

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud MAMMERRI, Tizi-Ouzou



Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département d'Automatique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention du diplôme

de MASTER ACADEMIQUE EN AUTOMATIQUE
OPTION : COMMANDE DES SYSTEMES

Thème

**Résolution de l'équation d'Hamilton –Jacobi-Bellman
par la méthode d'itérations variationnelles**

Proposé par : Mr A. Maidi

Présenté par : Alili Samir

Dirigé par : Mr A. Maidi

Aliche Djamal

Si Kadir Meziane

Soutenu le : / 07 /2013

Promotion 2013

Remerciements

Nous remercions Dieu de nous avoir aidés à réaliser ce travail.

Au terme de ce modeste travail nous tenons à remercier chaleureusement tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce projet de fin d'étude.

Nos vifs remerciements vont tous d'abord à notre promoteur Mr. Ahmed Maidi qui nous a encadré tout le long de ce projet et qui nous a apporté beaucoup de connaissances dans ce vaste domaine.

Tout notre respect et nos remerciements vont vers les membres du jury qui vont pleinement consacrer leur temps et leur attention afin d'évaluer notre travail, qui espérons le sera à la hauteur de leur attente.

Enfin, nos remerciements les plus sincères sont adressés à tous les professeurs, l'administration et le personnel de l'Automatique qui ont contribué à forger nos connaissances.

DEDICACE

A mes parents, qui sont mes plus chères auxquels je ne serais jamais exprimer ma gratitude et ma reconnaissance en quelques lignes, je leurs dédie ce modeste travail, que dieu le tout puissant les protège.

Pour ton amour, ton affection et ton soutien, pour ton courage et ton sacrifice, je te dédie, pour la deuxième et mille fois, chère mère ce modeste résultat.

A mes chères frères et sœurs.

Tous mes amis.

Et à tous mes camarades de la promotion « Automatique » 2012/2013.

Djamal.

DEDICACE

A mes parents, qui sont mes plus chères auxquels je ne serais jamais exprimer ma gratitude et ma reconnaissance en quelques lignes, je leurs dédie ce modeste travail, que dieu le tout puissant les protège.

Pour ton amour, ton affection et ton soutien, pour ton courage et ton sacrifice, je te dédie, pour la deuxième et mille fois, chère mère ce modeste résultat.

A mes chères frères et sœurs.

Tous mes amis.

Et à tous mes camarades de la promotion « Automatique » 2012/2013.

Meziane.

DEDICACE

Je dédie ce travail à

La mémoire de mon père, que dieu t'accueille dans son vaste paradis.

Ma très chère mère.

Mes très chères sœurs.

Tous mes ami(e)s.

Et à tous mes camarades de la promotion « Automatique » 2012/2013.

Samir.



Sommaire

Sommaire

Introduction générale	1
------------------------------------	---

Chapitre I: formulation d'un problème de commande optimale

I.1. Introduction.....	3
I.2. Problème de commande optimale.....	3
I.3. Formulation mathématique d'un problème de commande optimale.....	4
I.3.1. Mise en équation du système (modèle du procédé).....	5
I.3.2. Conditions terminales.....	5
I.3.3. Contraintes	5
I.3.3.1 Contraintes instantanées.....	6
I.3.3.2. Contraintes intégrales.....	6
I.3.4. Critère de performance.....	7
I.3.5. Exemple illustratif	10
I.4. Conclusion.....	12

Chapitre II. Méthodes de résolution d'un problème de commande optimale

II.1. Introduction.....	13
II.2. Méthodes de résolution d'un problème de commande optimale	13
II.2.1. Calcul des variations	13
II.2.1.1. Principe du calcul des variations.....	13
II.2.1.2. Principe du minimum de Pontriaguine.....	17
II.2.2. Programmation dynamique.....	19
II.2.2.1. Principe de Bellman.....	19
• Equation fonctionnelle de Bellman.....	22
• Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman.....	23
II.3. Exemple illustratif.....	24
II.4. Conclusion.....	26

Chapitre III : Résolution des équations différentielles par la méthode d'itérations variationnelles

III.1. Introduction.....	27
III.2. Equations différentielles ordinaires (EDOs).....	27
III.2.1. Définition.....	27
III.2.2. Ordre d'une équation différentielle ordinaire.....	28
III.2.3. Classification des équations différentielles ordinaires.....	28

III.2.3.1. Equation différentielle ordinaire linéaire et non linéaire.....	28
III.2.3.2. Equation différentielle ordinaire homogène et non homogène.....	28
III.3. Equations différentielles partielles (EDPs).....	29
III.3.1. Définition.....	29
III.3.2. Ordre d'une équation différentielle partielle.....	29
III.3.3. Classification des équations différentielles partielles.....	29
III.3.3.1. Equation différentielle partielle linéaire et non linéaire.....	29
III.3.3.2. Equation différentielle partielle homogène et non homogène.....	30
III.4. Méthode d'itération variationnelle (VIM).....	30
III.4.1. Application de la méthode d'itérations variationnelles pour la résolution des équations différentielles.....	31
III.4.1.1. Résolution des Equations différentielles ordinaires par la méthode d'itérations variationnelles.....	32
III.4.1.2. Exemples illustratifs.....	33
III.4.2.1. Résolution des Equations Différentielles aux dérivées Partielles par la méthode d'itérations variationnelles.....	37
III.4.2.2. Exemples illustratifs.....	38
III.5. Conclusion	42

**Chapitre IV. Application de méthode d'itérations variationnelles pour la
résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman.**

VI.1. Introduction.....	43
VI.2. Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman.....	43
VI.3. Résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman par la méthode d'itérations variationnelles.....	44
IV.4. Algorithme de résolution d'un problème de commande optimale par la méthode d'itérations variationnelles.....	47
IV.5. Exemples d'applications.....	48
IV.6. Conclusion.....	59
Conclusion générale.....	60

Bibliographie.



Nomenclature

La nomenclature utilisée est la suivante

t	: Temps
t_0	: Instant initial
t_f	: Instant final
T	: Horizon
$x(t) \in R^m$: Vecteur d'état
x_0	: État initial
x_f	: État final
$x^*(t)$: Trajectoire optimale
$x^d(t)$: État désiré
$u(t) \in R^n$: Vecteur de commande
$u^*(t)$: Commande optimale
U_{ad}	: Domaine admissible
g	: Contraintes instantanées
h	: Contraintes intégrales
J	: Critère de performance
J^*	: Cout optimale
B, R, Q	: Matrices symétriques définies positives
B^T, R^T, Q^T	: transposées des matrices B, R, Q respectivement
V	: Solution approchée de VIM

H	: Équation d'Hamilton
λ	: Multiplicateur de Lagrange
n_h	: Nombre de contraintes intégrales
n_g	: Nombre de contraintes terminales
φ	: Fonction de Lagrange
ψ	: Partie terminale
$I(t)$: Intensité du courant
R	: Résistance
C	: Capacité
L	: Inductance
$I_c(t)$: Intensité du courant aux bornes de la capacité
$I_L(t)$: Intensité du courant aux bornes de l'inductance



Introduction Générale

La théorie de commande optimale est apparue après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique de vol. C'est une discipline mathématiquement stimulante et pratiquement importante, elle est utilisée dans diverses branches à savoir l'ingénierie, l'économie et la finance.

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés c'est-à-dire les systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir par l'intermédiaire d'une fonction auxiliaire appelée fonction de commande ou de contrôle. Le but est alors de ramener le système d'un état initial à un état final tout en satisfaisant les contraintes imposées et en minimisant un certain critère de performance.

L'obtention de lois de commandes optimales passe souvent par la résolution des équations d'Hamilton-Pontriaguine (principe du minimum) ou de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (programmation dynamique). Cette dernière est généralement non linéaire et sa solution analytique est souvent impossible. Pour surmonter cette difficulté, des méthodes numériques sont utilisées mais leur usage se voit limité vu la nature des équations et le couplage existant entre les différentes équations du problème final à résoudre.

L'objectif de ce travail consiste à proposer une démarche pour synthétiser une loi de contrôle optimale pour un système dynamique donné basée sur la méthode d'itération variationnelle. Cette approche permet de résoudre l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman d'une manière itérative ce qui permet d'avoir une solution approximée.

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres :

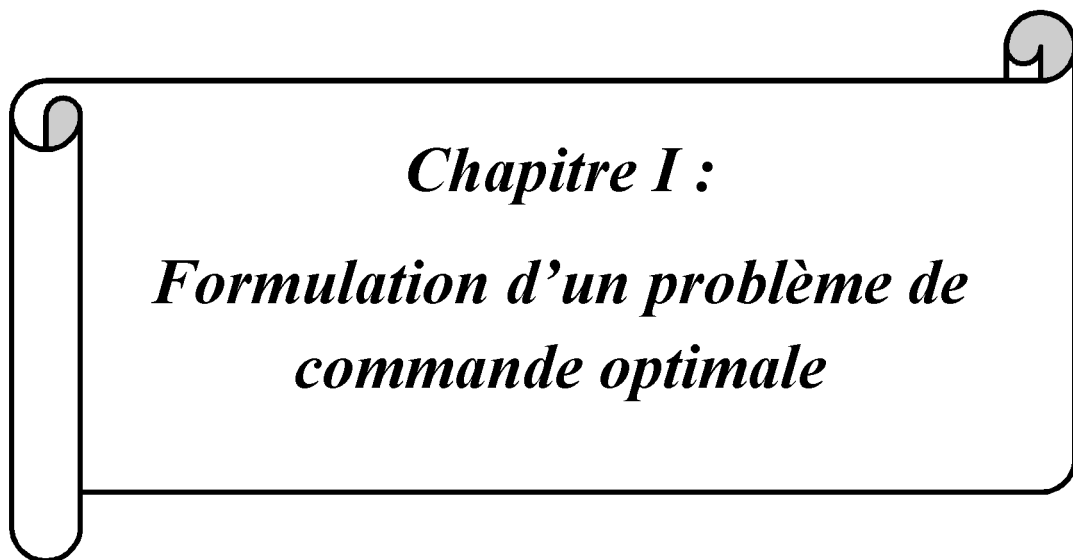
Le premier chapitre est consacré à l'illustration de certains concepts de base relatifs à un problème de contrôle optimale et la démarche suivie pour sa formulation mathématique.

Le second chapitre a pour but la présentation des différentes méthodes de résolution d'un problème de commande optimale, l'accent a été mis sur la programmation dynamique et en particulier l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman.

Dans le troisième chapitre des généralités sur les équations différentielles ordinaires et partielles sont présentées ainsi que le principe de la méthode d'itération variationnelle. Cette dernière est utilisée par la suite pour la résolution de ces équations.

Le quatrième chapitre présente une approche pour synthétiser une loi commande optimale en passant par la résolution de l'équation d'HJB correspondante par la méthode d'itération variationnelle.

Le mémoire se termine par une conclusion générale.



Chapitre I :
Formulation d'un problème de
commande optimale

I.1. Introduction

La théorie de commande optimale représente un ensemble de théorie permettant de synthétiser des commandes permettant d'amener le système d'un état initial donné à un état final qui peut être libre ou fixe, tout en respectant certaines contraintes et en minimisant un critère de performance.

Ce chapitre est consacré à la présentation de certains concepts de base relatifs à un problème de commande optimale en s'appuyant sur sa formulation mathématique.

I.2. Problème de commande optimale

Le problème de commande optimale consiste à déterminer la meilleure commande qui permet à la fois :

- de vérifier les conditions terminales (initiales et finales)
- de satisfaire de diverses contraintes imposées
- d'optimiser un critère bien choisi

La formulation mathématique d'un problème de commande optimale est la suivante

Soit le système dynamique décrit par l'équation d'état

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \tag{I.1}$$

Cette équation est en générale non linéaire, de plus le vecteur de commande doit appartenir à un ensemble de vecteurs de commandes admissibles

$$u(t) \in U_{ad}(t)$$

Le problème de commande consiste à déterminer la fonction u qui minimise le critère de performance

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) \quad (I.2)$$

Mathématiquement le problème de commande optimale se traduit comme suit

$$\min J(u(t))$$

Sujet à :

$$u(t) \in U_{ad}(t) \quad (I.3)$$

Et l'équation d'état (I.1)

La solution u_{opt} de (I.3) quand elle existe, est appelée contrôle ou commande optimale et la fonction x_{opt} correspondante solution de (I.1) est appelée trajectoire optimale.

Remarque I.1

1. L'existence d'une commande optimale satisfaisant un objectif donné suppose que le processus soit commandable et observable, hypothèse qui sera faite implicitement de façon systématique dans ce mémoire. De plus le système étudié est continu avec un comportement dynamique non linéaire.

I.3. Formulation mathématique d'un problème de commande optimale

La formulation mathématique d'un problème de commande optimale exige une description mathématique du problème à contrôler, la définition des conditions terminales, la spécification des contraintes physiques et la détermination du critère de performance.

I.3.1. Mise en équation du système (modèle du procédé)

C'est un objet mathématique (sous forme d'un système d'équations différentielles ou des dérivées partielles), destiné à représenter le comportement dynamique d'un système et à simuler son évolution.

De nombreux systèmes dynamiques peuvent être ramenés à une formulation par une équation d'état de la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (\text{I.4})$$

Où $x(t)$ est l'état du système à l'instant t ,

$u(t)$, représente la commande excitant le système à l'instant t ,

f , est une fonction vectorielle

Avec : $t \in R$, $x(t) \in R^m$, $u(t) \in R^n$.

I.3.2. Conditions terminales

Les conditions aux limites (terminales) caractérisent à la fois l'état du système à l'instant initial t_0 noté $x_0 = x(t_0)$ et son état à l'instant final t_f noté $x_f = x(t_f)$

L'instant final et l'état final peuvent être fixes ou libres (partiellement ou entièrement).

I.3.3. Contraintes

On distingue deux types de contraintes.

I.3.3.1 Contraintes instantanées

Généralement, elles caractérisent les limitations physiques sur l'état ou sur la commande du système. Ces contraintes doivent être respectées à chaque instant t .

Ce type de contraintes s'exprime par des inégalités de la forme

$$g(x(t), u(t), t) \leq 0 ; g \in R^{n_g} \quad (I.5)$$

Où n_g est le nombre de contraintes

On peut ramener ses contraintes de type inégalités à des contraintes de type égalités, tout en introduisant une fonction auxiliaire $v(t)$ de la forme :

$$g(x(t), u(t), t) + v(t)^2 = 0 \quad (I.6)$$

I.3.3.2. Contraintes intégrales

Dans la plupart des cas, elles sont liées à des limitations de ressources ou à des limitations de nos actions. Ces contraintes doivent être vérifiées sur tous l'horizon de commande.

Ces contraintes sont exprimées sous la forme :

$$\int_{t_0}^{t_f} h(x(t), u(t), t) dt \leq 0 ; h \in R^{n_h} \quad (I.7)$$

Où : n_h est le nombre de contraintes ;

De même, ces dernières peuvent être ramenées à des contraintes de type égalités données sous la forme :

$$\int_{t_0}^{t_f} [h(x(t), u(t), t) + w(t)^2] dt = 0 \quad (I.8)$$

I.3.4. Critère de performance

Ce critère doit être choisi avec soin selon les objectifs désirés, il permet la prise en compte des états initiaux et finals et l'ensemble des valeurs de l'état ou de la commande à chaque instant t . Il est donné sous la forme suivante :

$$J = \underbrace{\Psi(x_0, t_0, x_f, t_f)}_{\text{partie terminale}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) dt}_{\text{partie integrale}} \quad (I.9)$$

La partie terminale correspond à la détermination d'une commande terminale, par contre la partie intégrale exprime les objectifs à optimiser sur tout l'horizon de commande.

Selon la forme, on distingue :

- Problème de Mayer (partie terminale)

$$J = \underbrace{\Psi(x_0, t_0, x_f, t_f)}_{\text{partie terminale}}$$

- Problème de Lagrange (partie intégrale)

$$J = \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) dt}_{\text{partie integrale}}$$

- Problème de Bolza : c'est la combinaison des deux parties (terminales et intégrales)

$$J = \underbrace{\Psi(x_0, t_0, x_f, t_f)}_{\text{partie terminale}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) dt}_{\text{partie integrale}}$$

Selon le type de la problématique posée, beaucoup de critères de performances existent, parmi eux, on peut citer

- Commande en temps minimal

Il s'agit de minimiser le temps lorsque le système passe de l'état initial $x(t_0)$ à l'état final $x(t_f)$. Mathématiquement, cet objectif se traduit par

$$J = T = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \quad (\text{I. 10})$$

- Commande terminale

Il s'agit de minimiser à l'instant final (t_f) un certain objectif donné. Le critère à optimiser s'écrit :

$$J = [x(t_f) - x^d(t_f)]^T B [x(t_f) - x^d(t_f)] \quad (\text{I. 11})$$

$$\text{Avec} \quad B = B^T \quad ; B \geq 0$$

- Commande à énergie minimale

Le but est de minimiser l'énergie lorsque le système passe d'un état initial $x(t_0)$ à l'état final $x(t_f)$. Le critère correspondant est donné par

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [u(t)]^T R [u(t)] dt \quad (\text{I. 12})$$

$$\text{Avec} \quad R = R^T \quad ; R \geq 0$$

Pour un système monovariante, on aura

$$J = \int_{t_0}^{t_f} R u^2(t) dt \quad (\text{I. 13})$$

- Poursuite de trajectoire

Il faut qu'à chaque instant $t \in [t_0, t_f]$, l'état $x(t)$ du système soit maintenue proche de l'état désiré $x^d(t)$. Dans ce cas le critère s'écrit comme suit

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [x(t) - x^d(t)]^T Q [x(t) - x^d(t)] dt \quad (\text{I. 14})$$

Avec : $Q=Q^T, \quad Q \geq 0$

- Régulation :

C'est un cas particulier de la poursuite en prenant $x^d(t) = 0$. Le critère correspondant est le suivant :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [x(t)]^T Q [x(t)] dt \quad (\text{I. 15})$$

Avec : $Q=Q^T, \quad Q \geq 0$

Remarques I.2

1. Généralement, les conditions initiales sont fixées et connues et les conditions finales sont établies en fonction du but que l'on se propose d'atteindre.
2. L'horizon de commande $T = t_f - t_0$ du changement de d'état peut être fixe ou libre.

I.3.5. Exemple illustratif

Afin d'illustrer toutes les étapes de la formulation mathématique d'un problème de commande optimale citées auparavant, considérons l'exemple suivant

On désire déterminer la commande optimale $I(t)$ permettant de transférer le système d'un état initial à un état final, à l'instant t_f , caractérisé par une tension aux bornes de la capacité C de 1V et un courant de 0A dans l'inductance L tout en minimisant la perte d'énergie par effet joule dans la résistance R. A l'instant $t=0s$, on ferme T.

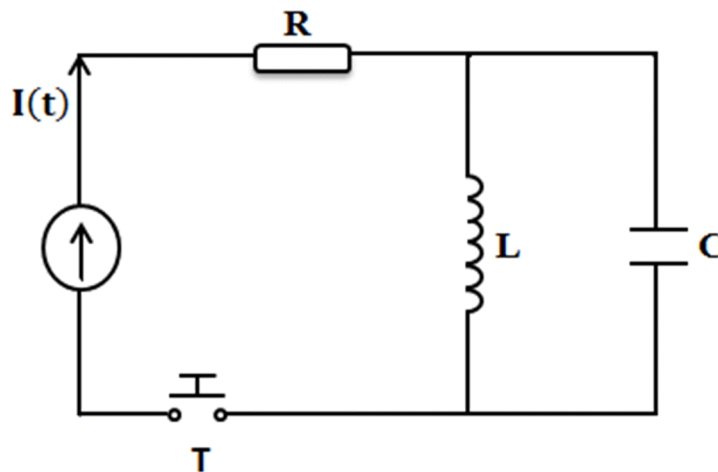


Figure I.1 :Circuit électrique.

Variables caractéristiques :

$$u(t) = I(t), x_1(t) = I_L(t), x_2(t) = U_c(t)$$

Les équations qui régissent le comportement dynamique du circuit électrique :

$$I(t) = I_L(t) + I_c(t) \quad (I.16)$$

$$U_c(t) = L \frac{dI_L(t)}{dt} \quad (I.17)$$

$$I_c(t) = C \frac{dU_c(t)}{dt} \quad (I.18)$$

On a

$$\frac{dI_L(t)}{dt} = \frac{1}{L}U_c(t) \quad (I.19)$$

$$\frac{dU_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}I_c(t) = \frac{1}{C}[u(t) - I_L(t)]$$

1. Modèle

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{L}x_2(t) \quad (I.20)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{C}[u(t) - x_1(t)]$$

2. Conditions terminales

$$x(0) = \begin{bmatrix} I_L(0) \\ U_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (I.21)$$

$$x(t_f) = \begin{bmatrix} I_L(t_f) \\ U_c(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Critère à optimiser

$$E(t) = \int_0^{t_f} RI^2(t)dt = \int_0^{t_f} Ru^2(t)dt \quad (I.22)$$

Par conséquent le problème de commande optimale peut être formulé comme suit :

$$\min J(u) = \int_0^{t_f} R u^2(t) dt$$

Sujet à :

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{L} x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{C} [u(t) - x_1(t)] \quad (\text{I.23})$$

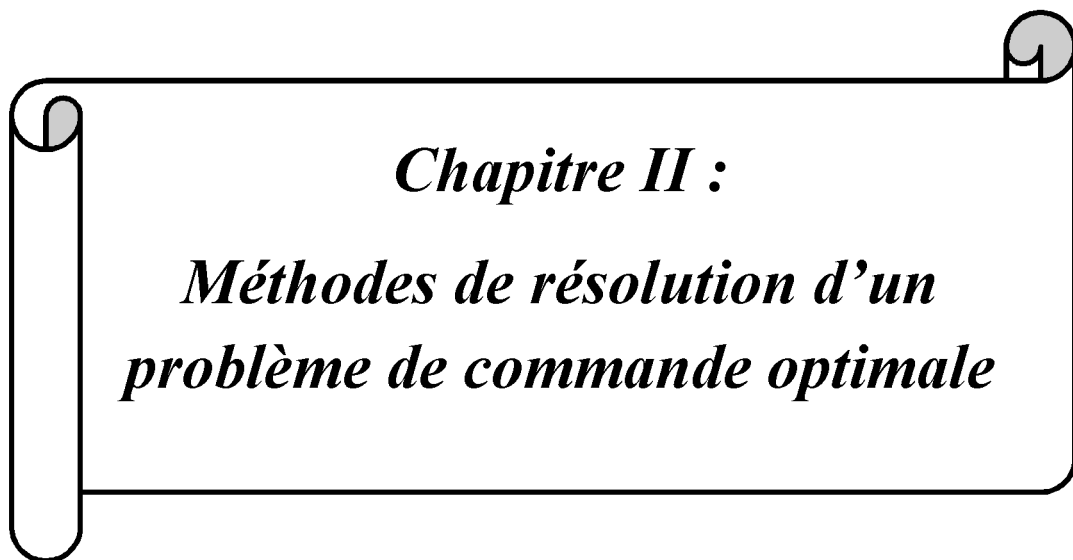
$$x(0) = \begin{bmatrix} I_L(0) \\ U_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x(t_f) = \begin{bmatrix} I_L(t_f) \\ U_c(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

I.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté brièvement les concepts de base et la démarche suivie pour la formulation d'un problème de commande optimale.

Dans le chapitre suivant, on présente deux méthodes de résolution d'un problème de commande optimale, à savoir le principe du minimum de Pontriaguine et la programmation dynamique basée sur principe d'optimalité de Bellman.



Chapitre II :
*Méthodes de résolution d'un
problème de commande optimale*

II.1. Introduction

Les technologies actuelles cherchent de plus en plus à traiter des systèmes complexes, constitués par un grand nombre de paramètres liés les uns aux autres par une structure bien déterminée, et aussi la recherche de performances évoluées et des performances optimales.

Pour un système dynamique donné et dont les équations sont connues, le problème de commande optimale consiste alors à trouver la commande, minimisant ou bien maximisant un critère donnée, en suivant une meilleur stratégie et des méthodes de résolution adéquates. C'est sous cette forme que la commande optimale a été étudiée.

Dans ce chapitre, on s'intéresse, dans la première partie, à deux principes mathématiques permettent de traiter les problèmes de commande optimale : le calcul des variations et le principe du minimum de Pontriaguine. Dans la seconde partie, on présente la programmation dynamique initiée par Richard Bellman. En premier lieu, on donne le principe de Bellman, puis on s'intéresse à sa forme continue qui conduit à l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman.

II.2. Méthodes de résolution du problème de commande optimale

La théorie de la commande optimale propose des méthodes mathématiques permettant d'étudier des systèmes complexes. Une partie de cette théorie s'appuie sur le calcul des variations et le principe de Bellman.

II.2.1. Calcul des variations

II.2.1. 1. Principe du calcul des variations

Le calcul des variations est une branche assez ancienne de la théorie de l'optimisation qui a connue de nombreuses applications en physique et en géométrie, de plus c'est une excellente théorie très exploitée pour résoudre les problèmes de la commande optimale.

Cette méthode permet de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir la trajectoire $x^*(t)$ qui représente l'optimum d'une fonctionnelle.

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), \dot{x}(t), t) dt. \quad (\text{II. 1})$$

- **Notion de la fonction et de la fonctionnelle**

- **Notion de la fonction**

Soit $x(t)$ une fonction définie comme

$$\begin{aligned} x(t): R^+ &\rightarrow R \\ t &\rightarrow x(t) \end{aligned}$$

On a $x(t)$ dépend d'une seule variable $t \in R^+$

- **Notion de la fonctionnelle**

L'équation (II. 1) représente une fonctionnelle et $\varphi(x(t), \dot{x}(t), t)$ est une fonction supposée au moins de classe 2. On dit aussi une fonction de fonction.

- **Notion d'incrément d'une fonction et de la fonctionnelle**

- **Incrément d'une fonction**

Il est donné comme suit

$$\Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t)$$

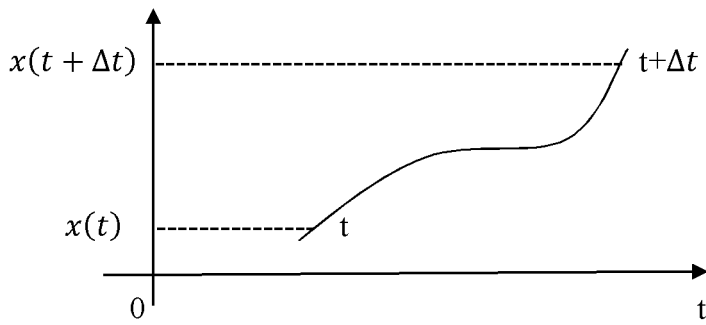


Figure II.1 trajectoire de x en fonction de t .

○ **Incrément d'une fonctionnelle**

Il est défini comme suit

$$\Delta J(x(t), \partial x(t)) = J(x(t) + \partial x(t)) - J(x(t)). \quad (\text{II. 3})$$

Tel que

$$J(x(t) + \partial x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t) + \partial x(t), \dot{x}(t) + \partial \dot{x}(t), t) dt. \quad (\text{II. 4})$$

Appliquant le théorème de calcul des variations, on aura

$$\varphi(x + \partial x, \dot{x} + \partial \dot{x}, t) = \varphi(x(t), \dot{x}(t), t) + [\partial x(t) \quad \partial \dot{x}(t)] \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi(x(t), \dot{x}(t), t)}{\partial x(t)} \\ \frac{\partial \varphi(x(t), \dot{x}(t), t)}{\partial \dot{x}(t)} \end{bmatrix}. \quad (\text{II. 5})$$

D'après les équations (II. 4) et (II. 5) on obtient

$$\Delta J(x(t), \partial x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left([\partial x(t) \quad \partial \dot{x}(t)] \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi(x(t), \dot{x}(t), t)}{\partial x(t)} \\ \frac{\partial \varphi(x(t), \dot{x}(t), t)}{\partial \dot{x}(t)} \end{bmatrix} \right) dt. \quad (\text{II. 6})$$

Le développement de l'équation (II. 6) conduit à la formule générale suivante

$$\Delta J(x(t), \partial x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left(\left[\frac{\partial \varphi(x(t), \dot{x}(t), t)}{\partial x(t)} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \varphi(x(t), \dot{x}(t), t)}{\partial \dot{x}(t)} \right] \right] \partial x(t) \right) dt + \left[\frac{\partial \varphi(x(t), \dot{x}(t), t)}{\partial \dot{x}(t)} \partial x(t) \right]_{t_0}^{t_f} \quad (\text{II. 7})$$

- **Recherche d'un optimum par calcul des variations**

Pour déterminer la loi de contrôle optimale d'un système dynamique, il faut mettre la fonction à intégrer égale à zéro, par conséquent

$\Delta J(x(t), \partial x(t)) = 0$ Consiste à imposer

$$\frac{\partial \varphi(x(t), \dot{x}(t), t)}{\partial x(t)} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \varphi(x(t), \dot{x}(t), t)}{\partial \dot{x}(t)} \right] = 0 \quad (\text{II. 8})$$

$$\left[\frac{\partial \varphi(x(t), \dot{x}(t), t)}{\partial \dot{x}(t)} \partial x(t) \right]_{t_0}^{t_f} = 0. \quad (\text{II. 9})$$

Remarque II.1

- 1) L'équation (II. 8) représente l'équation d'Euler-Lagrange.
- 2) L'équation (II. 9) représente la condition aux limites suivantes

Si $x(t_f)$ est imposé

$$\partial x(t_f) = 0.$$

Si $x(t_f)$ est libre

$$\left. \frac{\partial \varphi(x(t), \dot{x}(t), t)}{\partial \dot{x}(t)} \right|_{t=t_f} = 0.$$

Notons que $\partial x(t_0) = 0$, car l'état initial est toujours connu.

II.2.1. 2. Principe du minimum de Pontriaguine

Le principe du minimum est un résultat classique de la commande optimale et se trouve souvent utilisé dans la résolution des problèmes de commande optimale.

Le problème de commande optimale est formulé comme

$$\min_{u(t)} J(x(t), u(t), t) = \int_{t_0}^{t_f} \varphi(t, x(t), u(t)) dt + \Psi(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)). \quad (\text{II. 10})$$

soit à

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t).$$

$$x(t_0) = x_0.$$

$$x(t_f) = x_f, \text{ avec } t_f \text{ est fixe ou libre } x(t_f) = ?$$

Où

$x(t) \in R^n$ Est le vecteur d'état

$u(t) \in R^m$ Est le vecteur de commande

$J(x(t), u(t), t)$ Est le critère à minimiser

Le vecteur d'état $x(t)$ et le vecteur de commande $u(t)$ sont liés par le modèle d'état

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t).$$

On définit l'équation d'Hamilton du système comme

$$H(x, u, \lambda, t) = \varphi(x(t), u(t), t) + \lambda^T f(x(t), u(t), t). \quad (\text{II. 11})$$

Le principe du minimum de Pontriaguine énonce que la trajectoire optimale minimise l'équation d'Hamilton du système.

C'est-à-dire

$$H^*(x^*, u^*, \lambda^*) = \min_u H(x, u, \lambda). \quad (\text{II. 12})$$

- **Equations canoniques d' Hamilton**

Le long de la trajectoire optimale, on dispose d'un certain nombre d'équations permettant de résoudre le problème de commande optimale. Ces équations sont généralement établies en utilisant le calcul des variations.

La commande optimale minimise la fonction d'Hamilton est déterminée par

$$H_u(t, x^*, u^*, \lambda^*) = \frac{\partial H}{\partial u} = 0. \quad (\text{II. 13})$$

Cette loi de commande doit vérifier les conditions de stationnarité suivantes :

Equation d'état

$$H_\lambda(t, x^*, u^*, \lambda^*) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{x}^*(t) = f(t, x^*, u^*). \quad (\text{II. 14})$$

Equation d'état adjointe

$$H_x(t, x^*, u^*, \lambda^*) = \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda}^*(t). \quad (\text{II. 15})$$

Remarque II.2

- 1) Les conditions d'optimalité données par le principe du minimum ne sont que des conditions nécessaires du premier ordre. On doit souvent comparer différentes solutions pour choisir la meilleure

- 2) Pour un vecteur $u^*(t)$ dont les composantes sont singulières, si la condition $\frac{dH_u(x^*, u^*, t)}{du} = 0$ est vérifiée sur un intervalle de temps fini alors $u^*(t)$ est une solution singulière sur $[t_0, t_f]$.
- 3) Résoudre le problème aux deux bouts revient à résoudre les équations d'état et d'état adjointe avec les conditions initiales et finales (méthodes numériques dans les cas généraux : non linéaires et variant dans le temps).
- 4) La résolution du problème aux deux bouts permet de résoudre l'équation de commande pour obtenir la commande optimale $u^*(t)$ en boucle ouverte.
- 5) On peut transformer un problème de minimum en un problème de maximum en changeant le signe de l'équation d'Hamilton.
- 6) Le système de conditions de stationnarité nécessite n constantes à déterminer ainsi, $x(t_0)$ est toujours connu, alors on a $x(t_0) = x_0$ qui permet de déterminer n constantes. Il reste à déterminer les n constantes qui restent, en utilisant l'information due à l'état final. Par conséquent

$$\begin{cases} x_f \text{ est imposé : } x(t_f) = x_f \rightarrow n \text{ constantes à déterminer} \\ x_f \text{ libre : } \nabla_x \Psi^*(x(t_f), t_f) = \nabla_x J^*(x(t_f), t_f) = \lambda^*(t_f) \rightarrow n \text{ constantes à déterminer} \end{cases}$$

II.2.2. Programmation dynamique

La Programmation Dynamique permet d'aborder le problème de commande optimale de façon la plus originale. Elle repose sur le principe d'optimalité de Bellman.

II.2.2.1. Principe de Bellman

Considérant le problème de commande optimale suivant

$$\min_{u(t)} J(x, u, t) = \psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) dt. \quad (\text{II.16})$$

sujet à

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t).$$

Le principe de Bellman énonce que la trajectoire optimale sur $[t_0, t_f]$ contient la trajectoire optimale sur $[t^*, t_f]$ avec comme condition $t^* \in [t_0, t_f]$, $x^* = x(t^*)$. Comme le montre la figure suivante.

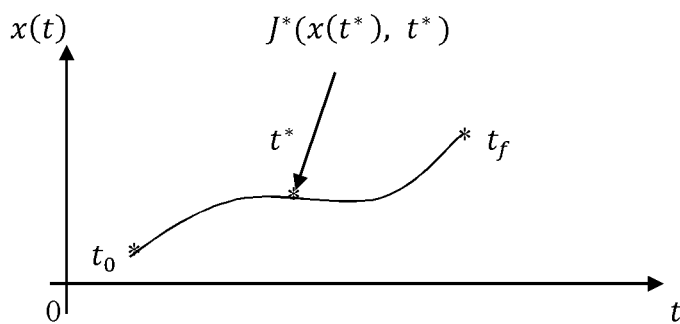


Figure II.2 trajectoire optimale (principe de Bellman)

Le principe général Bellman stipule que la solution d'un problème de commande optimale global peut être obtenue en décomposant le problème en sous-problèmes plus simples à résoudre. Pour éclaircir ce principe, on procède comme suite

Divisant l'intervalle d'intégration en deux parties, et introduisons le t^*

$$J^*(x(t), t) = \min_{u_t^{t^*}} \left(\int_t^{t^*} \varphi((x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right. \\ \left. + \min_{u_{t^*}^{t_f}} \left(\int_{t^*}^{t_f} \varphi((x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \Psi(x(t_f), t_f) \right) \right). \quad (\text{II. 17})$$

Si on pose

$$J^*(x(t^*), t^*) = \min_{u_{t^*}^{t_f}} \left(\int_{t^*}^{t_f} \varphi((x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \Psi(x(t_f), t_f) \right). \quad (\text{II. 18})$$

On aura

$$J^*(x(t), t) = \min_{u_t^{t^*}} \left(\int_t^{t^*} \varphi((x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + J^*(x(t^*), t^*) \right). \quad (\text{II. 19})$$

Tel que

$$t^* = t + \Delta t, \quad x(t^*) = x(t) + \Delta x(t).$$

Introduisant ces termes dans l'équation (II. 19) on obtient

$$J^*(x(t), t) = \min_{u_t^{t^*}} (\varphi((x(t), u(t), t) \Delta t + J^*(x(t) + \Delta x(t), t + \Delta t)). \quad (\text{II. 20})$$

Le principe de Bellman sous sa forme continue conduit à l'équation aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi-Bellman et sous sa forme discret conduit à la l'équation fonctionnelle de Bellman (équation de récurrence).

- **Equation fonctionnelle de Bellman**

Elle s'applique sur tout système dynamique muni d'un critère additif, on l'utilise principalement sur des problèmes formulés en temps discret.

Soit le problème de commande optimale formulé en temps discret suivant

$$\min_{u(k)} J(x(k), k) = \sum_0^K \varphi(x(k), u(k), k) \Delta t + \Psi(x(k), k). \quad (\text{II. 21})$$

Sujet à

$$x(k + 1) = x(k) + f(x(k), u(k), k) \Delta t.$$

Notre objectif est de transférer le système de l'état initial à l'état finale en N étapes, alors l'équation du système écrite en fonction du nombre d'étapes restantes est donnée comme suit

$$x(k - 1) = x(k) + f(x(k), u(k), k) \Delta t. \quad (\text{II. 22})$$

D'après le principe de Bellman, on a

$$J^*(x(k), k) = \min_{u(k)} [\varphi(x(k), u(k), k) \Delta t + J^*(x(k - 1), k - 1)]. \quad (\text{II. 23})$$

En simplifiant le Δt dans l'équation (II. 17), on obtient l'équation fonctionnelle de Bellman suivante

$$J^*(x(k), k) = \min_{u(k)} [\varphi(x(k), u(k), k) + J^*(x(k - 1), k - 1)]. \quad (\text{II. 24})$$

Remarque II.3

- 1) Cette équation est appelée équation de récurrence de Bellman, elle peut être résolue de manière analytique ou numérique.

2) La méthode de résolution analytique est basée sur la démonstration par récurrence, Par contre la méthode de résolution numérique est basée sur la discrétisation de l'état du système en considérant un pas, puis de chercher toutes les commandes possibles.

- **Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman**

L'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman est une équation résultante de la méthode de la programmation dynamique initiée par Richard Bellman. Le principe de Bellman sous sa forme continue conduit à l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman.

Pour formuler l'équation HJB, on procède comme suit

$$J^*(x(t), t) = \min_{u_t^*} (\varphi(x(t), u(t), t) \Delta t + J^*(x(t) + \Delta x(t), t + \Delta t)). \quad (\text{II. 25})$$

Appliquant le théorème de calcul des variations pour développer le terme

$$J^*(x(t) + \Delta x(t), t + \Delta t).$$

On aura

$$J^*(x(t) + \Delta x(t), t + \Delta t) = J^*(x(t), t) + \nabla_x^T J^*(x(t), t) \Delta x + \nabla_t^T J^*(x(t), t) \Delta t. \quad (\text{II. 26})$$

On remplace l'équation (II. 26) dans l'équation (II. 25) on obtient

$$\frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial t} = - \min_{u_t^*} [\varphi(x(t), u(t), t) + \nabla_x^T J^*(x(t), t) \dot{x}(t)]. \quad (\text{II. 27})$$

Introduisant la fonction d'Hamilton définie comme suit

$$H(x(t), u(t), t) = [\varphi(x(t), u(t), t) + \nabla_x^T J^*(x(t), t) \dot{x}(t)]. \quad (\text{II. 28})$$

L'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman formulée comme

$$\begin{cases} \frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial t} + H^*(x(t), \nabla_x^T J^*(x(t), t), t) = 0. \\ J^*(x(t_f), t_f) = \Psi(x(t_f), t_f). \end{cases} \quad (\text{II. 29})$$

Pour calculer la loi de contrôle optimale on résout l'équation canonique d'Hamilton suivante

$$H_u(x(t), u(t), t) = \frac{\partial H}{\partial u} = 0. \quad (\text{II. 30})$$

La commande optimale est donnée comme

$$u^*(t) = F(x(t), \nabla_x^T J^*(x(t), t), t). \quad (\text{II. 31})$$

Le problème revient à déterminer $J^*(x(t), t)$ solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman.

II.3. Exemple illustratif

Considérons le problème de commande optimale suivant

$$\min_u J(x(t), t) = \int_0^1 (x_1^4 + u^2) dt + x^T(1)x(1).$$

sujet à

$$\dot{x}_1 = x_2.$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + u.$$

$$x(0) = [1, 2].$$

Pour déterminer la commande optimale, on doit écrire l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman correspondante au problème de commande optimale.

$$H(x(t), u(t), t) = \varphi(x(t), u(t), t) + \nabla_x^T J^*(x(t), t) \dot{x}(t).$$

Tel que

$$\nabla_x^T J^*(x(t), t) = \left[\frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial x_2} \right].$$

On obtient

$$H(x(t), u(t), t) = (x_1^4 + u^2) + \left[\frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial x_2} \right] \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -2x_2(t) - 3x_2(t) + u(t) \end{bmatrix}.$$

On a

$$-\frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial t} = H^*(x(t), \nabla_x^T J^*(x(t), t), t).$$

Pour calculer H^* il faut d'abord calculer u^* et pour cela on va résoudre l'équation $\nabla_u H = 0$.

Ce qui donne

$$u^*(t) = -\frac{\partial J^*(x(t), t)}{2 \partial x_2}. \quad (\text{II. 32})$$

On remplace $u^*(t)$ dans l'équation d'Hamilton, on aura

$$H^* = H(x(t), u^*(t), t).$$

Donc l'équation d'HJB générale s'écrit comme

$$\begin{aligned} -\frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial t} &= x_1^4 - \frac{1}{4} \left[\frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial x_2} \right]^2 + \frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial x_1} x_2(t) \\ &\quad + \frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial x_2} [-2x_2(t) - 3x_2(t)]. \end{aligned}$$

$$J(x(1), 1) = x^T(1)x(1).$$

Une fois la solution de cette équation aux dérivées partielles $J^*(x(t), t)$ est obtenue, on remplace dans l'expression de la commande (II.32) pour déterminer la commande optimale. Mais cette équation aux dérivées partielles est difficile à résoudre analytiquement. L'objectif de ce mémoire est d'utiliser une méthode itérative permettant de déterminer la solution approximative analytique.

II.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principales méthodes de résolution des problèmes de commande optimale.

L'accent a été mis sur la programmation dynamique en particulier l'équation Hamilton-Jacobi-Bellman. On a vu que la résolution de cette équation aux dérivées partielles est très difficile à déterminer analytiquement et même numérique.

Dans le chapitre suivant, on présente la méthode des itérations variationnelles permettant de résoudre itérativement une équation aux dérivées partielles. L'avantage de cette méthode est la détermination d'une solution approximée analytique. Cette méthode sera exploitée par la suite pour la résolution de l'équation Hamilton-Jacobi-Bellman.



Chapitre III :

*Résolution des équations
différentielles par la méthode
d'itérations variationnelles*

III.1. Introduction

La méthode d'itération variationnelle a reçu beaucoup d'attention en mathématique appliquée, elle a été développée par le mathématicien chinois Ji-Huan He en 1999 puis des améliorations ont été proposées. Cette méthode est largement utilisée par beaucoup de chercheurs pour l'étude des équations différentielles ordinaires et partielles linéaires et non linéaires. La méthode permet de déterminer la solution approximative d'un système d'équations différentielles linéaires et non linéaires, homogènes ou non homogènes.

La méthode converge rapidement et donne des approximations successives de la solution qui convergent vers la solution exacte, si cette dernière existe, autrement une solution analytique approximative ou numérique peut être toujours obtenue avec la précision souhaitée.

Le but de ce chapitre est de présenter la méthode des itérations variationnelle et l'utilisation de cette dernière pour la résolution des équations différentielles ordinaires et partielles.

III.2. Equations différentielles ordinaires (EDOs)

III.2.1. Définition

Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO, d'ordre n est une relation entre une fonction inconnue (solution recherchée) $y(t)$ et ses dérivées $y', y'', \dots, y^{(n)}$ donnée par

$$F(t, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (\text{III.1})$$

Où F n'est pas indépendant de sa dernière variable $y^{(n)}$. On prendra t dans un intervalle I de \mathbb{R} (I peut être \mathbb{R} tout entier).

La résolution de cette équation permet de déterminer la fonction continue $y(t)$ qui vérifie l'équation différentielle ordinaire.

III.2.2. Ordre d'une équation différentielle ordinaire

L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de différentiation auquel une des fonctions inconnues a été soumise.

A titre d'exemple, l'équation différentielle suivante

$$y'' + y' = 1.$$

$$y''' + y'' - y = 0.$$

Sont respectivement des EDOs du deuxième et du troisième ordre.

III.2.3. Classification des équations différentielles ordinaires

Les EDOs sont classées comme linéaire et non linéaire, ainsi on peut aussi les classer selon l'homogénéité (homogène ou non homogène).

III.2.3.1. Equation différentielle ordinaire linéaire et non linéaire

Une équation différentielle de type (III.1) d'ordre n est dite linéaire si elle est de la forme

$$a_n(t)y^n(t) + a_{n-1}(t)y^{n-1}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t). \quad (\text{III.2})$$

Avec tous les $y^{(i)}$ de degré 1 et tous les coefficients dépendent que de t .

Cependant, si l'une de ces conditions n'est pas satisfaite, l'équation est non linéaire.

III.2.3.2. Equation différentielle ordinaire homogène et non homogène

Une équation différentielle ordinaire est dite homogène si chaque terme de l'équation dépend de la variable dépendante y (fonction inconnue) ou l'une de ces dérivées si non elle est dite non homogène.

III.3. Equations différentielles partielles (EDPs)

III.3.1. Définition

L'équation différentielle partielle est une équation qui contient une variable dépendante (fonction inconnue) et ces dérivées partielles. Cette variable dépendante y dépend de plusieurs variables indépendantes (x, z, t, \dots etc).

Et s'écrit

$$y(x, t, \dots). \tag{III. 3}$$

III.3.2. Ordre d'une équation différentielle partielle

L'ordre d'une équation différentielle partielle est le degré de la plus grande dérivée qui apparaît dans l'équation.

Considérons les deux exemples suivant

$$u_x - u_{yy} = -x + u.$$

$$u_{xxx} - u_{yy} = y + x.$$

Qui sont d'ordres 2 et 3 respectivement.

III.3.3. Classification des équations différentielles partielles

En générale les équations différentielles partielles sont classées selon la linéarité et l'homogénéité.

III.3.3.1. Equation différentielle partielle linéaire et non linéaire

Une équation différentielle partielle est dite linéaire si et seulement si elle satisfait les deux conditions suivantes

- La puissance de la variable dépendante (fonction inconnue) et chaque dérivée contenue dans l'équation est d'ordre 1.
- Les coefficients de la variable dépendante et les coefficients de chaque dérivée sont constantes ou en fonction des variables indépendantes.

Cependant, si l'une de ces conditions n'est pas satisfaite, l'équation est non linéaire.

III.3.3.2. Equation différentielle partielle homogène et non homogène

Pour qu'une équation différentielle partielle soit homogène, ces termes doivent dépendre uniquement de la variable dépendante ou l'une de ces dérivées partielles. En revanche si cette condition n'est pas vérifiée elle est dite non homogène.

Remarque III.1

On pourra utiliser x de temps en temps au lieu de t , i.e. $y(t)$ ou $y(x)$.

III.4. Méthode d'itérations variationnelles (VIM)

Dans cette partie, on présente les différentes étapes à suivre pour illustrer les concepts de base de la méthode de VIM.

Considérons l'équation différentielle suivante

$$L(y) + N(y) = g(t). \quad (\text{III. 4})$$

Où L est l'opérateur linéaire, N est l'opérateur non linéaire et $g(t)$ est le terme non homogène.

Pour déterminer la solution de cette équation par la méthode VIM, on introduit une fonctionnelle de correction de l'équation (III. 4) donnée comme suit

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau) \{L(y_n(\tau)) + N(\tilde{y}_n(\tau)) - g(\tau)\} d\tau. \quad (\text{III. 5})$$

Où λ est le multiplicateur de Lagrange, qui peut être identifié de manière optimale par la théorie de calcul des variations. La variable \tilde{y}_n représente la variation restreinte, c'est-à-dire $\delta\tilde{y}_n = 0$.

C'est évident maintenant que les étapes principales de la méthode de VIM demandent en premier lieu la détermination du multiplicateur de Lagrange qui sera identifié d'une façon optimale.

L'intégration par partie est habituellement utilisée pour la détermination du multiplicateur de Lagrange. Dans le cas d'une équation de premier et de second ordre, l'intégration donne

$$\int \lambda(\tau) y'_n(\tau) d\tau = \lambda(\tau) y_n(\tau) - \int \lambda'(\tau) y_n(\tau) d\tau. \quad (\text{III. 6})$$

$$\int \lambda(\tau) y''_n(\tau) d\tau = \lambda(\tau) y'_n(\tau) - \lambda'(\tau) y_n(\tau) + \int \lambda''(\tau) y_n(\tau) d\tau.$$

Les approximations successives $y_{n+1}(t), n \geq 0$ de la solution $y_n(t)$ seront aisément obtenues en utilisant la fonctionnelle de correction en considérant un estimé de départ pour la solution $y_0(t)$. L'approximation initiale doit être choisie d'une manière à satisfaire les conditions initiales et les conditions aux limites. Donc la formule itérative (III. 5) donnera plusieurs approximations, et par conséquent la solution exacte y , si cette dernière existe est donnée comme

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n. \quad (\text{III. 7})$$

La méthode d'itération variationnelle est souvent utilisée en mathématique appliquée, notamment pour la résolution des équations différentielles ordinaires (EDO) et les équations aux dérivées partielles (EDP).

III.4.1. Application de la méthode d'itérations variationnelles pour la résolution des équations différentielles

III.4.1.1. Résolution des Equations différentielles ordinaires par la méthode d'itérations variationnelles

On considère l'équation différentielle générale ordinaire suivante

$$Ly(t) + Ny(t) = g(t). \quad (\text{III. 8})$$

Où : L est l'opérateur linéaire, N est l'opérateur non linéaire et $g(t)$ le terme non homogène.

VIM présente une correction utilitaire de l'équation (III. 8) de forme

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau) \{Ly(\tau) + Ny(\tau) - g(\tau)\} d\tau. \quad (\text{III. 9})$$

Avec λ est le multiplicateur de Lagrange général.

Pour identifier le multiplicateur de Lagrange, on utilise la théorie de calcul des variations.

Ainsi, la variation de (III.9) est

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau) \{Ly_n(\tau) + N\tilde{y}_n(\tau) - g(\tau)\} d\tau. \quad (\text{III. 10})$$

Pour identifier le multiplicateur de Lagrange λ facilement le terme non linéaire \tilde{y}_n est considéré comme une variation restreinte, i.e. $\delta\tilde{y}_n = 0$, d'où l'équation (III. 10) devient

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau) \{Ly_n(\tau) - g(\tau)\} d\tau. \quad (\text{III. 11})$$

Les itérations sont exécutées jusqu'à ce qu'on atteigne la convergence

$$y_{n+1}(t) \approx y_n(t).$$

Ce qui implique

$$\delta y_{n+1}(t) = y_{n+1}(t) - y_n(t) = 0. \quad (\text{III. 12})$$

Cette extrême condition sur $\delta y_{n+1}(t)$ exige que

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau) \{Ly_n(\tau) - g(\tau)\} d\tau = 0. \quad (\text{III. 13})$$

En général le multiplicateur de Lagrange peut être aisément identifié en utilisant les conditions stationnaires de l'équation précédente et cela après l'intégration par partie.

Après la détermination du multiplicateur de Lagrange, on choisit une fonction sélective $y_0(t)$ qu'on remplace dans la fonctionnelle (III.9) pour pouvoir calculer par la suite les itérations successive $y_{n+1}(t)$, $n \geq 0$.

L'équation (III.7) permet d'obtenir la solution exacte $y(t)$.

III.4.1.2. Exemples illustratifs

Exemple III.1

Soit l'EDO du second ordre linéaire non homogène suivante

$$y'' + y' = x.$$

$$y(0) = 1.$$

Solution

La fonctionnelle de correction de l'équation différentielle ordinaire est

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \lambda(\tau) \{y''_n(\tau) + \tilde{y}'_n(\tau) - \tau\} d\tau.$$

Pour le calcul de $\lambda(\tau)$ on pose \tilde{y} comme variable restreinte, avec $\delta \tilde{y} = 0$

L'extrême condition sur y_{n+1} exige

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(\tau) \{y''_n(\tau) - \tau\} d\tau = 0.$$

L'intégration par partie de l'équation précédente donne

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + [\lambda(\tau)\delta y'_n(\tau) - \lambda'(\tau)\delta y_n(\tau)]\Big|_0^x + \delta \int_0^x \{\lambda''(\tau)y_n(\tau) - \lambda(\tau)\tau\} d\tau.$$

Ce qui conduit aux conditions de stationnarités suivantes

$$\begin{cases} 1 - \lambda'(\tau)|_{\tau=x} = 0. \\ \lambda(\tau)|_{\tau=x} = 0. \\ \lambda''(\tau)|_{\tau=x} = 0. \end{cases}$$

Après la résolution de ces conditions, on aura

$$\lambda(\tau) = \tau - x.$$

Introduisant la valeur de $\lambda(\tau)$ dans la fonctionnelle de correction, on obtient la formule itérative

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x (\tau - x)(y''_n(\tau) + y'_n(\tau) - \tau)d\tau.$$

On prend comme estimé de départ

$$y_0(x) = y(0) = 1.$$

Cette sélection nous permet d'obtenir les approximations consécutives suivantes

$$y_0(x) = 1.$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (\tau - x)(y''_0(\tau) + y'_0(\tau) - \tau)d\tau = 1 + \frac{1}{6}x^3.$$

$$y_2(x) = y_1(x) + \int_0^x (\tau - x)(y''_1(\tau) + y'_1(\tau) - \tau)d\tau = 1 + \frac{1}{3}x^3.$$

$$y_3(x) = y_2(x) + \int_0^x (\tau - x)(y''_2(\tau) + y'_2(\tau) - \tau)d\tau = 1 + \frac{1}{2}x^3.$$

·
·
·
·
·

$$y_n(x) = y_{n-1}(x) + \int_0^x (\tau - x)(y_{n-1}''(\tau) + y_{n-1}'(\tau) - \tau) d\tau = 1 + \frac{n}{6}x^3.$$

La solution est

$$y(x) = y_n(x).$$

Exemple III.2

Soit l'EDO du premier ordre non linéaire suivante

$$y' + y^2 = 1.$$

$$y(0) = 0.$$

Solution

La fonctionnelle de correction de l'équation différentielle est

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \lambda(\tau)(y'_n(\tau) + \tilde{y}_n^2(\tau) - 1) d\tau.$$

Où \tilde{y} est une variable restreinte avec $\delta\tilde{y} = 0$.

$$\Rightarrow \delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + \int_0^x \delta\lambda(\tau)(y'_n(\tau) - 1) d\tau.$$

La condition de stationnarité de y_{n+1} exige

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + \int_0^x \delta\lambda(\tau)(y'_n(\tau) - 1) d\tau = 0.$$

Après l'intégration par partie, on obtient les conditions de stationnarités suivantes

$$\begin{cases} 1 + \lambda(\tau) = 0. \\ \lambda'(\tau) = 0. \end{cases}$$

La résolution de ces conditions donne

$$\lambda(\tau) = -1.$$

En Introduisant la valeur de $\lambda(\tau)$ dans la fonctionnelle de correction, on obtient la formule itérative

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - \int_0^x (y'_n + y_n^2 - 1) d\tau = 0.$$

En prenant comme solution de départ la condition initiale

$$y_0(x) = y(0) = 0.$$

Les approximations consécutives de la solution sont obtenues comme suit

$$y_1(x) = 0 - \int_0^x (y'_0(\tau) + y_0^2(\tau) - 1) d\tau = x.$$

$$y_2(x) = x - \int_0^x (y'_1(\tau) + y_1^2(\tau) - 1) d\tau = x - \frac{1}{3}x^3.$$

$$y_3(x) = x - \frac{1}{3}x^3 - \int_0^x (y'_2(\tau) + y_2^2(\tau) - 1) d\tau = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{1}{63}x^7.$$

$$y_4(x) = x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{15}x^5 - \frac{1}{63}x^7 - \int_0^x (y'_3(\tau) + y_3^2(\tau) - 1) d\tau$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \dots$$

⋮
⋮
⋮

$$y_n(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$$

Par conséquent la solution exacte est

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \tanh x.$$

III.4.2.1. Résolution des Equations aux dérivées partielles par la méthode d'itérations variationnelles

On considère l'équation différentielle aux dérivées partielles suivante

$$L_x y(x, t) + L_t y(x, t) + N y(x, t) = g(x, t). \quad (\text{III. 14})$$

Où $L_x y(x, t)$ est l'opérateur linéaire des dérivées partielles par rapport à x , $L_t y(x, t)$ est l'opérateur linéaire des dérivées partielles par rapport à t , N est l'opérateur non linéaire et $g(x, t)$ le terme non homogène.

Pour simplifier les calculs, on peut procéder de deux manières différentes

- Si on travaille dans la direction des t , la fonctionnelle de correction de la forme

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^t \lambda(\tau) \{L_x \tilde{y}(x, \tau) + L_t y(x, \tau) + N \tilde{y}(x, \tau) - g(x, \tau)\} d\tau. \quad (\text{III. 15})$$

On prend la variation des deux côtés de l'équation (III. 15) par rapport à la variable y , on obtient

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + \delta \int_0^t \lambda(\tau) \{L_x \tilde{y}(x, \tau) + L_t y(x, \tau) + N \tilde{y}(x, \tau) - g(x, \tau)\} d\tau. \quad (\text{III. 16})$$

Où \tilde{y} est une variable restreinte avec $\delta \tilde{y} = 0$.

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + \delta \int_0^t \lambda(\tau) \{L_t y(x, \tau) - g(x, \tau)\} d\tau. \quad (\text{III. 17})$$

- Si on travaille dans la direction des x , fonctionnelle de correction est

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \lambda(\tau) \{L_x y(\tau, t) + L_t y(\tau, t) + N\tilde{y}(\tau, t) - g(\tau, t)\} d\tau. \quad (\text{III. 18})$$

On prend la variation des deux côtés de l'équation (III. 18) par rapport à la variable y , on obtiendra

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(\tau) \{L_x y(\tau, t) + L_t \tilde{y}(\tau, t) + N\tilde{y}(\tau, t) - g(\tau, t)\} d\tau. \quad (\text{III. 19})$$

Où \tilde{y} est une variable restreinte avec $\delta \tilde{y} = 0$.

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(\tau) \{L_x y(\tau, t) - g(\tau, t)\} d\tau. \quad (\text{III. 20})$$

En général le multiplicateur de Lagrange peut être aisément identifié en utilisant les conditions stationnaires de la fonctionnelle de correction et cela après l'intégration par partie

Remarque III.2

Le choix de la direction de travail est effectué d'une manière à ce que le calcul soit rapide et simple (Si l'opérateur $L_t y(x, t)$ présente l'ordre de la dérivée la plus faible par rapport à l'opérateur $L_x y(x, t)$ dans l'équation (III.13), donc on considère la direction de t et vice-versa.

III.4.2.2. Exemples illustratifs

Exemple III.3

Considérons l'EDP du premier ordre non linéaire suivante

$$u_t + uu_x = 0.$$

$$u(x, 0) = x, \quad t > 0.$$

Avec

$$u = u(x, t).$$

Solution

On considère la direction de t , la fonctionnelle de correction de cette équation s'écrit comme suit

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\tau) \left(\frac{\partial u_n(x, \tau)}{\partial \tau} + \tilde{u}_n(x, \tau) \frac{\partial \tilde{u}_n(x, \tau)}{\partial x} \right) d\tau.$$

Où \tilde{u}_n est une variation restreinte avec $\delta \tilde{u}_n = 0$.

La stationnarité de la fonctionnelle impose d'avoir la variation de u_{n+1} nulle, c'est-à-dire $\delta u_{n+1}(x, t) = 0$.

$$\delta u_{n+1}(x, t) = \delta u_n(x, t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau) \left(\frac{\partial u_n(x, \tau)}{\partial \tau} \right) d\tau = 0.$$

Après l'intégration par partie, on aura les conditions de stationnarité

$$1 + \lambda(\tau = t) = 0.$$

$$\lambda'(\tau = t) = 0.$$

Ce qui conduit à

$$\lambda = -1.$$

Substituant la valeur du multiplicateur de Lagrange $\lambda = -1$ dans la fonctionnelle donne la formule itérative suivante

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left(\frac{\partial u_n(x, \tau)}{\partial \tau} + u_n(x, \tau) \frac{\partial u_n(x, \tau)}{\partial x} \right) d\tau, \quad n \geq 0.$$

Choisissant l'approximation initiale

$$u_0(x, t) = u(x, 0) = x.$$

On aura les approximations suivantes

$$u_0(x, t) = x.$$

$$u_1(x, t) = x - xt.$$

$$u_2(x, t) = x - xt + xt^2 - \frac{1}{3}xt^3.$$

$$u_3(x, t) = x - xt + xt^2 - xt^3 + \frac{2}{3}xt^4 + \dots$$

·
·
·

$$u_n(x, t) = x(1 - t + t^2 - t^3 + t^4 + \dots).$$

On remarque que l'expression de $u_n(x, t)$ est un développement de Taylor de la fonction.

$$u(x, t) = \frac{x}{1+t}, \quad |t| < 1.$$

Donc la solution exacte est

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = \frac{x}{1+t}, \quad |t| < 1.$$

Exemple III.4

Soit l'EDP linéaire suivante

$$u_{xx} - u_{yy} = -x + u.$$

$$u(0, y) = \sin(y).$$

$$u_x(0, y) = 1.$$

Avec

$$u = u(x, y).$$

Solution

Dans la direction de x , la fonctionnelle de correction s'écrit comme suit

$$u_{n+1}(x, y) = u_n(x, y) + \int_0^x \lambda(\tau) \left(\frac{\partial^2 u_n(\tau, y)}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}_n(\tau, y)}{\partial y^2} - \tilde{u}_n(\tau, y) + \tau \right) d\tau.$$

Où \tilde{u}_n est une variation restreinte avec $\delta \tilde{u}_n = 0$.

Le calcul de variation de cette dernière donne

$$\delta u_{n+1}(x, y) = \delta u_n(x, y) + \delta \int_0^x \lambda(\tau) \left(\frac{\partial^2 u_n(\tau, y)}{\partial \tau^2} + \tau \right) d\tau = 0.$$

Après l'intégration par partie, on aura les conditions de stationnarités

$$1 - \lambda'(\tau = x) = 0.$$

$$\lambda(\tau = x) = 0.$$

$$\lambda''(\tau = x) = 0.$$

La résolution de cet ensemble d'équations donne

$$\lambda = \tau - x.$$

Substituant la valeur du multiplicateur de Lagrange $\lambda = \tau - x$ dans la fonctionnelle donne la formule itérative suivante

$$u_{n+1}(x, y) = u_n(x, y) + \int_0^x (\tau - x) \left(\frac{\partial^2 u_n(\tau, y)}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u_n(\tau, y)}{\partial y^2} - u_n(\tau, y) + \tau \right) d\tau.$$

On considère la condition initiale $u_0(x, y) = x + \sin(y)$ comme solution de départ. Par conséquent les calculs conduisent aux résultats suivants

$$u_0(x, y) = x + \sin(y).$$

$$u_1(x, y) = x + \sin(y).$$

$$u_2(x, y) = x + \sin(y).$$

·
·
·

$$u_n(x, y) = x + \sin(y).$$

La solution exacte est obtenue comme

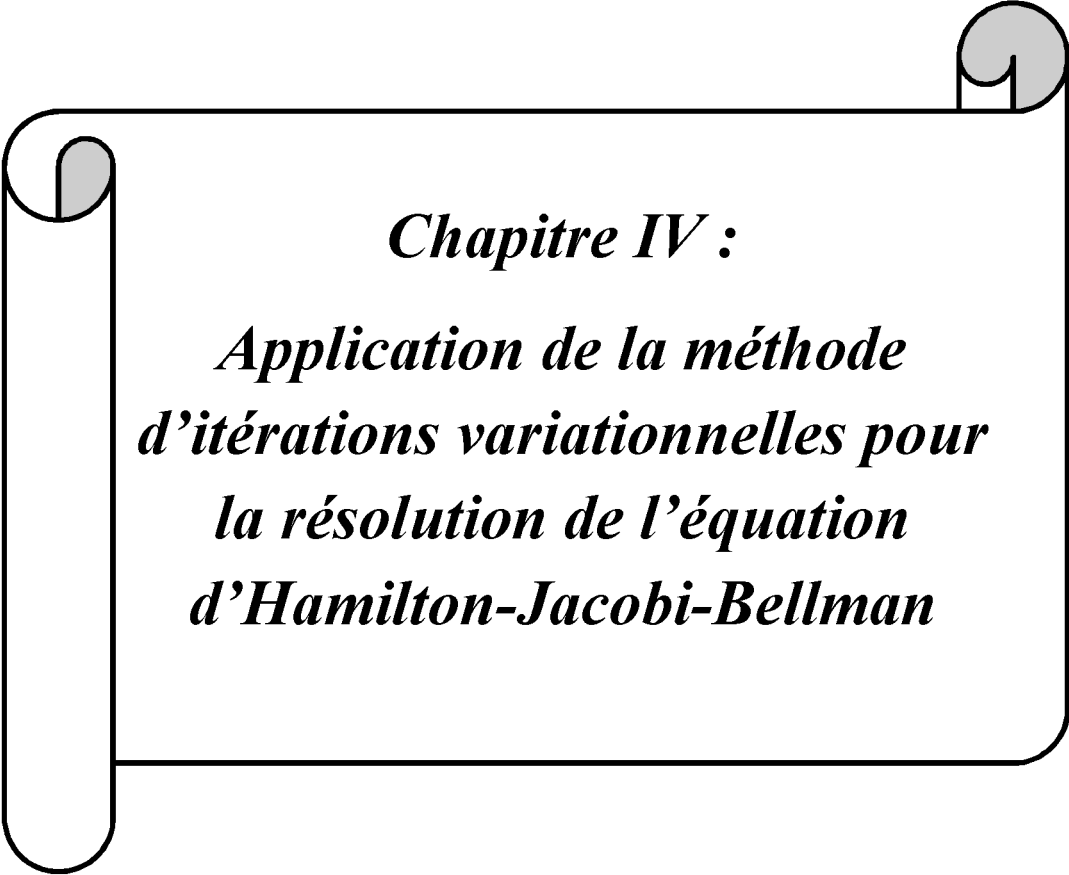
$$u(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = x + \sin(y).$$

III.5. Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté des généralités des équations différentielles ordinaires (EDOs) et partielles (EDPs), en suit nous avons exposé le principe de la méthode des itérations variationnelles utilisée pour la résolution de ces équations en utilisant un formule itérative.

Le principe de cette méthode de résolution consiste à écrire une formule itérative, appelée fonctionnelle de correction, qui permet de calculer des solutions approximatives de la solution de l'équation différentielle. Cette méthode introduit un multiplicateur de Lagrange qui doit être identifié en écrivant les conditions de stationnarité de la fonctionnelle.

La méthode des itérations variationnelles a été illustrée par quelques exemples d'application. Dans le chapitre suivant, cette méthode sera adoptée pour la recherche de la solution d'un problème de commande optimale en l'utilisant pour la résolution de l'équation aux dérivées partielle d'Hamilton-Jacobi-Bellman (H-J-B).



Chapitre IV :
Application de la méthode
d'itérations variationnelles pour
la résolution de l'équation
d'Hamilton-Jacobi-Bellman

IV.1. Introduction

Deux grands principes permettent de traiter les problèmes de commande optimale à savoir le principe du minimum de Pontriaguine et le principe de Bellman. Ce dernier conduit à l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman qui est une équation aux dérivées partielles hyperbolique non linéaire du premier ordre.

En général, cette équation n'admet pas de solution analytique, donc trouver une solution approximative constitue une alternative intéressante.

Dans ce chapitre, on propose d'utiliser la méthode de VIM pour la résolution des problèmes de contrôle optimale en l'adoptant pour la résolution de l'équation différentielle d'Hamilton-Jacobi-Bellman. La résolution de cette équation permet de déduire la commande optimale. L'efficacité et la convergence de cette méthode seront illustrées par quelques exemples d'applications.

IV.2. Equation d'Hamilton Jacobi Bellman

Soit le problème de commande optimal suivant

$$\min_{u(t)} J(x, u, t) = \Psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) dt.$$

Sujet à

(IV. 1)

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

On pose

$$V(x, t) = \min_{u(t)} J(x, u, t) = J(x, u^*, t)$$

Les différentes étapes à suivre pour la formulation de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman ont été présentées au chapitre II.

Ainsi, en utilisant le principe de Bellman on a démontré que l'équation générale d'Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\begin{cases} \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial t} + H(x, u^*, V_x, t) = 0. \\ V(x(t_f), t_f) = \Psi(x(t_f), t_f). \end{cases} \quad (\text{IV. 2})$$

Avec

$$H(x, u^*, V_x, t) = \min_{u_{t_f}^*} [\varphi(x(t), u(t), t) + \nabla_x^T V(x(t), t) f(x(t), u(t), t)]. \quad (\text{IV. 3})$$

$$V(x(t_f), t_f) = \Psi(x(t_f), t_f). \quad \text{Est la condition à la limite.}$$

L'équation (IV. 2) est une condition suffisante pour optimiser le critère de performance. En général, il est impossible de résoudre cette équation analytiquement, et c'est pour cette raison qu'on propose d'adopter la méthode VIM pour avoir une solution approximative.

IV.3. Résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman par la méthode d'itérations variationnelles

Pour illustrer les différentes étapes à suivre pour la résolution de l'équation HJB, on procède comme suit

Considérons l'équation différentielle générale d'Hamilton-Jacobi-Bellman suivante

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x(t), u(t), t) + \varphi(x(t), u(t), t) = 0. \quad (\text{IV. 4})$$

Qui est une EDP non linéaire hyperbolique du premier ordre.

Appliquons la méthode de VIM pour l'équation (IV.4), on aura la fonctionnelle de correction suivante

$$V_{n+1}(x, t) = V_n(x, t) + \int_t^{t_f} \lambda(\tau) \left(\frac{\partial V_n(x, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial V_n(x, \tau)}{\partial x} f(x(\tau), u(\tau), \tau) + \varphi(x(\tau), u(\tau), \tau) \right) d\tau. \quad (\text{IV.5})$$

Où λ est le multiplicateur de Lagrange.

Pour le calcul du multiplicateur de Lagrange, on prend la variation des deux côtés de l'équation (IV.5) par rapport à $V_n(x, t)$, on aura

$$\delta V_{n+1}(x, t) = \delta V_n(x, t) + \delta \int_t^{t_f} \lambda(\tau) \left(\frac{\partial V_n(x, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{V}_n(x, \tau)}{\partial x} f(x(\tau), u(\tau), \tau) + \varphi(x(\tau), u(\tau), \tau) \right) d\tau. \quad (\text{IV.6})$$

\tilde{V}_n , est la variable restreinte avec $\delta \tilde{V}_n = 0$ et $\delta \varphi = 0$, ce qui donne

$$\delta V_{n+1}(x, t) = \delta V_n(x, t) + \delta \int_t^{t_f} \lambda(\tau) \left(\frac{\partial V_n(x, \tau)}{\partial \tau} \right) d\tau. \quad (\text{IV.7})$$

En intégrant par partie l'équation (IV.7)

$$\delta V_{n+1}(x, t) = \delta V_n(x, t) + \delta ([\lambda(\tau) V_n(x, \tau)]_{\tau=t}^{\tau=t_f}) - \delta \int_t^{t_f} \lambda'(\tau) V_n(x, \tau) d\tau. \quad (\text{IV.8})$$

Et comme $\delta V_n(x, \tau = t_f) = 0$, on aura

$$\delta V_{n+1}(x, t) = (1 - \lambda(t)) \delta V_n(x, t) - \int_t^{t_f} \lambda'(\tau) \delta V_n(x, \tau) d\tau. \quad (\text{IV.9})$$

La stationnarité de $V_{n+1}(x, t)$ exigent que $\delta V_{n+1} = 0$, ce qui donne les conditions de stationnarité suivante

$$\begin{cases} 1 - \lambda(t) = 0. \\ -\lambda(t)' = 0. \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\lambda(t) = 1.$$

Introduisant cette valeur de $\lambda(t)$ dans l'équation (IV. 5)

$$V_{n+1}(x, t) = V_n(x, t) + \int_t^{t_f} \left(\frac{\partial V_n(x, t)}{\partial \tau} + \frac{\partial V_n(x, t)}{\partial x} f(x(\tau), u(\tau), \tau) + \varphi(x(\tau), u(\tau), \tau) \right) d\tau. \quad (\text{IV. 10})$$

On peut prendre l'approximation initiale comme

$$V_0 = V_0(x, t) = \Psi(x(t_f), t_f).$$

Les approximations consécutives $V_{n+1}(x, t)$, $n \geq 0$ de la solution $V(x, t)$ seront obtenues par la formule itérative suivante

$$V_{n+1}(x, t) = V_n(x, t) + A(V). \quad (\text{VI. 11})$$

Où

$$A(V) = \int_t^{t_f} \left(\frac{\partial V_n(x, t)}{\partial \tau} + \frac{\partial V_n(x, t)}{\partial x} f(x(\tau), u(\tau), \tau) + \varphi(x(\tau), u(\tau), \tau) \right) d\tau.$$

Et on définit les termes $\mu_k, k = 0, 1, 2, \dots$, comme

$$\begin{cases} \mu_0 = V_0. \\ \mu_1 = A(V_0). \\ \vdots \\ \vdots \\ \mu_{k+1} = A(V_0 + V_1 + \dots + V_n). \end{cases}$$

La méthode de VIM donne une solution approximative qui peut converger vers la solution exacte si elle existe. Souvent, on atteint cette solution après plusieurs itérations surtout dans le cas des équations linéaire. Donc la solution exacte est donnée comme la limite des approximations consécutives résultantes.

En effet, la solution est donnée par

$$V(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(x, t).$$

L'équation du contrôle optimal est donnée comme

$$u^*(t) = F(x(t), \nabla_x^T V(x, t)). \quad (\text{IV. 12})$$

IV.4. Algorithme de résolution d'un problème de commande optimale par la méthode d'itérations variationnelles

L'algorithme ci-dessous récapitule les étapes à suivre pour résoudre un problème de commande optimale par la méthode VIM utilisée en passant par la résolution de l'équation de HJB.

Comme on ne peut pas appliquer la méthode de VIM directement pour le problème de commande optimale, donc on doit transformer l'équation (IV. 1) sous forme d'une équation d'HJB.

Début : Choix d'une tolérance $\varepsilon > 0$, et de l'estimé de départ $V_0(x, t)$.

Etape 1 : Minimiser l'équation d'Hamilton $H(x, u, V_x, t)$ pour tirer la loi de contrôle optimale u^* .

Etape 2 : Tirer l'équation d'HJB correspondante au problème de commande optimale caractérisé par l'équation (IV. 1).

Etape 3 : En choisissant une fonction $V_0(x, t)$, on résout l'équation non linéaire (IV.2) en utilisant la méthode de VIM à fin d'obtenir l'expression de $V_n(x, t)$, substituant cette expression dans (IV.12) pour avoir la loi du contrôle optimal.

Etape 4 : Remplaçant la valeur de u^* trouvée à l'Etape 3 dans l'équation (IV.1) en tenant compte de la condition initiale $x(t_0) = x_0$ pour déterminer la trajectoire optimale $x^*(t)$ et calculer la valeur de J_n .

Etape 5 : si $|J_n - J_{n-1}| < \varepsilon$ alors $J = J_n$, sinon aller à l'Etape 4.

Fin : La valeur optimale du critère J .

IV.5. Exemples d'applications

Pour illustrer l'utilisation de la méthode VIM pour la résolution d'un problème de commande optimale, on présente dans cette section quelques exemples illustratifs. Pour les exemples ayant une solution analytique, on utilise d'abord la méthode du principe du minimum pour déterminer la solution exacte puis de comparer le résultat avec celui trouvé avec la méthode VIM.

Exemple IV.1

Soit le problème de commande optimale suivant

$$\min_{u(t)} J(x(t), t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (u^2(t) + x^2(t)) dt.$$

Sujet à

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t).$$

$$0 \leq t \leq 1, \quad x(0) = 1.$$

- Principe du minimum de Pontriaguine

On définit l'Hamiltonien comme suit

$$H(x, u, \lambda, t) = \varphi(x(t), u(t), t) + \lambda(t)f(x(t), u(t), t).$$

Tel que

$$\varphi(x(t), u(t), t) = \frac{1}{2}(u^2(t) + x^2(t)).$$

$$f(x(t), u(t), t) = \dot{x}(t) = -x(t) + u(t).$$

En remplaçant la valeur de φ et de f dans l'équation d'Hamilton, on aura

$$H(x, u, \lambda, t) = \frac{1}{2}[u^2(t) + x^2(t)] + \lambda[-x(t) + u(t)].$$

La commande optimale minimise H, c'est-à-dire

$$H_u(x, u, \lambda, t) = \frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u(t) + \lambda(t) = 0.$$

$$u^*(t) = -\lambda(t). \tag{IV. 13}$$

En remplaçant l'équation de la commande optimale $u^*(t)$ dans l'équation d'Hamilton, on aura

$$H^*(x, \lambda, t) = -\frac{1}{2}\lambda^2(t) + \frac{1}{2}x^2(t) - \lambda(t)x(t).$$

Equation d'état

$$H^*_{\lambda}(x, \lambda, t) = \dot{x}(t) = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda}.$$

$$\dot{x}(t) + x(t) + \lambda(t) = 0. \quad (\text{IV. 14})$$

Equation d'état adjointe

$$H^*_{x}(x, \lambda, t) = \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x}$$

$$\dot{\lambda}(t) - \lambda(t) + x(t) = 0 \quad (\text{IV. 15})$$

De (IV. 14) et (IV. 15), on déduit

$$\ddot{x}(t) - 2x(t) = 0. \quad (\text{IV. 16})$$

La solution de l'équation (IV. 16) est de forme

$$x(t) = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t}.$$

$$x(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1 - C_1.$$

Ce qui donne

$$x(t) = C_1 e^{\sqrt{2}t} + (1 - C_1) e^{-\sqrt{2}t}.$$

De (IV. 14), il vient

$$\lambda(t) = -[\dot{x}(t) + x(t)].$$

$$\lambda(t) = -C_1(1 + \sqrt{2})e^{\sqrt{2}t} + (1 - C_1)(\sqrt{2} - 1)e^{-\sqrt{2}t}.$$

Pour calculer la constante C_1 , on utilise la condition terminale de λ , on a

$$\frac{\partial \Psi(x(t_f), t_f)}{\partial x} = \lambda(t_f) = 0.$$

Ce qui donne

$$C_1 = \frac{2\sqrt{2} - 3}{-e^{2\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} - 3}.$$

La solution analytique du problème est

$$x(t) = C_1 e^{\sqrt{2}t} + (1 - C_1) e^{-\sqrt{2}t}.$$

D'après (IV.13), on déduit

$$u^*(t) = C_1(1 + \sqrt{2})e^{\sqrt{2}t} - (1 - C_1)(\sqrt{2} - 1)e^{-\sqrt{2}t}.$$

La valeur du critère est

$$J = \frac{e^{2\sqrt{2}}}{2} \left((1 + \sqrt{2})e^{4\sqrt{2}} - 1 \right) c_1^2 + (\sqrt{2} - 1)(e^{2\sqrt{2}} - 1)(1 - c_1)^2.$$

- Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

On définit l'équation d'HJB comme

$$\frac{\partial V(x(t), t)}{\partial t} = -H^*(x, u^*, t, V_x).$$

Avec

$$H(x(t), u(t), t, V_x) = \varphi(x(t), u(t), t) + \nabla_x^T V(x(t), t) \dot{x}(t).$$

Et

$$\nabla_x^T V(x(t), t) = \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x}.$$

Ce qui donne

$$H(x(t), u(t), t) = \frac{1}{2}[u^2(t) + x^2(t)] + \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x}(-x(t) + u(t)).$$

Pour calculer la commande optimale u^* , on résout l'équation

$$\nabla_u H = 0.$$

$$u^* = -\frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x}.$$

La solution du problème est liée directement à la résolution de l'équation aux dérivées partielles de HJB suivante

$$\frac{\partial V(x(t), t)}{\partial t} - x(t) \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} x^2(t) = 0.$$

Avec la condition à la limite $V(x(1), 1) = 0$.

L'application de la méthode de VIM pour cette équation HJB donne

$$V_{n+1}(x, t) = V_n(x, t) + \int_t^1 \lambda(\tau) \left[\frac{\partial V_n(x, \tau)}{\partial \tau} - x(\tau) \frac{\partial V_n(x, \tau)}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_n(x, \tau)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} x^2(\tau) \right] d\tau.$$

On a $\lambda(\tau) = 1$ déjà calculé dans le cas général.

En considérant la condition initiale $V_0(x, t) = 0$, on aura la formule itérative

$$V_{n+1}(x, t) = V_n(x, t) + \int_t^1 \left[\frac{\partial V_n(x, \tau)}{\partial \tau} - x(\tau) \frac{\partial V_n(x, \tau)}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_n(x, \tau)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} x^2(\tau) \right] d\tau.$$

Et les calculs donnent

$$V_1(x, t) = -\frac{1}{2}(t-1)x^2.$$

$$V_2(x, t) = \frac{1}{6}(t^3 - 6t^2 + 6t - 1)x^2.$$

$$V_3(x, t) = \left[\frac{1}{126}(t^7 - 1) - \frac{1}{9}(t^6 - 1) + \frac{8}{15}(t^5 - 1) - \frac{17}{18}(t^4 - 1) + \frac{2}{9}(t^3 - 1) + \frac{2}{3}(t^2 - 1) - \frac{7}{9}(t - 1) \right] x^2.$$

⋮
⋮
⋮
⋮
⋮
⋮

Ainsi, après 7 itérations, on retrouve une solution convergeant vers la solution exacte. Les résultats de calcul obtenus sont résumés dans le tableau suivant.

Numéro d'itération	Valeur du critère J_n	$ J_{n+1} - J_n $
0	$J_0 = 0$	$ J_1 - J_0 = 0.2184$
1	$J_1 = 0.2184$	$ J_2 - J_1 = 0.0056$
2	$J_2 = 0.2240$	$ J_3 - J_2 = 0.0233$
3	$J_3 = 0.2007$	$ J_4 - J_3 = 0.0052$
4	$J_4 = 0.1955$	$ J_5 - J_4 = 0.0022$
5	$J_5 = 0.1933$	$ J_6 - J_5 = 0.0003$
6	$J_6 = 0.1930$	$ J_7 - J_6 = 0.0001$
7	$J_7 = 0.1929$	$ J_8 - J_7 \approx 0$

Tableau IV.1: Tableau récapitulatif désignant l'évolution du critère de performance.

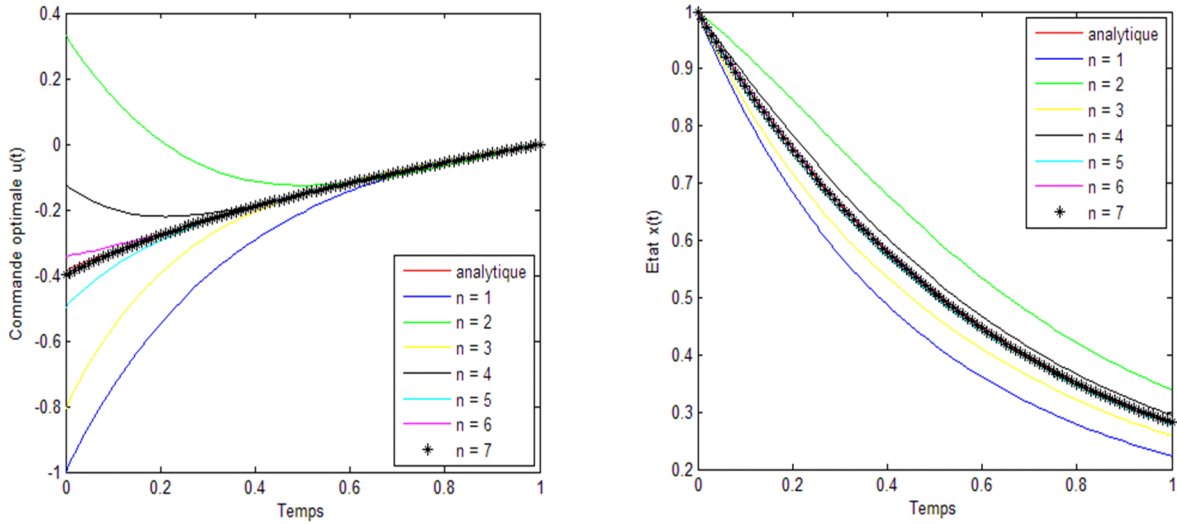


Figure IV.1 : Comparaison entre la solution approximée trouvée par la méthode de VIM et la solution exacte trouvée analytiquement.

La figure IV.1 démontre que la solution approximée obtenue par la méthode de VIM à 7^{ème} itération coïncide avec la solution analytique trouvée en utilisant la méthode du principe du minimum.

Comme la méthode de VIM converge après 7 itérations, l'expression de la commande sera donnée par :

$$u^* = -\frac{\partial V_7(x, t)}{\partial x}.$$

Exemple VI.2

Soit le problème de commande optimale suivant

$$\min_u J(x(t), t) = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt + x^2(1).$$

Sujet à

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t).$$

$$x(0) = 1.$$

- Principe du minimum de Pontriaguine

La fonction d'Hamilton est donnée comme suit

$$H(x, u, \lambda, t) = \varphi(x(t), u(t), t) + \lambda(t)f(x(t), u(t), t).$$

Où

$$\varphi(x(t), u(t), t) = \frac{1}{2}u^2(t).$$

$$f(x(t), u(t), t) = \dot{x}(t) = x(t) + u(t).$$

En remplaçant la valeur de φ et de f dans l'équation d'Hamilton, on aura

$$H(x, u, \lambda, t) = \frac{1}{2}u^2(t) + \lambda(t)[x(t) + u(t)].$$

L'expression de la commande est

$$H_u(x, u, \lambda, t) = \frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u(t) + \lambda(t) = 0.$$

$$u^*(t) = -\lambda(t).$$

On remplace l'expression de la commande optimale $u^*(t)$ dans l'Hamiltonien, on aura

$$H^*(x, \lambda, t) = -\frac{1}{2}\lambda^2(t) + \lambda(t)x(t).$$

L'équation d'état adjointe

$$H^*_x(x, \lambda, t) = \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x}.$$

$$\dot{\lambda}(t) + \lambda(t) = 0. \tag{IV.17}$$

La solution de l'équation (IV. 17) est

$$\lambda(t) = ke^{-t}.$$

L'équation d'état

On a

$$H^*_\lambda(x, \lambda, t) = \dot{x}(t) = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda}.$$

Ce qui donne

$$\dot{x}(t) - x(t) + \lambda(t) = 0. \quad (\text{IV. 18})$$

La solution homogène de cette équation est $x(t) = Ce^t$

On remplace dans (IV. 18)

$$\dot{C}e^t + ke^{-t} = 0.$$

$$\dot{C} = -ke^{-2t} \Rightarrow C = \frac{k}{2}e^{-2t} + m \Rightarrow x(t) = \frac{k}{2}e^{-t} + me^t.$$

On a $x(0) = 1$, ce qui donne

$$\frac{k}{2} + m = 1. \quad (\text{IV. 19})$$

La condition à la limite donne

$$\lambda(1) = 2x(1) \Rightarrow ke^{-1} + 2me^1 = ke^{-1}. \quad (\text{IV. 20})$$

$$de \quad (\text{IV. 20}) \Rightarrow m = 0.$$

$$de \quad (\text{IV. 19}) \Rightarrow k = 2.$$

La solution analytique du problème est

$$x(t) = e^{-t} .$$

$$\lambda(t) = 2e^{-t} .$$

$$u(t) = -2e^{-t} .$$

$$J = 1 .$$

- **Méthode d'itérations variationnelles**

On définit l'équation d'HJB comme

$$\frac{\partial V(x(t), t)}{\partial t} = -H^*(x, u^*, t, V_x).$$

Tel que

$$H(x(t), u(t), t, V_x) = \varphi(x(t), u(t), t) + \nabla_x^T V(x(t), t) \dot{x}(t).$$

Et

$$\nabla_x^T V(x(t), t) = \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x}.$$

Ce qui donne

$$H(x(t), u(t), t) = \frac{1}{2}u^2(t) + \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x} [x(t) + u(t)].$$

Pour calculer u^* , il faut résoudre l'équation $\nabla_u H = 0$

$$u^* = -\frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x}. \tag{IV. 21}$$

La solution du problème est liée directement à la résolution de l'équation HJB correspondante au problème donné comme suit

$$\frac{\partial V(x(t), t)}{\partial t} + x(t) \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x} \right)^2 = 0.$$

La condition à la limite est $V(x(1), 1) = x^2(1)$.

L'application de la méthode de VIM donne

$$V_{n+1}(x, t) = V_n(x, t) + \int_1^t \lambda(\tau) \left[\frac{\partial V_n(x, \tau)}{\partial \tau} + x(\tau) \frac{\partial V_n(x, \tau)}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_n(x, \tau)}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau.$$

De même $\lambda(\tau) = 1$.

On sélectionne $V_0(x, t) = x^2$ comme condition initiale, on aura la formule itérative

$$V_{n+1}(x, t) = V_n(x, t) + \int_1^t \left[\frac{\partial V_n(x, \tau)}{\partial \tau} + x(\tau) \frac{\partial V_n(x, \tau)}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_n(x, \tau)}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau.$$

Le processus d'itération donne

$$V_1(x, t) = x^2.$$

$$V_2(x, t) = x^2.$$

$$V_3(x, t) = x^2.$$

⋮

$$V_n(x, t) = x^2.$$

On déduit que la solution exacte est donnée comme suit

$$V(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(x, t) = x^2.$$

D'après l'expression de la loi de commande optimale (IV.21), on déduit la loi de commande optimale suivante

$$u^*(t) = -2x(t)$$

Qui est un retour d'état.

IV.6. Conclusion

Le but de ce chapitre est de présenter une approche pour concevoir une commande optimale pour un système dynamique optimisant un critère de performance. L'étape principale consiste à déterminer l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman correspondante au problème de commande optimale, puis pour déterminer la solution de cette équation aux dérivées partielles, on utilise la méthode VIM.

L'utilisation de la méthode VIM permet de déterminer en utilisant une formule itérative une solution approximative de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman ce qui permet de déterminer la commande optimale.



Conclusion Générale

Le travail réalisé dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la commande optimale des systèmes dynamiques en présence de contraintes terminales.

L'objectif de ce travail est de synthétiser une loi de contrôle optimale en utilisant l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman. Comme cette équation est fortement non linéaire et difficile à résoudre analytiquement, on fait appel à une méthode itérative couramment utilisée qui est la méthode d'itération variationnelle, cette méthode permet d'avoir une solution approximée qui converge vers la solution exacte de l'équation d'Hamilton -Jacobi-Bellman.

Au premier lieu, nous avons introduit et illustré les divers concepts de base relatifs à un problème de contrôle optimale en se focalisant sur sa formulation mathématique. En second lieu des différentes méthodes de résolution d'un problème de commande optimale ont été présentées à savoir le principe d'Hamilton -Pontriaguine (principe du minimum) et le principe d'Hamilton -Jacobi-Bellman (programmation dynamique). En suite, nous avons présentés quelques généralités des équations différentielles puis nous avons exposé le principe de la méthode des itérations variationnelles utilisée pour la résolution de ces équations en utilisant une formule itérative. A la fin, la méthode d'itération variationnelle a été appliquée pour résoudre l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman pour l'obtention de la loi de commande optimale. Cette approche a été appliquée avec succès sur les deux applications présentés dans le quatrième chapitre.

Les résultats obtenus après application de cette approche démontrent la rapidité de convergence et la comparaison des résultats avec la méthode du principe du minimum a démontré la justesse de cette dernière. En effet celle-ci a permis de confirmer les résultats obtenu analytiquement, aussi les résultats révèle qu'elle est applicable quelque soit la nature du système (linéaire ou non linéaire) étudié. Constatant aussi la simplicité de son application et la précision numérique liée au calcul itératif.

A ce stade, il est très important de constater que la méthode présente les principaux avantages suivants :

- ✓ Souvent, elle converge vers la solution exacte si cette dernière existe sinon une solution approximée peut être toujours obtenue,
- ✓ Pour ce qui concerne la programmation dynamique (équation d'Hamilton -Jacobi-Bellman) la solution peut être obtenu sous forme d'un feedback.

Comme perspectives du présent travail, il est intéressant de penser à développer davantage la méthode d'itération variationnelle pour accélérer la convergence de la partie d'intégration de la fonctionnelle de correction. Autre chose cette méthode d'itération variationnelle peut être exploitée pour l'équation de Riccati.



Bibliographie

Bibliographie

- [1]. **Jean Christophe Culioli**, Introduction à l'optimisation, Editions Ellipses, 1994.
- [2]. **Jean Pierre Babarry, Wladislaw pelczewski**, Commande optimale des systèmes continus déterministes, Editions Masson, 1985.
- [3]. **Abdul-Majid Wazwaz**, Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory, Edition Springer, 2009.
- [4]. **Zaid M. Odibat**, Reliable approaches of variational iteration method for nonlinear operators, Math. Comput. Model, 2007.
- [5]. **B. Kafash et al**, Application of variational iteration method for Hamilton–Jacobi–Bellman equations, Appl. Math. Model, 2012.
- [6]. **S. Berkani, F. Manseur, A. Maldi**, Optimal control based on the variational iteration method, Comput. Math. Appl, in press, 2011.
- [7]. **Edouard Laroche**, Commande optimale, Ecole nationale supérieure de Physique de Strasbourg, 2009.
- [8]. **Hasnaa Zidani**, Notes de cours A10-2, ENSTA, Paris.
- [9]. **L. Pujo-Menjouet**, Equations Différentielles Ordinaires et Partielles, Université Claude Bernard, Lyon I, France.