

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri De Tizi-Ouzou



Faculté Du Génie Electrique Et De L'informatique
Département D'Electrotechnique

**Mémoire de Fin d'Etudes
De MASTER ACADEMIQUE**
Domaine : Sciences et Technologies
Filière : Electrotechnique
Spécialité : Machines Electriques

Présenté par
BENSMAIL Lila

Mémoire dirigé par M^{me}. G.YOUSFI

Thème

**Modélisation d'un transformateur
planaire.**

Membre de jury :

Mme F. BOUALI
MAA, UMMTO

Présidente

Mme G .YOUSFI
MAA, UMMTO

Promotrice

Mr F. Namani
MAA, UMMTO

Examineur

Melle Z.LARABI
MAB, Université de BOUMERDES

Examineur

2018

Remerciements

Je commence par tout d'abord remercier DIEU le très Haut celui qui m'a créé et m'a donné la force pour faire des études jusqu'à ce niveau.

Je remercie M^{me} Yousfi pour sa disponibilité et qui a toujours été présente pour moi.

Je remercie l'ensemble des enseignants du département génie électrique, qui ont contribué à notre cursus d'étude chacun dans son domaine.

Je tiens à remercier surtout toute les personnes qui ont aidé à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents Mustapha BENSMAIL et Nacira MANO, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études,

A mes sœurs Saliha et Hanane

A ma seul et unique copine Soumia GASM

A mon âme sœur Tarik MAJACHE qui m'a soutenu depuis le début

A tous mes cousins et cousines que j'aime beaucoup

A celui qui a attendu ce jour mais le Destin l'a pris sous nos yeux MANO Ahmed (khalil Hmitouche)

A celle qui m'a quitté sans me prévenir mais ça revient au destin MANO Naima, (khaliti Naima) je t'aime si fort j'ai mal au cœur que tu ne sois pas présente parmi nous aujourd'hui

A tous mes amis qui m'ont aidé du pré ou du loin

Merci d'être toujours là pour moi.

Hayet.Lila.B

Sommaire

Introduction générale	1
CHAPITRE I : Etat de l'art des transformateurs	
I.1. Introduction.....	2
I.2. Le transformateur et ses caractéristiques.....	2
I.2.1. Rôle du transformateur.....	3
I.2.2. Constitution et principe de fonctionnement.....	3
a- Le circuit magnétique.....	3
b- Les enroulements.....	4
c- L'isolation.....	4
I.2.3. Symbole d'un transformateur.....	5
I.2.4. Principe de fonctionnement.....	5
I.2.4.1. Champ magnétique.....	5
I.2.4.2. Loi de Faraday.....	5
I.2.4.3. Le transformateur idéal.....	6
I.2.4.4. Le transformateur réel.....	7
I.2.5. Les pertes dans les transformateurs.....	9
I.2.5.1. Les pertes dans le circuit magnétique.....	9
I.2.5.2. Les pertes dans les enroulements (conducteurs).....	10
I.3. Les types de transformateurs.....	11
I.3.1. Autotransformateur.....	11
I.3.2. transformateur de puissance.....	11
I.3.3. Transformateur variable.....	12
I.3.4. Transformateurs d'isolement.....	12
I.3.5. Transformateur d'impédance.....	12
I.3.6. Transformateur de mesure.....	12
I.3.7. transformateur déphaseur.....	13
I.3.7. Transformateur d'essai.....	13
I.4. Micro-transformateur.....	13
I.4.1. Introduction à la technologie planaire.....	13
I.4.2. Les différents types de composants planaires.....	14
I.4.2.1. Composants planaires bas profil (Planar).....	14
I.4.2.2. Composants planaires couches minces/épaisses.....	15
I.4.3. Les domaines d'application des transformateurs planaires.....	15
a. Applications de puissance.....	15
b. Applications pour le transfert signal.....	16
I.4.4. Les différentes structures des transformateurs planaires.....	16
I.4.4.1. Transformateur à enroulements entrelacés.....	16
a- transformateurs entrelacé sans matériaux magnétiques.....	16
b- transformateurs entrelacé avec matériaux magnétiques.....	16
I.4.4.2. Transformateur à enroulements empilés.....	17
a- Transformateur empilé sans matériau magnétique.....	17
b- Transformateur empilé avec matériau magnétique.....	17
I.4.4.3. Transformateur du type 3D.....	17
a- Transformateur 3D sans matériau magnétique.....	18
b- Transformateur 3D avec matériau magnétique.....	18
I.4.4.4. Transformateur à orientation face to face.....	18
I.5. Avantages et inconvénients des composants planaires.....	19

I.8. Conclusion.....	21
----------------------	----

II. Modélisation électromagnétique et méthode de résolution EF

II.1. Introduction.....	22
II.2. Phénomènes électromagnétiques.....	22
II.2.1. Équations de maxwell.....	22
a. Équation de Maxwell-Gauss.....	22
b. Equation de Maxwell-Faraday.....	23
c. Equation de Maxwell-Ampère.....	23
d. Equation de conservation du flux magnétique.....	23
II.3. Lois de comportement des milieux.....	24
II.3.1.Relations constitutives.....	24
a. Induction électrique et champ électrique.....	24
b. Induction magnétique et champ magnétique.....	24
II.3.2 Loi d'Ohm.....	25
II.4. Relations de passage.....	25
➤ Conditions sur les composantes tangentielles.....	26
➤ Conditions sur les composantes normales.....	27
II.5.conditions de jauge.....	28
II.6. Conditions aux limites.....	28
II.6.1. Condition de Dirichlet.....	28
II.6.2. Condition de Newman.....	28
II.7. Formulation des équations électromagnétiques.....	29
II.7.1. Le Modèle électrostatique.....	29
II.7.2. Modèle magnétostatique.....	29
➤ Formulation magnétostatique en potentiel vecteur magnétique.....	30
➤ Formulation bidimensionnel magnétostatique en potentiel vecteur magnétique.....	30
II.7.4.Modèle magnétodynamique.....	31
➤ Formulation magnétodynamique en potentiel vecteur magnétique.....	31
➤ Formulation bidimensionnel magnétodynamique en potentiel vecteur magnétique.....	32
II.8. Méthodes de résolution des équations électromagnétiques.....	32
II.8.1. Méthodes analytiques.....	33
II.8.2. Méthodes numériques.....	33
• Méthode des Différences Finis (MDF).....	34
• Méthode des intégrales de frontières (MIF).....	34
• Méthode des Volumes Finis (MVF).....	34
• Méthode des éléments finis (MEF).....	34
II.8.3. Définition de méthode des éléments finis.....	34
II.9. Démarches de la méthode des éléments finis.....	35
II.9.1.La discrétisation spatiale (maillage).....	35
a- éléments réels.....	36
b- éléments de référence triangulaire 2D.....	38
II.9.2. Fonction d'interpolation.....	38
➤ Calcul de la fonction d'interpolation.....	38
II.9.3. D'une équation différentielle vers une équation intégrale.....	39
➤ Formulation variationnelle.....	39
➤ Formulation résidus pondérés.....	40

II.9.4. Formulation éléments finis du modèle magnétodynamique en A	40
II.9.6. Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis	44
II.10. Conclusion	44

CHAPITRE III : Application : Dimensionnement et modélisation d'un transformateur planaire

III.1. Introduction	44
III.2. Le cahier de charge.....	44
III.3. Présentation du micro-transformateur.....	44
III.4. Matériaux utilisés pour le micro-transformateur.....	45
III.5. dimensionnement du micro-transformateur.....	45
III.5.1. détermination des inductances primaire et secondaire.....	45
III.5.2. dimensionnement du noyau magnétique.....	46
III.3.3 Détermination des paramètres géométriques du micro transformateur.....	47
III.3.3.1. Calcul du nombre de spires du primaire et du secondaire.....	48
III.3.3.2. Calcul de la largeur et de l'épaisseur du conducteur primaire.....	48
III.3.3.3. Calcul de l'espace inter-spires du primaire.....	50
III.3.3.4. Calcul de la longueur totale du conducteur primaire.....	50
III.3.3.5. Calcul de la largeur et de l'inter-spire du secondaire.....	50
III.3.3.6. Calcul de la longueur total du conducteur du secondaire.....	50
III.3.3.7. Résultats du dimensionnement géométrique.....	50
III.4 modélisation du micro-transformateur.....	51
III.4.1.Le model électrique équivalent du micro-transformateur.....	51
III.4.2.Calcul des paramètres électriques.....	52
III.4.2.1. Résistances séries.....	52
III.4.2.2. Résistances parasite.....	52
III.4.2.3. capacités de l'isolant (dioxyde de silicium SiO ₂).....	53
III.4.2.4. capacités parasites de substrat (silicium Si).....	53
III.4.2.5. capacités de couplage.....	54
III.4.3.Résultats de calculs des paramètres électriques.....	54
III.4.4. Modélisation magnétique par la méthode des éléments finis.....	55
III.4.4.1.Organigramme de calcul par éléments finis.....	55
III.4.4.2.Structure géométrique.....	56
III.4.4.3.Caractéristiques géométriques.....	57
III.4.4.4.Caractéristiques physiques.....	57
III.4.4.5.Formulation du problème traité en termes de potentiel vecteur magnétique.....	58
III.4.4.6.Domaine de résolution et conditions aux limites.....	59
III.4.4.7.Résultats de simulation.....	59
III.4.4.8. Calcule des résistances et inductances du micro-transformateur.....	61
III.4.4.9. Influence la fréquence sur les grandeurs électrique (R,L).....	62
III.4.4.10. Influence de la variation de la largeur du primaire et du secondaire sur la résistance primaire et la résistance secondaire.....	66
Interprétation des résultats	67
III.5. Conclusion.....	68
Conclusion générale	69

Bibliographie

Introduction

Introduction générale

La miniaturisation a permis la réduction des matériaux et des coûts par la mise en place de procédés de fabrication collective. La miniaturisation des circuits logiques par intégration à très grande échelle et l'un des exemples les plus connus avec le développement de la microélectronique. La demande de transformateur de tension miniaturisé et plus importante avec la multiplication des équipements (portable, caméra, téléphone mobile, écran plat ...).

En plus de son avantage d'être intégré avec l'électronique qu'il alimente, le micro transformateur présente plusieurs avantages par rapport à transformateur conventionnelle tel que : dimensions très réduites, léger. Notons aussi que le micro transformateur convient à la fabrication automatisée, degré élevé d'isolation et un coût réduit

Dans ce travail on s'intéressera essentiellement à la conception, dimensionnement et caractérisation du transformateur planaire.

Ce document comprend trois chapitres

Le premier chapitre est une introduction générale sur les transformateurs. Au cours de cette introduction un aperçu général sur les transformateurs en mettant en valeur le principe de fonctionnement, avant de basculer et de s'intéresser aux transformateurs planaires. Quelques exemples d'utilisation des transformateurs planaires, des applications de puissance seront également présentés. A la fin, nous allons également donner quelques modèles des transformateurs planaires existant dans la littérature

Le deuxième chapitre a pour objet la description des phénomènes électromagnétiques et les différentes formulations utiles pour la modélisation du transformateur issues à partir des équations de Maxwell et lois de comportement des matériaux, ainsi-que les différentes méthodes de résolution utilisé essentiellement, Dans le cadre notre travail on s'intéressera à la méthode des éléments finis.

Le troisième chapitre sera consacré au dimensionnement géométrique et électrique partant d'un cahier de charge donné, ainsi que l'exploitation des résultats de simulation obtenus sur l'environnement MATLAB avec le modèle développé.

Enfin, le travail sera terminé par une conclusion générale

Etat de l'art des transformateurs

Chapitre I Etat de l'art d'un transformateur

I.1. Introduction :

L'histoire de l'électricité aurait pu être toute autre sans le transformateur électrique qui est apparu et a été développé vers le XIXe siècle (le premier transformateur triphasé a été construit en 1889). Aujourd'hui, il est difficile d'imaginer un réseau électrique ou un appareil de conversion de l'électricité sans transformateur [6].

Les transformateurs occupent une place importante dans le transfert d'énergie, spécialement, dans les convertisseurs de puissance. La fonction du transformateur varie en fonction de son utilisation soit transmission de puissance soit transmission de signal, tout en assurant une isolation galvanique [2].

Le but de ce chapitre est de bien définir ce composant et présenter les notions de base qui va aider à comprendre le principe de fonctionnement.

I.2. Le transformateur et ses caractéristiques :

Un transformateur est un composant magnétique qui permet de modifier les valeurs des courants et/ou des tensions délivrés par une source alternative reliée au primaire en d'autres valeurs de courants ou tensions au secondaire sans changer la forme et la fréquence du signal initial. Classiquement les deux parties du transformateur n'ont aucune liaison électrique entre elles, c'est-à-dire que les enroulements primaire et secondaire sont isolés galvaniquement. Quelle que soit la fonction assurée par le transformateur, le principe de fonctionnement reste toujours le même : une source de tension variable reliée au primaire crée un flux magnétique variable à travers l'enroulement primaire. Ce flux magnétique traverse l'enroulement secondaire et une tension induite apparaît aux bornes de ce second enroulement [1].



Figure (I.1): transformateur

Chapitre I Etat de l'art d'un transformateur

I.2.1. Rôle du transformateur :

Le rôle qui est généralement attribué aux transformateurs est d'assurer l'interface entre différents réseaux de tensions. Les exploitants des réseaux utilisent cependant les transformateurs pour d'autres raisons qui méritent d'être développées [2] :

- ils ont un rôle central dans la réalisation d'un régime de neutre.
- ils offrent la possibilité de découpler les réseaux dans le système homopolaire.
- ils mettent à la disposition des exploitants des moyens leur permettant de régler la tension du réseau.
- leur présence participe à la maîtrise des courants de court-circuit.
- ils peuvent assurer des fonctions de filtrage et de rééquilibrage des charges.

I.2.2. Constitution et principe de fonctionnement :

Il est constitué de deux parties principales, le circuit magnétique et les enroulements.

a- Le circuit magnétique :

Le circuit magnétique d'un transformateur est soumis à un champ magnétique variable au cours du temps. Pour les transformateurs reliés au secteur de distribution, cette fréquence est de 50 ou 60 Hertz. Le circuit magnétique est le plus souvent feuilleté pour diminuer les pertes par courants de Foucault, qui dépendent de l'amplitude du signal et de sa fréquence. Pour les transformateurs les plus courants, les tôles empilées ont la forme de E et de I, donnant la possibilité ainsi de glisser une bobine au sein des fenêtres du circuit magnétique ainsi constitué. Le circuit magnétique est caractérisé par [1].

- La perméabilité magnétique très élevée.
- L'hystérésis très faible que possible.
- Des tôles feuilletées et de résistances électriques élevées pour éliminer les courants de Foucault.

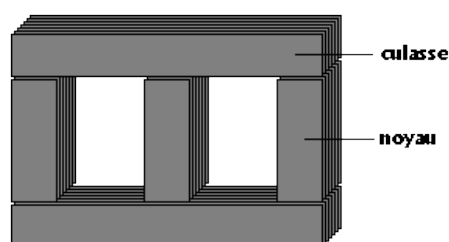


Figure (I.2) : noyau magnétique feuilleté

b- Les enroulements

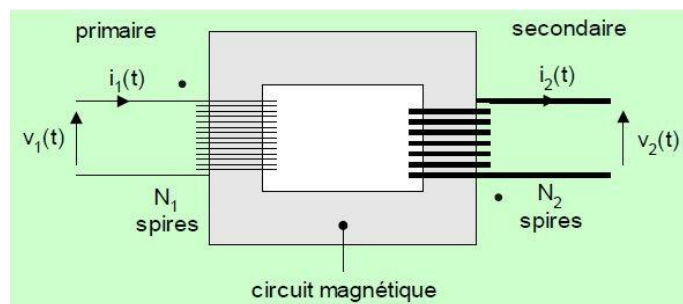


Figure (I.3) : Circuit magnétique et les enroulements (Réalisé en tôles feuilleté)

Un enroulement en électrotechnique est un conducteur électrique isolé *bobiné* (enroulé autour d'un support). Cet enroulement peut n'être constitué que d'une seule *spire* (tour du support), ou bien par plusieurs spires. On appelle fréquemment les enroulements bobines et ce depuis les débuts de l'électricité, donc c'est le récepteur.

Le primaire est bobiné par un nombre de spire N_1 et parcouru par un courant électrique i_1 et branché à une source variable alternative de tension V_1 . Le caractère variable du champ magnétique est obligatoire, de sorte qu'un transformateur ne peut absolument pas fonctionner en courant continu mais exige d'être alimenté en courant alternatif [2].

Le secondaire bobiné d'un nombre de spire N_2 fournit un courant I_2 à une charge sous une tension V_2 .

Les deux enroulements n'ont aucune connexion électrique entre eux, seule l'induction électromagnétique permet au primaire d'agir sur le secondaire et inversement. Par contre, un autotransformateur n'assure pas d'isolation galvanique entre le primaire et le secondaire, puisqu'ils ont une partie de leur circuit en commun.

c- L'isolation :

Les enroulements étant des conducteurs, une isolation électrique est obligatoire pour assurer le bon fonctionnement du transformateur. En électrotechnique les isolants sont aussi appelés diélectriques et sont des matériaux, solides, liquides ou gazeux qui ont une résistivité très élevée de l'ordre de 10^8 à 10^{16} $\Omega.m$. Dans le transformateur, l'isolant permet d'isoler l'enroulement primaire de l'enroulement secondaire, chaque couche de la suivante ainsi que les spires entre elles ce qui assure le bon fonctionnement du transformateur [1].

Chapitre I Etat de l'art d'un transformateur

I.2.3. Symbole d'un transformateur :

On trouve deux symbolisations du transformateur monophasé

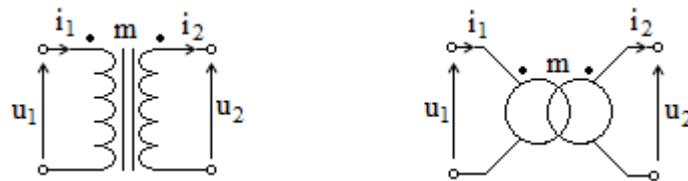


Figure (I.4) : Symbole d'un transformateur

I.2.4. Principe de fonctionnement :

I.2.4.1. Champ magnétique :

Toute bobine parcourue par un courant génère un champ magnétique proportionnel au courant dans la bobine et au nombre de spires dont elle est faite. Ce sera donc le cas du primaire, supposé constituer de N_1 spires et alimenté par une tension V_1 . Le rôle du noyau métallique est de canaliser ce champ magnétique pour le conduire à traverser le bobinage secondaire.

I.2.4.2. Loi de Faraday :

Le champ magnétique arrivé par le primaire traverse la bobine secondaire, si ce champ magnétique varie dans le temps, alors il induit dans cette bobine une force électromotrice proportionnelle au nombre de spires dont elle est faite N_2 . Donc elle générera une tension V_2 proportionnelle à son nombre de spire, la fermeture du circuit secondaire sur une charge provoque une circulation d'un courant i_2 .

La loi de Faraday-Lenz est définie comme suite :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{I.1})$$

e : Est la force électromotrice (fem) induite.

Φ : Le flux traversant le circuit magnétique secondaire.

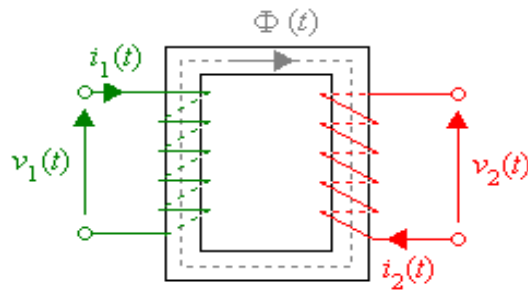


Figure (I.5) : principe de fonctionnement d'un transformateur monophasé.

I.2.4.3. Le transformateur idéal :

Le transformateur idéal est doté des caractères suivants :

- Conservation de flux, c'est-à-dire le flux créé par le primaire est le même au flux arrivant à l'enroulement secondaire donc pas de fuite magnétique.
- Les pertes Joules et les pertes fers sont négligeable voire nul.

En considérant un noyau torique (Figure I.6)

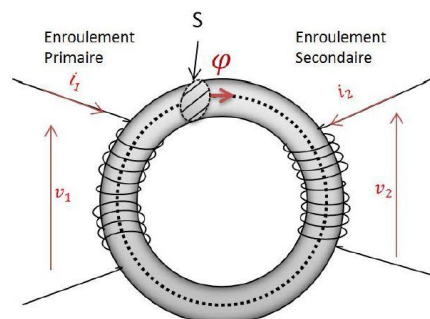


Figure (I.6) : Transformateur bobiné autour d'un noyau torique

Les lignes de champ étant des cercles nous pourrions appliquer le théorème d'Ampère :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = Ni \tag{I.2}$$

$$H \cdot l = \sum I \tag{I.3}$$

$l = 2\pi R$: Périmètre d'un cercle de rayon R.

L'excitation magnétique peut être exprimée par :

$$H = \frac{1}{2\pi R} (n_1 i_1 + n_2 i_2) \tag{I.4}$$

L'expression du champ magnétique dans un milieu homogène et isotrope est donnée par :

Chapitre I Etat de l'art d'un transformateur

$$B = \mu_0 \mu_r H = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi R} (n_1 i_1 + n_2 i_2) \quad (\text{I.5})$$

Donc le flux φ du champ magnétique \vec{B} à travers une section droite du tore peut être donné par :

$$\varphi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} = BS = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi R} (n_1 i_1 + n_2 i_2) S \quad (\text{I.6})$$

Cette relation donne le flux pour une spire, pour n spires le flux à travers le circuit devient :

$$\Phi = n \times \varphi \quad (\text{I.7})$$

Donc :

$$v_1 = e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -n_2 \frac{d\varphi_1}{dt} \quad (\text{I.8})$$

De la même façon, on obtient au secondaire :

$$v_2 = -e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -n_1 \frac{d\varphi_2}{dt} = -n_1 \frac{d\varphi}{dt} \quad (\text{I.9})$$

Car :

$$\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 \quad (\text{I.10})$$

À partir de (v_1) et (v_2) on peut déduire le rapport de transformation en tension m

$$m = \left| \frac{v_2}{v_1} \right| = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{I.11})$$

I.2.4.4. Le transformateur réel :

Au contraire du transformateur idéal, le transformateur réel est le siège de plusieurs pertes qui ne sont plus négligeables :

- pertes cuivre : Pertes Joules dans les enroulements du transformateur,
- pertes fer : résultantes des pertes par courant de Foucault et des pertes par hystérésis dans le noyau magnétique.

En plus des pertes cuivre et fer, le flux magnétique généré par l'enroulement primaire n'est pas totalement transféré au travers de l'enroulement secondaire, on parle de fuites magnétiques. La figure suivante illustre ce phénomène :

Chapitre I Etat de l'art d'un transformateur

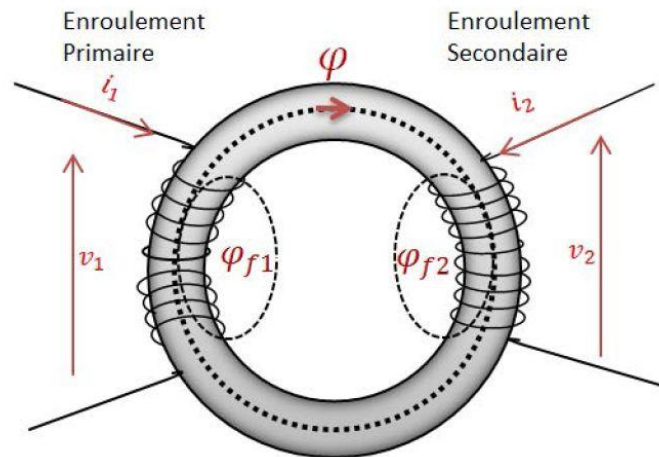


Figure (I.7) : Illustration des fuites dans le transformateur

Soit φ_1 : le flux généré   travers une spire du bobinage primaire.

Soit φ : le flux   travers une section droite du circuit magnétique

Soit φ_{12} : le flux défini   travers une spire du bobinage secondaire (  vide, produit par le courant i_1 dans l'enroulement secondaire).

Le flux de fuite par spire primaire est $\varphi_{f1} = \varphi_1 - \varphi$.

Soit l_1 , l'inductance de fuite primaire on aura :

$$l_1 \times i_1 = n_1 \times \varphi_{f1} = n_1 \times (\varphi_{f1} - \varphi) \quad (\text{I.12})$$

L'inductance mutuelle est définie telle que :

$$M \times i_1 = n_2 \times \varphi_{12} \quad (\text{I.13})$$

$$M = \sqrt{(L_1 - l_1) * (L_2 - l_2)} \quad (\text{I.14})$$

l_1 et l_2 sont les inductances de fuites respectivement primaire et secondaire

$$L_1 = \frac{n_1 \varphi_1}{i_1} \quad (\text{I.15})$$

$$L_2 = \frac{n_2 \varphi_2}{i_2} \quad (\text{I.16})$$

L_1, L_2 : Inductance propre du primaire et secondaire

Si $l_1 = l_2 = 0$ on obtient donc ce cas :

$$M = \sqrt{L_1 * L_2} \quad (\text{I.17})$$

Chapitre I Etat de l'art d'un transformateur

Pour exprimer l'importance du couplage magnétique entre l'enroulement primaire et secondaire on introduit la notion de coefficient de couplage k qui est défini comme suit :

$$k = \frac{M}{\sqrt{L1*L2}} \quad (\text{I.18})$$

$$0 \leq k \leq 1 \quad (\text{I.19})$$

I.2.5. Les pertes dans les transformateurs :

Comme nous l'avons expliqué auparavant les enroulements sont les sièges de différentes pertes :

I.2.5.1. Les pertes dans le circuit magnétique :

- Les courants de Foucault sont responsables d'une partie des pertes (dites pertes par courants de Foucault) dans les circuits magnétiques des machines électriques alternatives et des transformateurs. C'est la raison pour laquelle les circuits magnétiques sont constitués de tôles feuilletées afin de limiter ces courants et les pertes par effet Joule qui en découlent, ce qui améliore le rendement global des transformateurs. Le feuilletage permet de réduire les pertes par courants de Foucault [3]

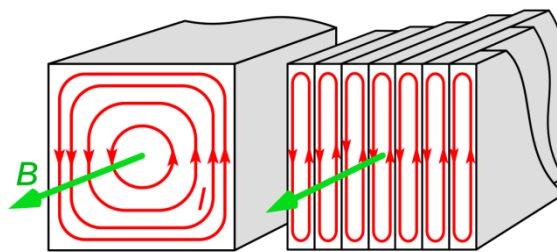


Figure (I.8) : circulation des courants de Foucault

- Perte par hystérésis : Dans un matériau magnétique la représentation graphique de la variation du champ magnétique B en fonction de l'excitation magnétique H est appelée cycle d'hystérésis [2].

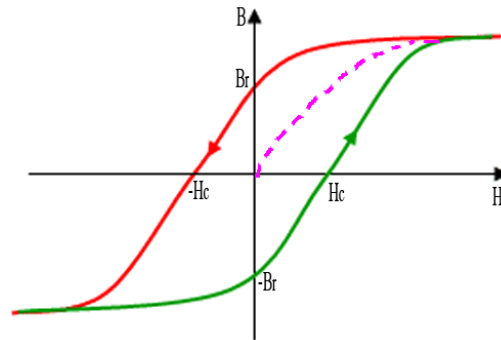


Figure (I.9) : cycle d'hystérésis

A chaque fois que champ magnétique est inversé (50 fois par seconde en 50Hz) une faible quantité d'énergie est perdue en hystérésis dans le noyau magnétique. Donc dans les transformateurs on doit les minimiser.

I.2.5.2. Les pertes dans les enroulements (conducteurs) :

- Les pertes Joules : c'est le réchauffement des conducteurs par effet de la circulation du courant $P_j = RI^2$.

- Effet de peau : Il se produit à plus haute fréquence, ce phénomène d'origine électromagnétique existe pour tous les conducteurs parcourus par des courants alternatifs. Il provoque la décroissance de la densité de courant à mesure que l'on s'éloigne de la périphérie du conducteur ce qui provoque une augmentation de la résistance du conducteur. Pour minimiser cet effet à haute fréquence il est préférable d'utiliser les conducteur multibrin. Voir la formule suivante :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi \mu_0 \mu_r f}{\rho}}} \quad (\text{I.20})$$

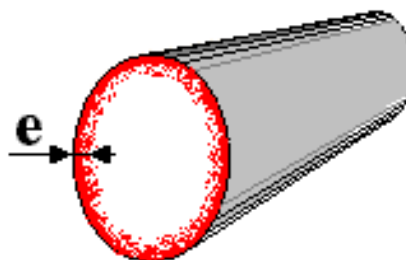


Figure (I.10) : Effet de peau

- Effet de proximité : Lorsqu'un conducteur est parcouru par un courant variable, il crée un champ magnétique variable dans lequel se trouvent plongés les conducteurs voisins. Les variations de champs engendrant un flux variable à travers les sections du conducteur qui

Chapitre I Etat de l'art d'un transformateur

induit des courants de Foucault dans les conducteurs voisins (Figure I.11). Ces courants induits augmentent avec la fréquence et la largeur des pistes ce qui engendre des pertes par effets Joule dans les conducteurs voisins. On traduit généralement cette augmentation des pertes par une augmentation de la résistance des conducteurs. L'effet de proximité est donc lié à l'apparition des courants de Foucault entre conducteurs voisins [2]

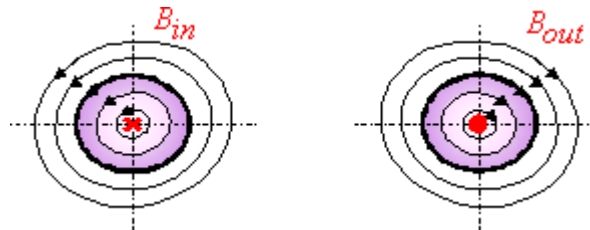


Figure (I.11) : effet de proximité

I.3. Les types de transformateurs :

I.3.1. Autotransformateur :

Dans un autotransformateur, le primaire et le secondaire utilisent un seul et unique bobinage, en jouant sur la self-induction de ce bobinage sur lui-même plutôt que sur l'induction mutuelle entre deux bobines. Contrairement à un transfo classique, les circuits ne sont pas isolés l'un de l'autre. Pour le reste, le principe est le même: le rapport des tensions est égal au rapport des nombres de spires formant le circuit d'entrée et le circuit de sortie. Ici le circuit d'entrée aura une tension fixe de $220V_{\text{eff}}$ par exemple et le circuit de sortie présentera une tension variable fonction du nombre de spires inclus dans le secondaire et défini par un curseur commandé par le bouton de réglage [11].

I.3.2. transformateur de puissance :

Les transformateurs de distribution dont la tension d'au moins une des phases dépasse 1 000 V sont considérés comme des transformateurs de puissance. Leur rôle est essentiel dans le réseau électrique pour permettre de transporter l'électricité via les lignes sur de longues distances. De par leur haut niveau de tension, ils répondent à des contraintes spécifiques notamment au niveau de l'isolation. Leur fiabilité et leur durée de vie doivent être particulièrement élevées [11].

I.3.3. Transformateur variable :

Un « variac », ou autotransformateur variable est constitué d'un noyau d'acier toroïdal, d'une bobine de cuivre en une seule couche et d'un balai carbone. En faisant varier la position

Chapitre I Etat de l'art d'un transformateur

du balai sur la bobine on fait varier de manière proportionnelle le rapport de l'autotransformateur. Il présente l'intérêt, par rapport à un rhéostat, de produire beaucoup moins de pertes Joule et sa tension au secondaire dépend beaucoup moins de la charge. La présence d'un fusible entre le secondaire et la charge est indispensable pour éviter, dans le cas où la tension au secondaire et l'impédance de la charge sont faibles, de brûler les spires. On a en effet, dans ce cas, quasiment un court-circuit réparti sur très peu de spires [4].

I.3.4. Transformateurs d'isolement :

Un transformateur crée une isolation galvanique entre son primaire et son secondaire, cette propriété est utilisée tout spécialement dans les transformateurs d'isolement. Ils servent à assurer la sécurité d'une installation en protégeant des électrocutions par exemple. La séparation galvanique permet aussi d'éliminer une partie du bruit électrique, ce qui est utile pour certains appareils électroniques sensibles. Comme tout transformateur, un transformateur d'isolement ne laisse pas passer le courant continu. Ces transformateurs ont presque le même nombre de spires au primaire et au secondaire.

I.3.5. Transformateur d'impédance :

Le transformateur d'impédance est principalement destiné à adapter l'impédance de sortie d'un amplificateur à sa charge. Ce genre de transformateur était en particulier employé :

- Dans la restitution sonore, pour adapter la sortie d'un amplificateur audio à lampes (haute impédance), avec les haut-parleurs destinés à la restitution du son et caractérisés par une impédance basse.
- En électronique audio professionnelle, on utilise toujours des transformateurs pour les entrées et sorties d'appareils haut de gamme, ou bien dans la fabrication de « Di-box » ou boîte de direct. Le transformateur est alors utilisé, non seulement pour adapter l'impédance et le niveau de sortie des appareils (synthétiseurs, basses électriques...) aux entrées micro de la console de mixage mais en outre pour symétriser la sortie des appareils connectés.

I.3.6. Transformateur de mesure :

Selon la définition de la Commission électrotechnique internationale, un transformateur de mesure est un transformateur destiné à alimenter des appareils de mesure, des compteurs, des relais et autres appareils analogues. Ils sont utilisés pour permettre la mesure de la tension ou du courant quand ceux-ci sont trop élevés pour être mesurés directement. Ils doivent transformer la tension ou le courant de manière proportionnelle et sans déphasage [5].

Chapitre I Etat de l'art d'un transformateur

I.3.7. transformateur déphaseur :

Les transformateurs déphaseurs permettent de créer un déphasage entre leurs tensions d'entrée et de sortie. Cela a pour objectif de soulager un réseau surchargé. Le réseau de transport d'électricité est maillé ; l'électricité emprunte naturellement et préférentiellement les lignes de moindre résistance électrique. Cela explique que certaines lignes peuvent être saturées alors que d'autres lignes desservant la même zone peuvent être sous-utilisées

En « forçant » le passage de l'électricité sur une ligne électrique plutôt que sur une autre, le transformateur déphaseur permet d'optimiser les lignes les moins empruntées et donc de soulager les lignes saturées. Grâce à cette meilleure répartition des transits sur les lignes, le réseau de transport d'électricité peut être exploité au maximum de ses capacités techniques [5].

I.3.7. Transformateur d'essai :

Les transformateurs d'essai ou de test sont des transformateurs pouvant atteindre de très hautes tensions pour des charges limitées. Ils sont utilisés pour tester du matériel électrique[4].

I.4. Micro-transformateur :

L'intégration de composants magnétiques et en particulier de transformateurs constituent un enjeu important. Ces transformateurs sont destinés soit à la commande d'interrupteur de puissance (MOS par exemple) soit à la réalisation de convertisseur isolé de faible puissance (1W). Le cahier des charges des concepteurs de convertisseurs DC-DC impose une inductance élevée et une surface occupée la plus petite possible [6].

I.4.1. Introduction à la technologie planaire :

La réalisation des composants magnétiques (inductance, transformateur...) est difficile avec des technologies compatibles avec celle de la microélectronique. En particulier à cause des problèmes d'intégration des matériaux magnétiques. Toutefois il existe deux alternatives [2] :

- Utiliser les technologies standards comme la technologie CMOS (Complementary Metal Oxide Semiconductor) par exemple qui imposent alors certaines contraintes :
 - Pas d'utilisation de matériau magnétique ;
 - Des épaisseurs limitées de conducteurs constituant les bobinages (quelques μm).

Chapitre I Etat de l'art d'un transformateur

Ces contraintes conduisent à des valeurs d'inductances faibles, des surfaces occupées importantes.

- Utiliser d'autres technologies incompatibles avec le processus standard de la microélectronique ; les composants sont alors réalisés séparément puis rapportés sur la partie active [2].

Cette technologie offre plus de degré de liberté comme par exemple :

- La possibilité d'un processus de fabrication à haute température ;
- L'utilisation du matériau magnétique qui permet de réduire les dimensions.

La course vers la miniaturisation des composants a permis aux chercheurs de mettre au point des technologies permettant aussi bien la miniaturisation des composants que la fabrication collective afin de réduire le coût et volume qu'ils occupent. La technologie d'intégration de la micro-électronique s'appelle la technologie planaire. Cette technologie planaire proposée en 1960 par *Hoerni* est basée sur un procédé caractérisé par un empilement de différentes couches conductrices, isolantes et magnétiques constituant la structure [2], comme l'illustre la (figure I.12) :

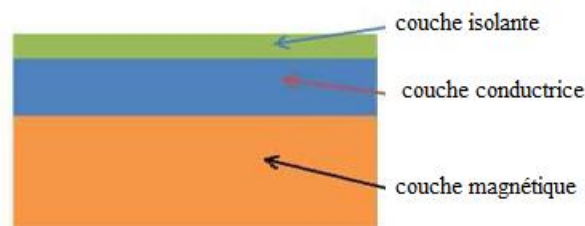


Figure (I.12) : Exemple d'illustration d'un composant planaire

I.4.2. Les différents types de composants planaires :

On peut identifier deux types de composants planaires :

I.4.2.1. Composants planaires bas profil (Planar) :

Souvent appelés aussi composants PCB (Printed Circuit Board), ils sont fabriqués par élaboration de couches conductrices et isolantes encapsulées dans un noyau magnétique commercial. Les composants planar (ou PCB) sont les plus présents sur le marché et largement utilisés dans les convertisseurs DC-DC [1].

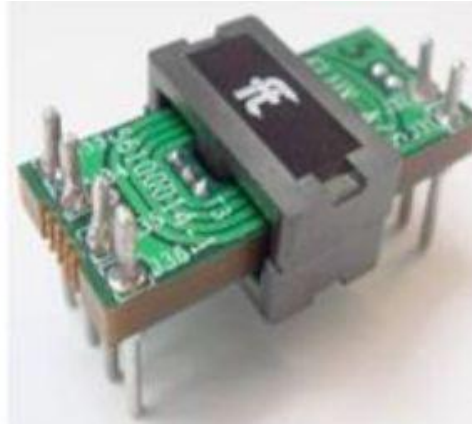


Figure (I.13) : composant planar

I.4.2.2. Composants planaires couches minces/épaisses :

Ce type de composants est élaboré à partir d'empilement de couches conductrices, magnétiques et éventuellement isolantes. Ce type de composants est moins présent sur le marché que les composants planar, mais son domaine d'application est très large et s'étend de l'électronique de puissance au télécom et au photovoltaïque [9].

La différence entre les composants planar et planaire est la technologie de fabrication. En effet, la fabrication des composants planar avec un noyau magnétique nécessite l'utilisation d'un noyau commercial. De ce fait, il est difficile voire impossible d'intégrer les composants planar avec noyau magnétique dans un process de fabrication collective. Si le transformateur est réalisé sans noyau magnétique, dans ce cas il sera compatible avec la fabrication collective. Les composants planaires quant à eux (couche mince), sont réalisables en fabrication collective avec ou sans noyau magnétique.

I.4.3. Les domaines d'application des transformateurs planaires :

On peut distinguer deux grandes familles

a. Applications de puissance :

L'isolation électrique et le transfert d'énergie/signal sont les fonctions principales d'un transformateur. Cependant, en technologie planaire, les transformateurs pour le transfert d'énergie sont rares et ceux développés sont destinés aux applications de faible puissance classiquement de l'ordre du Watt. Cette limitation est due au faible profil des transformateurs planaires[1].

Chapitre I Etat de l'art d'un transformateur

b. Applications pour le transfert signal :

Comme dit auparavant, les transformateurs sont typiquement utilisés pour le traitement du signal où les puissances sont très faibles (de l'ordre de quelques dizaines/centaines de milliwatt). Les transformateurs pour le transfert de signal doivent avoir une faible surface à des fins d'intégration, pour la réduction des bruits extérieurs sur le transformateur et un très bon gain en tension pour bien s'assurer du transfert du signal de l'entrée et non du bruit de l'environnement.[1]

I.4.4. Les différentes structures des transformateurs planaires :

I.4.4.1. Transformateur à enroulements entrelacés :

Ce type de transformateur proposé pour la première fois par E.Frlan en 1989, est constitué généralement de deux enroulements concentriques dans le même plan. Ce type de transformateur présente les principaux avantages qui sont leur faisabilité technologique aisée et la grande valeur du coefficient de couplage. Néanmoins il présente trois inconvénients majeurs qui sont la grande surface occupée, une faible tenue en tension (si la distance entre spires est faible) et un fort couplage capacitif entre enroulement primaire et secondaire [2].

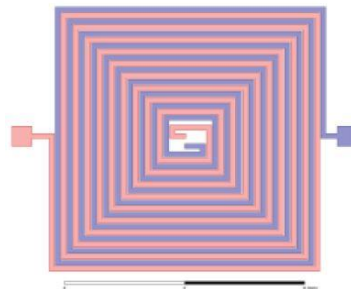


Figure (I.15) : transformateur entrelacé

Il existe les transformateurs avec matériaux magnétique et sans matériau magnétique.

a- transformateurs entrelacés sans matériaux magnétiques :

Les enroulements sont très souvent déposés sur un substrat de silicium. Ce type de transformateur, utilisé principalement dans la bande de fréquence allant de quelques centaines de MHz au GHz, occupe généralement une grande surface avec des inductances relativement faibles [1].

Chapitre I Etat de l'art d'un transformateur

b- transformateurs entrelacé avec matériaux magnétiques :

Ce type de transformateur, constitué par un empilement de couches conductrices, isolantes et magnétiques, fonctionne généralement dans le domaine du MHz (de quelques dizaines à quelques centaines de MHz [10]).

I.4.4.2. Transformateur à enroulements empilés :

Cette structure de transformateur est constituée de deux ou plusieurs bobinages disposés dans deux ou plusieurs plans différents. La connexion entre les bobines des couches conductrices supérieures et inférieures du transformateur est assurée par des vias. Cette structure de transformateur exigeant plusieurs niveaux de métallisation, présente les avantages d'augmenter le coefficient de couplage et l'inductance magnétisante et de diminuer la surface occupée [10] [2].

Ce type de transformateur présente les principaux avantages qui sont la faible surface occupée, la grande valeur du coefficient de couplage et une bonne tenue en tension par rapport à la structure entrelacée. Néanmoins il présente un inconvénient majeur qui est la complexité technologique de fabrication laquelle nécessite plusieurs niveaux de métallisation, des vias.

a- Transformateur empilé sans matériau magnétique :

Ces transformateurs sont généralement déposés sur un substrat de silicium et fonctionnent dans le domaine du GHz.

b- Transformateur empilé avec matériau magnétique :

Ce type de transformateur fonctionne dans le domaine de fréquence allant de quelques MHz à quelques dizaines de MHz. Les enroulements de ces transformateurs constitués par un alliage métallique (Cu/Cr) sont pris en sandwich entre deux couches de matériau magnétique du type permalloy. Ces transformateurs utilisés dans le domaine de l'électronique de puissance à quelques dizaines de MHz présentent un coefficient de couplage de l'ordre de 0,85.

I.4.4.3. Micro-transformateur du type 3D :

Ces transformateurs sont constitués de deux ou plusieurs bobinages enroulés autour d'un noyau magnétique ou non magnétique. Les bobinages ne sont plus planaires comme dans les exemples précédents, mais occupent un volume important. Les matériaux magnétiques utilisés sont en général de formes toroïdales ou de sections carrés et présentent une perméabilité relative grande [2].

Chapitre I Etat de l'art d'un transformateur

Ce type de transformateurs présente les avantages d'occuper moins d'espace et d'avoir des inductances et des coefficients de couplage k de grandes valeurs. Ils présentent un inconvénient majeur qui est la difficulté de leur réalisation technologique. Bien souvent ces transformateurs utilisent un matériau magnétique ce qui limite les fréquences de fonctionnement, limite due à la présence du matériau.

a- Transformateur 3D sans matériau magnétique :

Il est à préciser qu'il existe peu de travaux réalisés sur ce type de transformateur. Ils sont principalement utilisés dans le domaine du GHz, aussi la fabrication de ce transformateur ne nécessite pas la réalisation des vias.

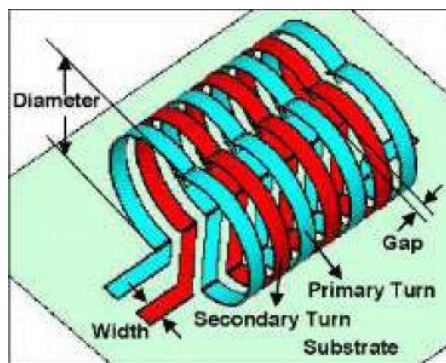


Figure (I.16) : Transformateur 3D

b- Transformateur 3D avec matériau magnétique :

Ces transformateurs sont réalisés à partir d'empilement de couches isolantes, conductrices et magnétiques. Leur domaine d'utilisation s'étend de quelques dizaines à quelques centaines de MHz. Les enroulements de ce transformateur sont en cuivre. Le transformateur ainsi réalisé présente un coefficient de couplage de l'ordre de 0,5 dans le domaine de fréquence allant de 5 à 40MHz [2].

I.4.4.4. Transformateur à orientation face à face :

Le transformateur face to face peut être obtenu en assemblant deux inductances réalisées chacune sur un substrat magnétique ou non, les deux bobines correspondent au primaire et au secondaire du transformateur. Une couche d'isolant est utilisée entre ces deux bobinages assurant ainsi l'isolation entre primaire et secondaire.

Chapitre I Etat de l'art d'un transformateur

Ce type de transformateur principalement utilisé dans des applications de type convertisseur DC/DC, régulateurs à découpage fonctionnant à des fréquences inférieures à 10 MHz.

Ce transformateur présente les avantages d'occuper moins de surface, de présenter un grand coefficient de couplage k ($>0,9$) et une inductance magnétisante élevée, d'avoir un faible couplage capacitif entre enroulements et une bonne tenue en tension. Cependant l'inconvénient majeur que présente ce type de transformateur est la difficulté d'assemblage de deux parties.

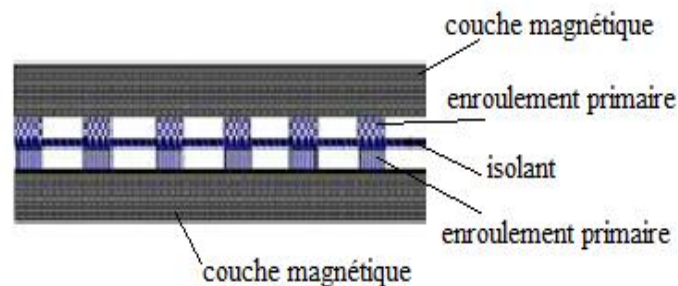


Figure (I.18) : Transformateur à orientation face to face

I.5. Avantages et inconvénients des composants planaires :

Avantages :

- Faible épaisseur des composants (low profil) : la hauteur d'un composant magnétique est réduite à la moitié ou au tiers par rapport aux composants conventionnels.
- bonne caractéristique thermique : ils sont plus efficaces pour évacuer la chaleur et tendance à avoir de faibles sensibilités thermiques par rapport aux transformateurs traditionnels bobinés, car les noyaux magnétiques des composants planaires ont un ratio surface sur volume plus grand que celui des noyaux magnétiques conventionnelles.
- Réductions des coûts : comme la fabrication des composants planaires est compatible avec les technologies de micro-fabrication, ces techniques permettent de réduire les coûts grâce à un procédé de fabrication collectif.
- Fréquence de fonctionnement : Le profil des composants planaires permet des fréquences de fonctionnement allant jusqu'à plusieurs GHz.

Chapitre I Etat de l'art d'un transformateur

Inconvénients :

- substrat silicium : Le silicium est un matériau semi-conducteur, avec l'augmentation de la fréquence des courants induits peuvent apparaitre dans le silicium. Pour cela, l'utilisation d'une couche isolante est nécessaire ce qui ajoutera une étape technologique supplémentaire.
- Difficulté de maintenance.

Chapitre I Etat de l'art d'un transformateur

I.6. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons abordé une présentation globale des transformateurs rencontrés dans le domaine de l'électrotechnique, puis nous avons donné les différents types des transformateurs. Ensuite nous avons présenté une introduction sur la technologie planaire. Nous avons aussi mettre en valeurs les problèmes de pertes dans le transformateur, il s'agit en particulier de pertes magnétiques (pertes par hystérésis et pertes par courants de Foucault) et pertes par effet Joule (pertes cuivre). Enfin, la dernière partie de ce premier chapitre est consacré à la présentation des différents types du transformateur planaire, ainsi que leurs avantages et inconvénients.

**Modélisation
électromagnétique et
méthode de résolution
EF**

II.1. Introduction :

L'électromagnétisme est la branche de la physique qui étudie les interactions entre particules chargées électriquement, qu'elles soient au repos ou en mouvement, et plus généralement les effets de l'électricité, en utilisant la notion de champ électromagnétique. Il est d'ailleurs possible de définir l'électromagnétisme comme l'étude du champ électromagnétique et de son interaction avec les particules chargées.

Les équations de la physique fondamentale qui régissent de tels phénomènes sont appelées équations de Maxwell [7].

II.2. Phénomènes électromagnétiques :

Les phénomènes électromagnétiques étudiés au sein des dispositifs électrotechniques sont régis par les équations de Maxwell et les équations caractérisant le milieu.

La connaissance du champ électromagnétique permet d'avoir accès des performances globales et au détail des conditions de fonctionnement de tout appareil électromagnétique que ce soit en régime permanent ou transitoire [8].

II.2.1. Équations de Maxwell :

Dans le cas statique étudié, les champs électriques et magnétiques peuvent exister indépendamment l'un de l'autre. En électromagnétisme, les champs variables s'induisent mutuellement. Les bases de l'électromagnétisme sont regroupées dans un ensemble d'équations appelées équations de MAXWELL.

Les quatre équations de Maxwell sont à la base de tout phénomène électrique et magnétique. Elles sont aussi fondamentales en électromagnétisme que les lois de Newton en mécanique.

a. Équation de Maxwell-Gauss :

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (\text{I.1})$$

\vec{D} : Vecteur induction électrique (déplacement électrique) [C/m²],

Une charge électrique est source d'un champ électrique ; autrement dit, les lignes de champs électriques commencent et se terminent autour des charges électriques.

b. Equation de Maxwell-Faraday :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.2})$$

\vec{E} : Vecteur champ électrique [V/m].

\vec{B} : Induction magnétique [T].

c. Equation de Maxwell-Ampère :

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}_{con} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{II.3})$$

\vec{H} : Vecteur champ magnétique [A/m].

\vec{J}_{con} : densité de courant de conducteur électrique.

d. Equation de conservation du flux magnétique

Le flux du champ magnétique à travers cette surface fermée vaut :

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{II.4})$$

En appliquant le théorème de la divergence :

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_\tau \operatorname{div} \vec{B} \, d\tau = 0 \quad (\text{II.5})$$

On aura l'équation de la conservation du flux magnétique

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{II.6})$$

Chapitre II Electromagnétisme et méthode de résolution

Cette relation traduit mathématiquement le fait que les seules sources de champ magnétique sont les courants électriques, et il n'existe pas de charge magnétique ; c'est pourquoi les lignes du champ sont toujours fermées sur elles-mêmes. Elles forment des boucles. Ces boucles n'ont ni point de départ, ni point d'arrivée, ni point de convergence, d'où la nomination d'induction conservative (champ conservatif) [12].

II.3. Lois de comportement des milieux :

Les grandeurs et les liaisons des cinq champs vectoriels (\vec{H} , \vec{B} , \vec{D} , \vec{E} , \vec{A}) dépendent des caractéristiques électromagnétiques des milieux où ils règnent. La loi d'Ohm et les équations constitutives des matériaux définissent ce milieu.

II.3.1. Relations constitutives :

a. Induction électrique et champ électrique :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (\text{II.7})$$

Sachant que :

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad (\text{II.8})$$

ε_0 : Permittivité absolue du vide [F / m]

ε_r : Permittivité relative du milieu.

Cette équation décrit la relation entre le vecteur induction électrique \vec{D} et le champ électrique \vec{E} et est linéaire si ε est constante, dans le cas des conducteurs non polarisés nous avons : $\varepsilon_0 = 1 / 36\pi 10^9$ [F / M].

b. Induction magnétique et champ magnétique :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_r \quad (\text{II.9})$$

\vec{H} : L'excitation magnétique en [A.m⁻¹]

\vec{B}_r : est le champ rémanent lorsque le champ inducteur est nul.

Cette relation donne la courbe d'aimantation $B = f(H)$ (voir Figure I.9)

Chapitre II Electromagnétisme et méthode de résolution

Cette variation de \vec{H} conduit à une variation de l'induction \vec{B} , on trouve par la suite le cycle d'hystérésis dont la forme se diffère d'un matériau à un autre, donc d'un dispositif électrotechnique à un autre

II.3.2 Loi d'Ohm :

Dans un conducteur, on constate que la densité de courant est reliée au champ électrique par la relation :

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (\text{II.10})$$

On note que σ est la conductivité électrique du matériau elle dépend du matériau et on utilise la résistivité ρ pour caractériser aussi le matériau.

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{ES}{I} \quad (\text{II.11})$$

➤ Dans le cas d'un milieu conducteur avec source, on aura la relation

$$\vec{J} = \vec{J}_s + \vec{E}\sigma \quad (\text{II.12})$$

J_s : la densité de courant source [A/m^2].

\vec{E} : est le champ électrique induit [V/m].

➤ Pour un milieu en mouvement on aura :

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^r) \quad (\text{II.13})$$

Avec $\vec{E} = \vec{V} \wedge \vec{B}$

\vec{E}^r : est le champ électromoteur.

\vec{V} : est la vitesse de déplacement du milieu en mouvement [m/s].

\vec{B} : Induction magnétique [Tesla].

II.4. Relations de passage :

Lors du passage d'un milieu repéré (1) vers un milieu repéré (2), les grandeurs électromagnétiques subissent des discontinuités. Les équations de passage aux interfaces sont obtenues à partir des équations de Maxwell.

Chapitre II Electromagnétisme et méthode de résolution

➤ Conditions sur les composantes tangentielles :

Pour l'étude des composantes tangentielles du champ magnétique et du champ électrique à l'interface, nous considérons un contour (C) au voisinage très proche de l'interface (h tend vers le zéro) [12].

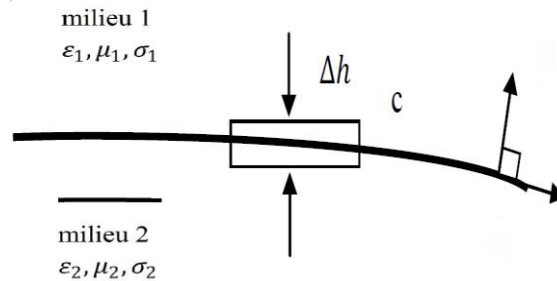


Figure (II.1) : Surface d'intégration entre deux milieux

Le calcul de la circulation du champ \vec{H} en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère sous forme intégrale, nous permet de déduire lorsque h tend vers zéro la condition de passage des composantes tangentielles du champ magnétique, elle est donnée par l'équation suivante :

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \wedge \vec{n} = k \quad (\text{II.14})$$

Cette équation signifie que la composante tangentielle du champ \vec{H} à l'interface entre les deux milieux est discontinue lorsqu'une densité du courant k circule sur la surface de séparation.

Pour les composantes tangentielles du champ électrique \vec{E} nous allons calculer la circulation du champ électrique sur le même contour considéré précédemment, nous utilisons l'équation Maxwell-Faraday sous forme intégrale.

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{l} \quad (\text{II.15})$$

Ce qui donne :

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \wedge \vec{n} = 0 \quad (\text{II.16})$$

L'équation précédente exprime la continuité de la composante tangentielle du champ électrique lors du passage à travers l'interface entre les deux milieux.

➤ Conditions sur les composantes normales :

Pour l'étude de la condition de passage aux composantes normales, nous considérons une surface fermée au voisinage très proche de l'interface comme illustré sur la figure suivante :

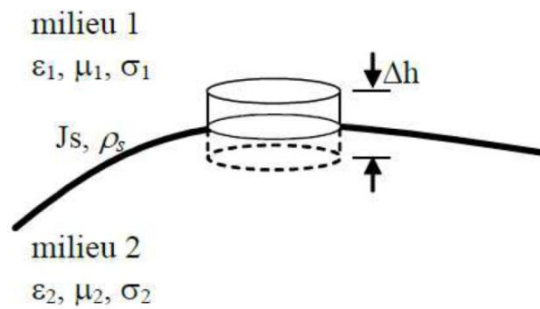


Figure (II.2) : Volume d'intégration entre deux milieux

La condition de passage sur le champ magnétique, est obtenue en calculant le flux de ce dernier à travers la surface fermée et en utilisant l'équation de Maxwell (conservation du flux magnétique) sous sa forme intégrale, on obtient alors l'équation suivante :

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (\text{II.17})$$

Si on considère que la hauteur h du volume élémentaire est suffisamment petite, ce qui nous permet de négliger le flux du champ magnétique à travers la surface latérale, on aura l'équation si dessous :

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{II.18})$$

Cette équation indique que la composante normale du champ magnétique est continue en passant d'un milieu à l'autre à travers l'interface. Pour obtenir une condition sur le déplacement électrique \vec{D} nous faisons appel à l'équation de Maxwell-Gauss sous sa forme globale.

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = Q_{int} \quad (\text{II.19})$$

Q_{int} : Charge libre à l'intérieur de la surface fermée.

Si h est suffisamment petit, l'équation précédente peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} = \rho_s \quad (\text{II.20})$$

La composante normale du vecteur déplacement électrique \vec{D} est discontinue lorsqu'il y a une densité de charge surfacique libre ρ_s à l'interface entre les deux milieux.

Donc en résumé on aura les relations de passage suivantes :

Conservation de la composante tangentielle du champ électrique \vec{E}	$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \wedge \vec{n} = 0$
--------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------

Chapitre II Electromagnétisme et méthode de résolution

Conservation de la composante normale de l'induction magnétique \vec{B}	$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} = 0$
Discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique \vec{H} si les courants surfacique existent k_s .	$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \wedge \vec{n} = k$
Discontinuité de la composante normale de l'induction électrique \vec{D} si les charges surfaciques existent ρ_s	$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} = \rho_s$

Tableau (II.1) : Récapitulatif des relations de passage entre deux milieux

\vec{n} : La normale à l'interface.

k_s : La densité de courant portée par la surface de séparation.

ρ_s : La densité de charges portée par la surface de séparation.

II.5. conditions de jauge :

Les champs électromagnétiques définis par l'ensemble des équations de Maxwell ne sont pas uniques. En effet les champs à divergence sont définis à un rotationnel près, et les champs à rotationnel sont définis à un gradient près. Il convient donc d'imposer une condition supplémentaire afin d'assurer l'unicité c'est à dire la solution issue de la résolution du système d'équations. Cette condition, appelée condition de jauge est généralement exprimée sous deux formes [13] :

$$\text{div} \vec{A} = 0 \quad \text{Jauge de coulomb} \quad (\text{II.21})$$

$$\text{div} \vec{A} + k \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \text{Jauge de Lorentz} \quad (\text{II.22})$$

II.6. Conditions aux limites :

Il existe plusieurs solutions des équations aux dérivées partielles de Maxwell. Les conditions aux limites servent à déterminer une solution unique des ces équations. Ces conditions sont principalement de deux types :

II.6.1. Condition de Dirichlet :

$$A|_{\Gamma} = A_0 \quad (\text{II.23})$$

II.6.2. Condition de Newman :

$$\left. \frac{\partial A}{\partial n} \right|_{\Gamma} = A_0 \quad (\text{II.24})$$

Concernent notre champ d'étude :

Chapitre II Electromagnétisme et méthode de résolution

- La condition de DRICHLET impose la valeur du potentiel A comme par exemple les surfaces des conducteurs, les surfaces équipotentielles (potentiel A connu sur la frontière).
- La condition de NEUMANN impose la valeur de la normale du potentiel A tel que les plans de symétrie ou les surfaces imposées. (Neumann homogène $\frac{\partial A}{\partial t}=0$).

Ces deux conditions sont dites homogènes si les valeurs imposées sont nulles, elles sont dites hétérogène dans le cas contraire. (Neumann non homogène $\frac{\partial A}{\partial t} \neq 0$).

II.7. Formulation des équations électromagnétiques :

Souvent, suivant les dispositifs étudiés, certains phénomènes électromagnétiques peuvent être négligés. Dans les hypothèses simplificatrices proposées, les équations étudiées dans la première partie de ce chapitre (équations de maxwell) se simplifie .Nous aborderons les modèles électrostatique, électrocinétique, magnétostatique et magnétodynamique [19].

II.7.1. Le Modèle électrostatique :

Dans ce modèle, le champ \vec{E} est produit par des charges qui ne varient pas en termes de répartition. Il est régi par les équations suivantes :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}=0 \quad (\text{II.25})$$

$$\text{div}\vec{D}=\rho \quad (\text{II.26})$$

$$\vec{D}=\varepsilon \vec{E} \quad (\text{II.27})$$

$$\text{Puisque } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=0 \quad (\text{II.28})$$

La relation $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = 0$ permet de définir une autre fonction appelé potentiel scalaire électrique V, tel que :

$$\vec{E}=-\overrightarrow{\text{grad}}V \quad (\text{II.29})$$

On aura donc en remplaçant dans les équations précédentes

$$\text{Div}(\varepsilon \overrightarrow{\text{grad}}V)+\rho = 0 \quad (\text{II.30})$$

II.7.2. Modèle magnétostatique :

La magnétostatique consiste en l'étude des phénomènes magnétiques en régime stationnaire

Généralement, un problème magnétostatique est composé des parties suivantes

- des inducteurs parcourus par des courants continus de densité donnée \vec{j} .

Chapitre II Electromagnétisme et méthode de résolution

- des aimants permanents d'induction rémanente donnée \vec{B}_r .
- des régions composées des matériaux magnétiques saturables ou non-saturables.
- une boîte d'air englobant.

Dans ce modèle, le terme $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ de l'équation est nul car le champ magnétique est produit par des sources indépendantes du temps. Il est régi par les équations suivantes :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j} \quad (\text{II.31})$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{II.32})$$

A ces équations s'ajoute la loi de comportement magnétique:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_r \quad (\text{II.33})$$

➤ Formulation magnétostatique en potentiel vecteur magnétique

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{II.34})$$

tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \quad (\text{II.35})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j} \quad (\text{II.36})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{B}}{\mu} \right) = \vec{j} \quad (\text{II.37})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}}{\mu} \right) = \vec{j} \quad (\text{II.38})$$

➤ Formulation bidimensionnel magnétostatique en potentiel vecteur magnétique :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}}{\mu} \right) = \vec{j} \quad (\text{II.39})$$

Si : μ est constante on aura

$$\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{j} \quad (\text{II.40})$$

$$\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{j} \quad (\text{II.41})$$

$$\frac{1}{\mu} (\overrightarrow{\text{grad}}(\overrightarrow{\text{div}} \vec{A}) - \Delta \vec{A}) = \vec{j} \quad (\text{II.42})$$

$$\overrightarrow{\text{div}} \vec{A} = 0 \quad (\text{jauge de coulomb}) \quad (\text{II.43})$$

On aura donc en coordonnées cartésiennes dans le plan (x, y) :

Chapitre II Electromagnétisme et méthode de résolution

$$\frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right] = \vec{J} \quad ; \quad \mu = \mu_r \mu_0 \quad (\text{II.44})$$

II.7.4. Modèle magnétodynamique :

La magnétodynamique consiste en l'étude des phénomènes électromagnétiques couplés, en régime dynamique, en négligeant les courants de déplacement.

Contrairement aux autres modèles le terme $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ n'est pas nul. Ce modèle est régi par les équations suivantes :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{II.45})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.46})$$

$$\vec{J} = \vec{J}_s + \vec{J}_{ind} \quad (\text{II.47})$$

Avec :

$$\vec{J}_{ind} = \sigma \vec{E} + \sigma (\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.48})$$

J_s = densité de courant de source.

Nous ajoutons à ces équations les lois caractéristiques au milieu :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{II.49})$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{II.50})$$

➤ Formulation magnétodynamique en potentiel vecteur magnétique :

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{II.51})$$

tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \quad (\text{II.52})$$

En remplaçant l'équation (II.52) dans (II.46) on aura :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}}{\partial t} = - \overrightarrow{\text{rot}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{II.53})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{II.54})$$

$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$ implique qu'il existe un potentiel scalaire électrique V tel que

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = - \overrightarrow{\text{grad}} V \quad (\text{II.55})$$

$$\vec{E} = - \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} V \right) \quad (\text{II.56})$$

Chapitre II Electromagnétisme et méthode de résolution

En remplaçant l'équation (II.50) dans (II.45) on aura :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{B}} \right) = \overrightarrow{\text{j}} \quad (\text{II.57})$$

$$\text{Avec } \overrightarrow{\text{j}} = \overrightarrow{\text{j}}_s + \sigma \overrightarrow{\text{E}} + \sigma (\mathbf{v} \wedge \overrightarrow{\text{B}}) \quad (\text{II.58})$$

En remplaçant l'équation (II.52) dans (II.57) on aura :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{A}} \right) = \overrightarrow{\text{j}}_s + \sigma \overrightarrow{\text{E}} + \sigma (\mathbf{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{A}}) \quad (\text{II.59})$$

En remplaçant l'équation (II.56) dans (II.59) on aura :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{A}} \right) = \overrightarrow{\text{j}}_s - \sigma \frac{\partial \overrightarrow{\text{A}}}{\partial t} - \sigma \overrightarrow{\text{grad}} V + \sigma (\mathbf{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{A}}) \quad (\text{II.60})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{A}} \right) + \sigma \frac{\partial \overrightarrow{\text{A}}}{\partial t} + \sigma \overrightarrow{\text{grad}} V - \sigma (\mathbf{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{A}}) = \overrightarrow{\text{j}}_s \quad (\text{II.61})$$

Les termes $\overrightarrow{\text{j}}_s - \sigma \frac{\partial \overrightarrow{\text{A}}}{\partial t}$ et $\sigma (\mathbf{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{A}})$ représentent les densités des courants induits ils traduisent le caractère dynamique dans le temps et dans l'espace des phénomènes électromagnétiques

Le terme $-\sigma \overrightarrow{\text{grad}} V$ décrit la densité des courants dépendante des conditions électriques imposé aux extrémités des conducteurs.

➤ Formulation bidimensionnel magnétodynamique en potentiel vecteur magnétique:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \frac{\overrightarrow{\text{A}}}{\mu} \right) = \overrightarrow{\text{j}}_s - \sigma \frac{\partial \overrightarrow{\text{A}}}{\partial t} - \sigma \overrightarrow{\text{grad}} V \quad (\text{II.62})$$

Si μ une constante on aura

$$\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{A}}) = \overrightarrow{\text{j}}_s - \sigma \frac{\partial \overrightarrow{\text{A}}}{\partial t} - \sigma \overrightarrow{\text{grad}} V \quad (\text{II.63})$$

$$\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{A}}) = \overrightarrow{\text{j}}_s - \sigma \frac{\partial \overrightarrow{\text{A}}}{\partial t} - \sigma \overrightarrow{\text{grad}} V \quad (\text{II.64})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu} (\overrightarrow{\text{grad}} (\overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{\text{A}}) - \Delta \overrightarrow{\text{A}}) = \overrightarrow{\text{j}}_s - \sigma \frac{\partial \overrightarrow{\text{A}}}{\partial t} - \sigma \overrightarrow{\text{grad}} V \quad (\text{II.65})$$

$$\overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{\text{A}} = 0 \text{ (jauge de coulomb)}$$

On aura donc en coordonnées cartésiennes dans le plan (x, y) :

$$\frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial^2 \text{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \text{A}}{\partial y^2} \right] = \overrightarrow{\text{j}}_s - \sigma \frac{\partial \overrightarrow{\text{A}}}{\partial t} - \sigma \overrightarrow{\text{E}} \quad (\text{II.66})$$

$$\frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial^2 \text{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \text{A}}{\partial y^2} \right] + \sigma \frac{\partial \overrightarrow{\text{A}}}{\partial t} = \overrightarrow{\text{j}}_s \quad (\text{II.67})$$

Chapitre II Electromagnétisme et méthode de résolution

II.8. Méthodes de résolution des équations électromagnétiques :

Les phénomènes qui décrivent le comportement des dispositifs électromagnétiques sont représentés par des équations aux dérivées partielles ; ces phénomènes se trouvent dans des régions de géométrie très variée (Exemples : pièce des machines tournantes, transformateurs.....etc.) [14].

En général, la résolution de ces équations se fait à l'aide des méthodes analytiques ou des méthodes approchées.

Pour des géométries plus complexes, on a recours à des méthodes numériques qui font appel à des techniques de discrétisation, en effet, elles transforment les équations aux dérivées partielles du champ en un système d'équations algébriques dans le domaine d'étude compte tenu des conditions aux limites [8].

II.8.1. Méthodes analytiques:

Dans la majorité des cas, les méthodes analytiques sont utilisées dans les modélisations de configurations ayant des structures électromagnétiques à symétries et géométries simples. Les modèles électromagnétique et géométrique traité sont respectivement linéaires et unidimensionnels ou bidimensionnels mais rarement tridimensionnel [15].ces méthodes donnent une solution exacte mais qui n'est pas facile à trouver ou qu'elle n'est pas du tout évidente vu la complexité du problème.

Les modèles analytiques trouvent leur grand intérêt dans l'étude des phénomènes avec mouvement (dynamique) et à effet de peau important (fréquence élevée) dans les induits (charge). Ils apportent aussi des avantages important en termes de coût de calcul, l'espace mémoire de volume d'informations et de facilité d'exploitation. Parmi les principales méthodes analytiques de résolution des équations aux dérivées partielles [7].

- La méthode de séparation des variables.
- La méthode intégrale.
- La méthode de séries exponentielles.

II.8.2. Méthodes numériques :

Les méthodes numériques sont utilisées avec succès dans la plupart des problèmes de la physique. Néanmoins chacune d'elles a son domaine d'application privilégié [16].

Chapitre II Electromagnétisme et méthode de résolution

- **Méthode des Différences Finis (MDF) :**

C'est une méthode basée sur le théorème de Taylor où l'on remplace l'opérateur différentiel par un opérateur aux différences. Le domaine d'étude est découpé au moyen d'une grille carrée dans le cas bidimensionnel et une grille cubique dans le cas tridimensionnel, l'équation à résoudre est écrite pour chaque point au nœud de maillage, pour cela on aura un système d'équations possédant un nombre d'équations égal au nombre de nœuds [16].

- **Méthode des intégrales de frontières (MIF) :**

Lorsqu'on utilise la MDF ou la MEF, on calcule les variables inconnues dans tout le domaine. La MIF permet de ramener le maillage à la frontière du domaine. Ainsi, le calcul des valeurs de l'inconnue sur les frontières du domaine suffit pour obtenir la solution en tout point du domaine [16].

- **Méthode des Volumes Finis (MVF) :**

La MVF se déduit de la MDF. Le domaine d'étude (Ω) est subdivisé en un nombre d'éléments finis. Chaque élément contient quatre nœuds, pour le cas bidimensionnel axisymétrique, un volume fini entoure chaque nœud. L'équation différentielle est projetée sur une fonction de projection bien déterminée et ensuite intégrée dans chacun des volumes élémentaires. [17].

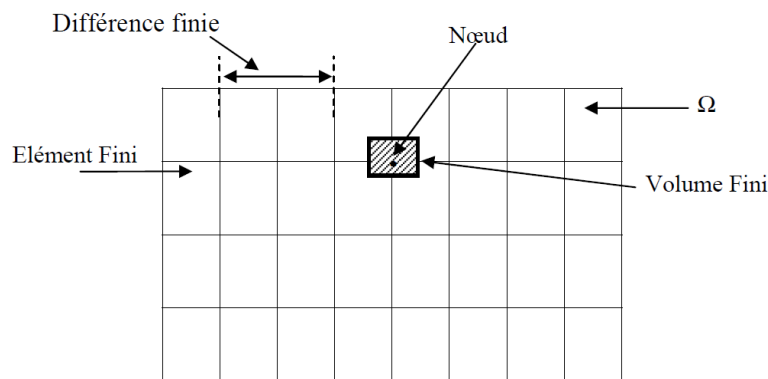


Figure (II.3) : Maillage du domaine d'étude.

- **Méthode des éléments finis (MEF) :**

II.8.3. Définition de méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis (finite element method) fut développée et appliquée en premier lieu en génie civil et en mécanique, elle n'a trouvé sa place qu'aux années 1970 en électricité.

Chapitre II Electromagnétisme et méthode de résolution

Elle est utilisée pour la résolution des équations aux dérivées partielles (EDP), dans tous les domaines des sciences de l'ingénieur. Celle-ci est très puissante pour la résolution des EDP de MAXWELL. Surtout dans les domaines complexes.

Cette méthode ne s'applique pas directement aux équations aux dérivées partielles, mais à une formulation intégrale qui est équivalente au problème à résoudre [16], en utilisant l'une des deux approches suivantes:

- ✓ La méthode des résidus pondérés ou méthode projective qui consiste à minimiser le résidu induit par l'approximation de la fonction inconnue.
- ✓ La méthode variationnelle qui consiste à minimiser une fonctionnelle qui représente généralement l'énergie du système étudié.

II.9. Démarches de la méthode des éléments finis :

Les principales étapes de la mise en œuvre de la méthode des éléments finis sont représentées dans le synoptique suivant :

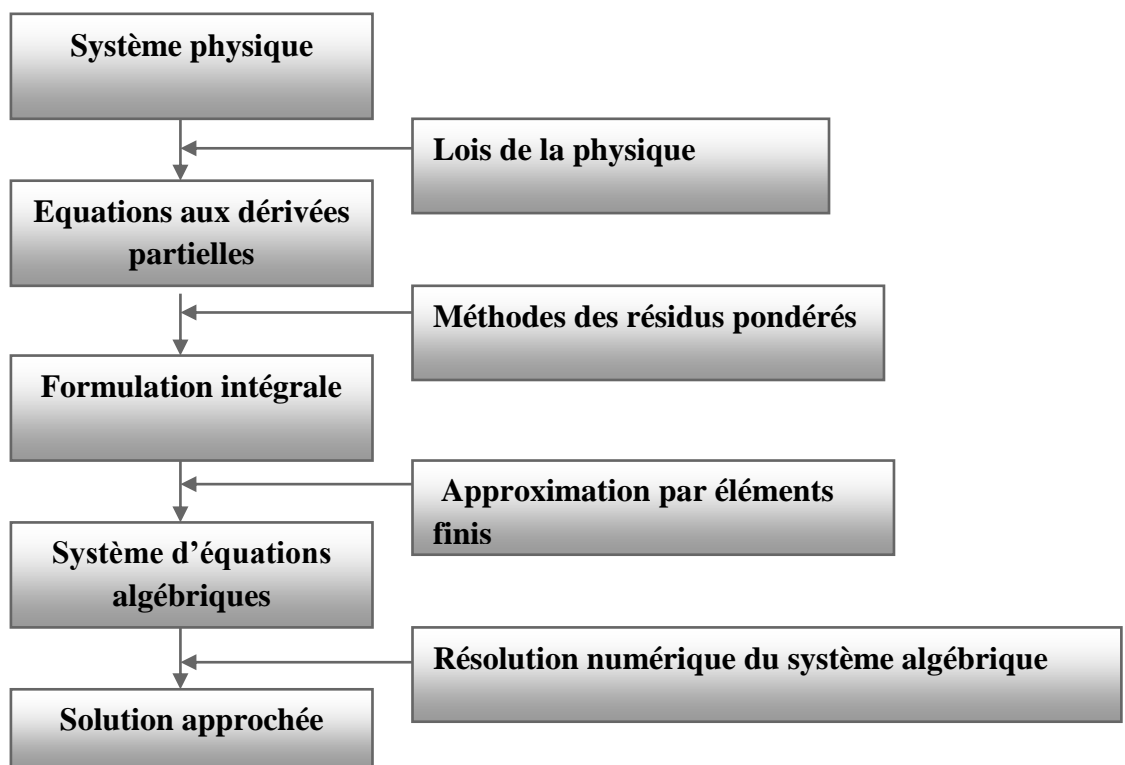


Figure (II.4) : Étapes de la mise en œuvre de la méthode des éléments finis

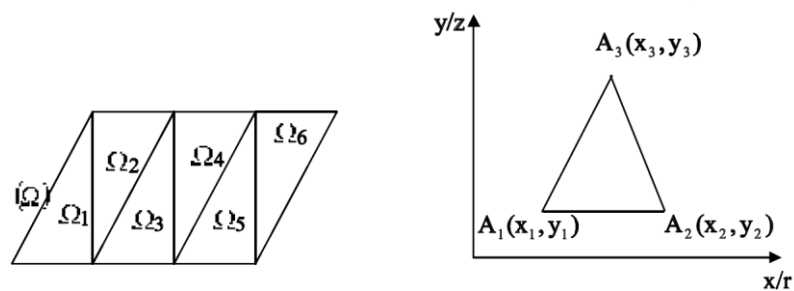
II.9.1. La discrétisation spatiale (maillage) :

La résolution des problèmes physiques par la méthode des éléments finis, nécessite de subdiviser le domaine où se déroule le phénomène étudié Ω en petits sous domaines Ω^e appelées éléments finis constituant le maillage. Parmi les types d'éléments utilisés dans la

Chapitre II Electromagnétisme et méthode de résolution

majorité des cas bidimensionnels, on rencontre les éléments triangulaires, les éléments rectangulaires et quadrilatéraux.

Dans une configuration triangulaire chaque élément est déterminé par trois nœuds. Au total, le maillage produit N_e éléments et N_n nœuds. Dans les zones où une plus grande précision des résultats est nécessaire, il faut procéder au remaillage de ces dernières, ce qui engendre un temps de calcul plus important.

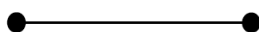


Figure(II.5) : Découpage en éléments finis du domaine (Ω) et repérage d'un élément fini

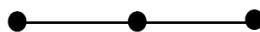
a- éléments réels :

Nous allons donner les éléments réels de base qu'on peut utiliser avec la MEF, et nous donnerons les éléments de référence triangulaires car le logiciel de simulation MATLAB que nous allons utiliser fait appel à un maillage à base d'éléments triangulaires.

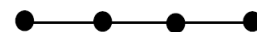
Eléments 1D



Linéaire (02 nœuds)



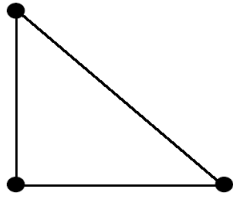
Quadratique (03 nœuds)



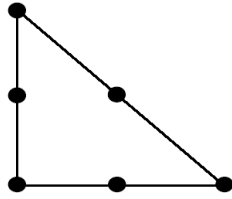
Cubique (04 nœuds)

Eléments 2D

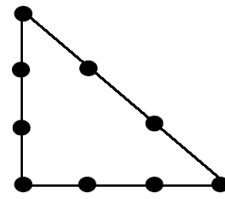
➤ Triangulaires



Linéaire (03 nœuds)



Quadratique (06 nœuds)

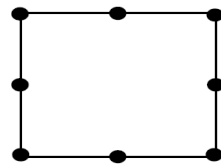


Cubique (09 nœuds)

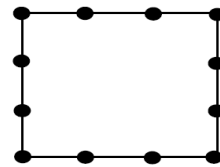
➤ Carrés



Linéaire (04 nœuds)



Quadratique (08 nœuds)

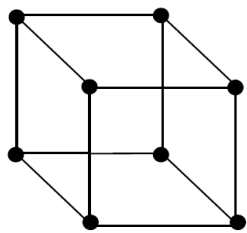


Cubique (12 nœuds)

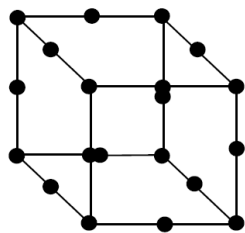
Eléments 3D



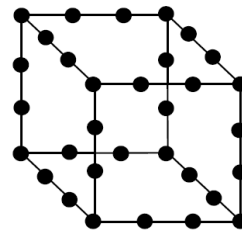
Cube



Linéaire (08 nœuds)

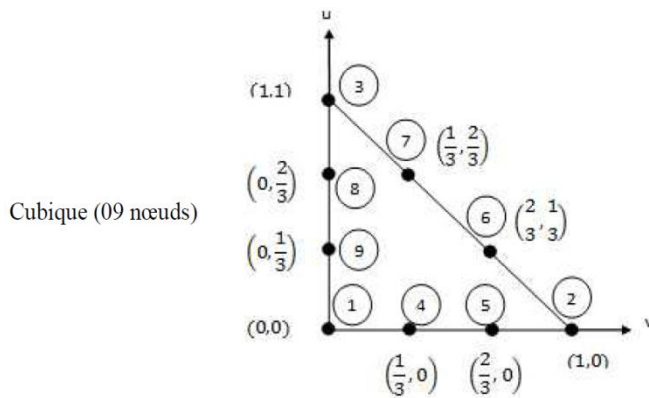


Quadratique (20 nœuds)



Cubique (32 nœuds)

b- éléments de référence triangulaire 2D :



II.9.2. Fonction d'interpolation :

La fonction d'interpolation consiste à chercher la meilleure approximation d'une fonction $F(x)$ dans le domaine Ω de manière à satisfaire au mieux les lois physiques auxquelles elle obéit.

$$F(x) = [N_1^e(x) | \dots | N_n^e(x)] \begin{Bmatrix} U_1^e \\ \vdots \\ U_n^e \end{Bmatrix} \quad (\text{II.68})$$

$U_1^e \dots U_n^e$: sont les valeurs de $F(x)$ aux nœuds d'interpolation de l'élément.

$N_1^e(x) \dots N_n^e(x)$: sont les fonctions d'interpolation sur l'élément.

➤ Calcul de la fonction d'interpolation :

La fonction d'interpolation est obtenue à partir du triangle de pascal donner sur la figure suivante :

	1	-----	Ordre 0	
U		V -----	Ordre 1	
U ²	UV	V ² -----	Ordre 2	
U ³	U ² V	UV ²	V ³ ----	Ordre 3

Figure (II.6) : Triangle de pascal

Ces fonctions sont construite de telle sorte à obéir aux deux principes suivent :

Chapitre II Electromagnétisme et méthode de résolution

- Etat complet : ce principe stipule que le nombre de termes de la fonction doit être égal au nombre de nœuds de l'élément et la fonction doit contenir un terme constant.
- Comptabilité : ce principe énonce que la fonction d'interpolation doit être continue.

Soit la fonction d'approximation de type 2D d'un élément triangulaire :

$$A(x) = a.x + b.y + c \quad (\text{II.69})$$

Implique :

$$A(x, y) = [x \quad y \quad 1] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (\text{II.70})$$

II.9.3. D'une équation différentielle vers une équation intégrale :

La MEF ne s'applique pas directement aux EDP, mais à une formulation intégrale qui est équivalente au problème à résoudre. Cette formulation intégrale constitue une substitution à la forme d'équations aux dérivées partielles et de leurs conditions aux limites associées au phénomène à étudier. Le passage d'une EDP à une équation intégrale se fait en utilisant l'une des deux approches suivantes :

➤ Formulation variationnelle :

L'utilisation de cette méthode nécessite la connaissance de la fonctionnelle d'énergie du système physique, équivalente au problème différentiel à résoudre, elle s'exprime par :

$$F(x) = \int L(A) d\Omega \quad (\text{II.71})$$

Sachant que :

$$L(A) = W_c - W_p \quad (\text{II.72})$$

Avec :

L : la fonction de Lagrange résultant de la Co-énergie du système de type cinétique et son énergie potentielle.

Ω : Domaine d'étude.

W_c : Énergie de type cinétique.

W_p : Énergie de type potentiel.

Le principe de cette méthode consiste à trouver une fonctionnelle à partir de l'EDP telle que la minimum de celle-ci correspondant à la solution de l'EDP sous les conditions aux limites.

La fonctionnelle qu'il faut minimiser est donnée par la formule suivante :

$$F(A) = \int_{\Omega} (\int_0^B (vB dB - JA) d\Omega) \quad (\text{II.73})$$

Chapitre II Electromagnétisme et méthode de résolution

Avec :

B : induction magnétique.

J : densité du courant.

A : potentiel vecteur magnétique.

ν : réductivité magnétique.

La résolution de ce système revient à minimiser $F(A)$ on utilise le principe de Rayleigh-Ritz, qui consiste à écrire.

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A} = 0 \quad (\text{II.74})$$

➤ **Formulation résidus pondérés :**

Le principe de la méthode consiste à choisir les fonctions projectives de manière à minimiser l'intégrale du résidu dans l'équation suivante :

$$R = L(A) - f \quad (\text{II.75})$$

Avec :

R : le résidu de l'approximation.

$L(A)$: L'opérateur différentiel.

f : Une fonction définie sur le domaine d'étude Ω .

A : Une fonction inconnue.

$$\int_{\Omega} R_i \phi_i d\Omega = 0 \quad (\text{II.76})$$

ϕ_i : Fonction de projection ou de pondération

La méthode des résidus pondérés présente un intérêt particulier par rapport à la formulation variationnelle dans la mesure où son application ne nécessite pas la connaissance au préalable de la fonctionnelle d'énergie. Le choix de la fonction de pondération, conduit à plusieurs méthodes, parmi celles-ci nous citons :

- La méthode de collaboration par point.
- La méthode des points carrés.
- La méthode de Galerkin.

II.9.4. Formulation éléments finis du modèle magnétodynamique en A :

Modèle magnétodynamique cartésien :

Cas cartésien :

L'équation magnétodynamique dans avec une source est donnée par :

Chapitre II Electromagnétisme et méthode de résolution

$$\overrightarrow{rot} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{rot}(\vec{A}) \right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_z \quad (\text{II.77})$$

En régime harmonique l'équation (II.77) devient :

$$\overrightarrow{rot} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{rot}(\vec{A}) \right) + j \cdot \omega \cdot \sigma \cdot \vec{A} = \vec{J}_z \quad (\text{II.78})$$

L'équation (II.78) peut s'écrire sous la forme :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) + j \cdot \omega \cdot \sigma \cdot A_z = j_{sz} \quad (\text{II.79})$$

La formulation intégrale de l'équation (II.79) peut être donnée par :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) + j \cdot \omega \cdot \sigma \cdot A_z - j_{sz} \right) dx dy = 0 \quad (\text{II.80})$$

L'équation (II.80) peut être réécrite comme suit :

$$-\iint_{\Omega} \alpha_i v \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) dx dy + j \omega \iint_{\Omega} \alpha_i \sigma A_z dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i j_{sz} dx dy \quad (\text{II.81})$$

$$\text{Avec } v = \frac{1}{\mu}$$

L'application de théorème de Green, nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} -\iint_{\Omega} \alpha_i v \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) dx dy &= -\iint_{\Omega} v \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) dx dy + \\ \int_{\Gamma} v \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \alpha_i \cos(n, x) + \frac{\partial A_z}{\partial y} \alpha_i \cos(n, y) \right) d\Gamma & \end{aligned} \quad (\text{II.82})$$

On peut écrire cette dernière équation sous une forme plus compacte en introduisant l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$

$$-\iint_{\Omega} \alpha_i v \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) dx dy = -\iint_{\Omega} v \vec{\nabla} \alpha_i \vec{\nabla} A_z dx dy + \int_{\Gamma} v \alpha_i \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma \quad (\text{II.83})$$

En remplaçant (II.83) dans (II.81) on aura :

$$-\iint_{\Omega} v \vec{\nabla} \alpha_i \vec{\nabla} A_z dx dy + \int_{\Gamma} v \alpha_i \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma + j \omega \iint_{\Omega} \alpha_i \sigma A_z dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i j_{sz} dx dy \quad (\text{II.84})$$

Avec Γ est le contour sur le quel repose la surface Ω

En considérant des conditions aux limites type Dirichlet ou Newman homogène, le terme sur la frontière s'annule :

$$\int_{\Gamma} v \alpha_i \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (\text{II.85})$$

Donc l'expression (II.84) devient :

Chapitre II Electromagnétisme et méthode de résolution

$$-\iint_{\Omega} v \vec{\nabla} \alpha_i \vec{\nabla} A_z dx dy + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_i \sigma A_z dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i j s z dx dy \quad (\text{II.86})$$

Sachant que :

$$A_z = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j$$

En remplaçant A_z par son expression dans (II.86) nous aurons :

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j A_j \left(-\iint_{\Omega} v \vec{\nabla} \alpha_i \vec{\nabla} \alpha_j A_z dx dy \right) A_i + j\omega \sum_{j=1}^N (\sigma \alpha_i \alpha_j dx dy) A_j = \iint_{\Omega} \alpha_i j s z dx dy \quad (\text{II.87})$$

Qui peut être écrite pour tous les nœuds du domaine sous la forme algébrique, on obtient alors l'expression suivante :

$$[M]. [A] + j\omega [L]. [A] = [K] \quad (\text{II.88})$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} v \vec{\nabla} \alpha_i \vec{\nabla} \alpha_j A_z dx dy$$

$$L_{ij} = \int_{\Omega} \sigma \alpha_i \alpha_j dx dy$$

$$K_{ij} = \iint_{\Omega} \alpha_i j s z dx dy$$

$$\bar{A} = Ar + jAi$$

Où Ar est la partie réel et Ai est la partie imaginaire

Cas axisymétrique :

En considérant le régime harmonique et en faisant le même raisonnement que le cas des Coordonnées cartésiennes on aura :

$$-\iint_{\Omega} \left(\alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial z} \right) \right) \right) dr dz + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_i \sigma A_{\varphi} \frac{dr dz}{r} =$$

$$\iint_{\Omega} \alpha_i j_{\varphi} dr dz \quad (\text{II.89})$$

L'application du théorème de green, nous permet d'écrire :

Chapitre II Electromagnétisme et méthode de résolution

$$\iint_{\Omega} \frac{v}{r} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) dr dz - \int_{\Gamma} \frac{v}{r} \alpha_i \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma +$$

$$j\omega \iint_{\Omega} \alpha_i \sigma A_\varphi \frac{dr dz}{r} = - \iint_{\Omega} \alpha_i j_\varphi dz dz \quad (\text{II. 90})$$

En considérant les conditions aux limites type Dirichlet ou Newmann homogène, le terme sur la frontière s'annule.

En remplaçant A par sa forme discrétisée :

$$A_\varphi = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j$$

On aura :

$$\sum_{j=1}^N \left(\iint_{\Omega} \frac{v}{r} \vec{\nabla} \alpha_i \vec{\nabla} \alpha_j dr dz \right) A_j + j\omega \sum_{j=1}^N \left(\iint_{\Omega} \alpha_i \alpha_j \sigma \frac{dr dz}{r} \right) A_j$$

$$= - \iint_{\Omega} \alpha_i j_{sz} dr dz \quad (\text{II. 91})$$

L'équation s'écrit sur tous les nœuds du domaine sous la forme matricielle suivante :

$$[M].[A] + j\omega[L].[A] = [K] \quad (\text{II. 92})$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{v}{r} \vec{\nabla} \alpha_i \vec{\nabla} \alpha_j dr dz$$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \alpha_i \alpha_j \sigma \frac{dr dz}{r}$$

$$K_{ij} = \iint_{\Omega} \alpha_i j_{sz} dr dz$$

$$\bar{A} = Ar + jAi$$

Où Ar est la partie réel et Ai est la partie imaginaire.

Chapitre II Electromagnétisme et méthode de résolution

II.9.6. Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis :

➤ **Les avantages :**

- adaptations aux géométries complexes.
- Prise en compte des non linéarités.
- Temps de calcul relativement avantageux.

➤ **Les inconvénients :**

- non prise en considération des domaines infinis.
- Impuissante en présence de singularités dans le domaine d'étude.

II.10. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons étudié les phénomènes électromagnétiques commençant par donner les différentes équations de Maxwell; nous avons vu les différentes méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles, parmi ces méthodes là, nous avons choisi la méthode des éléments finis (MEF), avec une formulation en résidus pondérés et une implémentation d'algorithme de calcul sous environnement MATLAB.

**Application :
Dimensionnement et
modélisation d'un
transformateur planaire**

III.1. Introduction

Nous avons présenté l'état de l'art sur les transformateurs et les différents phénomènes électromagnétiques qui assurent le fonctionnement du transformateur aussi les méthodes de résolutions.

Maintenant nous allons principalement se concentré sur l'étude du dimensionnement et la modélisation du micro-transformateur intégré, pour cela nous allons utiliser un cahier de charge donné.

Pour ce faire :

- Nous allons dimensionner les différents paramètres géométriques nécessaires, puis viendra l'étape de calcul de ces dernières ainsi que les paramètres électriques en utilisant l'environnement informatique MATLAB.
- En seconde partie nous allons modéliser le micro-transformateur par la méthode des éléments finis, et nous allons étudier l'influence de la variation de la fréquence et les paramètres géométriques sur les paramètres électrique (R,L).

III.2. Le cahier de charge :

Le micro-transformateur qui sera étudié est utilisé pour des applications de petite puissance telles-que l'électronique portable, dont la tendance va toujours dans le sens de la réduction en taille et en nombre de composant, alors le cahier de charge choisi est le suivant :

- Tension d'entrée : $V_e=12v$
- Tension de sortie : $V_s=5v$
- Puissance de sortie : $P_s=5w$
- Fréquence de fonctionnement : $f=100MHz$.

III.3. Présentation du micro-transformateur :

Le micro-transformateur sur lequel on effectuera l'étude est constitué de deux enroulements planaire de forme spirale carré. Le nombre de spire est réparti comme suite :

- L'enroulement primaire est composé de cinq spires ($n_p=5$).
- L'enroulement secondaire est composé de deux spires ($n_s=2$).

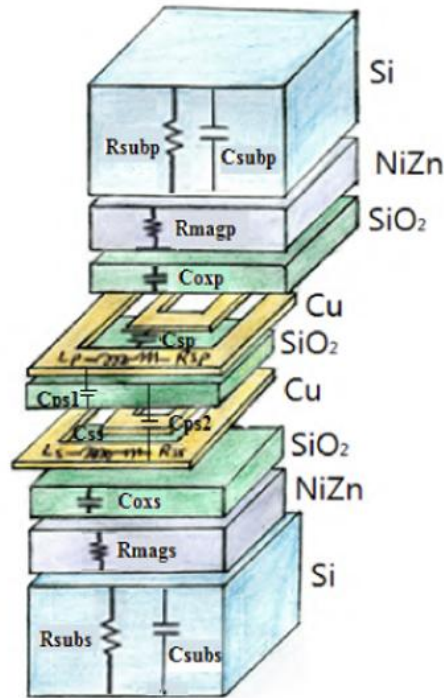


Figure (III.1): Coupe transversale en 3D du micro-transformateur

III.4. Matériaux utilisés pour le micro-transformateur :

Les deux enroulements primaire et secondaire en cuivre, sont déposés sur une couche de matériaux magnétique, le ferrite (NiZn), isolée de celle-ci par une couche de dioxyde de silicium (SiO₂). Les trois couches sont disposées sur une quatrième couche de silicium (Si) qui sert de substrat. Les deux empilements sont séparés par une couche de dioxyde de silicium (SiO₂) qui assure le couplage magnétique [18].

III.5. dimensionnement du noyau magnétique :

III.5.1. détermination des inductances primaire et secondaire :

Les inductances primaire L_p et secondaire L_s sont liées directement à l'énergie emmagasinée W . donc elles sont déterminées par la relation suivante :

$$W = \frac{1}{2} L_p i_p^2 = \frac{1}{2} L_s i_s^2 \quad (III.1)$$

Pour un courant maximum :

$$W = \frac{1}{2} L_p I_{pmax}^2 = \frac{1}{2} L_s I_{smax}^2 \quad (III.2)$$

Il est possible de calculer la puissance à partir de l'énergie sur une période, et ça par l'expression suivante :

$$P = \frac{W}{T} = \frac{1}{2T} L_p I_{pmax}^2 \quad (III.3)$$

Sachant que :

$$I_{1max} = \frac{Ve^2\alpha T}{Lp} \quad (III.4)$$

En remplaçant I_{1max} par sa valeur on trouve

$$P = \frac{Ve^2\alpha^2 T}{2Lp} \quad (III.5)$$

Cette puissance est transmise à la charge

$$P = V_s I_s = \frac{Ve^2\alpha^2 T}{2Lp} \quad (III.6)$$

On tire la valeur de l'inductance primaire

$$Lp = \frac{Ve^2\alpha^2 T}{2V_s I_s} \quad (III.7)$$

Nous utilisons le rapport de transformateur m qui est un paramètre très important dans le transformateur son expression est donné par la formule suivante [18] :

$$m = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \frac{V_s}{V_e} \quad (III.8)$$

Donc la valeur du rapport de transformateur est $m = 0.42$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$

A partir de la valeur de l'inductance primaire on peut calculer la valeur de l'inductance secondaire en utilisant le rapport de transformation m [18] :

$$L_s = m^2 L_p \quad (III.9)$$

III.5.2. dimensionnement du noyau magnétique :

Le dimensionnement du noyau magnétique se fait par deux principaux paramètres : le volume du noyau nécessaire pour stocker l'énergie qui est calculée à partir de la densité volumique, et de l'énergie emmagasinée dans les enroulements [18].

$$W_{vmax} = \frac{B_{max}^2}{\mu_{NiZn}} \quad (III.10)$$

B_{max} : Inductance maximal que peut supporter le matériau.

μ_{NiZn} : Perméabilité relative du matériau.

Avec :

$$\mu_{NiZn} = 1400 \quad \text{et} \quad B_{max} = 0.3 \text{ Tesla}$$

$W_v = 25.59 J/m^3$ C'est la densité volumique d'énergie.

Le volume du noyau magnétique est donné par l'expression suivante :

$$V = \frac{W}{W_{vmax}} \quad (III.11)$$

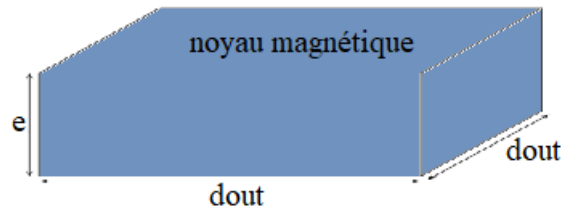


Figure (III.2) : Géométrie du noyau magnétique

Tel que :

La distance extérieure égal à $1500\mu m$.

La distance intérieure égal à $750\mu m$

D'après l'expression (III.10), le volume du noyau nécessaire pour stocker une énergie de $w = 3.125J$ est égale à $V = 0.122mm^2$ [18].

Connaissant le volume et le diamètre extérieur d_{out} nous pouvons déduire l'épaisseur du noyau magnétique par l'expression suivante [18] :

$$e = \frac{V}{d_{out} t^2} \quad (III.12)$$

III.3.3 Détermination des paramètres géométriques du micro transformateur :

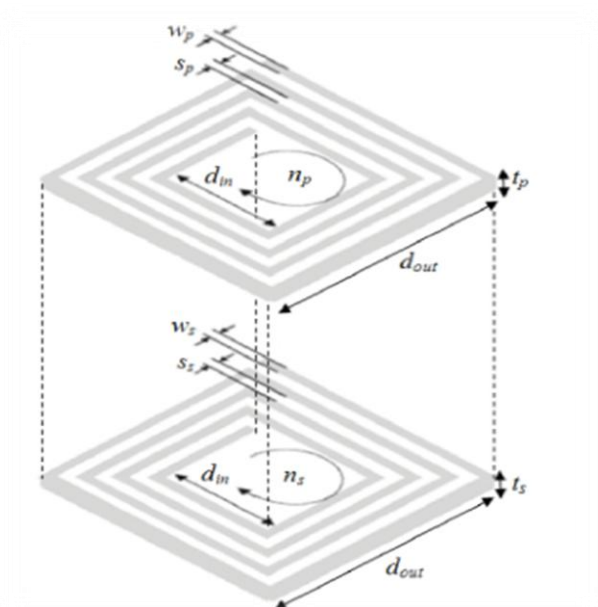


Figure (III.3) : Les différents paramètres géométriques des inductances primaires et secondaires

- w_p et w_s sont respectivement les largeurs des enroulements du primaire et du secondaire.
- t_p et t_s sont les épaisseurs des conducteurs primaires et secondaires.

- s_p et s_s représente les inter-spires du primaire et du secondaire.
- n_p, n_s et l_{tp}, l_{ts} représente respectivement le nombre de tours et les longueurs total des conducteur primaire et secondaire.

III.3.3.1. Calcul du nombre de spires du primaire et du secondaire :

On utilise la méthode de Wheeler pour calculer le nombre de spires du primaire et secondaire, elle est une méthode de calcul analytique facile mettre en œuvre et présente un taux d'erreur très faible.

La formule de Wheeler pour le calcul de l'inductance et donné par la relation suivante [18] :

$$L = k_1 \mu_0 \frac{n^2 \cdot d_{avg}}{1+k_2 \cdot \rho} \quad (\text{III.13})$$

Sachant que :

- $k_1=2.34$ et $k_2=2.75$ sont des coefficients de la forme géométrique, pour une forme carrée
- d_{avg} : diamètre moyen et ρ est le facteur de forme, ils sont définis par [18] :

$$d_{avg} = \frac{d_{out} + d_{in}}{2} \quad (\text{III.14})$$

$$\rho = \frac{d_{out} - d_{in}}{d_{out} + d_{in}} \quad (\text{III.15})$$

À partir de la formule de Wheeler, on trouve l'expression du nombre de tours au primaire

$$n_p = \sqrt{\frac{(1+k_2 \cdot \rho) \cdot L_p}{\mu_0 \cdot k_1 \cdot d_{avg}}} \quad (\text{III.16})$$

En utilisant le coefficient de transformation m on peut déduire la valeur du nombre de tours au secondaire n_s par la relation suivante :

$$n_s = m \cdot n_p \quad (\text{III.17})$$

III.3.3.2. Calcul de la largeur et de l'épaisseur du conducteur primaire :

L'effet de peau provoque une décroissance exponentielle de la densité de courant à l'intérieur du conducteur.

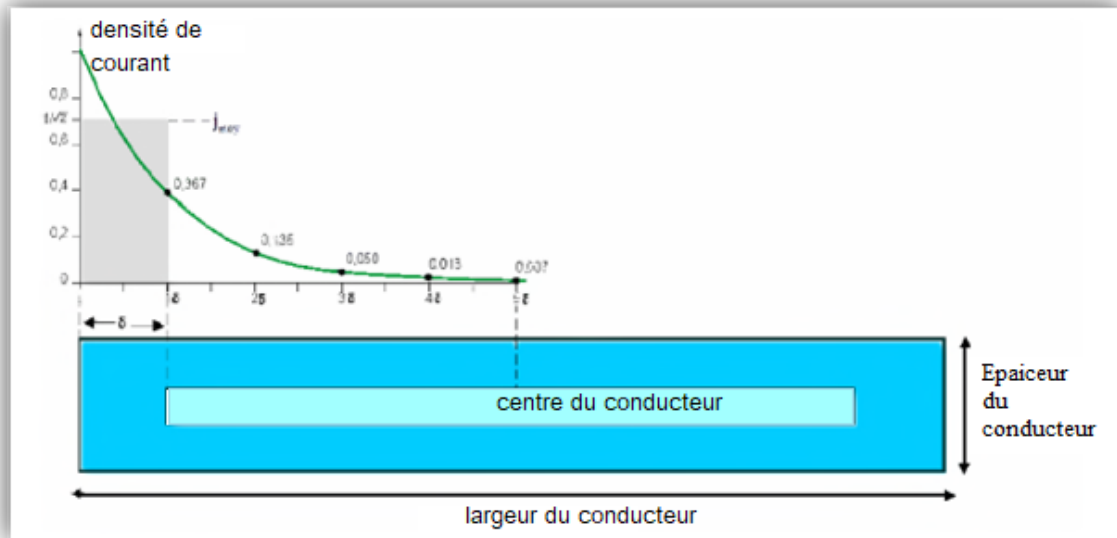


Figure (III.4) : Décroissance de la densité de courant à l'intérieur d'un conducteur rectangulaire

Pour que le courant circule dans tout au long du conducteur, il faut que l'une de ces conditions soit remplie : $w_p \leq 2\delta$ ou $t_p \leq 2\delta$. On impose une de ces deux valeurs par exemple on prend l'épaisseur du conducteur $t_p = 2\delta$, on peut alors calculer sa largeur w_p [18].

La valeur moyenne de la densité de courant dans un conducteur dans la section est rectangulaire est donné par la relation suivantes [18] :

$$j_{moy} = j_0 \frac{\left[e^{-\left(\frac{t}{2\delta}\right)} + 1 \right]}{2} \quad (III.18)$$

sachant que le courant qui circule dans le conducteur primaire est en fonction de la section du conducteur S_c et de la densité de courant moyen j_{moy} .

$$i_p = S_c \cdot j_{moy} \quad (III.19)$$

La section S_c de la spire primaire du micro-transformateur est rectangulaire, elle s'exprime par la relation suivante :

$$S_c = w_p \cdot t_p \quad (III.20)$$

De l'équation (III.20) on tire la valeur de la largeur du primaire W_p :

$$W_p = \frac{S_c}{t_p} \quad (III.21)$$

III.3.3.3. Calcul de l'espace inter-spires du primaire :

A partir de la forme géométrique carré de l'enroulement, on établit l'expression suivante :

$$S_p = \frac{[d_{out} - d_{in} - 2(w_p \cdot n_p)]}{2(n_p - 1)} \quad \text{III.22}$$

III.3.3.4. Calcul de la longueur totale du conducteur primaire :

La longueur moyenne du conducteur primaire est exprimée par la relation suivante :

$$l_{tp} = [4 \cdot n_p \cdot (d_{out} - (n_p - 1) \cdot S_p - (n_p \cdot w_p))] - S_p \quad \text{III.23}$$

III.3.3.5. Calcul de la largeur et de l'inter-spire du secondaire :

Nous avons choisi pour un inter spire identique à celui du primaire ($S_p = S_s$, $t_p = t_s$). À partir de ce dernier, nous calculerons la largeur du secondaire par la relation suivante :

$$W_s = \frac{[d_{out} - d_{in} - 2 \cdot S_s \cdot (n_s - 1)]}{2 \cdot n_s} \quad \text{III.24}$$

III.3.3.6. Calcul de la longueur total du conducteur du secondaire :

La longueur totale du conducteur du secondaire est déterminée à partir de l'expression suivante :

$$l_{ts} = [4 \cdot n_s \cdot (d_{out} - (n_s - 1) \cdot S_s - (n_s \cdot w_s))] - S_s \quad \text{III.25}$$

III.3.3.7. Résultats du dimensionnement géométrique :

Les résultats du dimensionnement géométrique sont regroupés dans le tableau suivant :

Paramètres géométriques	symboles	Résultat de dimensionnement
Nombre de tours du primaire	n_p	5 spires
Nombre de tours du secondaire	n_s	2 spires
Distance extérieur	d_{out}	1500 μm
Distance intérieur	d_{in}	750 μm
Epaisseur du noyau	e	54.22 μm
Epaisseur de peau	δ	6.56 μm
Largeur du primaire	w_p	46.39 μm
Largeur du secondaire	w_s	169.62 μm

Epaisseur du primaire	t_p	13.12 μm
Epaisseur du secondaire	t_s	13.12 μm
Inter-spires du primaire	s_p	35.76 μm
Inter-spires du secondaire	s_s	35.76 μm
Longueur totale du primaire	l_{tp}	2.25 cm
Longueur totale du secondaire	l_{ts}	9 mm

Tableau (III.1) : Résultats du dimensionnement géométrique

III.4 modélisation du micro-transformateur :

III.4.1.Le model électrique équivalent du micro-transformateur :

Après avoir calculé les paramètres géométriques, nous allons calculer tous les paramètres électriques utile. La figure suivante représente le model électrique équivalent du micro-transformateur étudié dans ce chapitre :

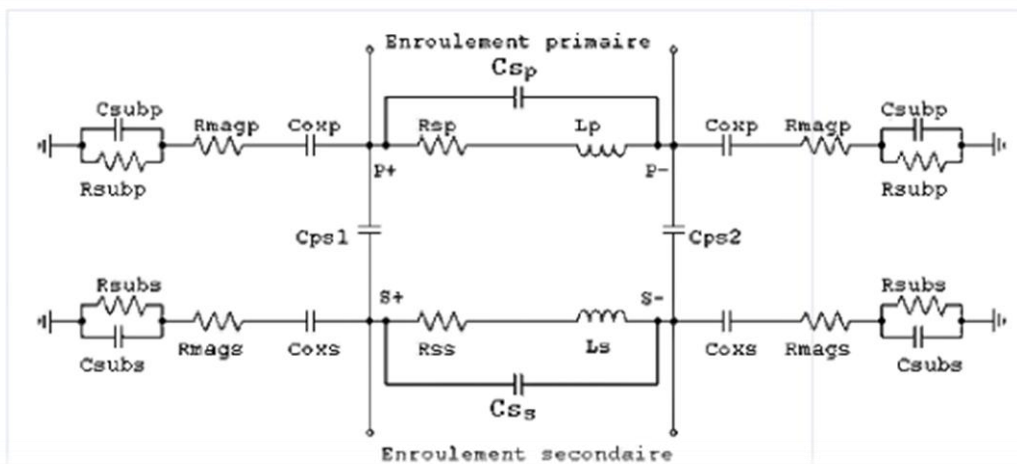


Figure (III.5) : circuit électrique équivalent du micro-transformateur.

Avec :

L_p, L_s : inductances primaire et secondaire .

R_{sp}, R_{ss} : résistances série des enroulements primaire et secondaire .

C_{sp}, C_{ss} : capacités inter-spires primaire et secondaire .

C_{ps1} : capacité de couplage entre l'inductance primaire et secondaire.

C_{ps2} : capacité de couplage entre l'inductance secondaire et primaire.

C_{oxp} , C_{oxs} : capacités associé à la couche d'isolation oxyde pour le primaire et le secondaire .

R_{magp} , R_{mags} : résistances associé au noyau magnétique pour le primaire et le secondaire .

C_{subp} , C_{subs} , R_{subp} , R_{subs} : les capacités et les résistances associé aux substrats pour le primaire et le secondaire .

III.4.2. Calcul des paramètres électriques :

III.4.2.1. Résistances séries

Les résistances des deux enroulements primaire et secondaire de section rectangulaire s'expriment par les relations suivantes [18]:

$$R_{sp} = \rho_{cu} \cdot \frac{l_{tp}}{w_p \cdot t_{eff}} \quad (\text{III.26})$$

$$R_{sp} = \rho_{cu} \cdot \frac{l_{ts}}{w_s \cdot t_{eff}} \quad (\text{III.27})$$

Avec

$\rho_{cu} = 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$ est la résistivité du cuivre.

t_{eff} : épaisseur effective, elle est exprimée en fonction de l'épaisseur de peau et de l'épaisseur du conducteur [18] :

$$t_{eff} = \delta \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\delta}}) \quad (\text{III.28})$$

III.4.2.2. Résistances parasite :

Ce sont des résistances relié au substrat et au noyau magnétique, elles représentent les pertes joules générées par les courants induits respectivement, dans le substrat semi-conducteur et le noyau magnétique en ferrites. Elles sont données par les expressions suivantes [18] :

$$R_{subp} = 2 \cdot \rho_{si} \frac{e_{si}}{w_p \cdot l_{tp}} \quad (\text{III.29})$$

$$R_{\text{subs}} = 2 \cdot \rho_{\text{si}} \cdot \frac{e_{\text{si}}}{ws.lts} \quad (\text{III.30})$$

$$R_{\text{magp}} = 2 \cdot \rho_{\text{NiZn}} \cdot \frac{e_{\text{NiZn}}}{wp.ltp} \quad (\text{III.31})$$

$$R_{\text{mags}} = 2 \cdot \rho_{\text{si}} \cdot \frac{e_{\text{NiZn}}}{ws.lts} \quad (\text{III.32})$$

III.4.2.3. capacités de l'isolant (dioxyde de silicium SiO_2) :

La présence d'un isolant entre le ruban conducteur et le matériau magnétique qui est aussi conducteur donne naissance à une capacité parasite C_{ox} a cause de la différence de potentiel qui règne entre les deux conducteurs. Les expressions appropriées a ces capacité d'oxyde des couches primaires et secondaires sont en fonction de la constante diélectrique ϵ_{SiO_2} , et l'épaisseur de la couche d'oxyde t_{ox} , elles s'expriment par [18] :

$$C_{oxp} = \frac{1}{2} \epsilon_{SiO_2} \cdot \frac{wp.ltp}{t_{ox}} \quad (\text{III.33})$$

$$C_{oxs} = \frac{1}{2} \epsilon_{SiO_2} \cdot \frac{ws.lts}{t_{ox}} \quad (\text{III.34})$$

Avec : $\epsilon_{SiO_2} = 3.9$ c'est la permittivité relative du dioxyde de silicium.

III.4.2.4. capacités parasites de substrat (silicium Si) :

Elles caractérisent les effets capacitifs qui se produisent à haute fréquence dans le semi conducteur et sont exprimé par les relations suivantes :

$$C_{subp} = \frac{1}{2} \epsilon_{\text{si}} \cdot \frac{wp.ltp}{e_{\text{si}}} \quad (\text{III.35})$$

$$C_{subp} = \frac{1}{2} \epsilon_{\text{si}} \cdot \frac{ws.lts}{e_{\text{si}}} \quad (\text{III.36})$$

Avec : $\epsilon_{\text{si}} = 11.8$ la permittivité relative du silicium Si .

III.4.2.5. capacités de couplage ;

Elles représentent les capacités inter-spires C_{sp} , C_{ss} et les capacités de couplages entre l'inductance primaire et secondaire C_{ps1} , C_{ps2} , elles sont exprimées par :

$$C_{sp} = \frac{1}{2} \varepsilon_{SiO_2} \cdot \frac{t.ltp}{s_p} \quad (\text{III.37})$$

$$C_{ss} = \frac{1}{2} \varepsilon_{SiO_2} \cdot \frac{t.ltp}{s_s} \quad (\text{III.38})$$

$$C_{ps1} = \varepsilon_{SiO_2} \cdot \frac{w_p.ltp}{t_{ox}} \quad (\text{III.39})$$

$$C_{ps2} = \varepsilon_{SiO_2} \cdot \frac{w_s.lts}{t_{ox}} \quad (\text{III.40})$$

Avec $\varepsilon_{SiO_2} = 3.9$ est la permittivité relative du dioxyde de silicium SiO_2 .

III.4.3. Résultats de calculs des paramètres électriques :

En utilisant les formules déclarées auparavant nous obtiendrons les résultats des paramètres électriques assemblés dans le tableau suivant :

Paramètres électriques	Symboles	Valeurs
Inductance primaire	L_p	36.32 nH
Inductance secondaire	L_s	6.35 nH
Résistance série primaire	R_{sp}	1.45 Ω
Résistance série secondaire	R_{ss}	0.16 Ω
Résistance du noyau magnétique du primaire	R_{magp}	104.14 K Ω
Résistance du noyau magnétique du secondaire	R_{mags}	71.38 K Ω
Capacité d'oxyde du primaire	C_{oxp}	2.49 pF
Capacité d'oxyde du secondaire	C_{oxs}	3.64 pF
Résistance du substrat du primaire	R_{subp}	3.55 K Ω
Résistance du substrat du secondaire	R_{subs}	2.43 K Ω
Capacité du substrat du primaire	C_{subp}	0.54 pF
Capacité du substrat du secondaire	C_{subs}	0.79 pF
Capacité inter-spires du primaire	C_{sp}	142.32 pF

Capacité inter-spires du secondaire	C_{S_s}	56.79 pF
Capacité de couplage entre l'inductance primaire et secondaire	C_{ps1}	4.98 pF
Capacité de couplage entre l'inductance secondaire et primaire	C_{ps2}	7.28 pF

Tableau (III.2) : Valeurs des paramètres électriques du micro-transformateur.

III.4.4. Modélisation magnétique par la méthode des éléments finis :

III.4.4.1. Organigramme de calcul par éléments finis :

Pour l'implémentation du modèle sous environnement ' MATLAB', on procédera à plusieurs étapes:

- a) Description de la géométrie du domaine.
- b) Construction d'un maillage triangulaire du domaine Ω . On utilisera des fonctions spécifiques pour la génération automatique du maillage aussi bien que pour son raffinement.
- c) Imposition des conditions aux limites : MATLAB offre les deux conditions usuelles sur un domaine à deux dimensions sous la forme algébrique suivante [19] :

➤ Condition de Dirichlet :

$$hu = r \quad \text{(III.41)}$$

Condition généralisée de Neumann :

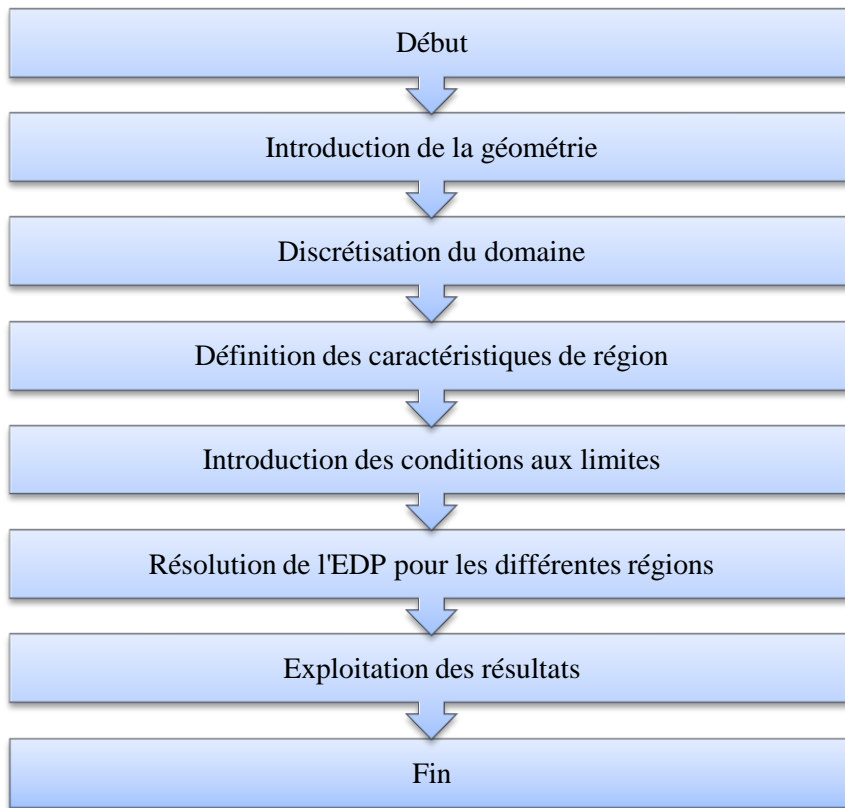
$$\vec{n}(c\nabla u) + qu = g \quad \text{(III.42)}$$

Avec :

- ✓ \vec{n} : Le vecteur normal
- ✓ h, r, c, q, g les matrices construites à partir des coordonnées des nœuds.
- ✓ u : L'inconnu du problème.

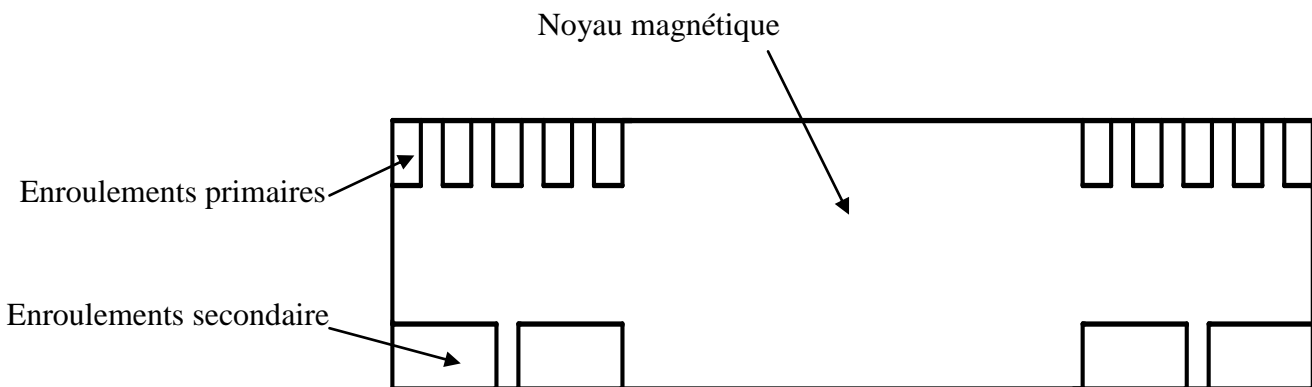
- d) Définition des caractéristiques de chaque région, en affectant à chaque sous-domaine ses propriétés physiques (σ, μ).

Les différentes étapes citées peuvent se résumer sous la forme de l'organigramme suivant :



III.4.4.2. Structure géométrique :

Le modèle géométrique que nous allons traiter dans le cadre de cette application est le suivant :



III.4.4.3. Caractéristiques géométriques :

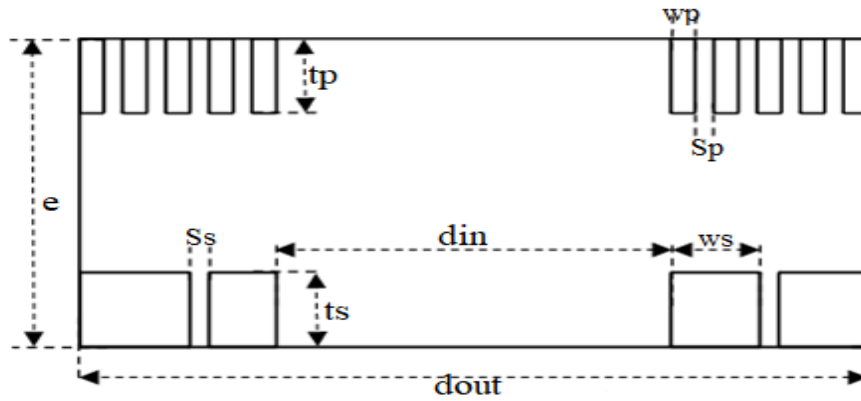


Figure (III.8) : Caractéristique géométrique du problème

Sachant que les dimensions :

d_{out}	$1500\mu m$
d_{in}	$750\mu m$
e	$54.22\mu m$
s_p	$35.76\mu m$
s_s	$35.76\mu m$
w_p	$46.39\mu m$
w_s	$169.62\mu m$
t_p	$13.12\mu m$
t_s	$13.12\mu m$

III.4.4.4. Caractéristiques physiques :

Les caractéristiques et les propriétés physiques de différentes régions constituant le système comme suit [19] :

- **L'air :**

Une conductivité électrique : $\sigma=0$.

Une perméabilité magnétique : $\mu_0=4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} [H / m]$.

Une densité de courant de source $J_s=0$.

- **Les enroulements (primaire et secondaire) :**

Une perméabilité relative $\mu_r=1$.

Une conductivité électrique $\sigma_1= 5,8 \cdot 10^7 [\Omega \cdot m]^{-1}$.

Une densité de courant de source $J_s=6,5670586 \cdot 10^8 [A/m^2]$

- **Noyau :**

Une perméabilité relative $\mu_r=1400$.

Une conductivité électrique $\sigma_1= 0$.

Une densité de courant de source $J_s=0$.

III.4.4.5. Formulation du problème traité en termes de potentiel vecteur magnétique :

Pour formuler l'équation du potentiel vecteur magnétique \vec{A} en exploitent la quatrième équation de maxwell en négligent les courant de déplacement [19]:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j} \quad (\text{III.43})$$

$$\vec{H} = \frac{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}}{\mu} \quad (\text{III.44})$$

$$\vec{j} = \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \quad (\text{III.45})$$

En combinant ces différentes relations, on aura :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}}{\mu} \right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{j} \quad (\text{III.46})$$

Dans notre cas on travail dans le plan [x ,y] donc les composante selon [z] s'annule.

En adaptant cette équation à chaque région, nous obtinedrons :

Dans l'air :

$$\left[\frac{1}{\mu_{air}} \left[\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} \right] \right] = 0 \quad (\text{III.47})$$

Avec : $\mu_{air} = \mu_{rair} \mu_0$

L'enroulement primaire :

$$\left[\frac{1}{\mu_{cuivre}} \left[\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} \right] \right] + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{j} \quad (\text{III.48})$$

L'enroulement secondaire :

$$\left[\frac{1}{\mu_{cuivre}} \left[\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} \right] \right] + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$$

Dans le noyau magnétique :

$$\frac{1}{\mu_{noyau}} \left[\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (\text{III.49})$$

III.4.4.6. Domaine de résolution et conditions aux limites :

Dans ce cas d'étude, le comportement des grandeurs magnétiques et électriques nous amène à résoudre le problème en imposant les conditions aux limites de type *Dirichlet* :

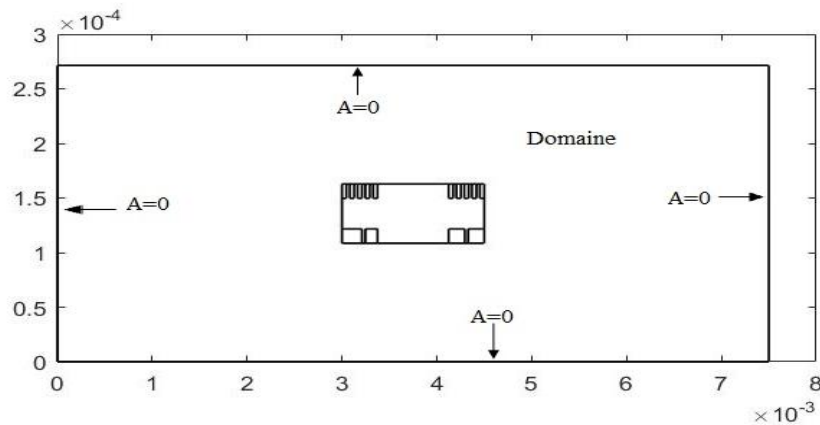


Figure (III.9): domaine de résolution et conditions aux limites

III.4.4.7. Résultats de simulation :

Le maillage : Le maillage éléments finis du domaine de résolution en élément triangulaire de premier ordre est illustré par la figure (III.10) et il doit être suffisamment fin pour une meilleure précision des résultats :

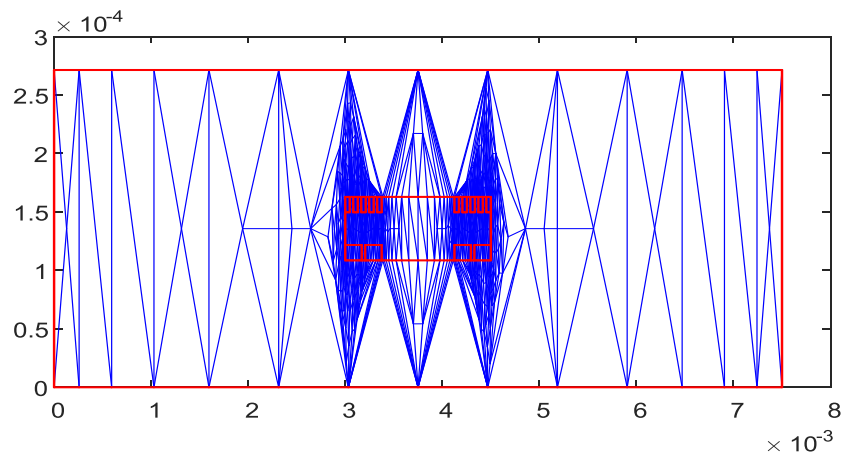


Figure (III.10) : Le maillage éléments finis du domaine de résolution

- **Le potentiel vecteur magnétique A(T.m) :**

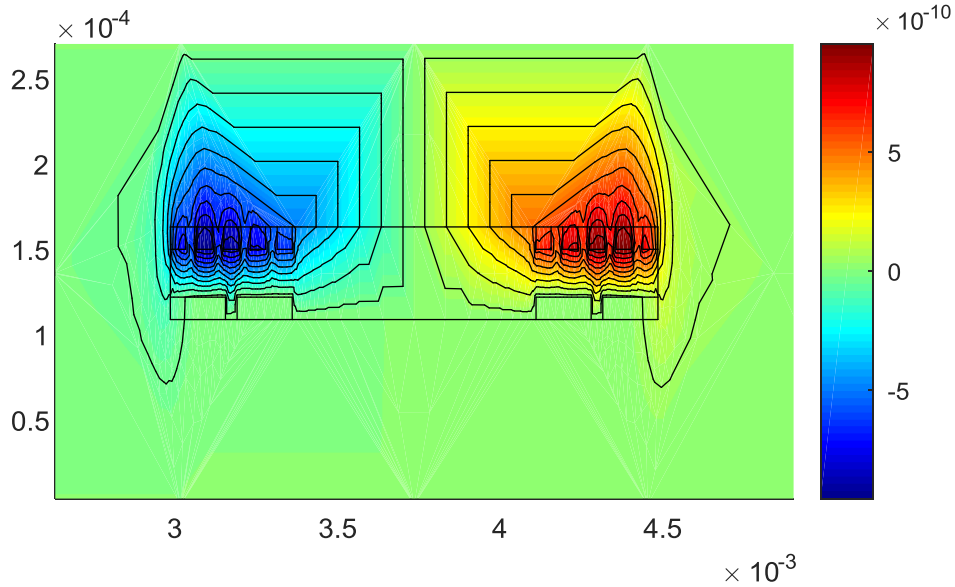


Figure (III.11) : Lignes du potentiel vecteur magnétique A

- **L'induction magnétique B(Tesla) :**

Les lignes de l'induction magnétique B

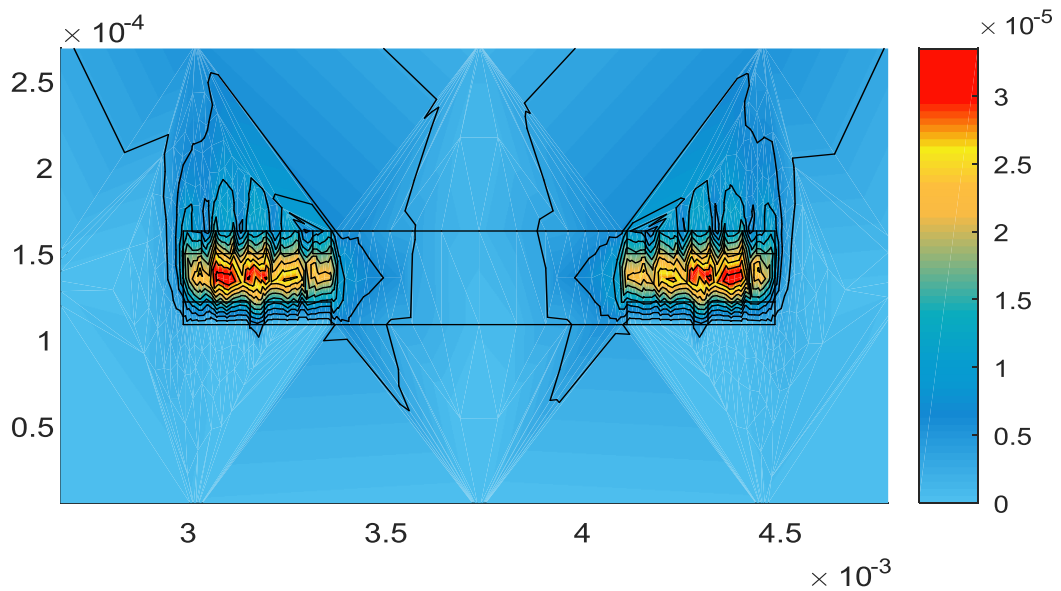


Figure (III.12) : Induction magnétique (B)

Le noyau magnétique regroupe les lignes de l'induction magnétique. D'où la grande concentration de l'induction dans le noyau magnétique.

- **Champ magnétique H (A.m⁻¹) :**

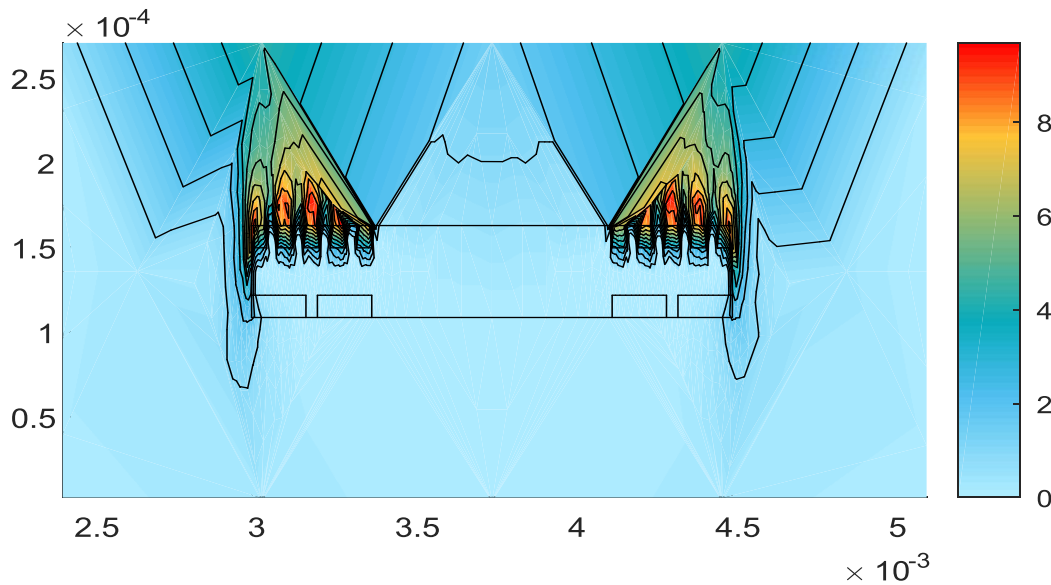


Figure (III.13) : Les lignes du champ magnétique

Nous observons un débordement des lignes de champ magnétiques dans toutes les directions dans l'air, les lignes occupent tout l'espace et ne sont arrêtés que par les frontières du domaine. Mais, ce qui est remarquable c'est que du côté du noyau magnétique les lignes du champ s'en trouvent confinées dans ce noyau (perméabilité élevé du ferrite).

III.4.4.8. Calcule des résistances et inductances du micro-transformateur :

La résistance et l'inductance du micro-transformateur sont calculées à partir des relations suivantes :

$$R = \frac{1}{\sigma} \int_{\Omega} J_i^2 d\Omega \quad (\text{III. 50})$$

$$X_L = j2\pi f \frac{1}{I^2} \int_v B \cdot H dv \quad (\text{III. 51})$$

III.4.4.9. Influence la fréquence sur les grandeurs électrique (R,L) :

A- Enroulement primaire :

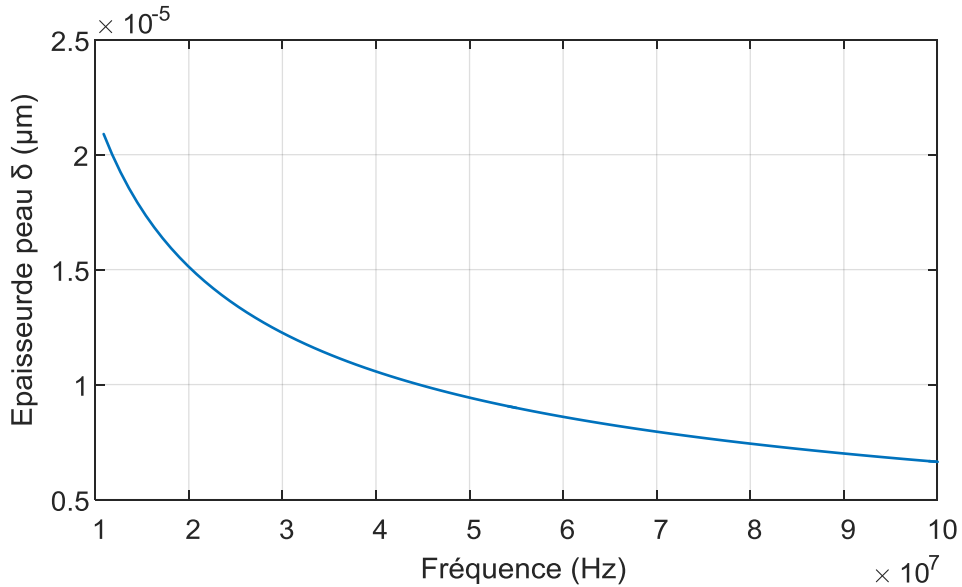


Figure (III.14) : variation de la profondeur de peau en fonction de la fréquence

La variation de la fréquence influence sur l'épaisseur, plus la fréquence augmente plus l'épaisseur de peau où circule une grande densité de courant est petite ce que nous appelons l'effet de peau.

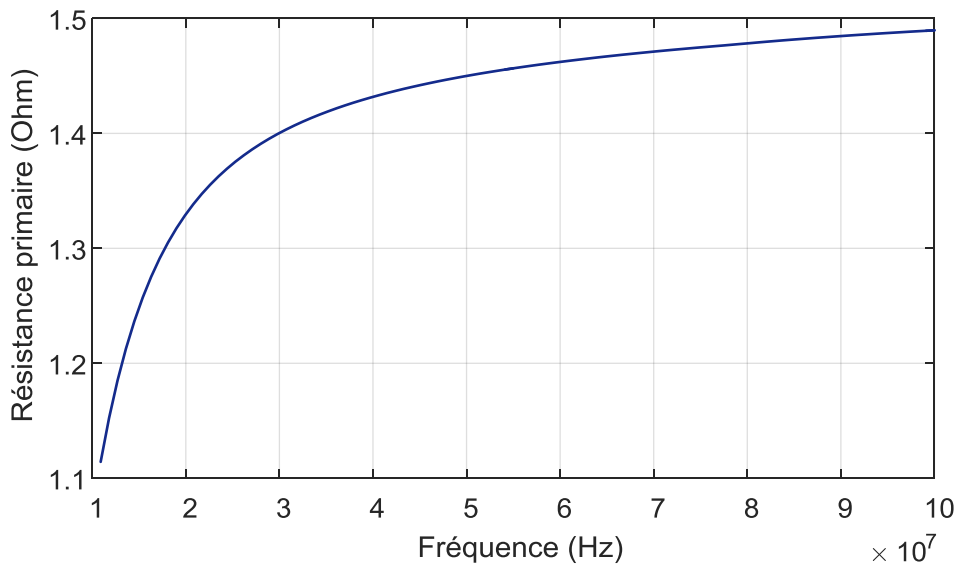


Figure (III.15) : variation de la résistance primaire en fonction de la fréquence

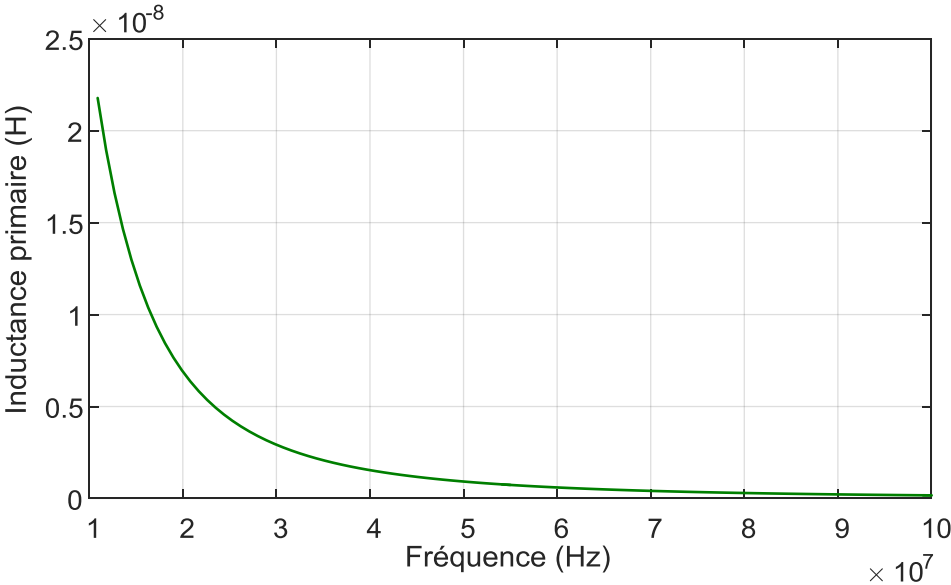


Figure (III.16) : variation de l'inductance en fonction de la fréquence

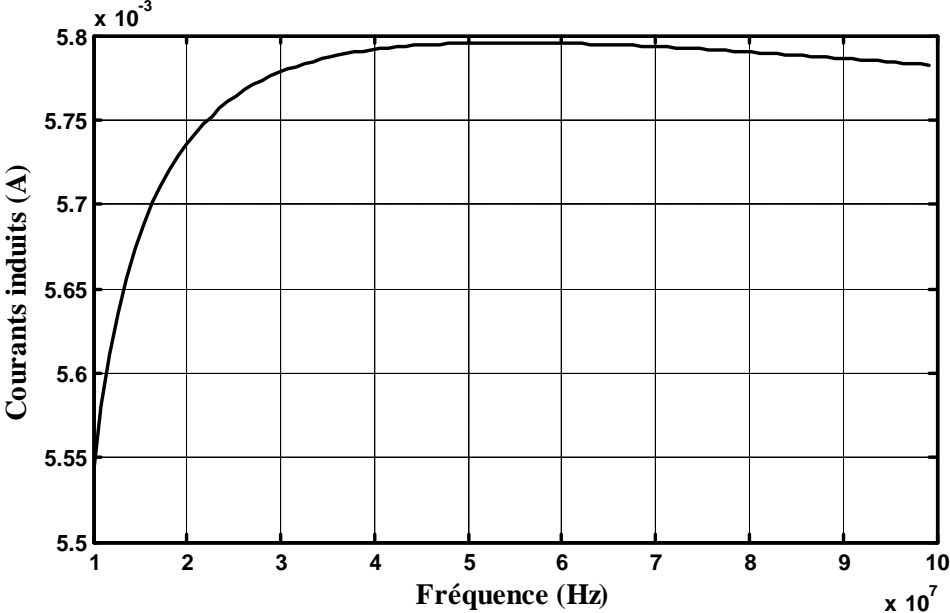


Figure (III.17) : variation des courants induit en fonction de la fréquence

B- Enroulement secondaire :

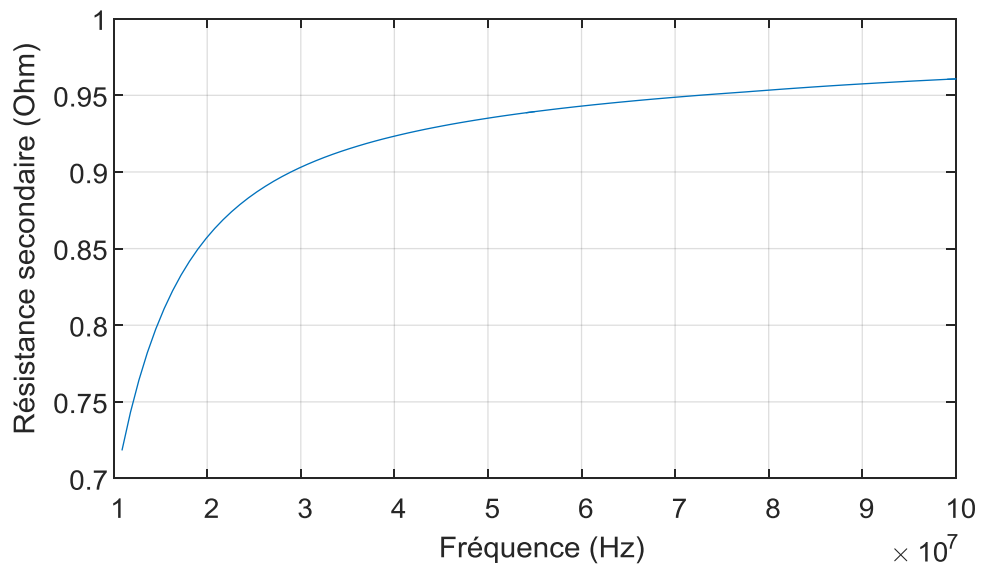


Figure (III.18) : Variation de la résistance secondaire en fonction de la fréquence

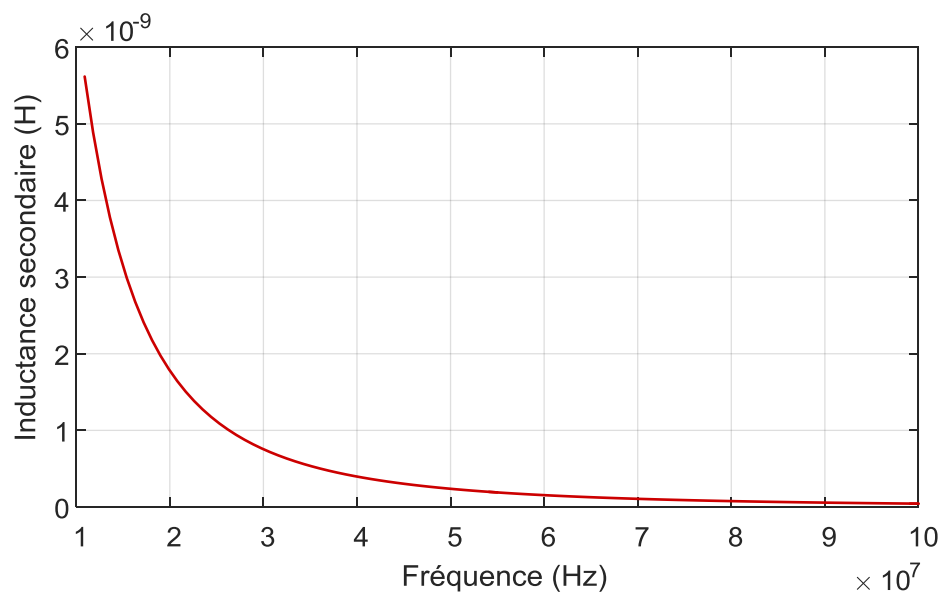


Figure (III.19) : variation de l'inductance secondaire en fonction de la fréquence

C- Noyau magnétique :

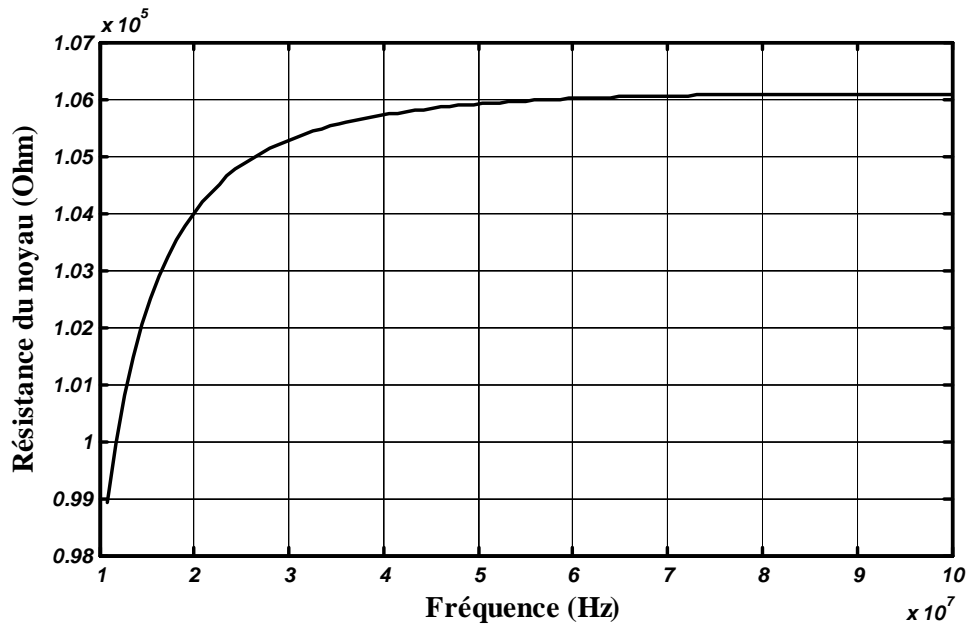


Figure (III.20) : Variation de la résistance primaire du noyau en fonction de la fréquence

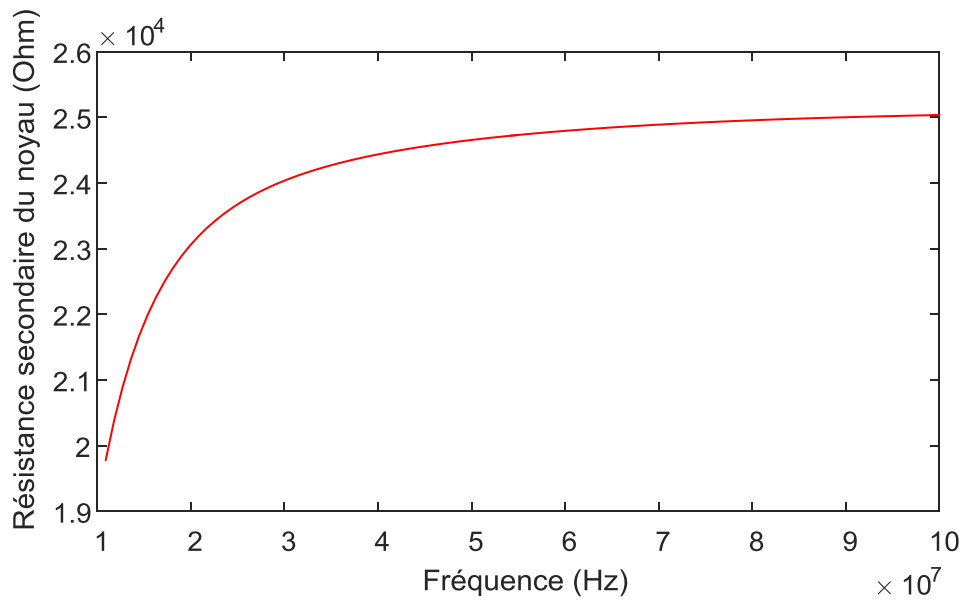


Figure (III.21) : Variation de la résistance secondaire du noyau magnétique en fonction de la fréquence

III.4.4.10. Influence de la variation de la largeur du primaire et du secondaire sur la résistance primaire et la résistance secondaire :

A- Enroulement primaire :

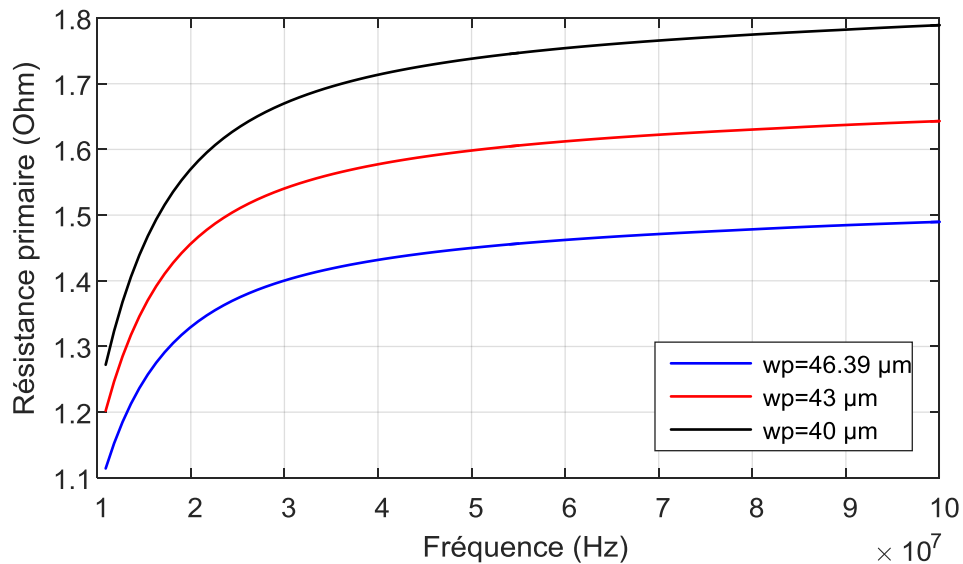


Figure (III.21) : Variation de la résistance primaire en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de la largeur du primaire

B- Enroulement secondaire :

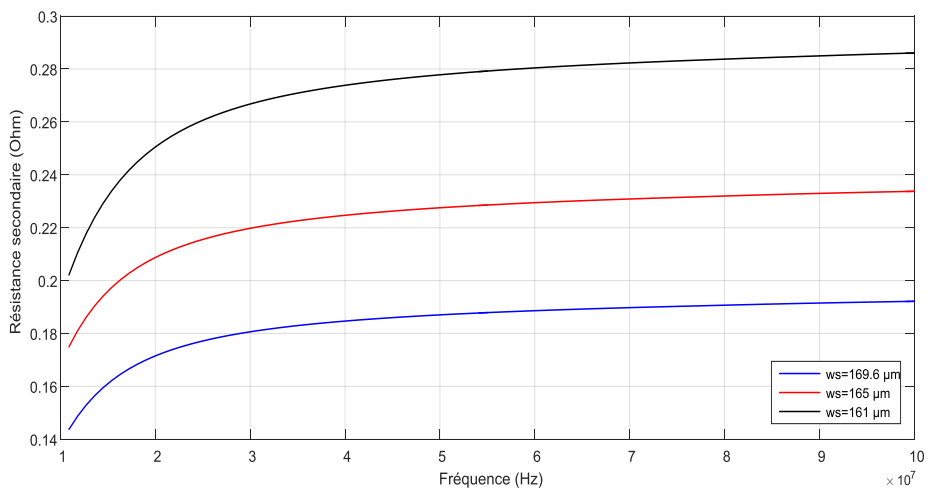


Figure (III.22) : Variation de la résistance en fonction de la fréquence et en fonction de la largeur du secondaire

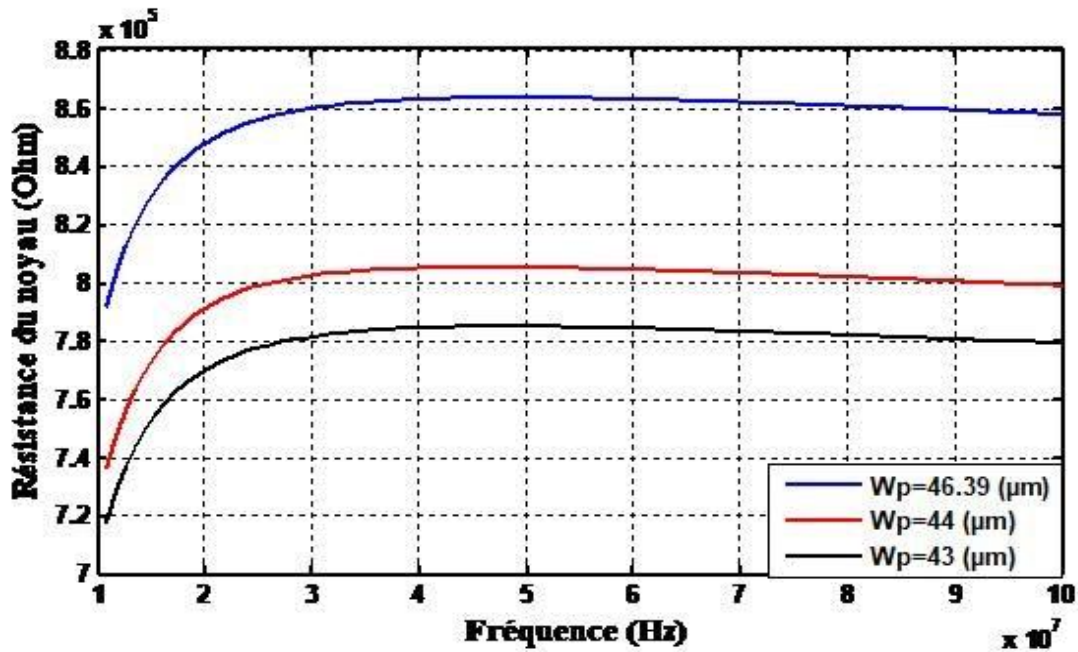


Figure (III.23) : Variation de la résistance du noyau primaire en fonction de la fréquence et en fonction de la largeur du primaire

Interprétation des résultats :

Le changement de la fréquence influence directement sur les paramètres électriques du transformateur planaire (Les résistances et inductance primaire et secondaire) :

Les résistances primaire et secondaire du micro-transformateur varient proportionnellement avec la fréquence, elles augmentent durant le régime transitoire pour se stabiliser en régime permanent.

Par contre, les inductances ont une relation inversement proportionnelle à la fréquence, elles diminuent en augmentant la fréquence. Les valeurs des inductances primaire et secondaire diminuent durant le régime transitoire et tendent à une valeur nul dans le cas des hautes fréquences.

Les valeurs des résistances primaires et secondaires du transformateur augmentent en diminuant les largeurs des enroulements primaires et secondaires.

III.5. Conclusion :

Dans ce dernier chapitre nous avons fait une étude géométrique du transformateur planaire, tout en respectant un cahier de charge donné.

Donc, nous avons dimensionné les différents paramètres géométriques et électriques à travers un programme de calcul sous l'environnement informatique MATLAB. Puis, nous avons utilisé la méthode des éléments finis pour la résolution.

Cette application a pour but de visualiser les courbes de : potentiel vecteur magnétique, induction magnétique, ainsi que l'influence des paramètres géométriques sur les paramètres électriques.

Conclusion général

Conclusion générale

L'objectif de Ce mémoire concerne la modélisation par éléments finis d'un transformateur planaire. L'étude a été menée en hypothèse bidimensionnelle en coordonnées cartésiennes, l'inconnue est le potentiel vecteur magnétique. Notre travail est divisé en trois chapitres dans les quels nous avons étudié le transformateur en général puis en détaillant le transformateur planaire.

Un aperçu général sur les transformateurs : définition, constitution, principe de fonctionnement ainsi que leurs avantages et inconvénients a fait l'objet du premier chapitre.

Le deuxième chapitre, met en valeur les différents phénomènes électromagnétiques qui sont régi par les équations aux dérivées partielles de Maxwell, donc pour résoudre ces équations ce chapitre a pour but d'envisager la méthode des éléments finis utilisée par la suite pour la résolution des équations aux dérivés partielles.

Le dernier chapitre, est consacré au dimensionnement géométrique du transformateur planaire à partir d'un cahier de charge donné, ensuite ses paramètres géométriques ont été utilisés pour extraire les différents paramètres électriques nécessaires, à la création d'un code de calcul par la méthode des éléments finis implanté sous MATLAB.

La dernière partie de ce chapitre d'application, est complété par un calcul qui traite l'influence de la fréquence et les paramètres géométriques sur les paramètres électriques les plus important (Résistance, Inductance). En perspective, nous souhaitons prendre en considération le phénomène thermique qui intervient comme un obstacle majeur au dimensionnement et à la conception des composants qu'ils soient actifs ou passifs.

Bibliographie

Références bibliographiques :

- [1] Kahlouche faouzi « fabrication et caractérisation de micro transformateur planaire à couche magnétique » Université Jean Monnet - Saint-Etienne, France 2014
- [2] Khamis Youssouf « Modélisation de transformateur planaire intégré » Thèse Doctorat, Université de Jean Monnet-Saint Etienne, France 2014.
- [3] Jean Daniel Chatelain « traité d'électricité » L'école polytechnique fédérale de Lausanne, Suisse 2005
- [4] Les Théories de Wildi et autres électrotechnique, les presses de l'université Laval 4eme édition 2005.
- [5] Eckhard Spring, "Machines électriques" Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1er édition 1994
- [6] Jean Jacques Rousseau « Transformateur planaire intégré à couches magnétiques : Conception et Réalisation » 2016.
- [7] Yousfi Ghania « évaluation des propriétés physiques des matériaux composites par une technique d'homogénéisation » mémoire magister, UMMTO, Algérie 2010.
- [8] Amoumen Manel Naima, Benras Imen « modélisation des phénomènes électromagnétiques d'une micro-pompe magnétohydrodynamique à conducteur » mémoire master Académique Université Kasdi Merbah, Algérie 2016.
- [9] R.P. Ribas , J Lescot, J-L leclerqu, J.M Karam, F. Ndagijimana «Micro-spirales planes micro-usinées et transformateurs» ; IEEE trans. 2004
- [10] Y. Maycvskiy "Analyse et modélisation de transformateurs monolithiques sur puce et de substrats en silicium" Moscow, 1999.
- [11] Clément Nadal « Contribution à la conception et la modélisation du transformateur piézoélectrique dédié à la génération de plasma » Institut National Polytechnique de Toulouse - INPT, France 2011.
- [12] Mikail Kastenko, Piotrovsky « Machines électriques, ti, machine à CC, transformateur » Edition de Moscow 1969, 3eme Edition 1979.
- [13] Yahiaoui Abdelghani « contribution à l'étude et à l'analyse du régime transitoire dans les transformateurs de puissance » mémoire Magister UMMTO, Algérie 2012.

[14] Fatima Djelfaf « caractérisation large bande diélectrique et magnétique de couches minces et de substrats » thèse de doctorat, Université Farhat ABBAS, Algérie 2012.

[15] M'zali Nabil « Etude des problèmes de la comptabilité électromagnétique dans un circuit imprimé » mémoire de magister, UMMTO, Algérie 2014.

[16] Belkhiri Yamina « Modélisation des phénomènes électromagnétiques et mécaniques couplés par la méthode des volumes Finis » Magister Université de Batna, Algérie.

[17] Habi Saliha, Hafsi Fatima « Etude et calcul de la force statique d'un électro-aimant à noyau plongeur » mémoire master Académique Université Kasdi Merbah, Algérie 2015.

[18] Derkaoui Mokhtaria « intégration d'un transformateur dans une alimentation à découpage de type flyback » Université d'Oran, Algérie 2015.

[19] BOURICHA Mohamed, LOUNES Abdelkader « Etude et conception d'un micro-transformateur intégré » mémoire Master, UMMTO, Algérie 2017.

Annexe

\vec{D} : Vecteur induction électrique (déplacement électrique) [C/m²],

\vec{E} : Vecteur champ électrique [V/m].

\vec{B} : Induction magnétique [T].

\vec{H} : Vecteur champ magnétique [A/m].

\vec{J}_{con} : Densité de courant de conducteur électrique.

ϵ_0 : Permittivité absolue du vide [F / m]

ϵ_r : Permittivité relative du milieu.

\vec{B}_r : est le champ rémanent lorsque le champ inducteur est nul.

J_s : la densité de courant source [A/m²].

\vec{E} : est le champ électromoteur.

\vec{V} : est la vitesse de déplacement du milieu en mouvement [m/s].

\vec{V} : est la vitesse de déplacement du milieu en mouvement [m/s].

Q_{int} : Charge libre à l'intérieur de la surface fermée.

K_s : La densité de courant portée par la surface de séparation.

ρ_s : La densité de charges portée par la surface de séparation.

\vec{n} : La normale à l'interface.

J_s =densité de courant de source.

J_{ind} : densité de courant induit.

w_p et w_s : les largeurs des enroulements du primaire et du secondaire.

t_p et t_s : les épaisseurs des conducteurs primaires et secondaires.

s_p et s_s : les inter-spices du primaire et du secondaire.

n_p, n_s : le nombre de tours primaire et secondaire.

l_p, l_s les longueurs total des conducteur primaire et secondaire

d_{out} : La distance extérieur

d_{int} : La distance intérieur

e : Epaisseur du noyau

δ : Epaisseur de peau

L_p, L_s : inductances primaire et secondaire .

R_{sp}, R_{ss} : résistances série des enroulements primaire et secondaire .

C_{sp}, C_{ss} : capacités inter-spices primaire et secondaire .

C_{ps1} : capacité de couplage entre l'inductance primaire et secondaire.

C_{ps2} : capacité de couplage entre l'inductance secondaire et primaire.

C_{oxp} , C_{oxs} : capacités associées à la couche d'isolation oxyde pour le primaire et le secondaire .

R_{magp} , R_{mags} : résistances associées au noyau magnétique pour le primaire et le secondaire .

C_{subp} , C_{subs} : Les capacités associées aux substrats pour le primaire et le secondaire

R_{subp} , R_{subs} : Les résistances associées aux substrats pour le primaire et le secondaire .

Résumé

L'objectif de Ce mémoire concerne la modélisation par éléments finis d'un transformateur planaire. L'étude a été menée en hypothèse bidimensionnelle en coordonnées cartésiennes, l'inconnue est le potentiel vecteur magnétique. Notre travail est divisé en trois chapitre :

Un aperçu général sur les transformateurs en premier chapitre : définition, constitution, principe de fonctionnement ainsi que leurs avantages et inconvénients a fait l'objet du premier chapitre.

Le deuxième chapitre, met en valeur les différents phénomènes électromagnétiques qui sont régi par les équations aux dérivées partielles de Maxwell

Le dernier chapitre, est consacré au dimensionnement géométrique du transformateur planaire à partir d'un cahier de charge donné, ensuite ses paramètres géométriques ont été utilisés pour extraire les différents paramètres électriques nécessaires, à la création d'un code de calcul par la méthode des éléments finis implanté sous MATLAB.