l'instant $t = 4$ sec une perturbation externe sous forme d'une impulsion d'amplitude 0.04 rad et d'une durée de 0.5 sec, est ajoutée à la valeur de la position angulaire θ .

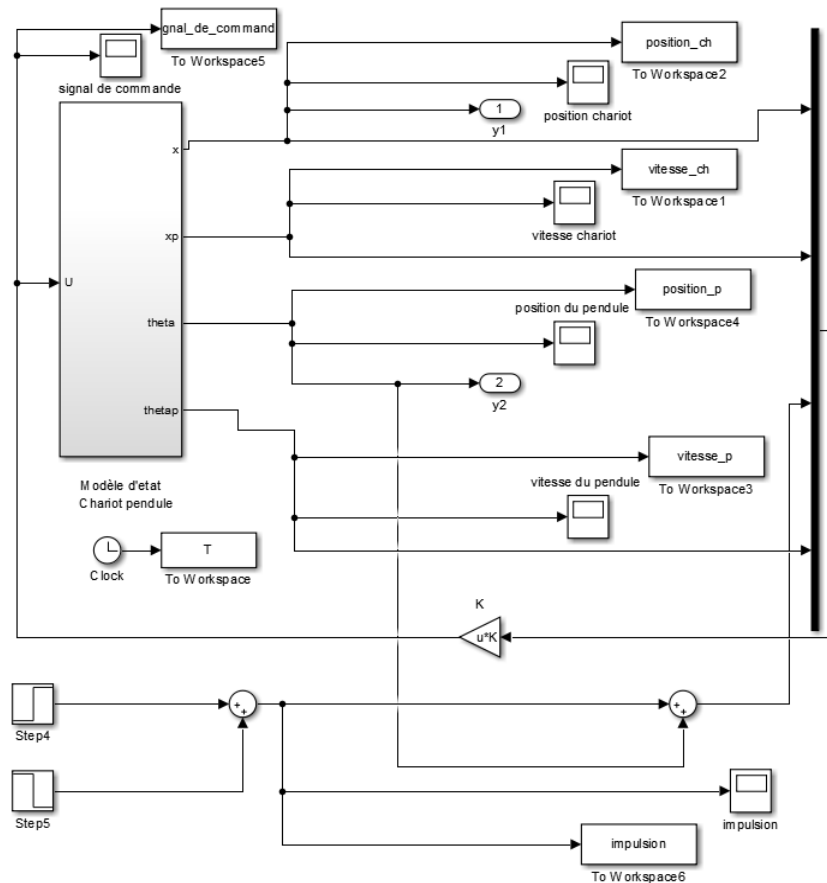


FIGURE 2.4 – Schéma Simulink de la commande LQR du système "chariot-pendule", avec perturbation sur le pendule.

La figure (2.5), représente les résultats de simulation en présence de la perturbation externe sur la position angulaire du pendule, ainsi que le signal de commande pour les conditions initiales suivantes $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, 0.2, 0]$.

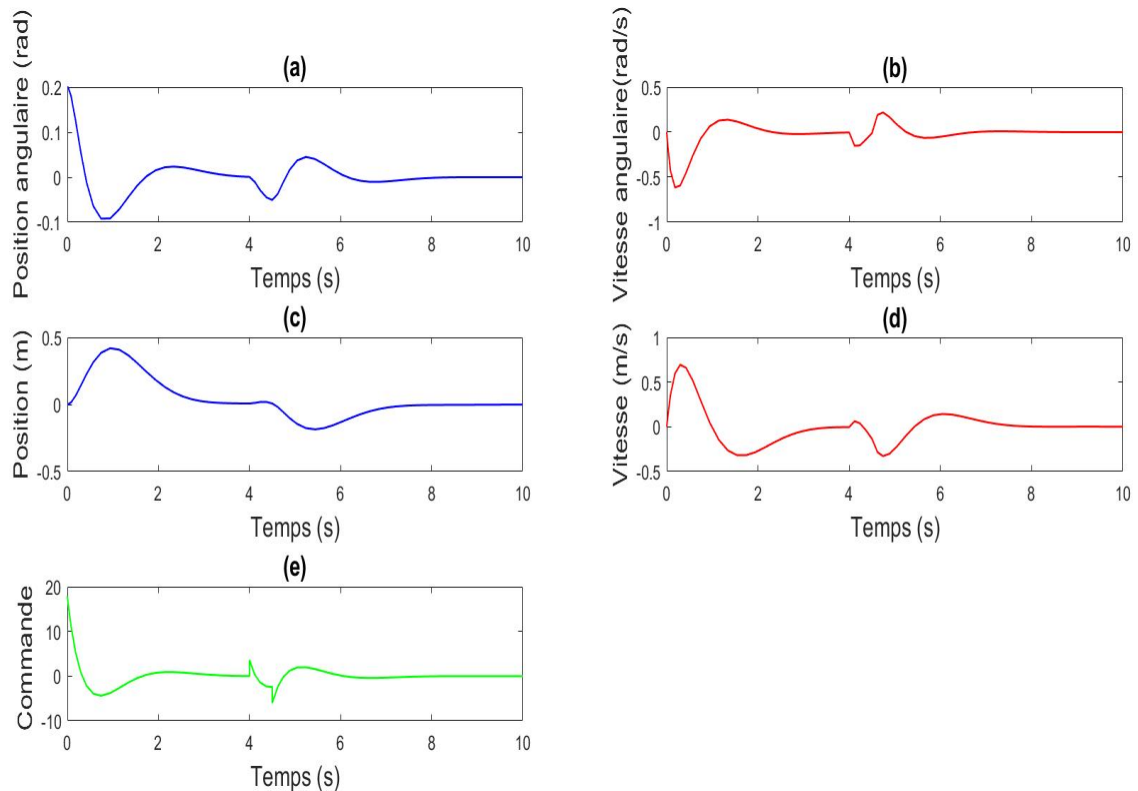


FIGURE 2.5 – Réponse temporelles de la commande LQR du système "chariot-pendule" en présence de perturbation sur le pendule. (a et b -Position et vitesse du pendule, c et d -Position et vitesse du chariot, e -Signal de commande.)

Après application de la perturbation externe à $t = 4 \text{ sec}$, la courbe de position, illustrée par la figure (2.5), montre que le chariot s'écarte de sa position initiale $x = 0 \text{ m}$, pour ensuite revenir à cette position après 3 sec. Par rapport à la position angulaire du pendule, on constate une période d'oscillations qui dure 3 sec avant de se stabiliser à l'instant $t = 7 \text{ sec}$. De plus, à $t = 4 \text{ sec}$ un pic de tension peut être observer sur la courbe de commande, ce dernier est généré pour compenser le signal de perturbation.

Après perturbation, on remarque que le chariot et le pendule se stabilisent après une brève durée de temps, ce qui affirme la performance de la commande de stabilisation et sa capacité à compenser les effets de perturbation.

2.7 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la commande linéaire quadratique (LQR) qui représente une méthode robuste et efficace pour la stabilisation des systèmes dynamiques linéaires. On a examiné les principes fondamentaux de la commande LQR, y compris la formulation du critère de performance quadratique, la résolution de l'équation de Riccati pour obtenir la matrice de gain optimale, et son application. Les résultats des simulations ont confirmé la capacité de la commande LQR à stabiliser rapidement les systèmes tout en minimisant l'effort de commande.

Dans l'ensemble, la commande LQR demeure une méthode incontournable pour les ingénieurs en automatique, cherchant à optimiser le comportement dynamique des systèmes sous leur contrôle. Son utilisation permet de concevoir des stratégies de contrôles efficaces, robustes et adaptées aux contraintes spécifiques du système étudié.

Dans le chapitre suivant, nous allons appliquer cette commande linéaire quadratique LQ sur le système non linéaire "Moteur-chariot-pendule", et visualiser les résultats afin d'évaluer la performance et la robustesse des deux commandes (redressement et stabilisation).

Chapitre 3

Testes et résultats

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, tout d'abord, nous allons appliquer la commande de redressement pour ramener le pendule de sa position d'équilibre stable, au voisinage du point d'équilibre instable $-11.45^\circ < \theta < 11.45^\circ$ (en radians $-0.2 < \theta < 0.2$). Ensuite, nous allons appliquer la commande de stabilisation (LQR) pour maintenir le pendule en position verticale haute $\theta = 0$.

Nous allons, ensuite, tester ces commandes (redressement et stabilisation) par des simulation. Nous allons visualiser le comportement du système pour différentes valeurs initiales, et observer comment il réagit aux perturbations.

Enfin, nous allons évaluer la robustesse de notre système de commande en testant sa capacité à maintenir la stabilité du pendule en présence de perturbations paramétriques. Tous ces tests nous permettront de valider les performances des deux commandes utilisées dans la conception de notre système de commande (pendule inversé).

3.2 Application des deux commandes sur le modèle non linéaire

La simulation en ingénierie est un outil extrêmement puissant et très répandu dans le domaine du développement et du fonctionnement des systèmes. Fréquemment employé pour mener des études approfondies et obtenir des résultats précis sans avoir besoin de faire des essais physiques coûteux et épuisants, que ce soit lors du développement (conception) ou pendant le fonctionnement normal des systèmes.

À l'heure actuelle, divers outils de simulation, Parmi ceux-ci, MATLAB/SIMULINK sont employés tant dans le secteur industriel que dans les établissements universitaires, en raison de leur polyvalence, de leur convivialité et de leur aptitude à représenter et simuler des systèmes complexes. MATLAB représente une approche de programmation et un environnement de développement qui offre une grande souplesse dans les calculs et l'analyse de données. SIMULINK est une extension de MATLAB qui offre la possibilité de représenter, simuler et analyser des systèmes dynamiques en utilisant des diagrammes à blocs.

Le schéma bloc de l'ensemble Moteur-chariot-pendule, commande de redressement et commande LQR, sont donnés par la figure (3.1).

Dans cette illustration, le bloc commande LQR, contient les paramètres de la matrice gain K . Tandis que, dans le bloc de redressement est implémentée la loi de commande régie par l'équation (1.61), avec $\gamma = 1.8$. Un switch avec trois ports d'entrée est inséré pour basculer entre ces deux lois de commande. Le premier et troisième ports sont des ports de données, tandis que le second port est réservé au contrôle. Ce port fournit des informations sur la zone correspondant à la position angulaire θ . Ainsi, lorsque la position angulaire du pendule est à l'intérieur de l'intervalle $[-0.2, 0.2]$ rad, la commande de redressement est basculée vers la commande de stabilisations (commande LQR), sinon, la commande de redressement est maintenue.

La loi de commande de stabilisation est donnée par l'équation (2.1) avec le vecteur gain $K = [-6.3246 \quad -12.4175 \quad -109.2656 \quad -23.7852]$.

Afin de protéger le moteur à courant continu (MCC), un bloc de saturation de ± 2.5 V est inséré à la sortie du switch.

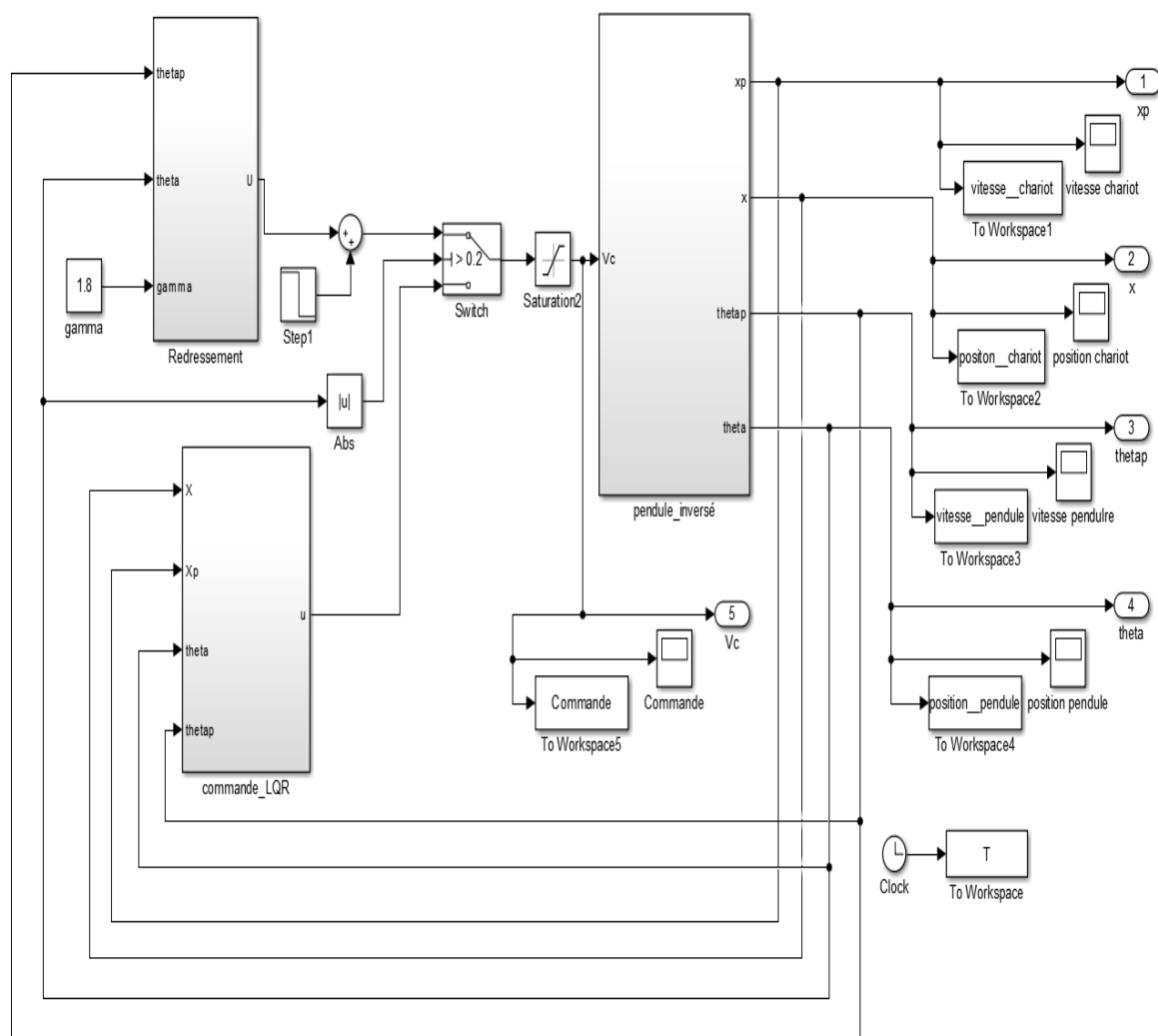


FIGURE 3.1 – Schéma Simulink de commande de redressement et de stabilisation du pendule inversé.

La figure (3.2) montre les résultats de simulation à la fois du redressement et de stabilisation du pendule inversé.

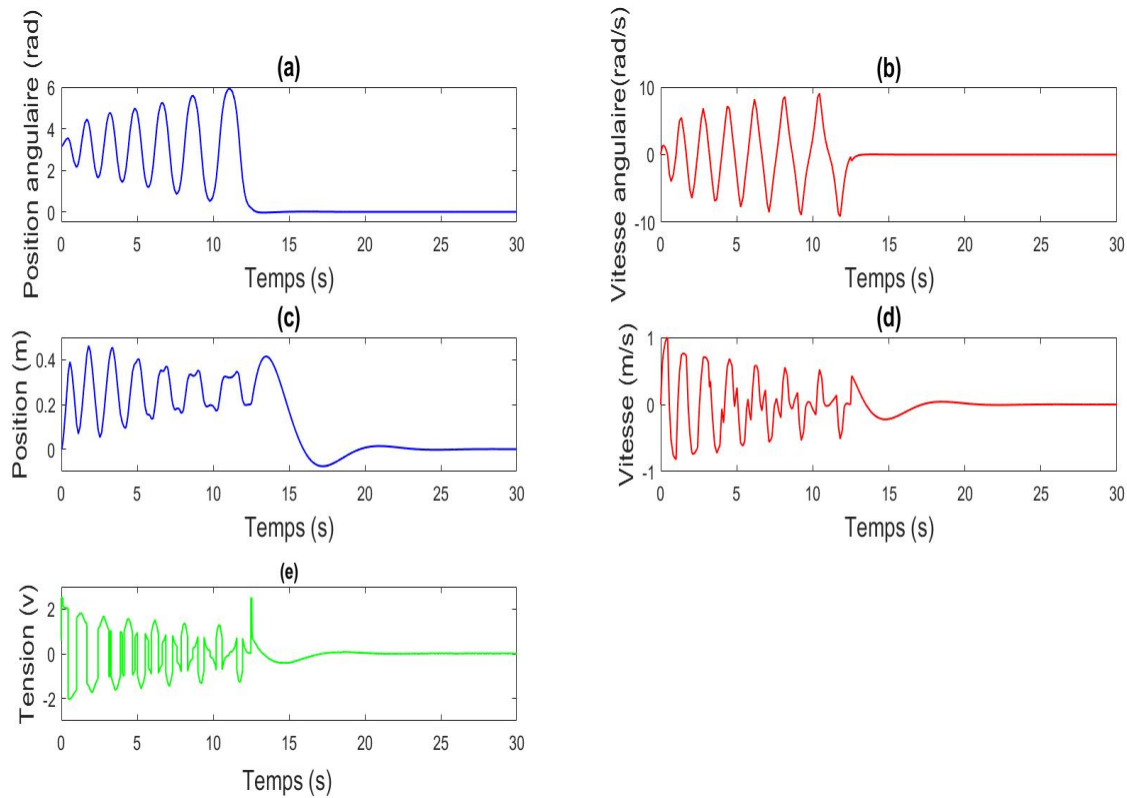


FIGURE 3.2 – Réponses temporelles du système "Moteur-chariot-pendule" avec les deux commandes. (a et b -Position et vitesse du pendule, c et d -Position et vitesse du chariot, e -Signal de commande.)

Interprétation des résultats

Initialement la figure (3.2), montre que, le pendule se trouve en position d'équilibre stable ($\theta = \pm\pi$), ce dernier oscille de manière croissante jusqu'à ce que la position angulaire θ rentre dans l'intervalle $[-0.2, +0.2]$ *rad*.

La vitesse croît en prenant des valeurs positives et négatives selon le sens du mouvement, et elle s'annule à $t = 13$ *sec*, à cause de la stabilisation du pendule.

A cause du mouvement du chariot, le pendule oscille, sans pour autant dépasser ± 0.5 *m* (la longueur maximum du rail). Une fois que le basculement de la position de switch est opéré la phase de stabilisation ce manifeste sous forme d'un déplacement brusque (une impulsion) et se stabilise à l'instant $t = 24$ *sec*.

Pour le chariot la courbe de vitesse présente elle aussi une allure oscillante, durant la phase de redressement, et converge vers 0 pendant la phase de stabilisation ($t \geq 13$ *sec*).

Cette figure , montre que l'amplitude des oscillations du signal de commande appliqué à l'entrée du MCC ne dépasse pas le seuil tolérer (± 2.5 *volts*).

Remarque :

Le système "Moteur-chariot-pendule" présente une dynamique complexe où le pendule et le chariot oscillent jusqu'à atteindre une position stable. Les mécanismes de contrôle permettent d'assurer un redressement et une stabilisation efficace du pendule, tout en maintenant les contraintes du système dans les limites imposées ($-2.5 \leq U \leq 2.5$ *volts*, $-0.5 < x < 0.5$ *m*).

3.2.1 Perturbation externe sur le pendule

La figure (3.3) représente le schéma de simulations d'une perturbation externe sur la position angulaire du pendule après la phase de stabilisation. Ainsi, à l'instant $t = 40 \text{ sec}$ une perturbation sous forme d'impulsion d'amplitude 0.07 rad et d'une durée de 1 sec est ajoutée à la valeur de la position angulaire θ .

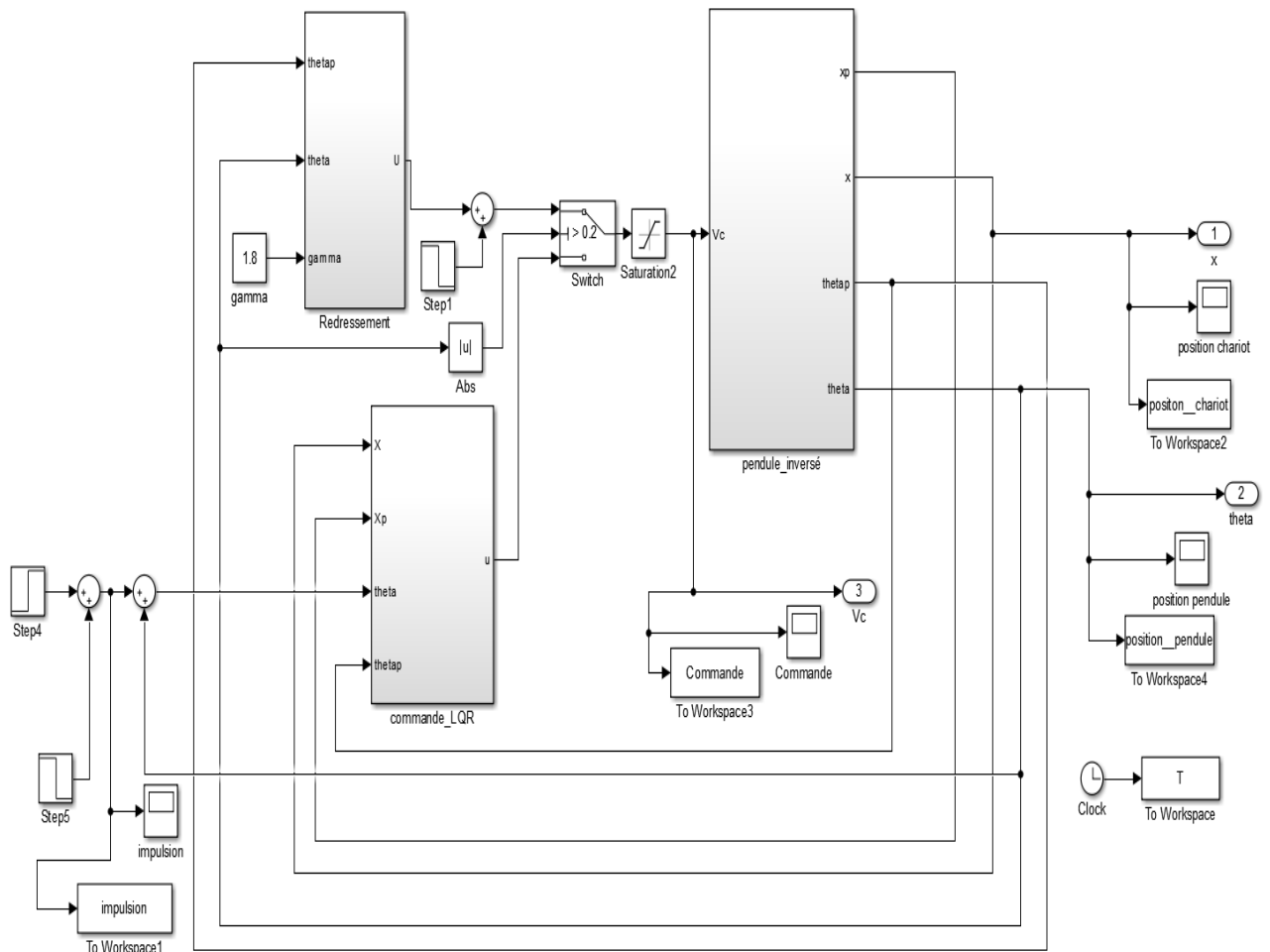


FIGURE 3.3 – Schéma Simulink de redressement et de stabilisation LQR du pendule inversé avec la perturbation sur le pendule.

La figure (3.4) montre les résultats de simulation, en présence de perturbation externe sur la position angulaire du pendule.

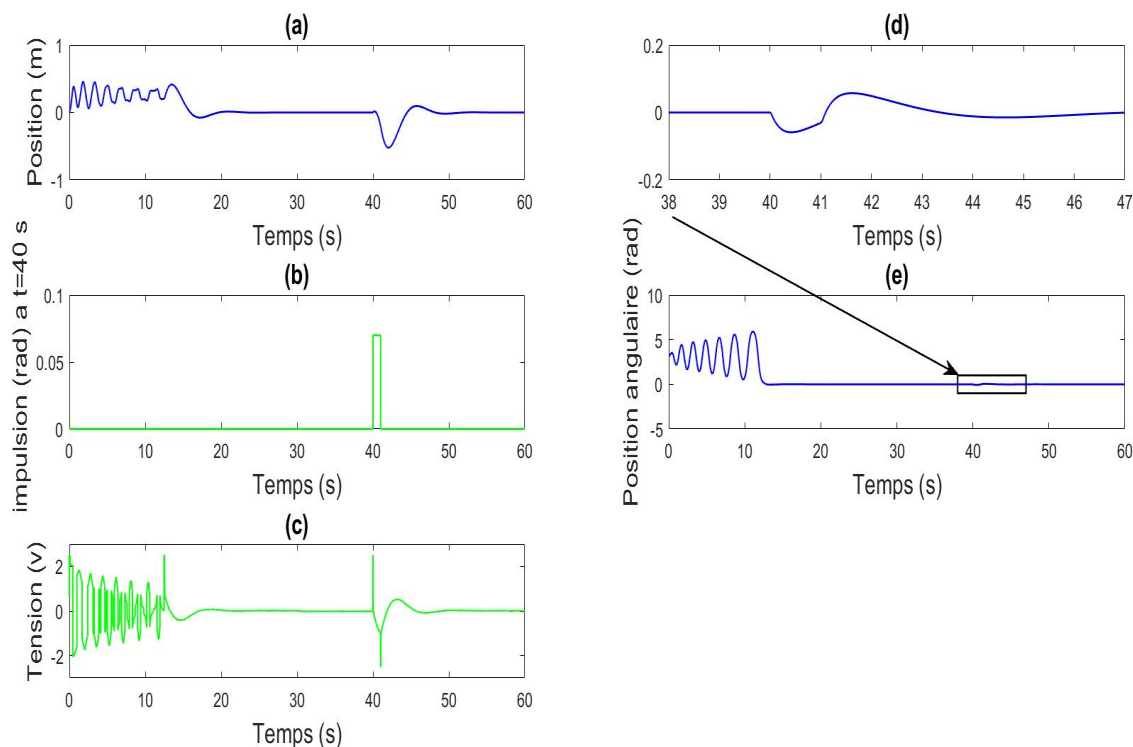


FIGURE 3.4 – Réponse du système à une perturbation externe sur le pendule. (a -Position du chariot, b et c -Signal de perturbation et de la commande, d -Agrandissement sur la zone de perturbation, e -Position du pendule.)

Après redressement et stabilisation du système on a introduit une perturbation externe sur le pendule à l'instant $t = 40 \text{ sec}$, le signal de perturbation est illustré par la figure (3.4-a).

L'agrandissement de la courbe de position autour de $t = 40 \text{ sec}$, révèle un léger dépassement de la réponse, qui revient rapidement à sa position d'équilibre $\theta = 0$ et se stabilise à $t = 46 \text{ sec}$.

Lors de la perturbation externe du pendule à $t = 40 \text{ sec}$, une impulsion notable se manifeste, atteignant un maximum de $-0,5 \text{ m}$ sur la courbe du chariot en raison d'un mouvement brusque. Celui-ci retrouve également sa position d'équilibre $\theta = 0$ et se stabilise à $t = 55 \text{ sec}$.

La figure (3.4-c), révèle une fluctuation du signal de commande en réponse à la perturbation du pendule ne dépasse pas $\pm 2,5 \text{ volts}$, ce qui indique que le seuil de protection de notre moteur n'est pas franchi.

3.2.2 Perturbation externe sur le chariot

La figure (3.5) représente la simulation d'une perturbation externe sur le chariot, après stabilisation. La perturbation externe est une impulsion d'amplitude 0.1 m et d'une durée de 1 sec appliquée à l'instant $t = 30\text{ sec}$.

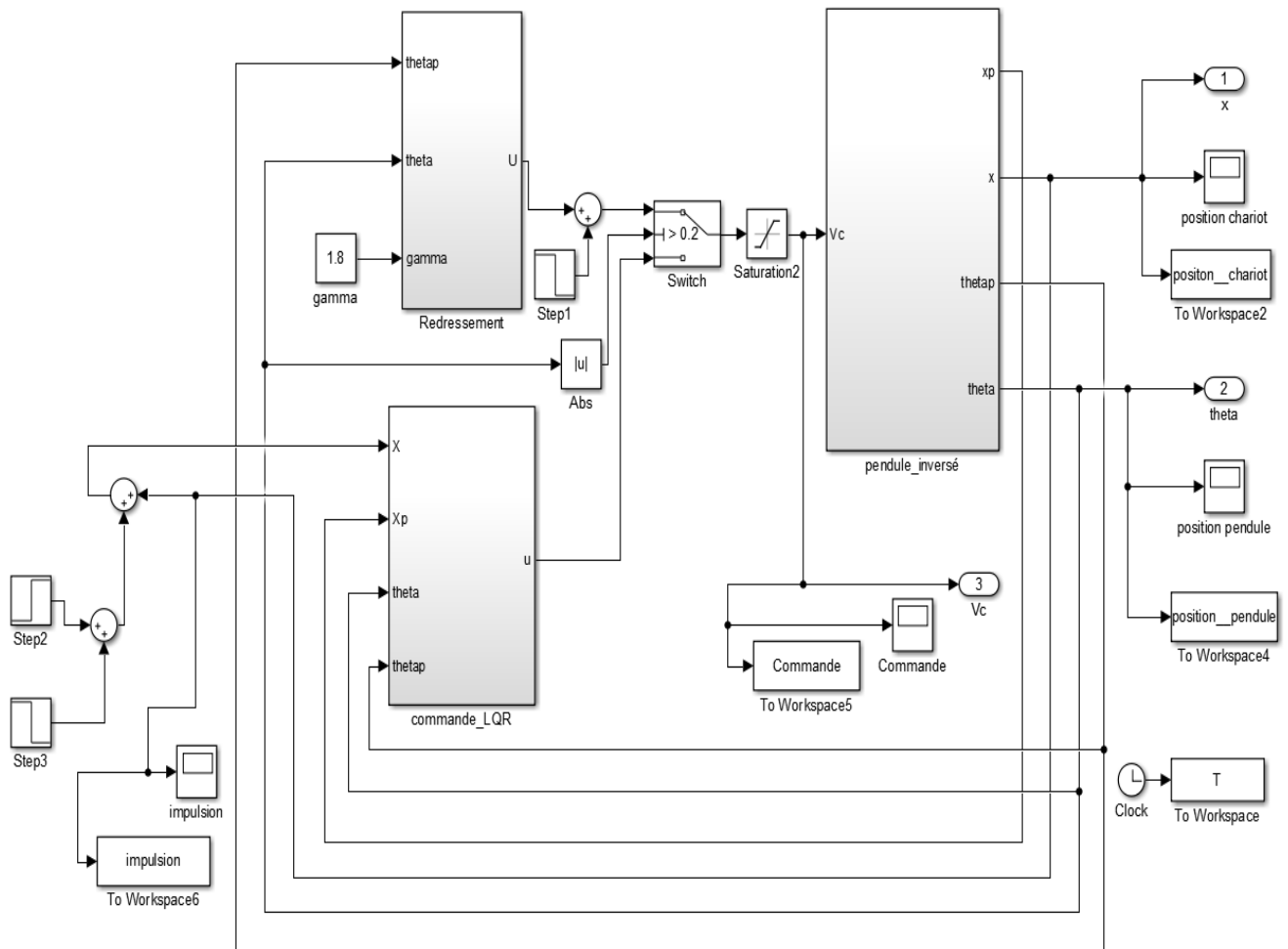


FIGURE 3.5 – Schéma de la commande de redressement et de stabilisation du pendule inversé avec perturbation sur le chariot.

La figure (3.6), montre les courbes de simulation de la position du chariot, la position angulaire du pendule, du signal de perturbation, et du signal de commande.

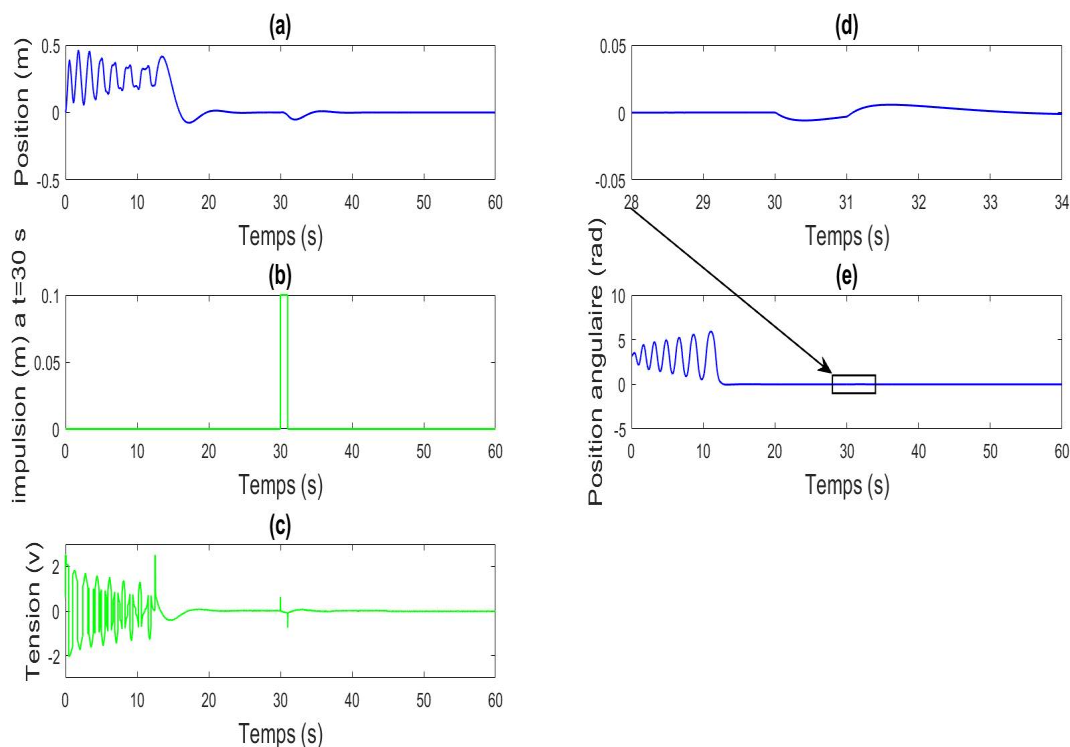


FIGURE 3.6 – Réponse du système à une perturbation externe sur le chariot. (a -Position du chariot, b et c -Signal de perturbation et de la commande, d -Agrandissement sur la zone de perturbation, e -Position du pendule.)

Après l'application de la perturbation externe à $t = 30 \text{ sec}$, la courbe de position, illustrée par la figure (3.6-a), montre que le chariot s'écarte de sa position initiale ($x = 0 \text{ m}$) puis revient à cette position après 7 sec .

Le zoom de la position angulaire θ , sur l'intervalle de temps $t \in [28, 34] \text{ sec}$, révèle une faible oscillation du pendule par rapport à son axe verticale, d'une durée de 4 sec . Un pic de tension, à l'instant $t = 30 \text{ sec}$, est observé également sur la courbe de commande, visant à compenser l'effet de perturbation externe.

Dans les deux cas de perturbations externes, on observe que le pendule et le chariot retrouvent toujours un état stable après une courte période, démontrant ainsi l'efficacité de la commande LQR pour stabiliser notre système. Afin d'aller plus loin dans les tests, nous allons introduire des perturbations paramétriques au sein du système "Moteur-chariot-pendule".

3.2.3 Perturbation paramétrique sur la masse du chariot

En général, une perturbation paramétrique consiste à additionner ou soustraire la valeur du paramètre initiale du système.

Perturbation paramétrique $t=0$ sec

Afin de montrer la robustesse des deux commandes proposées (Redressement et stabilisation), des variations paramétriques de 40%, 65% et 75% par rapport à la valeur nominale de la masse ($m = 2.3 \text{ Kg}$) sont appliquées au chariot, respectivement $t = 0 \text{ sec}$.

★ Variation de 40%

Les résultats de simulation avec et sans perturbation sont représentés par la figure (3.7), ci-dessous :

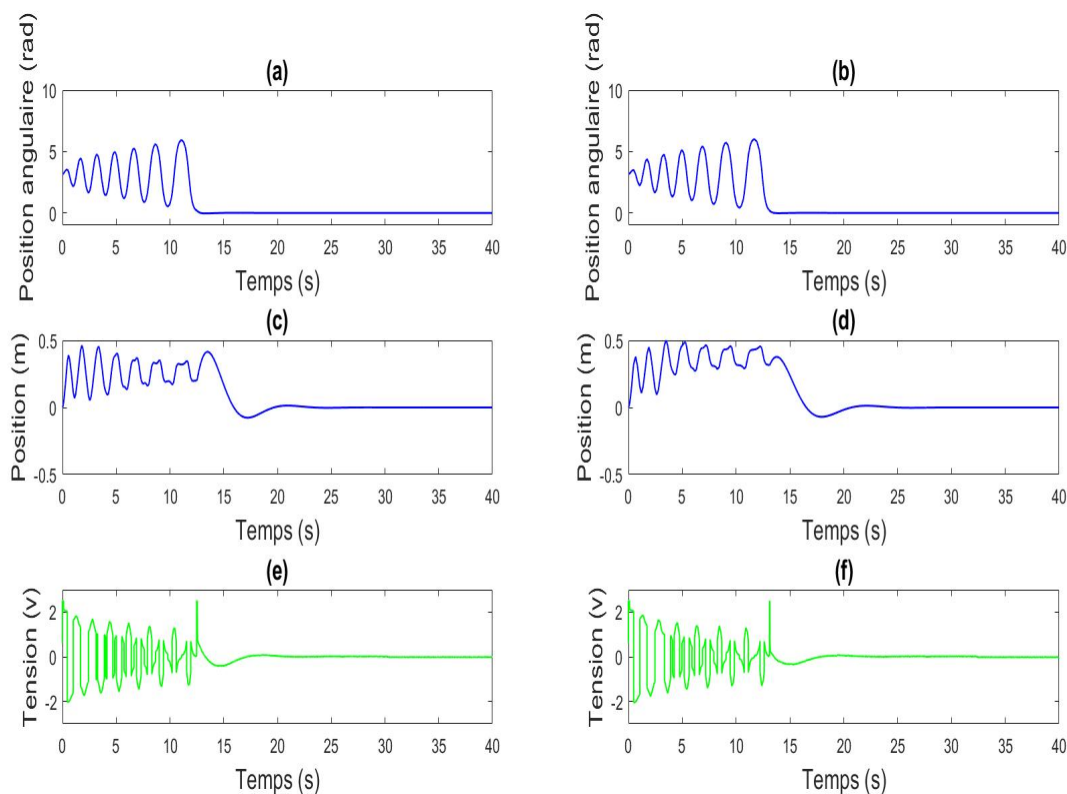


FIGURE 3.7 – *Perturbation de la masse du chariot à 40%. (a et b -Position du pendule sans et avec perturbation, c et d -Position du chariot sans et avec perturbation, e et f -Signal de commande sans et avec perturbation.)*

La comparaison des résultats de simulation avec et sans perturbation illustrés par la figure (3.7) montre que la variation de 40% de la masse du chariot ne change pas grand chose à part

la dynamique du chariot durant la phase de redressement. Toute fois, la stabilisation s'effectue dans les deux cas au même instant $t = 13 \text{ sec}$, et avec le même signal d'énergie (effort).

★ **Variation de 65%**

Les résultats de simulation de la position angulaire du pendule, de la position du chariot et du signal de commande avec et sans perturbations sont illustrés par la figure (3.8), ci-dessous :

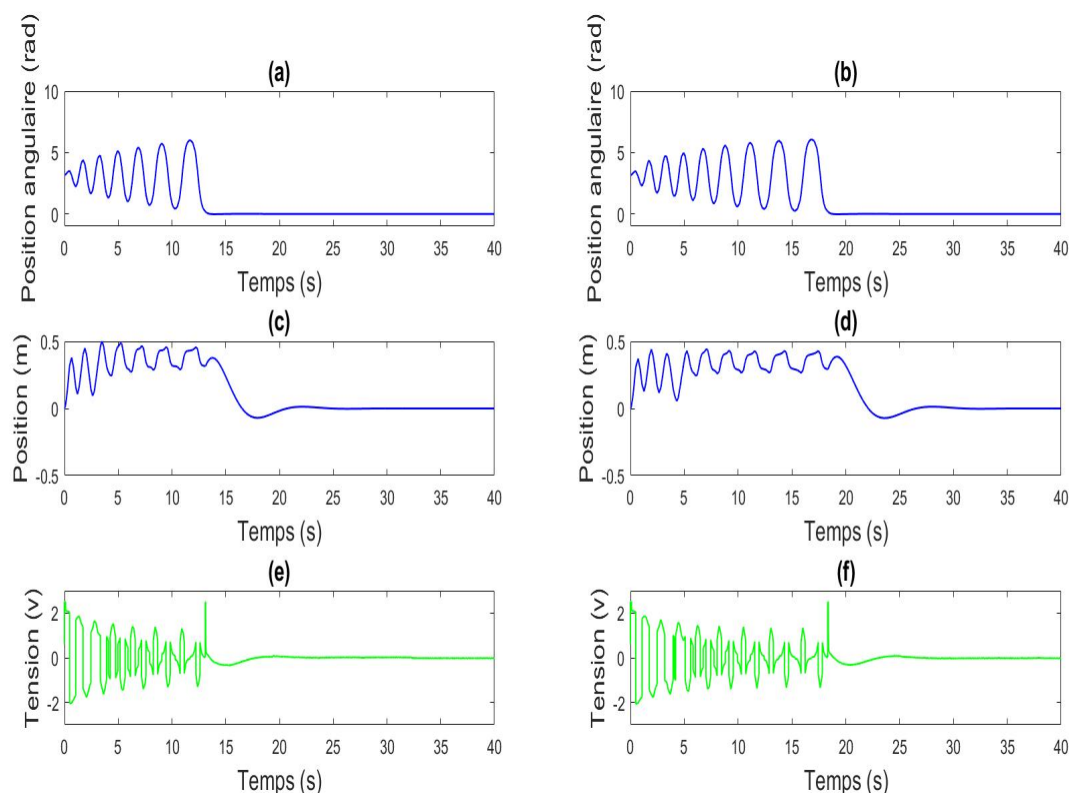


FIGURE 3.8 – *Perturbation de la masse du chariot à 65%. (a et b -Position du pendule sans et avec perturbation, c et d -Position du chariot sans et avec perturbation, e et f -Signal de commande sans et avec perturbation.)*

La figure (3.8) montre qu'avec une variation de 65% sur la masse du chariot, nous remarquons que le redressement du pendule s'effectue en 19 sec , et la stabilisation du chariot à $x = 0 \text{ m}$ en 30 sec et que le signal de commande du moteur nécessite plus de temps pour converger à 0 volts . Ce qui signifie un besoin d'énergie plus important.

★ **Variation de 75%**

La figure (3.9) représente les résultats de simulation des courbes de position, position angulaire et signal de commande du pendule inversé, avec et sans variation de la masse.

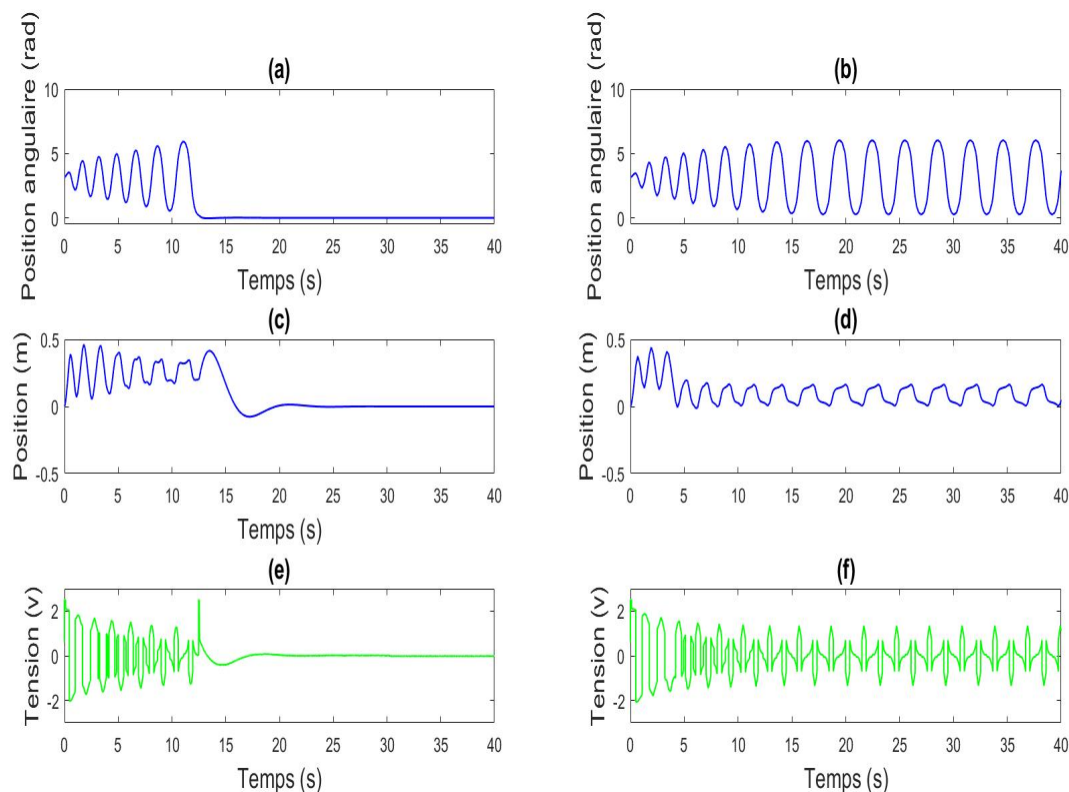


FIGURE 3.9 – *Perturbation de la masse du chariot à 75%. (a et b -Position du pendule sans et avec perturbation, c et d -Position du chariot sans et avec perturbation, e et f -Signal de commande sans et avec perturbation.)*

La figure (3.9) montre de fortes oscillations au niveau du pendule et chariot, et aucune stabilité n'est visible, ce qui démontre ainsi la limite de notre commande de redressement, et à aucun moment la tension d'alimentations du moteur converge vers 0.

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé et élaborer le schéma de commande général pour notre système non linéaire, comprenant la commande de redressement et de stabilisation. Nous avons également effectué des simulations pour évaluer les performances de ces commandes, avec et sans perturbations.

Les résultats de ces simulations, en presence et en absence de perturbation ont montré que le pendule et le chariot sont rapidement stabilisés et cela même après avoir augmenté le taux de perturbations jusqu'à 65%. De plus, nous avons observé que les oscillations sont minimales, ce qui indique une bonne performance de notre commande.

La commande LQR, est une commande robuste, toute fois lorsque les perturbations sont très fortes (perturbation paramétrique sur la masse du chariot supérieure à 75% par rapport à sa valeur nominale),on perd la stabilité.

Conclusion générale

Le pendule inversé a fait l'objet de nombreux travaux de recherche, notamment ceux liés à la commande des systèmes non-linéaires.

Ce mémoire a été consacré à l'étude et à la commande LQR d'un pendule inversé monté sur un chariot mobile qui se déplace horizontalement.

Ainsi, une modélisation du pendule inversé, basée sur le formalisme de Lagrange-Euler, a été effectuée. Le modèle établi a été exploité en simulation pour tester les performances de la commande LQR pour stabiliser le pendule à sa position d'équilibre instable ($\theta = 0$).

Le système pendule-chariot n'est pas simplement un système mécanique, mais il représente une large classe de systèmes industriels, tels que les satellites, les grues ou les missiles, etc. De ce fait il est très utilisé comme benchmark pour les techniques de commande développées.

Les résultats de simulations nous ont permis de démontrer le niveau de performance de la commande LQR pour la stabilisation du pendule inversé en un temps minimal, mais aussi sa robustesse contre les différentes perturbations introduites qu'elles soient externes ou paramétriques, on constate que jusqu'à 65% de niveau de perturbations la stabilisation a toujours lieu, ce qui montre que cette technique linéaire est capable d'assurer la stabilité et une bonne performance des systèmes non linéaires instables, et ceci avec une simplicité de conception et peu de paramètres de réglage.

Ce travail nous a permis d'approfondir nos connaissances dans les deux domaines suivants :

1-La modélisation des systèmes physiques.

2-La commande linéaire quadratique.

Finalement, nous souhaitons que ce travail soit repris par d'autres étudiants en vue d'améliorer encore plus le travail et de confirmer les résultats aussi bien sur le plan théorique que pratique.

Bibliographie

- [AND.01] Andrew K; "Standup and stabilization of the inverted pendulum. Submitted to the department of mechanical engineering in partial fulfillment of the requirements for the degree of Bachelor of Science", Massachusetts Institute of Technology. June 1999
- [BUG.01] Bugeja M; "Non linear swing-up and stabilizing control of an inverted pendulum system", Eurocon Ljubljana, Slovenia, 2003.
- [CHA.01] Bousselem Chahira; « Implémentation de régulateurs fractionnaires pour la stabilisation d'un pendule inversé » ; mémoire de Magister UMMTO, 2012.
- [DON.01] Donald E.Kirk; Optimal control theory An introduction, Mineola, New york, 2004.
- [EDO.01] Edouard Laroche; Commande optimale. Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg Master Images, Robotique et Ingénierie pour le Vivant Parcours Automatique et Robotique, 2010.
- [FEE.01] "Feedback instruments limited"; manuel d'installation du pendule inversé.
- [FRE.02] Freddy Mudry; "Modélisation et régulation d'un pendule inversé", L'institut d'Automatisation industrielle (iAi) de l'eivd. 2003
- [LAH.01] Lahouazi Farhat; "Mise en oeuvre d'une stratégie de commande neuro floue : Application à un pendule inversé", Mémoire de magister, UMMTO, Algérie, 2011.
- [LAM.02] Lam J; "Control of an inverted pendulum," Dept. of Electrical Computer Engineering, University of California, U.S.A., 2004.
- [LAR.03] Larminat. ph; "Automatique : Commande des systèmes linéaires". 2 ème édition. Edition Hermès, Paris. 1996
- [MAI.01] Maida Ahmed; Cours "Commande optimale", Université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou, 2022-2023.

- [NEN.01] Nenad Muškinja ; Boris Tovornik "Controlling of real inverted pendulum by fuzzy logic " Faculty of Electrical Engineering and Computer Science Maribor University of Maribor Smetanova 17, 2000 Maribor, Slovenia
- [SEL.01] S. Sellami et F.Allal sabaoui ; Mémoire de fin d'étude, "Optmisation globale des matrices de pondération d'une commande linéaire quadratique", département Automatique UMMTO, 2015.
- [ZAY.01] Zaytoon J ; *Systèmes dynamiques hybrides*, Collection Hermès, Paris, France, 2001.