

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE MOULOD MAMMERI, TIZI-OUZOU



FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE  
DEPARTEMENT AUTOMATIQUE

## MEMOIRE DE MAGISTER

en **Automatique**

Option **Traitement d'Images et  
Reconnaissance de Formes**

Présenté par

**YESLI Samir**

Ingénieur UMMTO

# **Filtrage par Diffusion Anisotropique Appliquée aux Images IRM**

Mémoire soutenu le

**DJENNOUNE Saïd  
DIAF Moussa  
HAMMOUCHE Kamal,  
MELLAH Rabah,**

devant le jury d'examen composé de :

Professeur à l'UMMTO  
Professeur à l'UMMTO  
M.C.A. à l'U.M.M.T.O.  
M.C.A. à l'U.M.M.T.O

**Président  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur**

## **Avant-propos**

Ce mémoire a été effectué au laboratoire « Robotique et Vision » du département Automatique, FGEI, l'UMTO.

Mes vifs remerciements vont, tout d'abord, à Monsieur **DIAF Moussa**, professeur à l'UMMTO pour m'avoir proposé le thème de ce mémoire et m'avoir dirigé, aidé et conseillé tout le long de notre travail.

Nous ne manquerons pas de remercier Monsieur **DJENNOUNE Saïd**, Professeur à l'UMMTO pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de ce mémoire.

Nous exprimons notre reconnaissance à Monsieur **HAMMOUCHE Kamal**, Maître de Conférences classe A, à l'UMMTO pour avoir accepté de faire partie du jury d'examen de notre mémoire.

Que Monsieur **MELLAH Rabah**, Maître de Conférences classe A à l'UMMTO trouve ici, nos sincères remerciements pour avoir accepté de faire partie du jury d'examen de notre mémoire.

*A mes parents.*

# Sommaire

Introduction générale

## **Chapitre 1 : Imagerie par Résonance Magnétique**

1. Introduction .....	1
2. Rappels sur l'imagerie par résonance magnétique .....	2
2.1. Principe physique de la résonance magnétique nucléaire.....	4
2.2. Formation de l'image.....	5
2.3. Pondération et séquences d'images .....	6
3. Les artefacts en IRM .....	8
4. Correction du bruit : Etat de l'art.....	9
5. Conclusion .....	10

## **Chapitre 2 : Filtrage par diffusion anisotrope**

1. Introduction .....	12
2. Utilisation des EDP de diffusion en traitement d'images .....	12
3. Diffusion isotrope .....	14
4. Diffusion anisotrope .....	15
4.1. Modèle de Perona et Malik .....	15
4.2. Modèle de Catté et al.....	19
4.3. Filtre de Choc .....	20
5. Approche variationnelles.....	23
5.1. Modèle de diffusion anisotrope biaisée de Nordstrom.....	23
5.2. Modèle par minimisation de la variation totale .....	25
5.3. Modèle par diffusion anisotrope par minimisation de la variation totale .....	26
5.4. Formulation variationnelle unificatrice .....	26
5.5. Modèle par association des filtres de choc et de la diffusion anisotrope.....	29
5.6. Modèle de Kornprobst .....	29

6. Diffusion tensorielle.....	30
7. Conclusion .....	35
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>37</b>
<b>Annexe .....</b>	<b>39</b>
<b>Bibliographies.....</b>	<b>41</b>

# Introduction générale

L'étude du cerveau humain, que ce soit sur le plan anatomique ou fonctionnel, est actuellement un domaine de recherche en plein essor, notamment dans le cadre du suivi de patient souffrant de certaines pathologies, du fait de l'évolution des matériels et des techniques d'imagerie, de la capacité de calcul sans cesse croissante des ordinateurs et de la mise en œuvre de systèmes complexes de traitement de données.

Une des modalités d'imagerie les plus couramment utilisées, à laquelle nous nous sommes intéressés dans le cadre de cette thèse, est l'imagerie par résonance magnétique (IRM), qui présente l'avantage d'être non invasive et de permettre l'acquisition d'images bi ou tridimensionnelles sur lesquelles différents contrastes sont possibles.

Pour mener à bien ces études il est nécessaire de développer des méthodes permettant d'interpréter automatiquement les images cérébrales fournies par la modalité d'imagerie. Interpréter une image cérébrale consiste généralement à localiser précisément sur cette image les différents éléments constitutifs du cerveau. La tâche principale à effectuer consiste donc, souvent, à segmenter l'image, c'est-à-dire à étiqueter chaque voxel selon le tissu ou la structure qu'il contient majoritairement.

Cependant, le potentiel de l'IRM n'est pas complètement exploité tant que l'analyse des images IRM ne peut pas s'effectuer de manière quantitative et automatique à cause de nombreux facteurs liés à l'acquisition des images et qui détériorent la précision et la fiabilité des algorithmes d'analyses quantitatives de ces images.

Parmi ces facteurs d'erreurs, ou artefact, que nous avons pris en considération dans ce manuscrit figure le bruit observé sur l'ensemble du tissu cérébral et qui contribue à faire échouer les algorithmes de segmentation fondés sur l'information d'intensités de l'image, menant ainsi à une mauvaise classification et quantification des tissus observés.

La correction du bruit a suscité un intérêt croissant de la part des chercheurs de la communauté de traitement d'images. Nous nous sommes donc focalisés dans le cadre de cette thèse sur les méthodes spatiales, qui s'appuient sur le principe de diffusion qui est l'équation de la chaleur, décrites sous forme d'équations aux dérivées partielles

pour l'amélioration des images, l'élimination du bruit et le renforcement des contrastes.

Cette thèse est scindée en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous introduisons la définition de l'imagerie médicale sous toutes ses modalités pour situer l'IRM par rapport à celles-ci. Nous montrons le principe de la résonance magnétique nucléaire qui est à la base dans la formation des images de cette technique, les différentes modalités que l'IRM offre pour visualiser les tissus anatomiques et, enfin, les principaux artefacts affectant cette modalité d'imagerie. Nous nous focalisons sur l'artefact « bruit » et son origine et nous terminons par les méthodes de traitements qui lui sont apportées.

Dans le second chapitre, nous exposons le type de traitement que nous avons choisi qui est la diffusion anisotrope pour traiter ce type d'artefact. Ce chapitre peut être vu comme la chronologie des modèles de diffusion anisotrope développés depuis l'article fondateur de Perona-Malik. Nous passerons en revue plusieurs méthodes de traitement du bruit (lissage) et du flou (rehaussement) qui découlent des EDP de diffusions, à commencer par le lissage par diffusion isotrope et son lien avec le filtrage gaussien, puis la nécessité du lissage sélectif qui favorise plutôt les régions internes que les inter-régions aboutissant aux modèles de diffusion anisotrope. L'interprétation de la diffusion anisotrope est décrite pour comprendre le comportement du lissage au niveau des contours et non au niveau des régions homogènes. Nous présentons la théorie des filtres de choc et leur intérêt pour le rehaussement des contours. L'approche variationnelle sera aussi présentée pour donner sens aux équations de diffusion ainsi les conditions de stabilité et de convergence imposées aux choix des fonctions de régularisation. On verra que le modèle de Perona-Malik, n'est qu'une minimisation d'une forme d'énergie, donner par une fonctionnelle liant la grandeur recherchée et ses dérivées premières et ce, en utilisant l'équation Euler-Lagrange. D'autres modèles obtenus en minimisant, par exemple, la variation totale de l'image, sont présentés. Cette variation est aussi prise comme une fonctionnelle d'énergie à minimiser. La combinaison du modèle de diffusion anisotrope et le modèle de des filtres de chocs constitue l'approche unificatrice proposée par P. Kornprobst pour donner un filtre de lissage-rehaussement. Nous terminons par un modèle de J. Weickert qui propose un modèle à base de matrice de diffusion au lieu de fonction et qui donne une description plus précise

de la structure locale de l'image en généralisant l'opérateur gradient-gaussien.

Nous terminons ce travail par une conclusion générale et des références bibliographiques.

# Chapitre 1

## Imagerie par Résonance Magnétique

### 1. Introduction

L'imagerie médicale regroupe l'ensemble des informations visuelles d'un organe du corps humain acquises à partir de différents moyens dont les principes de fonctionnement sont basés sur des phénomènes physiques tels que l'absorption des rayons X, la résonance magnétique nucléaire, la réflexion d'ondes ultrasonores ou la radioactivité auxquels ont associées parfois les techniques d'imagerie optique comme l'endoscopie. Avec les progrès de la technologie en matière de graphisme ainsi que de ceux de l'informatique, l'imagerie médicale est devenue un moyen courant et inévitable pour les médecins qui cherchent à mettre en valeur une pathologie ou à étudier le fonctionnement d'un organe. En effet, l'imagerie anatomique permet de d'identifier, localiser et mesurer les différentes parties de l'organisme et plus particulièrement celles du système nerveux central tout comme elle permet aussi, en clinique, de détecter une lésion pour surveiller son évolution ou la localiser, la surveiller et la cerner en vue d'une intervention chirurgicale. De l'autre côté, l'imagerie médicale fonctionnelle permet d'étudier le cerveau dans son activité et, tout particulièrement, pour localiser la région du cerveau active qui correspond à une tâche cognitive bien précise. Les images obtenues peuvent aussi être

traitée informatiquement pour obtenir une reconstruction tridimensionnelle d'un organe ou d'un tissu, une séquence d'images animées montrant l'évolution ou les mouvements d'un organe au cours du temps etc. Les images obtenues peuvent être stockées ou archivées selon la norme DICOM (Digital Imaging and Communication in Medicine) en vue d'une future manipulation. Le format DICOM permet de rendre unique chaque image à laquelle sont associées des informations spécifiques. Ainsi chaque image est autonome de sorte que son origine, son appartenance, sa date, ses paramètres d'acquisition etc. soient identifiées si elle venait à être perdue ou renommée.

## **2. Rappels sur l'imagerie par résonance magnétique**

Dans ce qui suit, il nous semble important de présenter brièvement l'imagerie par résonance magnétique (IRM) et particulièrement ses principes physiques, les différents contrastes qui y peuvent être observés, leur résolution et la présence d'artefacts pouvant les perturber. Suivant les objectifs tracés, les informations recherchées à travers les examens d'imagerie médicale sont en rapport avec l'anatomie des organes à savoir leur taille, leur volume, leur localisation, la forme d'une éventuelle lésion, etc. ou sur leur fonctionnement comme leur physiologie, leur métabolisme, etc. Rappelons qu'il s'agit de l'imagerie structurelle dans le premier cas et de l'imagerie fonctionnelle dans le second.

Parmi les méthodes d'imagerie structurelles les plus couramment employées en médecine, on peut citer les méthodes tomographiques basées soit sur les rayons X comme en radiologie conventionnelle, tomomodensitomètre ou CT-scan ou angiographie, soit sur la résonance magnétique nucléaire (RMN), les méthodes échographiques et les méthodes optiques qui utilisent les rayons lumineux [1].

Tout comme les précédentes, les méthodes d'imagerie fonctionnelles sont aussi très variées. Elles regroupent les techniques de médecine nucléaire TEP (tomographie à émission de positons), TEMP (tomographie d'émission monophotonique) basés sur l'émission de rayon gamma par des traceurs radioactifs qui, après injection, se concentrent dans les régions d'intense activité métabolique, les techniques électro-physiologiques qui mesurent les modifications de l'état électrochimiques des tissus en lien avec l'activité nerveuse, les techniques issues des IRM dite fonctionnelle ou encore thermographique ou de spectroscopie infrarouge.

Cette multiplication des techniques ont conduit à l'imagerie multimodale dans laquelle les données provenant de différentes technologies sont recalées pour une meilleure interprétation. Ainsi, il est possible, par exemple, de superposer sur une même image la morphologie des contours du cœur

obtenue par IRM avec une information sur la mobilité des parois obtenues par échographie Doppler. Les appareils récents d'imagerie permettent parfois de produire des images multimodales ou cours d'un seul examen comme avec les systèmes hybrides PET-CT, cette nouvelle technologie d'imagerie, est une combinaison entre le scanner (CT) aux rayons X, et le scanner à émission de positrons (TEP), son avantage est de procurer des informations, à la fois anatomiques et métaboliques [2]. Grâce à la capacité, de la tomographie par émission de positrons, à détecter les tumeurs, et la meilleur localisation anatomique des tissus présentant une anomalie métabolique obtenue par le scanner [3].

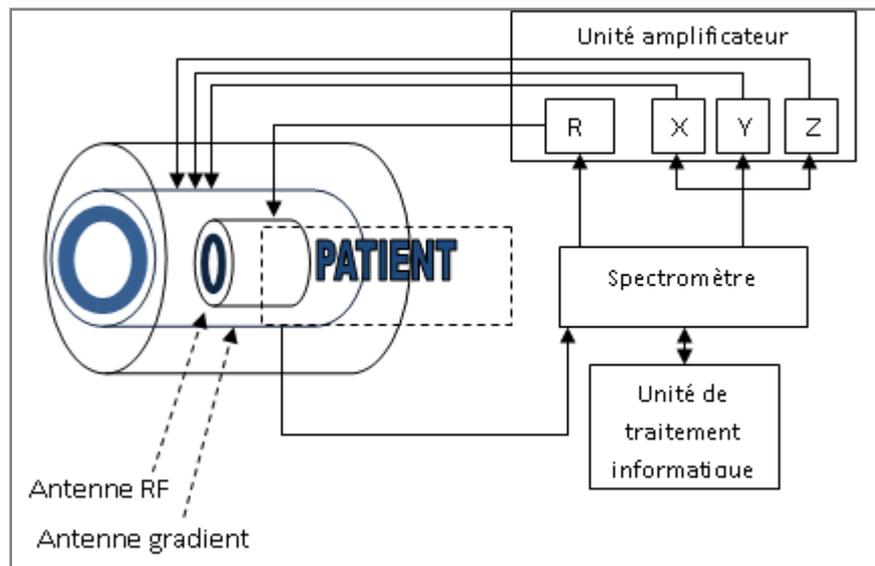


Fig.1 Le procédé d'acquisition IRM [4].

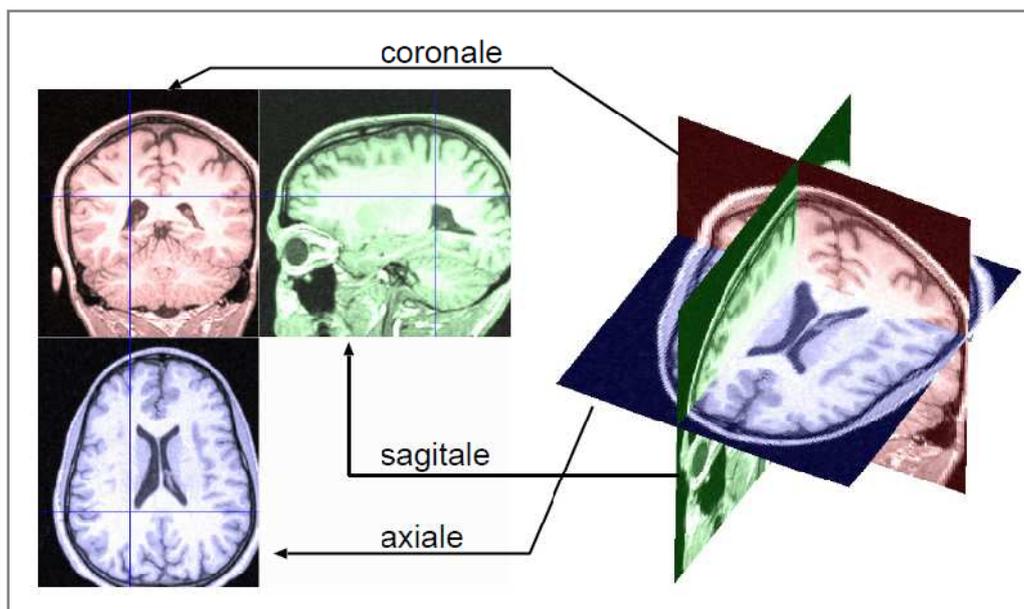


Fig.2 Représentation multi-planaire d'une image volumique, constituée de trois coupes perpendiculaires, coronale, sagittale et axiale [5].

## 2.1 Principe physique de la résonance magnétique nucléaire

L'imagerie par résonance magnétique (IRM) utilise le phénomène de résonance magnétique nucléaire (RMN) découvert par Felix Bloch [6] à Stanford et Edward Milles Percell [7] à Harvard, qui ont publié leurs résultats en 1946. Ce phénomène est propre aux noyaux des atomes qui possèdent un moment magnétique ou spin nucléaire. En absence de champ magnétique externe, ces spins sont orientés de manière aléatoire (fig.3a), l'addition des ces moments magnétiques dans le cas d'absence de champ magnétique est nulle. Quand les spins sont dans un champ magnétique  $\vec{B}_0$ , ces derniers s'alignent selon deux orientations, l'un est parallèle à  $\vec{B}_0$  et dans l'autre dans le sens antiparallèle (fig.3b), créant ainsi une aimantation globale  $\vec{M}$  qui est non nulle. A ce moment, les spins adoptent un mouvement autour de l'axe  $\vec{B}_0$  avec une fréquence de Larmor  $\omega_0 = \gamma B_0$ ,  $\gamma$  étant le rapport gyromagnétique de l'atome pris en considération. Pour l'atome d'hydrogène  $\gamma \cong 42 \text{ Mhz/T}$

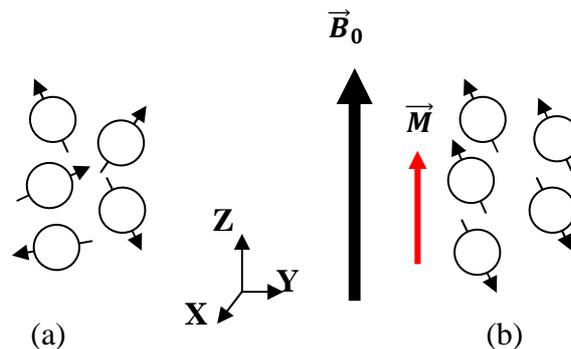


Fig.3 Effet d'un champ magnétique extérieur sur les spins. (a)absence de champs, (b) présence de champs [8].

En appliquant un champ magnétique radiofréquence  $\vec{B}_1$  de même fréquence de Larmor sur l'ensemble des spins, cela conduit à un phénomène de résonance qui s'exprime par l'absorption totale de l'énergie émise par la radiofréquence, ce qui perturbe le système spin. Ceci a pour effet de basculer l'aimantation globale  $\vec{M}$ , dans la direction  $\vec{B}_1$  d'un angle  $\alpha$ , qui se traduit par apparition d'une aimantation transversale  $M_{xy}$  dans le plan XY et la diminution de l'aimantation longitudinale  $M_z$ . Une fois le champ  $\vec{B}_1$  est interrompu, le système spin restitue l'énergie absorbée pour retourner à son état initial [8]. Ce retour, appelé relaxation, permet à l'aimantation globale  $\vec{M}$  de retrouver sa valeur initiale et sa direction suivant le champ  $\vec{B}_0$ . On

distingue deux types de relaxation : la relaxation longitudinale qui régit le retour à l'équilibre de l'aimantation  $M_z$  qui croît exponentiellement selon une constante  $T_1$  et la relaxation transversale qui régit le retour à l'équilibre de l'aimantation  $M_{xy}$  qui décroît exponentiellement selon une constante  $T_2$ , de relaxation spin-spin.

Pour l'enregistrement du signal RMN, ceci est effectué après la relaxation du système spin. Ce dernier restitue l'énergie absorbée lors de la phase d'excitation par la RF sous la forme d'ondes radiofréquence. Celui-ci est collecté par une antenne réceptrice puis traité par la transformation de Fourier pour en extraire la fréquence, l'amplitude, et la durée du signal caractéristiques de l'évolution de l'aimantation  $M$  [9].

## 2.2 Formation de l'image

La dimension du volume dont on veut obtenir des images est appelé champ de vue ou FOV (Field Of View). Ce volume est arbitrairement divisé en multiples petits volumes ou voxels. Le nombre de voxels par volume définit la matrice. Plus le voxel est petit, plus l'image est fine. S'il y a moins de signal, la qualité de l'image finale résulte donc d'un compromis. Pour coder ces voxels dans les trois directions de l'espace, on utilise des gradients. En IRM, les gradients utilisés sont des petits champs magnétiques produits par des électro-aimants situés à l'intérieur de l'aimant principal. On distingue généralement la sélection de coupe suivant l'axe  $Z$  et l'encodage dans les deux directions restantes  $X$  et  $Y$ .

La sélection de coupe [10], est réalisée en appliquant un gradient de champ magnétique dans la direction  $\vec{B}_0$ , appelé gradient de coupe, de manière à ce que, seule, une coupe est excitée avec la fréquence de résonance de Larmor des noyaux situés dans ce plan. La sélection de coupe ne permet pas de localiser le signal émis par un noyau quelconque du plan de coupe. En appliquant un gradient de fréquence dans une direction, chaque voxel situé sur cette direction voit leur les protons précesser à une fréquence légèrement différente mais en phase. Pour le codage de phase, on applique un autre gradient de phase dans l'autre direction perpendiculaire. Chaque voxel situé sur cette direction voit leur protons précesser à la même fréquence mais légèrement déphasés par rapport aux protons des voxels voisins.

Ainsi, l'application de deux gradients permet de coder n'importe quel point du plan alors que chaque impulsion excite la totalité du volume et non un seul voxel. Le signal reçu contient des informations sur tout le volume. C'est le décodage de ce signal complexe qui permet de reconstruire l'image. Pour comprendre le décodage du signal, qui est constitué de données brutes, la transformée de Fourier est utilisée pour décomposer le signal en spectre de

fréquences facilement identifiable. Le schéma synoptique de la figure (4) donne une séquence de lecture d'un signal RMN.

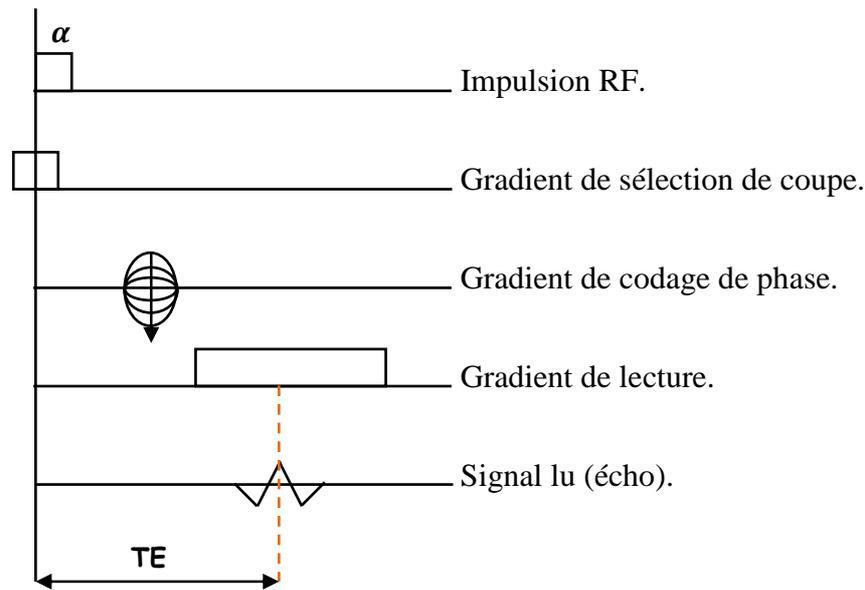


Fig.4 Séquence de lecture d'un signal RMN.

### 2.3 Pondération et séquences d'images [11]

La modification des paramètres d'acquisition tels que le temps de répétition TR, le temps d'écho TE modifient la pondération de l'image caractérisée par des temps de relaxation longitudinale et transversale différents selon les tissus observés. Chaque séquence est constituée d'une combinaison d'ondes radiofréquence et d'impulsions de gradients. Le choix des paramètres permet de favoriser le signal d'un tissu particulier. Cela constitue un ensemble de modalités de l'imagerie IRM (fig.5).

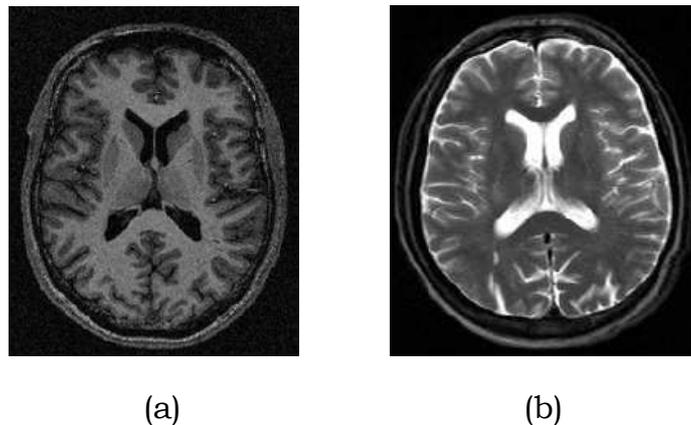


Fig.5 Images acquises par IRM: (a) pondération  $T_1$ ,  
(b) pondération  $T_2$  [8].

Les séquences de l'IRM est un assemblage judicieux des paramètres ajustables (TR, TE, Impulsions, Gradients) qui permet d'obtenir des images de contrastes différents. Il existe deux familles de séquence en IRM dont découle une série d'options : la séquence d'écho spin (SE) et la séquence d'écho de gradient (GRE).

La séquence d'écho spin (SE) caractérisée par le fait que, l'impulsion RF de départ est suivie d'une impulsion de rephasage qui remet les spins en phase et permet d'obtenir un écho du signal comme le montre le synoptique de la figure (6). Ses avantages sont nombreux : elle est peu sensible aux artéfacts, elle est de bonne qualité et donne un vrai contraste en  $T_2$ . Son inconvénient est qu'elle est assez longue (2 min 40 sec/20 coupes).

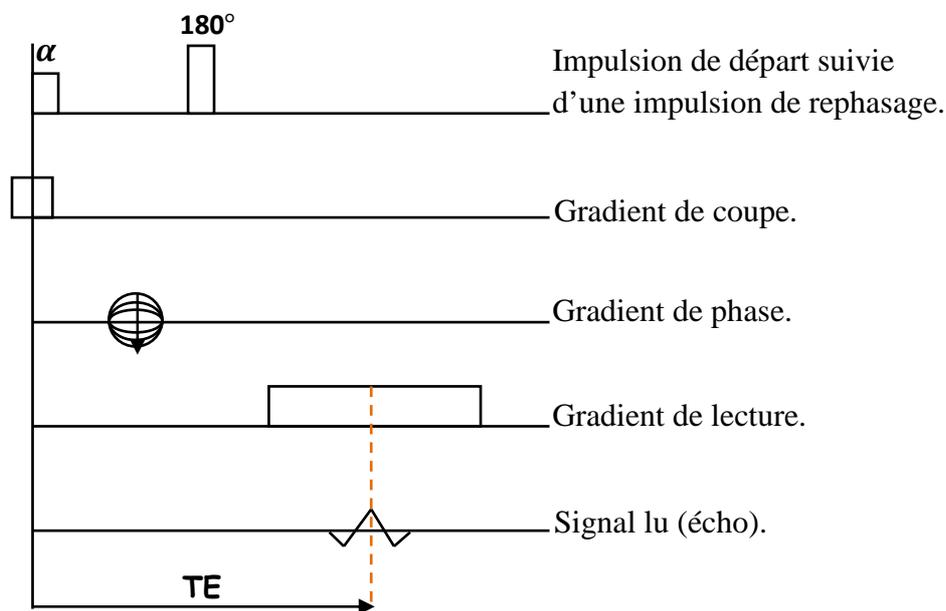


Fig.6 Séquence écho spin (SE)

Quant à la séquence d'écho gradient, elle se distingue de la séquence d'écho spin par l'application d'une première impulsion RF inférieure à  $90^\circ$  et par l'absence de la RF de refocalisation de  $180^\circ$ , qui est remplacée par l'inversion de la polarité d'un gradient (gradient de lecture (fig.7)). Son avantage est que les TE et TR sont plus courts (30 sec/20 coupes), ce qui fait que les séquences GRE sont plus courtes. Son inconvénient est qu'elle est sensible aux artéfacts de susceptibilité magnétique et au déplacement chimique.

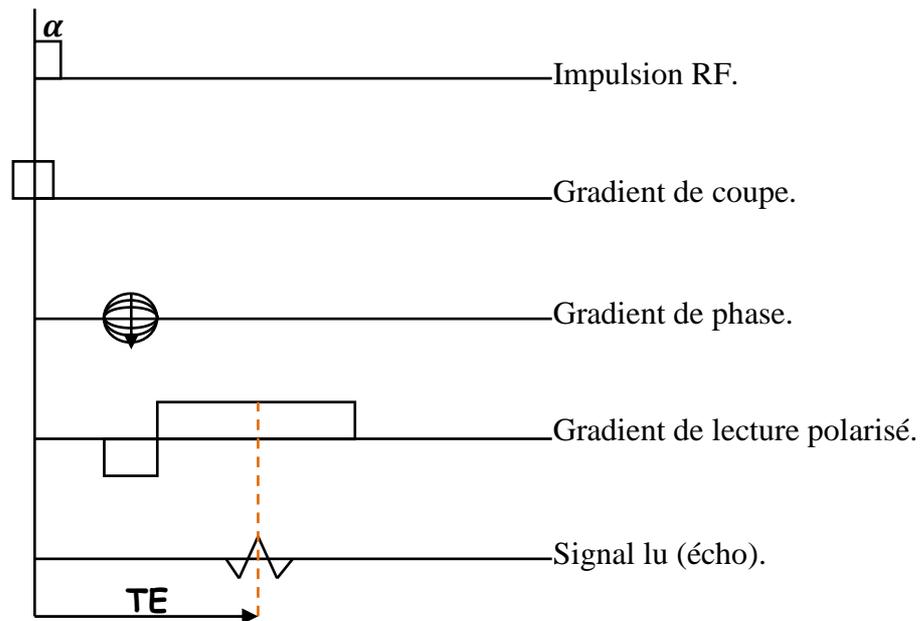


Fig.7 Séquence écho de gradient (GRE)

### 3. Les Artefacts en IRM

Un artefact est un effet artificiel ou un phénomène créé par les conditions expérimentales. C'est un effet indésirable ou un parasite. Ce mot est aussi employé pour désigner de manière générale un produit ayant subi une transformation, même minime, par l'homme influant ainsi sur la couleur ou la luminance d'un pixel. Les artefacts en IRM sont responsables d'erreur dans l'encodage de l'image, la perte de signal ou le rehaussement artificiel du signal, pouvant parfois simuler un processus pathologique [12]. Il est alors utile de connaître leur origine pour pouvoir les traiter. Il existe plusieurs types d'artefacts tels que celui de Gibbs, l'aliasing, le déplacement chimique et la troncature de données [13].

L'artefact de Gibbs se traduit par l'apparition de répliques des contours de fort contraste. Ces répliques sont dues au codage du plan de Fourier sur un nombre fini de points. L'aliasing apparaît lorsque les conditions d'échantillonnage de Shannon ne sont pas respectées pendant l'acquisition, la reconstruction parfaite de l'objet imagé devient impossible et il apparaît alors des répliques spatiales de l'objet qui perturbent l'analyse de l'image. Quant au déplacement chimique, il est lié à des interactions entre les protons et leur environnement, source d'apparition de faux contours. La troncature de données est provoquée par une interface raide entre deux structures de contraste très différent comme par exemple entre la graisse et l'os. On observe de multiples lignes parallèles au niveau de la zone de transition. Il provient du fait que la transformation de Fourier est tronquée

par le nombre limité de codage utilisé (128, 256, etc.). Cet artefact est plus fréquent dans la direction du codage de phase.

Parmi les nombreux artefacts engendrés par le processus d'acquisition en IRM, il y a le bruit qui contamine le signal détecté par la bobine radiofréquence. Les principales sources de ce bruit, proviennent à la fois du patient (agitation thermique des protons à l'origine d'émissions parasites) et de la chaîne de mesure convertisseurs analogiques-numériques, antenne, etc.) [8]. Les lois de probabilité caractérisant le bruit dans les imageurs IRM sont divisées selon l'image module ou l'image de phase [13]. L'image module est l'image du pixel par pixel. Cette opération étant non-linéaire, la nature gaussienne du bruit n'est pas conservée. Elle devient une distribution de Rice [14]. En fonction du rapport du signal sur bruit [15] [16] [17], la distribution change. En effet, si on néglige l'intensité du pixel et l'on ne considère que le bruit, la distribution devient de type Rayleigh et si le rapport signal sur bruit devient grand, la distribution peut être considérée comme gaussienne. L'image de phase, quant à elle, est obtenue par le calcul de l'arc-tangente du rapport entre les parties imaginaires et réelles. De la même façon que pour les images modules, la non-linéarité de cette relation entraîne une modification de la distribution du bruit. Dans le cas du bruit sans signal, elle correspond à une distribution uniforme et rend bien compte de l'aspect aléatoire du bruit. Dans le cas d'un fort rapport signal sur bruit, le bruit peut être considéré comme une distribution gaussienne centrée.

#### **4. Correction du bruit : Etat de l'art**

La suppression du bruit dans les images IRM a généré beaucoup de travaux dans la communauté des chercheurs en traitement d'images. Nous présentons un bref état de l'art rappelant quelques méthodes parus dans la littérature. Ainsi, dans [18], les auteurs présentent une méthode de débruitage pour les images IRM avec des paramètres optimaux. L'idée est d'incorporer le procédé de filtrage, par diffusion anisotrope, dans un système en boucle fermé tout en surveillant l'amélioration de l'image filtrée. L'optimisation est pilotée en comparant les caractéristiques du bruit supprimé à ceux du modèle supposé au point optimum. Le résultat obtenu a été comparé à celui du filtre médian ainsi que les k-plus-proche-voisin. Dans [19], Sijbers et al. proposent un filtrage anisotrope adaptatif pour le bruit en IRM. Ils assument que la distribution du bruit dans les images IRM suit une distribution de Rice, contrairement à ce que sous-entendent les autres à savoir que la distribution est gaussienne. Ce dernier mène à un résultat de filtrage biaisé notamment dans les régions où le rapport SNR est faible. Ils expliquent que les méthodes destinées à réduire le bruit se basent sur l'utilisation de la moyenne temporelle pour estimer l'image débruitée tout en

préservant la résolution spatiale, à condition que le processus de formation de l'image reste stationnaire. Cette solution a été remplacée par la moyenne spatiale pour des raisons de temps d'exécution tout en respectant deux hypothèses suivantes : la stationnarité et la disponibilité de la fonction de densité de probabilité du signal. Ils démontrent que l'utilisation de la distribution de Rice donne un résultat de filtrage moins biaisé. Dans [20], Gerig et al. ont étudié les propriétés du filtre de diffusion anisotrope de Perona et ont montré son efficacité à supprimer du bruit dans des zones homogènes, à préserver les contours des objets lorsqu'il est appliqué sur les données IRM 2D et 3D. Dans [21], Yang et al. ont utilisé le même filtre de diffusion anisotrope de Perona. A la différence des autres techniques qui utilisent directement le gradient, ils se servent de l'orientation locale de l'intensité et de la mesure d'anisotropie du niveau des contours pour contrôler la forme et le gain du noyau du filtre. Ceci lui assure la préservation des coins et les jonctions durant le processus du filtrage. Dans [22], Suyash et al. présentent une méthode pour caractériser la structure du voisinage en utilisant un estimateur de densité non paramétrique. La méthode de débruitage proposée, combine un modèle probabiliste et un a priori adaptatif de l'image. Les propriétés du bruit Ricien sont exploitées dans l'apprentissage du bruit dans le voisinage de l'image en utilisant les statistiques d'ordre supérieur. Ces statistiques servent comme une information a priori dans un cadre de débruitage bayésien. Dans [23], Godtliebsen utilise les chaînes de Markov avec l'estimateur du maximum a posteriori pour restaurer les valeurs des pixels, par une méthode itérative et le recuit simulé. Dans [24], Soltanian-Zadeh et al. ont introduit un filtre non linéaire préservant les contours pour la restauration des images IRM multi-spectrales et qui utilise la moyenne nulle et un modèle gaussien pour les statistiques du bruit. Ce filtre a été appliqué comme un prétraitement dans la segmentation et la caractérisation des tumeurs de l'image cérébrale. Dans [25], Healy et al. ont été parmi les premiers à appliquer la technique de seuillage par ondelettes pour le débruitage des images IRM. Dans [26], Nowak a utilisé le carré du module de l'image IRM, avec un modèle de bruit de type ricien dans le seuillage par ondelette pour débruiter et corriger le biais introduit par le bruit.

## 5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit la définition de l'imagerie médicale sous différente modalité, puis nous sommes intéressés à la modalité IRM qui est l'objet de notre travail. Nous avons montré le principe qui régit la formation de ce type d'images ainsi les origines d'artefacts pouvant influencer sur la qualité des images acquises, et décrit les caractéristiques et les méthodes dédiées à la correction de l'artefact, bruit de fond qui entache les images IRM. Un état de l'art non exhaustif sur les

méthodes de correction du bruit existant des la littérature concernant les images IRM a été dressé.

Dans le prochain chapitre, nous présenterons les équations de diffusion anisotrope et les différents modèles qui on été développés, ce qui nous permettra de corriger l'artefact affectant les images IRM.

# Chapitre 2

## Filtrage par diffusion anisotrope

### 1. Introduction

Comme nous l'avons décrit dans le chapitre précédent, les images IRM sont entachées de plusieurs types d'artefacts parfois difficiles à supprimer sans altérer l'information utile contenue dans ces images. Par ailleurs Les filtres classiques se sont avérés impuissants pour supprimer sélectivement tout type de bruit tout en préservant les objets significatifs dans l'image originale. En effet, si le filtrage gaussien est largement employé en traitement du signal, en traitement d'images, il comporte des inconvénients comme le brouillage des contours et leurs délocalisations. De son côté, la diffusion non linéaire est un procédé de filtrage visant à éliminer le bruit d'une image, tout en préservant les informations importantes, comme les contours. Ainsi, dans ce chapitre, pour les besoins d'amélioration des images, d'élimination du bruit ainsi du renforcement des contrastes des objets dans les images IRM, nous allons retracer les principaux travaux effectués dans ce domaine et, plus particulièrement, celles basées sur l'équation de diffusion décrite par les équations aux dérivées partielles.

### 2. Utilisation des EDP de diffusion en traitement d'images

Utilisées depuis de nombreuses années en physique du solide, récemment, les équations aux dérivées partielles (EDP) ont pris une grande importance dans le domaine du traitement des images. Ces équations sont nées du principe physique de la diffusion qui est basé sur celle qui s'établit dans une matière-fluide à savoir que l'équation de diffusion est similaire à

celle des concentrations locales d'un fluide qui s'équilibrent et dont la propriété est exprimée par la loi de Fick exprimée par l'expression suivante:

$$j = -D \cdot \nabla u \quad (1)$$

où  $D$  est un tenseur de diffusion, symétrique défini positif,  $u(x, t)$ , la concentration de la matière telle que  $u: \mathcal{R}^3 \times [0; +\infty[ \rightarrow \mathcal{R}$ ,  $\nabla u$ , le gradient de la concentration de matière ;  $j$ , le flux de matière et  $t$ , le temps.

L'équation (1) montre que le sens du déplacement du flux de matière est opposé à la concentration, c'est-à-dire que la concentration, passe d'une région plus forte à une région plus faible. Ainsi, on parle de diffusion isotrope si  $\nabla u$  et  $j$  sont parallèles, dans ce cas,  $D$  peut être remplacé par un scalaire  $g$  qui est la diffusivité. La propriété de transport de matière est exprimée par l'équation de continuité suivante :

$$\partial_t u = -\text{div}(j) \quad (2)$$

En combinant les équations (1) et (2), on obtient l'équation de diffusion (3) :

$$\partial_t u = \text{div}(D \nabla u) \quad (3)$$

Par ailleurs, on parle de diffusion homogène si le tenseur de diffusion  $D$  est constant sur tout le domaine considéré. Si  $D$  dépend de la structure différentielle de la concentration de matière, la diffusion est non linéaire. En traitement d'images, la concentration  $u$  est assimilée au niveau de gris et les conditions initiales  $u(0, x) = u_0(x)$  à l'image de départ. D'ailleurs, ce n'est que récemment que les équations aux dérivées partielles (EDP) ont pris de l'importance dans le domaine du traitement d'images où l'on a une fonction à une ou plusieurs variables d'espace  $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Cette fonction  $U$  est une formulation de la version continue des images discrètes.  $U$  peut aussi évoluer en fonction du temps du fait de ses caractéristiques spatiales  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Nous avons ainsi :

$U: \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}$  où  $\mathcal{R}_+$  est l'ensemble de réels positifs incluant le temps.

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t}(x_1, \dots, x_n, t) = F\left(U, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots\right) \\ U(x_1, \dots, x_n, 0) = U_0 \end{cases} \quad (4)$$

Parmi ces équations écrites sous une forme générale, on peut citer les équations de diffusion dont l'une des plus connues est l'équation de la chaleur exprimée comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \text{div}(c \cdot \nabla U) = c \cdot \Delta U \quad (5)$$

où  $c$  est le coefficient de diffusion constant homogène à une conductibilité thermique. Cette équation Elle intervient en prétraitement des images de façon à supprimer les perturbations pour ensuite effectuer une recherche des contours, par exemple, sans être perturbée par le bruit.

### 3. Diffusion isotrope

La diffusion isotrope utilise directement les équations de diffusion physique. Elle permet d'homogénéiser une image de même que la diffusion de température, en physique, homogénéise la température des objets. En traitement d'images, cela revient à faire directement la convolution de l'image avec une gaussienne d'écart type égal à  $\sqrt{2t}$  [27]. Le processus de diffusion isotrope tend à simplifier l'image initiale en réduisant les détails progressivement des petites structures jusqu'aux grandes avec des contours de plus en plus flous au cours des différentes itérations jusque l'obtention d'une version constante. Cet avantage est exploité pour débruiter des zones homogènes. La méthode de diffusion isotrope présente, toutefois, plusieurs inconvénients. Tout d'abord, comme nous l'avons mentionné ci-dessus, elle lisse les discontinuités de niveau de gris marquant les transitions entre les régions, ce qui baisse le contraste et donne un effet de flou dominant sur toute l'image. Ensuite, le choix de l'écart type pour le noyau gaussien doit être adaptatif selon la région traitée afin de préserver les structures locales. Une zone de fort bruit nécessitera un écart type important par rapport à une autre peu bruitée. De même, pour le temps de diffusion, il doit être choisi de telle sorte que seul le bruit sera lissé et non pas les transitions marquant les contours. Enfin, le filtrage par diffusion isotrope provoque la délocalisation des contours marquant les objets à différents échelle [28], ce qui a pour conséquence la difficulté de faire la correspondance d'un objet à lui-même dans les différentes échelles. Celui-ci est nommé problème de correspondance [29] (fig. 2.1).

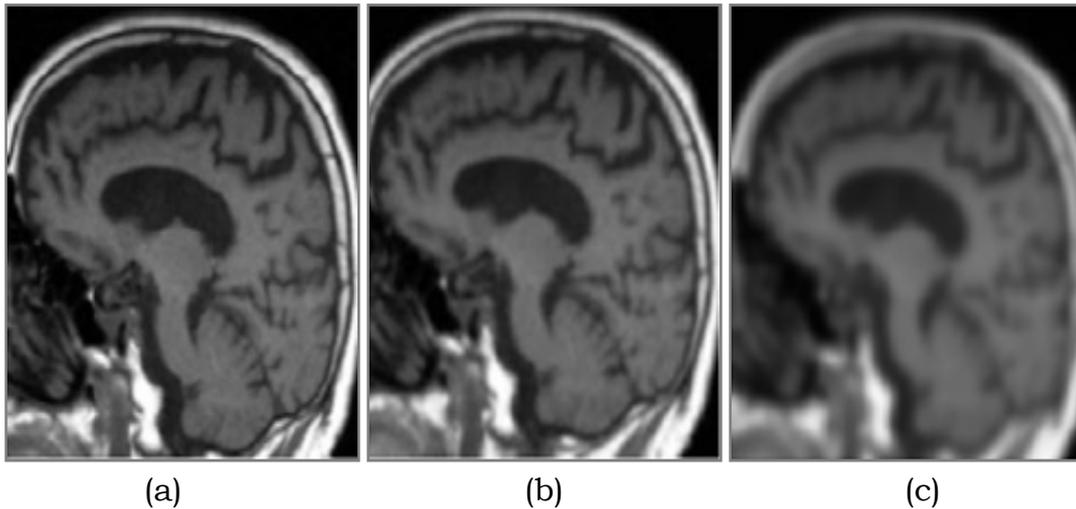


Fig.2.1 Filtrage gaussien appliqué à une image bruitée (a), avec un écart type de 1,2 (b) et de 3,5 (c).

## 4. Diffusion anisotrope

Des modifications peuvent être introduites dans l'équation de diffusion de la chaleur pour combiner ses avantages à savoir l'élimination efficace du bruit et simplification de l'image avec un rehaussement des contours. Dans ce qui suit, nous présentons d'abord, le modèle de Perona et Malik dont l'objectif est d'éviter d'effacer progressivement les contours, puis les différentes régularisations de ce modèle pour conclure avec la méthode fondée sur les filtres de choc d'Osher et Rudin qui tend à s'approcher de l'équation inverse de la chaleur.

### 4.1 Modèle de Perona et Malik

Perona et Malik ont proposés de modifier l'équation de diffusion pour obtenir la diffusion anisotrope en remplaçant la diffusion linéaire par une diffusion non linéaire en vue, d'abord, d'une homogénéisation maximale d'une image en réduisant le bruit puis d'une diffusion minimale au niveau des contours [30] et de la suppression du flou introduite par la diffusion linéaire. Le coefficient de diffusion, constant de l'équation de la chaleur, est remplacé par une fonction de diffusion qui est en fonction du gradient et ce, pour permettre l'adaptation de la diffusion selon la zone considérée. Le modèle ainsi proposé est le suivant [31] :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(c(x, y, t)\nabla u(x, y, t)) \quad (6.1)$$

Avec les conditions initiales suivantes :

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad (6.2)$$

Après avoir développé l'opérateur de divergence dans (6.1), l'expression (7) est obtenue :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c(x, y, t)\Delta U(x, y, t) + \nabla c(x, y, t) \cdot \nabla U(x, y, t) \quad (7)$$

Dans le cas où la conductivité  $c(x, y, t)$  est une constante, l'équation de diffusion isotrope (5) peut être retrouvée. Cette conductivité  $c(x, y, t)$  est donnée par l'expression (7) pour favoriser le lissage intra-région contrairement aux lissages inter-régions et ce, à travers une fonction décroissante dépendant de la norme du vecteur gradient  $|\nabla U|$ :

$$c(x, y, t) = g(|\nabla U(x, y, t)|) \quad (8)$$

La fonction  $g$  a été proposée par Perona et Malik sous les deux formes suivantes :

$$1. \quad g_1(|\nabla u|) = e^{-\left(\frac{|\nabla u|}{k}\right)^2} \quad (8.1)$$

$$2. \quad g_2(|\nabla u|) = \frac{1}{1 + \left(\frac{|\nabla u|}{k}\right)^2} \quad (8.2)$$

La figure 2.2 présente l'allure de ces deux fonctions de diffusions  $g_1$  et  $g_2$  avec un seuil de diffusion  $k = 15$  dont le rôle est de définir la limite entre les

gradients forts correspondant aux transitions à maintenir et les gradients faibles correspondant au bruit comme le montre la figure 2.3.

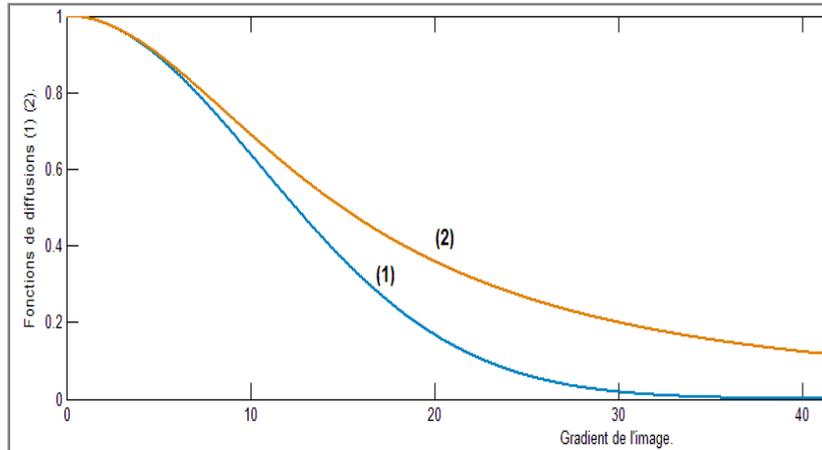


Fig.2.2 Allure des fonctions  $g_1$  courbe (1) et  $g_2$  courbe (2) [32]

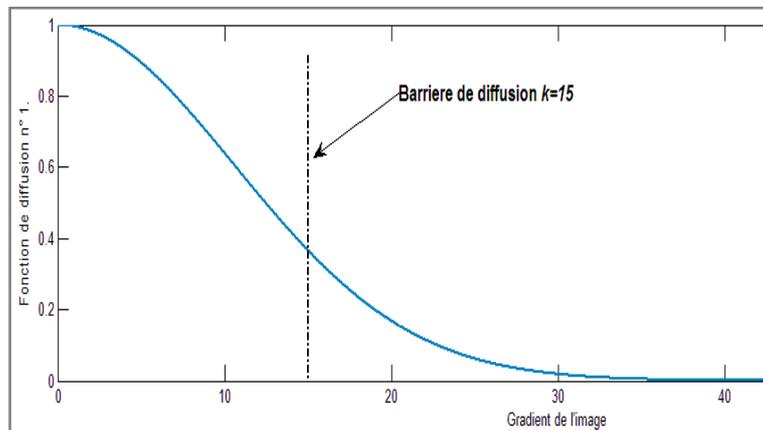


Fig.2.3 Représentation de la barrière de diffusion.

De plus [30], prouvent que leur processus de diffusion permet une meilleur détection de contour que celui proposé par Canny [33]. Dans [34], l'écriture de l'équation (6.1) permet de donner une interprétation directionnelle de l'équation de diffusion et, ainsi, marquer la différence avec le l'équation de diffusion isotrope. Soient  $\vec{\eta}$  et  $\vec{\xi}$ , deux vecteurs unitaires, respectivement, dans la direction du gradient et dans la direction orthogonale du gradient sur un contour tel que (fig.2.4) :

$$\vec{\eta} = \left( \frac{U_x}{|\nabla U|}, \frac{U_y}{|\nabla U|} \right)^T \quad \text{et} \quad \vec{\xi} = \left( -\frac{U_y}{|\nabla U|}, \frac{U_x}{|\nabla U|} \right)^T$$

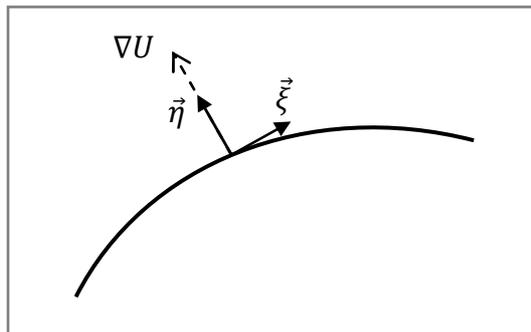


Fig. 2.4 Représentation directionnelle des vecteurs  $\vec{\eta}$ ,  $\vec{\xi}$  sur une courbe de niveau

Pour formuler l'équation de diffusion selon les directions par  $\vec{\eta}$  et  $\vec{\xi}$ , posons  $\nabla U = (U_x, U_y)^T$ , le vecteur gradient de  $U$  et  $|\nabla U| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2}$  sa norme.

Dans le repère  $(\vec{i}, \vec{j})$  du système d'axe  $(x, y)$  de l'image nous avons les expressions précédentes (6.1) et (7), soit :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \text{div}(c\nabla U) = \text{div}(c[U_x, U_y]) = \frac{\partial}{\partial x}(cU_x) + \frac{\partial}{\partial y}(cU_y)$$

Comme  $c = g(|\nabla U|)$ , on a :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = g(|\nabla U|)[U_{xx} + U_{yy}] + \left[\frac{\partial}{\partial x}g(|\nabla U|)\right]U_x + \left[\frac{\partial}{\partial y}g(|\nabla U|)\right]U_y \text{ avec :}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}g(|\nabla U|)\right]U_x = \frac{g'(|\nabla U|)}{|\nabla U|}(U_{xx}U_x + U_{xy}U_y)U_x \text{ et } \left[\frac{\partial}{\partial y}g(|\nabla U|)\right]U_y = \frac{g'(|\nabla U|)}{|\nabla U|}(U_{yy}U_y + U_{xy}U_x)U_y \text{ ce qui donne l'expression (9) :}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= g(|\nabla U|)[U_{xx} + U_{yy}] + \frac{g'(|\nabla U|)}{|\nabla U|}(U_{xx}U_x + U_{xy}U_y)U_x \\ &\quad + \frac{g'(|\nabla U|)}{|\nabla U|}(U_{yy}U_y + U_{xy}U_x)U_y \end{aligned} \quad (9)$$

Ainsi, dans le nouveau repère  $(\vec{\eta}, \vec{\xi})$  du système d'axe  $(x, y)$ , la dérivée  $U_\eta$  première et la seconde  $U_{\eta\eta}$  de  $U$  par rapport à  $\vec{\eta}$  sont données par:

$$U_\eta = \nabla U \cdot \vec{\eta} = |\nabla U| \text{ et}$$

$$\begin{aligned} U_{\eta\eta} &= \nabla U_\eta \cdot \vec{\eta} = \frac{1}{|\nabla U|} \left[ \frac{\partial}{\partial x}(|\nabla U|)U_x + \frac{\partial}{\partial y}(|\nabla U|)U_y \right] \\ &= \frac{(U_{xx}U_x + U_{xy}U_y)U_x + (U_{xy}U_x + U_{yy}U_y)U_y}{|\nabla U|^2} \\ &= \frac{U_{xx}U_x^2 + 2U_{xy}U_xU_y + U_{yy}U_y^2}{|\nabla U|^2} \end{aligned} \quad (10)$$

Sachant que le Laplacien est invariant par rotation (ou au changement de base (Annexe 1), on peut écrire :

$$\Delta U = U_{xx} + U_{yy} = U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} \quad (11)$$

En combinant les expressions (9), (10) et (11), l'équation de diffusion s'écrit sous la forme de l'expression (12) suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \text{div}(g(|\nabla U|)\nabla U) = g(|\nabla U|)(U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta}) + |\nabla U|g'(|\nabla U|)U_{\eta\eta} \\ &= \left(g(|\nabla U|) + |\nabla U|g'(|\nabla U|)\right)U_{\eta\eta} + g(|\nabla U|)U_{\xi\xi} \end{aligned} \quad (12)$$

En introduisant les notations  $c_\xi$  et  $c_\eta$ , on peut réécrire (12) de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c_\xi u_{\xi\xi} + c_\eta u_{\eta\eta} \\ c_\xi = g(|\nabla U|) \\ c_\eta = g(|\nabla U|) + |\nabla U|g'(|\nabla U|) = \phi'(|\nabla U|) \end{cases} \quad (13)$$

où  $\phi(|\nabla U|)$  est la fonction flux définie par  $\phi(|\nabla U|) = |\nabla U|.g(|\nabla U|)$ .

Notons que l'intérêt majeur de l'équation (12) est de pouvoir donner à cette équation un comportement sélectif au niveau de la diffusion, autrement dit, un lissage suivant  $\vec{\xi}$ , et un rehaussement suivant  $\vec{\eta}$ , selon la fonction  $g(\cdot)$  et la fonction flux  $\phi(|\nabla U|)$ . Cette fonction flux renseigne sur les propriétés et le comportement de l'équation de diffusion suivant les directions principales qui sont, la direction du gradient et la direction des contours représentés par les deux vecteurs unitaires  $(\vec{\eta}, \vec{\xi})$ . La figure 2.5 donne l'allure de la fonction flux ainsi que sa dérivée pour les deux fonctions de diffusions (8.1) et (8.2). Ces deux figures permettent de donner une interprétation réelle du processus de diffusion. La figure 2.5a met en évidence la valeur réelle de la barrière de diffusion, qui, théoriquement, donne  $|\nabla U| = \frac{\sqrt{2}}{2}k$ , pour la fonction (8.1) et  $|\nabla U| = k$ , pour la fonction (8.2). En analysant les figures 2.2 et 2.5b, on peut remarquer que la valeur de  $c_\xi$  reste tout le temps positive quelles que soient les valeurs du gradient  $|\nabla U|$ , ce qui n'est pas le cas pour  $c_\eta$  qui, pour des gradients inférieurs au seuil, donne des valeurs positives et, pour des valeurs du gradient supérieures au seuil, donne des valeurs négative. Ainsi, le processus de diffusion est subdivisé en deux processus, un processus direct qui n'est autre que la diffusion et un processus inverse dénommé processus de réaction dont l'intérêt est d'introduire un rehaussement pour les valeurs de gradient supérieures au seuil [30].

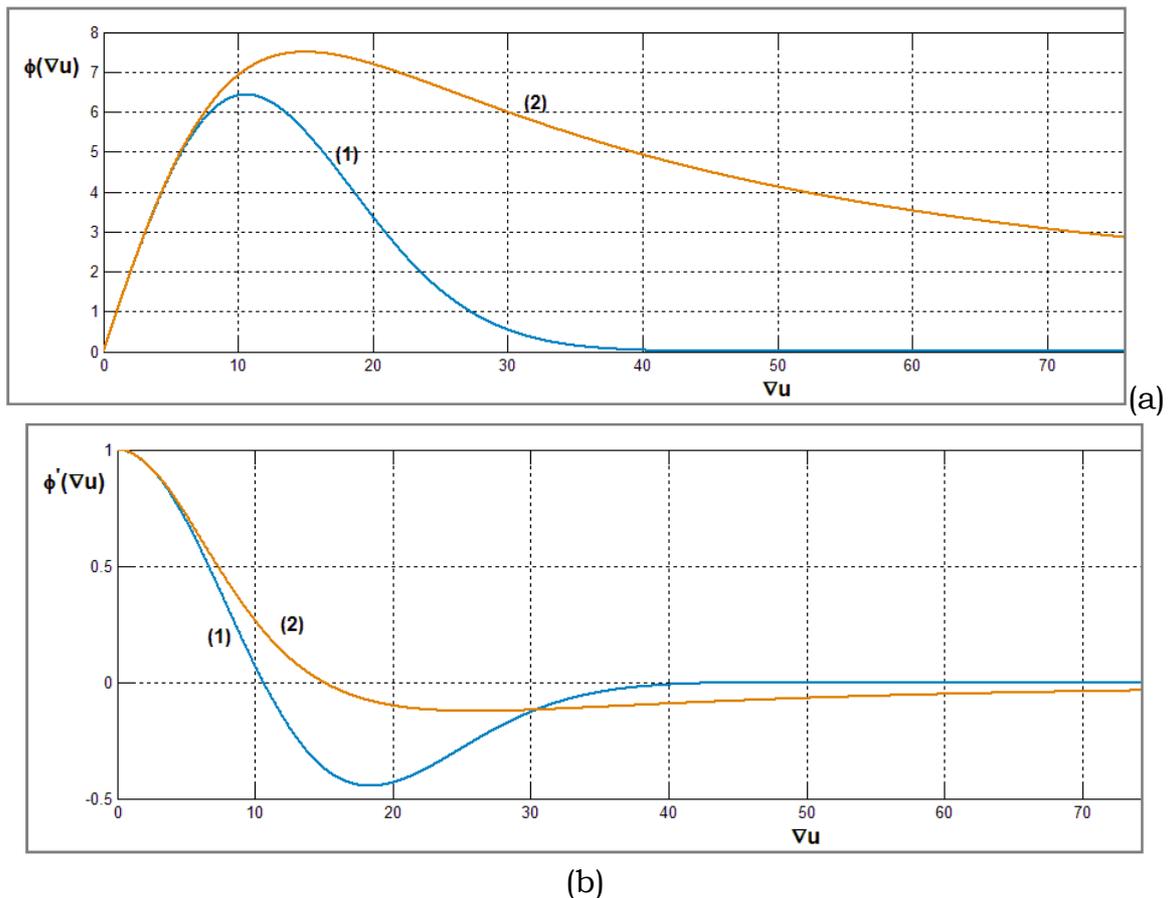


Fig.2.5 Allure de la fonction flux (a) et sa dérivée (b) avec  $k = 15$ .

La méthode donne de bons résultats [35] mais de nombreux auteurs lui ont trouvé certaines limites. En effet, à partir du modèle 1D, dans [36], [37], les auteurs montrent que pour des lignes de fortes pentes, certains choix pour la barrière de diffusion peuvent introduire une instabilité nommée « effet d'escalier », qui sont des segments linéaires séparés par des sauts, ce qui a conduit à introduire une contrainte pour la barrière de diffusion. Dans [38], il a été question de l'effet de trou qui se produit en présence d'une transition forte entre deux régions, au niveau de laquelle apparaît une petite zone de niveau intermédiaire (trou). Au cours de la diffusion, le trou s'élargit et crée une large zone floue, rendant la transition entre deux régions moins franche. De ce fait, à partir du modèle de Perona et Malik, d'autres modèles ont été établis.

#### 4.2 Modèle de Catté et al

Le modèle proposé, par Catté et al [39], est une régularisation du modèle de Perona et Malik connu pour avoir un processus de diffusion inverse à cause de la non monotonie des fonctions de flux et, pour des valeurs du gradient supérieures à la barrière de diffusion. L'EDP de diffusion devient localement instable. Par ailleurs, dans [39], [40], [41], on souligne l'impossibilité de justifier, à la fois, l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation (6.1). Catté et al ont donc proposé le modèle suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|\nabla(G_\sigma * u)|)\nabla u) \quad (14)$$

L'utilisation d'une version lissée de  $u$  permettra de calculer les gradients qui seront introduit dans la fonction de diffusion. Le choix de  $\sigma$  est décisif quant à la taille des détails à préserver. Ainsi, les objets de petits détails auront des gradients moins forts contrairement à ceux qui ont des tailles significatives qui, quant à eux, seront rehaussés et seront ainsi conservés. Notons qu'une valeur de  $\sigma$  trop faible nous ramène au modèle de Perona et Malik [32].

### 4.3 Filtre de Choc

Dans le paragraphe (4.1), nous avons vu le modèle directionnel de l'équation de la diffusion anisotrope qui nous a permis de comprendre l'aspect réel du processus de diffusion suivant la tendance locale de l'image. nous avons vu que la fonction flux nous renseigne de plus sur la caractéristique de rehaussement rechercher pour améliorer le contraste de l'image. Malheureusement, ce rehaussement ne fait pas la distinction entre le bruit et le contour, ce qui n'est pas souhaitable. Plusieurs méthodes de rehaussement de contour on été proposées, dans [42] où les auteurs utilisent la dérivée du noyau gaussien pour le rehaussement des contours flous. Dans [43], tout en restant dans le cadre des EDPs de diffusion, les auteurs exploitent la caractéristique inverse de la diffusion pour proposer un modèle de diffusion-réaction, en introduisant de nouvelles fonctions de diffusion définissant les intervalles de diffusion et de réaction. D'autres filtres différents des précédents ont été proposés par Osher et Rudin [44] [45] en introduisant le filtre de choc initialement utilisé dans la mécanique des fluides. Ce filtre est une EDP hyperbolique non linéaire dont l'application permet d'accentuer les transitions en augmentant localement leur amplitude. Les chocs sont plus particulièrement développés sur les points d'inflexion représentant le passage par zéro des dérivées secondes et les extrema locaux restent inchangées dans le temps. Aucun faux extremum local n'est créé. Ce schéma préserve donc la variation totale [46]. La figure 2.6 illustre le principe :

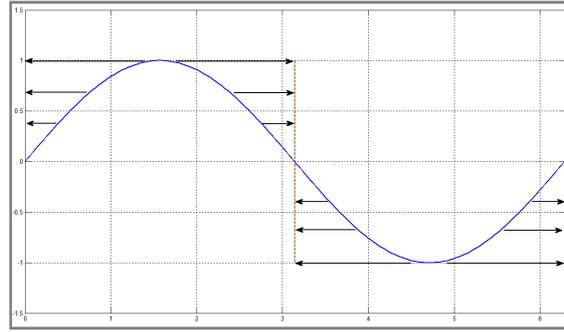


Fig. 2.6 Principe de rehaussement par filtre de choc dans le cas 1D.

L'équation du filtre de choc proposée par Rudin est donnée par l'expression (15) :

$$\begin{cases} u_t + F(u_{xx})|u_x| = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (15)$$

où  $F(\cdot)$  doit respecter la condition  $v \cdot F(v) \geq 0$ .

La sensibilité du filtre de Rudin au bruit fait que ce lui-ci développe des chocs dû au bruit présent. Le filtre est amélioré par [47] en proposant le modèle modifié suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + F(G_\sigma * u_{xx}, G_\sigma * u_x)|u_x| = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (16)$$

où  $G_\sigma$  est une gaussienne d'écart type  $\sigma$ ,  $F(\cdot, \cdot)$ , une fonction tel que :  $pqF(p, q) \geq 0$ .

L'équation classique des filtres de choc s'obtient en choisissant  $F(\cdot) = \text{signe}(\cdot)$ , d'où :

$$u_t = -\text{signe}(u_{xx})|u_x| \quad (17)$$

La figure 2.7, montre l'effet du filtre de choc appliqué sur un signal 1D (tangente inverse). On remarque bien que le signal est rehaussé au point d'inflexion.

La généralisation pour les cas 2D, en terme de dérivées secondes dans la direction du gradient est donnée par :

$$u_t = -\text{signe}(G_\sigma * u)_{\eta\eta} |\nabla u| \quad (18)$$

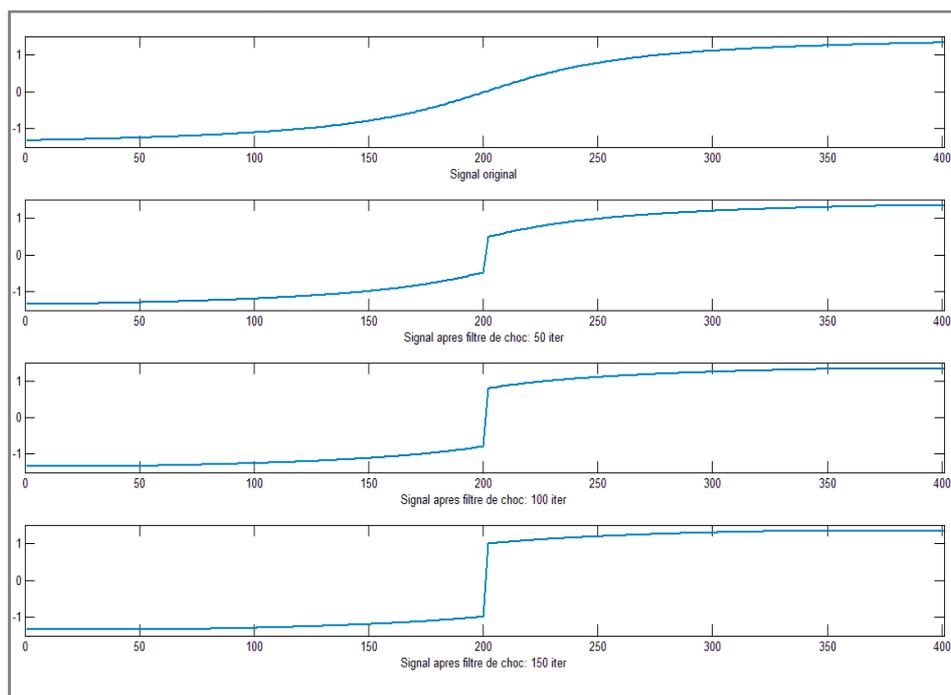


Fig.2.7 Signal ( $\tan^{-1}(x)$ ) avant et après application du filtre de choc pendant 50, 100 et 150 itérations respectivement.

La figure 2.8, montre l'exemple d'application de ce dernier sur une image, qui a été affecter au préalable par un flou gaussien d'écart-type  $\sigma = 2$ .

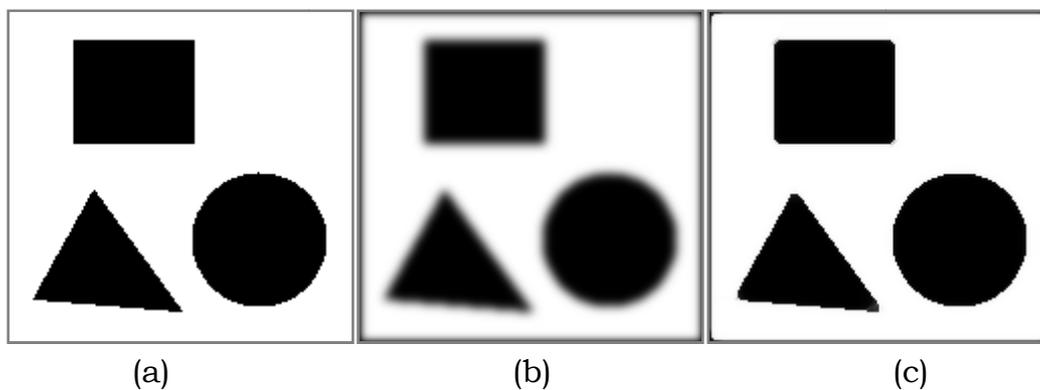


Figure 2.8 : (a) image initiale, (b) image flou après application d'une gaussienne d'écart-type  $\sigma = 2$ , (c) résultat après application du filtre de choc.

La diffusion anisotrope a fait l'objet de multiples travaux dans le but de donner une interprétation de ses propriétés, Parmi celle-ci l'approche variationnelle.

## 5. Approches variationnelles

Dans cette partie, nous présentons trois modèles de diffusion, tous dérivés d'une approche variationnelle dont l'objectif est de formuler une fonctionnelle d'énergie à minimiser. Cette dernière permet de faire le lien avec les équations aux dérivées partielles (EDP) de diffusion traitées aux paragraphes précédents. En effet l'évolution d'une image selon une EDP donnée peut être interprétée comme la solution d'un problème variationnel [34]. Nous nous intéresserons, particulièrement, au modèle de [48] et sa liaison avec l'équation de diffusion anisotrope et, ainsi, à la méthode de diffusion par minimisation de la variation totale développée par Rudin, Osher et Fatemi [49]. Nous terminerons par l'approche variationnelle unificatrice proposé par Deriche et Faugeras [50].

L'ensemble de ces méthodes est basé sur la construction d'une énergie  $E$  à travers une fonction  $F$ , imposée par le problème à traiter dont les principaux objectifs sont l'amélioration d'images, la préservation des discontinuités entre régions et ainsi la stabilité du processus de diffusion. Ainsi, pour une image 2D définie sur  $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ , la forme générale de l'énergie est définie par :

$$E = \iint_{\Omega} F(x, y, U, \partial U / \partial x, \partial U / \partial y) dx dy \quad (19)$$

Où  $F$  est une fonctionnelle dépendante des variables  $(x, y)$  et  $U_x$  et  $U_y$  les dérivées de fonction  $U(x, y)$ . Il s'agit de trouver une fonction qui rende stationnaire (maximum, minimum) l'intégrale de  $F$  par les variables  $(x, y)$  dans le domaine  $\Omega$  avec des conditions aux frontières  $\partial\Omega$ .

La fonction  $U$  est déterminée par l'équation d'Euler-Lagrange donnée

$$\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial U_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial U_y} = 0 \quad (20)$$

La relation (20) représente une condition nécessaire à respecter par le minimum de (19). Dans la plupart des applications, une résolution directe de l'équation d'Euler-Lagrange n'est pas possible. La résolution numérique s'obtient en déterminant l'état stable de l'EDP suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial U} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial U_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial U_y} \quad (21)$$

Le minimum des énergies construites, correspondant à cet état stable, est déterminé par l'application de l'équation d'Euler-Lagrange suivant plusieurs modèles.

### 5.1 Modèle de diffusion anisotrope biaisée de Nordstrom

Dans [48], Nordstrom propose de minimiser l'énergie suivante :

$$E_{U_0}(U, \omega) = \iint_{\Omega} [\beta(U - U_0)^2 + \omega |\nabla U|^2 + \lambda^2(\omega - \ln(\omega))] dx dy \quad (22)$$

tel que :

$\beta$  et  $\lambda$  sont deux réels positifs,  
 $\omega$ , définie sur  $\Omega \rightarrow [0,1]$ , est une fonction représentant les contours,  
 $\omega \approx 0$ , aux voisinages du contour,  
 $\omega \approx 1$ , à l'intérieure d'une région homogène.

Cette énergie est composée de trois termes. Le premier terme  $\beta(U - U_0)^2$  pénalise la déviation de la solution  $U$  par rapport à  $U_0$ , le tout pondéré par un coefficient  $\beta$ . Le deuxième terme  $\omega|\nabla U|^2$  contrôle le lissage dans les régions homogènes. Le troisième terme  $\lambda^2(\omega - \ln(\omega))$ , pénalise les contours. La fonction  $F$  à minimiser est donnée par :

$$F(U, U_x, U_y, \omega) = [\beta(U - U_0)^2 + \omega|\nabla U|^2 + \lambda^2(\omega - \ln(\omega))]$$

Le système d'équation d'Euler-Lagrange associée à  $U$  et  $\omega$  est :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial U} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial U_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial U_y} = 0 \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \frac{dF}{d\omega} = 0 \end{cases} \quad (24)$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \beta(U - U_0) - \operatorname{div}(\omega \nabla U) = 0 \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} |\nabla U|^2 + \lambda^2 \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Avec les conditions aux limites de type Neumann :

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0$$

D'après (26),

$$\omega = \frac{1}{1 + \frac{|\nabla U|^2}{\lambda^2}} \quad (27)$$

Ceci correspond bien à la fonction de diffusion de Perona et Malik. De plus, la relation (27) présente une preuve théorique des fonctions de diffusions (8.1) et (8.2) données précédemment. L'expression (25) peut être obtenue en recherchant l'état d'équilibre de l'équation suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \operatorname{div}[g(|\nabla U|)\nabla U] + \beta(U - U_0) \quad (28)$$

L'expression (25) est de plus obtenue par la méthode de descente appliquée à la fonctionnelle ci-dessous :

$$F(U, U_0) = \int_{\Omega} \left( \beta(U - U_0)^2 + \lambda^2 \left(1 + \frac{|\nabla U|^2}{\lambda^2}\right) \right) d\Omega \quad (29)$$

L'expression (28) est une équation de diffusion de type Perona et Malik avec un terme additionnel  $(\beta(U - U_0))$  appelé biais. La principale motivation de Nordstrom dans l'introduction du biais est de s'affranchir du problème du temps d'arrêt posé par le modèle de Perona et Malik [51].

## 5.2 Modèle par minimisation de la variation totale

Sachant que la variation totale (TV) mesure l'amplitude totale des oscillations d'une fonction  $f$  et étant donné une image  $U(x, y)$  définie sur une région bornée, ouverte et convexe  $\Omega \in \mathcal{R}^2$  et  $\nabla f$  considéré au sens des distributions, la  $TV(f)$  est donnée par l'expression suivante :

$$TV(f) = \int_{\Omega} |\nabla f| dz = \int_{\Omega} \sqrt{f_x^2 + f_y^2} dx dy \quad (30)$$

Ici,  $f$  est à variation bornée (VB) si  $f \in L^1$  et  $TV(f) < \infty$ ,

Dans le but de préserver les contours tout en débruitant les zones homogènes, dans [49], les auteurs proposent la minimisation de la norme de la TV avec des contraintes connaissant la variance du bruit  $\sigma^2$ :

$$E(U) = \int_{\Omega} |\nabla U| dx dy \quad (31)$$

Ces contraintes sont les suivantes :

$$\left\{ \int_{\Omega} U dx dy = \int_{\Omega} U_0 dx dy \right. \quad (31.1)$$

$$\left. \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (U - U_0)^2 dx dy = \sigma^2 \right. \right. \quad (31.2)$$

où  $|\nabla U| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2}$  où  $U_0$  est l'Image d'origine bruitée et  $U$ , l' Image filtrée.

Avec la condition d'une conservation des moyennes entre l'image filtrée et l'image bruitée. Le bruit dans l'image initiale est un bruit additif de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ .

Pour minimiser  $E$ , dans [49], les auteurs transforment le dernier en un problème sans contraintes en introduisant les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$  et  $\mu$ :

$$E'(U) = \int_{\Omega} |\nabla U| dx dy + \lambda \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} (U - U_0)^2 - \sigma^2 \right) dx dy + \mu \int_{\Omega} (U - U_0) dx dy \quad (32)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont calculés de manière à satisfaire les contraintes données ci-dessus (31.1) (31.2).

En écrivant l'équation d'Euler-Lagrange pour (32), on obtient l'expression précédente notée :

$$\begin{aligned} \mu + \lambda(U - U_0) - \frac{d}{dx} \left( \frac{U_x}{\sqrt{U_x^2 + U_y^2}} \right) - \frac{d}{dy} \left( \frac{U_y}{\sqrt{U_x^2 + U_y^2}} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{div} \left( \frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right) - \mu - \lambda(U - U_0) &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

avec les conditions aux limites de type Neumann.

La résolution de l'expression (33) avec la méthode de descente du gradient est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right) - \lambda(U - U_0) \\ \frac{\partial U}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad \partial\Omega \quad (34)$$

Notons que la méthode de résolution impose l'élimination de la première contrainte si la moyenne de  $U$  est la même que  $U_0$ .

Le paramètre  $\lambda$  est dépendant du temps et son expression est donnée par [49] :

$$\lambda(t) = -\frac{1}{2\sigma^2} \int_{\Omega} \left[ \sqrt{U_x^2 + U_y^2} - \left( \frac{U_x(U_0)_x}{\sqrt{U_x^2 + U_y^2}} + \frac{U_y(U_0)_y}{\sqrt{U_x^2 + U_y^2}} \right) \right] dx dy \quad (35)$$

L'expression (34) n'est pas une équation de diffusion [34]. Dans [47], un modèle de lissage sélectif et de détection de contour par diffusion non linéaire, est obtenu avec  $\lambda = 0$ , et en multipliant le terme à droite de l'expression (34) par  $|\nabla U|$ .

### 5.3 Modèle par diffusion anisotrope par minimisation de la variation totale

A partir du problème précédent, il est possible de tirer un modèle de diffusion anisotrope en éliminant les contraintes (31.1) et (31.2). Ceci donne :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right) \quad (36)$$

L'expression (36) peut être réécrite sous la forme directionnelle comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = c_{\xi} U_{\xi\xi} \\ c_{\xi} = \frac{1}{|\nabla U|} \end{cases} \quad (37)$$

Le comportement de la diffusion anisotrope par minimisation de la variation totale constitue un lissage en tout point de l'image. La diffusion est effectuée seulement le long des contours. Par contre, cette diffusion est nulle dans la direction du gradient [34].

### 5.4 Formulation variationnelle unificatrice

Cette approche est détaillée dans le rapport de recherche [52]. Son principe consiste à unifier dans un même formalisme le modèle proposé par Perona-Malik ainsi que celui proposé par Alvarez et celui proposé par Rudin pour donner les conditions pour lesquels on peut construire des schémas stables et convergents, pour résoudre les problèmes de restauration tout en maintenant les discontinuités entre régions.

Si  $u$  est la fonction d'intensité de l'image de  $\mathcal{R}^2$  dans  $\mathcal{R}$  définie sur domaine  $\Omega = (0, a) \times (0, b)$ , on cherche à trouver l'image d'origine sans le bruit à partir de l'image bruitée  $v$  qui est modélisé par l'équation suivante :

$$v = Pu + n \quad (38)$$

où  $P$  est un opérateur linéaire comme la convolution par exemple et  $n$ , un bruit généralement considéré comme gaussien de moyenne nulle.

Ainsi, le problème de trouver  $u$  à partir de  $v$  est ramené à celui de la minimisation de l'énergie  $E(u)$  dont l'expression est la suivante :

$$E(u) = \frac{1}{2} \|v - Pu\|^2 + \lambda \iint_{\Omega} \varphi(|\nabla u|) dx dy \quad (39)$$

Le premier terme de  $E(u)$  est un terme d'attache aux données alors que le second est un terme de régularisation. Le problème consiste à chercher une fonction  $\varphi$  qui permet d'implémenter une méthode stable et convergente pour le calcul du minimum tout en préservant le contraste de l'image. Dans [53],  $\varphi(\cdot)$  est une fonction qui permet de préserver les contours, et dans [34],  $\varphi(\cdot)$  est une fonction de régularisation. En effet, les deux définitions de  $\varphi(\cdot)$  sont complémentaires du moment qu'elle doit satisfaire au même temps la convergence et le maintien des transitions entre les régions (contours). En formulant l'équation d'Euler-Lagrange donnée par :

$$E(u(x, y)) = \int_{\Omega} F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy \quad (40)$$

l'extremum est donné par :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x, y, u, u_x, u_y) - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial F}{\partial u_x}(x, y, u, u_x, u_y) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial F}{\partial u_y}(x, y, u, u_x, u_y) \right] = 0$$

$$P^*(v - Pu) + \lambda \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial u_x} \phi(\|\nabla u\|) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial u_y} \phi(\|\nabla u\|) \right) \right) = 0$$

$$P^*(v - Pu) + \lambda \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_x}{\|\nabla u\|} \phi'(\|\nabla u\|) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u_y}{\|\nabla u\|} \phi'(\|\nabla u\|) \right) \right) = 0$$

Cette expression n'est autre que :

$$P^*(v - Pu) + \lambda \operatorname{div} \left( \frac{\phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|} \nabla u \right) = 0 \quad (41)$$

avec condition aux limites :

$$\left( \frac{\phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|} \nabla u \right) \cdot \vec{n} = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (41.1)$$

Dans cette expression,  $P^*$  est un opérateur adjoint de  $P$ ,  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal à la frontière de l'image et  $\lambda$ , un paramètre de régularisation.

L'équation (41) peut-être réécrite en fonction des dérivées directionnelles  $u_{\eta\eta}$  et  $u_{\xi\xi}$ , ce qui permet d'aboutir à l'expression suivante :

$$P^*(v - Pu) + \lambda \left( \phi''(\|\nabla u\|)u_{\eta\eta} + \frac{\phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|}u_{\xi\xi} \right) = 0 \quad (42)$$

Les deux coefficients de pondérations,  $\phi''(\|\nabla u\|)$  et  $\frac{\phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|}$  de l'expression (42) permettent de régler l'anisotropie du processus de diffusion. Dans le cas où la fonction  $\phi(\|\nabla u\|)$  est choisi de manière à avoir les deux coefficients de pondérations égaux, le processus de diffusion se réduit à une diffusion isotrope de l'équation de la chaleur suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} \quad (43)$$

Dans le cas où la fonction  $\phi(\|\nabla u\|)$  est choisie de manière à avoir les deux coefficients de pondérations positifs ou nuls, le processus de diffusion se réduit à un lissage anisotrope dans les deux directions tangente et orthogonale au gradient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \phi''(\|\nabla u\|)u_{\eta\eta} + \frac{\phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|}u_{\xi\xi} \quad (44)$$

Mais dans le cas où les coefficients sont négatifs, le processus devient celui de l'équation inverse de la chaleur, instable, rehaussant les structures floues. L'équation d'évolution (44) est assimilée à un processus de descente de gradient sur la surface d'énergie représentée par l'expression (40). La forme de l'énergie  $E(u)$  influence les conditions de stabilité et de convergence de l'expression (44), c'est-à-dire, si  $E(u)$  est convexe, le processus de minimisation est stable et converge vers le minimum global quelles que soient les conditions initiales. Dans le cas où  $E(u)$  possède plusieurs minimax locaux, les conditions initiales doivent être proche du minimum global, sinon les solutions seront très différentes pour des conditions initiales différentes. Pour assurer la convexité de  $E(u)$ , il faut que la fonction  $\phi(\|\nabla u\|)$  soit convexe avec :

$$1. \quad \phi''(\|\nabla u\|) \geq 0 \quad (44.1)$$

$$2. \quad \phi'(\|\nabla u\|) \geq 0 \quad (44.2)$$

La première condition correspond au cas où la fonction  $\|\nabla u\| \frac{\phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|}$  est strictement croissante. Cette condition dans le cas  $\left(\frac{\phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|}\right)$  vérifie la fonction de diffusion  $g_1(\|\nabla u\|)$  donnée par Perona et Malik afin que le processus soit stable autrement dit,  $\|\nabla u\|g_1(\|\nabla u\|)$  doit être strictement croissante. La première condition est nécessaire. Il faut ajouter à cela, la deuxième condition pour avoir une condition suffisante de stabilité.

Le choix de  $\phi(\|\nabla u\|)$  doit permettre un lissage le long des contours sans altérer les discontinuités. Cela correspond à ce que  $\frac{\phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|}$  ne doit pas s'annuler. Ce choix est fait par Rudin en proposant la fonction  $\phi(\|\nabla u\|) = \|\nabla u\|$  qui permet un lissage le long des contours et non le long du gradient.

Finalement, pour préserver les discontinuités et une diffusion isotrope dans les zones homogène (faible gradient), et garantir la stabilité et la convergence, il faut imposer les conditions suivantes sur  $\phi(\|\nabla u\|)$  :

$$\lim_{\|\nabla u\| \rightarrow 0} \frac{\phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|} = \lim_{\|\nabla u\| \rightarrow 0} \phi''(\|\nabla u\|) = \phi''(0) \geq 0 \quad (45)$$

et dans les zones de fort gradient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\|\nabla u\| \rightarrow \infty} \phi''(\|\nabla u\|) = 0 \end{array} \right. \quad (46)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\|\nabla u\| \rightarrow \infty} \frac{\phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|} = 0 \end{array} \right. \quad (47)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\|\nabla u\| \rightarrow \infty} \frac{\phi''(\|\nabla u\|)}{\frac{\phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|}} = 0 \end{array} \right. \quad (48)$$

Les conditions (45), (46), (47) et (48) représentent les conditions suffisantes pour restaurer les images dégradées tout en préservant les discontinuités.

### 5.5 Modèle par association des filtres de choc et de la diffusion anisotrope

L'association d'EDP de choc et de diffusion a été proposée, initialement, par Alvarez et Mazorra [54] qui combinent des termes de diffusion et de choc de sorte que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{Diffusion} + \text{Choc} \quad (49)$$

Le modèle a ensuite été enrichi par Kornprobst [55], [53], en ajoutant un terme d'attache aux données :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{Données} + \text{Diffusion} + \text{Choc} \quad (50)$$

Le terme de diffusion permet d'éliminer le bruit. Le terme de choc est utilisé pour éliminer le flou et le terme d'attache aux données diminue la sensibilité au temps d'arrêt.

### 5.6 Modèle de Kornprobst

En reprenant le formalisme précédent, Kornprobst [53], présente un modèle diffusion-réaction suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & -\alpha_a(u - u_0) \quad (\text{terme attache aux données}) \\ & +\alpha_d(h_{\tau_1}(|\nabla u_\sigma|)u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi}) \quad (\text{terme diffusion}) \\ & -\alpha_r(1 - h_{\tau_2}(|\nabla u_\sigma|))\text{sign}((u_\sigma)_{\eta\eta})|\nabla u| \quad (\text{terme réaction}). \end{aligned} \quad (52)$$

avec  $h_\tau(x) = 1$  si  $x < \tau$ , 0 sinon et  $\tau_1 < \tau_2$ .

La fonction  $h_\tau$  est une fonction de seuil définissant, dans la direction du gradient, les domaines de diffusion et de réaction. On peut aisément reconnaître le terme de diffusion, le terme de réaction (filtre de choc) et terme d'attache aux données vus dans les paragraphes précédents.

L'équation (52) se décompose en trois comportements suivant la valeur de  $\nabla u_\sigma$  :

- $|\nabla u_\sigma| < \tau_1$  : l'opérateur de diffusion est le Laplacien.
- $\tau_1 < |\nabla u_\sigma| < \tau_2$  : le lissage ne se fait que le long des contours (direction  $\xi$ ).
- $\tau_2 < |\nabla u_\sigma|$  : le lissage se fait toujours suivant  $\xi$  mais avec les filtres de choc en plus.

## 6. Diffusion tensorielle

Ce paragraphe décrit une méthode qui utilise une matrice de diffusion à la place de fonction de diffusion scalaire. Le modèle générale décrivant ces EDP est donné par :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(D \cdot \nabla u) \quad (53)$$

avec les conditions aux limites suivantes :  $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$  dans  $\Omega$ . et  $u(x, y) = 0$  où  $D \cdot \nabla u \cdot \vec{n} = 0$  sur la frontière du domaine  $\partial\Omega$  dont la normale extérieure est  $\vec{n}$ .

Le tenseur de diffusion qui sera présenté ci-dessous est une matrice symétrique définie positive dont les valeurs propres réelles  $\lambda_1, \lambda_2$  permettent une décomposition dans la base des vecteurs orthonormaux  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  [56] :

$$D = (\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix}^T \quad (53.1)$$

Cette décomposition permet de décrire le comportement de la diffusion selon les directions des vecteurs propres. Le choix de la matrice  $D$  et des fonctions de diffusion influent fortement les résultats obtenus. Habituellement, on choisit, les fonctions de diffusion se sorte qu'elles incluent des fonctions du gradient lissé de l'image ou des fonctions qui dépendent d'une notion de cohérence de l'orientation. Les directions des vecteurs propres  $(\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2)$  correspondent respectivement aux directions du gradient lissé et à la direction orthogonale au gradient ou aux vecteurs propres de structures plus élaborées tel le tenseur de structure. Dans le but de garder le comportement de la diffusion le long de la direction normale au contour et de la tangente. Dans [57], [29], Weickert propose une définition tensorielle de la fonction de diffusion du modèle (6.1). Il utilise un tenseur de structure pour déterminer la tendance directionnelle locale. Ces informations sont ensuite employées pour construire un tenseur de diffusion. Weickert propose deux filtres de diffusion anisotropique qui sont la diffusion pour le rehaussement de contours (Edge Enhancing Diffusion (EED)) et la diffusion pour l'augmentation de la cohérence (Coherence Enhancing Diffusion (CED)). Le premier filtre (EED) permet un lissage des images avec rehaussement sélectif des contours. Le deuxième filtre (CED) est utile dans les tâches de reconstruction d'objets comme dans le cas d'empreintes digitales ou dans

des tâches de détection de défauts [58], [59], [60], [61]. Rappelons le tenseur de diffusion peut être désigné par la matrice  $D$  symétrique définie positive (ses valeurs propres sont strictement positives) telle que [62] :

$$D = R^T \Lambda R \text{ avec } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (54)$$

Où  $R$  est une matrice orthogonale de changement de base dans le sens « base canonique vers la base formée des vecteurs propres  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  de  $D$  » et  $R^T$  l'application réciproque. La transformation de  $\vec{v}_1$  au travers de  $D$  est :

$$\begin{aligned} D\vec{v}_1 &= R^T \Lambda R \vec{v}_1 = R^T \Lambda \vec{t}_1 = R^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 R^T \vec{t}_1 \\ &= \lambda_1 \vec{v}_1 \end{aligned} \quad (54.1)$$

On a de même pour  $\vec{v}_2$  :

$$D\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2 \quad (54.2)$$

Les vecteurs orientés selon  $\vec{v}_1$  subissent le facteur d'échelle  $\lambda_1$  et les vecteurs orientés selon  $\vec{v}_2$  subissent le facteur d'échelle  $\lambda_2$ .

Un vecteur quelconque  $\vec{u}$  s'écrit :

$$\vec{u} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 \quad (54.3)$$

et donc :

$$D\vec{u} = \lambda_1 c_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 c_2 \vec{v}_2 \quad (54.4)$$

Pour construire la matrice  $D$ , on choisit la matrice  $R$  telle que  $R = \frac{1}{\|\nabla u\|} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix}$ , c'est-à-dire, l'orientation du vecteur gradient  $\|\nabla u\|$ . Si on agit sur les vecteurs alignés avec  $\|\nabla u\|$ , on aura  $D\nabla u = R^T \Lambda R \nabla u$ .

En développant l'expression de  $D$ , on a :

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{\|\nabla u\|^2} \begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|\nabla u\|^2} \begin{pmatrix} \lambda_1(u_x)^2 + \lambda_2(u_y)^2 & (\lambda_1 - \lambda_2)u_x u_y \\ (\lambda_1 - \lambda_2)u_x u_y & \lambda_2(u_x)^2 + \lambda_1(u_y)^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|\nabla u\|^2} \left( \lambda_1 \begin{pmatrix} u_x^2 & u_x u_y \\ u_x u_y & u_y^2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} u_y^2 & -u_x u_y \\ -u_x u_y & u_x^2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\|\nabla u\|^2} (\lambda_1 \nabla u \nabla u^T + \lambda_2 \nabla^\perp u \nabla^\perp u^T) \end{aligned} \quad (55)$$

avec :  $\nabla^\perp u = (-u_y \quad u_x)^T$

$$D\nabla u = \left( \frac{1}{\|\nabla u\|^2} (\lambda_1 \nabla u \nabla u^T + \lambda_2 \nabla^\perp u \nabla^\perp u^T) \right) \nabla u = \frac{1}{\|\nabla u\|^2} (\lambda_1 \nabla u \nabla u^T \nabla u + \lambda_2 \nabla^\perp u \nabla^\perp u^T \nabla u) \quad (56)$$

Puisque  $\nabla^\perp u^T \nabla u = 0$ , on a  $D\nabla u = \frac{1}{\|\nabla u\|^2} \lambda_1 \nabla u \nabla u^T \nabla u = \lambda_1 \nabla u$  avec

$\nabla u^T \nabla u = \|\nabla u\|^2$ . Ainsi :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(D\nabla u) = \text{div}(\lambda_1 \nabla u) = \lambda_1 \Delta u \quad (57)$$

L'équation (57) n'est autre que la diffusion isotropique. Pour effectuer un lissage dans les zones homogènes et le long des contours avec un

rehaussement, Weickert [29] a choisi une orientation des vecteurs propres de l'image convoluée avec un noyau gaussien d'écart-type  $\sigma$ . La section suivante montre l'intérêt de ce choix.

Au lieu de considérer l'orientation du gradient  $\nabla u$ , Weickert a préféré utiliser la version lissée du gradient ( $\nabla u_\sigma$ ). Ceci a pour effet que  $\nabla u$  et  $\nabla u_\sigma$  ne seront pas alignés sur la même droite. Ainsi, on aura  $\nabla^\perp u_\sigma^T \nabla u \neq 0$  [62].

$$D_\sigma = R_\sigma^T \Lambda R_\sigma \quad (58)$$

$$R_\sigma = \frac{1}{\|\nabla u_\sigma\|^2} \begin{pmatrix} u_{\sigma x} & u_{\sigma y} \\ -u_{\sigma y} & u_{\sigma x} \end{pmatrix} \quad (58.1)$$

Où  $u_\sigma = G_\sigma * u$ .

L'expression de  $D_\sigma$  est donc :

$$\begin{aligned} D_\sigma &= \frac{1}{\|\nabla u_\sigma\|^2} \begin{pmatrix} \lambda_1(u_{\sigma x})^2 + \lambda_2(u_{\sigma y})^2 & (\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_1 u_{\sigma x} u_{\sigma y} \\ (\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_1 u_{\sigma x} u_{\sigma y} & \lambda_2(u_{\sigma x})^2 + \lambda_1(u_{\sigma y})^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|\nabla u_\sigma\|^2} (\lambda_1 \nabla u_\sigma \nabla u_\sigma^T \quad \lambda_2 \nabla^\perp u_\sigma \nabla^\perp u_\sigma^T) \end{aligned} \quad (59)$$

d'où :

$$D_\sigma \nabla u = \frac{1}{\|\nabla u_\sigma\|^2} (\lambda_1 \nabla u_\sigma \nabla u_\sigma^T \nabla u \quad \lambda_2 \nabla^\perp u_\sigma \nabla^\perp u_\sigma^T \nabla u) \quad (60)$$

Les vecteurs propres de  $D_\sigma$  sont :

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \left( \frac{u_{\sigma x}}{\sqrt{u_{\sigma x}^2 + u_{\sigma y}^2}} & \frac{u_{\sigma y}}{\sqrt{u_{\sigma x}^2 + u_{\sigma y}^2}} \right)^T \\ \vec{v}_2 = \left( -\frac{u_{\sigma y}}{\sqrt{u_{\sigma x}^2 + u_{\sigma y}^2}} & \frac{u_{\sigma x}}{\sqrt{u_{\sigma x}^2 + u_{\sigma y}^2}} \right)^T \end{cases} \quad (61)$$

Le paramètre  $\sigma$  est un paramètre d'échelle, autrement dit, il détermine la taille minimale d'un objet que l'on désire conserver dans l'image. La décomposition de  $\nabla u$  suivant la base  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  de la matrice de diffusion  $D_\sigma$  est donnée par :

$$\nabla u = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2, \quad c_1 = \langle \vec{v}_1, \nabla u \rangle \quad c_2 = \langle \vec{v}_2, \nabla u \rangle$$

où  $\langle \vec{v}_1, \nabla u \rangle$  représente le produit scalaire de deux vecteurs. Ainsi, on a :

$$R_\sigma \nabla u = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^T \\ \vec{v}_2^T \end{pmatrix} \nabla u = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \lambda_1 & 0 \\ 0 & c_2 \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$R_\sigma^T \begin{pmatrix} c_1 \lambda_1 & 0 \\ 0 & c_2 \lambda_2 \end{pmatrix} = (v_1 \quad v_2) \begin{pmatrix} c_1 \lambda_1 & 0 \\ 0 & c_2 \lambda_2 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$D_\sigma \nabla u = c_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + c_2 \lambda_2 \vec{v}_2 \quad (63)$$

Les paramètres  $(c_1, c_2)$  caractérisent  $\nabla u$  et  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  caractérisent  $D_\sigma$ . En résumé, le comportement de l'équation de diffusion tensorielle est donné telle que [62] :

1.  $\lambda_1$ , la règle la diffusivité dans la direction de  $\nabla u_\sigma$ .
2.  $\lambda_2$ , la règle la diffusivité dans la direction de  $\nabla^\perp u_\sigma$ .
3. Si  $\sigma$  est petit, alors  $\nabla u_\sigma \rightarrow \nabla u$  et donc  $c_1 \rightarrow 1$  et  $c_2 \rightarrow 0$ , la diffusion est isotropique dont la diffusivité est régis par  $\lambda_1$ .
4. Si  $\sigma$  est grand, alors  $\nabla u_\sigma$  n'est pas aligné avec alors  $\nabla u$ , donc alors  $c_2 \gg 0$ , la diffusion est anisotropique régis  $\lambda_1, \lambda_2$ .
5. Si  $\lambda_1 = \lambda_2$ , alors  $D\nabla u = \lambda_1(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2) = \lambda_1\nabla u$ , la diffusion est isotropique.
6. Si  $\nabla u_\sigma$  est orthogonale à  $\nabla^\perp u$ ,  $c_1 = 0$ , la diffusion est anisotropique orienté le long des contours et seul le paramètre  $\lambda_2$  agit.
7. Si  $\lambda_1 > \lambda_2$  le comportement est proche de la diffusion isotropique.
8. Si  $\lambda_1 < \lambda_2$  le comportement est proche de la diffusion anisotropique.

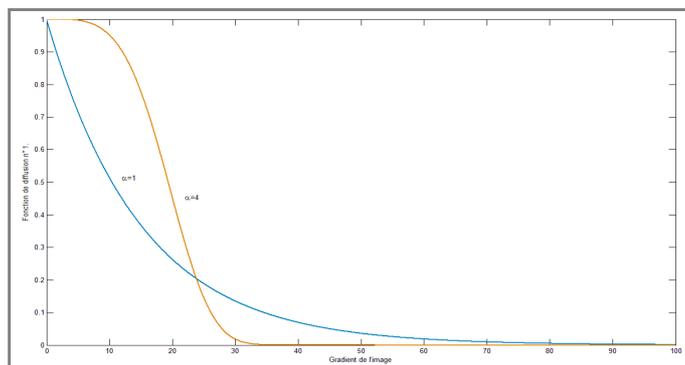
Weickert propose deux choix pour les fonctions de diffusion :

$$1. \begin{cases} \lambda_1 = g(|\nabla u_\sigma|) \\ \lambda_2 = g(0) = 1 \\ g(|\nabla u_\sigma|) = \exp\left(-\frac{(|\nabla u_\sigma|)^\alpha}{\alpha k^\alpha}\right) \end{cases} \quad (64.1)$$

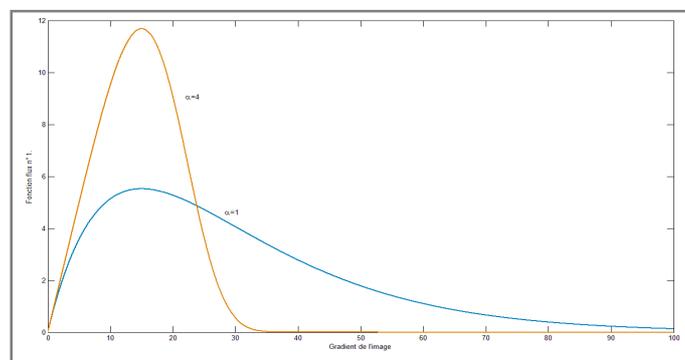
$$2. \begin{cases} \lambda_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } |\nabla u_\sigma| = 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{1}{\left(\frac{|\nabla u_\sigma|}{k}\right)^{2m}}\right) & \text{si } |\nabla u_\sigma| > 0 \end{cases} \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \quad (64.2)$$

où  $k$  est un paramètre de contraste et  $\alpha \geq 1$  un paramètre qui contrôle la vitesse de décroissance de la fonction de diffusion  $g(|\nabla u_\sigma|)$ .

La représentation graphique des fonctions de diffusion et les fonctions flux sont données par la figure 2.9 et la figure 2.10.

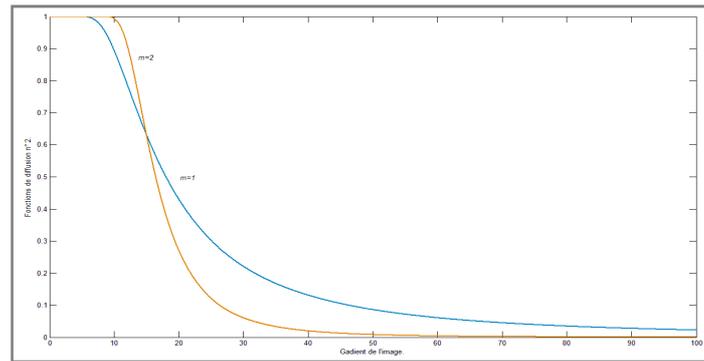


(a)

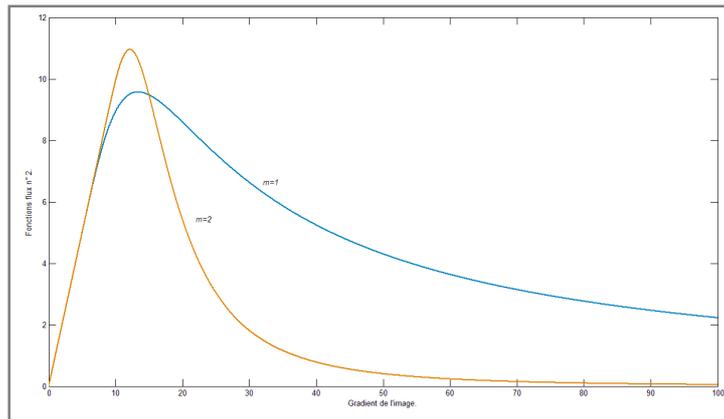


(b)

Fig.2.9 Fonctions de diffusion et fonctions flux- (a) : fonction de diffusion n°1 avec  $\alpha = 1$ (courbe en couleur bleu),  $\alpha = 4$  (courbe en couleur orange) et  $k= 15$ .  
 (b) : fonctions flux n°1 correspondante.



(a)



(b)

Fig. 2.10 Fonctions de diffusion et fonctions flux- (a) : fonction de diffusion n°2 avec  $m=1$  (courbe en couleur bleu),  $m=2$  (courbe en couleur orange) et  $k=15$ .  
(b) : fonctions flux n°2 correspondante.

L'analyse du comportement des fonctions de diffusions (64.1) et (64.2), reste la même que celle vue à la section 4.1, à part que les paramètres  $\alpha$  et  $m$ , qui introduisent un lissage plus sélectif proportionnellement à leurs valeurs respectives. Dans la méthode EED, le lissage dans la direction des contours reste libre. Ceci est bénéfique pour le débruitage à proximité des contours (structures), contrairement à la direction du gradient où le comportement est géré par la valeur propre  $\lambda_1$ , plus le gradient est fort plus l'action du filtre est inhibé.

## 7. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons défini la majorité de modèles développés à base d'équations aux dérivées partielles, en partant de l'équation de diffusion isotrope de la chaleur et la relation de celle-ci avec le filtre gaussien utilisé pour la réduction de bruit. Nous avons fait ressortir ses avantages et ses inconvénients, ce qui a poussé les chercheurs à modifier le modèle en lui introduisant un comportement directionnelle pour mieux sauvegarder les structures contenues dans les images. Par la suite, il été question d'augmenter un peu plus l'efficacité des équations de diffusion anisotrope

aux niveaux des contours, en les accentuant grâce au principe inverse de l'équation de la chaleur. Ceci a conduit aux filtres de chocs, puis à la combinaison entre diffusion directe et inverse pour avoir un meilleur résultat de filtrage et de rehaussement. Ensuite, le formalisme unificateur qui a permis d'unifier les principales méthodes de diffusion a permis l'introduction des conditions nécessaires à la stabilité et à la convergence du processus de diffusion par le choix des fonctions de régularisation. Et enfin, au modèle de diffusion anisotrope tensorielle qui est une évolution du modèle classique et qui s'appuie sur une matrice de diffusion dont les directions de diffusion sont fixées par les vecteurs propres de cette matrice.

## **Conclusion générale**

Dans cette thèse, nous avons abordé la problématique du filtrage du bruit dans les images IRM et l'amélioration du contraste pour une meilleure analyse et suivi médical de l'activité du cerveau et éventuellement, de patients atteints de pathologies diverses. La première étape de notre projet a été de présenter l'imagerie IRM sous tous ces aspects, physique, formation des images, modalités d'observations et les principaux artefacts observés. Parmi ces artefacts, le bruit sur l'ensemble des tissus a fait notre objet de correction. Pour cela, les méthodes de correction qui existent dans la littérature ont été présentées.

Nous nous sommes ensuite intéressés aux méthodes de filtrage à base d'équations aux dérivées partielles. Plusieurs modèles ont été étudiés, à base de l'équation de diffusion isotrope et de l'équation de la chaleur. Ainsi, plusieurs chercheurs ont profité des propriétés de filtrage du bruit pour construire des filtres tenant compte des propriétés locales de l'image qui opèrent de manière directionnelle visant à lisser les régions internes et rehaussant les extrémités des régions synonymes de contour, ce qui caractérise bien l'anisotropie des images. Différents modèles ont été détaillés, à commencer par le modèle de Perona-Malik puis le modèle régularisé ainsi que la théorie de filtres de chocs et leurs intérêts dans le processus de rehaussement. Puis nous avons fait ressortir la relation qui existe entre l'approche variationnelle et les équations de diffusions anisotropes qui sont une descente du gradient traduisant un processus de descente le long d'une surface énergétique. Cette dernière a permis d'unifier les modèles de diffusions anisotropes en combinant toutes leurs propriétés sous une équation générale avec des conditions sur le choix des fonctions de régularisations, donnant pour cela des schémas stables et convergents. Finalement, le modèle de diffusion tensorielle a remplacé celui de la diffusion scalaire, en décrivant plus efficacement

les structures de l'image, ce qui a pour effet de bien sauvegarder l'état des contours tout au long du processus de diffusion.

## Annexe

### 1. Dérivées dans la direction du vecteur unitaire $\vec{u}$ :

Soit :  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$f'_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

$$f'_y(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$

Soient  $z = f(x, y)$  et  $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} = (a, b)$  un vecteur unitaire. La dérivée directionnelle de  $f$  au point  $P(x_0, y_0)$  dans la direction  $\vec{u}$ , notée  $f'_{\vec{u}}$  ou  $\frac{\partial z}{\partial \vec{u}}$  est :

$$f'_{\vec{u}}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

- **Théorème :**

Si  $f$  est une fonction de  $x$  et  $y$  différentiable, alors  $f$  admet une dérivée dans la direction de n'importe quel vecteur unitaire  $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$  et :

$$f'_{\vec{u}}(x, y) = f'_x(x, y)a + f'_y(x, y)b$$

- **Corollaire :**

Si  $\theta$  désigne l'angle que fait le vecteur unitaire  $\vec{u}$  avec l'axe  $Ox$ , alors on peut écrire  $\vec{u} = (\cos \theta, \sin \theta)$  et le théorème précédent devient :

$$f'_{\vec{u}}(x, y) = f'_x(x, y) \cos \theta + f'_y(x, y) \sin \theta$$

### 2. Vecteur gradient :

Si  $f$  est une fonction de deux variable  $x$  et  $y$ , alors le gradient de  $f$  est la fonction vectorielle  $\nabla f$  définie par :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} = (f'_x(x, y), f'_y(x, y))$$

- **Propriété :**

$$f'_{\vec{u}}(x, y) = f'_x(x, y)a + f'_y(x, y)b = \nabla f(x, y) \cdot \vec{u}$$

### 3. Maximiser la dérivée selon une direction :

- **Hypothèse :**  $f$  est une fonction de  $x_0$  et  $y_0$  différentiable et  $\nabla f(x_0, y_0)$  non nul.

- **Théorème :**

- La valeur maximale de  $f'_{\vec{u}}(x_0, y_0)$  au point  $P(x_0, y_0)$  est  $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ .
- C'est dans la direction de  $\nabla f(x_0, y_0)$  que la valeur de la dérivée (ou la vitesse de variation de  $f$  est maximale.
- La direction de  $\nabla f(x_0, y_0)$  est perpendiculaire à la courbe de niveau  $f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$ .

- **Corollaire :**

- La valeur minimale de  $f'_{\vec{u}}(x_0, y_0)$  en un point  $P(x_0, y_0)$  est  $-\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ .

- o C'est dans la direction de  $-\nabla f(x_0, y_0)$  que la valeur de la dérivée est minimale.

#### 4. Invariance du Laplacien en changement de base :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \right) \\ &= \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos \theta; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \theta \right] \xi + \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \sin \theta; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin \theta \right] \xi \\ &= \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos \theta; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \theta \right] \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} + \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \sin \theta; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin \theta \right] \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin^2 \theta\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( -\frac{\partial f}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \theta \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( -\frac{\partial f}{\partial x} \sin \theta \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \cos \theta \right) \\ &= \left[ -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sin \theta; -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \sin \theta \right] \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} + \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \theta; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cos \theta \right] \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sin^2 \theta - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cos^2 \theta\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta$$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sin^2 \theta \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)\end{aligned}$$

Avec :  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

## **Bibliographie :**

- [1] M. Goutayer, - Nano-émulsions pour la vectorisation d'agents thérapeutiques ou diagnostiques ; étude de la biodistribution par imagerie de fluorescence in vivo. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2008.
- [2] O. Ratib, - Le scanner PET-CT : nouvel outil d'imagerie moléculaire, Revue Médicale Suisse N°- (510- article 23947) publiée le 14/07/2004.
- [3] T. Beyer, D.W. Townsend, T.M. Blodgett – Dual-modality PET/CT tomography for clinical oncology. J Nucl Med 2002; 46: 24-34.
- [4] P. Jezzard, - Introduction to NMR. 2001, voir le site web : <http://www.fmrib.ox.ac.uk/stuart/lectures/lecture1/sld001.htm>.
- [5] M. Bosc,- Contribution à la détection de changements dans des séquences IRM 3D multimodales, Université Louis Pasteur-Strasbourg I, 2003.
- [6] F. Bloch, - Nuclear induction. Physical review, 1946, pp.460- 474.
- [7] E.M. Purcell, - Resonance absorption by nuclear magnetic moments in solids. Physical review 69. 17, 1946.
- [8] B. Scherrer, - Segmentation des tissus et structures sur les IRM cérébrales : Agents Markoviens locaux coopératifs et formulation Bayésienne, Docteur en mathématiques appliquées et informatique de l'INPG, octobre 2008.
- [9] J. Warnking, - Délimitation des aires visuelles rétinotopiques chez l'homme par IRM fonctionnelle, thèse doctorat en physique, Université Joseph Fourier – Grenoble I, 2002.
- [10] S. Langlois, - Analyse et correction des distorsions en imagerie par résonance magnétique, Université de CAEN/Basse-Normandie, U.F.R. de sciences, Ecole doctorale S.I.M.E.M, 1998.
- [11] M.J. Fadili, - Analyse spatio-temporelle des signaux d'activation cérébrale en IRM fonctionnelle, thèse doctorat en traitement du signal et des images, Université Caen, 1999.
- [12] S. Makni, - Détection-estimation conjointe de l'activité cérébrale en imagerie par résonance magnétique fonctionnelle, Thèse doctorale de l'université Paris XI Orsay, 2005.

- [13] J. Milles, - Modélisation et correction des inhomogénéités d'intensité en imagerie cérébrale par résonance magnétique, Institut national des sciences appliquées de Lyon, 2002.
- [14] A. Haz-Edine, - Traitement et analyse d'images IRM de Diffusion pour l'estimation de l'architecture locale des tissus, Thèse doctorale, Université de Caen/Basse-Normandie, 2006.
- [15] M.J. Firbank, A. Coulthard, R.M. Harrison, E.D. Williams, - A comparaison of two methods for measuring the signal to noise ration on MR images. *Phys. Med. Biol.* 1999, Vol. 44, n°12, p N261- N264.
- [16] R.R. Price, L. Axel, T. Morgan, R. Newman, W. Perman, N. Schneiders, M. Selikson, M. Wood, S.R. Thomas, - Quality assurance methods and phantoms for magnetic resonance imaging : Report of AAPM nuclear magnetic resonance Task Group N0.1. *Med. Phys.* 1990, Vol. 17, n°3, p287- 295.
- [17] L. Kaufman, D.M. Kramer, L.E. Crooks, D.A. Ortendahl, - Measuring signal to noise rations in MR imaging. *Radiology.* 1989, Vol. 173, n°1, p256- 267.
- [18] J. Castellanos, K. Rohr, T. Tolxdroff, G. Wagenknecht, - De-noising MRI data – An iterative method for filter parameter optimization.
- [19] J. Sijbers, A.J. den Dekker, A. Van der Linden, M. Verhoye, D. Van Dyck, - Adaptive anisotropic noise filtering for magnitude MR data, *Magnetic resonance imaging*, vol. 17, Nr. 10, p. 1533-1539, 1999.
- [20] G. Gerig, O. Kubler, R. Kikinis, F.A. Jolesz, - Nonlinear anisotropic filtering of MRI data, *IEEE transactions on medical imaging*, 11(2):221- 232, 1992.
- [21] G.Z. Yang, P. Burger, D.N. Firmin, S.R. Underwood, - Structure adaptive anisotropic filtering for magnetic resonance images, *lecture notes in computer science*, 970:384- 391, 1995.
- [22] P.A. Suyash, R.T. Whitaker, - Nonparametric neighborhood statistics for MRI denoising, University of Utah, Salt Lake City, USA.
- [23] F. Godtlielsen, - Noise reduction using Markov random fields, *journal of magnetic resonance*, vol. 92, p. 102, 1991.

- [24] H. Soltanian-Zadeh et al, J.P. Windham, A.E. Yagle, - A multidimensional nonlinear edge-preserving filter for magnetic resonance image restoration, IEEE transactions on image processing, vol. 14, N° 2, p. 147- 161, 1995.
- [25] D. Healy, J. Weaver, - Two applications of wavelet transforms in magnetic resonance imaging, IEEE Trans. Info. Theory, 38(2): 840-860, 1992.
- [26] R. Nowak, - Wavelet-based rician removal for magnetic resonance imaging, Trans. Imag. Proc., 8:1408-1419, 1999.
- [27] J.J. Koenderink, the structure of images, Biological Cybernetics, Vol. 50, n°5, pp 363-370, 1984.
- [28] A.P. Witkin, - Scale space filtering, Proc. Eighth Int. Joint Conf. on artificial intelligence (IJCAI 83, Karlsruhe), vol. 2, 1019-1022, 1983.
- [29] J. Weickert, - Anisotropic Diffusion in Image Processing, thèse de doctorat à l'université de Kaiserslautern, Allemagne 1996.
- [30] P. Perona, J. Malik, - Scale space and edge detection using anisotropic diffusion, IEEE transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 12, n°7, pp 629-639, 1990.
- [31] P. Perona, J. Malik, - Scale space and edge detection using anisotropic diffusion, IEEE Computer Society Press, Washington, 16-22, 1987.
- [32] R. Dargent, - Filtrage adaptatif et diffusion anisotrope pour l'aide a l'interprétation des données sismique, Thèse présentée à l'université de Bordeaux I, École doctorale des sciences physiques et de l'ingénieur, 2006.
- [33] J. Canny, - A computational approach to edge detection, IEEE Trans. vol. 8, 679-698, 1986.
- [34] R. Terebes, - Diffusion directionnelle, application à la restauration et à l'amélioration d'images de documents anciens, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, France, 2004.
- [35] S. Pop, - Modèles de fusion et diffusion par equation aux derives partielles: application à la sismique azimutale, thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 2008.

- [36] R. Whitaker, S.M. Pizer, - A multi-scale approach to nonuniform diffusion, graphical model and image processing: image understanding, vol 57, pp 111- 120, 1993.
- [37] R. Whitaker, - Geometry limited diffusion, these de doctorat, department of computer science, university of North Carolina, 1993.
- [38] J. Monteil, A. Beghdadi, - A new adaptive nonlinear anisotropic diffusion for noise smoothing, Proceedings of the international conference in image processing ICIP'98, Chicago, Illinois, vol 3, pp 254- 258, 1998.
- [39] F. Catte, P.L. Lions, J.M. Morel, T. Coll, - Image selective smoothing and edge detection by nonlinear, SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 29, n°1, pp. 182-193, 1992.
- [40] S. Kichenassamy, - The Perona Malik paradox, SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 57, n°5, pp. 1328-1342, 1997.
- [41] J. Weickert, B. Benhamouda, - A semidiscrete nonlinear scale space theory and its relation to the Perona Malik paradox, Advances in Computer Vision, pp. 1-10, Springer, Wien, 1997.
- [42] B.M. ter Haar Romeny, L.M.J. Florack, M. de Swart, J. Wilting, M.A. Viergever, - Deblurring Gaussian blur, Mathematical methods in medical imaging III, SPIE vol. 2299, 139- 148, 1994.
- [43] G. Gilboa, N. Sochen, - Forward and backward diffusion processes for adaptive image enhancement and denoising, IEEE transactions on image processing, 2002.
- [44] L. Rudin, - Shock filters, Rockwell international science center annual DARPA T.R, 1984.
- [45] S. Osher, L. Rudin, - featured oriented image enhancement using shock filters, SIAM J. on numerical analysis (27), pp. 919- 940, 1988.
- [46] R. Deriche, O. Faugeras, - Les EDP en traitement des images et vision par ordinateur, Technical Report 2697, INRIA Sophia Antipolis, november 1995.
- [47] L. Alvarez, L. Mozorrra, -Signal and image restoration using shock filters and anisotropic diffusion, SIAM J, N. 29, 845- 866, 1992.

- [48] N. Nordstrom, Biased anisotropic diffusion: a unified regularization and diffusion approach to edge detection. *Image and Vision Computing*. Vol.8, no.11, pp.318-237, 1990.
- [49] L. Rudin, S. Osher, E. Fatemi, Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, Vol 60, pp 259-268, 1992.
- [50] R. Deriche, O. Faugeras, Les EDP en traitement des images et vision par ordinateur, *Traitement du signal*, Vol 13, n°6, 1996.
- [51] J. Weickert, - Anisotropic Diffusion in Image Processing, Department of computer science, university of Copenhagen, 1998.
- [52] R. Deriche, O. Faugeras, - Les EDP en traitement des images et vision par ordinateur, Technical Report 2697, INRIA Sophia Antipolis, november 1995.
- [53] P. Kornprobst, - Contribution a la restauration d'images et analyse de séquences : approches variationnelles et solutions de viscosité, Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1998.
- [54] L. Alvarez, L. Mazorra, - Signal and image resoration using shock filters and anisotropic diffusion, *SIAM journal on numerical analysis*, vol.31, n°.2, pp. 590- 605, 1994.
- [55] P. Kornprobst, R. Deriche, G. Aubert, - Image coupling, restoration and enhancement via PDE's, in: proceeding of the international conference in image processing- ICIP'97, Santa-Barbara, California, pp.458- 461, 1997.
- [56] G. Brandt, - Linear algebra and its applications, Harcourt College Publishers, 1996.
- [57] J. Weickert, - Scale-space properties of nonlinear diffusion filtering with a diffusion tensor, - Report N°.110, Laboratory of Technomathematics, University of Kaiserslautern, October 1994.
- [58] J. Weickert, - Multiscale texture enhancement, In: Hlavac V, Sara R.(Eds.) *Computer analysis of images and patterns*, - Springer, Berlin, pp. 230-237, 1995.
- [59] J. Weickert, - A review of nonlinear diffusion filtering, B. ter Haar Romeny, L. Florack, J. Koendrink, M. Vierger (Eds.), *Scale Space Theory in Computer Vision*, Lecture notes on Computer Science, Vol. 1252, Springer, Berlin, pp. 3-28, 1997.

- [60] J. Weickert, - Coherence enhancing diffusion of color images, In: Proceedings of the VII National Symposium on Pattern Recognition and Image Analysis, NSPRIA, Barcelona, Vol.1, pp. 239-244, 1997.
- [61] J. Weickert, - Coherence enhancing diffusion, International Journal of Computer Vision, n°.31, pp. 111-127, 1999.
- [62] D. Béréziat, - Analyse Muliéchelle et Ondelettes, Université Pierre et Marie Curie, laboratoire d'informatique de Paris, 2012.
- [63] J.A. Nelder, R. Mead, - A simple method for function minimization. The computer journal, 1965, Vol.7, p.308- 313.
- [64] M.A. Luersen, - Un algorithme d'optimisation par recherche directe – Application à la conception de monopalmes de nage, thèse de mécanique : Ecole doctorale SPMI (Institut National des Sciences Appliquées de Rouen), 2004, Rouen, 198 pages.
- [65] Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, - Direct search generalized simplex algorithm for optimizing non-linear functions, rapport n°2535. <ftp://ftp.inria.fr/INRIA/publication/publi-pdf/RR/RR-2535.pdf>, 1995, 23 pages.
- [66] J.M. Parkinson, D. Hutchinson, - An investigation into the efficiency of variants of the simplex method. Numerical methods for non-linear optimization. 1972, London: FA Lootsma, ed.) Academic Press.
- [67] X. Franceries, - Simulation de la propagation de l'activité électrique intra-cérébrale par un réseau de résistances, Validation – application aux pathologies – approche inverse, thèse : Ecole doctorale GEET. 2003, Toulouse.
- [68] K. Gerard, - Optimisation automatique des incidences des faisceaux par l'algorithme du simplexe et optimisation des contrôles qualité par la maîtrise statistique des processus (MSP) en radiothérapie conformationnelle par modulation d'intensité (RCMI). Institut national polytechnique de Lorraine, Centre de recherche en automatique de Nancy, Centre Alexis Vautrin, 2008.
- [69] A. Marion, - Filtrage spatiotemporel orienté de séquences d'images : application à l'estimation du mouvement des flux sanguins en imagerie ultrasonore, Institut national des sciences appliquées de Lyon, 2006.