

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mouloud MAMMÉRI de Tizi-Ouzou
Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département d'Electrotechnique



Mémoire de fin d'étude en vue de l'obtention du diplôme
de Master II en Entraînements Electriques

THEME

OPTIMISATION PAR ELEMENTS FINIS DE
L'EVALUATION DES PROPRIETES PHYSIQUES
D'UN MATERIAU ANISOTROPE

Promoteur :
MR. Hassan MOHELLEBI
Co-Promoteur :
Mme YOUNCFI .G

Etudié par :
MR. Arezki HALLADJ

2012

DEDICACES

A MASSINE l'aîné, à ses cadets jumeaux AGHILAS et AMAYAS,
mes adorables enfants ainsi qu'à femme, je dédie ce modeste
mémoire.

REMERCIEMENTS

Le présent travail a été effectué sous la direction de Monsieur MOHELLEBI Hassane, Professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou. A ce titre, je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance de m'avoir apporté sa rigueur scientifique. Qu'il trouve ici mes vifs remerciements pour sa pédagogie et ses conseils.

Mes vifs remerciements son adressé à mon co-promoteur Madame YOUSFI.G pour n'avoir ménagé aucun effort pour suivre mes travaux, me conseiller et m'encourager.

J'exprime ma vive reconnaissance à Monsieur CHAIBI Rachid, Professeur à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, qui me fera l'honneur d'examiner ce travail et de présider le jury de ma soutenance.

Qu'il me soit permis de remercier Monsieur OULD OUALI Samy Hassani et Monsieur HOCINI Farid, qui me ferons aussi grand honneur d'examiner ce travail. Je les prie de croire à ma respectueuse reconnaissance.

Je souhaiterais aussi remercier, l'ensemble des enseignants(es) ayant contribué à notre formation, qui présente un caractère très particulier pour moi du fait que j'ai retrouvé les bancs de l'université vingt ans après les avoir quitté avec un diplôme d'ingénieur d'Etat.

Mes vifs remerciements vont aussi à l'adresse de l'ensemble du personnel du département d'électrotechnique pour leur serviabilité. En particulier Monsieur Moudoud .M qui répond toujours présent à chaque sollicitation.

Je tiens aussi à remercier tous ceux qui de près ou de loin ont participé à la réalisation de ce mémoire.

Je remercie du fond du cœur mon conjoint pour sa patience et sa compréhension. Je ne la remercierai jamais assez pour son aide et son soutien du début de ma formation jusqu'à l'aboutissement de ce mémoire.

Pour finir, une pensée à toute ma famille.

SOMMAIRE :

INTRODUCTION GENERALE	01
CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES MATERIAUX COMPOSITES	
I.1. Introduction.....	03
I.2. Définition.....	04
I.3. Constituants des matériaux composites	04
I.3.1. La matrice.....	05
I.3.1.1. Les résines thermoplastiques.....	06
I.3.1.2. Les élastomères.....	06
I.3.1.3. Les résines thermodurcissables.....	06
I.3.2. Les charges et additifs.....	08
a- Charges renforçantes.....	08
b- Charges non renforçantes	08
c- Charges conductrices et antistatiques.....	08
d- Les additifs.....	08
I.3.3. Le renfort.....	09
a- Les structures aléatoires.....	10
b- Les structures orientées	11
I.3.3.1. Les principales fibres.....	12
a- Les fibres de verre.....	12
b- Les fibres de carbone.....	13
c- Les fibres d'aramides.....	14
d- Les fibres végétales.....	14
e- Les fibres de bores.....	14
I.4. Classification des matériaux composites.....	16
I.5. Elaborations des composites.....	16
I.5.1. Matrices organiques.....	17
I.5.2. Matrices métalliques.....	17
I.5.3. Matrices céramiques.....	17
I.6. Architectures des matériaux composites	18
I.6.1. Les monocouches.....	18
I.6.2. Les composites stratifiés.....	18
I.6.3. Les composites sandwiches.....	20
I.7. Conclusion	21

CHAPITRE II : LES METHODES NUMERIQUES

II.1. Introduction.....	22
II.2. les équations de Maxwell.....	23
II.2.1. Forme différentielle des équations de maxwell.....	23
II.2.2. forme intégrale des équations de maxwell.....	24
II.2.2.1. forme intégrale de la 1 ^{ère} équation de Maxwell.....	24
II.2.2.2. forme intégrale de la 2 ^{ème} équation Maxwell.....	24
II.2.2.3. forme intégrale de la 3 ^{ème} équation Maxwell.....	25
II.2.2.4 forme intégrale de la 4 ^{ème} équation Maxwell.....	26
II.2.3. Les lois constitutives du milieu.....	26
II.2.4. La loi d'Ohm.....	27
II.2.5. Equation de conservation de la charge.....	27
II.3. Différents types d'équation aux dérivées partielles.....	28
II.3.1. Equation elliptique.....	28
II.3.2. Equation parabolique.....	28
II.3.3. Equation hyperbolique.....	28
II.4. Méthodes analytiques.....	29
II.5. Méthodes numériques.....	30
II.5.1. Méthode des différences finis.....	30
II.5.1.1. Principe de la méthode.....	30
II.5.1.2. Approximation des dérivées première et seconde.	31
II.5.2. Méthode d'intégrale de frontières.....	32
II.5.3. Méthode des éléments finis.....	33
II.5.3.1. Introduction.....	33
II.5.3.2. Principe de la méthode.....	33
II.5.3.3. Description de la méthode des éléments finis.....	34
II.5.3.4. Discrétisation du domaine d'étude (le maillage)...	35
II.5.3.5. Approximation nodale.....	39
II.5.3.6. Formulation éléments finis.....	40
II.5.3.6.1. Formulation variationnelle.....	41
II.5.3.6.2. Formulation résidus pondérés.....	43
II.5.4. Méthode mixtes.....	44
II.6. Formulation éléments finis.....	45
II.6.1. Modèle magnétostatiques bidimensionnel.....	45

a. Cas cartésien.....	45
b. Cas axisymétriques.....	48
II.6.2. Méthode magnétodynamique.....	50
II.6.2.1. Régime transitoire.....	50
a. Cas cartésien.....	51
b. Cas axisymétrique.....	52
II.6.2.2. Régime harmonique.....	53
a. Cas cartésien.....	54
b. Cas axisymétrique.....	55

CHAPITRE III: LES METHODES D'OPTIMISATION ET D'HOMOGENEISATION

III.1. Introduction	56
III.2. Les méthodes d'optimisation.....	57
III.2.1. Définition	57
III.2.1.1. Définition de l'optimisation.....	57
III.2.1.2. Fonction objectif.....	57
III.2.1.3. Les variables de décision.....	57
III.2.1.4. Minimum local/Minimum global.....	57
III.2.1.5. Formulation d'un problème d'optimisation.....	58
III.2.1.6. Formulation des fonctions coût.....	59
III.3. Classification des méthodes numériques d'optimisation.....	60
III.3.1. Algorithme d'ordre zéro.....	60
a. Programmation linéaire (méthode simplexe).....	60
b. Méthode statistiques.....	61
III.3.2. Minimisation sans contraintes de type gradient.....	61
III.3.2.1. Méthode d'ordre 1.....	62
a. Méthode de gradient.....	62
b. Méthode du gradient conjuguée.....	63
III.3.2.2. Méthode d'ordre 2.....	64
III.4. Méthodes d'homogénéisation	65
III.4.1. Méthodes d'homogénéisation prédictives	65
III.4.1.1. Méthodes du développement asymptotique	65
III.4.1.2. Méthodes d'homogénéisation dynamique	66
III.4.1.3. Méthodes du problème inverse	66
III.4.2. Méthodes d'homogénéisation expérimentale	67

CHAPITRE IV : APPLICATIONS ET RESULTATS

IV.1. Introduction	68
IV.2. Algorithme de calcul	69
IV.3. Application : Estimation de la conductivité électrique	70
IV.3.1. Structure géométrique	70
IV.3.2. Caractéristiques géométriques	71
IV.3.3. Caractéristiques physiques.....	71
IV.3.4. Domaine de résolution et conditions aux limites	72
IV.3.5. Maillage	73
IV.3.6. Equation en termes de potentiel vecteur magnétique	74
IV.3.7. Formes différentielles des équations associées aux différentes régions du domaine d'étude	75
IV.3.8. Résultats et interprétations	76
IV.4. Conclusion	83
CONCLUSION GENERALE	84

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Aujourd'hui les nouvelles technologies ont besoin de matériaux qui allient à la fois plusieurs caractéristiques (électromagnétiques, thermiques, mécaniques). Aucun matériau simple ne permet de combiner ces caractéristiques physiques, et pour atteindre cet objectif il faut nécessairement utiliser un matériau composite [22]. Parmi les matériaux composites, les stratifiés jouent un rôle important dans les techniques avancées. De ce fait, ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans une large variété de domaines allant des sports et loisirs à l'aéronautique en passant par le matériel médical et la construction automobile, ou encore le bâtiment [1],[2].

La combinaison des propriétés des fibres d'un matériau résistant avec celles de la matrice dans laquelle elles sont noyées, imprime des caractéristiques particulières au matériau composite obtenu.

Les exigences du marché et du développement durable font désormais de la maîtrise de l'ensemble du cycle de vie du matériau composite (de la conception au recyclage) un préalable.

Cependant, tout calcul de matériaux composites nécessite une connaissance parfaite de leurs caractéristiques électromagnétiques et thermiques.

La spécificité du calcul des matériaux composites vient donc de l'hétérogénéité par conception, et des par des microvides. Il faut donc recourir à des techniques d'homogénéisation pour obtenir la relation de comportement tant au niveau de la monocouche que du stratifié [22].

Plusieurs techniques d'homogénéisation peuvent être appliquées aux matériaux composites telles que la méthode du problème inverse, la méthode asymptotique ou encore la méthode dynamique [2].

Ce mémoire est divisé en quatre chapitres comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux généralités sur les matériaux composites et leurs caractéristiques. Le deuxième chapitre comportera les différents types d'équations différentielles aux dérivées partielles qui régissent les problèmes électromagnétiques relatifs aux matériaux composites ainsi qu'une présentation de différentes méthodes numériques utilisées pour la résolution de ces équations différentielles aux dérivées partielles. Dans notre cas on s'est basé sur la méthode des éléments finis.

Le troisième chapitre présente les différentes méthodes d'optimisation et d'homogénéisation utilisées dans la modélisation des problèmes non linéaire. Nous avons utilisé dans notre étude la technique du problème inverse (pour l'homogénéisation conjuguée) à la méthode du gradient (pour l'optimisation).

Le quatrième chapitre portera sur les résultats des applications étudiées dans le cadre de ce travail. Nos applications concernent la recherche des propriétés physiques équivalentes d'un matériaux homogène qui donneraient des résultats aussi proche que possible des résultats réels donnés par un matériau composite stratifié.

Enfin, nous terminons le travail par une conclusion générale.

CHAPITRE : I

GENERALITES SUR LES MATERIAUX COMPOSITES

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES MATERIAUX COMPOSITES

I.1. INTRODUCTION :

Les métaux, les polymères, les céramiques et les composites sont les quatre catégories de matériaux généralement utilisés dans les différentes structures (électriques, mécanique...).

Les matériaux composites disposent d'atouts considérables par rapport aux matériaux traditionnels. L'avantage des matériaux composites est en effet de pouvoir marier plusieurs caractéristiques mécaniques ou chimiques propres à chaque constituant.

Ainsi, ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions [1].

Comme les autres matériaux, les composites présentent aussi des faiblesses tels que le vieillissement humide conduisant à une chute des propriétés, la grande sensibilité aux trous si la structure est assemblée par boulonnage ou rivetage, ainsi que des contraintes en termes de recyclage.

I.2. DEFINITION :

Un matériau composite est l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux non miscibles, de natures différentes et dont les propriétés sont la somme de celles des constituants ou mieux encore, par effet de synergie et non pas d'addition, un dépassement des caractéristiques originelles [3]. Les matériaux ainsi obtenus sont fortement hétérogènes et anisotropes.

I.3. CONSTITUANTS DES MATERIAUX COMPOSITES :

Les différents constituants des matériaux composites sont :

- La matrice
- Les renforts.
- charges et additifs.

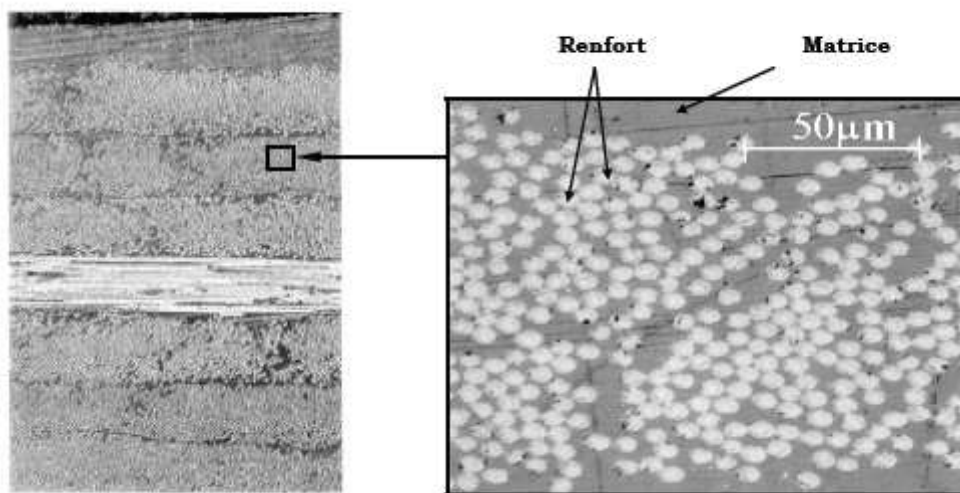


Figure I.1 : Constituants d'un matériau composite

I.3.1. La matrice :

La matrice constitue l'élément de liaison entre les divers constituants et donne la forme voulue au produit réalisé. Son rôle est de transférer les sollicitations mécaniques aux renforts (fibres) et de leurs assurer une protection vis à vis des diverses conditions environnementales (corrosion, oxydation, vieillissement humide...). On distingue deux grandes familles de matrices (*Figure I.2*).

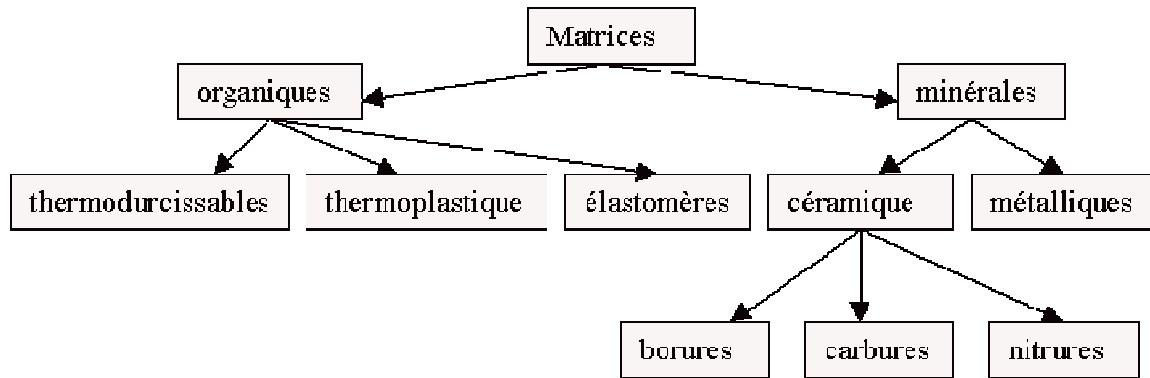


Figure I.2 : Les différentes familles de matrice [4]

Dans le cas des CMO (Composite à Matrice Organique), un très grand nombre de polymères peuvent être utilisés comme matrices. Ces résines synthétiques résultent de composés chimiques obtenus par réticulation d'une macromolécule (association de molécules appelées monomères), sous l'action de la chaleur et/ou d'un catalyseur. Trois catégories de ces matières plastiques peuvent cependant être distinguées [5] :

- Les polymères thermoplastiques TP (cristallins, semi-cristallins ou amorphes) ;
- Les polymères thermodurcissables TD (amorphes) ;
- Les élastomères (amorphes).

I.3.1.1. Les résines thermoplastiques :

Elles sont des polymères à chaînes linéaires ou ramifiées, c'est-à-dire monodirectionnelles ou bidirectionnelles. Elles sont en général fusibles et solubles. Les résines thermoplastiques présentent le gros avantage de pouvoir être alternativement ramollies par chauffage et durcies par refroidissement ce qui permet de faciliter leur moulage par viscoplasticité. Cette transformation est par ailleurs réversible, ce qui permet de recycler ce matériau. Les thermoplastiques sont mis en œuvre lorsque la température est voisine de leur température de transition vitreuse pour les thermoplastiques amorphes, et jusqu'à la température de fusion pour les thermoplastiques semi-cristallins. Parmi les résines thermoplastiques utilisées dans les composites on peut citer le polyéther-imide (PEI), le polyphénylsulfure (PPS), le polyéther-éther-cétone (PEEK), le polyéther-cétone-cétone (PEKK).[5]

I.3.1.2. Les élastomères :

Ils sont des polymères naturels ou synthétiques dont la structure particulière confère une importante élasticité (jusqu'à 500% d'allongement par rapport à la taille initiale).

A titre d'exemple, nous pouvons citer les élastomères suivants : les silicones d'élastomères, les polyuréthanes, le néoprène, le latex, etc....

I.3.1.3. Les résines thermodurcissables :

Elles sont les produits les plus employés comme matrice de matériaux composites "structuraux". Généralement associées avec des fibres longues, elles sont liquides ou liquides visqueuses et réticulent sous l'action thermiquement activée d'un catalyseur et d'un durcisseur. La transformation est irréversible et forme un produit infusible et insoluble.

Actuellement, les résines thermodurcissables principalement utilisées sont les suivantes :

- Les résines époxydes qui possèdent de bonnes caractéristiques mécaniques. Les résines de classe 180°C, réticulant à 180°C, sont souvent utilisées avec un renfort en fibres de carbone pour la réalisation de pièces structurales aéronautiques.
- Les résines phénoliques utilisées dans les applications nécessitant des propriétés de tenue au feu imposées par les normes dans les transports civils.
- Les résines polyamides sont elles aussi très onéreuses, mais présentent d'excellentes propriétés mécaniques notamment à haute température.

Le tableau suivant présente quelques caractéristiques des résines TP et TD

Caractéristiques	TP : Thermoplastiques	TD : Thermodurcissables
Etat de base	Solide (prêt à l'emploi : polymérisé)	Liquide visqueux à polymériser
Stockage matière de base	Illimité	Temps réduit (précautions à prendre)
Mouillabilité des renforts	Difficile	aisée
Moulage	Chauffage (fusion/ramollissement + refroidissement de fixation)	chauffage continu
Cycle	court	plus long (polymérisation)
Tenue au choc	assez bonne	limitée
Tenue thermique	réduite sauf nouveaux TP thermostables	meilleure
Chutes et déchets	recyclables	perdus
Conditions de mise en œuvre	bonnes + propreté	émanations pour méthode humide (allergie possible)

Tableau I.1 : Caractéristiques des résines thermoplastiques et thermodurcissables [3],[6]

I.3.2. Les charges et additifs :

Les charges sont généralement, sous forme d'éléments fragmentaires, en poudres ou liquide. Celles-ci permettent de modifier de manière sensible les propriétés mécaniques, électriques, magnétiques ou thermiques, d'améliorer l'aspect de surface ou bien, simplement, de réduire le prix de revient du matériau résultant.[5]

a) Charges renforçantes :

- Des sphères pleines ou creuses généralement en verre, en carbone ou en époxydes.
- Non sphériques (des écailles) de dimension transversal 100 à 500 μ m et d'épaisseur de 10 à 20 μ m. Généralement elles sont ajoutées à des résines dans des applications électriques ou électroniques.

b) Charges non renforçantes :

Permettent de diminuer le coût des résines tout en gardant les performances. Les principales charges sont en carbonates et silicates (silices).

Il ya aussi des charges ignifugeantes qui ont pour rôle de réduire ou d'empêcher les phénomènes de combustion. On peut citer par exemple l'hydrate d'alumine, l'oxyde d'antimoine.

c) Charges conductrices et antistatiques:

- Poudre ou paillettes métalliques en cuivre, fer, aluminium ;
- Des microbilles de verre métallisées (cuivre argent) ;
- Des particules de carbone (noir de carbone) ;
- Des filaments métalliques.

d) Les additifs:

Les additifs se trouvent en faibles quantités et interviennent comme :

- Lubrifiants et agents de démoulage ;
- Pigments et colorants ;
- Agents anti-retraits ;
- Agents anti-ultraviolets.

I.3.3. Le renfort:

Le renfort constitue l'armature ou le squelette, assurant la tenue mécanique (résistance à la traction et rigidité). Il est par définition de nature fibreux ou filamentaire. Le diamètre des fibres est d'environ 5 à 15 μ m [5].

Ce sont les renforts qui apportent l'essentiel des propriétés mécaniques d'un matériau composite. En fonction de leurs utilisation, les renforts peuvent être d'origines diverses : minérale, végétale, synthétique comme le montre l'organigramme suivant (*Figure I.3*)

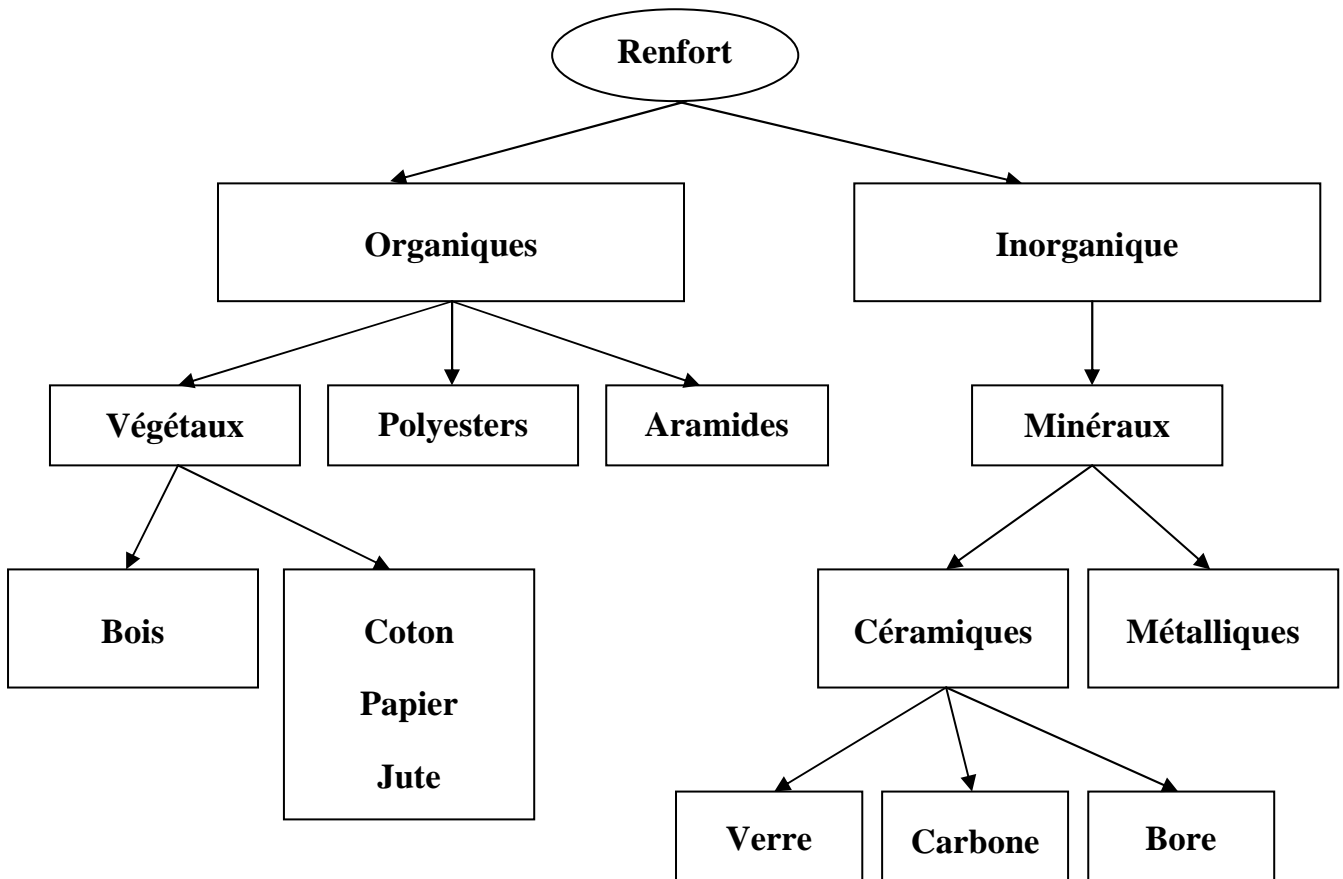


Figure I.3 : Principaux matériaux des renforts

Les renforts fibres se présentent sous diverses formes commerciales :

- Linéiques (fils, mèches,...etc.) ;
- Surfaceutes (tissus simples, mats,...etc.) ;
- Multidirectionnelles (tresses, tissus complexes,...etc.).

Il existe également des fibres courtes de 1 à 2mm qui sont dispersées dans la matrice, ou encore des fils coupés de 15 à 50mm de longueur. Leur utilisation est encore limitée en raison des difficultés de fabrication.

Le renfort peut se présenter suivant deux formes distinctes :

- Les structures aléatoires
- Les structures orientées

La structure du renfort est l'élément le plus déterminant du degré d'anisotropie du matériau composite.[2]

a) Les structures aléatoires :

Les structures aléatoires sont réalisées à partir de fibres coupées ou broyées. Ces fibres sont dispersées de façon aléatoire et maintenues par un liant soluble afin d'obtenir un mat à fibres courtes (Figure I.4). Ce type de renfort est utilisé lorsqu'on recherche une bonne résistance à la compression.

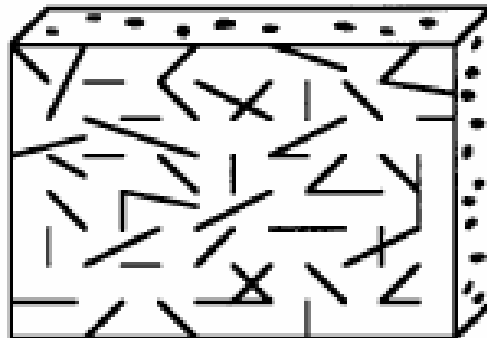


Figure I.4 : Structure aléatoire

b) Les structures orientées :

Les structures orientées se divisent en deux catégories :

❖ Les structures unidirectionnelles (UD) :

Dans ces structures, les fibres sont orientées dans une même direction qui sera la direction principale de contrainte (Figure I. 5). Certaines propriétés physiques, telles que les conductivités électrique et thermique, d'un pli unidirectionnel sont plus grandes dans un sens que dans l'autre.

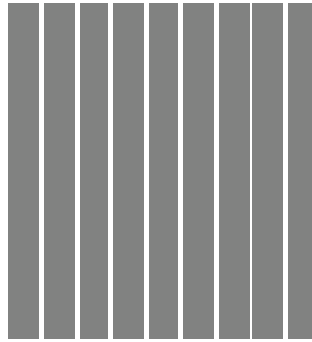


Figure I.5 : Structure unidirectionnelle (nappe)

❖ Les structures tissées :

Elles sont généralement obtenues par tissage (bi ou tri directionnel) ou par superposition de nappes unidirectionnelles. Les tissus diffèrent par le mode d'entrecroisement des fibres appelé armure.[2],[5]

Selon le schéma d'entrecroisement des fils de chaîne et les fils de trame que l'on nomme armure, on distingue plusieurs types de tissage (Figure I.6)



a) Toile ou taffetas

b) serge

c) satin

Figure I.6 : Mode d'entrecroisement des fibres [2]

I.3.3.1. Les principales fibres :

a) Fibres de verre :

Les fibres de verre qui sont à faible coût de production, et qui constituent le renfort le plus utilisé actuellement (bâtiment, nautisme et autres applications non structurales aéronautiques).

Leur fabrication se fait en général par étirage. Les oxydes minéraux constituant la matière première (silice, alumine... etc.) sont mélangés en proportion voulue suivant le type de fibre de verre désiré (*Tableau I.2*). Ce mélange est ensuite porté à très haute température ($>1550^{\circ}\text{C}$) afin d'être liquéfié pour être étiré à travers une filière sous forme de filaments de diamètres calibrés. Ces filaments isotropes sont ensimés pour optimiser l'adhésion de la matrice, puis assemblés pour former les fils, eux mêmes stockés sous forme de bobine appelée gâteau. [5]

Principaux constituants (%)	Type de verre		
	E	D	R
Silice SiO_2	53-54	73-74	60
Alumine Al_2O_3	14-15		25
Chaux CaO - Magnésie MgO	20-24	0.5-0.6	9
Oxyde de bore B_2O_3	6-9	22-23	6

Tableau I.2 : Types de verres [3]

Les propriétés de la fibre de verre dépendent du type de verre utilisé (E, D, R) et du mode de filage (continu ou discontinu).

Les fibres E sont utilisées pour les composites grandes diffusions (GD), les fibres D pour les applications dans la construction électrique (circuits imprimés), fibres R pour les composites hautes performances (HP).

Les fibres de verre sont utilisées dans plus de 95% des composites, et plus particulièrement pour les produits GD. Elles offrent,

- une bonne adhérence entre fibres et résines (matrices) ;
- de bonnes propriétés mécaniques, mais inférieures à celles de la fibre de carbone ;
- des propriétés d'isolation électrique acceptables pour la plupart des applications.

L'utilisation des fibres de verre dans les composites est principalement limitée par :

- une rigidité insuffisante pour certaines applications (pièces de structure primaire en aéronautique),
- un vieillissement accéléré au contact prolongé de l'eau, des rayonnements UV.

a) Fibres de carbone

Les fibres de carbone ont de très fortes propriétés mécaniques et sont élaborées à partir d'un polymère de base, appelé précurseur. Actuellement, les fibres précurseurs utilisées sont des fibres acryliques élaborées à partir du polyacrylonitrile (PAN). La qualité des fibres de carbone finales dépend fortement des qualités du précurseur. Le principe d'élaboration est de faire subir aux fibres acryliques une décomposition thermique sans fusion des fibres aboutissant à une graphitisation.[7]

On distingue deux types de fibres :

- Fibres à haute résistance (HR) $\sigma_{tr}=3000\text{Mpa}$
- Fibres à haut module (HM) de module en traction élevé $E_{tr}=400000\text{Mpa}$.

b) Fibre d'aramide :

Les fibres d'aramide (plus connues sous leurs noms commerciaux Kevlar®, Twaron®, Technora®, Nomex®, etc...) qui sont utilisées pour des applications bien plus ciblées, tel que la protection balistique (gilets pare-balles) ou pour les réservoirs souples de carburant en Formule 1, par exemple.

c) Fibres végétales :

Les fibres végétales qui présentent l'avantage d'être particulièrement écologiques car mises en œuvre à partir de produits naturels, tel que le chanvre, le lin, ou le bambou. Ces fibres au prix modeste sont de plus en plus utilisées pour la fabrication des composites dits « d'entrée de gamme ».

d) Fibres de bore :

Elles sont obtenues par dépôt chimique de chlorure de bore (BCL) et de l'hydrogène (H₂) sur un fil de tungstène de diamètre 13µm chauffé à une température comprise entre 1100 et 1300°C par effet joule.

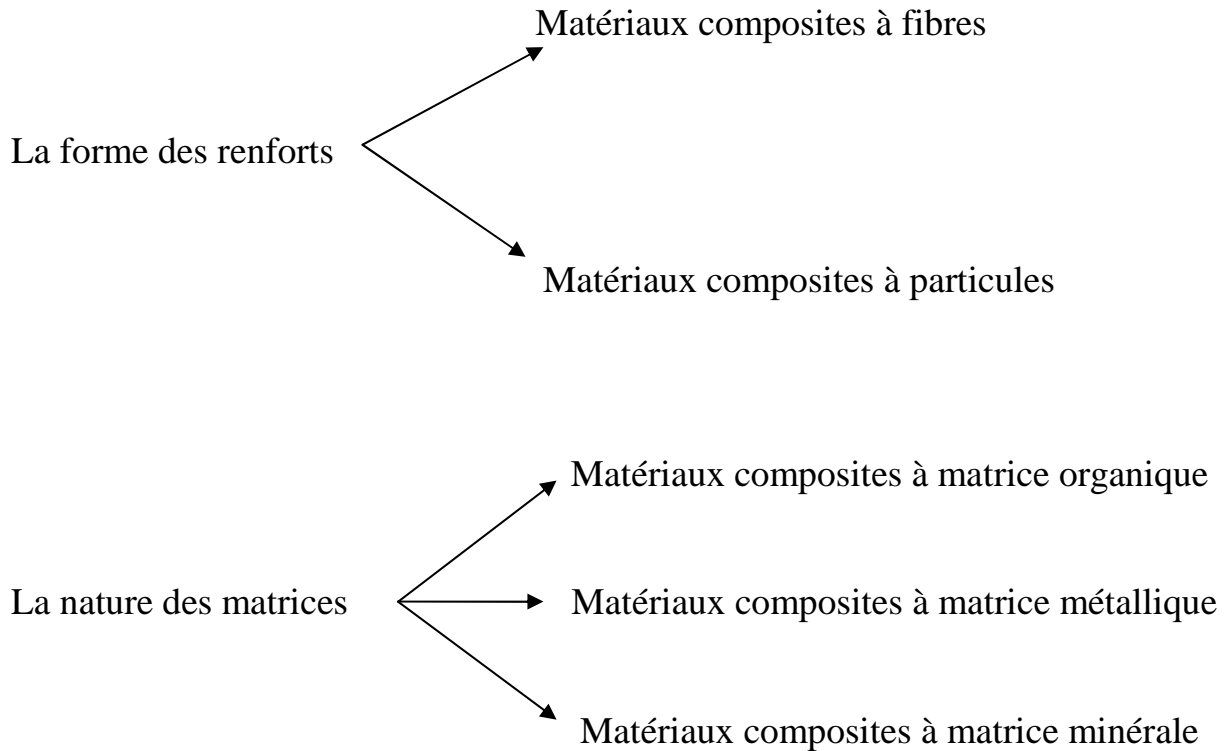
Le tableau suivant résume les principales caractéristiques des fibres.

Fibre	Densité ρ en Kg/m ³	Charge de rupture en Traction en Mpa	Charge de rupture en compression MPa	Allongement à la rupture en %	longitudinale en Mpa	Diamètre du filament élémentaire En μm
Verre E	2.54	3400	1200	4.8	73000	3 - 30
Verre R	2.48	4400	1300	5.4	86000	3 - 30
Aramide bas module	1.45	3100	500	2	70000	12
Aramide haut module	1.45	3100	500	1	130000	12
Carbone haute ténacité	1.78	2800	1800	0.5	200000	8
Carbone haut module	1.8	2200	1300		400000	8
Bore	2.63	3500	3500	0.8	400000	100 - 200
Acier XC10	7.85	1000			210000	
Aluminium	2.63	358			69800	

Tableau I.3 : Principales caractéristiques des fibres [4]

I.4. CLASSIFICATION DES MATERIAUX COMPOSITES :

Il est possible de définir des classes de matériaux composites en se référant à la nature ou à la forme des constituants.



I.5. ELABORATION DES COMPOSITES :

Le mélange renfort/matrice ne devient un véritable matériau composite résistant qu'au terme des dernières phases de fabrication, c'est-à-dire durant le durcissement de la matrice. Il sera alors impossible de le modifier ultérieurement, comme on peut modifier la structure d'un alliage métallique par traitement thermique par exemple. Dans le cas des composites à matrice résineuse, cette dernière doit être polymérisée.[3]

L'élaboration des composites se fait suivant la nature des matrices à savoir :

I.5.1. Matrices organiques :

Il existe des procédés de moulage spéciaux pour la fabrication des différentes pièces suivant la demande spécifique attendue. On distingue plusieurs procédés d'élaboration dont les plus courants sont :

- Moulage sans pression (moulage au contact, moulage par projection simultanée) ;
- Moulage sous vide ;
- Moulage par compression (moulage par compression à froid, moulage par compression à chaud) ;
- Moulage en continu ;
- Moulage par pultrusion ;
- moulage par centrifugation ;
- moulage par enroulement filamentaire (enroulement circonférentiel, enroulement hélicoïdal continu et discontinu, enroulement polaire).

I.5.2. Matrices métalliques :

Les procédés de fabrication sont classés selon le mode de mise en œuvre de la matrice, phase gazeuse, liquide ou solide. Les deux derniers sont les plus utilisés.

I.5.3. Matrices céramiques :

Les composites à matrices céramiques sont élaborés en faisant appel à des précurseurs par voie gazeuse ou liquide de la matrice. Ces procédés sont lents mais conduisent à des matériaux de haute qualité.

I.6. ARCHITECTURE DES MATERIAUX COMPOSITES :

Les structures des matériaux composites peuvent être classées en trois types :

- Les monocouches ;
- Les stratifiés ;
- Les sandwiches.

I.6.1 Les monocouches :

Le composite monocouche (couche élémentaire ou strate) correspond à l'unité élémentaire d'épaisseur, elle est constituée d'un ou plusieurs plis identiques (tissé, UD, mats,...) assemblés sans aucune orientation. Un pli est un semi produit de composites (fibres+matrice) présenté sous forme quasi-bidimensionnelle, feuille d'épaisseur faible (≈ 0.125 mm). On distingue, le pli UD (Le renfort est à structure UD), le pli tissé (Le renfort est à structure orienté) et le pli mat (Le renfort est à structure aléatoire).

I.6.2. Les composites stratifiés :

Le composite stratifié ou multicouches est un ensemble de couches empilées et orientées suivant un ordre de drapage défini et rendues solidaires par l'opération de polymérisation (Figure I. 7. Le drapage c'est l'orientation des plis par rapport à un référentiel donné. Il définit les propriétés mécaniques, électromagnétiques et thermiques globales du matériau composite. La figure I.8 montre un exemple de plan de drapage d'un stratifié.

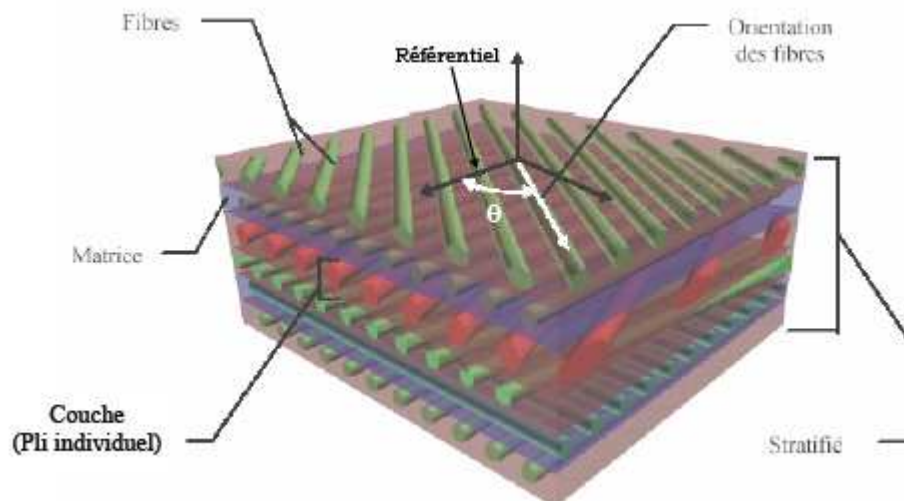


Figure I.7 : Composite stratifié

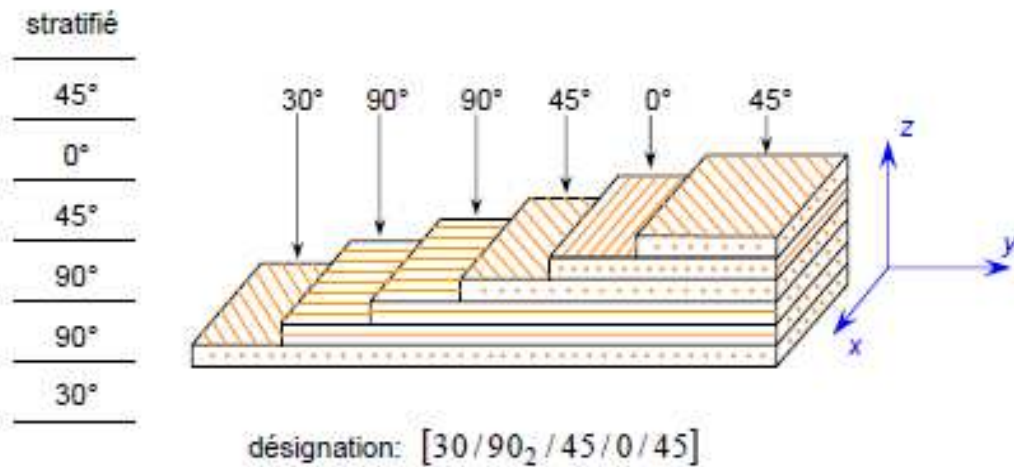


Figure I.8 : Exemple du plan du drapage d'un composite stratifié

Les stratifiés peuvent être de trois types :

1. **Equilibrés** : le stratifié contient autant de couches orientées suivant la direction $+\theta$ que de couches suivant la direction $-\theta$,
2. **symétriques** : les couches du stratifié sont disposées symétriquement par rapport à un plan moyen (miroir),
3. **orthogonaux** : le stratifié comporte autant de couches à 0° que de couches à 90° . Lorsque la symétrie miroir est réalisée, elle entraîne la symétrie des contraintes et empêche ainsi l'apparition des déformations d'ensembles de la pièce (voilement, gauchissement) [1].

Les avantages des stratifiés résident dans la possibilité d'adopter et de contrôler l'orientation des fibres pour que le matériau résiste à des sollicitations déterminées dans des meilleures conditions

I.6.3. Les composites sandwiches :

Le principe de la technique sandwich consiste à appliquer sur une âme (constituée d'un matériau ou d'une structure légère possédant de bonnes propriétés en compression), deux « feuilles » appelées peaux (possédant de bonnes caractéristiques en traction) ; l'objectif d'un tel procédé est de constituer une structure permettant de concilier légèreté et rigidité. [2], [3]

Les matériaux les plus couramment utilisés sont :

- Pour les âmes pleines (*Figure I.9*)
 - Le balsa ou bois cellulaires ;
 - Diverses mousses cellulaires ;
 - Des résines chargées de microsphères de verre appelées mousses syntactiques

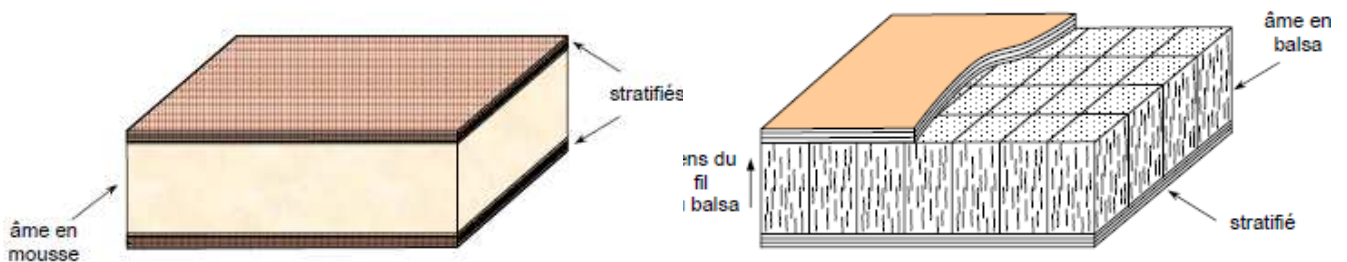


Figure I.9 : Matériaux sandwichs à âmes pleines

- Pour les âmes creuses (*Figure I.10*) essentiellement nids d'abeilles et profilés
 - Des alliages métalliques légers ;
 - Du papier kraft (enduit ou non de résine) ;
 - Du papier polyamide, type papier Nomex.

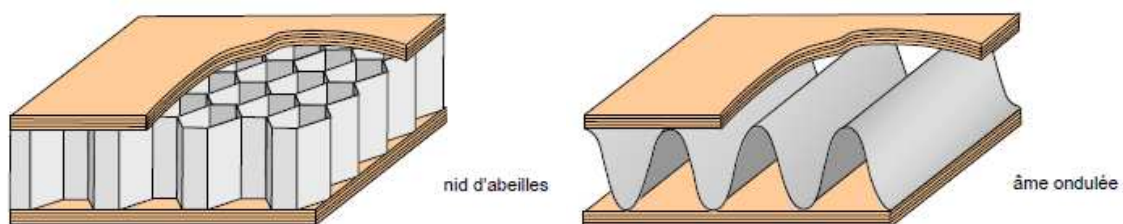


Figure I.10 : Matériaux sandwichs à âmes creuses

I.7. CONCLUSION :

Ce chapitre à été consacré à la présentation d'une description des matériaux composites.

L'étude des matériaux composites stratifiés est complexe. Cette complexité résulte de la prise en compte de plusieurs paramètres tels que l'anisotropie, la non linéarité et l'orientation des fibres. Il faut donc recourir à des techniques d'homogénéisation pour obtenir la relation de comportement tant au niveau de la monocouche (système homogène) que du stratifié.

CHAPITRE : II

METHODES NUMERIQUES

CHAPITRE II

METHODES NUMERIQUES

II.1. INTRODUCTION :

La modélisation est une pierre angulaire dans l'étude des phénomènes physique. Dans ce chapitre nous présentons les bases théoriques nécessaires pour mener à bien la modélisation électromagnétique des matériaux composites stratifiés.

Une fois le problème formulé on se doit de choisir une méthode de résolution parmi beaucoup d'autres.

Chaque méthode de résolution présente ses avantages et ses inconvénients d'où l'importance du choix de la méthode, ces méthodes de résolution peuvent être divisées en deux grandes catégories :

- Les méthodes analytiques
- Les méthodes numériques

Parmi les méthodes analytiques abordées dans ce chapitre, on cite : la méthode de séparation de variable, la méthode intégrale et la méthode des transformations conformes. Quant aux méthodes numériques on cite la méthode des différences finies, la méthode d'intégrale de frontières, la méthode des éléments finis, cette dernière méthode est utilisé dans le cadre de notre étude, donc elle est présentée dans ce chapitre d'une manière détaillée.

II.2. LES EQUATIONS DE MAXWELL :

Les équations générales de l'électromagnétisme ou équation de Maxwell sont en nombre de quatre.

Leurs formes différentielle et intégrale seront décrites dans les paragraphes suivants :

II.2.1. Forme différentielle des équations de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (II.1)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (II.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (II.3)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (II.4)$$

ρ : est densité de charge volumique

\vec{E} : Champ électrique [V/m]

\vec{D} : Vecteur induction électrique

\vec{H} : Vecteur champ magnétique [V/m]

\vec{B} : Vecteur induction magnétique [T]

\vec{J}_c : Vecteur densité de courant de conduction [A/m²]

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_d$: Vecteur densité de courant de déplacement [A/m²].

La densité de courant de conduction est formée de la densité de courant source et de la densité des courants induits.

$$\vec{J}_c = \vec{J}_s + \vec{J}_i \quad (II.5)$$

$$\vec{J}_s = -\Gamma \overrightarrow{grad} (V) \quad (II.6)$$

$$\vec{J}_i = -\Gamma \left(\frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\nabla} \times \vec{B} \right) \quad (II.7)$$

\vec{J}_s :densité de courant source [A/m²].

J_i :densité de courants induits [A/m²].

\vec{V} : vitesse de la partie en mouvement dans le champ d'induction magnétique [m/s].

\vec{A} : potentiel vecteur magnétique [T.m]

τ : Conductivité électrique [$\Omega.m$]

II.2.2. Forme intégrale des équations de Maxwell:

II.2.2.1.forme intégrale de la première équation de Maxwell

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \vec{ds} = \iiint_V \rho \, dv \quad (II.8)$$

En appliquant le théorème de la divergence on obtient :

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \, dv = \iiint_V \rho \, dv \quad (II.9)$$

$$D'où : \iint_S \vec{D} \cdot \vec{ds} = Q_i \quad (II.10)$$

S : Surface qui entoure le volume V [m²]

Q_i : Charge totale contenue à l'intérieur de la surface S [C].

La formulation intégrale de la première équation de Maxwell est le théorème de Gauss

II.2.2.2.forme intégrale de la deuxième équation de Maxwell

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (II.11)$$

En intégrant les deux membres par rapport à la surface S , on aura :

$$\iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \vec{ds} = \iint_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \vec{ds} \quad (II.12)$$

Dans le cas où la surface S est indépendante du temps (le système ne se déforme pas) on aura :

$$\iint (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \vec{ds} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_s (\vec{B} \cdot \vec{ds}) \quad (II.13)$$

Sachant que le flux magnétique du vecteur induction magnétique à travers une surface S s'exprime par :

$$\phi = \iint_s \vec{B} \cdot \vec{ds} \quad (II.14)$$

Ou en appliquant le théorème du relationnel :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (II.15)$$

La deuxième équation de Maxwell représente la loi de Faraday . Lentz

II.2.2.3. forme intégrale de la troisième équation de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (II.16)$$

En intégrant les deux parties par rapport au volume s'appuyant sur la surface S, on aura :

$$\iiint_v (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dv = 0 \quad (II.17)$$

En appliquant le théorème de la divergence :

$$\iint_s \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0 \quad (II.18)$$

La troisième équation de Maxwell traduit la conservation du flux magnétique.

II.2.2.4. forme intégrale de la quatrième équation de Maxwell

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (II.19)$$

En intégrant le courant de déplacement et en intégrant les deux parties par rapport à la surface s on aura :

$$\iint_s (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) \vec{ds} = \iint_s \vec{J} \vec{ds} \quad (II.20)$$

D'où en appliquant le théorème du rotationnel :

$$\oint_c \vec{H} \vec{d\ell} = \sum I_i \quad (II.21)$$

I_i : Courant i contenu à l'intérieur du contour fermé.

La quatrième équation de Maxwell est donc une généralisation du théorème d'Ampère.

II.2.3. Les lois constitutives du milieu :

Les lois constitutives du milieu sont les relations qui existent entre les inductions magnétique et électrique respectivement avec les champs magnétique et électrique. Elles sont comme suit :

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (II.22)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \quad (II.23)$$

μ : Perméabilité magnétique

ε : Permittivité électrique

La perméabilité magnétique est la capacité d'un milieu à s'aimanter et la permittivité électrique est la capacité d'un milieu à se charger.

II.2.4. La loi d'Ohm :

L'expression locale de la loi d'Ohm est donnée comme suit:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{II.24})$$

II.2.5. Equation de conservation de la charge :

Nous avons :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{II.25})$$

en dérivant cette équation par rapport au temps :

On aura :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \frac{d\rho}{dt} \quad (\text{II.26})$$

De la quatrième équation on peut déduire :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{II.27})$$

$$\text{D'ou : } \vec{\nabla} \cdot (\vec{J}_c) + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{II.28})$$

$$\text{Donc : } \vec{\nabla} \cdot (\vec{J}_c) + \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (\text{II.29})$$

II.3. DIFFERENTS TYPES D'EQUATIONS AUX DERIVEE PARTIELLES:

La résolution d'un problème physique passe généralement par sa traduction sous forme d'une équation aux dérivées partielles qui dépend d'un ou plusieurs paramètres. Cette équation peut avoir différentes formes. Sa résolution dans le cas de plusieurs variables nécessite l'utilisation de l'outil informatique on distingue 03 types d'équations aux dernières partielles.

II.3.1. Equation elliptique :

L'équation elliptique traite les problèmes stationnaires. En coordonnées cartésiennes l'équation est de la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = F \quad (II.30)$$

- $\Psi(x,y,z)$: la fonction inconnue du problème
- F : terme source

II.3.2. Equation parabolique :

L'équation parabolique traite les régimes transitoires, elle peut traduire plusieurs phénomènes, tel que, la pénétration des courants induits la diffusion de la chaleur. En coordonnées cartésiennes l'équation s'écrit sous la forme suivante:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial t} = F \quad (II.31)$$

- $\Psi(x, y, z, t)$: fonction inconnue du problème
- α : coefficient.

II.3.3. Equation hyperbolique :

L'équation hyperbolique traite les problèmes de propagation d'onde. En coordonnées cartésiennes elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \beta \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = F \quad (II.32)$$

- β : coefficient.

II.4. METHODES ANALYTIQUES :

Pour résoudre les problèmes électromagnétiques régis par des équations différentielles aux dérivées partielles, plusieurs méthodes sont utilisées telles que :

- La méthode de séparation des variables.
- La méthode des transformations conformes.
- La méthode intégrale.

La méthode de séparation des variables est couramment utilisée, elle est basée sur le principe suivant :

$$A_{\varphi}(r, z) = A_{\varphi}(r) \cdot A_{\varphi}(z) \quad (II.33)$$

Avec $A_{\varphi}(r, z)$: solution de l'équation aux dérivées partielles considérés.

L'introduction de la relation (II.4) dans l'équation différentielle considérée, nous permet d'obtenir des équations indépendantes de sorte que :

$A_{\varphi}(r)$: est une fonction ne dépendant que de la variable r .

$A_{\varphi}(z)$: est une fonction ne dépendant que de la variable z

L'avantage des méthodes analytiques est de présenter correctement les phénomènes physiques étudiés et leurs mises en œuvre est relativement simple.

Lorsque les équations différentielles à résoudre sont fortement non linéaires ou que les géométries des dispositifs à étudier sont complexes les méthodes analytiques deviennent très lourdes et fastidieuses. Pour surpasser ce type de problèmes on fait appel aux méthodes numériques.

II.5. METHODES NUMERIQUES :

L'évolution de la technologie et les exigences du marché amènent l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes et coûteux. L'utilisation des méthodes numériques pour la modélisation des dispositifs électromagnétiques est devenue un chemin incontournable en raison des avantages qu'elles présentent. Elles traitent des dispositifs ayant des géométries complexes et tiennent compte des non linéarités des problèmes étudiés.

Dans le cadre du calcul scientifique en général et dans le domaine de l'électromagnétisme en particulier, parmi les méthodes numériques utilisées on peut citer :

- méthode des différences finies
- méthode des éléments finis
- méthode d'intégrale de frontières.
- Elément finis - intégrale de frontière (méthode mixte).

II.5.1.Méthode des différences finis :

C'est une méthode très populaire par l'avènement de l'ordinateur [8]. Elle permet d'obtenir des résultats satisfaisants dans de nombreux problèmes mais nécessite un savoir faire une expérience importante.

II.5.1.1.Principe de la méthode :

Cette méthode est basée sur la transformation de l'opérateur différentiel en un opérateur aux différences ou chaque dérivée est approchée par une différence de valeurs de l'inconnue aux nœuds du domaine de résolution, cela revient à remplacer le milieu continu où l'équation est définie par un ensemble de points discrets auxquels s'applique l'équation discrétisée [8].

L'ensemble des points de discrétisation constitue un maillage (ou utilise généralement un réseau carré). Ainsi l'équation aux dérivées partielles, est remplacée par un système fini d'équations algébriques en chacun des points (nœuds).

Les dérivées premières ou secondes de l'inconnue « A » en un point, pris dans un carré d'un maillage différences finies, sont exprimées en fonction des valeurs de l'inconnue « A » aux points voisins.

II.5.1.2. Approximation des dérivées première et seconde :

Soit le réseau carré de la figure suivante :

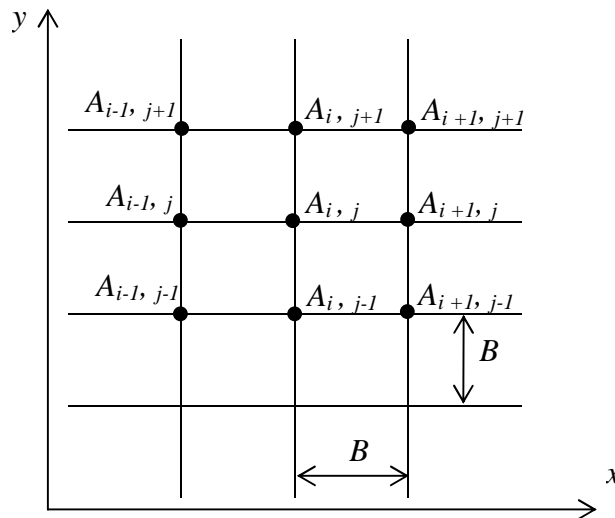


Figure II.1 : Réseau carré d'un maillage différences finis

L'approximation des dérivés aux point (i,j) est donnée par :

◆ Dérivées d'ordre 1 :

$$\left(\frac{\partial A}{\partial X}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j}}{2B}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{A_{i,j+1} - A_{i,j-1}}{2B}$$

◆ Dérivées d'ordre 2 :

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j}}{B^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{B^2}$$

D'où le laplacien discrétisé s'écrit :

$$(\Delta A)_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_{i,j} + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{1}{B^2} \left[A_{i+1,j} + A_{i-1,j} + A_{i,j+1} + A_{i,j-1} - 4A_{i,j} \right] \quad (II.34)$$

C'est la formule à « cinq points » [8].

En variant i et j on aura le système matriciel suivant :

$$[S][A]=[F]$$

Avec :

$[S]$: Matrice carrée pleines.

$[A]$: Matrice des inconnues

$[F]$: Terme source

La résolution de ce système algébrique nous permet d'avoir la distribution de l'inconnue A à l'intérieur du domaine d'étude.

◆ **Avantages de la méthode :**

- Préparation et introduction des données relativement simple.
- Mise en œuvre relativement simple.

◆ **Inconvénients de la méthode :**

- Méthode incertaine pour les géométries complexes.
- La taille du système d'équation est très importante, ce qui engendre un temps de résolution important ainsi que l'espace mémoire alloué à la résolution.

II.5.2.Méthode d'intégrale de frontières :

La méthode d'intégrale de frontières trouve son utilité dans les milieux linéaires lorsque les fréquences de travail sont très importantes, ce qui donne une profondeur de pénétration très faible vis-à-vis des autres dimensions géométriques du dispositif à étudier [9].

Cette méthode permet la discrétisation des grandeurs recherchées sur la frontière du domaine, elle a l'avantage d'obtenir un système algébrique réduit, ses inconvénients est qu'elle ne résout que les systèmes linéaires, présente une légère imprécision due à la considération des courants surfaciques.

II.5.3.Méthode des éléments finis :

II.5.3.1.Introduction :

La méthode des éléments finis est une méthode numérique de résolution des équations différentielles aux dérivées partielles et de leur condition aux limites.

C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique. Problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires défini dans un domaine géométrique quelconque à un, deux ou trois dimensions.

De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes et aux domaines de formes complexes [10].

II.5.3.2. Principe de la méthode :

Le principe de la méthode des éléments finis est basé sur une formulation intégrale du problème aux dérivées partielles et de leurs conditions aux limites. Cette formulation peut être de deux types : variationnelle ou résidus pondérés.

II.5.3.3. Description de la méthode des éléments fins :

Pour la résolution d'un problème par la méthode des éléments finis on procède par étapes successives [11] :

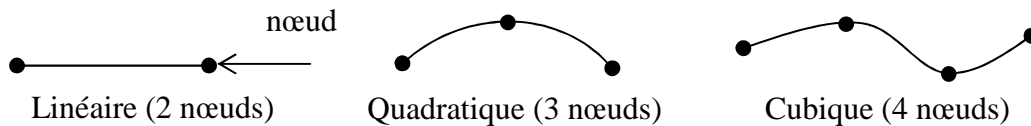
- Traduire le problème physique sous forme d'un modèle mathématique (équations aux dérivées partielles avec leur condition aux limites sur le bord du domaine d'étude, nécessaires et suffisantes pour que la solution soit unique).
- Construire une formulation intégrale du système différentiel à résoudre et de ses conditions aux limites : c'est la formulation intégrale du système.
- Diviser le domaine d'étude en sous domaines appelés éléments : c'est le maillage (discrétisation géométrique).
- Choisir la famille des champs locaux, c'est-à-dire à la fois la position des nœuds dans les sous domaines et les polynômes qui définissent le champ local en fonction des valeurs aux nœuds, la maille complétée par ces informations est alors appelée élément.
- Ramener le problème à un problème discret, c'est la discrétisation. En effet, toute solution approchée est complètement déterminée par les valeurs aux nœuds des éléments, il suffit donc de trouver les valeurs à attribuer aux nœuds pour décrire une solution approchée.
- Résoudre le problème discret.
- Construire la solution approchée à partir des valeurs trouvées aux nœuds et en déduire d'autres grandeurs.
- Visualiser et exploiter la solution.

II.5.3.4. Discrétisation du domaine d'étude (le maillage):

Le maillage consiste à diviser le domaine d'étude Ω en sous domaine Ω_i , appelés mailles, pour cela, il faut donc :

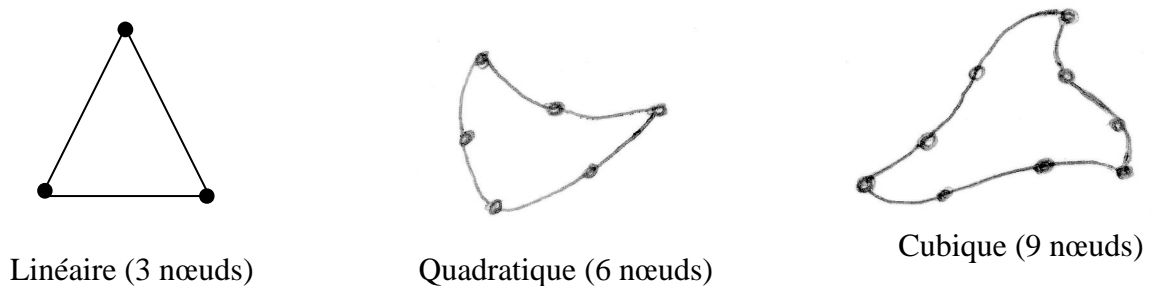
- Définir le domaine Ω .
- Le diviser en mailles Ω_i tel que l'ensemble des Ω_i soit une partition du domaine Ω pour des problèmes à une deux ou trois dimensions, les éléments de base sont :

a. L'élément à une dimension :

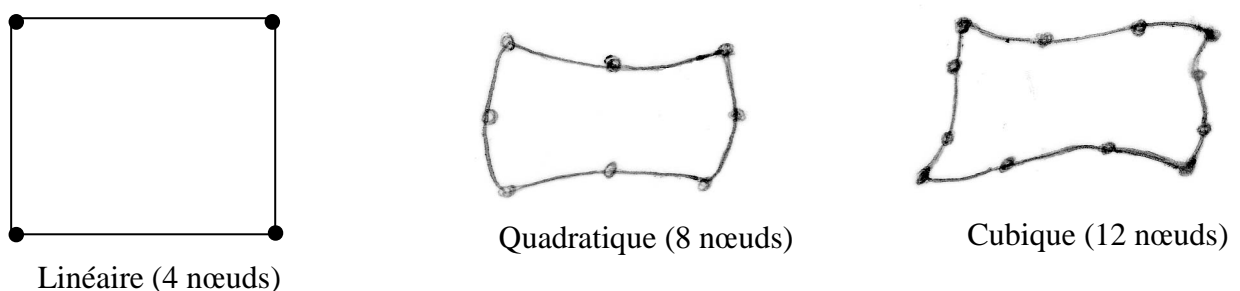


b. L'élément à deux dimensions : Ce sont des triangles ou quadrilatères

- Éléments triangulaires :



- Éléments quadrilatéraux :



Chaque élément est repéré par les coordonnées de ses nœuds (*Figure II.2*)

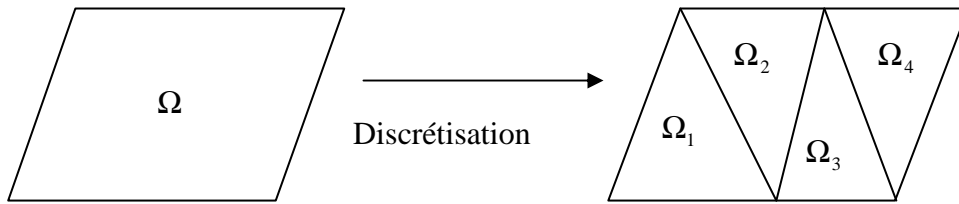


Figure II.2 : discrétisation du domaine Ω

La figure ci-dessus montre un exemple de discrétisation ou de maillage du domaine Ω en quatre sous domaine Ω_e .

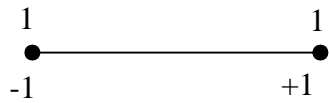
Dans un maillage, toutes les mailles ont des formes et des dimensions différentes. On trouve des mailles linéiques, des mailles surfaciques et des mailles volumiques.

Le maillage en éléments finis doit respecter les deux règles suivantes :[10]

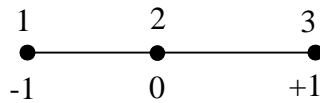
- Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés sur leur frontière commune, si elle existe. Les frontières entre éléments peuvent être des points, des courbes ou des surfaces.
- L'ensemble de tous les éléments Ω_e doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine Ω

Forme d'éléments de référence classique :

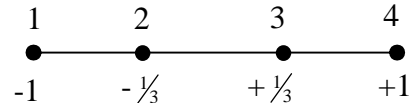
- Élément à une dimension :



Linéaire 2 nœuds



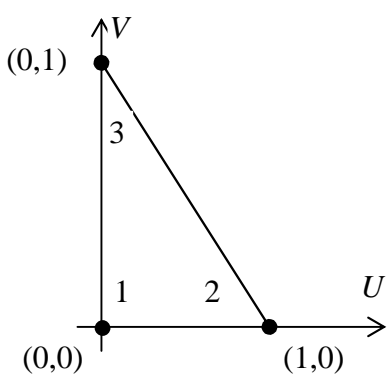
Quadratique 3 nœuds



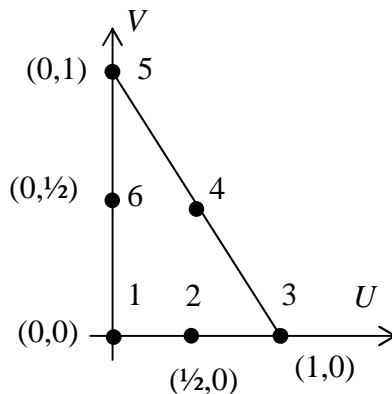
Cubique 4 nœuds

- Élément à deux dimensions :

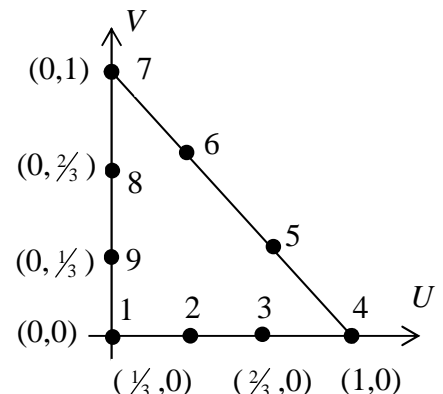
• Élément triangulaire :



Linéaire (03 nœuds)



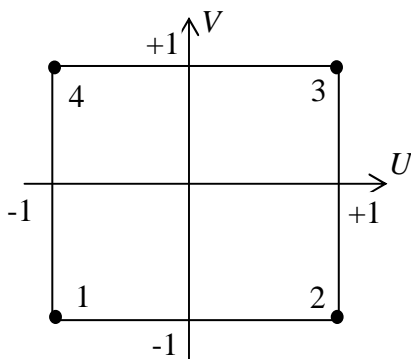
Quadratique (06 nœuds)



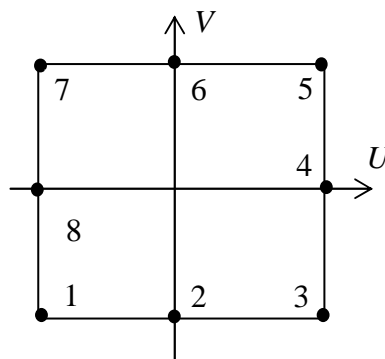
Cubique (09 nœuds)

$$\Omega' : \begin{cases} U + V \leq 1 \\ U \geq 0 \\ V \geq 0 \end{cases}$$

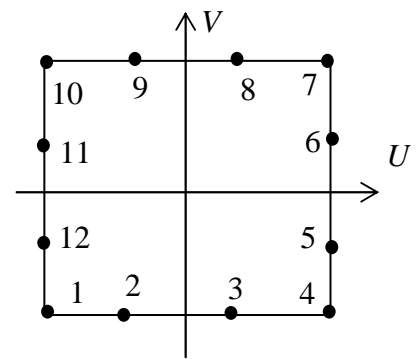
• Éléments carrés :



Linéaire (04 nœuds)



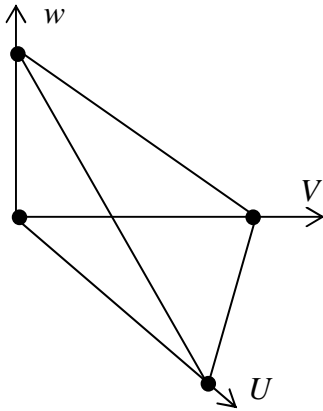
Quadratique (08 nœuds)



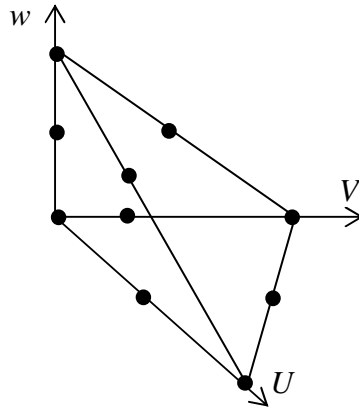
Cubique (12 nœuds)

$$\Omega' : \begin{cases} -1 \leq U \leq +1 \\ -1 \leq V \leq +1 \end{cases}$$

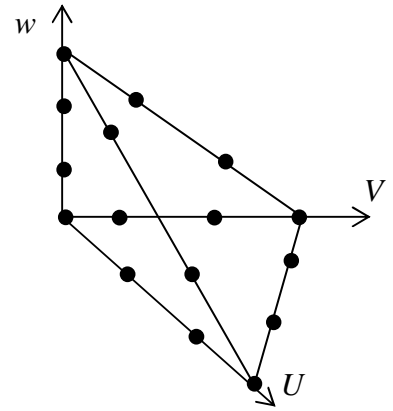
- **Eléments à trois dimensions :**



Linéaire (04 nœuds)



Quadratique (10 nœuds)



Cubique (16 nœuds)

$$\Omega^r : \begin{cases} U + V + W \leq 1 \\ U \geq 0 \\ V \geq 0 \\ W \geq 0 \end{cases}$$

II.5.3.5. Approximation nodale :

Soit f une fonction mathématique traduisant un système physique. Cette fonction peut être représentée par une fonction approchée $U(x)$ de telle sorte que la différence $e(x)=f(x)-U(x)$ soit négligeable. Dans le cas de la méthode des éléments finis, la fonction $U(x)$ est construite généralement à base de fonctions Polynomiales. Soit : $U(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_nx^{n-1}$ l'approximation de $f(x)$.

$$\text{Soit : } U(x) = \langle P_1(x) + P_2(x) + \dots + P_n(x) \rangle \left\{ \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{array} \right\} \quad (II.35)$$

Cette relation (II.6) définit une approximation non nodale.

Où : P_1, P_2, \dots, P_n sont des fonctions connues linéairement indépendantes.

a_1, a_2, \dots, a_n sont les paramètres de l'approximation

$$\left. \begin{array}{l} U(x_1) = a_1 + a_2x_1 + a_3x_1^2 + \dots + a_nx_1^{n-1} = f(x_1) \\ U(x_2) = a_1 + a_2x_2 + a_3x_2^2 + \dots + a_nx_2^{n-1} = f(x_2) \\ \dots\dots\dots \\ U(x_n) = a_1 + a_2x_n + a_3x_n^2 + \dots + a_nx_n^{n-1} = f(x_n) \end{array} \right\} \quad (II.36)$$

Le système d'équations (II.7) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad (II.37)$$

II.5.3.6.1. Formulation variationnelle :

La formulation intégrale est donnée par :

$$F(A) = \int_{\Omega} L(A) d\Omega \quad (II.41)$$

$$\text{Avec : } L(A) = W_c - W_p$$

$L(A)$: est la fonctionnelle, qu'on construit à partir de la différence entre l'énergie cinétique (W_c) , l'énergie potentielle (W_p) du système à étudier.

Ω : Domaine d'étude

A : Inconnue

Dans le cas d'un phénomène magnétostatique, la fonction est donnée par :

$$L(A) = \int_0^B \nu b db - JA \quad (II.42)$$

La fonctionnelle d'énergie est donnée alors comme suite:

$$F(A) = \int_{\Omega} \left[\int_0^B \nu b db - JA \right] d\Omega \quad (II.43)$$

Où : ν : Réductivité magnétique

B : Module de l'induction magnétique

J : Densité de courant

A : Potentiel vecteur magnétique

b : Induction magnétique.

La résolution du problème variationnel revient à minimiser la fonctionnelle d'énergie $F(A)$.

Pour minimiser cette fonctionnelle on utilise le principe de Tayleigh – Ritz qui consiste à écrire.

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = 0 \quad (\text{II.44})$$

Ou
$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_1} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_2} = \dots = \frac{\partial F(A)}{\partial A_{x1}} = 0$$

Avec : N : nombre de nœuds du domaine d'étude

A_i : inconnue au nœuds « i » du domaine

L'utilisation de la méthode des éléments finis consiste à poser :

$$F(A) = \sum_{e=1}^N F_e(A^e) \quad (\text{II.45})$$

La minimisation de cette équation nous donne :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = \sum_{e=1}^N \frac{\partial F_e(A^e)}{\partial A_i} \quad (\text{II.46})$$

Cette dernière doit s'écrire pour tous les nœuds i de l'élément. Sachant que :

$$A^e = \sum_{j=1}^N \alpha_j^e A_j \quad (\text{II.47})$$

Avec :

$F_e(A^e)$: Fonctionnelle d'énergie de l'élément « e »

A_j^e : Inconnu de l'élément « e » au nœud « j ».

α_j^e : Fonction de forme au nœud « j » de l'élément « e ».

La résolution du problème consiste à résoudre N systèmes algébriques à N inconnues.

II.5.3.6.2. Formulation résidus pondérés :

La méthode des résidus pondérés consiste à choisir les fonctions projectives de façon à minimiser l'intégrale du résidu [12]. Elle traite directement l'équation aux dérivées partielles que l'on veut résoudre

$$\text{Ce résidu est défini par : } R = L(A) - f_v \quad (\text{II.48})$$

R : Résidu d'approximation

L : Opérateur différentiel

f_v : Fonction définie sur le domaine d'étude (Ω).

A : Inconnu

A l'aide de fonction de pondération bien choisies on impose à l'intégrale du résidu de s'annuler en n points de domaine (Ω).

$$\int_{\Omega} R_i \Psi_i d\Omega = 0 \quad (\text{II.49})$$

Ψ_i : Fonction de pondération ou de projection

$i = 1, 2, \dots, n$

R_i : Résidu de l'approximation

La méthode des résidus pondérés présente un intérêt particulier par rapport à la formulation variationnelle dans la mesure où son application ne nécessite pas la connaissance au préalable de la fonctionnelle d'énergie [12].

Selon le choix de Ψ_i , l'équation (II.49) conduit à différentes méthodes [11] [12].

- Méthode de collocation par points ;
- Méthode des moindres carrés,
- Méthode de GALERKINE.

❖ Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis:[13]**- Avantages :**

- ✓ Adaptation aux géométries complexes ;
- ✓ Prise en compte des non linéarités accrues ;
- ✓ Temps de calcul relativement avantageux ;

- Inconvénients :

- ✓ Mise en œuvre relativement difficile ;
- ✓ Prise en considération de domaines infinis ;
- ✓ Présence de singularité dans le domaine d'étude.

II.5.4.Méthode mixtes :

Dans l'étude des problèmes qui englobent divers sous domaines d'études (air, induit, inducteur,...), on fait appel à des méthodes mixtes qui donnent des résultats plus performants et plus exacts.

L'utilisation de ces méthodes permet de réduire la taille des systèmes algébriques et de gagner en temps de résolution.

Parmi ces méthodes, on peut citer :

- ✓ Éléments finis – intégrale de frontière ;
- ✓ Éléments finis – Impédance de surface ;
- ✓ Éléments finis – analytique.

II.6. FORMULATION ELEMENTS FINIS :

II.6.1. Modèle magnétostatique bidimensionnel :

a/Cas cartésien :

L'équation magnétostatique en terme de potentiel vecteur magnétique est donnée par :

$$\vec{\nabla} \wedge \nu (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{J}_S \quad (II.50)$$

Avec :

\vec{A} : Potentiel vecteur magnétique [T.m]

\vec{J}_S : Densité de courant [A/m²].

$\nu = \frac{1}{\mu}$: rèluctivité magnétique du milieu

En appliquant la méthode de GALERKINE à l'équation (II.21) on aura :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i (\vec{\nabla} \wedge \nu (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - \vec{J}_S) d\Omega = 0 \quad (II.51)$$

Le modèle considéré étant à deux dimensions, le potentiel vecteur magnétique \vec{A} ne comporte qu'une seule composante parallèle à l'axe \vec{O}_z

La densité de courant \vec{J}_S a la même direction que celle du potentiel vecteur magnétique \vec{A} .

Les composantes du potentiel vecteur magnétique et de la densité de courant sont :

$$\vec{A} = (0, 0, A_z)$$

$$\vec{J} = (0, 0, J_z)$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \frac{\partial^2 A_z}{\partial_z \partial_x} \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial_y \partial_z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right) \vec{k} \quad (\text{II.52})$$

Sachant que la variation du potentiel vecteur magnétique suivant l'axe \vec{O}_z est nulle (plan d'étude étant bidimensionnel), on aura donc :

$$\vec{\nabla} \wedge (\nu \vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial_y} \right) \right] \vec{k} \quad (\text{II.53})$$

Avec : \vec{k} vecteur unitaire suivant l'axe \vec{O}_z

En remplaçant (II.53) dans (II.51) on aura :

$$\iint_{\Omega} \left[- \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial_y} \right) \right) \right] \alpha_i d_x d_y = \iint_{\Omega} J_{sz} \alpha_i d_x d_y \quad (\text{II.54})$$

En appliquant le théorème de GREEN au premier terme de la relation (II.54) on pourra écrire :

$$\left[\iint_{\Omega} - \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial_y} \right) \right) d_x d_y = \right. \quad (\text{II.55}) \\ \left. - \iint_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial A_z}{\partial_x} \frac{\partial \alpha_i}{\partial_x} + \frac{\partial A_z}{\partial_y} \frac{\partial \alpha_i}{\partial_y} \right) d_x d_y + \int_{\Gamma} \nu \frac{\partial A_z}{\partial_n} \alpha_i d\Gamma \right]$$

L'équation (II.54) peut être écrite alors comme suit :

$$\iint_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial_x} \frac{\partial A_z}{\partial_x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial_y} \frac{\partial A_z}{\partial_y} \right) d_x d_y = \iint_{\Omega} J_{sz} \alpha_i d_x d_y + \int_{\Gamma} \nu \frac{\partial A_z}{\partial_n} \alpha_i d\Gamma \quad (\text{II.56})$$

Dans le cas de condition aux limites de type Dirichlet ou Neumann homogènes,

l'intégrale de contour est nulle : $\int_{\Gamma} \nu \frac{\partial A_z}{\partial_n} \alpha_i d\Gamma = 0$

L'équation (II.56) s'écrit alors :

$$\iint_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial_x} \frac{\partial A_z}{\partial_x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial_y} \frac{\partial A_z}{\partial_y} \right) d_x d_y = \iint_{\Omega} J_{sz} \alpha_i d_x d_y \quad (\text{II.57})$$

En écriture condensée, l'équation (II.57) s'écrit :

$$\iint_{\Omega} v \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \overrightarrow{\nabla A_z} d_x d_y = \iint_{\Omega} \alpha_i J_{sz} d_x d_y \quad (\text{II.58})$$

Sachant que la fonction d'approximation exprimée sous sa forme discrète s'écrit :

$$A_z = \sum_{j=1}^n \alpha_j A_j$$

n : nombre de nœuds du domaine.

α_j : Fonction de forme au nœud j .

En introduisant la forme discrète du potentiel vecteur magnétique \vec{A} dans l'équation (II.29) on aboutit à :

$$\sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} v \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \overrightarrow{\nabla \alpha_j} d_x d_y \right] A_j d_x d_y = \iint_{\Omega} \alpha_i J_{sz} d_x d_y \quad (\text{II.59})$$

Avec : i, j : Entiers naturels, variant de 1 à n

En écrivant la relation (II.30) pour tous les nœuds du domaine on aboutit au système qui s'écrit sous la forme matricielle comme suit :

$$[M][A] = [K] \quad (\text{II.60})$$

Avec :

$[A] = [A_1, A_2, \dots, A_n]$ Vecteurs des inconnus du domaine.

A_j : L'inconnue au nœud j du domaine.

$M_{ij} = \iint_{\Omega} v \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \overrightarrow{\nabla \alpha_j} d_x d_y$: Éléments de la matrice $[M]$.

$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i J_{sz} d_x d_n$: Éléments du vecteur $[K]$.

b/Cas axisymétrique :

En coordonnées cylindriques, le potentiel vecteur magnétique \vec{A} et la densité de courant \vec{J} sont définis respectivement par les coordonnées (A_r, A_φ, A_z) et (J_r, J_φ, J_z) .

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_z \quad (\text{II.61})$$

Dans le modèle considéré, les deux vecteurs \vec{A} et \vec{j} ne possèdent que les composantes A_φ et J_φ . De plus le plan d'étude étant $[r, z]$, le potentiel vecteur magnétique \vec{A} n'a pas de variation suivant φ .

Il vient alors :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \vec{u}_z \quad (\text{II.62})$$

$$\text{D'où : } v(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = v \left(-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \frac{v}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \vec{u}_z \quad (\text{II.63})$$

En appliquant les relations (II.63) et (II.61) et après simplification on obtient :

$$\vec{\nabla} \wedge (v(\vec{\nabla} \wedge \vec{A})) = \left(-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) \right) \vec{u}_\varphi \quad (\text{II.64})$$

L'équation magnétostatique en coordonnées cylindriques s'écrira alors :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial z} \right) = -J_\varphi \quad (\text{II.65})$$

Sachant qu'en coordonnées cylindriques : $A = r A_\varphi$

L'équation (II.65) devient :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial A}{\partial z} \right) = -J_{\varphi} \quad (\text{II.66})$$

L'application de la méthode de Galerkin à l'équation magnétostatique (II.66) nous donne :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial A}{\partial z} \right) + J_{\varphi} \right] d_r d_z = 0 \quad (\text{II.67})$$

L'équation (II.67) peut s'écrire comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial A}{\partial z} \right) \right] d_r d_z = \iint_{\Omega} -\alpha_i J_{\varphi} d_r d_z \quad (\text{II.68})$$

L'application du théorème de Green au premier terme de l'équation (II.68) et en supposant les conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann homogènes cette relation (II.68) s'écrit alors :

$$\iint_{\Omega} \frac{v}{r} \overrightarrow{\nabla} \alpha_i \cdot \overrightarrow{\nabla} A d_r d_z = \iint_{\Omega} \alpha_i J_{\varphi} d_r d_z \quad (\text{II.69})$$

En écriture condensée, l'équation (II.69) s'écrit :

$$\iint_{\Omega} \frac{v}{r} \overrightarrow{\nabla} \alpha_i \cdot \overrightarrow{\nabla} A d_r d_z = \iint_{\Omega} \alpha_i J_{\varphi} d_r d_z \quad (\text{II.70})$$

La fonction d'approximation exprimée sous sa forme discrète s'écrit :

$$A_{\varphi}(r, z) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(r, z) A_j \quad (\text{II.71})$$

$\alpha_j =$ fonction de forme au nœud j du domaine.

n : nombre de nœuds du domaine.

En introduisant la forme discrète du potentiel vecteur magnétique A dans l'équation (II.71) on aboutit à l'équation suivante :

$$\sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} \frac{v}{r} \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla A_j} A_j d_r d_z \right] = \iint_{\Omega} J_{\phi} \alpha_i d_r d_z \tag{II.72}$$

L'écriture de l'équation (II.72) pour tous les nœuds du domaine, nous permet d'aboutir au système matriciel suivant :

$$[M] [A] = [K]$$

$[A] = [A_1, A_2, \dots, A_n]$, vecteurs des inconnus aux nœuds du domaine ;

$[M]$: Matrice carrée $n \times n$;

$[K]$: Vecteur représentant le terme source

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{v}{r} \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} d_r d_z : \text{Eléments de la matrice } [M]$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i J_{\phi} d_r d_z : \text{Eléments de la matrice } [K]$$

II.6.2. MODELE MAGNETODYNAMIQUE :

II.6.2.1. Régime transitoire :

L'équation permettant de traduire le comportement de tout problème magnétodynamique avec terme source s'écrit :

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge (v \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}) + \sigma \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} = \overrightarrow{J_s} \tag{II.73}$$

- Modèle linéaire :

Si v est indépendante du champ magnétique \overrightarrow{H} l'équation (II.73) s'écrit :

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge (\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}) + \mu \sigma \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} = \mu \overrightarrow{J_s} \tag{II.74}$$

En procédant de la même manière que dans le cas magnétostatique, on aboutit à la formulation éléments finis de l'équation magnétodynamique transitoire :

a/Cas cartésien :

$$\iint_{\Omega} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) + \mu \Gamma \frac{\alpha A_z}{\partial t} \right) \alpha_i d_x d_y = \iint_{\Omega} \mu \alpha_i J_{sz} d_x d_y \quad (\text{II.75})$$

L'application du théorème de Green et en considérant des conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann homogène, on aboutit à l'équation suivante :

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial A_z}{\partial y} + \mu \sigma \alpha_i \frac{\partial A}{\partial t} - J_{sz} \mu \alpha_i \right) d_x d_y = 0 \quad (\text{II.76})$$

Sachant que la fonction d'approximation exprimée sous sa forme discrète s'écrit :

$$A = \sum_{j=1}^n \alpha_j A_j \quad (\text{II.77})$$

n : Nombre de nœuds du domaine.
 α_j : Fonction de forme aux nœuds.

En introduisant la relation (II.77) dans l'équation (II.76) on obtient :

$$\sum_{j=1}^n \iint \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \right) A_j d\Omega + \sum_{j=1}^n \left(\mu \sigma \alpha_i \alpha_j \frac{\partial A_j}{\partial t} \right) d\Omega = \iint_{\Omega} (J_{sz} \mu \alpha_i) d\Omega \quad (\text{II.78})$$

L'équation (II.49) s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$[M] [A] + [L] \frac{\partial}{\partial t} [A] = [F] \quad (\text{II.79})$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \right) d\Omega$$

$$L_{ij} = \iint (\mu \sigma \alpha_i \alpha_j) d\Omega$$

$$F_{ij} = \iint J_{sz} \mu \alpha_i d\Omega$$

b/cas axisymétrique :

Dans ce cas, la formulation élément finis de l'équation magnétodynamique est donnée par :

$$\iint_{\Omega} -\nu \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \right) + \frac{d_r d_z}{r} + \iint_{\Omega} \sigma \alpha_i \frac{\partial A}{\partial t} \frac{d_r d_z}{r} = \iint_{\Omega} \alpha_i J_{s\phi} \frac{d_r d_z}{r} \quad (\text{II.80})$$

L'écriture condensée de l'équation (II.80) est donnée par la relation suivante :

$$\iint_{\Omega} \nu \overline{\nabla \alpha_i} \cdot \overline{\nabla} \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j A_j \right) + \frac{d_r d_z}{r} + \iint_{\Omega} \sigma \alpha_i \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j A_j \right)}{\partial t} \frac{d_r d_z}{r} = \iint_{\Omega} \alpha_i J_{s\phi} d_r d_z \quad (\text{II.81})$$

L'écriture de la relation (II.81) sous forme matricielle est donnée par la relation (II.82).

$$[M] \{A\} + [L] \frac{\partial}{\partial t} [A] = [K] \quad (\text{II.82})$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \nu \overline{\nabla \alpha_i} \cdot \overline{\nabla} \alpha_j \frac{d_r d_z}{r}$$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \Gamma \alpha_i \alpha_j \frac{d_r d_z}{r}$$

$$K_i = \iint_{\Omega} J_{\phi} \alpha_i d_r d_z$$

II.6.2.2. Régime harmonique:

En régime harmonique (sinusoïdal), le terme $\frac{\partial A}{\partial t}$ peut être exprimé sous sa forme complexe comme suit :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = j \omega \vec{A} \quad (II.83)$$

\vec{A} : Terme complexe

L'équation magnétodynamique avec terme source se met alors sous la forme suivant :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + j \sigma \omega \vec{A} = \vec{J}_s \quad (II.84)$$

Dans le cas linéaire (ν indépendante du champ magnétique et Γ indépendante de la température), l'équation (II.84) s'écrit comme suit :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + j \mu \sigma \omega \vec{A} = \mu \vec{J}_s \quad (II.85)$$

L'application de la méthode Galerkin à l'équation (II.85) nous donne :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i (\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + j \mu \sigma \omega \vec{A} - \mu \vec{J}_s) d\Omega = 0 \quad (II.86)$$

α_i : Fonction de forme.

a/cas Cartésien:

Le modèle considéré étant bidimensionnel, donc :

$$\vec{A} = (0, 0, A_z)$$

$$\vec{J}_s = (0, 0, J_{sz})$$

\vec{A} et J_{sz} étant donc perpendiculaire au plan [x,y].

En considérant les conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann homogènes, la formulation élément finis basée sur la méthode de Galerkin de l'équation (II.86) est donnée par la relation (II.87).

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \bar{A}}{\partial y} \right) dx dy + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_i \mu \sigma \bar{A} d_x d_y = \iint_{\Omega} \alpha_i \mu J_s d_x d_y \quad (\text{II.87})$$

Sachant que $\bar{A} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \bar{A}_j$, l'équation (II.87) devient :

$$\sum_{j=1}^n \left(\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \right) \bar{A}_j d_x d_y + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_i \alpha_j \mu \sigma \bar{A}_j d_x d_y \right) = \iint_{\Omega} \alpha_i \mu J_s d_x d_y \quad (\text{II.88})$$

L'écriture de la relation (II.88) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'arriver au système à résoudre suivant :

$$[M] [\bar{A}] + j\omega [L] [\bar{A}] = [\bar{K}] \quad (\text{II.89})$$

Avec :

$\bar{A}, \bar{J}, \bar{K}$: complexes

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} \alpha_j d_x d_y$$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \mu \sigma \alpha_i \alpha_j d_x d_y$$

$$K_{im} = \iint_{\Omega} \mu J_{sim} \alpha_i d_x d_y$$

b/cas axisymétrique:

En coordonnées cylindriques en supposant des conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann homogènes, la formation éléments finis basée sur la méthode de Galerkin de l'équation magnétodynamique en régime harmonique aura pour forme :

$$\sum_{j=1}^n \left(\iint_{\Omega} \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \overrightarrow{\nabla \alpha_j} \overline{A_j} \frac{d_r d_z}{r} + j\omega \iint_{\Omega} \mu \sigma \alpha_i \alpha_j \overline{A_j} \frac{d_r d_z}{r} \right) = \iint_{\Omega} \alpha_i \overline{J_{\phi}} d_r d_z \quad (\text{II.90})$$

En écrivant la relation (II.90) pour tous les nœuds du domaine, on aboutit au système matriciel complexe suivant :

$$[M] [\overline{A}] + j\omega [L] [\overline{A}] = [\overline{K}]$$

Avec :

$$\overline{A} = A_r + jA_{im}$$

$$\overline{J} = J_r + jJ_{im}$$

$$\overline{K} = K_r + jK_{im}$$

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \nu \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \overrightarrow{\nabla \alpha_j} \frac{d_r d_z}{r}$$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \Gamma \alpha_i \alpha_j \frac{d_r d_z}{r}$$

CHAPITRE : III

LES METHODES D'OPTIMISATION

CHAPITRE III**LES METHODES D'OPTIMISATION ET D'HOMOGENEISATION****III.1. INTRODUCTION :**

Les ingénieurs se heurtent quotidiennement à des problèmes technologiques de plus en plus complexes, qui surgissent dans divers secteurs, comme dans la planification et l'exploitation des réseaux électriques, la conception des systèmes mécaniques, etc...

Le problème à résoudre peut fréquemment être exprimé sous la forme générale d'un problème d'optimisation.

Cependant on limite souvent l'optimisation à une recherche d'un minimum. En effet maximiser une fonction f revient à minimiser la fonction $-f$ [21].

La complexité du calcul des matériaux composites est due à leur hétérogénéité. Les techniques d'homogénéisation s'imposent alors pour obtenir la relation de comportement tant au niveau du monocouche que du stratifié.

III.2. LES METHODES D'OPTIMISATION

III.2.1 DEFINITION:

III.2.1.1. Définition de l'optimisation:

Un problème d'optimisation se définit comme la recherche du minimum ou du maximum (de l'optimum) d'une fonction donnée [14].

III.2.1.2. Fonction objectif:

C'est le nom donné à la fonction f (qu'on appelle aussi fonction de coût ou critère d'optimisation).

C'est cette fonction que l'algorithme d'optimisation va devoir optimiser.

Cette fonction applique l'espace Ω des variables de décision ou de commande dans \mathfrak{R} .

$$f : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$$

III.2.1.3. Variables de décision:

Elles sont regroupées dans le vecteur \vec{x} . C'est en faisant varier ce vecteur que l'on recherche un optimum de la fonction [14].

III.2.1.4. Minimum local/Minimum global:

Soit $f : X \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ une fonctionnelle

- $x \in \mathfrak{R}^n$ est un point de minimum local de f sur X si :

$$x \in X \text{ et } \exists r > 0 / \forall y \in x \cap B(x, r), f(x) \leq f(y) \quad (III.1)$$

On dit alors que $f(x)$ est un minimum local de f sur X

Deux minimums locaux (M_1, M_2) sont illustrés sur la figure (III.1).

$x \in \mathfrak{R}^n$ est un point de minimum global de f sur X ssi.

$$x \in X \text{ et } \forall y \in X, f(x) \leq f(y) \quad (III.2)$$

On dit alors que $f(x)$ est un minimum global de f sur X [15]

Le minimum global est illustré par le point M_3 sur la figure (III.1).

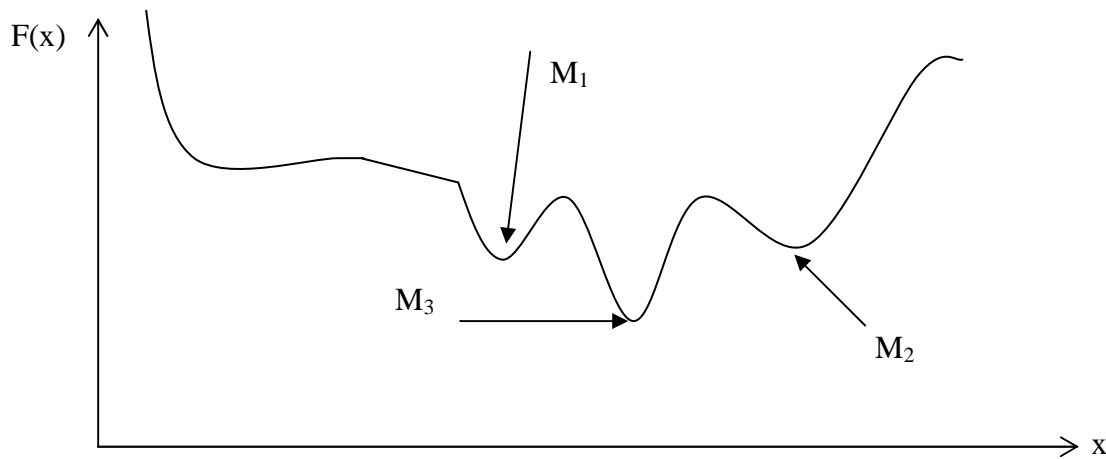


Figure II.1 : Illustration des différents minima d'une fonction objectif [14].

III.2.1.5. Formulation d'un problème d'optimisation:

On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\text{Min } f(x) \text{ sous la contrainte : } x \in X \quad (\text{III.3})$$

Où X est sous ensemble de \mathcal{R}^n .

La fonction $f : X \subset \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ (appelée fonction objectif) est supposé au moins différentiable. L'ensemble X est appelé ensemble des contraintes.

Le problème (III.3) est dit réalisable si $X \neq \emptyset$.

Généralement X est défini par des égalités et des inégalités.

$$X = \{ x \in \mathcal{R}^n : h(x) = 0, g(x) \leq 0 \}$$

Où $h : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^p$ et $g : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^q$ sont supposées continues.

L'écriture " $h(x) = 0$ " représente P contraintes d'égalité $h_i(x) = 0, i = 1, \dots, P$.

De même " $g(x) \leq 0$ " représente q contraintes d'inégalité : $g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, q$.

Dans ce cas on dit qu'il s'agit d'un problème d'optimisation à n variable de décisions, p contraintes d'égalités et q contraintes d'inégalités.

III.2.1.6. Formulation des fonctions coûts:

Pour résoudre le problème d'optimisation (III.3) traité dans le cadre de ce travail, il est nécessaire de définir d'abord les critères d'optimisation (fonction coût).

Deux types d'objectifs sont généralement envisagés.

Soit on cherche à approcher une configuration optimale statique définie à l'instant final.

$f(X(t_{fin}))$, le critère d'optimisation f est alors donné [2], [16].

$$f(X(t)) = \int_{\Omega} (X^{cal}(t) - X^{opt}(t))^2 d\Omega \quad (III.4)$$

Soit on cherche une configuration optimale évolutive du procédé. La fonction objectif est donnée par [12].

$$f(X(t)) = \int_{t=0}^{t_f} g(X(t)) dt \quad (III.5)$$

Dans le cas de l'identification paramétrique qui consiste à minimiser l'écart entre la simulation et l'expérience on écrit donc :

$$X_i^{exp} = X_i^{cal} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, s \quad (III.6)$$

ε_i : représente les erreurs de calcul, de mesure et les erreurs sur les données d'entrée.

s : représente le nombre de mesures.

Dans le cas des matériaux composites, les grandeurs calculées et mesurées respectivement X^{cal} et X^{exp} peuvent être des normes de champs magnétiques, des températures, alors que les paramètres recherchés sont la conductivité électrique ou la chaleur spécifique.

Pour minimiser les erreurs ε_i , on utilise le plus souvent, une expression de type moindres carrées qui conduit à l'expression suivante :

$$f(X(x)) = \sum_{i=1}^s \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^s [X_i^{exp} - X_i^{cal}]^2 \quad (III.7)$$

III.3. CLASSIFICATION DES METHODES NUMERIQUES D'OPTIMISATION :

Deux types de méthodes sont généralement utilisés pour la résolution de problème d'optimisation [2], [12], [17].

- 1- Les méthodes d'évolutions successives de la fonction objective pour différents jeux de paramètres choisis. Ces méthodes ne nécessitent aucune information concernant l'étude différentielle locale de la fonctionnelle. Elles sont appelées méthodes d'ordre zéro.
- 2- Les méthodes itératives du type gradient : contrairement aux méthodes d'ordre zéro, ces méthodes nécessitent une évaluation simultanée de la fonction coût ainsi que de la dérivée de la fonctionnelle par rapport aux paramètres.

III.3.1. Algorithme d'ordre zéro:

L'intérêt principal des méthodes d'ordre zéro réside dans le fait qu'elles ne nécessitent pas d'effectuer d'étude locale de la fonction coût. Ces méthodes se basent sur une vision globale de la fonction coût obtenue à partir d'un nombre suffisant d'estimation de celle-ci.

Dans la catégorie des algorithmes d'ordre zéro on trouve les méthodes déterministes de type simplexe et les méthodes statistiques basées sur la méthode des plans d'expérience [12].

a. Programmation linéaire (méthode simplexe) :

La méthode de simplexe minimise une fonction coût linéaire avec des contraintes linéaires. Son principe est suivant [12] :

- 1- Déterminer une première solution de base réalisable ;
- 2- Passer d'une solution de base réalisable à une solution de base réalisable en augmentant à chaque itération la valeur de la fonction coût.
- 3- Arrêter la procédure lorsqu'il n'est plus possible d'accroître la valeur de la fonction coût, la dernière solution de base obtenue est la solution optimale.

b. Méthodes statistiques :

Elles se basent sur l'approche de la fonction coût f sur l'espace des paramètres d'optimisation X_{ad} . On définit pour chaque composante du vecteur paramètre x un domaine M_i qui contient les valeurs $\{x_i^1, \dots, x_i^{m_i}\}$ et on procède à la sélection de N valeurs du vecteur paramètre x $\{x^1, \dots, x^N\}$, le vecteur réponse y de la fonctionnelle f est calculé à partir des vecteurs paramètres sélectionnés pour donner $y = \{f(x^1); \dots; f(x^N)\}^t$

L'approximation $f_a(x)$ de $f(x)$ peut être de la forme (III.7) ou les fonctions g_i sont des polynômes de x .

$$f_a(x) = \sum_{i=1}^K \alpha_i g_i(x), x \in N \quad (III.8)$$

Ces méthodes s'appliquent si le nombre de paramètres est faible et le domaine admissible restreint [12].

III.3.2. Minimisation sans contrainte de type gradient:

Les méthodes de type gradient font partie des classes de méthodes dites de descente.

Leur principe général pour la minimisation d'une fonction coût sans contraintes est le suivant :

- a- Test d'arrêt : si $|\nabla f(x^k)| < \varepsilon$, x^k est très proche du minimum.
- b- Recherche de la direction d^k
- c- Recherche du pas de descente α^k dans la direction d^k
- d- Réactualisations : $x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k$, $k = K + 1$, retour à l'étape « a »

III.3.2.1.Méthode d'ordre 1:

Contrairement aux méthodes d'ordre zéro qui se basent sur une étude globale de la fonction coût, les méthodes d'ordre 1 nécessitent l'évaluation de la fonction coût et du gradient de la fonctionnelle pour chaque itérations k [12]. On peut citer la méthode du gradient et celle du gradient conjugué.

a. Méthodes du gradient :

La méthode du gradient fait partie d'une grande classe de méthodes numériques appelées méthode de descente [20].

Le principe de base de ces méthodes consiste à minimiser une fonction en se donnant un point de départ arbitraire dit solution initiale. Ensuite, on calcule l'itéré suivant de telle sorte à se rapprocher du minimum de la fonction. On cherche une direction de descente suivant laquelle si on incrémente (ou on décrément) la solution initiale avec un pas de descente, la fonction objectif décroît. Le pas de descente peut être constant ou variable, donnant naissance à une multitude de variantes de cette méthode.

Une idée naturelle pour trouver une direction de descente est d'incrémenter la solution courante dans le sens inverse du gradient de la fonction.

Cette méthode du gradient a pour avantage d'être très facile à mettre en œuvre, mais elle a une convergence assez lente.

b. Méthode du gradient conjuguée:

La méthode du gradient conjugué appartient aux méthodes de résolution des problèmes de programmation non linéaire de type SQP (cas d'une fonction objectif quadratique) [20].

Elle est inspirée de la méthode du gradient dont elle améliore considérablement les performances. Les directions de descente ne sont plus celle du gradient, mais elles sont orthogonales (ou conjugués) pour que la convergence ce soit rapide. En effet à la première itération, la direction de descente est déterminée comme pour l'algorithme du gradient, aux itérations suivants, la direction de descente est calculée par :

$$d^k = -\nabla f(x^k) + \beta^k d^{k-1} \quad (III.9)$$

Dans le plan formé par les deux directions

$\nabla f(x^k)$ et d^{k-1} , β^k est choisi de telle sorte justement que d^k soit conjugué par rapport à d^{k-1} par la relation [12].

$$d^k \nabla^2 f(x^k) \cdot d^{k-1} = 0 \quad (III.10)$$

Il est à remarquer que l'amélioration de la convergence est due à l'utilisation d'avantage d'information sur la fonctionnelle f pour définir la direction de descente [20].

III.3.2.2.Méthode d'ordre 2:

Les méthodes d'ordre 2 diffèrent de celles d'ordre 1 par le fait qu'elles approfondissent l'étude local de la fonction objectif en utilisant la courbure de la fonctionnelle pour la détermination de la direction de descente. On utilise généralement les méthodes de Newton et dérivées [20] qui consistent à considérer l'approximation quadratique du gradient de la fonction objectif au voisinage des paramètres x^k à l'itération k.

$$\nabla f(x^k + \delta x^k) \cong \nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k) \delta x^k + o(\delta x^k) \quad [12] \quad (III.11)$$

Pour la minimisation du gradient $\nabla f(x^k + \delta x^k)$, il faut chercher une direction δx^k bien spécifique qui minimise le plus .

δx^k est donc solution du système :

$$\delta x^k = -(\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k) \quad (III.12)$$

La méthode de Newton aboutit à des résultats plus exacts que ceux qui s'obtiennent avec les méthodes d'ordre 1. L'inconvénient de cette méthode réside dans la nécessité d'un estimé initial très précis et de bien choisir les dérivés secondes des fonctionnelles, calcul généralement très couteux en terme de temps.[2].

III.4 LES METHODES D'HOMOGENEISATION :

III.4.1 Méthodes d'homogénéisation prédictives :

Ces méthodes basées sur l'approche multi-échelles. Elles consistent à remonter aux propriétés physiques équivalentes du matériau composite à l'échelle macroscopique à partir des propriétés de ses constituants à l'échelle microscopique. Une bonne séparation des échelles est nécessaire et indispensable pour que cette approche soit performante.

III.4.1.1 Méthode du développement asymptotique :

Si L est la dimension caractéristique du système global et l la dimension caractéristique de l'hétérogénéité, la condition citée précédemment se traduit par une relation de la forme :

$$n = \frac{l}{L} \ll 1 \quad (III.13)$$

n : Rapport de l'hétérogénéité.

La méthode du développement asymptotique consiste à écrire l'inconnue dans le matériau sous la forme :

$$u^n = u^0 + nu^1 + n^2u^2 + \dots \quad (III.14)$$

Le comportement asymptotique du système est alors défini par:

$$u^0 = \lim_{n \rightarrow 0} u^n \quad (III.15)$$

III.4.1.2 Méthode d'homogénéisation dynamique :

La méthode d'homogénéisation dynamique est une méthode cellulaire basée sur le filtrage spatial des champs. Elle permet de ramener la solution globale du problème à une solution au niveau d'une cellule élémentaire.

Elle consiste à décomposer les champs en une somme de trois termes, le terme global, le terme local et le terme résiduel. L'équation ci-dessous présente cette décomposition :

$$\begin{cases} e = E + E_c + E_r \\ h = H + H_c + H_r \end{cases} \quad (III.16)$$

Où :

e et h sont respectivement les valeurs réelles des champs électrique et magnétique sur les cellules. E et H sont les champs lentement variables, E_c et H_c leurs composantes locales (ou cellulaires) de valeur moyenne nulle, E_r et H_r sont les champs résiduels (souvent négligés).

III.4.1.3 Méthode du problème inverse :

Cette méthode permet de déterminer les lois de comportements homogénéisés des matériaux composites pour lesquels la dimension des hétérogénéités autorise la résolution des équations électromagnétiques sur le système complet [2]. Pour obtenir ces lois, on résout le problème direct et on calcule les variables de sortie du système, puis on résout à nouveau le problème à l'intérieur d'un algorithme d'optimisation en remplaçant le matériau hétérogène par un autre de même dimensions dont les propriétés physiques seront recherchées. Le calcul des propriétés physiques d'un matériau s'effectue en résolvant un problème inverse. La fonction objectif que nous cherchons à minimiser est définie

par :

$$F_{ob} = \frac{1}{2} (H - H_{opt})^2 \quad (III.17)$$

Avec : H : Le champ magnétique réel

H_{opt} : Le champ magnétique optimisé

Cette fonction est minimisée à l'aide de la méthode du gradient.

III.4.2 Méthode d'homogénéisation expérimentale :

Il est souvent très difficile d'obtenir une mesure directe des grandeurs équivalentes recherchées telles que la résistivité électrique ou la conductivité thermique. Ces valeurs sont alors calculées à partir de grandeurs mesurables comme l'impédance ou la distribution de température. Le passage d'une grandeur à l'autre se fait souvent par les méthodes du problème inverse.

Les problèmes inverses sont très fréquemment exprimés sous forme d'un problème d'optimisation au sens des moindres carrés.

Pour relier le problème d'identification de paramètres à un problème des moindres carrés, deux approches différentes sont proposées : [1], [2]

► L'approche de type déterministe : où le problème inverse est exprimé sous une forme relaxée, et l'on cherche juste à minimiser une distance entre les données issues d'un modèle et les mesures expérimentales.

► L'approche de type statistique : où le problème inverse est vu comme la recherche du jeu de paramètres qui maximise la probabilité de réaliser la mesure expérimentale.

CHAPITRE : IV

APPLICATIONS ET RESULTATS

CHAPITRE IV**APPLICATIONS ET RESULTATS****IV.1 INTRODUCTION :**

La résolution des équations électromagnétiques est un préalable à tout calcul des matériaux composite. Notre travail qui consiste à trouver les propriétés physiques équivalentes, d'un système à matériau homogène, qui donnerait des résultats semblables à ceux donnés par un système à matériau composite stratifié ayant les mêmes caractéristiques géométriques. À cet effet, notre étude s'appuie sur l'application des méthodes d'optimisation et d'homogénéisation, à ces équations électromagnétiques.

Dans notre étude on se propose de déterminer :

- Le potentiel vecteur magnétique (A) ;
- Le champ magnétique (H) ;
- La conductivité électrique (σ) .

IV.2 ALGORITHME DE CALCUL :

L'algorithme de calcul qui nous permet de déterminer le premier paramètre (la conductivité électrique σ) est donné comme suit :

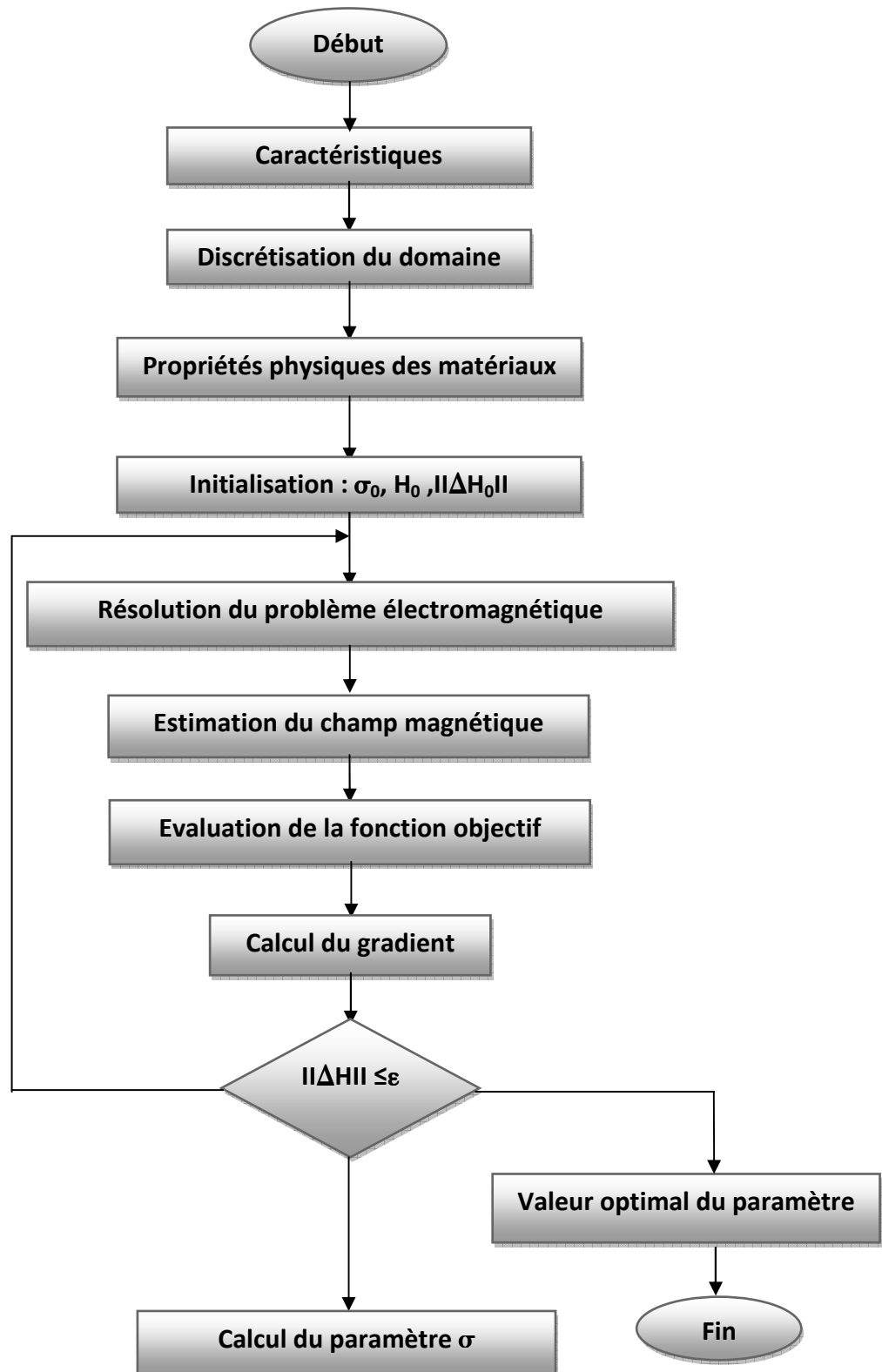


Figure (IV-1) : Organigramme de calcul

IV.3 APPLICATION 1 :

Estimation De La Conductivité Electrique :

On se propose dans cette application de calculer la conductivité électrique du matériau homogène. Pour cela, la fonction objectif à optimiser est donnée par la relation suivante [22].

$$f(\sigma) = 1/2 (H_{cal}(x,y) - H_{opt}(x,y))^2$$

Avec :

$f(\sigma)$: La fonction objectif ;

H_{cal} : Le champ magnétique calculé dans le stratifié ;

H_{opt} : Le champ magnétique optimal.

IV.3.1 Structure géométrique

La structure géométrique étudiée dans le cadre de notre application est constituée d'un matériau composite stratifié à trois couches. Elle est représentée

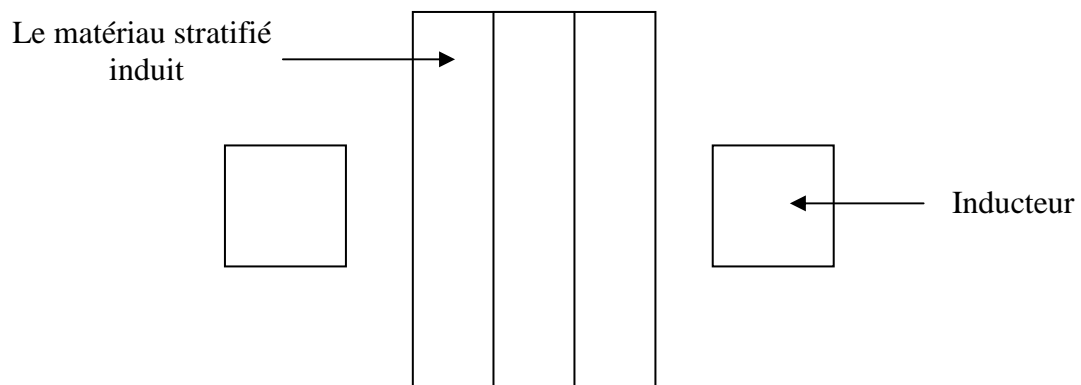
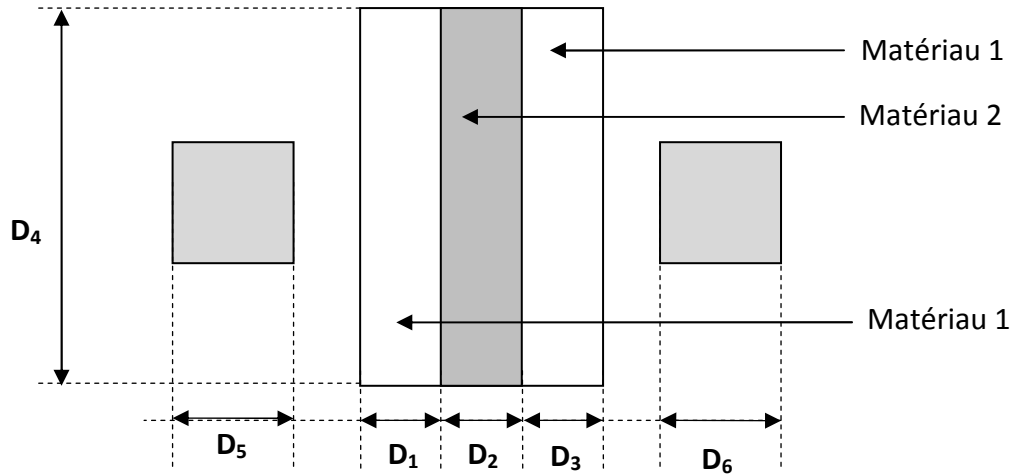


Figure (IV-2) : Structure géométrique étudiée

IV.3.2 Caractéristiques géométriques

La figure (IV.3) ci-dessous nous donne les dimensions du système étudié.



Avec : $D_1 = 2.5 \text{ mm}$; $D_2 = 2.5 \text{ mm}$; $D_3 = 2.5 \text{ mm}$; $D_4 = 30 \text{ mm}$; $D_5 = 10 \text{ mm}$; $D_6 = 10 \text{ mm}$

Figure (IV-3) : Caractéristiques géométriques du système

IV.3.3 Caractéristiques physiques

Les caractéristiques et les propriétés physiques des différentes régions de la structure étudiée sont données comme suit :

- **L'air**

La conductivité électrique : $\sigma = 0$.

La perméabilité magnétique : $\mu_0 = 4 \times \pi \times 10^{-7} \text{ [H/m]}$

- **L'induit**

La perméabilité relative du matériau1 : $\mu_{r1} = 1$.

La perméabilité relative du matériau2 : $\mu_{r2} = 1$.

La perméabilité relative du matériau3 : $\mu_{r3} = 1$.

La conductivité électrique du matériau1 : $\sigma_1 = 5.9 \times 10^{+7} \text{ [}\Omega\text{m]}^{-1}$

La conductivité électrique du matériau2 : $\sigma_2 = 10 \text{ [}\Omega\text{m]}^{-1}$.

La conductivité électrique du matériau3 : $\sigma_3 = 5.9 \times 10^{+7} \text{ [}\Omega\text{m]}^{-1}$

•L'inducteur

La perméabilité magnétique relative : $\mu_r = 1$.

La densité de courant $J = 1.546 \times 10^{-8}$ [A/m²]

IV.3.4 Domaine de résolution et conditions aux limites

La résolution du problème dans notre cas, se fait en imposant des conditions aux limites du type **DIRICHLET** comme le montre la figure (IV.4).

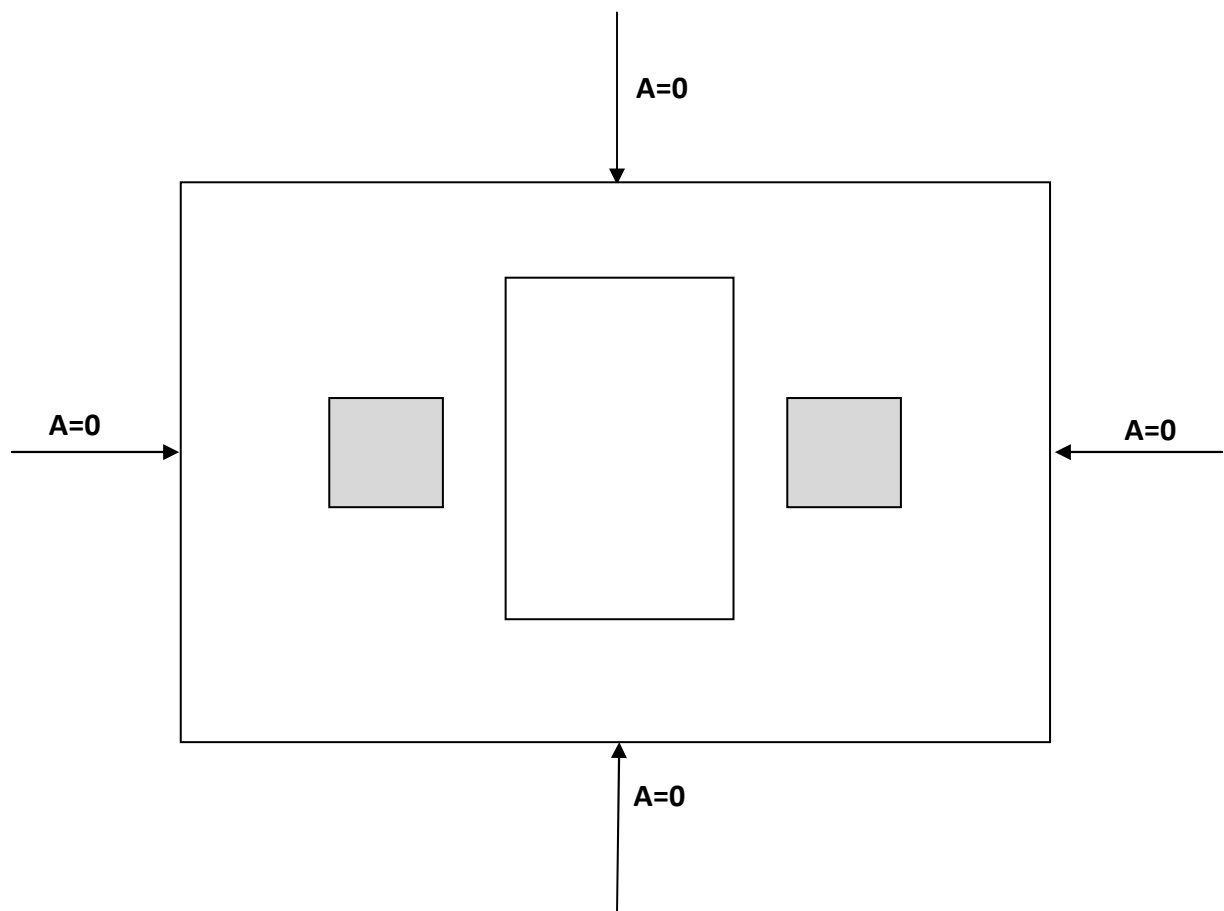


Figure (IV-4) : Domaine de résolution et conditions aux limites

IV.3.5 Maillage :

Pour résoudre le problème électromagnétique en 2D on a utilisé le maillage ayant les caractéristiques suivantes :

- Nombre de points = 1589
- Nombre de triangles = 3096

Ce maillage est représenté par la figure (IV.5).

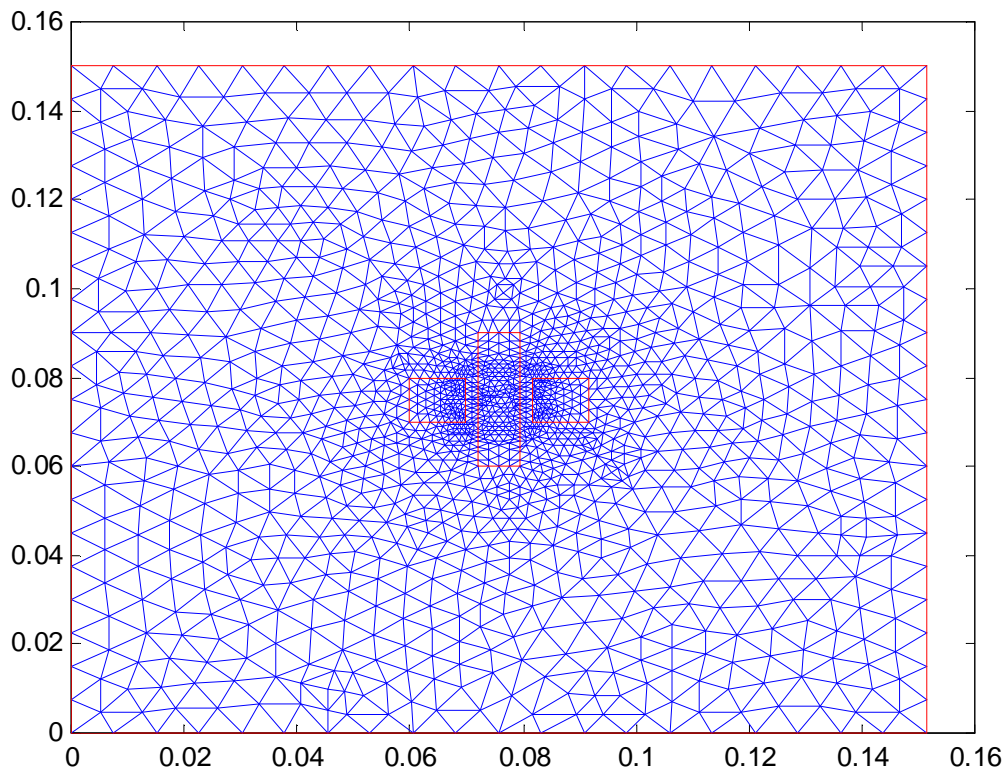


Figure (IV-5) : Maillage du domaine d'étude

IV.3.6. Equation en termes de potentiel vecteur magnétique :

La résolution de l'équation en termes du potentiel vecteur magnétique est subordonnée à la connaissance de la valeur du courant d'excitation J_s .

Pour formuler l'équation en termes du potentiel vecteur magnétique, on exploite la quatrième équation de Maxwell en négligeant les courants de déplacement

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} \quad (IV.1)$$

Avec
$$\vec{H} = \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{A}}{\mu} \quad (IV.2)$$

$$J = J_s + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (IV.3)$$

En combinant ces différentes relations on obtient :

$$\vec{\nabla} \wedge (\nu \vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + j\omega\sigma \vec{A} = J_s \quad (IV.4)$$

La résolution de l'équation (IV.4) nous permet de calculer les différentes grandeurs électromagnétiques.

IV.3.7. Formes différentielles des équations associées aux différentes régions du domaine d'étude :

Pour chaque région du domaine d'étude, on définit son équation différentielle aux dérivées partielles la régissant :

- **L'inducteur :**

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v_i \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_i \frac{\partial A}{\partial y} \right) = J_s$$

- **L'induit :**

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v_{ind} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_{ind} \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \sigma_{ind} \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

- **L'air :**

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v_{air} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_{air} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = 0$$

v_i : Réductivité magnétique de l'inducteur $[\text{H/m}]^{-1}$

v_{ind} : Réductivité magnétique de l'induit $[\text{H/m}]^{-1}$

v_{air} : Réductivité magnétique de l'air $[\text{H/m}]^{-1}$

J_s : Densité de courant source $[\text{A/m}^2]$

IV.3.8. Résultats et interprétations :

Dans le cadre de notre application, la résolution du problème électromagnétique nous a donné les résultats suivant :

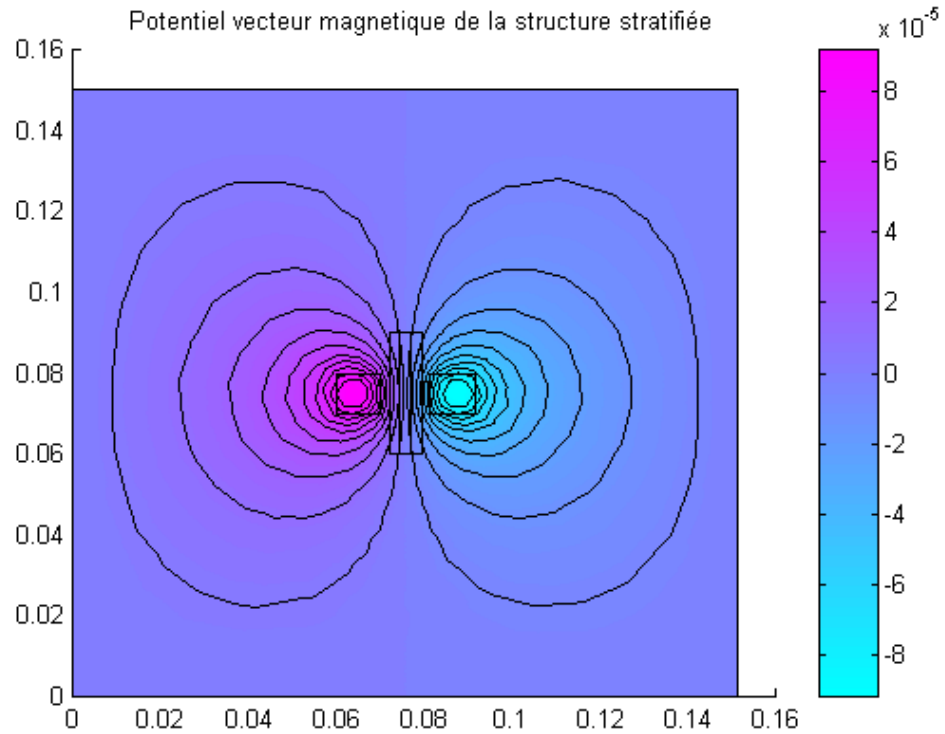


Figure (IV-6) : *Potential vecteur magnétique de la structure stratifiée*

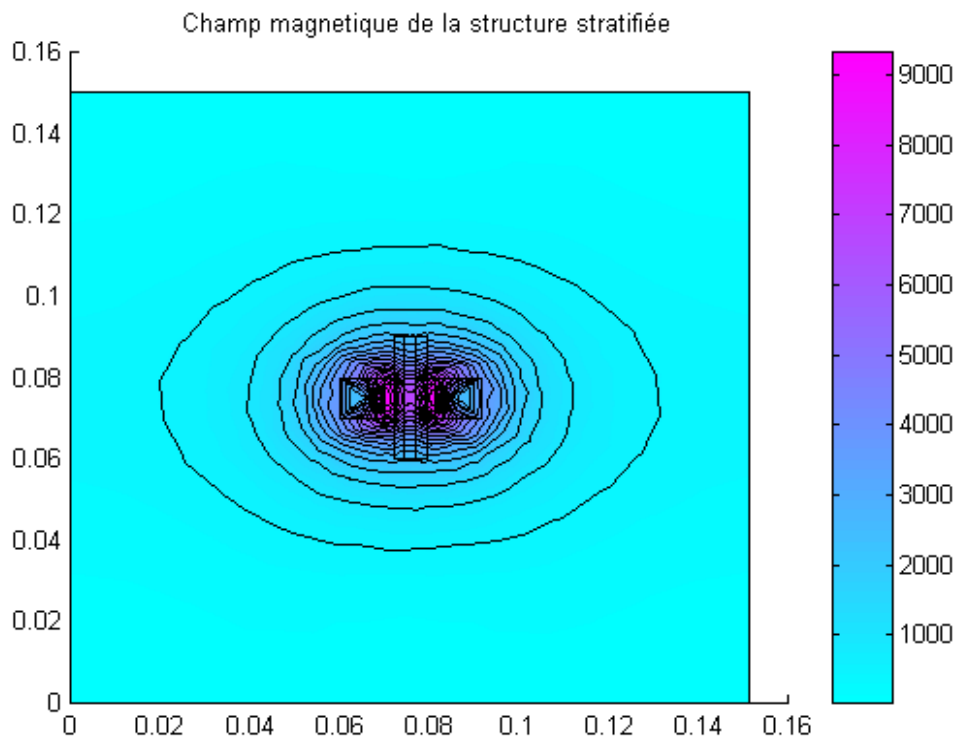


Figure (IV-7) : *Champ magnétique de la structure stratifiée*

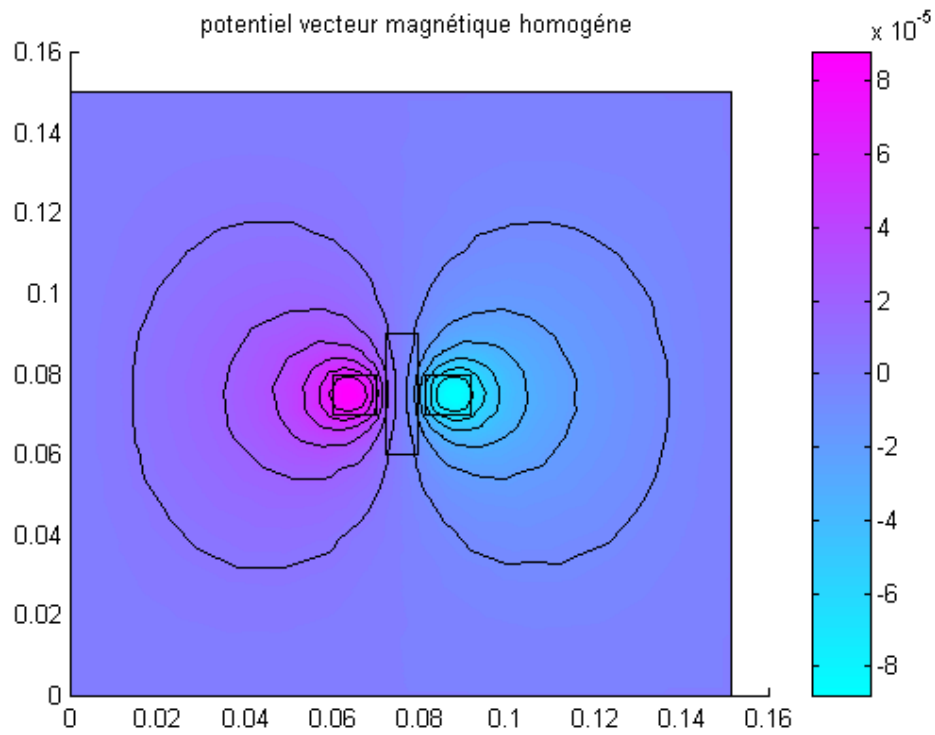


Figure (IV-8) : Potentiel vecteur magnétique homogène

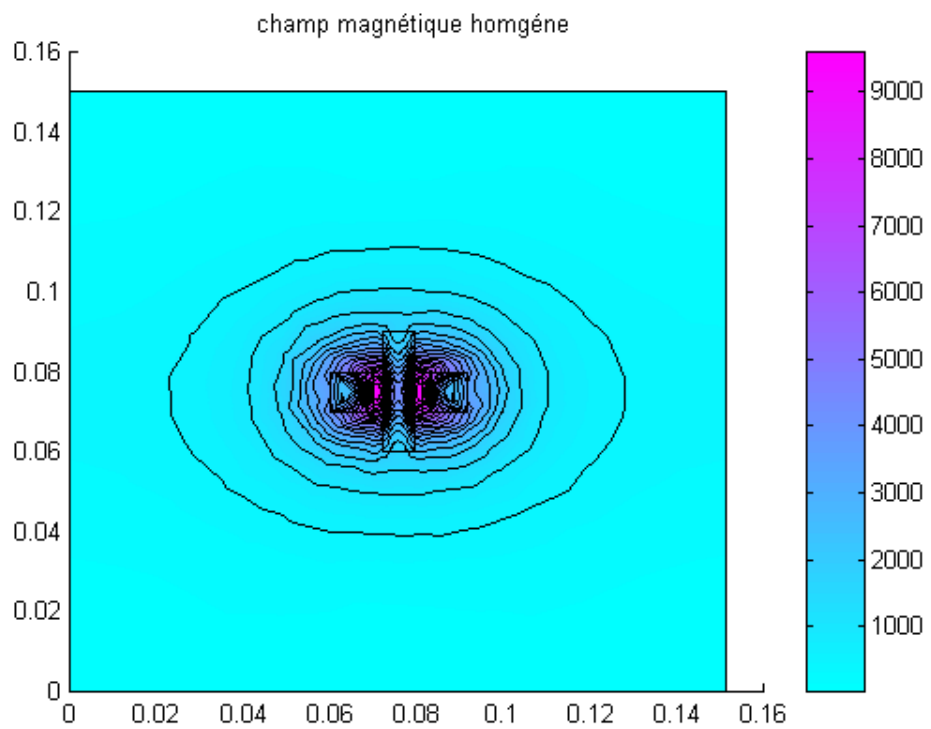


Figure (IV-9) : Champ magnétique homogène

Les figures (IV-6) et (IV-8) représentent les iso valeurs du potentiel vecteur magnétique respectivement dans le stratifié et dans le matériau homogène.

Les figures (IV-7) et (IV-9) représentent les iso valeurs du champ magnétique respectivement dans le stratifié et dans le matériau homogène.

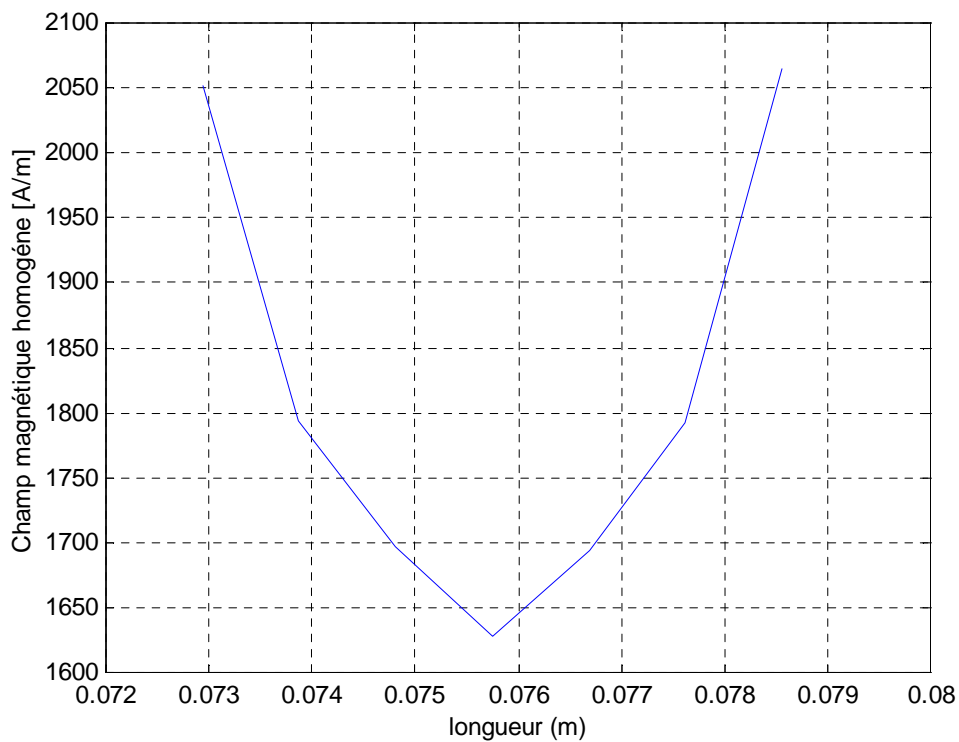


Figure (IV-10) : Champ magnétique homogène

La figure précédente donne l'allure du champs magnétique dans le matériau homogène

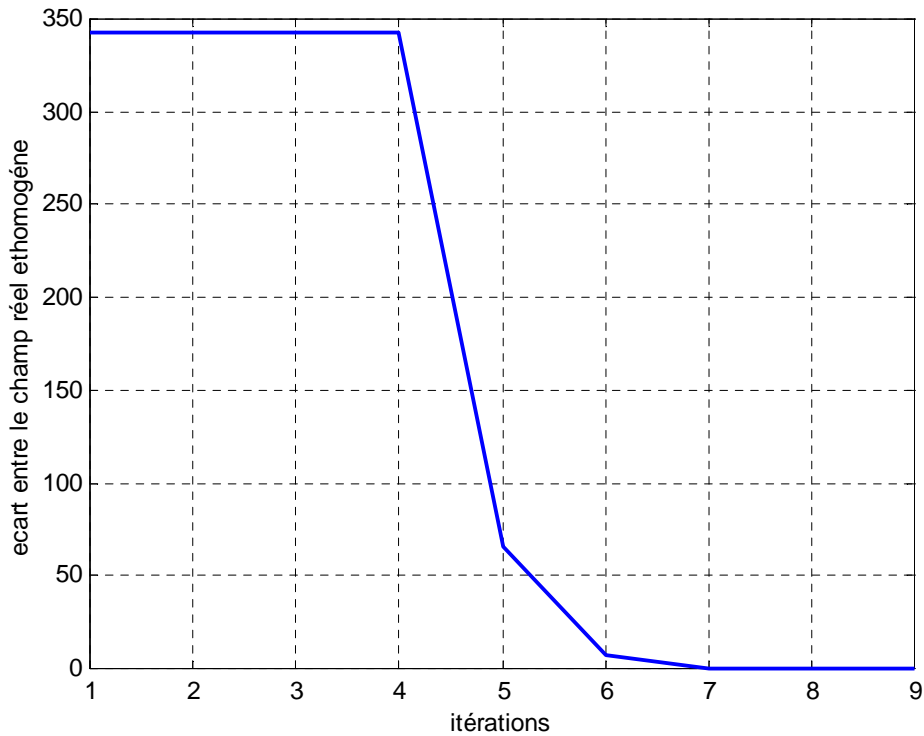


Figure (IV-11) : Evolution de l'écart entre le champ magnétique homogénéisé et le champ magnétique réel

La **Figure IV.11** représente l'évolution de l'écart entre le champ magnétique homogénéisé et le champ magnétique réel calculé dans le stratifié. Nous constatons que cet écart s'annule au bout de quelques itérations. Donc la valeur du champ magnétique recherchée dans la structure homogène devient égale à la valeur optimisée du champ.

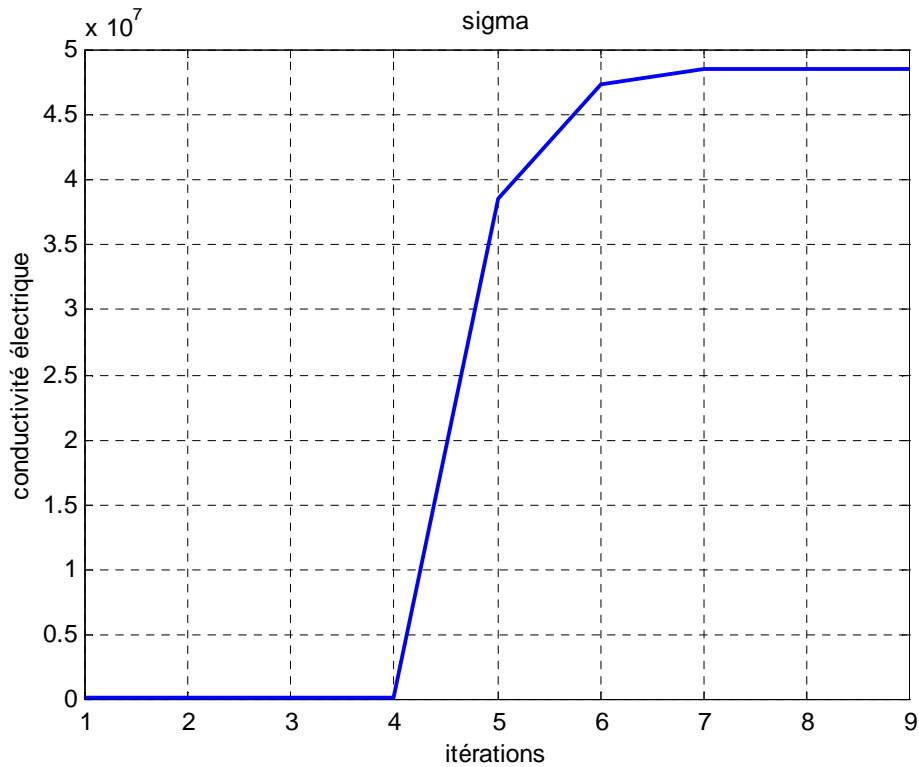


Figure (IV-12) : Evolution de la conductivité en fonction des itérations

La **Figure IV.12** représente l'évolution de la conductivité électrique σ en fonction des itérations. Pour les valeurs $\sigma_3 = 5.9 \times 10^7 [\Omega\text{m}]^{-1}$; $\sigma_5 = 5.9 \times 10^7 [\Omega\text{m}]^{-1}$ et $\sigma_4 = 10 [\Omega\text{m}]^{-1}$ des différentes couches du stratifié, la valeur optimale de la conductivité homogénéisée est de $4.75 \times 10^7 [\Omega\text{m}]^{-1}$

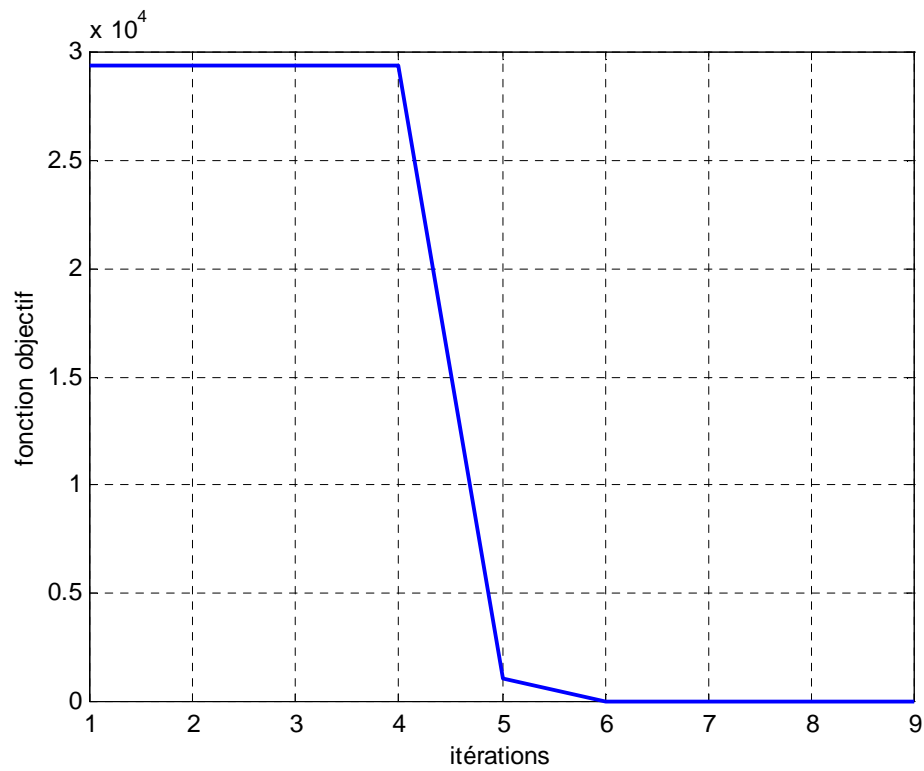


Figure (IV-13) : Evolution de la fonction objectif en fonction des itérations

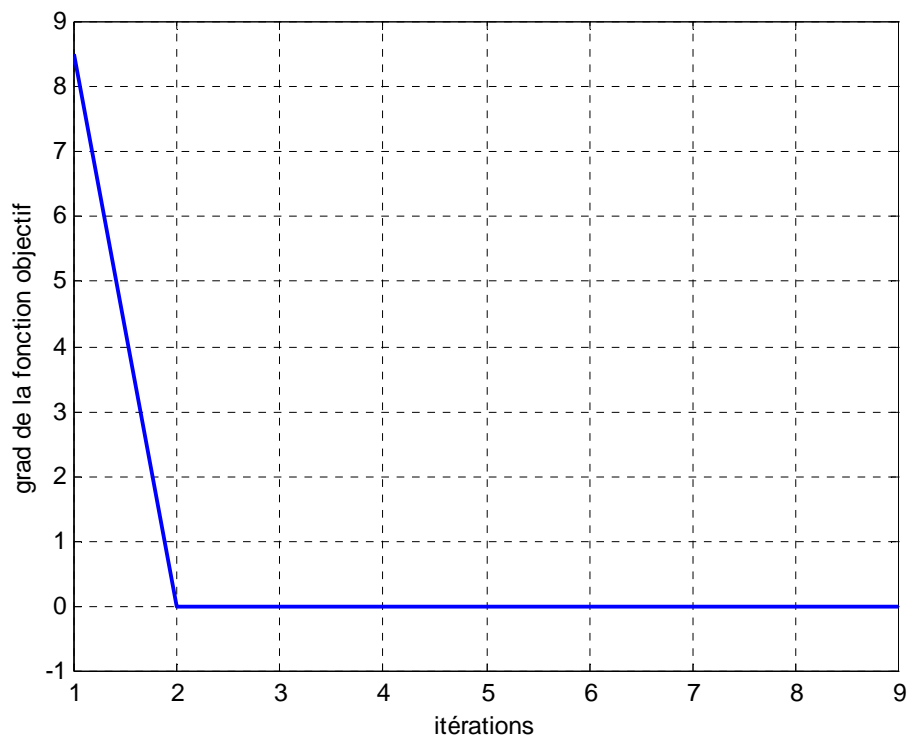


Figure (IV-14) : Evolution du grade de la fonction objectif en fonction des itérations

IV.4 Conclusion :

La complexité de l'étude des matériaux composites due principalement à l'hétérogénéité et à l'anisotropie rend l'utilisation des méthodes analytiques pour la résolution des équations électromagnétiques pratiquement inefficace. Pour cela, on a utilisé dans le cadre de notre étude la méthode des éléments finis.

Pour approcher la solution, on a utilisé une technique d'homogénéisation (problème inverse) basée sur une méthode d'optimisation du type gradient.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

A la lumière de ce qui précède on peut affirmer que le calcul d'un matériau composite repose sur l'utilisation des méthodes d'homogénéisation et sur l'outil de simulation pour une meilleure modélisation et pour une bonne conception

Dans le cadre de notre travail nous avons réalisé une modélisation par éléments finis de matériaux composite stratifiée.

Nous avons développé sous environnement MATLAB un programme de calcul et de simulation que nous avons appliqué pour l'homogénéisation d'un matériau homogène stratifié.

La qualité des propriétés obtenues dépend de la connaissance exacte de la géométrie de la structure étudiée et des propriétés des différents composants du matériau composite

La conductivité électrique du matériau est un paramètre important pour son étude. Pour évaluer ce paramètre dans le cadre de notre travail nous nous sommes basé sur la méthodologie suivante :

- Etude du comportement d'un matériau stratifié.
- Calcul de la valeur optimisé du champ magnétique par l'utilisation d'une fonction objectif basée sur la minimisation de l'écart quadratique.

Les résultats obtenus dans le modèle stratifié et le modèle homogénéisé sont similaires.

En se basant sur les résultats obtenus, on peut dire que l'utilisation de ces matériaux homogènes équivalents est possible.

Les perspectives de ce travail sont :

- La validation des résultats obtenus par l'expérience ;
- Améliorer et généraliser notre modèle pour toucher aux différentes géométries et aux différents matériaux ;
- Il est aujourd'hui impératif d'encourager la recherche partenariale (Université - Industrie ou particulièrement Université - Laboratoires de matériaux) ceci pour un double objectif :
 - a) Cela permettra de trouver des solutions aux problèmes industriels d'actualité.
 - b) Cela permettra aussi des avancées scientifiques telles que le développement de nouvelles méthodes numériques et de nouvelles lois physiques d'évolution des matériaux.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BIBLIOGRAPHIE :

[1] :S. BENSAID, « contribution à la caractérisation et à la modélisation électromagnétique et thermique des matériaux composites anisotropes ». Thèse de Doctorat, université Nantes France 2006.

[2] : G.YOUSFI, « Evaluation des propriétés physiques des matériaux composites par une technique d'homogénéisation ». Mémoire de Magister, université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou, 2010.

[3] : L.KHERBOUCHE, « introduction aux modélisations et aux méthodes de calcul des matériaux composites ». Mémoire de Magister, université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou, 2010.

[4] : Nadia BAHLOULI, cours matériaux composites Presses de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg, 2006.

[5] : Y. LEDRU, « Etude de la porosité dans les matériaux composites stratifiés aéronautiques ». Thèses de doctorat, université Toulouse France 2009.

[6] : Louis BERREUR : « L'industrie Française des matériaux composites ». Etudes stratégique réalisée par Nadal consultants pour le compte de la DIGITIP.

[7] : Laurent GORNET : « Généralités sur les matériaux composites ». Ecole centrale Nantes- France.

[8] : Hassan MOHELLEBI : « cours.....2^{ème} années master ».

[9] : H.MOHELLEBI : « Modèle analytico-numérique de calcul de courants de Foucault dans les dispositifs axisymétriques » Mémoire de magistère université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou 1996.

[10] : Gouri DHATT, Gelbert TOUZOT, Emmanuel le français « Méthode des éléments finis » édition Lavoisier 2005.

[11] : J.PEDRO, A.BOSTOS, Nelson SADOUSKI « electromagnetic modeling by finite element methode ».CRC 1, édition 2003.

[12] : R. LOUNI, A. MEZARI, « mise en œuvre d'un processus d'optimisation d'un dispositif de chauffage par induction basé sur la méthode d'un gradient ». Mémoire d'ingénieur d'état, université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou 2003.

[13] : OULD OUALI Samy Hassan « Intégration de l'hystérésis magnétique dans un calcul éléments finis en vue de l'estimation des pertes dans les tôles des machines électriques » . Thèse de Doctorat, université Mouloud MAMMERI Tizi-Ouzou 2010.

[14] : Rabah BENABID « optimisation multi objectifs de la synthèse des FACTS par les partielles en essaim pour le contrôle de la stabilité de tension des réseaux électriques ». Mémoire de magister en électrotechnique, université Amar TALIDJI, Laghouat, 2007.

[15] : Georges Koepfler « optimisation et algorithmiques, Paris des cartes France 2004-2010.

[16] : Y.J Favenec « Modélisation en chauffage par induction analyse inverse et optimisation » Thèse de doctorat, école des mines de Paris, 2002.

[17] : P.A Tuan « Développement de formulations électromagnétiques éléments finis 3d pour la modélisation des dispositifs en fréquence élevée » thèse de doctorat, Grenoble 2009.

[18] : Gourdin, M. Boumahrat « Méthodes numériques appliquées » édition OPU 1993.

[19] : Irène charon, Olivier Hudry « Optimisation non linéaire », école nationale des télécommunications France.

[20] : L.MOUKRANI « contribution à la CAO optimisée des machines électriques, application au moteur linéaire à université de thèse de doctorat d'Etat université de Batna 2005.

[21] : Xavier ANTOINE, P DREYFUSS et Y. PRIYAT « Introduction à l'optimisation : aspects théoriques, numériques et algorithmes ». ENSMN – EN SEM 2 A France 2007.

[22] : D.Trichet, »Contribution à la modélisation, à la conception et au développement du chauffage par induction des matériaux composites conducteurs », Thèse de doctorat, Université de Nantes, France 2000.

[23]: Sonia DEGERATU, Nicu George BIZDOACA, Anca PETRISOR, Vasile « considérations sur le dimensionnement des plaques composites stratifiées a matrice polymère »

“6TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON ELECTROMECHANICAL AND POWER SYSTEMS OCTOBER 4-6, 2007 - CHISINAU, REP.MOLDOVA”