

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Thèse de doctorat

Spécialité : Mathématiques

Option : *Recherche Opérationnelle et Optimisation*

Thème

**Etude des concepts de solution dans les
problèmes bi-niveaux multi-objectifs**

Présentée par :

Mlle BOUIBED Karima

Soutenue le 15/09/2016 devant le jury d'examen composé de :

M. Djamel Hamadouche	Professeur	U.M.M.T.O	Président
M. Mohammed Said Radjef	Professeur	U.A. Mira Bejaia	Rapporteur
M. Mohamed Aidène	Professeur	U.M.M.T.O	Rapporteur
M. Mohand Ouamer Bibi	Professeur	U.A. Mira Bejaia	Examineur
M. Brahim Oukacha	M.C.A.	U.M.M.T.O	Examineur
Mme. Louiza Bouraine Née Berdjoudj	M.C.A.	U.A. Mira Bejaia	Examinatrice
M. Hachem Slimani	M.C.A.	U.A. Mira Bejaia	Invité

** Remerciements **

En premier lieu, je remercie le bon Dieu tout puissant de m'avoir donné le courage, la santé et la force pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer tous mes remerciements au Professeur Mohammed Said RADJEF, mon directeur de thèse de m'avoir proposé ce thème de recherche très intéressant et de m'avoir accordé sa confiance et aussi pour ses précieux conseils et sa disponibilité. Je remercie également le Professeur Mohamed AIDENE, mon co-directeur de thèse pour ses encouragements appréciés et pour la gentillesse dont il a toujours fait preuve à mon égard.

Je remercie vivement le Professeur Djamel Hamadouche pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Mes remerciements chaleureux s'adressent également au Professeur Mohand Ouamer BIBI, les Maîtres de conférences M. Brahim OUKACHA, M. Hachem SLIMANI et Mme Louiza BOURAINE pour avoir accepté d'examiner ce travail.

J'aimerais spécialement présenter ma reconnaissance infinie à M. Hachem SLIMANI qui m'a aidée, encouragée, et dirigée tout au long de ces années de thèse. Les nombreuses discussions que nous avons eues ainsi que ses conseils judicieux et ses remarques pertinentes sont pour beaucoup dans le résultat final de ce travail. Pour tout cela merci infiniment.

C'est plus que de la reconnaissance ou des remerciements dont je suis redevable et que j'exprime ici à tous les membres de ma famille pour leurs soutiens, leurs encouragements et la confiance qu'ils me portent, particulièrement mes très chers parents.

Je remercie enfin tous ceux qui m'ont encouragée et soutenue par leur amitié.

Table des matières

Table des matières	i
Introduction générale	1
1 Notions de convexité, d'invexité et conditions d'efficacité dans les problèmes multi-objectifs	5
1.1 Introduction	5
1.2 Notions de convexité	5
1.3 Notions d'invexité	8
1.4 Liens entre les notions de convexité et d'invexité	9
1.5 Conditions d'optimalité dans les problèmes mono-objectif avec contraintes	12
1.5.1 Conditions nécessaires d'optimalité	13
1.5.2 Conditions suffisantes d'optimalité	14
1.6 Conditions d'efficacité dans les problèmes multi-objectifs avec contraintes	14
1.6.1 Conditions nécessaires d'efficacité	15
1.6.2 Conditions suffisantes d'efficacité	16
1.7 Conditions d'efficacité dans les problèmes multi-objectifs fractionnaires	18
1.7.1 Conditions nécessaires d'efficacité	20
1.7.2 Conditions suffisantes d'efficacité	21
1.8 Conclusion	22

2	Sur les problèmes de programmation bi-niveaux	23
2.1	Introduction	23
2.2	Présentation d'un problème de programmation bi-niveaux (PB)	24
2.3	Formulation mathématique de (PB)	25
2.4	Problèmes de programmation bi-niveaux linéaires (PBL)	26
2.4.1	Formulation mathématique de (PBL)	26
2.4.2	Définitions	26
2.4.3	Solutions optimales	27
2.4.4	Existence et caractérisation des solutions de (PBL)	29
2.4.5	Résolution de (PBL)	30
2.4.6	Reformulation de (PBL) par l'approche KKT	30
2.5	Problèmes de programmation bi-niveaux non linéaires (PBN)	32
2.5.1	Problèmes de programmation bi-niveaux quadratiques	34
2.6	Conditions d'optimalité de (PBN)	41
2.6.1	Approche KKT	41
2.7	Problèmes bi-niveaux fractionnaires (PBF)	44
2.7.1	Formulation mathématique de (PBF)	44
2.8	Problèmes bi-niveaux fractionnaires linéaires ($PBFL$)	45
2.9	Conclusion	46
3	Efficacité globale pour les problèmes bi-niveaux multi-objectifs sous des conditions d'invexité généralisée	47
3.1	Introduction	47
3.2	Étude d'un problème bi-niveaux multi-objectifs non linéaire ($PBMN$)	49
3.3	Reformulation de ($PBMN$) en un problème multi-objectifs	50
3.4	Relations entre les problèmes ($PBMN$) et (PMN)	52
3.5	Conditions nécessaires d'efficacité	54
3.6	Conditions suffisantes d'efficacité	58
3.6.1	Solutions faiblement efficaces	58
3.6.2	Solutions efficaces	60
3.6.3	Solutions proprement efficaces	62
3.6.4	Exemple d'application	64

3.7	Étude d'un problème bi-niveaux multi-objectifs linéaire (<i>PBML</i>) . . .	67
3.7.1	Reformulation de (<i>PBML</i>)	68
3.7.2	Conditions suffisantes d'efficacité	69
3.7.3	Exemple d'application	70
3.8	Étude de cas mixte	72
3.8.1	Le niveau supérieur linéaire et le niveau inférieur non linéaire .	73
3.8.2	Le niveau supérieur non linéaire et le niveau inférieur linéaire .	75
3.9	Conclusion	76
4	Efficacité globale pour les problèmes bi-niveaux multi-objectifs frac-	
	tionnaires sous des conditions d'invexité généralisée	78
4.1	Introduction	78
4.2	Étude d'un problème bi-niveaux multi-objectifs fractionnaire (<i>PBMFN</i>)	79
4.3	Reformulation de (<i>PBMFN</i>) en un problème multi-objectifs fraction- naire	80
4.4	Conditions nécessaires d'efficacité	82
4.5	Conditions suffisantes d'efficacité	85
4.6	Exemple numérique	88
4.7	Conclusion	90
	Conclusion générale	91
	Bibliographie	93

Introduction générale

La programmation bi-niveaux a été initialement introduite sous l'angle de la théorie des jeux par Stackelberg [113] dans sa monographie sur l'économie de marché où il a présenté un modèle en concurrence parfaite dans le contexte d'un duopole sous forme d'un jeu séquentiel à deux joueurs, appelé par la suite jeu de Stackelberg (ou jeu hiérarchique). Ses nombreuses applications dans différents domaines ont suscité un intérêt remarquable de la part des chercheurs notamment ceux qui exercent dans le domaine de l'optimisation. Dans ce sens, plusieurs généralisations du modèle ont été proposées conduisant à leurs tours à des développements mathématiques appropriés sur les conditions d'existence, la caractérisation des solutions, et les méthodes numériques de leurs calculs jusqu'à constituer un axe autonome de la programmation mathématique, souvent appelé programmation bi-niveaux. La première formulation du problème de programmation bi-niveaux est apparue dans un article de Bracken et McGill [25] sur la répartition des ressources et des armes pour optimiser l'attaque et la défense simultanément. L'utilisation du terme programmation multi-niveaux a été attribuée à Candler et Norton [30] dans un rapport technique pour la banque mondiale en 1977.

Les problèmes de programmation bi-niveaux sont des problèmes d'optimisation hiérarchiques qui combinent les décisions de deux décideurs, à savoir le niveau supérieur (également appelé le leader) et le niveau inférieur (également appelé le suiveur). Dans la programmation bi-niveaux, il y a une idée de base qui consiste à ce que le niveau supérieur (le leader) prenne une décision en premier et le niveau inférieur (le suiveur) réagisse en choisissant une stratégie optimale en fonction de sa fonction objectif sur les choix possibles limités par le leader. Ainsi, le leader pouvant anticiper les réactions du suiveur, choisit la décision qui lui procure le plus grand profit possible. D'autre part, le suiveur, après avoir pris connaissance du choix du leader, choisit la décision qui lui engendre le meilleur profit possible. En

général, pour étudier un problème de programmation bi-niveaux, on le transforme en un problème de programmation à un seul niveau. Deux reformulations devenues célèbres ont été proposées dans la littérature, à savoir la reformulation se basant sur les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) et la reformulation utilisant la valeur optimale du niveau inférieur, voir Dempe [34] et Ye et Zhu [126]. La reformulation KKT consiste à remplacer le problème du niveau inférieur par ses conditions nécessaires et suffisantes d’optimalité de Karush-Kuhn-Tucker à condition que ce dernier problème soit convexe par rapport à sa variable de décision et une contrainte de qualification appropriée soit satisfaite pour n’importe quelle décision du niveau supérieur. Ainsi, le problème obtenu après transformation est un cas particulier d’un problème de programmation mathématique avec des contraintes de complémentarité. Plusieurs auteurs se sont intéressés à la recherche des conditions d’optimalité et le développement d’algorithmes de résolution de tels problèmes. Malheureusement, il est connu que les problèmes avec des contraintes de complémentarité ne sont pas convexes voir, par exemple, Dempe et Dutta [36] et Tseveendorj [115]. De plus, il a été démontré par Scheel et Scholtes [105], Ye et Zhu [126], et bien d’autres que ces problèmes ne vérifient aucune des contraintes de qualifications usuelles telles que, par exemple, la contrainte de qualification de Slater et celle de Mangasarian-Fromovitz, souvent utilisées pour vérifier les conditions d’optimalité et la convergence des algorithmes de résolution. Par ailleurs, l’existence des solutions optimales, la vérification des conditions nécessaires d’optimalité, et la convergence d’algorithmes de résolution sont étroitement liées à la continuité et à la convexité de certaines applications mises en valeur. D’autre part, ces propriétés ne peuvent pas être souvent garanties pour les problèmes de programmation bi-niveaux. En ce qui concerne la reformulation utilisant la valeur optimale, elle est obtenue (sans aucune hypothèse sur le problème du niveau inférieur) en remplaçant ce dernier via sa fonction de valeur optimale. Cette reformulation conduit à des problèmes non convexes et non différentiables même lorsque les fonctions impliquées dans le problème initial sont linéaires [45].

Pour remédier à ces difficultés, plusieurs auteurs ont contribué à la recherche de conditions d’optimalité par d’autres techniques telles que : l’analyse variationnelle, l’optimisation monotone, les cônes convexes etc. Dans ce cadre, Dempe et Gadhi [39] ont proposé des conditions nécessaires d’optimalité en utilisant des techniques d’analyse variationnelle pour un problème de programmation bi-niveaux sans que le problème du niveau inférieur satisfasse la contrainte de qualification de Mangasarian-Fromovitz. Mordukhovich et al. [92] ont développé l’approche de la valeur optimale pour établir des conditions nécessaires d’optimalité pour le problème bi-niveaux op-

timiste, en utilisant aussi l'analyse variationnelle. D'autres conditions d'optimalité pour des problèmes bi-niveaux en utilisant d'autres techniques peuvent être trouvées dans les références [44, 45, 73, 128].

Les problèmes d'optimisation rencontrés en pratique ne peuvent être caractérisés par une fonction mono-objectif, du fait que les objectifs à atteindre sont souvent antagonistes. L'optimisation multi-objectifs a pour but d'offrir des outils de modélisation des problèmes d'optimisation avec des fonctions vectorielles, d'appliquer et de développer les outils de leurs résolutions et d'analyses. De même pour les problèmes de programmation bi-niveaux multi-objectifs qui sont couramment rencontrés dans de nombreux domaines de l'activité humaine, y compris l'ingénierie, l'économie, la gestion, le transport, etc. [33, 56, 59, 77, 121]. Les problèmes bi-niveaux multi-objectifs sont repartis en trois classes, selon les caractéristiques des fonctions objectifs des deux niveaux. Lorsque seulement la fonction objectif du niveau supérieur qui est vectorielle, on dit que le problème bi-niveaux est multi-objectifs au niveau supérieur [2, 3, 27, 55]. Par contre, si seulement la fonction objectif du niveau inférieur qui est vectorielle, on parle de problème bi-niveaux semi-vectoriel [6, 17, 18, 41]. Dans le cas où les deux fonctions objectifs des deux niveaux sont vectorielles, on utilise la terminologie problème bi-niveaux multi-objectifs tout court [50, 57, 94, 98].

Dans cette thèse, on s'intéressera uniquement aux problèmes bi-niveaux multi-objectifs au niveau supérieur. Une attention toute particulière sera consacrée à l'étude des conditions nécessaires et suffisantes d'efficacité globale pour les problèmes bi-niveaux multi-objectifs optimistes par l'approche de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Il faut noter que cette approche conduit à des problèmes non convexes même lorsque les fonctions objectifs et les contraintes du niveau supérieur et du niveau inférieur sont convexes, voir Dempe et Dutta [36] et Dempe et al. [37]. Cette problématique a été longuement discutée dans la littérature sur la programmation bi-niveaux. Ainsi, le recours à la convexité généralisée, en particulier l'invexité, est une approche souvent utilisée ces dernières années en programmation mathématique et notamment en programmation multi-objectifs. C'est cette notion que nous allons aussi utiliser pour surmonter cette difficulté qui pourrait se présenter à cause de la non convexité des problèmes obtenus après transformation. Spécifiquement, nous utiliserons le concept d'invexité et ses généralisations pour établir des conditions nécessaires et suffisantes d'efficacité globales pour les problèmes obtenus après transformation, et ensuite nous déduirons des conditions nécessaires et suffisantes d'efficacité globale pour les problèmes bi-niveaux multi-objectifs considérés, ce qui constitue notre contribution essentielle dans ce travail.

Cette thèse comporte une introduction générale, quatre chapitres, et une conclusion générale, dont voici une brève présentation :

Le premier chapitre est consacré à des rappels sur les notions de convexité et d'invexité, suivi d'une synthèse sur quelques résultats concernant les conditions (d'optimalité) d'efficacité pour un problème (mono-objectif) multi-objectifs sous des contraintes d'égalités et/ou d'inégalités, ainsi qu'un bref aperçu sur les problèmes multi-objectifs fractionnaires.

Dans le deuxième chapitre, nous effectuerons un état de l'art sur la programmation bi-niveaux mono-objectif et ses différentes variantes. Essentiellement, nous donnerons les concepts de solutions les plus couramment étudiés dans la littérature et les différentes approches de résolution numérique pour ces différentes variantes, à savoir : les problèmes bi-niveaux linéaires (*PBL*), les problèmes bi-niveaux non linéaires (*PBN*), ainsi que les problèmes bi-niveaux fractionnaires (*PBF*).

Le troisième chapitre, qui représente le noyau de cette thèse, est consacré à l'étude d'un problème bi-niveaux optimiste non linéaire avec des objectifs multiples au niveau supérieur (*PBMN*). En utilisant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker associées au problème du niveau inférieur ($(PNI)_x$) et en utilisant le concept d'invexité (généralisée), nous établirons des conditions nécessaires et suffisantes d'efficacité globales pour le problème (*PBMN*). Les résultats obtenus pour le problème (*PBMN*), ont été appliqués au cas de problèmes bi-niveaux multi-objectifs impliquant des fonctions linéaires tout en donnant des exemples d'illustration. Les résultats originaux de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication dans une revue internationale "Journal of Applied Mathematics and Computing" [23] et de trois communications dans différentes conférences nationales et internationales [19, 20, 22].

Dans le dernier chapitre, nous généraliserons les résultats obtenus dans le chapitre trois à un problème bi-niveaux multi-objectifs fractionnaire non linéaire (*PBMFN*) où le niveau supérieur dispose d'une fonction multi-objectifs, dont chaque composante est un quotient de deux fonctions non linéaires, et la fonction objectif du niveau inférieur est quadratique scalaire avec des contraintes linéaires. Les résultats de cette étude ont été synthétisés sous forme d'un article qui a été soumis pour publication dans la revue internationale "Applications of Mathematics" [24] et d'une communication internationale [21].

Enfin, le document se termine par une conclusion générale où quelques perspectives de recherche ouvertes seront proposées.

Notions de convexité, d'invexité et conditions d'efficacité dans les problèmes multi-objectifs

1.1 Introduction

Ce chapitre introductif sera consacré à des rappels sur les notions de convexité et de convexité généralisée, les notions d'invexité et ses généralisations. Ensuite, nous exposons quelques résultats sur les conditions d'optimalité pour un problème mono-objectif sous des contraintes d'inégalités et aussi les résultats concernant les conditions d'efficacité d'un problème multi-objectifs avec des contraintes d'égalités et d'inégalités et enfin, nous terminons par un rappel sur les problèmes multi-objectifs fractionnaires.

1.2 Notions de convexité

En programmation mathématique, la notion de convexité joue un rôle très important. En effet, un programme convexe, *i.e.*, dont la fonction objectif et le domaine réalisable sont convexes, possède des propriétés remarquables qui permettent d'en faciliter la recherche des solutions, leurs caractérisations et les méthodes de résolution.

Les notations suivantes d'égalités et d'inégalités seront utilisées. Si $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on notera :

$$x = y \Leftrightarrow x_i = y_i, \quad i = 1, \dots, n;$$

Chap. 1. Convexité, invexité et conditions d'efficacité dans les pbs multi-obj. 6

$$x < y \Leftrightarrow x_i < y_i, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \text{ et } x \neq y.$$

On note également \mathbb{R}_{\leq}^n (resp. \mathbb{R}_{\geq}^n ou $\mathbb{R}_{>}^n$) l'ensemble des vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$ avec $x \geq 0$ (resp. $x \geq 0$ ou $x > 0$).

Définition 1.2.1. [13, 82] Un ensemble non vide $D \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit convexe si pour tous $x, x_0 \in D$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$(1 - \lambda)x_0 + \lambda x \in D.$$

Définition 1.2.2. [13, 82] Soit D un ensemble non vide convexe de \mathbb{R}^n . Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe en $x_0 \in D$ si pour tout $x \in D$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)x_0) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x_0). \quad (1.1)$$

On dit que f est convexe sur D , si elle est convexe en tout point $x_0 \in D$. Si l'inégalité (1.1) est stricte pour tout $x \neq x_0$ et $\lambda \in]0, 1[$, on dit que la fonction f est strictement convexe en x_0 .

Définition 1.2.3. [82] Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. La fonction notée $\nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelée gradient de f et il est défini par :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.2.1. [13] Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur un ensemble ouvert convexe $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Alors, f est convexe sur D si et seulement si pour tous $x, x_0 \in D$, l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

1. $f(x) - f(x_0) \geq [\nabla f(x)]^t(x - x_0)$,
2. $(x - x_0)^t[\nabla f(x) - \nabla f(x_0)] \geq 0$.

Définition 1.2.4. [13, 82] Soit D un ensemble non vide convexe de \mathbb{R}^n . Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est dite quasi-convexe en $x_0 \in D$, si pour tout $x \in D$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \Rightarrow f((1 - \lambda)x_0 + \lambda x) - f(x_0) \leq 0. \quad (1.2)$$

On dit que f est quasi-convexe sur D , si elle est quasi-convexe en tout point $x \in D$.

On a une définition équivalente suivante.

Définition 1.2.5. [13] Soit D un ensemble non vide convexe de \mathbb{R}^n . Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est dite quasi-convexe en $x_0 \in D$, si pour tout $x \in D$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$f((1 - \lambda)x_0 + \lambda x) \leq \max\{f(x_0), f(x)\}.$$

Définition 1.2.6. [13] Soit D un ensemble non vide convexe de \mathbb{R}^n . Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est dite strictement quasi-convexe en $x_0 \in D$, si pour tout $x \in D$ et pour tout $\lambda \in]0, 1[$, on a :

$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \Rightarrow f((1 - \lambda)x_0 + \lambda x) - f(x_0) < 0. \quad (1.3)$$

On dit que f est strictement quasi-convexe sur D , si elle est strictement quasi-convexe en tout point $x \in D$.

Théorème 1.2.2. [13, 82] Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur un ensemble ouvert convexe $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Alors, f est quasi-convexe sur D si et seulement si pour tous $x, x_0 \in D$, on a :

$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \Rightarrow [\nabla f(x_0)]^t(x - x_0) \leq 0. \quad (1.4)$$

Remarque 1.2.1. [108] Les fonctions différentiables quasi-convexes ne vérifient pas la propriété particulière des fonctions convexes qui dit que tout point critique (stationnaire) est un minimum global (*i.e.* si $\nabla f(x) = 0$ en un point donné x_0 , alors il est un point minimum global de f). Ceci a motivé la définition d'une nouvelle classe de fonctions appelées pseudo-convexes qui partagent cette propriété avec les fonctions convexes. Le concept de pseudo-convexité a été introduit par Mangasarian [82].

Définition 1.2.7. [13, 82] Soit D un ensemble non vide convexe de \mathbb{R}^n . Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est dite pseudo-convexe en $x_0 \in D$, si la fonction f est différentiable en x_0 et pour tout $x \in D$, on a :

$$[\nabla f(x_0)]^t(x - x_0) \geq 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0. \quad (1.5)$$

On dit que f est pseudo-convexe sur D , si elle est pseudo-convexe en tout point $x_0 \in D$.

1.3 Notions d'invexité

Le concept d'invexité a été introduit pour la première fois par Hanson [60] dans les problèmes d'optimisation. L'appellation "fonction invexe" est due à Craven [32]. Hanson [60] a démontré des conditions suffisantes d'optimalité de type Karush-Kuhn-Tucker, ainsi que des résultats de la dualité de Wolfe pour un problème de programmation mathématique sous des hypothèses d'invexité. Depuis, plusieurs généralisations de l'invexité ont été introduites dans la littérature. Weir [122] a étudié un problème de programmation multi-objectifs impliquant des fonctions invexes et il a obtenu des conditions nécessaires et suffisantes d'efficacité de type Karush-Kuhn-Tucker pour qu'un point réalisable soit efficace. En utilisant le concept de V-invexité comme une généralisation de l'invexité dans le cas vectoriel, Jeyakumar et Mond [66] ont obtenu quelques conditions d'efficacité faible et des résultats sur la dualité pour un problème multi-objectifs non convexe. Osuna-Gómez et al. [96] ont établi de nouvelles caractérisations des solutions faiblement efficaces pour un problème multi-objectifs via une généralisation de la conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker. Le concept d'invexité a été généralisé par la suite à des fonctions vectorielles non différentiables. Voir par exemple Antczak [7], Mishra et al. [91], Slimani et Radjef [110, 111] et d'autres.

Définition 1.3.1. [60] Soit D un ensemble non vide ouvert de \mathbb{R}^n et $\eta : D \times D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle. Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite invexe en $x_0 \in D$ par rapport à η si f est différentiable en x_0 et, pour chaque $x \in D$, on a :

$$f(x) - f(x_0) \geq [\nabla f(x_0)]^t \eta(x, x_0). \quad (1.6)$$

On dit que f est invexe sur D si elle est invexe en tout point $x_0 \in D$ par rapport à la même fonction vectorielle η . Si l'inégalité (1.6) est stricte, on dit que la fonction f est strictement invexe en x_0 par rapport à η .

Définition 1.3.2. [60] Soit D un ensemble non vide ouvert de \mathbb{R}^n et $\eta : D \times D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle. Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite pseudo-invexe en $x_0 \in D$ par rapport à η , si f est différentiable en x_0 et, pour chaque $x \in D$, on a :

$$[\nabla f(x_0)]^t \eta(x, x_0) \geq 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0. \quad (1.7)$$

On dit que f est pseudo-invexe sur D si elle est pseudo-invexe en tout point $x_0 \in D$ par rapport à la même fonction vectorielle η .

Définition 1.3.3. [60] Soit D un ensemble non vide ouvert de \mathbb{R}^n et $\eta : D \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle. Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est dite quasi-invexe en $x_0 \in D$ par rapport à η si f est différentiable en x_0 et, pour chaque $x \in D$, on a :

$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \Rightarrow [\nabla f(x_0)]^t \eta(x, x_0) \leq 0. \quad (1.8)$$

On dit que f est quasi-invexe sur D si elle est quasi-invexe en tout point $x_0 \in D$ par rapport à la même fonction vectorielle η .

1.4 Liens entre les notions de convexité et d'invexité

Il existe plusieurs relations entre les deux notions de convexité et d'invexité. Dans ce qui suit, nous donnons certaines de ces relations qui ont été établies par Ben-Israel et Mond [15] et Kaul et Kaur [71].

Théorème 1.4.1. [71]

1. *Toute fonction différentiable convexe (resp. strictement convexe) est invexe (resp. strictement invexe), mais la réciproque n'est pas vraie.*
2. *Toute fonction différentiable pseudo-convexe est pseudo-invexe, mais la réciproque n'est pas vraie.*
3. *Toute fonction différentiable quasi-convexe est quasi-invexe, mais la réciproque n'est pas vraie.*
4. *Toute fonction différentiable invexe par rapport à η est pseudo-invexe par rapport à la même fonction η , mais la réciproque n'est pas vraie.*
5. *Toute fonction différentiable invexe par rapport à η est quasi-invexe par rapport à la même fonction η , mais la réciproque n'est pas vraie.*
6. *Toute fonction différentiable strictement invexe par rapport à η est invexe par rapport à la même fonction η , mais la réciproque n'est pas vraie.*

Remarque 1.4.1. [15]

1. Une fonction pseudo-invexe par rapport à η peut ne pas être invexe par rapport à la même fonction η , mais elle sera invexe par rapport à une autre fonction vectorielle.
2. Les fonctions quasi-convexes et les fonctions quasi-invexes ne sont pas forcément invexes.

La proposition suivante donnée par Ben-Israel et Mond [15] sera utilisée dans la suite de ce document.

Proposition 1.4.1. [15, 84] *Toute fonction $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en un point $x_0 \in D$, avec $\nabla f(x_0) \neq 0$, est invexe en x_0 par rapport à $\eta(x, x_0) = [f(x) - f(x_0)] \frac{[\nabla f(x_0)]}{[\nabla f(x_0)]^t \nabla f(x_0)}$, $\forall x \in D$.*

L'une des difficultés d'application de l'invexité est qu'elle soit définie en exigeant que les fonctions objectifs et contraintes soient toutes invexes par rapport à une même fonction η . Trouver une fonction η par rapport à laquelle plusieurs autres fonctions sont invexes n'est pas facile même lorsque elle existe. Pour remédier à cette difficulté, Slimani et Radjef [109, 110, 111] ont introduit le concept de fonctions vectorielles invexes par rapport à différentes fonctions $(\eta_i)_{i=\overline{1,N}}$ (*i.e.* chacune des composantes d'une fonction vectorielle est considérée invexe par rapport à sa propre fonction η_i au lieu d'une même fonction η). Dans le cas non différentiable, ce concept a été élargi à des problèmes multi-objectifs " d_i -invexe" (*i.e.* chacune des composantes des fonctions intervenant dans ces problèmes est considérée directionnellement différentiable dans sa propre direction d_i au lieu d'une même direction d). Ainsi, ils ont établi de nouvelles conditions d'efficacité avec caractérisation des solutions et des résultats de dualité pour les problèmes de programmation non linéaire et multi-objectifs en considérant les cas différentiables et non différentiables.

Définition 1.4.1. [110, 108] Soit D un ensemble non vide ouvert de \mathbb{R}^n et $\eta_i : D \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, N$ des fonctions vectorielles. Une fonction vectorielle $f : D \rightarrow \mathbb{R}^N$ est dite invexe en $x_0 \in D$ par rapport à $(\eta_i)_{i=\overline{1,N}}$, si la fonction f est différentiable en x_0 et, pour tout $x \in D$, on a :

$$f_i(x) - f_i(x_0) \geq [\nabla f_i(x_0)]^t \eta_i(x, x_0), \text{ pour tout } i = 1, \dots, N. \quad (1.9)$$

On dit que f est invexe sur D par rapport à $(\eta_i)_{i=\overline{1,N}}$, si f est invexe en tout point $x_0 \in D$ par rapport aux mêmes $(\eta_i)_{i=\overline{1,N}}$. Si l'inégalité (1.9) est stricte, on dit que f est strictement invexe en x_0 par rapport à $(\eta_i)_{i=\overline{1,N}}$.

Définition 1.4.2. [110, 108] Soit D un ensemble non vide ouvert de \mathbb{R}^n et $\eta_i : D \times D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, N$ des fonctions vectorielles. Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est dite faiblement pseudo-invexe en $x_0 \in D$ par rapport à $(\eta_i)_{i=\overline{1,N}}$, si la fonction f est différentiable en x_0 et, pour tout $x \in D$, on a :

$$f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow \exists \bar{x} \in D, [\nabla f_i(x_0)]^t \eta_i(\bar{x}, x_0) < 0, \text{ pour tout } i = 1, \dots, N. \quad (1.10)$$

Si $x = \bar{x}$, dans la relation (1.10), on dit que f est pseudo-invexe en x_0 par rapport à $(\eta_i)_{i=\overline{1,N}}$. On dit que f est (faiblement) pseudo-invexe sur D par rapport à $(\eta_i)_{i=\overline{1,N}}$ si f est (faiblement) pseudo-invexe en tout point $x_0 \in D$ par rapport aux mêmes $(\eta_i)_{i=\overline{1,N}}$.

Remarque 1.4.2. [110, 108]

- (i) Notons que dans la Définition 1.4.2, \bar{x} dépend de x et x_0 , *i.e.* $\bar{x} = \bar{x}(x, x_0)$. Il est facile de voir que si les fonctions vectorielles η_i , $i = 1, \dots, N$ sont égales à une même fonction η et $\bar{x} = x$, on obtient la définition de la pseudo-invexité définie par Osuna-Gómez et al. [96].
- (ii) Si $n = 1$, on obtient la pseudo-invexité faible d'une fonction scalaire. De plus, si $\bar{x} = x$, on déduit la pseudo-invexité de la Définition 1.3.2.

Proposition 1.4.2. [112] Toute fonction $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, différentiable en un point $x_0 \in D$ avec $\nabla f(x_0) \neq 0$, est pseudo-invexe en x_0 par rapport à $\eta(x, x_0) = [f(x) - f(x_0)][\nabla f(x_0)]$, $\forall x \in D$ ou $\eta(x, x_0) = [f(x) - f(x_0)]t(x_0)$, $\forall x \in D$ où $t(x_0) \in \mathbb{R}^n$ avec $t_i(x_0) = \begin{cases} 1, & \text{si } \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \geq 0, \forall i = 1, \dots, n, \\ -1, & \text{sinon.} \end{cases}$

Sach et al. [99] ont introduit la classe des fonctions infines qui est une sous classe des fonctions invexes. Cette classe est appropriée pour les problèmes d'optimisation avec contraintes de type égalité et inégalité. Dans notre cas, nous considérons les fonctions différentiables infines.

Définition 1.4.3. [23] Soit D un ensemble non vide ouvert de \mathbb{R}^n et $\eta : D \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle. Une fonction différentiable $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est infixe en $x_0 \in D$ par rapport à η si pour tout $x \in D$, on a :

$$f(x) - f(x_0) = [\nabla f(x_0)]^t \eta(x, x_0).$$

1.5 Conditions d'optimalité dans les problèmes mono-objectif avec contraintes

Considérons le problème mono-objectif avec des contraintes d'inégalités suivant :

$$(P) \begin{cases} \min_{x \in X} f(x), \\ \text{s.c. } g_j(x) \leq 0, j \in P = \{1, \dots, p\}, \end{cases}$$

où $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in P$ sont des fonctions différentiables sur l'ensemble ouvert X . On note par $X_0 = \{x \in X, g_j(x) \leq 0, \forall j \in P\}$ l'ensemble de toutes les solutions réalisables du problème (P) .

Définition 1.5.1. [82] On dit que $x_0 \in X_0$ est une solution localement optimale (resp. solution localement strictement optimale) du problème (P) , s'il existe un voisinage de x_0 , $V_\alpha(x_0) = \{x \in X_0 : \|x - x_0\| \leq \alpha\}$ tel que $f(x_0) \leq f(x)$ (resp. $f(x_0) < f(x)$), $\forall x \in V_\alpha(x_0)$.

Définition 1.5.2. [82] On dit que $x_0 \in X_0$ est une solution optimale (resp. une solution optimale unique) du problème (P) , si on a $f(x_0) \leq f(x)$ (resp. $f(x_0) < f(x)$), $\forall x \in X_0 \setminus \{x_0\}$.

La contrainte $g_j(x_0) \leq 0$, $j \in P$ est dite active au point $x_0 \in X_0$ si $g_j(x_0) = 0$. Elle est dite passive si $g_j(x_0) < 0$. On note par $J(x_0) = \{j \in P, g_j(x_0) = 0\}$ l'ensemble des indices des contraintes actives au point x_0 .

Définition 1.5.3. [82] On dit que la contrainte de qualification de Kuhn-Tucker est satisfaite en $x_0 \in X_0$, si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. Il existe un vecteur $d \in \mathbb{R}^n$ tel que $[\nabla g_j(x_0)]^t d < 0$, $\forall j \in J(x_0)$.

2. Les fonctions g_j , $j \in J(x_0)$ sont différentiables et les gradients $\nabla g_j(x_0)$, $j \in J(x_0)$ sont linéairement indépendants.
3. Les fonctions g_j , $j \in P$ sont convexes et il existe un vecteur $\tilde{x} \in X_0$ tel que $g_j(\tilde{x}) < 0$, $j \in P$ (contrainte de qualification de Slater).
4. Toutes les fonctions g_j , $j \in P$ sont linéaires.

Remarque 1.5.1. [82] Si l'une des conditions 3. et 4. est vérifiée, alors la contrainte de qualification est satisfaite en tout point $x \in X_0$.

Définition 1.5.4. [82] On dit qu'un point $x_0 \in X_0$ est un point stationnaire de Kuhn-Tucker pour le problème (P), s'il existe $u_0 \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ tel que

$$\begin{aligned}\nabla f(x_0) + \nabla^t g(x_0)u_0 &= 0, \\ u_0^t g(x_0) &= 0,\end{aligned}$$

où $\nabla g(x_0)$ est une matrice $p \times n$, ses lignes sont les transposés des vecteurs gradients de g_j , $j \in P$ au point x_0 .

1.5.1 Conditions nécessaires d'optimalité

Le théorème suivant nous donne des conditions nécessaires d'optimalité pour le problème (P).

Théorème 1.5.1. [13] *Supposons que dans le problème (P), les fonctions f et g_j , $j \in J(x_0)$ sont différentiables en un point $x_0 \in X_0$ et g_j , $j \notin J(x_0)$ sont continues en x_0 . De plus, supposons que $\nabla g_j(x_0)$, $j \in J(x_0)$ sont linéairement indépendants (la contrainte de qualification 2. est satisfaite en x_0). Si x_0 est une solution optimale locale du problème (P), alors il existe des scalaires $u_j \geq 0$, $j \in J(x_0)$ tels que :*

$$\nabla f(x_0) + \sum_{j \in J(x_0)} u_j \nabla g_j(x_0) = 0. \quad (1.11)$$

Si de plus, les fonctions g_j , $j \notin J(x_0)$ sont différentiables en x_0 , alors l'équation (1.11) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\nabla f(x_0) + \sum_{j=1}^p u_j \nabla g_j(x_0) &= 0, \\ u_j g_j(x_0) &= 0, \quad j \in P.\end{aligned}$$

1.5.2 Conditions suffisantes d'optimalité

Dans le théorème suivant nous donnons les conditions suffisantes d'optimalité pour le problème (P).

Théorème 1.5.2. [13] *Soit x_0 un point stationnaire de Khun-Tucker du problème (P).*

1. *Si f est pseudo-convexe sur un voisinage $V(x_0)$ de x_0 et les fonctions g_j , $j \in J(x_0)$ sont quasi-convexes sur $V(x_0)$, alors x_0 est un minimum local du problème (P).*
2. *Si f est pseudo-convexe en x_0 et les fonctions g_j , $j \in J(x_0)$ sont différentiables et quasi-convexes en x_0 , alors x_0 est un minimum global du problème (P).*

1.6 Conditions d'efficacité dans les problèmes multi-objectifs avec contraintes

Dans cette section, nous considérons un problème de programmation multi-objectifs sous des contraintes d'égalités et d'inégalités et nous rappelons quelques résultats sur les conditions nécessaires et suffisantes d'efficacité pour ce problème, notamment ceux qui utilisent le concept de convexité et ses généralisations.

Considérons le problème de programmation multi-objectifs suivant :

$$(PM) \begin{cases} \min_x f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x)), \\ \text{s.c } g_j(x) \leq 0, j \in P = \{1, \dots, p\}, \\ h_k(x) = 0, k \in M = \{1, \dots, m\}, \\ x \in X, \end{cases}$$

où $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in Q = \{1, \dots, q\}$, $g_j : X \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in P$ et $h_k : X \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in M$. $X \subset \mathbb{R}^N$ est un ensemble non vide ouvert, $X_0 = \{x \in X : g_j(x) \leq 0, j \in P, h_k(x) = 0, k \in M\}$ est l'ensemble de toutes les solutions réalisables du problème (PM). Pour $x_0 \in X$, on note par $J(x_0)$ l'ensemble $\{j \in P : g_j(x_0) = 0\}$ et $J_0 = |J(x_0)|$.

Nous rappelons quelques notions d'efficacité, les plus étudiées dans la littérature pour le problème (PM).

Définition 1.6.1. [130] Un point $x_0 \in X_0$ est dit solution localement faiblement efficace pour (PM) , s'il existe un voisinage $V(x_0)$ de x_0 tel que

$$f(x) \not\prec f(x_0), \text{ pour tout } x \in V(x_0) \cap X_0.$$

Définition 1.6.2. [130] Un point $x_0 \in X_0$ est dit solution (faiblement) efficace pour (PM) , s'il n'existe pas $x \in X_0$ tel que $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$).

Définition 1.6.3. [58] Une solution efficace $x_0 \in X_0$ du problème (PM) est dite proprement efficace, s'il existe un nombre réel positif M telle que l'inégalité $f_i(x_0) - f_i(x) \leq M[f_j(x) - f_j(x_0)]$ est vérifiée pour tout $i \in Q$ et $x \in X_0$ tel que $f_i(x) < f_i(x_0)$ et pour un certain $j \in Q$ tel que $f_j(x) > f_j(x_0)$.

Définition 1.6.4. [49] On dit qu'une solution réalisable $x_0 \in X_0$ est un point vectoriel critique de Kuhn-Tucker du problème (PM) , s'il existe un vecteur $(\mu, \lambda, \delta) \in \mathbb{R}_{\geq}^q \times \mathbb{R}_{\leq}^p \times \mathbb{R}^m$ tel que

$$\sum_{i=1}^q \mu_i [\nabla f_i(x_0)]^t + \sum_{j \in J(x_0)} \lambda_j [\nabla g_j(x_0)]^t + \sum_{k=1}^m \delta_k [\nabla h_k(x_0)]^t = 0, \quad (1.12)$$

$$\lambda_j g_j(x_0) = 0, \forall j \in P. \quad (1.13)$$

Définition 1.6.5. [83] On dit qu'une solution réalisable $x_0 \in X_0$ est un point vectoriel critique de Fritz John du problème (PM) , s'il existe un vecteur $(\mu, \lambda, \delta) \in \mathbb{R}_{\geq}^q \times \mathbb{R}_{\leq}^p \times \mathbb{R}^m$, $(\mu, \lambda) \neq 0$ tel que (1.12) et (1.13) sont vérifiées.

1.6.1 Conditions nécessaires d'efficacité

Sing [107] a donné des conditions nécessaires d'efficacité pour le problème (PM) en se basant sur la convergence d'un vecteur en un point et le théorème des alternatives de Motzkin [93].

Définition 1.6.6. [85] Soit $X \subset \mathbb{R}^n$, le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est appelé un vecteur de convergence pour X en $x_0 \in X$ si et seulement s'il existe une suite $(x_k)_k \in X$ et une suite des nombres réels positifs $(\alpha_k)_k$ tels que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k - x_0}{\alpha_k} = x.$$

Soit $C(X_0, x_0)$ l'ensemble de tous les vecteurs de convergence pour X_0 en x_0 . De plus, soit $\mathcal{D} = \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla g_{J(x_0)}(x_0)d \leq 0, \nabla h(x_0)d = 0\}$.

Définition 1.6.7. [107] On dit que $g_{J(x_0)}$ et h satisfont une contrainte de qualification en x_0 , si $\mathcal{D} \subseteq C(X_0, x_0)$.

Théorème 1.6.1. [107] *Supposons que*

1. x_0 est une solution efficace pour (PM),
2. f, g et h sont différentiables en x_0 ,
3. $g_{J(x_0)}$ et h satisfont une contrainte de qualification en x_0 .

Alors il existe $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^q$, $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ et $\delta \in \mathbb{R}^m$ tels que

$$[\nabla f(x_0)]^t \mu + [\nabla g(x_0)]^t \lambda + [\nabla h(x_0)]^t \delta = 0, \quad (1.14)$$

$$[\nabla g(x_0)]^t \lambda = 0. \quad (1.15)$$

1.6.2 Conditions suffisantes d'efficacité

Des conditions suffisantes d'efficacité pour un problème multi-objectifs différentiable avec des contraintes d'égalités et d'inégalités (PM) sous des hypothèses de convexité et de convexité généralisée ont été étudiées par plusieurs auteurs, comme par exemple, Sing [107], Majumdar [81], Kim [72] et d'autres. Nous exposerons dans cette partie quelques unes de ces résultats.

Théorème 1.6.2. [107] *Soit $x_0 \in X_0$ et supposons que :*

1. f, g et h sont différentiables en x_0 ,
2. $f, g_{J(x_0)}$ et h sont convexes en x_0 ,
3. il existe $\mu \in \mathbb{R}_{>}^q$, $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^{J_0}$ et $\delta \in \mathbb{R}_{\geq}^m$ tels que

$$\mu[\nabla f(x_0)]^t + \lambda[\nabla g_{J(x_0)}(x_0)]^t + \delta[\nabla h(x_0)]^t = 0.$$

Alors x_0 est une solution (faiblement) efficace pour (PM).

Théorème 1.6.3. [107] *Soit $x_0 \in X_0$ et supposons que :*

1. $f, g_{J(x_0)}$ et h sont différentiables en x_0 ,

2. il existe $\mu \in \mathbb{R}_{>}^q, \lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^{J_0}$ et $\delta \in \mathbb{R}^m$ tels que
3. $(x - x_0)^t (\mu[\nabla f(x_0)]^t + \lambda[\nabla g_{J(x_0)}(x_0)]^t + \delta[\nabla h(x_0)]^t) \geq 0$,
4. $\mu^t f + \lambda g_{J(x_0)} + \delta^t h$ est pseudo-convexe en x_0 .

Alors x_0 est une solution (faiblement) efficace pour (PM).

Théorème 1.6.4. [72] Soit $x_0 \in X_0$ et supposons que :

1. f est pseudo-convexe en x_0 ,
2. $g_{J(x_0)}$ et h sont quasi-convexes en x_0 ,
3. il existe $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^q, \lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^{J_0}$ et $\delta \in \mathbb{R}_{\geq}^m$ tels que $\mu[\nabla f(x_0)]^t + \lambda[\nabla g_{J(x_0)}(x_0)]^t + \delta[\nabla h(x_0)]^t = 0$.

Alors x_0 est une solution faiblement efficace pour (PM).

Théorème 1.6.5. [107] Soit $x_0 \in X_0$ et supposons que :

1. $f, g_{J(x_0)}$ et h sont différentiables en x_0 ,
2. il existe $\mu \in \mathbb{R}_{>}^q, \lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^P$ et $\delta \in \mathbb{R}^m$ tels que
3. $\sum_{i=1}^q \mu_i f_i$ est pseudo-convexe en x_0 ,
4. $\sum_{j \in J(x_0)} \lambda_j g_j$ est quasi-convexe en x_0 ,
5. $\sum_{k=1}^m \mu_k h_k$ est quasi-convexe en x_0 ,
6. $\left(\sum_{i=1}^q \nabla \mu_i f_i(x_0) + \sum_{j=1}^p \nabla \lambda_j g_j(x_0) + \sum_{k=1}^m \nabla \delta_k h_k(x_0) \right) (x - x_0) \geq 0$, pour tout $x \in X_0$,
7. $\lambda^t g(x_0) = 0$.

Alors x_0 est une solution efficace pour (PM).

Théorème 1.6.6. [72] Soit $x_0 \in X_0$ et supposons que :

1. f est strictement pseudo-convexe en x_0 ,
2. $g_{J(x_0)}$ et h sont quasi-convexes en x_0 ,

3. il existe $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^q, \lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^{J_0}$ et $\delta \in \mathbb{R}_{\geq}^m$ tels que

$$\mu[\nabla f(x_0)]^t + \lambda[\nabla g_{J(x_0)}(x_0)]^t + \delta[\nabla h(x_0)]^t = 0.$$

Alors x_0 est une solution efficace pour (PM).

La section suivante sera consacrée à un bref rappel sur les problèmes multi-objectifs fractionnaires.

1.7 Conditions d'efficacité dans les problèmes multi-objectifs fractionnaires

Dans divers problèmes pratiques qui se posent dans la théorie de la décision, l'économie et la gestion de portefeuille, etc., il est nécessaire d'optimiser le rapport de plusieurs fonctions linéaires ou non linéaires. Ces problèmes de prise de décision sont appelés problèmes multi-objectifs fractionnaires, qui est un domaine de recherche très investi ces dernières années. L'établissement des conditions d'existence de solutions efficaces et la dualité en constituent un des axes qui a suscité beaucoup d'intérêt.

Considérons le problème multi-objectifs fractionnaire suivant :

$$(PMF) \begin{cases} \min_{x \in X} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \dots, \frac{f_q(x)}{g_q(x)} \right), \\ \text{s.c } h_j(x) \leq 0, j \in K = \{1, \dots, k\}, \end{cases}$$

où $f_i, g_i, h_j : X \rightarrow \mathbb{R}, i \in Q = \{1, \dots, q\}, j \in K$ et X un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}^n, f_i(x) \geq 0, g_i(x) > 0$ pour tout $x \in X$ et pour chaque $i \in Q$.

On note $X_0 = \{x \in X : h(x) \leq 0\}$ l'ensemble de toutes les solutions réalisables du problème (PMF). Pour $x_0 \in X$, on note par $J(x_0)$ l'ensemble $\{j \in K : h_j(x_0) = 0\}$ et par $J = |J(x_0)|$ le cardinal de l'ensemble $J(x_0)$.

Nous rappelons le concept de solutions faiblement efficaces locales pour le problème (PMF).

Définition 1.7.1. [97] Un point $x_0 \in X_0$ est dit solution localement faiblement efficace du problème (PMF), s'il n'existe pas de $x \in V(x_0) \cap X_0$, où $V(x_0)$ est un voisinage de x_0 tel que

$$\frac{f_i(x)}{g_i(x)} < \frac{f_i(x_0)}{g_i(x_0)}, \forall i \in Q. \quad (1.16)$$

Le concept d'efficacité globale pour le problème (PMF) est défini comme suit.

Définition 1.7.2. [97] Un point $x_0 \in X_0$ est dit solution faiblement efficace pour (PMF) , s'il n'existe pas $x \in X_0$ qui vérifie la relation (1.16).

Définition 1.7.3. [97] Un point $x_0 \in X_0$ est dit solution efficace pour (PMF) , s'il n'existe pas $x \in X_0$ tel que pour un certain $\rho \in Q$,

$$\frac{f_\rho(x)}{g_\rho(x)} < \frac{f_\rho(x_0)}{g_\rho(x_0)}, \quad \frac{f_i(x)}{g_i(x)} \leq \frac{f_i(x_0)}{g_i(x_0)}, \quad \forall i \in Q, i \neq \rho.$$

En utilisant l'approche paramétrique de Dinklebach [48] et Jagannathan [65] pour le problème de programmation fractionnaire, on considère le problème multi-objectifs suivant $(PM)_\lambda$ pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}^q$:

$$(PM)_\lambda \begin{cases} \min_{x \in X} (f_1(x) - \lambda_1 g_1(x), \dots, f_q(x) - \lambda_q g_q(x)), \\ \text{s.c } h_j(x) \leq 0, \quad j \in K. \end{cases}$$

Lemme 1.7.1. [97] Soit x_0 une solution faiblement efficace pour (PMF) . Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^q$ telle que x_0 soit une solution faiblement efficace pour $(PM)_\lambda$. Inversement, si x_0 est faiblement efficace pour $(PM)_\lambda$ avec $\lambda = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$, alors x_0 est une solution faiblement efficace pour (PMF) .

Geoffrion [58] a caractérisé les solutions pour les problèmes de programmation multi-objectifs par l'approche de la scalarisation. Ces caractérisations sont utilisées aussi pour le problème paramétrique $(PM)_\lambda$.

Considérons le problème de pondération $(PM)_\lambda(w)$ correspondant au problème $(PM)_\lambda$.

$$(PM)_\lambda(w) \begin{cases} \min_{x \in X} \sum_{i=1}^q w_i (f_i(x) - \lambda_i g_i(x)), \\ \text{s.c } h_j(x) \leq 0, \quad j \in K, \end{cases}$$

où $w = (w_1, \dots, w_q) \in \mathcal{W} = \{w \in \mathbb{R}^q : \sum_{i=1}^q w_i = 1, w_i \geq 0, i \in Q\}$.

Théorème 1.7.1. [97] Si x_0 est une solution optimale pour le problème scalarisé $(PM)_\lambda(w)$, avec $\lambda = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ alors, x_0 est une solution faiblement efficace pour $(PM)_\lambda$.

Dans de nombreux problèmes de programmation, les fonctions sont différentiables, ce qui a motivé Martin [84] à définir une notion de convexité plus faible pour les fonctions différentiables, appelée Kuhn-Tucker convexité ou *KT*-convexité.

Définition 1.7.4. [84] Le problème $(PM)_\lambda$ est dit *KT*-invexe sur l'ensemble des solutions réalisables X_0 par rapport à une fonction $\eta : X_0 \times X_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que pour tous les $x, x_0 \in X_0$, on a :

$$(f_i(x) - \lambda_i g_i(x)) - (f_i(x_0) - \lambda_i g_i(x_0)) \geq [\eta(x, x_0)]^t (\nabla f_i(x_0) - \lambda_i \nabla g_i(x_0)), \quad i = 1, \dots, q,$$

$$-[\eta(x, x_0)]^t \nabla h_j(x_0) \geq 0, \quad \forall j \in J(x_0).$$

Le concept de fonctions sous-convexelike a été introduit par Yang [124].

Définition 1.7.5. [124] Soit X un ensemble non vide dans \mathbb{R}^n , soit S un sous-ensemble non vide de X . Une fonction $L : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ est dite sous-convexelike sur S si et seulement si, $\forall x, y \in S, \forall \epsilon > 0, \forall \lambda \in]0, 1[, \exists t \in S, u \in \mathbb{R}^N, u > 0$ et $\tau > 0$, tel que

$$\tau L(t) \leq \lambda L(x) + (1 - \lambda)L(y) + \epsilon u.$$

Le résultat suivant a été établi par Osuna-Gómez et al. [97].

Théorème 1.7.2. [97] Si $(PM)_\lambda$ est *KT*-invexe et la contrainte de qualification de Kuhn-Tucker est satisfaite pour toutes les solutions faiblement efficaces, alors chaque solution faiblement efficace pour le problème (PMF) résout le problème scalarisé $(PM)_\lambda(w)$.

1.7.1 Conditions nécessaires d'efficacité

Dans cette section, nous rappelons quelques conditions nécessaires d'efficacité pour le problème (PMF) . En se basant sur le théorème des alternatives généralisé de Minkowski-Farkas prouvé par Yang [124] pour les fonctions sous-convexelikes, Osuna-Gómez et al. [97] ont établi des conditions nécessaires d'efficacité pour (PMF) données par le théorème suivant.

Théorème 1.7.3. [97] Soit x_0 une solution faiblement efficace pour (PMF) et supposons que $(f_1 - \lambda_1 g_1, \dots, f_q - \lambda_q g_q, h)$ soit une fonction $(q + k)$ sous-convexelike sur S avec $\lambda = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$. Alors, il existe $(\delta_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^k$ avec $(\delta_0, \mu_0) \geq 0$ tel que $\forall \mu \geq 0$ et $\forall x \in S$ satisfait

$$\mu^t h(x_0) \leq \mu_0^t h(x_0) \leq \sum_{i=1}^q \delta_{0i} (f_i(x) - \lambda_i g_i(x)) + \mu_0^t h(x), \quad (1.17)$$

$$\mu_0^t h(x_0) = 0. \quad (1.18)$$

Sous des hypothèses de différentiabilité, Osuna-Gómez et al. [95] ont établi la condition nécessaire suivante.

Théorème 1.7.4. [95] Si x_0 est une solution faiblement efficace pour (PMF), donc il existe $(\delta_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^{q+k}$ avec $(\delta_0, \mu_0) \geq 0$ tel que

$$\sum_{i=1}^q \delta_{0i} (\nabla f_i(x_0) - \lambda_i \nabla g_i(x_0)) + \mu_0^t \nabla h(x_0) = 0, \quad (1.19)$$

$$\mu_0^t h(x_0) = 0. \quad (1.20)$$

1.7.2 Conditions suffisantes d'efficacité

Des conditions suffisantes pour que des solutions réalisables soient faiblement efficaces pour le problème (PMF) sont données dans les théorèmes suivants.

Théorème 1.7.5. [97] Soit x_0 une solution réalisable satisfaisant la condition (1.17) avec $\delta_0 \geq 0$ et $\mu_0 \geq 0$. Alors x_0 est une solution faiblement efficace pour (PMF).

Théorème 1.7.6. [97] Soit x_0 une solution réalisable, s'il existe $\delta_0 \geq 0$ et $\mu_0 \geq 0$ tels que x_0 satisfasse la condition (1.19) et le problème $(PM)_\lambda$ soit *KT-inverse* sur l'ensemble des solutions réalisables, alors x_0 est une solution faiblement efficace pour (PMF).

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé quelques notions de convexité et d'invexité (généralisée) qui seront utilisées dans la présentation des chapitres trois et quatre. Nous avons aussi présenté certains résultats sur les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité d'un problème mono-objectif sous des contraintes d'inégalités (P) et nous avons rappelé quelques conditions d'efficacité d'un problème multi-objectifs sous des contraintes d'égalités et d'inégalités (PM). De plus, nous avons exposé, notamment les conditions d'efficacité d'un problème multi-objectifs fractionnaire (PMF).

Sur les problèmes de programmation bi-niveaux

2.1 Introduction

Beaucoup de problèmes de prise de décision nécessitent des compromis parmi les objectifs de tous les individus ou entités qui interagissent. La plupart du temps, les décideurs sont regroupés dans une structure administrative ou hiérarchique avec des objectifs différents et parfois contradictoires. Par exemple, la planification économique centralisée implique la distribution des ressources à travers les niveaux de gouvernement, la tarification du transport routier qui consiste à la détermination de péages optimaux sur un ensemble prédéfini de tronçons du réseau autoroutier par les gestionnaires de ces réseaux, la distribution de crédit agricole, la tarification électrique utilitaire et la détermination de crédit d'impôt qui sont naturellement formulés comme des problèmes de programmation bi-niveaux. Donc la programmation bi-niveaux est une technique puissante et robuste pour la résolution de problèmes hiérarchiques de prise de décision. Elle a été appliquée dans de nombreux problèmes de la vie réelle tels que l'agriculture, des systèmes économiques, des finances, de l'ingénierie, les sciences de gestion et les problèmes de transport. Cette classe de programmation constitue une branche de la programmation mathématique dans laquelle les contraintes sont déterminées, en partie par un autre problème d'optimisation. L'utilisation de la programmation mathématique dans différents processus décisionnels est restée pendant de nombreuses années consacrée aux problèmes pour lesquels un décideur unique (gouvernement, politicien, institution, organisation) avait

un contrôle unilatéral sur le niveau d'activités à assigner à tous les objectifs ou variables de décision.

Depuis les années 70, l'introduction de la programmation mathématique à plusieurs niveaux par Candler et Norton [30], a consacré la décentralisation du niveau de prise de décision en tenant compte de la réaction des autres décideurs. Souvent, les décideurs interviennent dans un système hiérarchisé où ils peuvent agir soit de façon coopérative, soit de façon non coopérative. La programmation mathématique à plusieurs niveaux résout le problème de la coordination du processus de prise de décision dans un système décentralisé, notamment lorsque les décideurs agissent de façon non coopérative et que les décisions sont prises d'une manière séquentielle.

L'origine de la programmation bi-niveaux est due à Stackelberg [113] qui a introduit un modèle en concurrence parfaite dans le contexte d'un duopole. Ce modèle est caractérisé par l'existence d'une précédente dans l'annonce des décisions de deux firmes : un producteur se voit assigner le rôle de meneur (premier niveau de décision) et annonce son niveau de production au suiveur (second niveau de décision) dans la détermination de sa propre production. Par la suite, le meneur agit en connaissant la réaction optimale du suiveur à son annonce. La première formulation du problème de programmation bi-niveaux est apparue dans un article de Bracken et McGill [25] sur la répartition des ressources et des armes pour optimiser l'attaque et la défense simultanément. Cependant, Candler et Norton [30] ont été les premiers à utiliser les termes bi-niveaux et multi-niveaux tout en décrivant un problème de politique de développement. Anandalingam et Friez [4], Vicente et Calamai [117] et Dempe [35] présentent dans des revues bibliographiques, les applications de la programmation bi-niveaux, les propriétés théoriques liées à la programmation bi-niveaux et les différentes classes d'algorithmes de résolution. Il en est de même pour les monographies de Dempe [34] et de Bard [10].

2.2 Présentation d'un problème de programmation bi-niveaux (PB)

Un problème de programmation bi-niveaux est un problème d'optimisation mathématique où la variable est partitionnée en deux vecteurs x et y . Le vecteur

y sera choisi comme solution optimale d'un deuxième problème de programmation mathématique paramétré par x . Donc un problème de programmation bi-niveaux est un problème hiérarchique dans la mesure où ses contraintes sont définies en partie par un second problème d'optimisation. Ainsi, on se trouve dans une situation où deux décideurs font leurs choix à deux niveaux différents de la hiérarchie. Quand le premier décideur, appelé leader (ou décideur du niveau supérieur) prend sa décision x , le second décideur, appelé suiveur (ou décideur du niveau inférieur) détermine sa décision y . La variable x va jouer le rôle de paramètre dans le problème du niveau inférieur. D'un autre côté, le niveau supérieur doit anticiper sur le choix de son niveau inférieur car son gain ne dépend pas uniquement de son choix, mais aussi de celui du niveau inférieur.

2.3 Formulation mathématique de (PB)

Un problème de programmation bi-niveaux est une modélisation d'un programme mathématique hiérarchique où l'ensemble de toutes les variables est partitionné entre un vecteur x représentant le premier niveau de décision, et un vecteur y pour le second niveau de décision. Sa formulation est donnée en général comme suit :

$$(PB) \begin{cases} \min_{x \in X} F(x, y), \\ s.c \ G(x, y) \leq 0, \\ \min_{y \in Y} f(x, y), \\ g(x, y) \leq 0, \end{cases}$$

où $x \in X \subset \mathbb{R}^{n_1}$ la variable de décision du niveau supérieur (leader) et $y \in Y \subset \mathbb{R}^{n_2}$ la variable de décision du niveau inférieur (suiveur). De même les fonctions $F : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$ sont respectivement les fonctions objectifs du niveau supérieur et du niveau inférieur, les fonctions vectorielles $G : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$ et $g : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ sont les contraintes du problème (PB) .

Dans le problème (PB) , si on suppose que les fonctions $F(x, y)$, $f(x, y)$, $G(x, y)$ et $g(x, y)$ sont linéaires, dans ce cas, on obtient un problème de programmation bi-niveaux linéaire.

2.4 Problèmes de programmation bi-niveaux linéaires (*PBL*)

Les problèmes de programmation bi-niveaux linéaires (*PBL*) constituent la plus grande partie des travaux de recherches consacrés à la programmation bi-niveaux.

2.4.1 Formulation mathématique de (*PBL*)

Un problème de programmation bi-niveaux linéaire (*PBL*) peut être écrit sous sa forme générale suivante :

$$(PBL) \left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in X} F(x, y) = c_1^t x + d_1^t y, \\ \text{s.c. } A_1 x + B_1 y \leq b_1, \\ x \geq 0, \\ \min_{y \in Y} f(x, y) = c_2^t x + d_2^t y, \\ \text{s.c. } A_2 x + B_2 y \leq b_2, \\ y \geq 0, \end{array} \right.$$

où $x \in X \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in Y \subset \mathbb{R}^{n_2}$, $F : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$, A_1 est une matrice $m_1 \times n_1$, B_1 une matrice $m_1 \times n_2$, A_2 une matrice $m_2 \times n_1$ et B_2 une matrice $m_2 \times n_2$. La fonction F (respectivement f) représente la fonction objectif du niveau supérieur (respectivement du niveau inférieur), $A_1 x + B_1 y$ (respectivement $A_2 x + B_2 y$) sont les contraintes du niveau supérieur (respectivement du niveau inférieur) et x (respectivement y) la variable de décision du niveau supérieur (respectivement du niveau inférieur).

2.4.2 Définitions

Les définitions suivantes sont nécessaires pour la caractérisation des solutions de (*PBL*), voir Bard [10].

1. Le domaine S des contraintes de (*PBL*) est défini par

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} : A_1 x + B_1 y \leq b_1, A_2 x + B_2 y \leq b_2, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

2. L'ensemble $S(x)$ des solutions réalisables du niveau inférieur pour un x fixé est défini par

$$S(x) = \{y \in Y : B_2y \leq b_2 - A_2x\}.$$

3. La projection de S sur l'ensemble des décisions du niveau supérieur est donnée par

$$S(X) = \{x \in X : \exists y \in Y, A_1x + B_1y \leq b_1, A_2x + B_2y \leq b_2\}.$$

4. L'ensemble des réactions rationnelles du niveau inférieur pour un $x \in S(X)$ est donné par

$$R(x) = \{y \in Y : y \in \arg \min\{f(x, \tilde{y}) : \tilde{y} \in S(x)\}\},$$

$$\text{avec } \arg \min\{f(x, \tilde{y}) : \tilde{y} \in S(x)\} = \{y \in S(x) : f(x, y) \leq f(x, \tilde{y}), \forall \tilde{y} \in S(x)\}.$$

5. La région induite (ou domaine induit) est notée par

$$RI = \{(x, y) \in S, y \in R(x)\}.$$

Le niveau supérieur peut, à chacune de ses décisions $x \in S$, faire face à différentes réactions du suiveur, étant donné que $R(x)$ n'est pas en général un singleton. L'union de toutes les valeurs possibles de x que le niveau supérieur peut sélectionner ainsi que les réactions rationnelles correspondantes $y \in R(x)$ du niveau inférieur forment la région induite RI qui représente l'ensemble des solutions réalisables de (PBL). La présence des contraintes couplantes du niveau supérieur ($G(x, y) \leq 0, x \geq 0$) donne à cette définition un caractère général. En absence de ces contraintes, on obtient une formulation particulière de problème de programmation bi-niveaux qui a été utilisée par la plupart des chercheurs dans ce domaine.

2.4.3 Solutions optimales

Considérons le problème (PBL) et supposons que l'ensemble $R(x)$ est constitué d'un seul point (ou plus) pour tout $x \in S(X)$.

Définition 2.4.1. [10] Un point $(x_0, y_0) \in RI$ est optimal pour le problème (PBL) si $c_1^t x_0 + d_1^t y_0 \leq c_1^t x + d_1^t y, \forall (x, y) \in RI$.

La Définition 2.4.1 d'une solution optimale de (*PBL*) est valable uniquement dans les conditions citées ci-dessus. Par contre, dans le cas où l'ensemble $R(x)$ est constitué de plus d'un élément (multiplicité de solutions optimales du niveau inférieur) pour $x \in S(X)$ fixé, le raisonnement est différent. En effet, dans ce cas, il existe dans la littérature deux approches principales pour formuler la solution de (*PBL*) : l'approche pessimiste (ou forte) et l'approche optimiste (ou faible) et de même pour le problème bi-niveaux (*PB*). Les deux approches peuvent être trouvées dans Etoa [52].

(i) Approche pessimiste

Dans ce cas, la coopération entre le niveau supérieur et le niveau inférieur n'est pas autorisée, le niveau supérieur ne peut pas influencer le choix du niveau inférieur. Le niveau supérieur se protège en limitant le dommage résultant d'une sélection indésirable du niveau inférieur tout en respectant son objectif. Donc son problème sera formulé de la manière suivante :

$$\begin{cases} \min_x \max_y F(x, y), \\ s.c. (x, y) \in S, \\ y \in R(x). \end{cases}$$

(ii) Approche optimiste

Dans cette approche le niveau supérieur peut supposer la coopération du niveau inférieur, dans le sens où ce dernier va choisir à chaque fois une solution qui est la meilleure du point de vue du leader. Ce cas se formule de la manière suivante :

$$\begin{cases} \min_{x,y} F(x, y), \\ s.c. (x, y) \in S, \\ y \in R(x). \end{cases}$$

En se mettant dans les conditions de la formulation optimiste du problème (*PBL*), le niveau inférieur va choisir

$$y \in \arg \min \{F(x, y) : y \in R(x)\},$$

ce qui signifie que le suiveur choisirait parmi ses réactions optimales celle qui est meilleure du point de vue du leader. Le problème (*PBL*) peut donc être écrit d'une manière équivalente sous forme d'un programme mathématique standard

$$\min\{F(x, y) : (x, y) \in RI\}. \quad (2.1)$$

Et dans ce cas, la Définition 2.4.1 pour une solution optimale du problème (*PBL*) reste valable, elle peut être formulée autrement en utilisant la définition suivante.

Définition 2.4.2. [34] Un point (x, y) est dit réalisable pour le problème (*PBL*) si $(x, y) \in S$ et $y \in R(x)$.

Définition 2.4.3. [34] Un point (x_0, y_0) est une solution optimale de (*PBL*) si (x_0, y_0) est réalisable et pour tout point réalisable (x, y) on a : $F(x_0, y_0) \leq F(x, y)$.

2.4.4 Existence et caractérisation des solutions de (*PBL*)

Le problème d'existence de solutions optimales pour le problème (*PBL*) a été étudié par plusieurs auteurs tels que Candeler et Townsley [29], Bard et Falk [11] qui ont établi l'existence d'une solution optimale en un point extrême du domaine réalisable S . Audet et al. [8] ont montré aussi que dans le cas où la région induite est non vide, il existe au moins une solution optimale pour le problème (*PBL*) atteinte en un point extrême de l'ensemble S et ce résultat est vrai même dans le cas de présence des contraintes couplantes du niveau supérieur.

Considérons la formulation de (*PBL*) sous forme standard (2.1) et supposons que

- (i) S est non vide et compact.
- (ii) $R(x)$ est réduit à un singleton, pour tout $x \in X$.

Corollaire 2.4.1. [10] Une solution de (*PBL*) est atteinte en un point extrême de RI .

Corollaire 2.4.2. [10] Si (x, y) est un point extrême de RI , alors (x, y) est un point extrême de S .

2.4.5 Résolution de (PBL)

Depuis que ce domaine a attiré l'attention des chercheurs en optimisation au milieu des années 1970, un nombre important d'algorithmes est mis au point pour la résolution des problèmes de programmation bi-niveaux. Étant des problèmes NP difficiles (du point de vue de la complexité algorithmique), d'ailleurs la majorité des recherches d'algorithmes se sont focalisées sur les cas simples de la programmation bi-niveaux tel que le problème de programmation bi-niveaux linéaire (PBL) qui est un problème compliqué et difficile à résoudre malgré que les fonctions objectifs et les contraintes du niveau supérieur et du niveau inférieur sont linéaires, car il n'est ni continu partout, ni convexe. Généralement pour résoudre le problème (PBL) , on le transforme en un problème à un seul niveau pour avoir un problème de programmation mathématique standard et utiliser les méthodes de résolution pour ce type de problèmes. L'approche la plus étudiée dans la littérature pour cette transformation est l'approche de Karush-Khun-Tucker (KKT) qui consiste à remplacer le problème du niveau inférieur par ses conditions KKT et l'introduction du système résultant dans le problème du niveau supérieur.

2.4.6 Reformulation de (PBL) par l'approche KKT

L'approche KKT a donné naissance au plus grand nombre de méthodes pour la résolution de (PBL) . Son principe consiste à transformer le problème (PBL) en un problème à un seul niveau en utilisant les conditions KKT suivant la proposition suivante.

Proposition 2.4.1. [10] *Une condition nécessaire pour que (x_0, y_0) soit solution optimale pour le problème (PBL) est qu'il existe deux vecteurs u_0 et v_0 tels que (x_0, y_0, u_0, v_0) soit solution du problème $(P)_{kkt}$ suivant :*

$$(P)_{kkt} \left\{ \begin{array}{l} \min_{x,y} F(x, y) = c_1^t x + d_1^t y, \\ s.c \quad A_1 x + B_1 y \leq b_1, \\ \quad \quad A_2 x + B_2 y + w = b_2, \\ \quad \quad B_2^t u - v = d_2, \\ \quad \quad v^t y + u^t w = 0, \\ \quad \quad x \geq 0, y \geq 0, u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0, \end{array} \right.$$

où u et v sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux conditions KKT du niveau inférieur. Le problème $(P)_{kkt}$ est linéaire à l'exception des contraintes de complémentarité ($v^t y + u^t w = 0$) et qui sont aussi non convexes. Plusieurs méthodes ont été développées dans cette approche, en cherchant à chaque fois un compromis avec la contrainte de complémentarité. Citons quelques méthodes de résolution basées sur cette approche.

Méthode de Branch and Bound

Cette méthode est appliquée pour les problèmes bi-niveaux convexes. Des algorithmes basés sur cette idée sont développés par Bard et Falk [11], dont le principe consiste à entourer l'ensemble des solutions admissibles du problème non convexe $(P)_{kkt}$ par un polyèdre et subdiviser ensuite en deux sous-ensembles disjoints. On minimise la fonction objectif du problème $(P)_{kkt}$ sur chaque sous-ensemble, puis on sélectionne la plus petite valeur parmi toutes les valeurs obtenues. Après un test de cette valeur, on la prend comme valeur optimale globale si le test est positif, sinon on subdivise encore le sous ensemble correspondant à cette valeur en nouveaux polyèdres et on recommence l'opération. Bard et Moore [12] ont présenté un algorithme plus efficace, consistant à supprimer la contrainte de complémentarité du problème $(P)_{kkt}$ et de résoudre le sous problème linéaire résultant. A chaque itération, on vérifie si la contrainte de complémentarité est satisfaite. Si oui, le point correspondant se trouve dans le domaine induit, d'où il présente une solution de (PBL) , sinon on utilise un procédé de branch and bound pour examiner toutes les combinaisons des contraintes de complémentarité relaxées.

Méthode des fonctions de pénalité

Après transformation du problème bi-niveaux original en un problème à un seul niveau en utilisant les conditions KKT du niveau inférieur, une pénalité exacte est utilisée. Dans Anandalingam et White [5], la fonction de pénalité utilisée est la différence entre les valeurs des fonctions objectifs primale et duale du niveau inférieur. La première version de l'algorithme donne uniquement la solution optimale locale, par la suite cet algorithme a été amélioré pour donner une solution optimale globale.

En utilisant l'approche KKT, Lv et al. [79] ont transformé le problème bi-niveaux linéaire (*PBL*) en un problème à un seul niveau. La contrainte de complémentarité du niveau inférieur a été ajoutée à la fonction objectif du niveau supérieur avec une pénalité. Il ont proposé un algorithme de recherche de la solution optimale locale du problème (*PBL*).

Méthode du pivot de complémentarité

L'idée de l'algorithme revient à Bialas et Karwan [16], en écrivant le problème $(P)_{kkt}$ comme un problème de minimum linéaire de complémentarité suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min c_1^t x + d_1^t y, \\ s.c \ A_1 x + B_1 y \leq b_1, \\ \quad w = b_2 - A_2 x - B_2 y, \\ \quad v = B_2^t u + d_2, \\ \quad uw = vx = 0. \\ \quad x \geq 0, y \geq 0, u \geq 0, w \geq 0. \end{array} \right.$$

Ils utilisent une base d'entrée comme sous le nom de pivot complémentaire pour trouver la solution du problème $(P)_{kkt}$. Mais, cette méthode ne converge pas toujours vers la solution optimale. Par la suite, Judice et Faustino [68, 69] ont introduit un problème appelé problème de complémentarité linéaire séquentielle pour la résolution des problèmes de programmation linéaires et quadratiques en combinant la technique de branch and bound et la méthode d'énumération de points extrêmes.

2.5 Problèmes de programmation bi-niveaux non linéaires (*PBN*)

Dans le problème (*PB*), supposons que l'une au moins des fonctions $F(x, y)$, $f(x, y)$, $G(x, y)$ ou $g(x, y)$ est non linéaire, dans ce cas, on obtient un problème non linéaire qu'on appelle problème de programmation bi-niveaux non linéaire (*PBN*). Ce problème a été traité par Wang et al. [118] qui ont étudié un problème de programmation bi-niveaux quadratique avec des contraintes linéaires. En utilisant la dualité du problème du niveau inférieur, ils ont transformé le problème bi-niveaux en un problème à un seul niveau sous des contraintes non linéaires. Pour

résoudre le problème bi-niveaux considéré, un algorithme génétique a été proposé. Le même problème a été étudié par Etoa [53]. Dans un premier temps, le problème a été reformulé comme un problème de programmation non linéaire en exploitant les conditions KKT associées au niveau inférieur, ensuite une fonction de pénalité a été utilisée ainsi que d'autres transformations dans l'objectif de proposer un algorithme qui résout un problème quadratique séquentiel régulier qui donne par la suite la solution de problème de programmation bi-niveaux quadratique considéré. Le cas d'un problème bi-niveaux quadratique convexe a été étudié par Lv et al. [78] où l'approche KKT a été utilisée pour transformer ce problème en un problème à un seul niveau sous des contraintes de complémentarité. Pour résoudre le problème obtenu après transformation, ils ont utilisé les réseaux de neurones. Le cas général d'un problème de programmation bi-niveaux non linéaire a été considéré par Wang et al. [119], en utilisant l'approche KKT et une fonction de perturbation de Fischer-Burmeister, le problème bi-niveaux non linéaire a été transformé en un problème de programmation non linéaire qui a été résolu par la méthode du simplexe. Xu et Ye [123] ont étudié un problème de programmation bi-niveaux non linéaire où le problème du niveau inférieur est un problème de minimisation non convexe sur un ensemble convexe de contraintes, ils ont transformé le problème en un problème à un seul niveau en utilisant la valeur optimale de la fonction objectif du niveau inférieur, le problème obtenu après transformation est un problème non convexe et non différentiable. Pour résoudre ce problème, ils ont proposé une méthode de Lagrange augmentée différentiable et ils ont montré par des exemples numériques l'efficacité de cet algorithme pour la résolution de problème bi-niveaux initial. Jiang et al. [67] ont proposé aussi une méthode de multiplicateurs de Lagrange augmentée basée sur la fonction Chen-Harker-Kanzow-Smale (CHKS) différentiable pour résoudre le problème de programmation non linéaire obtenu après la reformulation de problème bi-niveaux non linéaire en un problème non linéaire à un seul niveau par l'approche KKT. Beaucoup d'autres chercheurs se sont intéressés à la résolution des problèmes de programmation bi-niveaux par des approches et des méthodes différentes, pour plus de détails sur ce sujet, se référer par exemple [1, 64, 86, 87, 116]. Certains auteurs ont proposé des conditions d'optimalité pour les problèmes de programmation bi-niveaux. Quelques travaux récents concernant cette étude peuvent être trouvés

dans les références suivantes [9, 31, 36, 38, 40, 43, 76].

2.5.1 Problèmes de programmation bi-niveaux quadratiques

Un problème de programmation bi-niveaux quadratique est un cas particulier d'un problème de programmation bi-niveaux non linéaire.

Considérons le problème bi-niveaux quadratique au niveau supérieur suivant :

$$\begin{cases} \max_x F(x, y) = \frac{1}{2}(x^t, y^t)\mathcal{Q}(x^t, y^t)^t + c_1^t x + d_1^t y, \\ \text{s.c. } \max_y f(x, y) = c_2^t x + d_2^t y, \\ Ax + By \leq b, \\ x, y \geq 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

où $x \in \mathbb{R}^{n_1}, y \in \mathbb{R}^{n_2}$ sont les variables de décisions du niveau supérieur et du niveau inférieur respectivement. $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^{n_1}, d_1, d_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, A \in \mathbb{R}^{m \times n_2}, b \in \mathbb{R}^m, \mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$ est une matrice symétrique. Pour un $x \geq 0$, la solution optimale du niveau inférieur peut être obtenue en résolvant le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max_y c_2^t x + d_2^t y, \\ \text{s.c. } By \leq b - Ax, \\ y \geq 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Le problème dual de (2.3) est donné comme suit :

$$\begin{cases} \min_u (b - Ax)^t u, \\ \text{s.c. } B^t u \geq d_2, \\ u \geq 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

où $u \in \mathbb{R}^m$ est la variable duale. Alors on a le théorème suivant.

Théorème 2.5.1. [118] (x^0, y^0) est la solution optimale du problème (2.2) si et seulement s'il existe u^0 tel que (x^0, y^0, u^0) est la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \max_{x, y, u} \frac{1}{2}(x^t, y^t)\mathcal{Q}(x^t, y^t)^t + c_1^t x + d_1^t y, \\ \text{s.c. } Ax + By \leq b, \\ B^t u \geq d_2, \\ d_2^t y - (b - Ax)^t u = 0, \\ x, y, u \geq 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

En utilisant le Théorème 2.5.1, le problème bi-niveaux quadratique initial (2.2) peut être transformé en un problème de programmation quadratique (2.5), donc on peut obtenir la solution de (2.2) en résolvant le problème (2.5). Notons que les contraintes du problème (2.5) sont toutes linéaires à l'exception de la contrainte de complémentarité $d_2^t y - (b - Ax)^t u = 0$. On peut résoudre une série de problèmes non linéaires avec uniquement des contraintes linéaires par la relaxation des contraintes non linéaires et la résolution du problème (2.5). Soit $U = \{u \in \mathbb{R}^m / B^t u \geq d_2, u \geq 0\}$ la région réalisable du problème linéaire (2.4). D'après les résultats sur la programmation linéaire, il existe un nombre fini de sommets dans la région réalisable U et soit u l'un des sommets de U . Alors on peut transformer le problème (2.5) en une série de problèmes de programmation non linéaires pour obtenir tous les sommets de U , qu'on note par $U^E = \{u^1, u^2, \dots, u^t\}$ en utilisant les méthodes de programmation linéaire.

$$NP(u^i) \begin{cases} \max_{x,y} \frac{1}{2}(x^t, y^t) \mathcal{Q}(x^t, y^t)^t + c_1^t x + d_1^t y, \\ \text{s.c } Ax + By \leq b, \\ d_2^t y - (b - Ax)^t u^i = 0, \\ x, y \geq 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Il est clair que la résolution du problème (2.6) est moins difficile que la résolution du problème (2.5). Soit $I \subseteq \{1, 2, \dots, t\}$ tel que si $i \in I$, alors il existe une solution optimale pour le problème $NP(u^i)$, d'où $I \neq \emptyset$. Pour $j \in I$, soit (x^j, y^j) une solution optimale du problème $NP(u^i)$ et $F(x^k, y^k) = \max \{F(x^j, y^j) / j \in I\}$. Donc on a le théorème suivant.

Théorème 2.5.2. [118] (x^k, y^k) est une solution optimale du problème (2.2).

Par conséquent, on peut obtenir la solution optimale du problème bi-niveaux quadratique (2.2) en résolvant une série de problèmes de programmation quadratique avec des contraintes linéaires. Pour résoudre le problème (2.6), on le transforme sous

la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{x,y} \frac{1}{2}(x^t, y^t) \mathcal{Q}(x^t, y^t)^t + c_1^t x + d_1^t y, \\ \text{s.c } (A \ B) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq b, \\ \quad (-u^{it} A \ d_2^t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq b^t u^i, \\ \quad (u^{it} A \ d_2^t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq -b^t u^i, \\ \quad \begin{pmatrix} -I_{n_1} & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_2 \times n_1} & -I_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq 0. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

On peut réécrire le problème (2.7) sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{x,y} \frac{1}{2}(x^t, y^t) \mathcal{Q}(x^t, y^t)^t + c_1^t x + d_1^t y, \\ \text{s.c } \begin{pmatrix} A & B \\ u^{it} A & d_2^t \\ u^{it} A & -d_2^t \\ -I_{n_1} & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_2 \times n_1} & I_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ b^t u^i \\ -b^t u^i \\ 0_{(n_1+n_2) \times 1} \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Par la dualité d'un programme non linéaire, le problème quadratique (2.8) peut être transformé en un problème de programmation non linéaire sans contraintes.

$$\max_{\lambda \geq 0} -\frac{1}{2} \lambda^t M \lambda + d^t \lambda + \frac{1}{2} (c_1^t, c_2^t) \mathcal{Q}^{-1}(c_1^t, d_1^t)^t, \quad (2.9)$$

$$\text{où } M = - \begin{pmatrix} A & B \\ u^{it} A & d_2^t \\ u^{it} A & -d_2^t \\ -I_{n_1} & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_2 \times n_1} & I_{n_2} \end{pmatrix} \mathcal{Q}^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ u^{it} A & d_2^t \\ u^{it} A & -d_2^t \\ -I_{n_1} & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_2 \times n_1} & I_{n_2} \end{pmatrix}^t,$$

$$d = - \begin{pmatrix} b \\ b^t u^i \\ -b^t u^i \\ 0_{(n_1+n_2) \times 1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ u^{it} A & d_2^t \\ u^{it} A & -d_2^t \\ -I_{n_1} & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_2 \times n_1} & I_{n_2} \end{pmatrix} \mathcal{Q}^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}.$$

Donc le problème (2.6) est transformé en un problème de programmation non linéaire sans contrainte. Si λ^0 résout le problème (2.9) alors,

$$z^0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} = \mathcal{Q}^{-1} \left[- \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ u^{it} A & d_2^t \\ u^{it} A & -d_2^t \\ -I_{n_1} & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_2 \times n_1} & I_{n_2} \end{pmatrix}^t \lambda^0 \right] \text{ résout le problème (2.6).}$$

Dans le problème bi-niveaux quadratique suivant, on suppose que la fonction objectif du niveau inférieur est quadratique et le reste des fonctions de problème sont linéaires.

$$\begin{cases} \min_x F(x, y) = c_1^t x + d_1^t y, \\ \text{s.c. } \min_y f(x, y) = c_2^t x + d_2^t y + (x^t, y^t) \mathcal{Q} (x^t, y^t)^t, \\ Ax + By \leq b, \\ x, y \geq 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$ est une matrice symétrique semi-définie positive, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ sont les variables de décisions du niveau supérieur et du niveau inférieur respectivement. Supposons que dans le problème (2.10), le domaine S des contraintes est non vide et borné et $\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_2 & \mathcal{Q}_1^t \\ \mathcal{Q}_1 & \mathcal{Q}_0 \end{pmatrix}$ avec $\mathcal{Q}_0 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $\mathcal{Q}_1 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$, $\mathcal{Q}_2 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$. Alors la fonction f est transformée en $f(x, y) = c_2^t x + x^t \mathcal{Q}_2 x + (d + 2\mathcal{Q}_1 x)^t y + y^t \mathcal{Q}_0 y$. Notons que le terme $c_2^t x + x^t \mathcal{Q}_2 x$ est une constante pour chaque $x \in S(x)$ fixé, donc on peut l'ignorer en supposant que $c_2 = 0$ et $\mathcal{Q}_2 = 0$, lorsque on résout le problème du niveau inférieur, donc la solution optimale du problème du niveau inférieur peut être obtenue par la résolution de problème suivant :

$$\begin{cases} \min_y f(x, y) = c_2^t x + x^t \mathcal{Q}_2 x + (d + 2\mathcal{Q}_1 x)^t y + y^t \mathcal{Q}_0 y, \\ \text{s.c. } By \leq b - Ax, \\ y \geq 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Puisque \mathcal{Q}_0 est une matrice définie positive, donc le problème du niveau inférieur est convexe et il existe une solution globale unique qu'on note $y(x)$ du problème (2.11) pour chaque $x \in S(x)$ fixé. En appliquant les conditions KKT pour le problème du niveau inférieur, on a le théorème suivant.

Théorème 2.5.3. [118] Soit $(x_0, y_0) \in S$, alors une condition nécessaire et suffisante pour que $(x_0, y_0) \in RI$ est qu'il existe des vecteurs $w_0 \in \mathbb{R}_{\geq}^m$, $u_0 \in \mathbb{R}_{\geq}^m$ et $v_0 \in \mathbb{R}_{\geq}^{n_2}$ tels que

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + w_0 = b, \\ 2Q_1x_0 + 2Q_0y_0 - B^t u_0 + v_0 = -d, \\ u_0^t w_0 = 0, \\ y_0 v_0 = 0, \\ x_0, y_0, w_0, u_0, v_0 \geq 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Évidemment, le problème (2.10) est transformé en un problème à un seul niveau en remplaçant le problème du niveau inférieur par ses conditions KKT et on obtient le problème suivant

$$\begin{cases} \min_{x,y,w,u,v} F(x, y) = c_1^t x + d_1^t y, \\ \text{s.c } Ax + By + w = b, \\ 2Q_1x + 2Q_0y - B^t u + v = -d, \\ u^t w = 0, \\ v^t y = 0, \\ x, y, w, u, v \geq 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

où w est la variable d'écart et u, v sont les multiplicateurs de KKT associés aux contraintes du problème du niveau inférieur.

Théorème 2.5.4. [118] Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution réalisable (x_0, y_0) soit une solution optimale du problème (2.10) est qu'il existe $w_0 \in \mathbb{R}^m$, $u_0 \in \mathbb{R}^m$ et $v_0 \in \mathbb{R}^{n_2}$ tels que $(x_0, y_0, w_0, u_0, v_0)$ soit une solution optimale du problème (2.13).

Wang et al. [118] ont utilisé un algorithme génétique pour résoudre le problème (2.13) en passant par la résolution d'un problème auxiliaire construit à partir de (2.13) en excluant la contrainte de complémentarité, qu'on peut résoudre avec la méthode du simplexe.

$$\begin{cases} \min_{x,y',w',u',v'} F(x, y) = c_1^t x + d_1^t y', \\ \text{s.c } Ax + B'y' + w' = b, \\ 2Q_1x + 2Q'_0y' - B'^t u' + v' = -d, \\ x, y', w', u', v' \geq 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

où les composantes de y', w', u' et v' sont celles des y, w, u et v qui sont supérieures ou égales à zéro. Aussi les composantes de d'_1 sont celles de d_1 associée à y' .

Les colonnes des matrices B' et B'' sont les colonnes et les lignes de B associées aux variables y' et u' respectivement. Les colonnes de la matrice Q'_0 sont les colonnes de Q_0 qui sont associées à la variable y' .

Théorème 2.5.5. [118] *S'il existe une solution optimale $(x, y'_0, w'_0, u'_0, v'_0)$ pour le problème simplifié (2.14), alors la solution correspondante (x, y, w, u, v) est une solution réalisable du problème (2.13) et (x, y) est une solution réalisable du problème original (2.10).*

Supposons maintenant que dans le problème (2.10) les fonctions objectifs du niveau supérieur et du niveau inférieur sont quadratiques, donc on aura le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \geq 0} F(x, y) = \frac{1}{2}(x^t, y^t) \begin{pmatrix} C_1 & C_3 \\ C_3^t & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c^t x + d^t y, \\ \text{s.c } \min_{y \geq 0} f(x, y) = \frac{1}{2}y^t Q y + y^t D x + d_2^t y, \\ Ax + B y \leq b, \end{array} \right. \quad (2.15)$$

où $x \in X \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in Y \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$, $F : \mathbb{R}^{n_1 \times n_2} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^{n_1 \times n_2} \rightarrow \mathbb{R}$, $c_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $Q, C_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $C_3^t \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n_1}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n_2}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

On considérera les hypothèses suivantes sur le problème (2.15) :

H_1 : $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_3 \\ C_3^t & C_2 \end{pmatrix}$ et Q sont des matrices symétriques semi-définie positive et définie positive respectivement.

H_2 : L'ensemble des contraintes du problème (2.15), $S = \{(x, y) \in X \times Y : x \geq 0, y \geq 0, Ax + By \leq b\}$ est non vide et compact.

Si l'hypothèse H_1 est satisfaite, alors le problème (2.15) est convexe. De plus, si l'hypothèse H_2 est satisfaite, le problème (2.15) admet une solution optimale.

Sous les hypothèses précédentes, on peut transformer le problème (2.15) en un

problème de programmation à un seul niveau.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min F(x, y) \\ \text{s.c } Ax + By \leq b, \\ Qx + Dy + d_2 + B^t u - v = 0, \\ u^t(b - Ax - By) = 0, \\ v^t y = 0, \\ x, y, u, v \geq 0, \end{array} \right. \quad (2.16)$$

où $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^{n_2}$ sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux conditions de KKT du niveau inférieur.

Le problème (2.16) n'est pas convexe et ne satisfait aucune contrainte de qualification. Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_{\geq}$ un paramètre. On définit la fonction $\phi_\epsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $\phi_\epsilon(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2 + \epsilon} - a - b - \epsilon$. Cette fonction a des propriétés importantes qu'on peut voir dans les propositions suivantes.

Proposition 2.5.1. [78] Pour chaque $\epsilon > 0$, on a $\phi_\epsilon(a, b) = 0 \iff a > 0, b > 0, ab = \frac{\epsilon}{2}$.

Proposition 2.5.2. [78] Pour un $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, on a $x \geq 0 \iff \frac{1}{2}x^t(x - |x|) = 0$. De plus, la fonction $\frac{1}{2}x^t(x - |x|)$ est continue et convexe.

En utilisant la fonction ϕ_ϵ et la Proposition 2.5.2, le problème (2.16) peut être reformulé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min F(x, y), \\ \text{s.c } Qx + Dy + d_2 + B^t u - v = 0, \\ \sqrt{u_i^2 + (b - Ax - By)_i^2 + \epsilon} - u_i - (b - Ax - By)_i = 0, \quad i = 1, \dots, q, \\ \sqrt{v_j^2 + y_j^2 + \epsilon} - v_j - y_j = 0, \quad j = 1, \dots, m, \\ \frac{1}{2}x^t(x - |x|) = 0. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Proposition 2.5.3. [78] Si l'hypothèse H_1 est satisfaite, alors le problème (2.17) est un problème convexe.

Introduisons les notations suivantes.

$$\bar{F}(x, y, u, v) = F(x, y), \quad H(x, y, u, v) = \left(\begin{array}{l} Qx + Dy + d_2 + B^t u - v, \\ \phi_\epsilon(u_i, (b - Ax - By)_i), \quad i = 1, \dots, q, \\ \phi_\epsilon(y_j, v_j), \quad j = 1, \dots, m, \\ \frac{1}{2}x^t(x - |x|), \end{array} \right)$$

$z^t = (x^t, y^t, u^t, v^t)$, alors on peut écrire le problème (2.17) comme suit :

$$\begin{cases} \min \bar{F}(z), \\ \text{s.c. } H(z) = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Définition 2.5.1. Soit z un point réalisable du problème (2.18), on dit que z est un point régulier si les gradients $\nabla H_1(z), \dots, \nabla H_{2m+q+1}(z)$ sont linéairement indépendants.

Théorème 2.5.6. [78] Soit (z^ϵ) une suite de solutions du problème (2.18). Supposons que cette suite converge vers z_0 pour $\epsilon \rightarrow 0_+$. Si z_0 est un point régulier, alors z_0 est une solution pour le problème bi-niveaux convexe (2.15).

2.6 Conditions d'optimalité de (PBN)

L'établissement des conditions d'optimalité pour les problèmes de programmation bi-niveaux se fait habituellement avec une formulation appropriée de problème comme un problème de programmation à un seul niveau.

2.6.1 Approche KKT

L'approche KKT est la plus utilisée dans la littérature pour transformer le problème bi-niveaux en un problème à un seul niveau. Les conditions KKT sont utilisées afin de remplacer le problème du niveau inférieur du problème (PBN) par un système d'équations d'égalités et d'inégalités et on obtient le problème suivant :

$$(PN)_{kkt} \begin{cases} \min_{x,y,u} F(x,y), \\ \text{s.c. } G(x,y) \leq 0, \\ g(x,y) \leq 0, \\ \nabla_y f(x,y) + u^t \nabla_y g(x,y) = 0, \\ u^t g(x,y) = 0, \\ x \in X, y \in Y, u \in \mathbb{R}_{\geq}^{m_2}, \end{cases}$$

où u est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associé aux conditions KKT du niveau inférieur. Il n'est possible d'obtenir des conditions nécessaires d'optimalité pour un problème de programmation bi-niveaux (PBN) avec cette approche que

lorsque le problème du niveau inférieur est un programme paramétrique convexe et seulement dans l'approche optimiste. Cependant, même dans ce cas, ceci n'est pas facile, puisque il a été montré que le problème $(PN)_{kkt}$ ne satisfait pas aux hypothèses de régularité classiques (voir par exemple Scheel et Scholtes [105]). Le problème $(PN)_{kkt}$ est considéré comme un problème de programmation mathématique sous des contraintes de complémentarité.

Dempe et Dutta [36] ont établi des relations entre l'ensemble de solutions optimales globales du problème (PBN) et l'ensemble de solutions globales du problème $(PN)_{kkt}$ lorsque le problème du niveau inférieur est convexe et la contrainte de qualification de Slater est satisfaite pour chaque décision x fixée du niveau supérieur. Ce résultat est donné dans le théorème suivant.

Théorème 2.6.1. [36] *Soit (x_0, y_0) une solution optimale globale du problème (PBN) et supposons que le problème du niveau inférieur est convexe et que la contrainte de qualification de Slater est satisfaite en $x = x_0$. Alors, pour chaque*

$$u_0 \in \Lambda(x_0, y_0) := \{u \geq 0 : \nabla_y f(x_0, y_0) + u^t \nabla_y g(x_0, y_0) = 0, u^t g(x_0, y_0) = 0\},$$

le point (x_0, y_0, u_0) est une solution globale pour le problème $(PN)_{kkt}$.

Théorème 2.6.2. [36] *Soit (x_0, y_0, u_0) une solution optimale globale du problème $(PN)_{kkt}$. Si le problème du niveau inférieur est convexe et satisfait la contrainte de qualification de Slater pour chaque $x \in X$. Alors (x_0, y_0) est une solution globale pour le problème (PBN) .*

Moyennant des hypothèses de régularité sur la formulation KKT d'un problème (PBN) relaxé des contraintes de complémentarité, Liu et al. [76] proposent une fonction de pénalité exacte pour le problème (PBN) , puis établissent des conditions sous lesquelles les problèmes (PBN) et sa formulation KKT ont le même ensemble de solutions. Chen et Florian [31] proposent d'utiliser la fonction de la valeur optimale pour reformuler le problème (PBN) comme un programme mathématique à un seul

niveau :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x,y} F(x, y), \\ \text{s.c. } G(x, y) \leq 0, \\ \quad g(x, y) \leq 0, \\ \quad f(x, y) - V(x) = 0, \\ \quad x \in X, y \in Y, \end{array} \right. \quad (2.19)$$

où $V(x) = \min_y \{f(x, y), g(x, y) \leq 0\}$ est appelée fonction de la valeur optimale du problème du niveau inférieur. La contrainte $f(x, y) - V(x) = 0$ signifie que $(x, y) \in RI$ et que les contraintes du problème (2.19) décrivent le domaine induit RI . Chen et Florian [31] ont montré que, lorsque le problème (PBN) a une solution, alors (x_0, y_0) est une solution optimale du problème (PBN) si et seulement si (x_0, y_0) est une solution optimale du problème (2.19). De plus, lorsque le problème (PBN) est convexe, alors les formulations $(PN)_{kkt}$ et (2.19) ont le même ensemble de solutions globales.

Lemme 2.6.1. [31] *Pour une valeur donnée de la variable x du niveau supérieur du problème (PBN) , si les fonctions $F(x, \cdot)$, $f(x, \cdot)$, $G(x, \cdot)$ et $g(x, \cdot)$ sont convexes en y , alors la formulation (2.19) est équivalente à la formulation $(PN)_{kkt}$ du problème (PBN) .*

De la formulation (2.19), comme la fonction $V(x)$ n'est ni différentiable, ni convexe, alors la formulation (2.19) permet de déduire des propriétés similaires pour le problème (PBN) , il en est de même pour les propriétés géométriques du domaine induit du problème (PBN) . Comme pour tous les problèmes d'optimisation, pour énoncer des conditions de régularité du problème (2.19) en un point (x, y) , il faudrait déterminer son ensemble de directions admissibles, puis donner une approximation linéaire de l'ensemble des solutions réalisables S en (x, y) , et enfin, énoncer les conditions nécessaires et suffisantes de qualification des contraintes. Chen et Florian [31] procèdent de cette façon pour énoncer les conditions de régularité du problème (PBN) à partir du Lagrangien du problème (2.19), ces auteurs déduisent les conditions d'optimalité du problème (PBN) en termes d'existence des multiplicateurs de Kuhn-Tucker relatifs au problème (2.19). Sous des hypothèses de qualification des contraintes appropriées, un problème (PBN) est partiellement équivalent à sa formulation KKT, à savoir $(PN)_{kkt}$. La propriété ci-après énonce ce résultat.

Propriété 2.6.1. [9] Si (x_0, y_0) est une solution optimale du problème (PBN) et si y_0 est une solution optimale régulière du problème du niveau inférieur pour x fixé, alors il existe un vecteur de multiplicateurs de KKT u_0 tel que (x_0, y_0, u_0) est une solution optimale du problème $(PN)_{kkt}$.

Nous désignons par \mathcal{S}_{kkt} l'ensemble des solutions du problème $(PN)_{kkt}$ et l'ensemble défini par

$$\mathcal{S}_{kkt}^r = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}_{\geq}^{m_2} : g(x, y) \leq 0, \nabla_y L(x, y, u) = 0\},$$

désigne l'ensemble des solutions réalisables de $(PN)_{kkt}$ relaxé des contraintes de complémentarité. Liu et al. [76] proposent de reformuler le problème $(PN)_{kkt}$ en pénalisant la fonction objectif du niveau supérieur par la relation de complémentarité, le programme pénalisé $P(\mu)$ qui en résulte est donné comme suit :

$$P(\mu) \begin{cases} \min_{x,y,u} F(x, y) - \mu u^t g(x, y), \\ \text{s.c } (x, y, u) \in \mathcal{S}_{kkt}^r. \end{cases}$$

Liu et al. [76] ont montré que si la contrainte de qualification de Mangasarian-Fromovitz est satisfaite en (x_0, y_0, u_0) pour le problème $(PN)_{kkt}$ relaxé des contraintes de complémentarité, alors il existe $\mu_0 > 0$ tel que, pour tout $\mu \geq \mu_0$, l'ensemble des solutions optimales de $(PN)_{kkt}$ relaxé des contraintes de complémentarité est égal à l'ensemble des solutions optimales de $P(\mu)$.

2.7 Problèmes bi-niveaux fractionnaires (PBF)

Les problèmes bi-niveaux fractionnaires sont des problèmes bi-niveaux dont l'une au moins des fonctions objectifs du niveau supérieur et du niveau inférieur s'exprime comme un rapport de deux fonctions.

2.7.1 Formulation mathématique de (PBF)

Un problème bi-niveaux fractionnaire en général est formulé comme suit :

$$(PBF) \begin{cases} \min_{x \in X} \frac{F(x,y)}{G(x,y)}, \\ \text{s.c } \min_{y \in Y} \frac{f(x,y)}{g(x,y)}, \\ h(x, y) \leq 0, \end{cases}$$

où $x \in X \subset \mathbb{R}^{n_1}$ la variable de décision du niveau supérieur et $y \in Y \subset \mathbb{R}^{n_2}$ la variable de décision du niveau inférieur. Les fonctions $\frac{F(x,y)}{G(x,y)} : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\frac{f(x,y)}{g(x,y)} : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$ sont respectivement les fonctions objectifs du niveau supérieur et du niveau inférieur, la fonction vectorielle $h : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est la contrainte de (PBF). On suppose que $G(x, y) > 0$, $g(x, y) > 0$, $\forall (x, y) \in X \times Y$.

Dans le problème (PBF), si on suppose que les fonctions $F(x, y), G(x, y), f(x, y), g(x, y)$ et $h(x, y)$ sont linéaires, dans ce cas, on obtient un problème de programmation bi-niveaux fractionnaire linéaire (PBFL).

2.8 Problèmes bi-niveaux fractionnaires linéaires (PBFL)

Il faudrait souligner que la majorité des études menées sur la programmation bi-niveaux fractionnaire concerne le cas linéaire.

Un problème de programmation bi-niveaux fractionnaire linéaire (PBFL) est formulé en général comme suit :

$$(PBFL) \begin{cases} \min_{x \geq 0} \frac{F(x,y)}{G(x,y)} = \frac{\alpha_1 + b_{11}^t x + b_{12}^t y}{\beta_1 + c_{11}^t x + c_{12}^t y}, \\ \text{s.c } \min_{y \geq 0} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\alpha_2 + b_{21}^t x + b_{22}^t y}{\beta_2 + c_{21}^t x + c_{22}^t y}, \\ h(x, y) = Ax + By \leq \alpha, \end{cases}$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n_1}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n_2}$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $b_{11}, b_{21}, c_{11}, c_{21} \in \mathbb{R}^{n_1}$, $b_{12}, b_{22}, c_{12}, c_{22} \in \mathbb{R}^{n_2}$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ et $y \in \mathbb{R}^{n_2}$. On suppose que $\beta_1 + c_{11}^t x + c_{12}^t y > 0$ et $\beta_2 + c_{21}^t x + c_{22}^t y > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_{\geq}^{n_1}$ et $\forall y \in \mathbb{R}_{\geq}^{n_2}$.

Wang et al. [120] ont développé un algorithme de résolution du problème (PBFL) au moyen d'un algorithme d'optimisation basé sur l'écart de la dualité de problème du niveau inférieur. Le problème (PBFL) est transformé en un problème équivalent à un seul niveau fractionnaire non linéaire, ensuite le problème fractionnaire est converti en une série de problèmes fractionnaires linéaires. L'algorithme proposé a été testé sur un ensemble d'exemples pris dans la littérature. Certaines améliorations devraient être apportées à cet algorithme pour qu'il soit efficace pour la résolution des problèmes bi-niveaux fractionnaires de grande taille. Calvete et Galé [26] ont

développé un algorithme énumératif qui donne une solution globale au problème bi-niveaux fractionnaire. La programmation interactive floue a été utilisée par Sakawa et Nishizaki [100] pour la résolution de (*PBFL*). En adoptant la même approche que celle de Sakawa et Nishizaki [100], Mishra et Ghosh [90] ont étudié un problème bi-niveaux fractionnaire quadratique. D'autres travaux sur la résolution numérique du problème bi-niveaux fractionnaire linéaire (*PBFL*) peuvent être trouvés dans les références [46, 89, 114].

2.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé une synthèse des travaux sur les problèmes de programmation bi-niveaux, notamment le cas linéaire et quadratique ont été traités. Essentiellement, nous avons rappelé quelques méthodes de résolution concernant ses deux cas de problèmes. Par la suite, nous avons présenté un résumé sur les conditions d'optimalité d'un problème bi-niveaux non linéaire et un bref aperçu sur la programmation bi-niveaux fractionnaire, particulièrement les problèmes bi-niveaux fractionnaires linéaires.

Efficacité globale pour les problèmes bi-niveaux multi-objectifs sous des conditions d'invexité généralisée

3.1 Introduction

L'approche qui consiste à considérer un seul objectif qu'un décideur souhaite optimiser n'est souvent pas suffisante pour d'écrire les besoins des décideurs qui sont généralement conflictuels. Souvent il faut trouver un compromis entre ses objectifs. L'optimisation multi-objectifs consiste donc à optimiser simultanément plusieurs objectifs d'un même problème. C'est pareil pour les problèmes de programmation bi-niveaux multi-objectifs qui correspondent au cas où au moins l'une des fonctions objectifs du niveau supérieur et du niveau inférieur est vectorielle. Cette classe de problèmes a de nombreuses applications dans différents domaines tels que l'économie, la gestion et le transport, ect. [33, 56, 59, 77, 121].

Les problèmes de programmation bi-niveaux multi-objectifs ont été étudiés par Eichfelder [50], Gebhardt et Jahn [57], Nishizaki et Sakawa [94], Ruuska et al. [98], Shi et Xia [106], Yan et Sakawa [125], Zhang et al. [132] et d'autres. Nishizaki et Sakawa [94] ont proposé une méthode pour résoudre un problème de programmation bi-niveaux multi-objectifs linéaire par l'approche de la scalarisation. Ils ont établi plusieurs algorithmes en considérant la position optimiste et pessimiste. Shi et Xia [106] ont exposé un algorithme interactif pour résoudre un problème bi-niveaux multi-objectifs linéaire. Le cas non linéaire a été étudié par Eichfelder [50] et Gebhardt

et Jahn [57], ils ont proposé des méthodes itératives exactes de calcul de la solution. Ruuska et al. [98] ont généralisé la relation entre un problème bi-niveaux et un problème multi-objectifs au cas de la programmation bi-niveaux multi-objectifs. Yan et Sakawa [125], Zhang et al. [132] ont utilisé l'approche floue pour résoudre le problème bi-niveaux multi-objectifs.

Les problèmes de programmation bi-niveaux semi-vectoriels ont été étudiés par Ankhili et Mansouri [6], Bonnel [17], Bonnel et Morgan [18], Dempe et al. [41], Zheng et Wan [134] et d'autres. Ankhili et Mansouri [6] ont utilisé une méthode de pénalité exacte pour proposer un algorithme qui résout le problème dans le cas linéaire. Le même problème a été étudié par Zheng et Wan [134] qui ont proposé un algorithme de résolution en utilisant une nouvelle fonction de pénalité. Récemment, Dempe et al. [41], en combinant les approches de scalarisation et la valeur optimale de la fonction objectif du niveau inférieur, respectivement, ils ont transformé le problème bi-niveaux considéré en un problème à un seul niveau équivalent et ils ont obtenu des conditions nécessaires d'efficacité pour des solutions locales, voir aussi, Calvete et Galé [28] et Zheng et al. [135].

Certains auteurs ont considéré un problème de programmation bi-niveaux avec des objectifs multiples au niveau supérieur. Pour résoudre ce problème, Calvete et Galé [27] ont proposé des méthodes de calcul des solutions efficaces fondées à la fois sur la somme pondérée et les techniques de scalarisation dans le cas linéaire. Alves [2] a proposé un algorithme pour générer l'ensemble du front de Pareto du problème bi-niveaux étudié. Alves et al. [3] ont proposé un algorithme interactif basé sur la reformulation de problème bi-niveaux en un problème de programmation linéaire multi-objectifs mixte 0-1. En revanche, Gadhi et Dempe [55] ont utilisé une fonction de scalarisation spéciale, mise en place par Hiriart-Urruty [61, 62], ils ont établi des conditions nécessaires d'efficacité pour le problème bi-niveaux multi-objectifs étudié.

Dans ce chapitre, nous considérons un problème de programmation bi-niveaux non linéaire ($PBMN$) où le niveau supérieur dispose d'une fonction vectorielle non linéaire et le niveau inférieur en dispose d'une fonction objectif scalaire avec des contraintes non linéaires. Essentiellement, nous étudions les conditions nécessaires et suffisantes d'efficacité globales du problème ($PBMN$). En utilisant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) associées au problème du niveau inférieur (PNI) _{x} , le

problème ($PBMN$) est transformé en un problème à un seul niveau multi-objectifs avec des contraintes d'égalités et d'inégalités (PMN). Nous établissons des relations entre les ensembles de solutions (faiblement ou proprement) efficaces globales des deux problèmes (PMN) et ($PBMN$) sous des hypothèses appropriées de convexité et de contrainte de qualification pour le problème du niveau inférieur (PNI) _{x} . Il est connu que l'approche KKT conduit à des problèmes de programmation non convexes et pour faire face à cette situation, nous faisons appel au concept d'invexité et d'invexité généralisée [60, 110]. Ainsi, nous établissons des conditions nécessaires d'efficacité de type Fritz John et des conditions suffisantes d'efficacité de type (Fritz John) pour qu'un point réalisable du problème (PMN) correspond à une solution faiblement efficace, efficace et proprement efficace du problème ($PBMN$) sous différentes formes d'invexité généralisée et de fonctions infines. De plus, nous appliquons les résultats obtenus pour le problème ($PBMN$) aux problèmes bi-niveaux multi-objectifs impliquant des fonctions linéaires. Pour l'illustration des résultats obtenus deux exemples numériques seront donnés, le premier pour le cas d'un problème bi-niveaux multi-objectifs non linéaire et le deuxième pour le cas d'un problème bi-niveaux multi-objectifs linéaire.

3.2 Étude d'un problème bi-niveaux multi-objectifs non linéaire ($PBMN$)

Considérons le problème de programmation bi-niveaux multi-objectifs non linéaire suivant :

$$(PBMN) \begin{cases} \min_{x \in X} \bar{F}(x, y) = (\bar{F}_1(x, y), \dots, \bar{F}_q(x, y)), \\ \text{s.c} \min_{y \in Y} \bar{f}(x, y), \\ \bar{g}(x, y) \leq 0, \end{cases}$$

où X est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n et Y est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^m , $x \in X$ est la décision du niveau supérieur et $y \in Y$ est la décision du niveau inférieur.

$\bar{F} : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}^q$ et $\bar{f} : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ sont les fonctions objectifs du niveau supérieur et inférieur respectivement. $\bar{g} : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est la fonction contrainte du niveau inférieur. Supposons que \bar{F} est différentiable sur $X \times Y$ et \bar{f} , \bar{g} sont des fonctions

deux fois différentiables sur $X \times Y$. Soit $Q = \{1, \dots, q\}$. Ensuite, nous donnons les définitions suivantes pour le problème $(PBMN)$:

- (i) Le domaine des contraintes du problème $(PBMN)$: $S = \{(x, y) \in X \times Y : \bar{g}(x, y) \leq 0\}$.
- (ii) La projection de S sur l'ensemble des décisions du niveau supérieur : $S(X) = \{x \in X : \exists y \in Y, \text{ tel que } (x, y) \in S\}$.
- (iii) L'ensemble des solutions réalisables du problème du niveau inférieur noté $(PNI)_x$ pour un $x \in S(X)$ fixé est donné par $S(x) : S(x) = \{y \in Y : \bar{g}(x, y) \leq 0\}$.
- (iv) Pour un $x \in S(X)$ fixé, soit $\bar{S}(x)$ l'ensemble des solutions optimales du problème $(PNI)_x$.
- (v) La région induite du problème $(PBMN)$: $RI = \{(x, y) : (x, y) \in S, y \in \bar{S}(x)\}$.

Définition 3.2.1. [23] Pour un $x \in X$ fixé tel que $\exists y \in Y, \bar{g}(x, y) \leq 0$, si y est une solution optimale pour $(PNI)_x$, alors (x, y) est une solution réalisable pour $(PBMN)$.

Définition 3.2.2. [23] Un point $(x_0, y_0) \in S$ est dit solution faiblement efficace (ou efficace) pour $(PBMN)$, si y_0 est une solution optimale pour $(PNI)_{x_0}$ et il n'existe pas une solution réalisable (x, y) pour $(PBMN)$ tel que $\bar{F}(x, y) < \bar{F}(x_0, y_0)$ ($\bar{F}(x, y) \leq \bar{F}(x_0, y_0)$).

Définition 3.2.3. [23] Une solution efficace (x_0, y_0) de $(PBMN)$ est dite proprement efficace, s'il existe un réel positif \mathcal{M} tel que l'inégalité $\bar{F}_i(x_0, y_0) - \bar{F}_i(x, y) \leq \mathcal{M}[\bar{F}_j(x, y) - \bar{F}_j(x_0, y_0)]$ est vérifiée pour tout $i \in Q$ et $(x, y) \in RI$ tel que $\bar{F}_i(x, y) < \bar{F}_i(x_0, y_0)$ et un certain $j \in Q$ tel que $\bar{F}_j(x, y) > \bar{F}_j(x_0, y_0)$.

3.3 Reformulation de $(PBMN)$ en un problème multi-objectifs

En se basant sur l'approche optimiste, pour un $x \in X$ fixé, nous utilisons les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) associées au problème du niveau inférieur

$(PNI)_x$ pour reformuler le problème $(PBMN)$ en un problème à un seul niveau multi-objectifs défini par :

$$(PMN)_{kkt} \begin{cases} \min_{x,y,u} \bar{F}(x,y) = (\bar{F}_1(x,y), \dots, \bar{F}_q(x,y)), \\ \text{s.c } \bar{g}(x,y) \leq 0, \\ \nabla_y \bar{f}(x,y) + u^t \nabla_y \bar{g}(x,y) = 0, \\ u^t \bar{g}(x,y) = 0, \\ x \in X, y \in Y, u \in \mathbb{R}_{\geq}^p, \end{cases}$$

où u est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associé aux conditions KKT pour le problème du niveau inférieur.

Dans ce qui suit, nous utilisons quelques changements de variables pour simplifier le problème $(PMN)_{kkt}$. Ainsi, soit $z = (x, y, u) \in Z = X \times Y \times \mathbb{R}_{\geq}^p \subset \mathbb{R}^N$, où $N = n + m + p$, $F(z) = \bar{F}(x, y)$, $G(z) = \bar{g}(x, y)$, $L_s(z) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y_s}(z) + \sum_{t=1}^p u_t \frac{\partial \bar{g}_t}{\partial y_s}(z) = 0$ pour tout $s = 1, \dots, m$ et $L_{m+1}(z) = \sum_{t=1}^p u_t \bar{g}_t(z) = 0$, le problème $(PMN)_{kkt}$ peut être écrit sous la forme suivante :

$$(PMN)_{kkt} \begin{cases} \min_z F(z) = (F_1(z), \dots, F_q(z)), \\ \text{s.c } G_j(z) \leq 0, \forall j = 1, \dots, p, \\ L_s(z) = 0, \forall s = 1, \dots, m, \\ L_{m+1}(z) = 0, \\ z \in Z. \end{cases}$$

Pour rassembler les contraintes d'égalités, nous posons $H : Z \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$, où $H_k(z) = L_k(z)$, $k = 1, \dots, m + 1$. Donc, le problème $(PMN)_{kkt}$ qu'est un problème multi-objectifs non linéaire avec des contraintes d'égalités et d'inégalités est donné comme suit :

$$(PMN) \begin{cases} \min_z F(z) = (F_1(z), \dots, F_q(z)), \\ \text{s.c } G_j(z) \leq 0, \forall j \in P = \{1, \dots, p\}, \\ H_k(z) = 0, \forall k \in M = \{1, \dots, m + 1\}, \\ z \in Z, \end{cases}$$

où $F_i : Z \longrightarrow \mathbb{R}$, $i \in Q$, $G_j : Z \longrightarrow \mathbb{R}$, $j \in P$ et $H_k : Z \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \in M$. $Z \subset \mathbb{R}^N$ est un ensemble non vide ouvert, $Z_0 = \{z \in Z : G_j(z) \leq 0, j \in P, H_k(z) = 0, k \in M\}$

est l'ensemble de toutes les solutions réalisables de (PMN) . Pour $z_0 \in Z$, on note par $J(z_0)$ l'ensemble $\{j \in P : G_j(z_0) = 0\}$, $J_0 = |J(z_0)|$ et par $\tilde{J}(z_0)$ (resp. $\bar{J}(z_0)$) l'ensemble $\{j \in P : G_j(z_0) < 0$ (resp. $G_j(z_0) > 0\}$. On a $J(z_0) \cup \tilde{J}(z_0) \cup \bar{J}(z_0) = P$ et si $z_0 \in Z_0$, $\bar{J}(z_0) = \emptyset$.

Nous rappelons la contrainte de qualification de Mangasarian-Fromovitz pour le problème (PMN) .

Définition 3.3.1. [80] On dit que la contrainte de qualification de Mangasarian-Fromovitz est satisfait en $z_0 \in Z_0$, s'il existe une direction $d \in \mathbb{R}^N$ telle que :

$$\begin{aligned} \nabla G_j(z_0)d &< 0, \quad \forall j \in J(z_0), \\ \nabla H_k(z_0)d &= 0, \quad \forall k \in M, \end{aligned}$$

et les gradients $\nabla H_k(z_0)$, $k \in M$ sont linéairement indépendants.

Selon le théorème de Karush-Kuhn-Tucker [70, 74], sous certaines contraintes de qualification, les conditions de KKT sont nécessaires pour l'optimalité d'un problème d'optimisation. Les conditions de KKT deviennent également suffisantes pour l'optimalité si la fonction objectif et les contraintes sont convexes ou bien satisfont les propriétés de convexité généralisée [82]. Dempe et Dutta [36] ont étudié les relations entre un problème de programmation bi-niveaux (PBN) (le cas mono-objectifs) et le problème $(PN)_{kkt}$ obtenu après transformation en utilisant les conditions de KKT du niveau inférieur. Ils ont montré que les solutions optimales globales du problème $(PN)_{kkt}$ coïncident avec les solutions optimales globales du problème (PBN) , dans le cas où le problème du niveau inférieur est convexe et la contrainte de qualification de Slater est satisfaite. Surtout, ils ont donné quelques exemples pour montrer que la régularité du problème du niveau inférieur est essentielle et ne peut pas être négligée. Ainsi que l'hypothèse de convexité de problème du niveau inférieur est également justifiée, voir Mirrlees [88].

3.4 Relations entre les problèmes $(PBMN)$ et (PMN)

De façon similaire à Dempe et Dutta [36], nous établissons des relations entre les deux problèmes $(PBMN)$ et $(PMN)_{kkt}$ concernant les solutions (faiblement ou

proprement) efficaces globales.

Théorème 3.4.1. [23] Soit (x_0, y_0) une solution (faiblement ou proprement) efficace pour $(PBMN)$ et supposons que le problème du niveau inférieur $(PNI)_x$ est convexe pour lequel la contrainte de qualification de Slater est satisfaite en $x = x_0$ (i.e. $\exists \bar{y}(x_0) \in Y$ tel que $\bar{g}(x_0, \bar{y}(x_0)) < 0$). Alors pour chaque

$$u_0 \in \Omega(x_0, y_0) = \{u \in \mathbb{R}_{\geq}^p : \nabla_y f(x_0, y_0) + u^t \nabla_y g(x_0, y_0) = 0, u^t g(x_0, y_0) = 0\},$$

le point (x_0, y_0, u_0) est une solution (faiblement ou proprement) efficace pour $(PMN)_{kkt}$.

Preuve. Si (x_0, y_0) est une solution (faiblement ou proprement) efficace pour $(PBMN)$, alors y_0 est une solution optimale de $(PNI)_{x_0}$. Puisque la contrainte de qualification de Slater est satisfaite pour le problème $(PNI)_x$ en $x = x_0$, alors il existe $\bar{u} \in \Omega(x_0, y_0)$. On a la valeur de la fonction objectif de $(PMN)_{kkt}$ est indépendante du $\bar{u} \in \Omega(x_0, y_0)$, alors (x_0, y_0, \bar{u}) est une solution (faiblement ou proprement) efficace pour $(PMN)_{kkt}$, et il en résulte que chaque solution (x_0, y_0, u_0) , $u_0 \in \Omega(x_0, y_0)$ est une solution (faiblement ou proprement) efficace pour $(PMN)_{kkt}$.

Théorème 3.4.2. [23] Soit (x_0, y_0, u_0) une solution (faiblement ou proprement) efficace pour $(PMN)_{kkt}$. Supposons que le problème $(PNI)_x$ est convexe et que la contrainte de qualification de Slater est satisfaite pour le problème $(PNI)_x$ pour chaque $x \in X$. Alors (x_0, y_0) est une solution (faiblement ou proprement) efficace pour $(PBMN)$.

Preuve. Si (x_0, y_0, u_0) est une solution (faiblement ou proprement) efficace pour $(PMN)_{kkt}$, alors (x_0, y_0, u_0) satisfait les conditions de KKT de $(PNI)_{x_0}$ (i.e. $u_0 \in \Omega(x_0, y_0)$) et y_0 est une solution réalisable de $(PNI)_{x_0}$ (i.e. $y_0 \in S(x_0)$). Puisque les fonctions \bar{f} et \bar{g}_j , $j \in P$ sont convexes en y pour tout $x \in X$ fixé, alors d'après les conditions d'optimalité de théorème de Karush-Kuhn-Tucker [70, 74] (Théorème 7.2.1 de Mangasarian [82]), y_0 est une solution optimale de $(PNI)_{x_0}$ (i.e. $y_0 \in \bar{S}(x_0)$). Il en résulte que (x_0, y_0) est réalisable pour le problème $(PBMN)$ (i.e. $(x_0, y_0) \in RI$). Maintenant, supposons que (x_0, y_0) n'est pas une solution faiblement efficace pour $(PBMN)$, donc il existe $(\bar{x}, \bar{y}) \in RI$ tel que $\bar{F}(\bar{x}, \bar{y}) < \bar{F}(x_0, y_0)$. On a $\bar{y} \in$

$\bar{S}(\bar{x})$ et puisque la contrainte de qualification de Slater est satisfaite pour $(PNI)_{\bar{x}}$ alors les conditions de KKT pour le problème $(PNI)_x$ sont vérifiées, *i.e.* il existe $\bar{u} \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ tel que $\bar{u} \in \Omega(\bar{x}, \bar{y})$ et $\bar{y} \in S(\bar{x})$. Donc $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$ est une solution réalisable pour $(PMN)_{kkt}$, alors l'inégalité $\bar{F}(\bar{x}, \bar{y}) < \bar{F}(x_0, y_0)$ contredit le fait que (x_0, y_0, u_0) est une solution faiblement efficace pour $(PMN)_{kkt}$. D'où le résultat. De la même manière on démontre le reste du théorème pour les solutions (proprement) efficaces.

Des Théorème 3.4.1 et 3.4.2, on obtient le résultat suivant :

Théorème 3.4.3. [23] *Supposons que la contrainte de qualification de Slater est satisfaite pour le problème $(PNI)_x$ pour tout $x \in X$ et que les fonctions \bar{f} et \bar{g}_j , $j \in P$ sont convexes en y pour tout $x \in X$ fixé. Alors (x_0, y_0, u_0) , $u_0 \in \Omega(x_0, y_0)$ est une solution (faiblement ou proprement) efficace pour $(PMN)_{kkt}$ si et seulement si (x_0, y_0) est une solution (faiblement ou proprement) efficace pour $(PBMN)$.*

3.5 Conditions nécessaires d'efficacité

Pour établir des conditions nécessaires d'efficacité pour le problème (PMN) , nous avons besoin de prouver le lemme suivant.

Lemme 3.5.1. [23] *Supposons que*

- (i) z_0 est une solution (localement) faiblement efficace pour (PMN) ;
- (ii) G_j est continue en z_0 pour $j \in \tilde{J}(z_0)$, F_i , $i \in Q$, G_j , $j \in J(z_0)$, H_k , $k \in M$ sont différentiables en z_0 et il existe des fonctions vectorielles $\eta_i : Z_0 \times Z \rightarrow \mathbb{R}^N$, $i \in Q$, $\theta_j : Z_0 \times Z \rightarrow \mathbb{R}^N$, $j \in J(z_0)$ et $\phi_k : Z_0 \times Z \rightarrow \mathbb{R}^N$, $k \in M$ satisfasse en z_0 par rapport à $\eta : Z_0 \times Z \rightarrow \mathbb{R}^N$ les inégalités suivantes,

$$[\nabla F_i(z_0)]^t \eta(z, z_0) \leq [\nabla F_i(z_0)]^t \eta_i(z, z_0), \quad \forall z \in Z_0, \quad \forall i \in Q, \quad (3.1)$$

$$[\nabla G_j(z_0)]^t \eta(z, z_0) \leq [\nabla G_j(z_0)]^t \theta_j(z, z_0), \quad \forall z \in Z_0, \quad \forall j \in J(z_0), \quad (3.2)$$

$$[\nabla H_k(z_0)]^t \eta(z, z_0) = [\nabla H_k(z_0)]^t \phi_k(z, z_0), \quad \forall z \in Z_0, \quad \forall k \in M. \quad (3.3)$$

Alors le système des inégalités

$$[\nabla F_i(z_0)]^t \eta_i(z, z_0) < 0, \quad i \in Q, \quad (3.4)$$

$$[\nabla G_j(z_0)]^t \theta_j(z, z_0) \leq 0, \quad j \in J(z_0), \quad (3.5)$$

$$[\nabla H_k(z_0)]^t \phi_k(z, z_0) = 0, \quad k \in M, \quad (3.6)$$

n'admet pas de solution dans Z_0 .

Preuve. Soit $z_0 \in Z_0$ une solution localement faiblement efficace pour (PMN) et supposons qu'il existe $\tilde{z} \in Z_0$ vérifiant les inégalités (3.4)-(3.6).

Pour $i \in Q$, soit $\varphi_{F_i}(z_0, \tilde{z}, \tau) = F_i(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) - F_i(z_0)$.

On remarque que cette fonction s'annule en $\tau = 0$ et $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \tau^{-1}[\varphi_{F_i}(z_0, \tilde{z}, \tau) - \varphi_{F_i}(z_0, \tilde{z}, 0)] = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \tau^{-1}[F_i(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) - F_i(z_0)] = [\nabla F_i(z_0)]^t \eta(\tilde{z}, z_0) \leq [\nabla F_i(z_0)]^t \eta_i(\tilde{z}, z_0) < 0$ d'après (3.1) et (3.4). Il en résulte que, pour tout $i \in Q$, $\varphi_{F_i}(z_0, \tilde{z}, \tau) < 0$ si τ est dans un intervalle ouvert $(0, \delta_{F_i})$, $\delta_{F_i} > 0$. Donc, pour tout $i \in Q$,

$$F_i(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) < F_i(z_0), \quad \tau \in (0, \delta_{F_i}).$$

De même, en utilisant (3.2) avec (3.5) et (3.3) avec (3.6), on déduit :

$$\begin{aligned} G_j(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) &\leq G_j(z_0) = 0, \quad \tau \in (0, \delta_{G_j}), \quad \forall j \in J(z_0), \\ H_k(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) &= H_k(z_0) = 0, \quad \tau \in (0, \delta_{H_k}), \quad \forall k \in M, \end{aligned}$$

pour tout $j \in J(z_0)$, $\delta_{G_j} > 0$ et pour tout $k \in M$, $\delta_{H_k} > 0$.

Comme $j \in \tilde{J}(z_0)$, $G_j(z_0) < 0$ et G_j est continue en z_0 , donc, il existe $\delta_j > 0$ tel que

$$G_j(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) < 0, \quad \tau \in (0, \delta_j), \quad \forall j \in \tilde{J}(z_0).$$

Soit $\delta_0 = \min\{\delta_{F_i}, i \in Q, \delta_{G_j}, j \in J(z_0), \delta_{H_k}, k \in M, \delta_j, j \in \tilde{J}(z_0)\}$. Alors

$$(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) \in \mathcal{N}_{\delta_0}(z_0), \quad \tau \in (0, \delta_0), \quad (3.7)$$

où $V_{\delta_0}(z_0)$ est un voisinage de z_0 . Et pour tout $\tau \in (0, \delta_0)$, on a

$$F_i(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) < F_i(z_0), \quad i \in Q, \quad (3.8)$$

$$G_j(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) \leq 0, \quad j \in P, \quad (3.9)$$

$$H_k(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) = 0, \quad k \in M. \quad (3.10)$$

De (3.7), (3.9) et (3.10), on a $(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) \in V_{\delta_0}(z_0) \cap Z_0$, pour tout $\tau \in (0, \delta_0)$. D'où (3.8) est en contradiction avec l'hypothèse que z_0 est localement faiblement efficace pour (PMN) . Ainsi, il n'existe pas $z \in Z_0$ satisfaisant le système (3.4)-(3.6), et le lemme est démontré.

Zeng et Caron [131] ont introduit le concept de fonctions preconvexlikes pour étudier les problèmes d'optimisation vectoriels dans un espace vectoriel topologique séparé. Ils ont établi divers théorèmes des alternatives généralisés de Motzkin. Pour établir des conditions nécessaires d'efficacité pour le problème (PMN) , nous avons besoin d'utiliser le Théorème 3.4 des alternatives de Zeng et Caron [131]. Dans ce qui suit, nous formulerons la définition de preconvexitélike et le Théorème 3.4, dans le cas d'un espace topologique \mathbb{R}^n .

Définition 3.5.1. [23] Soit D un ensemble non vide dans \mathbb{R}^n , soit S un sous ensemble non vide de D . Une fonction $L : D \rightarrow \mathbb{R}^N$ est dite (\mathbb{R}_{\geq}^N) -preconvexlike sur S , si et seulement si, $\forall x, y \in S, \forall \lambda \in]0, 1[, \exists t \in S$ et $\tau > 0$, tels que

$$\lambda L(x) + (1 - \lambda)L(y) - \tau L(t) \in \mathbb{R}_{\geq}^N.$$

Théorème 3.5.1. [131] Soit D un ensemble non vide dans \mathbb{R}^n , et soit $\hat{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}, \hat{G} : D \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}, \hat{H} : D \rightarrow \mathbb{R}^{n_3}$ pour lequel $\hat{f} = (\hat{F}, \hat{G}, \hat{H})$ est $(\mathbb{R}_{\geq}^{n_1} \times \mathbb{R}_{\geq}^{n_2} \times 0)$ -preconvexlike sur $S \subseteq D$. Considérons les systèmes suivants :

$$(\mathcal{S}1) \exists \bar{z} \in S \text{ tel que } \hat{F}(\bar{z}) < 0, \hat{G}(\bar{z}) \leq 0, \text{ et } \hat{H}(\bar{z}) = 0.$$

$$(\mathcal{S}2) \exists (\mu, \lambda, \delta) \in (\mathbb{R}_{\geq}^{n_1} \times \mathbb{R}_{\geq}^{n_2} \times \mathbb{R}^{n_3}) \setminus \{0\} \text{ tel que}$$

$$\langle \hat{F}(z), \mu \rangle + \langle \hat{G}(z), \lambda \rangle + \langle \hat{H}(z), \delta \rangle \geq 0, \forall z \in S.$$

Alors si $(\mathcal{S}1)$ n'a pas de solution, alors $(\mathcal{S}2)$ a des solutions. De plus, si la condition de Slater $(\mathcal{S}C)$ ou si la condition de régularité $(\mathcal{R}H)$ ci-dessous est satisfaite

$$(\mathcal{S}C) \exists (\hat{z}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{w}) \in Gr(\hat{f}) := \{(z, \hat{F}(z), \hat{G}(z), \hat{H}(z)) : z \in S\} \text{ tel que } \hat{\beta} < 0 \text{ et } \hat{w} = 0,$$

$$(\mathcal{R}H) \{(\lambda, \delta) \in \mathbb{R}_{\geq}^{n_2} \times \mathbb{R}^{n_3} : \langle \hat{G}(z), \lambda \rangle + \langle \hat{H}(z), \delta \rangle \geq 0, \forall z \in S\} = \{0\},$$

alors un et un seul de ces systèmes $(\mathcal{S}1)$ et $(\mathcal{S}2)$ a des solutions avec $\mu \neq 0$.

Dans le théorème suivant, on obtient des conditions nécessaires d'efficacité de type Fritz John pour le problème (PMN) en considérant différentes fonctions $(\eta_i)_i, (\theta_j)_j$ et $(\phi_k)_k$ associées aux fonctions objectifs et aux contraintes.

Théorème 3.5.2. [23](Conditions nécessaires d'efficacité de type Fritz John) Supposons que

- (i) z_0 est une solution faiblement efficace pour (PMN) ;
- (ii) G_j est continue en z_0 pour $j \in \tilde{J}(z_0)$, F_i , $i \in Q$, G_j , $j \in J(z_0)$, H_k , $k \in M$ sont différentiables en z_0 et il existe des fonctions vectorielles $\eta_i : Z_0 \times Z \rightarrow \mathbb{R}^N$, $i \in Q$, $\theta_j : Z_0 \times Z \rightarrow \mathbb{R}^N$, $j \in J(z_0)$ et $\phi_k : Z_0 \times Z \rightarrow \mathbb{R}^N$, $k \in M$ satisfasse en z_0 par rapport à $\eta : Z_0 \times Z \rightarrow \mathbb{R}^N$ les inégalités (3.1)-(3.3) ;
- (iii) soit $\hat{F}(z) = ([\nabla F_i(z_0)]^t \eta_i(z, z_0)$, $i \in Q) \in \mathbb{R}^q$, $\hat{G}(z) = ([\nabla G_j(z_0)]^t \theta_j(z, z_0)$, $j \in J(z_0)) \in \mathbb{R}^{J_0}$ et $\hat{H}(z) = ([\nabla H_k(z_0)]^t \phi_k(z, z_0)$, $k \in M) \in \mathbb{R}^{m+1}$ avec $(\hat{F}, \hat{G}, \hat{H})$ est $(\mathbb{R}_{\geq}^q \times \mathbb{R}_{\geq}^{J_0} \times 0)$ -preconvexlike fonction de z sur Z_0 .

Alors il existe $(\mu, \lambda, \delta) \in \mathbb{R}_{\geq}^q \times \mathbb{R}_{\geq}^{J_0} \times \mathbb{R}^{m+1}$, $(\mu, \lambda, \delta) \neq 0$ tel que $(z_0, \mu, \lambda, \delta)$ satisfait

$$\sum_{i=1}^q \mu_i [\nabla F_i(z_0)]^t \eta_i(z, z_0) + \sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j [\nabla G_j(z_0)]^t \theta_j(z, z_0) + \sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \phi_k(z, z_0) \geq 0, \quad \forall z \in Z_0. \quad (3.11)$$

Preuve. Si les conditions (i) et (ii) sont satisfaites, alors d'après le Lemme 3.5.1 le système (3.4)-(3.6) n'a pas de solution dans Z_0 . D'après l'hypothèse (iii), $(\hat{F}, \hat{G}, \hat{H})(z) = ([\nabla F_i(z_0)]^t \eta_i(z, z_0)$, $i \in Q$, $[\nabla G_j(z_0)]^t \theta_j(z, z_0)$, $j \in J(z_0)$, $[\nabla H_k(z_0)]^t \phi_k(z, z_0)$, $k \in M)$ est une fonction $(\mathbb{R}_{\geq}^q \times \mathbb{R}_{\geq}^{J_0} \times 0)$ -preconvexlike de z sur Z_0 , donc du Théorème 3.5.1, il existe $(\mu, \lambda, \delta) \in \mathbb{R}_{\geq}^q \times \mathbb{R}_{\geq}^{J_0} \times \mathbb{R}^{m+1}$, $(\mu, \lambda, \delta) \neq 0$ tel que la relation (3.11) est satisfaite, ce qui correspond aux conditions nécessaires d'efficacité de type Fritz John.

Remarque 3.5.1. [23] On remarque que la condition de Slater (\mathcal{SC}) n'est pas satisfaite pour le problème (PMN) , car il existe $\hat{z} \in Z_0$ tel que $\hat{G}(\hat{z}) < 0$ et $\hat{H}(\hat{z}) = 0$ (avec la condition (iii) du Théorème 3.5.2 et les inégalités (3.2)-(3.3) qui sont en contradiction avec le fait que la contrainte de qualification de Mangasarian-Fromovitz n'est pas vérifiée pour le problème (PMN) (pour ce dernier, voir Ye et al. [127]). De plus, l'hypothèse de régularité (\mathcal{RH}) n'est pas satisfaite aussi pour le problème (PMN) . Ainsi, quelle est la contrainte de qualification appropriée à ajouter aux hy-

pothèses du Théorème 3.5.2 pour avoir des conditions nécessaires d'efficacité de type Karush-Kuhn-Tucker pour le problème (PMN) ?

D'après les Théorèmes 3.4.1 et 3.5.2, on obtient des conditions nécessaires d'efficacité de type Fritz John pour le problème $(PBMN)$ sans utiliser aucune contrainte de qualification.

Théorème 3.5.3. [23] *(Conditions nécessaires d'efficacité de type Fritz John) Supposons que (x_0, y_0) est une solution faiblement efficace pour $(PBMN)$. Si les hypothèses du Théorème 3.4.1 et les conditions (ii) et (iii) du Théorème 3.5.2 sont satisfaites, alors il existe $(\mu, \lambda, \delta) \in \mathbb{R}_{\geq}^q \times \mathbb{R}_{\geq}^{J_0} \times \mathbb{R}^{m+1}$, $(\mu, \lambda, \delta) \neq 0$ tel que $(x_0, y_0, \mu, \lambda, \delta)$ satisfait la relation (3.11).*

3.6 Conditions suffisantes d'efficacité

Dans les Théorèmes 3.4.1, 3.4.2 et 3.4.3, il est prouvé que sous certaines contraintes de qualifications appropriées et convexité du problème du niveau inférieur $(PNI)_x$, des solutions (faiblement ou proprement) efficaces du problème $(PM)_{kkt}$ coïncident avec des solutions (faiblement ou proprement) efficaces du problème $(PBMN)$. Dans cette section, nous établissons des conditions suffisantes d'efficacité pour le problème (PMN) sous diverses formes d'invexité généralisée, fonctions infines et la condition (3.11).

3.6.1 Solutions faiblement efficaces

Dans les théorèmes suivants, nous donnons des conditions suffisantes d'efficacité de type Fritz John pour qu'un point réalisable soit faiblement efficace pour (PMN) .

Théorème 3.6.1. [23] *Soit $z_0 \in Z_0$ et supposons que :*

1. F est faiblement pseudo-invexe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\eta_i : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $i \in Q$;
2. pour tout $j \in J(z_0)$, G_j est strictement quasi-invexe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\theta_j : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$;
3. pour tout $k \in M$, H_k est infine en z_0 sur Z_0 par rapport à $\phi_k : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$.

S'il existe $(\mu, \lambda, \delta) \in \mathbb{R}_{\geq}^q \times \mathbb{R}_{\geq}^{J_0} \times \mathbb{R}^{m+1}$, $(\mu, \lambda) \neq 0$ tel que $(z_0, \mu, \lambda, \delta, (\eta_i)_i, (\theta_j)_j, (\phi_k)_k)$ satisfait la relation (3.11), alors z_0 est une solution faiblement efficace pour (PMN).

Preuve. Supposons que z_0 n'est pas une solution faiblement efficace pour (PMN). Alors il existe une solution réalisable $z \in Z_0$ pour (PMN) telle que $F(z) - F(z_0) < 0$. Puisque F est faiblement pseudo-invexe en z_0 sur Z_0 par rapport à $(\eta_i)_{i \in Q}$, il en résulte que

$$\exists \bar{z} \in Z_0, [\nabla F_i(z_0)]^t \eta_i(\bar{z}, z_0) < 0, \forall i \in Q. \quad (3.12)$$

Par définition de $J(z_0)$ et $\bar{z} \in Z_0$, on obtient pour tout $j \in J(z_0)$, $G_j(\bar{z}) - G_j(z_0) \leq 0$ et à partir de l'hypothèse 2., il en résulte que

$$[\nabla G_j(z_0)]^t \theta_j(\bar{z}, z_0) < 0, \forall j \in J(z_0). \quad (3.13)$$

Comme $(\mu, \lambda) \geq 0$, de (3.12) et (3.13), on a

$$\sum_{i=1}^q \mu_i [\nabla F_i(z_0)]^t \eta_i(\bar{z}, z_0) + \sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j [\nabla G_j(z_0)]^t \theta_j(\bar{z}, z_0) < 0. \quad (3.14)$$

Comme $\bar{z}, z_0 \in Z_0$, alors, d'après l'hypothèse 3., on déduit :

$$\sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \phi_k(\bar{z}, z_0) = 0. \quad (3.15)$$

De (3.14) et (3.15), on a

$$\sum_{i=1}^q \mu_i [\nabla F_i(z_0)]^t \eta_i(\bar{z}, z_0) + \sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j [\nabla G_j(z_0)]^t \theta_j(\bar{z}, z_0) + \sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \phi_k(\bar{z}, z_0) < 0,$$

ce qui contredit (3.11). D'où z_0 est une solution faiblement efficace pour (PMN).

Théorème 3.6.2. [23] *Soit $z_0 \in Z_0$ et supposons qu'il existe $(\mu, \lambda, \delta) \in \mathbb{R}_{\geq}^q \times \mathbb{R}_{\geq}^{J_0} \times \mathbb{R}^{m+1}$, $(\mu, \lambda) \neq 0$ tel que*

1. $\sum_{i=1}^q \mu_i F_i + \sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j G_j$ est strictement pseudo-invexe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\eta : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$;

2. $\sum_{k=1}^{m+1} \delta_k H_k$ est infime en z_0 sur Z_0 par rapport à $\phi : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$.

Si la condition suivante est satisfaite

$$\sum_{i=1}^q \mu_i [\nabla F_i(z_0)]^t \eta(z, z_0) + \sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j [\nabla G_j(z_0)]^t \eta(z, z_0) + \sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \phi(z, z_0) \geq 0, \forall z \in Z_0, \quad (3.16)$$

alors z_0 est une solution faiblement efficace pour (PMN) .

Preuve. Supposons que z_0 n'est pas une solution faiblement efficace pour (PMN) .

Alors il existe une solution réalisable $\bar{z} \in Z_0$ pour (PMN) tel que $F(\bar{z}) - F(z_0) < 0$.

Puisque $\mu \geq 0$, il en résulte que

$$\sum_{i=1}^q \mu_i F_i(\bar{z}) - \sum_{i=1}^q \mu_i F_i(z_0) \leq 0. \quad (3.17)$$

D'après la définition de $J(z_0)$ et $\bar{z} \in Z_0$, on a pour tout $j \in J(z_0)$, $G_j(\bar{z}) - G_j(z_0) \leq 0$ et de $\lambda \geq 0$, on a

$$\sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j G_j(\bar{z}) - \sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j G_j(z_0) \leq 0. \quad (3.18)$$

De (3.17) et (3.18) et de l'hypothèse 1., on obtient

$$\sum_{i=1}^q \mu_i [\nabla F_i(z_0)]^t \eta(\bar{z}, z_0) + \sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j [\nabla G_j(z_0)]^t \eta(\bar{z}, z_0) < 0. \quad (3.19)$$

Comme $\bar{z}, z_0 \in Z_0$, alors, d'après l'hypothèse 2., on déduit :

$$\sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \phi(\bar{z}, z_0) = 0. \quad (3.20)$$

De (3.17), (3.18) et (3.20), on obtient une contradiction avec (3.16). D'où z_0 est une solution faiblement efficace pour (PMN) .

3.6.2 Solutions efficaces

Le théorème suivant nous donne des conditions suffisantes pour qu'un point réalisable soit une solution efficace pour (PMN) .

Théorème 3.6.3. [23] Soit $z_0 \in Z_0$ et supposons que :

1. il existe $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^q$ tel que $\sum_{i=1}^q \mu_i F_i$ est strictement pseudo-invexe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\eta : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$;
2. il existe $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^{J_0}$ tel que $\sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j G_j$ est quasi-invexe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\theta : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$;
3. il existe $\delta \in \mathbb{R}^{m+1}$ tel que $\sum_{k=1}^{m+1} \delta_k H_k$ est infine en z_0 sur Z_0 par rapport à $\phi : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$.

Si la condition (3.16) est satisfaite, alors z_0 est une solution efficace pour (PMN).

Preuve. Supposons que z_0 n'est pas une solution efficace pour (PMN). Alors il existe une solution réalisable \bar{z} de (PMN) et un indice $i \in Q$ tel que $F_i(\bar{z}) < F_i(z_0)$ et $F_j(\bar{z}) \leq F_j(z_0)$, $\forall j \in Q$, $j \neq i$.

Comme $\mu \geq 0$, il en résulte que $\sum_{i=1}^q \mu_i F_i(\bar{z}) - \sum_{i=1}^q \mu_i F_i(z_0) \leq 0$, et d'après la stricte pseudo-invexité de $\sum_{i=1}^q \mu_i F_i$ en z_0 sur Z_0 on obtient

$$\sum_{i=1}^q \mu_i [\nabla F_i(z_0)]^t \eta(\bar{z}, z_0) < 0. \quad (3.21)$$

Par $\lambda \geq 0$, la définition de $J(z_0)$, $\bar{z}, z_0 \in Z_0$ et des hypothèses 2. et 3., on obtient

$$\sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j [\nabla G_j(z_0)]^t \theta(\bar{z}, z_0) \leq 0,$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \phi(\bar{z}, z_0) \leq 0,$$

et avec (3.21), il en résulte que

$$\sum_{i=1}^q \mu_i [\nabla F_i(z_0)]^t \eta(\bar{z}, z_0) + \sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j [\nabla G_j(z_0)]^t \theta(\bar{z}, z_0) + \sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \phi(\bar{z}, z_0) < 0,$$

ce qui contredit (3.16). D'où, z_0 est une solution efficace pour (PMN).

3.6.3 Solutions proprement efficaces

Le but de cette sous section est d'établir des conditions suffisantes pour qu'un point réalisable soit une solution proprement efficace pour (PMN) .

Théorème 3.6.4. [23] Soit $z_0 \in Z_0$ et supposons que :

1. F est invexe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\eta_i : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $i \in Q$;
2. pour tout $j \in J(z_0)$, G_j est invexe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\theta_j : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$;
3. pour tout $k \in M$, H_k est infixe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\phi_k : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$.

S'il existe des vecteurs $\mu \in \mathbb{R}_{>}^q$, $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^{J_0}$ et $\delta \in \mathbb{R}^{m+1}$ tels que $(z_0, \mu, \lambda, \delta, (\eta_i)_i, (\theta_j)_j, (\phi_k)_k)$ satisfait la condition (3.11), alors z_0 est une solution proprement efficace pour (PMN) .

Preuve. D'après les hypothèses 1. et 2., on a pour tout $z \in Z_0$

$$F_i(z) - F_i(z_0) \geq [\nabla F_i(z_0)]^t \eta_i(z, z_0), \quad \forall i \in Q, \quad (3.22)$$

$$G_j(z) - G_j(z_0) \geq [\nabla G_j(z_0)]^t \theta_j(z, z_0), \quad \forall j \in J(z_0). \quad (3.23)$$

Puisque $\mu > 0$ et $\lambda \geq 0$, de (3.22) et (3.23), on obtient

$$\sum_{i=1}^q \mu_i F_i(z) - \sum_{i=1}^q \mu_i F_i(z_0) \geq \sum_{i=1}^q \mu_i [\nabla F_i(z_0)]^t \eta_i(z, z_0), \quad \forall z \in Z_0, \quad (3.24)$$

$$\sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j G_j(z) - \sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j G_j(z_0) \geq \sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j [\nabla G_j(z_0)]^t \theta_j(z, z_0), \quad \forall z \in Z_0. \quad (3.25)$$

Comme $z \in Z_0$, $\lambda \geq 0$, alors, de (3.25) et de la définition de $J(z_0)$, on déduit :

$$- \sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j [\nabla G_j(z_0)]^t \theta_j(z, z_0) \geq 0, \quad \forall z \in Z_0. \quad (3.26)$$

De l'hypothèse 3., on a pour tout $z \in Z_0$

$$H_k(z) - H_k(z_0) = [\nabla H_k(z_0)]^t \phi_k(z, z_0), \quad \forall k \in M,$$

et comme $z, z_0 \in Z_0$, il en résulte que :

$$\sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \phi_k(z, z_0) = 0, \quad \forall z \in Z_0. \quad (3.27)$$

En utilisant (3.26), (3.27) et la condition (3.11), on obtient pour tout $z \in Z_0$

$$\sum_{i=1}^q \mu_i [\nabla F_i(z_0)]^t \eta_i(z, z_0) \geq - \sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j [\nabla G_j(z_0)]^t \theta_j(z, z_0) - \sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \phi_k(z, z_0) \geq 0. \quad (3.28)$$

Donc, de (3.24) et (3.28), on obtient pour tout $z \in Z_0$, $\sum_{i=1}^q \mu_i F_i(z) \geq \sum_{i=1}^q \mu_i F_i(z_0)$ avec $\mu \in \mathbb{R}_>^q$. D'où, d'après le Théorème 1 de Geoffrion [58], z_0 est une solution proprement efficace pour (PMN).

Théorème 3.6.5. [23] Soit $z_0 \in Z_0$ et supposons que :

1. il existe $\mu \in \mathbb{R}_>^q$ tel que $\sum_{i=1}^q \mu_i F_i$ est pseudo-invexe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\eta : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$;
2. il existe $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^{J_0}$ tel que $\sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j G_j(z)$ est quasi-invexe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\theta : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$;
3. il existe $\delta \in \mathbb{R}^{m+1}$ tel que $\sum_{k=1}^{m+1} \delta_k H_k$ est infine en z_0 sur Z_0 par rapport à $\phi : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$.

Si la condition (3.16) est satisfaite, alors z_0 est une solution proprement efficace pour (PMN).

Preuve. On a pour tout $z \in Z_0$, $G_j(z) \leq 0$, $G_j(z_0) = 0$, $\forall j \in J(z_0)$ et puisque $\lambda \geq 0$, il en résulte que $\sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j G_j(z) - \sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j G_j(z_0) \leq 0$. De l'hypothèse 2., on

obtient

$$\sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j [\nabla G_j(z_0)]^t \theta(z, z_0) \leq 0, \quad \forall z \in Z_0. \quad (3.29)$$

Comme $z, z_0 \in Z_0$, alors, d'après l'hypothèse 3., on déduit :

$$\sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \phi(z, z_0) \leq 0, \quad \forall z \in Z_0. \quad (3.30)$$

En utilisant (3.29), (3.30) et la condition (3.16), on a pour tout $z \in Z_0$

$$\sum_{i=1}^q \mu_i [\nabla F_i(z_0)]^t \eta(z, z_0) \geq - \sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j [\nabla G_j(z_0)]^t \theta(z, z_0) - \sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \phi(z, z_0) \geq 0.$$

Puisque $\sum_{i=1}^q \mu_i F_i$ est pseudo-invexe en z_0 sur Z_0 par rapport à η , alors $\sum_{i=1}^q \mu_i F_i(z) \geq \sum_{i=1}^q \mu_i F_i(z_0)$, $\forall z \in Z_0$ avec $\mu \in \mathbb{R}_{>}^q$. D'où, d'après le Théorème 1 de Geoffrion [58], z_0 est une solution proprement efficace pour (PMN) .

Remarque 3.6.1. [23] Comme cas particulier du Théorème 3.6.5, si $\eta(z, z_0) = \theta(z, z_0) = \phi(z, z_0) = z - z_0$, on déduit les conditions suffisantes du Théorème 3.4 donné par Singh [107]. On notera que dans ce théorème, Singh a étudié des conditions suffisantes d'efficacité pour qu'un point réalisable soit une solution efficace au lieu de proprement efficace obtenue dans notre cas.

Remarque 3.6.2. [23] Si le problème du niveau inférieur $(PNI)_x$ est convexe, satisfait la contrainte de qualification de Slater pour chaque $x \in X$, alors à partir des conditions suffisantes d'efficacité données dans les Théorèmes 3.6.1 à 3.6.5 en combinant avec le Théorème 3.4.2, on obtient des conditions suffisantes d'efficacité pour qu'un point réalisable du problème (PMN) corresponde à une solution (faiblement ou proprement) efficace pour le problème bi-niveaux $(PBMN)$.

3.6.4 Exemple d'application

Afin d'illustrer les conditions suffisantes d'efficacité obtenues, nous donnons un exemple d'un problème de programmation bi-niveaux multi-objectifs non linéaire $(PBMN1)$ dans lequel une solution efficace appropriée sera obtenue après reformulation du problème $(PBMN1)$ en un problème multi-objectifs à un seul niveau

(*PMN1*) et en utilisant les Théorèmes 3.4.2 et 3.6.4. Notons que toutes les fonctions impliqués dans le problème (*PMN1*) ne sont pas convexes et ne satisfont pas la convexité généralisée, ce qui rend impossible d'appliquer les conditions suffisantes d'efficacité utilisant le concept de convexité et de convexité généralisée, justifiant ainsi la nécessité de faire recours à l'invexité (et l'invexité généralisée) dans nos conditions suffisantes d'efficacité. De plus, il est connu que le problème obtenu après transformation d'un problème de programmation bi-niveaux en un problème à un seul niveau par l'approche KKT ne satisfait aucune contrainte de qualification usuelle comme par exemple la contrainte de qualification de Slater et de Mangasarian-Fromovitz. Donc quand un point réalisable pour (*PMN1*) n'est pas un point vectoriel de Karush-Kuhn-Tucker, toutes les conditions suffisantes d'efficacité obtenues à l'aide de ce concept ne peuvent pas être également appliquées.

Exemple 3.6.1. [23] Considérons le problème de programmation bi-niveaux multi-objectifs non linéaire suivant :

$$(PBMN1) \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}_{\geq}} \bar{F}(x, y) = (xy + \frac{1}{3}y\sqrt{x+1} + x, -xy + \frac{1}{2}x), \\ \text{s.c } \min_{y \in \mathbb{R}_{\geq}} \bar{f}(x, y) = y^2 + xy, \\ \bar{g}(x, y) = x^2 - 2xy + 2x - 1 \leq 0. \end{cases}$$

En utilisant les conditions de KKT associées au problème du niveau inférieur (*PNI*)_x, on obtient un problème à un seul niveau multi-objectifs donné comme suit :

$$(PMN1)_{kkt} \begin{cases} \min_{x, y, u, v} \bar{F}(x, y) = (xy + \frac{1}{3}y\sqrt{x+1} + x, -xy + \frac{1}{2}x), \\ \text{s.c } x^2 - 2xy + 2x - 1 \leq 0, \\ -2ux + x + 2y - v = 0, \\ u(-x^2 + 2xy - 2x + 1) + vy = 0, \\ x \geq 0, y \geq 0, u \geq 0, v \geq 0, \end{cases}$$

où u et v sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux conditions de KKT du problème (*PNI*)_x pour chaque $x \in \mathbb{R}_{\geq}$ fixé. En posant $z = (x, y, u, v)$, $F(z) = \bar{F}(x, y)$, $G(z) = \bar{g}(x, y)$, $H_1(z) = \nabla_y \bar{f}(x, y) + u \nabla_y \bar{g}(x, y) - v$ et $H_2(z) = -u \bar{g}(x, y) +$

vy , le problème $(PMN1)_{kkt}$ peut être écrit comme suit :

$$(PMN1) \begin{cases} \min_z F(z) = (F_1(z), F_2(z)) = (xy + \frac{1}{3}y\sqrt{x+1} + x, -xy + \frac{1}{2}x), \\ \text{s.c } G(z) = x^2 - 2xy + 2x - 1 \leq 0, \\ H_1(z) = -2ux + x + 2y - v = 0, \\ H_2(z) = u(-x^2 + 2xy - 2x + 1) + vy = 0, \\ z \in \mathbb{R}_{\geq}^4, \end{cases}$$

où $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}_{\geq}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G : \mathbb{R}_{\geq}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ et $H = (H_1, H_2) : \mathbb{R}_{\geq}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$. L'ensemble de toutes les solutions réalisables de $(PMN1)$ est $Z_0 = \{ z = (x, y, u, v) \in \mathbb{R}_{\geq}^4 : x^2 - 2xy + 2x - 1 \leq 0, -2ux + x + 2y - v = 0, u(-x^2 + 2xy - 2x + 1) + vy = 0 \}$. Soit $z_0 = (0, 0, 0, 0)$ une solution réalisable de $(PMN1)$.

- On a la fonction objectif et la fonction contrainte du problème $(PNI)_x$ sont convexes en y pour tout $x \in \mathbb{R}_{\geq}$. De plus, la contrainte de qualification de Slater est satisfaite pour le problème $(PNI)_x$ dans $(PBMN1)$ car il existe une solution réalisable de $(PNI)_x$, $\bar{y}(x) = x + 1$, telle que $\bar{g}(x, \bar{y}(x)) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_{\geq}$. Il en résulte, par le Théorème 3.4.3, que les solutions (faiblement ou proprement) efficaces de $(PMN1)$ correspondent aux solutions (faiblement ou proprement) efficaces de $(PBMN1)$.
- On a la fonction F n'est pas pseudo-convexe en z_0 (et donc non convexe), H n'est pas quasi-convexe en z_0 (et donc ni pseudo-convexe et ni convexe) et G n'est pas convexe en z_0 (il suffit de prendre $z = (1, 1, \frac{3}{2}, 0) \in Z_0$). De plus, on a z_0 n'est pas un point vectoriel de Karush-Kuhn-Tucker du problème $(PMN1)$, car la condition de Karush-Kuhn-Tucker en z_0 prend la forme suivante $\mu_1 \nabla F_1(z_0) + \mu_2 \nabla F_2(z_0) + \delta_1 \nabla H_1(z_0) + \delta_2 \nabla H_2(z_0) = (\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 + \delta_1, \frac{1}{3}\mu_1 + 2\delta_1, \delta_2, -\delta_1) \neq (0, 0, 0, 0)$, $\forall (\mu_1, \mu_2) \geq 0$, $\forall (\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R}^2$. D'où, les conditions suffisantes d'efficacité utilisant le concept de point vectoriel de Karush-Kuhn-Tucker et/ou celles qui utilisent le concept de convexité et/ou ses généralisations (quasi-convexité et pseudo-convexité) qui peuvent être obtenues par exemple à partir de Kim et al. [72] et Majumdar [81], ne sont pas applicables pour $(PMN1)$.
- Cependant, en utilisant la Proposition 1.4.1, on a F_1 est invexe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\eta_1(z, z_0) = \frac{9}{10}(xy + \frac{1}{3}y\sqrt{x+1} + x, \frac{1}{3}xy + \frac{1}{9}y\sqrt{x+1} + \frac{1}{3}x, 0, 0)$, F_2 est invexe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\eta_2(z, z_0) = (-2xy + x, 0, 0, 0)$ et alors $F = (F_1, F_2)$ est invexe en z_0 sur Z_0 par rapport à $(\eta_i)_{i=1,2}$. H_1 est infine

en z_0 sur Z_0 par rapport à $\phi_1(z, z_0) = \frac{1}{6}(-2ux + x + 2y - v, -4ux + 2x + 4y - 2v, 0, 2ux - x - 2y + v)$ et H_2 est infime en z_0 sur Z_0 par rapport à $\phi_2(z, z_0) = (0, 0, u(-x^2 + 2xy - 2x + 1) + vy, 0)$. De plus, pour $(\mu_1, \mu_2) = (2, 1)$ et $(\delta_1, \delta_2) = (-2, 1)$, on a $\mu_1[\nabla F_1(z_0)]^t \eta_1(z, z_0) + \mu_2[\nabla F_2(z_0)]^t \eta_2(z, z_0) + \delta_1[\nabla H_1(z_0)]^t \phi_1(z, z_0) + \delta_2[\nabla H_2(z_0)]^t \phi_2(z, z_0) = xy + \frac{2}{3}y\sqrt{x+1} + \frac{5}{2}x \geq 0, \forall z \in Z_0$. Donc, d'après le Théorème 3.6.4, on conclut que $z_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, 0, 0, 0)$ est proprement efficace pour $(PMN1)$ et, par le Théorème 3.4.2, il en résulte que $(x_0, y_0) = (0, 0)$ est proprement efficace pour $(PBMN1)$.

Notons que les hypothèses du Théorème 3.6.1 qui utilise la condition de type Fritz John (3.11) sont satisfaites. Ceci permet seulement de conclure que $z_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, 0, 0, 0)$ est une solution faiblement efficace pour le problème $(PMN1)$ et, par le Théorème 3.4.2, il en résulte que $(x_0, y_0) = (0, 0)$ est une solution faiblement efficace pour $(PBMN1)$.

3.7 Étude d'un problème bi-niveaux multi-objectifs linéaire $(PBML)$

Dans cette section, nous étudions le cas où le problème du niveau supérieur est un problème d'optimisation multi-objectifs linéaire et le niveau inférieur est un problème d'optimisation scalaire linéaire. Ainsi, nous considérons le problème bi-niveaux multi-objectifs linéaire suivant :

$$(PBML) \begin{cases} \min_{x \in X} \bar{F}(x, y) = (c_1^t x + d_1^t y, \dots, c_q^t x + d_q^t y), \\ \text{s.c } \min_{y \in Y} \bar{f}(x, y) = c^t x + d^t y, \\ \bar{g}(x, y) = Ax + By - \alpha \leq 0, \end{cases}$$

où $x \in X \subseteq \mathbb{R}_{\geq}^n$, $y \in Y \subseteq \mathbb{R}_{\geq}^m$, $c_i \in \mathbb{R}^n$, $d_i \in \mathbb{R}^m$, $i \in Q$, $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $\alpha \in \mathbb{R}^p$.

3.7.1 Reformulation de (PBML)

Le problème $(PMN)_{kkt}$ correspondant à (PBML) est donné comme suit :

$$(PMN)'_{kkt} \left\{ \begin{array}{l} \min_{x,y,u,v} \bar{F}(x,y) = (c_1^t x + d_1^t y, \dots, c_q^t x + d_q^t y), \\ \text{s.c } \sum_{l=1}^n a_{jl} x_l + \sum_{s=1}^m b_{js} y_s - \alpha_j \leq 0, \quad j \in P, \\ \sum_{j=1}^p b_{js} u_j - v_s + d_s = 0, \quad s \in \{1, \dots, m\}, \\ \sum_{j=1}^p u_j \left(- \sum_{l=1}^n a_{jl} x_l - \sum_{s=1}^m b_{js} y_s + \alpha_j \right) + \sum_{s=1}^m v_s y_s = 0, \\ x \in X, y \in Y, u \in \mathbb{R}_{\geq}^p, v \in \mathbb{R}_{\geq}^m, \end{array} \right.$$

où u, v sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux conditions de KKT du niveau inférieur pour chaque $x \in X$ fixé.

En posant $z = (x, y, u, v) \in Z = X \times Y \times \mathbb{R}_{\geq}^p \times \mathbb{R}_{\geq}^m \subseteq \mathbb{R}_{\geq}^N$, $N = n + 2m + p$, $F_i(z) = \bar{F}_i(x, y) = c_i^t x + d_i^t y$, $i \in Q$, $G_j(z) = \bar{g}_j(x, y) = \sum_{l=1}^n a_{jl} x_l + \sum_{s=1}^m b_{js} y_s - \alpha_j$, $j \in P$, $H_s(z) = \sum_{j=1}^p b_{js} u_j - v_s + d_s$, $s \in \{1, \dots, m\}$ et $H_{m+1}(z) = \sum_{j=1}^p u_j \left(- \sum_{l=1}^n a_{jl} x_l - \sum_{s=1}^m b_{js} y_s + \alpha_j \right) + \sum_{s=1}^m v_s y_s$, le problème $(PMN)'_{kkt}$ qui est un problème de programmation multi-objectifs sous des contraintes d'égalités et d'inégalités donné comme suit :

$$(PMN)' \left\{ \begin{array}{l} \min_z F(z) = (F_1(z), \dots, F_q(z)), \\ \text{s.c } G_j(z) \leq 0, \quad j \in P, \\ H_k(z) = 0, \quad k \in M, \\ z \in Z \subseteq \mathbb{R}_{\geq}^N, \end{array} \right.$$

où $F_i : Z \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in Q$, $G_j : Z \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in P$, $H_k : Z \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in M$, $Z_0 = \{z \in Z : G_j(z) \leq 0, j \in P, H_k(z) = 0, k \in M\}$ est l'ensemble de toutes les solutions réalisables de $(PMN)'$.

3.7.2 Conditions suffisantes d'efficacité

Notons que les conditions suffisantes d'efficacité du problème (PMN) présentés dans la Section 3.6 sont aussi applicables pour le problème $(PMN)'$. Puisque le problème du niveau inférieur $(PNI)_x$ de $(PBML)$ est linéaire, alors évidemment toutes les conditions suffisantes d'efficacité de $(PMN)'$ sont aussi suffisantes pour le problème $(PBML)$. On a toute fonction linéaire $\psi(z)$ dans $(PMN)'$ est invexe (alors (faiblement) pseudo-invexe et quasi-invexe) en z_0 sur Z_0 par rapport à $\eta(z, z_0) = z - z_0$. Donc, les conditions suffisantes d'efficacité correspondantes au problème $(PMN)'$ prennent les formes simplifiées suivantes.

Théorème 3.7.1. [23] Soit $z_0 \in Z_0$ et supposons que :

1. pour tout $j \in J(z_0)$, G_j est strictement quasi-invexe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\theta_j : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$;
2. pour tout $k \in M$, H_k est infixe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\phi_k : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$.

S'il existe $(\mu, \lambda, \delta) \in \mathbb{R}_{\geq}^q \times \mathbb{R}_{\geq}^{J_0} \times \mathbb{R}^{m+1}$, $(\mu, \lambda) \neq 0$ tel que $(z_0, \mu, \lambda, \delta, (\eta_i)_i, (\theta_j)_j, (\phi_k)_k)$ satisfait la condition

$$\sum_{i=1}^q \mu_i [\nabla F_i(z_0)]^t (z - z_0) + \sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j [\nabla G_j(z_0)]^t \theta_j(z, z_0) + \sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \phi_k(z, z_0) \geq 0, \forall z \in Z_0, \quad (3.31)$$

alors z_0 est une solution faiblement efficace pour le problème $(PMN)'$.

Théorème 3.7.2. [23] Soit $z_0 \in Z_0$ et supposons que il existe $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^q$ tel que $\sum_{i=1}^q \mu_i F_i$

est strictement pseudo-invexe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\eta : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$ et il existe $\delta \in \mathbb{R}^{m+1}$ tel que $\sum_{k=1}^{m+1} \delta_k H_k$ est infixe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\phi : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$.

S'il existe un vecteur $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^{J_0}$ tel que $(z_0, \mu, \lambda, \delta, \eta, \phi)$ satisfait la condition

$$\sum_{i=1}^q \mu_i [\nabla F_i(z_0)]^t \eta(z, z_0) + \sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j [\nabla G_j(z_0)]^t (z - z_0) + \sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \phi(z, z_0) \geq 0, \forall z \in Z_0, \quad (3.32)$$

alors z_0 est une solution efficace pour le problème $(PMN)'$.

Théorème 3.7.3. [23] Soit $z_0 \in Z_0$ et supposons pour tout $k \in M$, H_k est infime en z_0 sur Z_0 par rapport à $\phi_k : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$. S'il existe des vecteurs $\mu \in \mathbb{R}_{>}^q$ (resp. $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^q$), $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^{J_0}$ et $\delta \in \mathbb{R}^{m+1}$ tels que $(z_0, \mu, \lambda, \delta, (\phi_k)_k)$ satisfait la condition

$$\sum_{i=1}^q \mu_i [\nabla F_i(z_0)]^t (z - z_0) + \sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j [\nabla G_j(z_0)]^t (z - z_0) + \sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \phi_k(z, z_0) \geq 0, \forall z \in Z_0, \quad (3.33)$$

alors z_0 est une solution proprement efficace (resp. faiblement efficace) pour $(PMN)'$.

Théorème 3.7.4. [23] Soit $z_0 \in Z_0$ et supposons que il existe $\delta \in \mathbb{R}^{m+1}$ tels que $\sum_{k=1}^{m+1} \delta_k H_k$ est infime en z_0 sur Z_0 par rapport à $\phi : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$. S'il existe des vecteurs $\mu \in \mathbb{R}_{>}^q$ (resp. $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^q$) et $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^{J_0}$ tel que $(z_0, \mu, \lambda, \delta, \phi)$ satisfait la condition

$$\sum_{i=1}^q \mu_i [\nabla F_i(z_0)]^t (z - z_0) + \sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j [\nabla G_j(z_0)]^t (z - z_0) + \sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \phi(z, z_0) \geq 0, \forall z \in Z_0, \quad (3.34)$$

alors z_0 est une solution proprement efficace (resp. faiblement efficace) pour $(PMN)'$.

3.7.3 Exemple d'application

Nous donnons un exemple d'un problème de programmation bi-niveaux multi-objectifs linéaire (*PBML2*) dans lequel une solution appropriée efficace sera obtenue après la reformulation du problème (*PBML2*) en un problème à un seul niveau multi-objectifs (*PMN2*)' et le Théorème 3.7.3 sera utilisé. Toutefois, en raison de la présence des fonctions non convexes (ni pseudo-convexes et ni quasi-convexes) dans le problème (*PMN2*)' et qu'aucune contrainte de qualification usuelle ne soit satisfaite pour (*PMN2*)' et, de plus, un point considéré z_0 comme un point réalisable ne peut pas être un point vectoriel de Karush-Kuhn-Tucker, il sera impossible d'appliquer dans ce contexte les conditions suffisantes d'efficacité utilisant ce concept et/ou ceux consacrés à la convexité ou (la convexité généralisée) pour conclure sur l'efficacité de z_0 pour (*PMN2*)' et ensuite pour (*PBML2*).

Exemple 3.7.1. [23] Considérons le problème bi-niveaux multi-objectifs linéaire suivant :

$$(PBMN2) \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}_{\geq}} \bar{F}(x, y) = (2x + y, -x + y), \\ \text{s.c } \min_{y \in \mathbb{R}_{\geq}} \bar{f}(x, y) = x + y - 1, \\ \bar{g}_1(x, y) = 3x - 2y \leq 0, \\ \bar{g}_2(x, y) = x + y - 2 \leq 0. \end{cases}$$

En utilisant les conditions KKT pour le problème du niveau inférieur, on obtient le problème multi-objectifs suivant :

$$(PMN2)'_{kkt} \begin{cases} \min_{x, y, u, v, w} \bar{F}(x, y) = (2x + y, -x + y), \\ \text{s.c } 3x - 2y \leq 0, \\ x + y - 2 \leq 0, \\ -2u + v - w + 1 = 0, \\ u(-3x + 2y) + v(-x - y + 2) + wy = 0, \\ x \in \mathbb{R}_{\geq}, y \in \mathbb{R}_{\geq}, u \in \mathbb{R}_{\geq}, v \in \mathbb{R}_{\geq}, w \in \mathbb{R}_{\geq}, \end{cases}$$

où u, v et w sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux conditions KKT du problème du niveau inférieur pour chaque $x \in \mathbb{R}_{\geq}$ fixé. En posant $z = (x, y, u, v, w)$, $F(z) = \bar{F}(x, y)$, $G_1(z) = \bar{g}_1(x, y)$, $G_2(z) = \bar{g}_2(x, y)$, $H_1(z) = \nabla_y \bar{f}(x, y) + u \nabla_y \bar{g}_1(x, y) + v \nabla_y \bar{g}_2(x, y) - w$ et $H_2 = -u \bar{g}_1(x, y) - v \bar{g}_2(x, y) + wy$, le problème $(PMN2)'_{kkt}$ peut être écrit comme suit :

$$(PMN2)' \begin{cases} \min_z F(z) = (2x + y, -x + y), \\ \text{s.c } G_1(z) = 3x - 2y \leq 0, \\ G_2(z) = x + y - 2 \leq 0, \\ H_1(z) = -2u + v - w + 1 = 0, \\ H_2(z) = u(-3x + 2y) + v(-x - y + 2) + wy = 0, \\ z \in \mathbb{R}_{\geq}^5, \end{cases}$$

où $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}_{\geq}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G = (G_1, G_2) : \mathbb{R}_{\geq}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $H = (H_1, H_2) : \mathbb{R}_{\geq}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$. $Z_0 = \{z = (x, y, u, v, w) \in \mathbb{R}_{\geq}^5 : 3x - 2y \leq 0, x + y - 2 \leq 0, -2u + v - w + 1 = 0, u(-3x + 2y) + v(-x - y + 2) + wy = 0\}$ est l'ensemble de toutes les solutions réalisables du problème $(PMN2)'$. Soit $z_0 = (0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0)$ une solution réalisable du problème $(PMN2)'$.

- On a la fonction H n'est pas quasi-convexe en z_0 (et aussi ni pseudo-convexe et ni convexe) (il suffit de prendre $z = (\frac{4}{5}, \frac{6}{5}, 1, 1, 0) \in Z_0$). De plus, on a z_0 n'est

pas un point vectoriel de Karush-Kuhn-Tucker du problème $(PMN2)'$ car la condition de Karush-Kuhn-Tucker en z_0 prend la forme

$\mu_1 \nabla F_1(z_0) + \mu_2 \nabla F_2(z_0) + \lambda_1 \nabla G_1(z_0) + \delta_1 \nabla H_1(z_0) + \delta_2 \nabla H_2(z_0) = (2\mu_1 - \mu_2 + 3\lambda_1 - \frac{3}{2}\delta_2, \mu_1 + \mu_2 - 2\lambda_1 + \delta_2, -2\delta_1, \delta_1 + 2\delta_2, -\delta_1) \neq (0, 0, 0, 0, 0), \forall (\mu_1, \mu_2) \geq 0, \forall \lambda \geq 0, \forall (\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R}^2$. Donc, les conditions suffisantes d'efficacité utilisant ce concept et/ou ceux qui utilisent le concept de convexité et/ou ses généralisations (quasi-convexité et pseudo-convexité) qui peuvent être obtenues, par exemple, à partir de Kim et al. [72] et Majumdar [81], ne sont pas applicables pour $(PMN2)'$. Pour $\phi_1(z, z_0) = (z - z_0)$ et en utilisant la Proposition 1.4.1, on obtient H_2 est infime en z_0 sur Z_0 par rapport à $\phi_2(z, z_0) = \frac{4}{29}(\frac{-3}{2}H_2(z), H_2(z), 0, 2H_2(z), 0)$. De plus, pour $(\mu_1, \mu_2) = (1, 2), \lambda_1 = 1$ et $(\delta_1, \delta_2) = (-1, 3)$, on a $\mu_1[\nabla F_1(z_0)]^t(z - z_0) + \mu_2[\nabla F_2(z_0)]^t(z - z_0) + \lambda_1[\nabla G_1(z_0)]^t(z - z_0) + \delta_1[\nabla H_1(z_0)]^t\phi_1(z, z_0) + \delta_2[\nabla H_2(z_0)]^t\phi_2(z, z_0) = 3x + y \geq 0, \forall z \in Z_0$. Donc, par le Théorème 3.7.3, on conclut que $z_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0, w_0) = (0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0)$ est une solution proprement efficace pour $(PMN2)'$, et puisque $(PBML2)$ est équivalent au problème $(PMN2)'$, il en résulte que $(x_0, y_0) = (0, 0)$ est une solution proprement efficace pour $(PBML2)$.

3.8 Étude de cas mixte

A partir des deux cas étudiés précédemment, on peut déduire des conditions suffisantes pour le cas mixte. Nous considérons deux cas : lorsque le problème du niveau supérieur est multi-objectifs linéaire et le niveau inférieur est scalaire non linéaire et le cas où le problème du niveau supérieur est multi-objectifs non linéaire et celui du niveau inférieur est scalaire linéaire.

3.8.1 Le niveau supérieur linéaire et le niveau inférieur non linéaire

On suppose que le problème du niveau supérieur est linéaire et celui du niveau inférieur non linéaire. Donc le problème $(PBMN)$ s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \min_{x \in X} \bar{F}(x, y) = (c_1^t x + d_1^t y, \dots, c_q^t x + d_q^t y), \\ \text{s.c } \min_{y \in Y} \bar{f}(x, y), \\ \bar{g}(x, y) \leq 0, \end{cases} \quad (3.35)$$

Le problème $(PMN)_{kkt}$ correspondant au problème (3.35) est donné comme suit :

$$(PMN)_{kkt1} \begin{cases} \min_{x, y, u, v} \bar{F}(x, y) = (c_1^t x + d_1^t y, \dots, c_q^t x + d_q^t y), \\ \text{s.c } \bar{g}(x, y) \leq 0, \\ \nabla_y \bar{f}(x, y) + u^t \nabla_y \bar{g}(x, y) = 0, \\ u^t \bar{g}(x, y) = 0, \\ x \in X, y \in Y, u \in \mathbb{R}_{\geq}^p, \end{cases}$$

où u est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associé aux conditions KKT du problème du niveau inférieur.

En posant $z = (x, y, u, v) \in Z = X \times Y \times \mathbb{R}_{\geq}^p \times \mathbb{R}_{\geq}^m \subseteq \mathbb{R}_{\geq}^N$, $N = n + 2m + p$, $F_i(z) = \bar{F}_i(x, y) = c_i^t x + d_i^t y$, $i = 1, \dots, q$, $G(z) = \bar{g}(x, y)$, $H_s(z) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y_s}(z) + \sum_{t=1}^p u_t \frac{\partial \bar{g}_t}{\partial y_s}(z) = 0$

pour tout $s = 1, \dots, m$ et $H_{m+1}(z) = \sum_{t=1}^p u_t \bar{g}_t(z) = 0$, le problème $(PMN)_{kkt1}$ s'écrit comme suit :

$$(PMN)_1 \begin{cases} \min_z F(z) = (F_1(z), \dots, F_q(z)), \\ \text{s.c } G_j(z) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p, \\ H_k(z) = 0, \quad k = 1, \dots, m + 1, \\ z \in Z \subseteq \mathbb{R}_{\geq}^N, \end{cases}$$

où $F_i : Z \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, q$, $G_j : Z \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, p$, $H_k : Z \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m + 1$, $Z_0 = \{z \in Z : G_j(z) \leq 0, j = 1, \dots, p, H_k(z) = 0, k = 1, \dots, m + 1\}$ est l'ensemble de toutes les solutions réalisables de $(PMN)_2$.

3.8.1.1 Conditions suffisantes d'efficacité

Des conditions suffisantes d'efficacité de $(PMN)_1$ sont déduites à partir des conditions suffisantes d'efficacité de (PMN) .

Théorème 3.8.1. *Soit $z_0 \in Z_0$ et supposons :*

1. *pour tout $j \in J(z_0)$, G_j est strictement quasi-invexe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\theta_j : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$;*
2. *pour tout $k = 1, \dots, m + 1$, H_k est infixe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\phi_k : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$.*

S'il existe $(\mu, \lambda, \delta) \in \mathbb{R}_{\geq}^q \times \mathbb{R}_{\geq}^{J_0} \times \mathbb{R}^{m+1}$, $(\mu, \lambda) \neq 0$ tel que $(z_0, \mu, \lambda, \delta, (\theta_j)_j, (\phi_k)_k)$ satisfait la condition

$$\sum_{i=1}^q \mu_i [\nabla F_i(z_0)]^t (z - z_0) + \sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j [\nabla G_j(z_0)]^t \theta_j(z, z_0) + \sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \phi(z, z_0) \geq 0, \forall z \in Z_0, \quad (3.36)$$

alors z_0 est une solution faiblement efficace pour $(PMN)_1$.

Théorème 3.8.2. *Soit $z_0 \in Z_0$ et supposons :*

1. *il existe $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^{J_0}$ tel que $\sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j G_j$ est quasi-invexe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\theta : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$;*
2. *il existe $\delta \in \mathbb{R}^{m+1}$ tel que $\sum_{k=1}^{m+1} \delta_k H_k$ est infixe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\phi : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$.*

S'il existe un vecteur $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^q$ (resp. $\mu \in \mathbb{R}_{>}^q$) tel que $(z_0, \mu, \lambda, \delta, \theta, \phi)$ satisfait la condition

$$\sum_{i=1}^q \mu_i [\nabla F_i(z_0)]^t (z - z_0) + \sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j [\nabla G_j(z_0)]^t \theta(z, z_0) + \sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \phi(z, z_0) \geq 0, \forall z \in Z_0, \quad (3.37)$$

alors z_0 est une solution faiblement efficace (resp. proprement efficace) pour $(PMN)_1$.

3.8.2 Le niveau supérieur non linéaire et le niveau inférieur linéaire

Reconsidérons le problème ($PBMN$), en supposant que le problème du niveau inférieur est linéaire.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in X} \bar{F}(x, y) = (\bar{F}_1(x, y), \dots, \bar{F}_q(x, y)), \\ \text{s.c } \min_{y \in Y} \bar{f}(x, y) = c^t x + d^t y, \\ \bar{g}(x, y) = Ax + By - \alpha \leq 0, \end{array} \right. \quad (3.38)$$

où $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, $y \in Y \subseteq \mathbb{R}_{\geq}^m$, $c_i \in \mathbb{R}^n$, $d_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, q$, $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $\alpha \in \mathbb{R}^p$.

Le problème (PMN) $_{kkt}$ correspondant au problème (3.38) est donné comme suit :

$$(PMN)_{kkt2} \left\{ \begin{array}{l} \min_{x, y, u, v} \bar{F}(x, y) = (\bar{F}_1(x, y), \dots, \bar{F}_q(x, y)), \\ \text{s.c } \sum_{l=1}^n a_{jl} x_l + \sum_{s=1}^m b_{js} y_s - \alpha_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, p, \\ \sum_{j=1}^p b_{js} u_j - v_s + d_s = 0, \quad s = 1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^p u_j \left(- \sum_{l=1}^n a_{jl} x_l - \sum_{s=1}^m b_{js} y_s + \alpha_j \right) + \sum_{s=1}^m v_s y_s = 0, \\ x \in X, y \in Y, u \in \mathbb{R}_{\geq}^p, v \in \mathbb{R}_{\geq}^m, \end{array} \right.$$

où u, v sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux conditions de KKT du problème du niveau inférieur pour chaque $x \in X$ fixé.

En prenant $z = (x, y, u, v) \in Z = X \times Y \times \mathbb{R}_{\geq}^p \times \mathbb{R}_{\geq}^m \subseteq \mathbb{R}_{\geq}^N$, $N = n + 2m + p$, $F_i(z) = \bar{F}_i(x, y)$, $i = 1, \dots, q$, $G(z) = \sum_{l=1}^n a_{jl} x_l + \sum_{s=1}^m b_{js} y_s - \alpha_j \leq 0$, $j = 1, \dots, p$, $H_s(z) = \sum_{j=1}^p b_{js} u_j - v_s + d_s = 0$, $s = 1, \dots, m$ et $H_{m+1}(z) = \sum_{j=1}^p u_j \left(- \sum_{l=1}^n a_{jl} x_l - \sum_{s=1}^m b_{js} y_s + \alpha_j \right) + \sum_{s=1}^m v_s y_s = 0$, le problème (PMN) $_{kkt2}$ qui est un problème multi-objectifs non linéaire avec des contraintes d'égalités et d'inégalités

peut être écrit comme suit :

$$(PMN)_2 \begin{cases} \min_z F(z) = (F_1(z), \dots, F_q(z)), \\ \text{s.c } G_j(z) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p, \\ \quad H_k(z) = 0, \quad k = 1, \dots, m+1, \\ z \in Z \subseteq \mathbb{R}_{\geq}^N, \end{cases}$$

où $F_i : Z \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, q$, $G_j : Z \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, p$, $H_k : Z \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m+1$, $Z_0 = \{z \in Z : G_j(z) \leq 0, j = 1, \dots, p, H_k(z) = 0, k = 1, \dots, m+1\}$ est l'ensemble de toutes les solutions réalisables de $(PMN)_2$.

3.8.2.1 Conditions suffisantes d'efficacité

Les conditions suffisantes d'efficacité du problème $(PMN)_2$ sont données dans le théorème suivant :

Théorème 3.8.3. *Soit $z_0 \in Z_0$ et supposons que :*

1. F est invexe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\eta_i : Z_0 \times Z_0 \rightarrow \mathbb{R}^N$, $i \in Q$;
2. pour tout $k \in M$, H_k est infixe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\phi_k : Z_0 \times Z_0 \rightarrow \mathbb{R}^N$.

S'il existe des vecteurs $\mu \in \mathbb{R}_{>}^q$, $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^{J_0}$ et $\delta \in \mathbb{R}^{m+1}$ tels que $(z_0, \mu, \lambda, \delta, (\eta_i)_i, (\phi_k)_k)$ satisfait la condition condition

$$\sum_{i=1}^q \mu_i [\nabla F_i(z_0)]^t \eta_i(z, z_0) + \sum_{j \in J(z_0)} \lambda_j [\nabla G_j(z_0)]^t (z - z_0) + \sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \phi_k(z, z_0) \geq 0, \quad \forall z \in Z_0, \quad (3.39)$$

alors z_0 est une solution proprement efficace pour le problème $(PMN)_2$.

Remarque 3.8.1. Notons que les Théorèmes 3.6.1 et 3.6.3 restent vrais pour le problème $(PMN)_2$, mais ne sont pas simplifiables.

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié un problème de programmation bi-niveaux multi-objectifs au niveau supérieur $(PBMN)$. L'approche KKT a été utilisée pour transformer le problème $(PBMN)$ en un problème à un seul niveau multi-objectifs

sous des contraintes d'égalités et d'inégalités (PMN). Des relations entre les deux problèmes ($PBMN$) et (PMN) ont été obtenues concernant l'ensemble des solutions (faiblement ou proprement) efficaces globales, notamment lorsque le problème du niveau inférieur est convexe et il satisfait la contrainte de qualification de Slater pour n'importe quelle décision du niveau supérieur. Par la suite, nous avons établi des conditions nécessaires d'efficacité de type Fritz John, ainsi que des conditions suffisantes d'efficacité pour qu'un point réalisable pour le problème (PMN) soit (faiblement ou proprement) efficace globale pour le problème (PMN) sous des hypothèses d'invexités généralisées. Puisque, les ensembles des solutions (faiblement ou proprement) efficaces globales des problèmes ($PBMN$) et (PMN) coïncident, alors des conditions nécessaires et suffisantes d'efficacité du problème ($PBMN$) découlent de celles du problème (PMN). De plus, les cas linéaire et mixte ont été traités et des conditions suffisantes d'efficacité ont été déduites. Afin d'illustrer les résultats obtenus, nous avons donné un exemple pour le cas non linéaire et un autre pour le cas linéaire.

Efficacité globale pour les problèmes bi-niveaux multi-objectifs fractionnaires sous des conditions d'invexité généralisée

4.1 Introduction

La programmation fractionnaire provient du fait que les modèles de la programmation pourraient mieux répondre aux problèmes réels si l'on considère l'optimisation de rapport entre les quantités physiques ou économiques. Des études bibliographiques révèlent de larges applications de la programmation fractionnaire dans différents domaines allant de l'ingénierie à l'économie, voir par exemple les références [14, 104].

Récemment, des études remarquables ont été réalisées dans le domaine de la programmation bi-niveaux multi-objectifs fractionnaire. Saraj et Safaei [103, 102] et Youness et al. [129] ont utilisé une même approche qui combine la méthode de série de Taylor ainsi que les conditions de Karush-Kuhn-Tucker pour étudier un problème bi-niveaux multi-objectifs fractionnaire. Dans chaque papier, un exemple numérique illustratif a été donné pour tester la performance du procédé de recherche de la solution proposée. D'autre part, Emam [51] a étudié un problème bi-niveaux multi-objectifs fractionnaire en nombre entier et il a proposé une approche interactive pour résoudre le problème considéré. D'autres études sur les problèmes bi-niveaux multi-objectifs fractionnaires peuvent être trouvées par exemple dans Dey et Pramanik [47], Saraj

et Sadeghi [101] et Lachhwani [75].

Dans ce chapitre, nous considérons un problème de programmation bi-niveaux multi-objectifs fractionnaire non linéaire ($PBMFN$) où le niveau supérieur est un problème d'optimisation multi-objectifs fractionnaire et le niveau inférieur est un problème d'optimisation quadratique scalaire. Le problème ($PBMFN$) se transforme en un problème multi-objectifs fractionnaire non linéaire équivalent ($PMFN$) en utilisant les conditions KKT associées au problème du niveau inférieur. Nous étudions le problème obtenu et nous établissons des conditions nécessaires d'efficacité de type Fritz John et suffisantes d'efficacité de type (Fritz John) pour qu'un point réalisable de ($PMFN$) corresponde à une solution (faiblement) efficace du problème bi-niveaux ($PBMFN$) sous des hypothèses d'invexité généralisée et des fonctions infines. Pour illustrer les résultats obtenus, nous donnons un exemple simple.

4.2 Étude d'un problème bi-niveaux multi-objectifs fractionnaire ($PBMFN$)

Considérons le problème bi-niveaux multi-objectifs fractionnaire suivant :

$$(PBMFN) \begin{cases} \min_{x \in X} \frac{\bar{F}(x,y)}{\bar{G}(x,y)} = \left(\frac{\bar{F}_1(x,y)}{\bar{G}_1(x,y)}, \dots, \frac{\bar{F}_q(x,y)}{\bar{G}_q(x,y)} \right), \\ \text{s.c } \min_{y \in Y} \bar{f}(x,y) = \frac{1}{2}y^t \bar{Q}y + y^t \bar{D}x + d^t y, \\ \bar{g}(x,y) = Ax + By \leq \alpha, \end{cases}$$

où X (resp. Y) est un ensemble ouvert non vide de \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{R}_{\geq}^m), $x \in X$, $y \in Y$ sont les décisions des niveaux supérieur et inférieur respectivement. $\bar{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est une matrice symétrique semi-définie positive, $\bar{D} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $d \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times m}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^p$. \bar{F} , $\bar{G} : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^q$, $\bar{f} : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ et $\bar{g} : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^p$.

De plus, on suppose que \bar{F} , \bar{G} sont des fonctions différentiables sur $X \times Y$ et $\bar{F}_i(x,y) \geq 0$, $\bar{G}_i(x,y) > 0$ pour tout $x \in X$, $y \in Y$ et pour chaque $i \in Q = \{1, \dots, q\}$. Soit S le domaine des contraintes du problème ($PBMFN$), RI la région induite du problème ($PBMFN$) et $\bar{S}(x)$ l'ensemble des solutions optimales du problème du niveau inférieur pour une décision x fixé du niveau supérieur.

Ensuite, nous donnons les définitions suivantes pour le problème ($PBMFN$).

Définition 4.2.1. [24] Un point $(x_0, y_0) \in S$ est dit solution faiblement efficace pour $(PBMFN)$, si $y_0 \in \bar{S}(x_0)$ et il n'existe pas $(x, y) \in RI$ tel que

$$\frac{\bar{F}_i(x, y)}{\bar{G}_i(x, y)} < \frac{\bar{F}_i(x_0, y_0)}{\bar{G}_i(x_0, y_0)}, \quad \forall i \in Q.$$

Définition 4.2.2. [24] Un point $(x_0, y_0) \in S$ est dit solution efficace pour $(PBMFN)$, si $y_0 \in \bar{S}(x_0)$ et il n'existe pas $(x, y) \in RI$ tel que pour un certain $\rho \in Q$,

$$\frac{\bar{F}_\rho(x, y)}{\bar{G}_\rho(x, y)} < \frac{\bar{F}_\rho(x_0, y_0)}{\bar{G}_\rho(x_0, y_0)}, \quad \frac{\bar{F}_i(x, y)}{\bar{G}_i(x, y)} \leq \frac{\bar{F}_i(x_0, y_0)}{\bar{G}_i(x_0, y_0)}, \quad \forall i \in Q, i \neq \rho.$$

4.3 Reformulation de $(PBMFN)$ en un problème multi-objectifs fractionnaire

En utilisant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) associées au problème du niveau inférieur, pour un $x \in X$ fixé, et en se basant sur la position optimiste nous reformulons le problème $(PBMFN)$ en un problème multi-objectifs fractionnaire défini par :

$$(PMFN)_{kkt} \left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in X} \frac{\bar{F}(x, y)}{\bar{G}(x, y)} = \left(\frac{\bar{F}_1(x, y)}{\bar{G}_1(x, y)}, \dots, \frac{\bar{F}_q(x, y)}{\bar{G}_q(x, y)} \right), \\ \text{s. c } \sum_{l=1}^n a_{jl}x_l + \sum_{s=1}^m b_{js}y_s - \alpha_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, p, \\ \sum_{s=1}^m \bar{q}_{rs}y_s + \sum_{l=1}^n \bar{d}_{rl}x_l + \sum_{j=1}^p b_{rj}u_j + d_r - v_r = 0, \quad r = 1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^p u_j \left(- \sum_{l=1}^n a_{jl}x_l - \sum_{s=1}^m b_{js}y_s + \alpha_j \right) + \sum_{s=1}^m v_s y_s = 0, \\ x \in X, y \in \mathbb{R}_{\geq}^m, u \in \mathbb{R}_{\geq}^p, v \in \mathbb{R}_{\geq}^m, \end{array} \right.$$

où u, v sont des multiplicateurs de Lagrange associés aux conditions de KKT du problème du niveau inférieur.

En posant $z = (x, y, u, v) \in Z = X \times \mathbb{R}_{\geq}^m \times \mathbb{R}_{\geq}^p \times \mathbb{R}_{\geq}^m \subset \mathbb{R}^N$, $N = n + 2m + p$, $\frac{F_i(z)}{G_i(z)} = \frac{\bar{F}_i(x, y)}{\bar{G}_i(x, y)}$, $i \in Q$, $T_j(z) = \bar{g}_j(x, y)$, $j \in \{1, \dots, p\}$, $H_r(z) = \sum_{s=1}^m \bar{q}_{rs}y_s + \sum_{l=1}^n \bar{d}_{rl}x_l + \sum_{j=1}^p b_{rj}u_j + d_r - v_r$, $r = 1, \dots, m$ et $H_{m+1}(z) = \sum_{j=1}^p u_j \left(- \sum_{l=1}^n a_{jl}x_l - \sum_{s=1}^m b_{js}y_s + \alpha_j \right) + \sum_{s=1}^m v_s y_s$, le

problème $(PMFN)_{kkt}$ qui est un problème de programmation non linéaire multi-objectifs fractionnaire avec des contraintes d'égalités et d'inégalités, sera écrit sous la forme simplifiée donnée comme suit :

$$(PMFN) \begin{cases} \min_z \frac{F(z)}{G(z)} = \left(\frac{F_1(z)}{G_1(z)}, \dots, \frac{F_q(z)}{G_q(z)} \right), \\ \text{s. c } T_j(z) \leq 0, \quad j \in P = \{1, \dots, p\}, \\ \quad H_k(z) = 0, \quad k \in M = \{1, \dots, m+1\}, \\ \quad z \in Z, \end{cases}$$

où $F_i, G_i, T_j, H_k : Z \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in Q$, $j \in P$ et $k \in M$. $Z \subset \mathbb{R}^N$ est un ensemble non vide, $Z_0 = \{z \in Z : T_j(z) \leq 0, j \in P, H_k(z) = 0, k \in M\}$ est l'ensemble de toutes les solutions réalisables de $(PMFN)$. Pour $z_0 \in Z$, on note par $J(z_0)$ l'ensemble $\{j \in P : T_j(z_0) = 0\}$, par $\tilde{J}(z_0)$ l'ensemble $\{j \in P : T_j(z_0) < 0\}$ et $J_0 = |J(z_0)|$ est le cardinal de $J(z_0)$. Par hypothèse dans le problème $(PBMFN)$, on a $F_i(z) \geq 0$, $G_i(z) > 0$ pour tout $z \in Z_0$ et chaque $i \in Q$.

Nous rappelons le concept de solutions localement faiblement efficaces pour le problème $(PMFN)$.

Définition 4.3.1. [97] Un point $z_0 \in Z_0$ est dit solution localement faiblement efficace pour $(PMFN)$, s'il n'existe pas $z \in V(z_0) \cap Z_0$, où $V(z_0)$ est un voisinage de z_0 , tel que

$$\frac{F_i(z)}{G_i(z)} < \frac{F_i(z_0)}{G_i(z_0)}, \quad \forall i \in Q. \quad (4.1)$$

Les concepts d'efficacité globale pour le problème $(PMFN)$ sont définis comme suit.

Définition 4.3.2. [97] Un point $z_0 \in Z_0$ est dit solution faiblement efficace pour $(PMFN)$, s'il n'existe pas $z \in Z_0$ telle que la relation (4.1) est satisfaite.

Définition 4.3.3. [97] Un point $z_0 \in Z_0$ est dit solution efficace pour $(PMFN)$, s'il n'existe pas $z \in Z_0$ tel que pour un certain $\rho \in Q$,

$$\frac{F_\rho(z)}{G_\rho(z)} < \frac{F_\rho(z_0)}{G_\rho(z_0)}, \quad \frac{F_i(z)}{G_i(z)} \leq \frac{F_i(z_0)}{G_i(z_0)}, \quad \forall i \in Q, i \neq \rho.$$

4.4 Conditions nécessaires d'efficacité

Avant de donner des conditions nécessaires d'efficacité pour le problème (PMFN), nous avons besoin de démontrer le lemme suivant :

Lemme 4.4.1. [24] *Supposons que*

- (i) z_0 est une solution (localement) faiblement efficace pour (PMFN) ;
- (ii) $F_i, G_i, i \in Q, H_k, k \in M$ sont différentiables en z_0 et il existe des fonctions vectorielles $\eta_i : Z_0 \times Z \rightarrow \mathbb{R}^N, \theta_i : Z_0 \times Z \rightarrow \mathbb{R}^N, i \in Q, \phi_j : Z_0 \times Z \rightarrow \mathbb{R}^N, j \in J(z_0)$ et $\psi_k : Z_0 \times Z \rightarrow \mathbb{R}^N, k \in M$ satisfaisant en z_0 par rapport à $\eta : Z_0 \times Z \rightarrow \mathbb{R}^N$ les inégalités suivantes,

$$[\nabla F_i(z_0)]^t \eta(z, z_0) \leq [\nabla F_i(z_0)]^t \eta_i(z, z_0), \quad \forall z \in Z_0, \quad \forall i \in Q, \quad (4.2)$$

$$[\nabla G_i(z_0)]^t \eta(z, z_0) \geq [\nabla G_i(z_0)]^t \theta_i(z, z_0), \quad \forall i \in Q, \quad (4.3)$$

$$[\nabla T_j(z_0)]^t \eta(z, z_0) \leq [\nabla T_j(z_0)]^t \phi_j(z, z_0), \quad \forall z \in Z_0, \quad \forall j \in J(z_0), \quad (4.4)$$

$$[\nabla H_k(z_0)]^t \eta(z, z_0) = [\nabla H_k(z_0)]^t \psi_k(z, z_0), \quad \forall z \in Z_0, \quad \forall k \in M. \quad (4.5)$$

Alors le système des inégalités

$$[\nabla F_i(z_0)]^t \eta_i(z, z_0) < 0, \quad i \in Q, \quad (4.6)$$

$$[\nabla G_j(z_0)]^t \theta_i(z, z_0) \geq 0, \quad i \in Q, \quad (4.7)$$

$$[\nabla T_j(z_0)]^t \phi_j(z, z_0) \leq 0, \quad j \in J(z_0), \quad (4.8)$$

$$[\nabla H_k(z_0)]^t \psi_k(z, z_0) = 0, \quad k \in M, \quad (4.9)$$

n'admet de solution $z \in Z_0$.

Preuve. Soit $z_0 \in Z_0$ une solution localement faiblement efficace pour (PMFN) et supposons qu'il existe $\tilde{z} \in Z_0$ vérifiant les inégalités (4.6)-(4.9).

Pour $i \in Q$, soit $\varphi_{F_i}(z_0, \tilde{z}, \tau) = F_i(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) - F_i(z_0)$.

On remarque que cette fonction s'annule pour $\tau = 0$ et, en utilisant les inégalités (4.2) et (4.6), on obtient : $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \tau^{-1} [\varphi_{F_i}(z_0, \tilde{z}, \tau) - \varphi_{F_i}(z_0, \tilde{z}, 0)] = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \tau^{-1} [F_i(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) - F_i(z_0)] = [\nabla F_i(z_0)]^t \eta(\tilde{z}, z_0) \leq [\nabla F_i(z_0)]^t \eta_i(\tilde{z}, z_0) < 0$, il en résulte que,

pour $i \in Q$, $\varphi_{F_i}(z_0, \tilde{z}, \tau) < 0$ si τ est dans un intervalle ouvert $(0, \delta_{F_i})$, $\delta_{F_i} > 0$.

Ainsi, pour tout $i \in Q$,

$$F_i(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) < F_i(z_0), \quad \tau \in (0, \delta_{F_i}).$$

De même, en utilisant (4.3) avec (4.7), (4.4) avec (4.8) et (4.5) avec (4.9), on obtient

$$\begin{aligned} G_i(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) &\geq G_i(z_0), \quad \tau \in (0, \delta_{G_i}), \quad \forall i \in Q, \\ T_j(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) &\leq T_j(z_0) = 0, \quad \tau \in (0, \delta_{T_j}), \quad \forall j \in J(z_0), \\ H_k(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) &= H_k(z_0) = 0, \quad \tau \in (0, \delta_{H_k}), \quad \forall k \in M, \end{aligned}$$

où pour tout $i \in Q$, $\delta_{G_i} > 0$, pour tout $j \in J(z_0)$, $\delta_{T_j} > 0$ et pour tout $k \in M$, $\delta_{H_k} > 0$.

Puisque pour tout $j \in \tilde{J}(z_0)$, $T_j(z_0) < 0$ et T_j est continue en z_0 , donc, il existe $\delta_j > 0$ tel que

$$T_j(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) < 0, \quad \tau \in (0, \delta_j), \quad \forall j \in \tilde{J}(z_0).$$

Soit $\delta_0 = \min\{\delta_{F_i}, \delta_{G_i}, i \in Q, \delta_{T_j}, j \in J(z_0), \delta_{H_k}, k \in M, \delta_j, j \in \tilde{J}(z_0)\}$. Alors

$$(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) \in V_{\delta_0}(z_0), \quad \tau \in (0, \delta_0), \quad (4.10)$$

où $V_{\delta_0}(z_0)$ est un voisinage de z_0 . Maintenant, pour tout $\tau \in (0, \delta_0)$ on a

$$F_i(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) < F_i(z_0), \quad i \in Q, \quad (4.11)$$

$$G_i(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) \geq G_i(z_0), \quad i \in Q, \quad (4.12)$$

$$T_j(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) \leq 0, \quad j \in P, \quad (4.13)$$

$$H_k(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) = 0, \quad k \in M. \quad (4.14)$$

De (4.10), (4.13) et (4.14), on obtient $(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) \in V_{\delta_0}(z_0) \cap Z_0$, pour tout $\tau \in (0, \delta_0)$.

En utilisant (4.11), (4.12) et $F \geq 0$, $G > 0$, pour $R(z) = (\frac{F_1(z)}{G_1(z)}, \dots, \frac{F_q(z)}{G_q(z)})$, on obtient

$$R(z_0 + \tau\eta(\tilde{z}, z_0)) < R(z_0),$$

ce qui contredit l'hypothèse que z_0 est une solution (localement) faiblement efficace pour $(PMFN)$. Donc, il n'existe pas $z \in Z_0$ satisfaisant le système (4.6)-(4.9), donc le lemme est démontré.

Théorème 4.4.1. [24] (conditions nécessaires de type Fritz John) Supposons que

- (i) z_0 est une solution faiblement efficace pour (PMFN) ;
- (ii) $F_i, G_i, i \in Q, H_k, k \in M$ sont différentiables en z_0 et il existe des fonctions vectorielles $\eta_i : Z_0 \times Z \rightarrow \mathbb{R}^N, i \in Q, \theta_i : Z_0 \times Z \rightarrow \mathbb{R}^N, i \in Q, \phi_j : Z_0 \times Z \rightarrow \mathbb{R}^N, j \in J(z_0)$ et $\psi_k : Z_0 \times Z \rightarrow \mathbb{R}^N, k \in M$ vérifiant en z_0 par rapport à $\eta : Z_0 \times Z \rightarrow \mathbb{R}^N$ les inégalités (4.2)-(4.5) ;
- (iii) soit $\hat{F}(z) = ([\nabla F_i(z_0)]^t \eta_i(z, z_0), i \in Q) \in \mathbb{R}^q, \hat{G}(z) = (-[\nabla G_i(z_0)]^t \theta_i(z, z_0), i \in Q, [\nabla T_j(z_0)]^t \phi_j(z, z_0), j \in J(z_0)) \in \mathbb{R}^{q+J_0}$ et $\hat{H}(z) = ([\nabla H_k(z_0)]^t \psi_k(z, z_0), k \in M) \in \mathbb{R}^{m+1}$ où la fonction $(\hat{F}, \hat{G}, \hat{H})$ est $(\mathbb{R}_{\geq}^q \times \mathbb{R}_{\geq}^{q+J_0} \times 0)$ -preconvexlike de z sur Z_0 .

Alors il existe $(\mu, \lambda, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}_{\geq}^q \times \mathbb{R}_{\geq}^q \times \mathbb{R}_{\geq}^{J_0} \times \mathbb{R}^{m+1}, (\mu, \lambda, \gamma, \delta) \neq 0$ tel que $(z_0, \mu, \lambda, \gamma, \delta)$ satisfait

$$\sum_{i=1}^q \mu_i [\nabla F_i(z_0)]^t \eta_i(z, z_0) - \sum_{i=1}^q \lambda_i [\nabla G_i(z_0)]^t \theta_i(z, z_0) + \sum_{j \in J(z_0)} \gamma_j [\nabla T_j(z_0)]^t \phi_j(z, z_0) + \sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \psi_k(z, z_0) \geq 0, \forall z \in Z_0. \quad (4.15)$$

Preuve. Si les conditions (i) et (ii) sont satisfaites, alors, d'après le Lemme 4.4.1 le système (4.6)-(4.9) n'admet pas de solution pour $z \in Z_0$. D'après l'hypothèse (iii), la fonction $(\hat{F}, \hat{G}, \hat{H})(z) = ([\nabla F_i(z_0)]^t \eta_i(z, z_0), i \in Q, -[\nabla G_i(z_0)]^t \theta_i(z, z_0), i \in Q, [\nabla T_j(z_0)]^t \phi_j(z, z_0), j \in J(z_0), [\nabla H_k(z_0)]^t \psi_k(z, z_0), k \in M)$ est $(\mathbb{R}_{\geq}^q \times \mathbb{R}_{\geq}^{q+J_0} \times 0)$ -preconvexlike de z sur Z_0 , donc, du Théorème 3.5.1, il existe $(\mu, \lambda, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}_{\geq}^q \times \mathbb{R}_{\geq}^q \times \mathbb{R}_{\geq}^{J_0} \times \mathbb{R}^{m+1}, (\mu, \lambda, \gamma, \delta) \neq 0$ tel que la relation (4.15) est satisfaite, ce qui correspond aux conditions nécessaires d'efficacité de type Fritz John.

Puisque pour tous les $x \in X$ fixés, le problème du niveau inférieur est convexe et ses contraintes sont linéaires, alors nous avons les solutions (faiblement) efficaces globales du problème (PMFN) correspondent aux solutions (faiblement) efficaces globales du problème (PBMFN).

Théorème 4.4.2. [24] (conditions nécessaires de type Fritz John) Supposons que (x_0, y_0) est une solution faiblement efficace pour (PBMFN). Si les conditions (ii)

et (iii) du Théorème 4.4.1 sont satisfaites, alors il existe $(\mu, \lambda, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}_{\geq}^q \times \mathbb{R}_{\geq}^q \times \mathbb{R}_{\geq}^{J_0} \times \mathbb{R}^{m+1}$, $(\mu, \lambda, \gamma, \delta) \neq 0$ tel que $(x_0, y_0, \mu, \lambda, \gamma, \delta)$ satisfait la relation (4.15).

4.5 Conditions suffisantes d'efficacité

Dans cette section, nous établissons des conditions suffisantes d'efficacité de type (Fritz John) pour qu'un point réalisable du problème (PMFN) corresponde à une solution (faiblement) efficace du problème bi-niveaux (PBMFN).

Théorème 4.5.1. [24] Soit $z_0 \in Z_0$ et supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^q$ ($\lambda_i = \frac{F_i(z_0)}{G_i(z_0)}$, $i \in Q$) tel que

1. $(F_1 - \lambda_1 G_1, \dots, F_q - \lambda_q G_q)$ est faiblement pseudo-invexe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\eta_i : Z_0 \times Z_0 \rightarrow \mathbb{R}^N$, $i \in Q$;
2. pour tout $j \in J(z_0)$, T_j est strictement quasi-invexe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\phi_j : Z_0 \times Z_0 \rightarrow \mathbb{R}^N$;
3. pour tout $k \in M$, H_k est infixe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\psi_k : Z_0 \times Z_0 \rightarrow \mathbb{R}^N$.

S'il existe un vecteur $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^q$, $\gamma \in \mathbb{R}_{\geq}^{J_0}$ et $\delta \in \mathbb{R}^{m+1}$, $(\mu, \gamma) \neq 0$ tels que

$$\sum_{i=1}^q \mu_i ([\nabla F_i(z_0)]^t \eta_i(z, z_0) - \lambda_i [\nabla G_i(z_0)]^t \eta_i(z, z_0)) + \sum_{j \in J(z_0)} \gamma_j [\nabla T_j(z_0)]^t \phi_j(z, z_0) + \sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \psi_k(z, z_0) \geq 0, \forall z \in Z_0, \quad (4.16)$$

alors z_0 est une solution faiblement efficace pour (PMFN).

Preuve. Supposons que z_0 n'est pas une solution faiblement efficace pour (PMFN).

Alors il existe une solution réalisable $z \in Z_0$ de (PMFN) tel que

$$\frac{F_i(z)}{G_i(z)} < \frac{F_i(z_0)}{G_i(z_0)}, \quad \forall i \in Q,$$

$$i.e., F_i(z) - \lambda_i G_i(z) < 0, \quad \forall i \in Q,$$

qui est équivalent à

$$[F_i(z) - \lambda_i G_i(z)] - [F_i(z_0) - \lambda_i G_i(z_0)] < 0, \quad \forall i \in Q.$$

D'après l'hypothèse $(F_1 - \lambda_1 G_1, \dots, F_q - \lambda_q G_q)$ est faiblement pseudo-invexe en z_0 sur Z_0 par rapport à $(\eta_i)_{i \in Q}$, il en résulte que

$$\exists \bar{z} \in Z_0, \nabla[F_i(z_0) - \lambda_i G_i(z_0)]^t \eta_i(\bar{z}, z_0) < 0, \forall i \in Q. \quad (4.17)$$

De la définition de l'ensemble $J(z_0)$ et puisque $\bar{z} \in Z_0$, on obtient pour tout $j \in J(z_0)$, $T_j(\bar{z}) - T_j(z_0) \leq 0$ et de l'hypothèse 2., il en résulte que

$$[\nabla T_j(z_0)]^t \phi_j(\bar{z}, z_0) < 0, \forall j \in J(z_0). \quad (4.18)$$

Comme $(\mu, \gamma) \geq 0$ et de (4.17) et (4.18), on a

$$\sum_{i=1}^q \mu_i \nabla[F_i(z_0) - \lambda_i G_i(z_0)]^t \eta_i(\bar{z}, z_0) + \sum_{j \in J(z_0)} \gamma_j [\nabla T_j(z_0)]^t \phi_j(\bar{z}, z_0) < 0. \quad (4.19)$$

Comme $\bar{z}, z_0 \in Z_0$ et de l'hypothèse 3., on a

$$\sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \psi_k(\bar{z}, z_0) = 0. \quad (4.20)$$

De (4.19) et (4.20), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^q \mu_i ([\nabla F_i(z_0)]^t \eta_i(\bar{z}, z_0) - \lambda_i [\nabla G_i(z_0)]^t \eta_i(\bar{z}, z_0)) + \sum_{j \in J(z_0)} \gamma_j [\nabla T_j(z_0)]^t \phi_j(\bar{z}, z_0) + \\ \sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \psi_k(\bar{z}, z_0) < 0, \end{aligned}$$

ce qui contredit (4.16). D'où z_0 est une solution faiblement efficace de (PMFN).

Théorème 4.5.2. [24] Soit $z_0 \in Z_0$ et on suppose qu'il existe $(\mu, \lambda, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}_{\geq}^q \times \mathbb{R}_{\geq}^q \times \mathbb{R}_{\geq}^{J_0} \times \mathbb{R}^{m+1}$ ($\lambda_i = \frac{F_i(z_0)}{G_i(z_0)}$, $i \in Q$), tels que

1. $\sum_{i=1}^q \mu_i (F_i - \lambda_i G_i)$ est faiblement pseudo-invexe en z_0 sur Z_0 par rapport à $\eta : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$;
2. $\sum_{k=1}^{m+1} \delta_k H_k$ est infime en z_0 sur Z_0 par rapport à $\psi : Z_0 \times Z_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$.

Si la condition suivante est satisfaite

$$\sum_{i=1}^q \mu_i ([\nabla F_i(z_0)]^t \eta(z, z_0) - \lambda_i [\nabla G_i(z_0)]^t \eta(z, z_0)) + \sum_{j \in J(z_0)} \gamma_j [\nabla T_j(z_0)]^t (z - z_0) + \sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \psi(z, z_0) \geq 0, \quad \forall z \in Z_0, \quad (4.21)$$

alors z_0 est une solution efficace pour (PMFN).

Preuve. Supposons que z_0 n'est pas une solution efficace pour (PMFN). Alors il existe une solution réalisable $z \in Z_0$ de (PMFN) tel que pour un certain $\rho \in Q$

$$\frac{F_\rho(z)}{G_\rho(z)} < \frac{F_\rho(z_0)}{G_\rho(z_0)} \text{ et } \frac{F_i(z)}{G_i(z)} \leq \frac{F_i(z_0)}{G_i(z_0)}, \quad \forall i \in Q, \quad i \neq \rho$$

$$i.e., \quad F_\rho(z) < \lambda_\rho G_\rho(z) \text{ et } F_i(z) \leq \lambda_i G_i(z), \quad \forall i \in Q, \quad i \neq \rho,$$

qui est équivalent à

$$F_\rho(z) - \lambda_\rho G_\rho(z) < F_\rho(z_0) - \lambda_\rho G_\rho(z_0), \quad (4.22)$$

$$F_i(z) - \lambda_i G_i(z) \leq F_i(z_0) - \lambda_i G_i(z_0), \quad \forall i \in Q, \quad i \neq \rho. \quad (4.23)$$

Puisque $\mu > 0$, de (4.22) et (4.23) on obtient

$$\sum_{i=1}^q \mu_i (F_i(z) - \lambda_i G_i(z)) - \sum_{i=1}^q \mu_i (F_i(z_0) - \lambda_i G_i(z_0)) < 0. \quad (4.24)$$

De (4.24) et de l'hypothèse 1., on a

$$\exists \bar{z} \in Z_0, \quad \sum_{i=1}^q \mu_i ([\nabla F_i(z_0)]^t - \lambda_i [\nabla G_i(z_0)]^t) \eta(\bar{z}, z_0) < 0. \quad (4.25)$$

On a T_j est linéaire pour tout $j \in J(z_0)$ et donc T_j est invexe par rapport à $(z - z_0)$. De la définition de $J(z_0)$ et $\bar{z} \in Z_0$, on obtient pour tout $j \in J(z_0)$, $T_j(\bar{z}) - T_j(z_0) \leq 0$ et de l'invexité de T_j avec $\gamma \geq 0$, il résulte que

$$\sum_{j \in J(z_0)} \gamma_j [\nabla T_j(z_0)]^t (z - z_0) \leq 0. \quad (4.26)$$

Puisque \bar{z} et z_0 sont réalisables et de l'hypothèse 2., on a

$$\sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \psi(\bar{z}, z_0) = 0. \quad (4.27)$$

De (4.25), (4.26) et (4.27), on obtient

$$\sum_{i=1}^q \mu_i \left([\nabla F_i(z_0)]^t \eta(\bar{z}, z_0) - \lambda_i [\nabla G_i(z_0)]^t \eta(\bar{z}, z_0) \right) + \sum_{j \in J(z_0)} \gamma_j [\nabla T_j(z_0)]^t (\bar{z} - z_0) + \sum_{k=1}^{m+1} \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \psi(\bar{z}, z_0) < 0,$$

ce qui contredit (4.21). Donc z_0 est une solution efficace pour $(PMFN)$.

Remarque 4.5.1. [24] Il est facile de voir que si on ajoute l'hypothèse 2. du Théorème 4.5.1 pour le Théorème 4.5.2 et nous remplaçons la condition (4.21) par la condition (4.16), le Théorème 4.5.2 reste vrai.

Puisque pour tout $x \in X$ fixé, le problème du niveau inférieur est convexe et ses contraintes sont linéaires, alors on a les solutions (faiblement) efficaces globales du problème $(PMFN)$ coïncident avec les solutions (faiblement) efficaces globales du problème $(PBMFN)$. Donc du Théorème 4.5.1 et Théorème 4.5.2, on déduit des conditions suffisantes de type (Fritz John) pour qu'un point réalisable pour $(PMFN)$ correspond à une solution (faiblement) efficace pour $(PBMFN)$.

Afin d'illustrer ces conditions suffisantes d'efficacité, on donne l'exemple suivant.

4.6 Exemple numérique

L'exemple suivant est donné pour illustrer les résultats trouvés dans la section précédente.

Exemple 4.6.1. [24] Considérons le problème bi-niveaux multi-objectifs fractionnaire suivant :

$$(PBMFN1) \begin{cases} \min_{x \geq 0} \frac{\bar{F}(x,y)}{\bar{G}(x,y)} = \left(\frac{x^3+x+y}{2x+y+1}, \frac{x}{y^2+2} \right), \\ \text{s.c } \min_{y \geq 0} \bar{f}(x,y) = y^2 - 2xy + y, \\ \bar{g}(x,y) = 2x - y \leq 0. \end{cases}$$

En utilisant les conditions KKT associées au problème du niveau inférieur, nous obtenons un problème multi-objectifs à un seul niveau fractionnaire donné comme suit :

$$(PMFN1)_{kkt} \begin{cases} \min_{x,y,u,v} \frac{\bar{F}(x,y)}{\bar{G}(x,y)} = \left(\frac{x^3+x+y}{2x+y+1}, \frac{x}{y^2+2} \right), \\ \text{s.c } 2x - y \leq 0, \\ \quad -2x + 2y - u - v + 1 = 0, \\ \quad u(-2x + y) + vy = 0, \\ \quad x, y, u, v \geq 0, \end{cases}$$

où u, v sont des multiplicateurs de Lagrange associés aux conditions KKT de problème du niveau inférieur pour chaque $x \in \mathbb{R}_{\geq}$ fixé. En posant $z = (x, y, u, v)$, $\frac{F_i(z)}{G_i(z)} = \frac{\bar{F}_i(x,y)}{\bar{G}_i(x,y)}$, $i = 1, 2$, $T(z) = \bar{g}(x, y)$, $H_1(z) = \nabla_y \bar{f}(x, y) + u \nabla_y \bar{g}(x, y) - v$ et $H_2(z) = -u \nabla_y \bar{g}(x, y) + vy$, le problème $(PMFN1)_{kkt}$ peut être écrit comme suit :

$$(PMFN1) \begin{cases} \min_z \frac{F(z)}{G(z)} = \left(\frac{x^3+x+y}{2x+y+1}, \frac{x}{y^2+2} \right), \\ \text{s.c } T(z) = 2x - y \leq 0, \\ \quad H_1(z) = -2x + 2y - u - v + 1 = 0, \\ \quad H_2(z) = u(-2x + y) + vy = 0, \\ \quad z \in \mathbb{R}_{\geq}^4, \end{cases}$$

où $F_i, G_i, T, H_k : \mathbb{R}_{\geq}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2$. $Z_0 = \{z \in \mathbb{R}_{\geq}^4 : T(z) \leq 0, H_k(z) = 0, k = 1, 2\}$ est l'ensemble de toutes les solutions réalisables de $(PMFN1)$. Soit $z_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, 0, 1, 0) \in Z_0$ une solution réalisable pour $(PMFN1)$. On a

- pour $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$ et $(\mu_1, \mu_2) = (1, \frac{1}{2})$, $\hat{F}(z) - \hat{F}(z_0) = \sum_{i=1}^2 [\mu_i (F_i(z) - \lambda_i G_i(z))] - \sum_{i=1}^2 [\mu_i (F_i(z_0) - \lambda_i G_i(z_0))] = x^3 + \frac{3}{2}x + y \geq 0$, $\forall z \in Z_0$, et alors \hat{F} est faiblement pseudo-invexe en z_0 par rapport à n'importe quelle fonction $\eta : \mathbb{R}_{\geq}^4 \times \mathbb{R}_{\geq}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ en particulier par rapport à $\eta(z, z_0) = (y, x^2, 0, 0)$;
- pour $(\delta_1, \delta_2) = (-2, 3)$, $H(z) = \sum_{k=1}^2 \delta_k H_k(z) = 4x - 4y + 2u + 2v + 3u(-2x + y) + 3vy - 2$ est infime par rapport à $\psi(z, z_0) = \frac{1}{13} (-2H(z), -H(z), 2H(z), 2H(z))$ en utilisant la Proposition 1.4.1;
- la condition (4.21) est satisfaite pour $(\lambda_1, \lambda_2), (\mu_1, \mu_2), (\delta_1, \delta_2)$ et $\gamma = 1$, et elle prend la forme $\sum_{i=1}^2 \mu_i ([\nabla F_i(z_0)]^t \eta(z, z_0) - \lambda_i [\nabla G_i(z_0)]^t \eta(z, z_0)) + \gamma [\nabla T(z_0)]^t (z - z_0) \geq 0$.

$$z_0) + \sum_{k=1}^2 \delta_k [\nabla H_k(z_0)]^t \psi(z, z_0) = x^2 + 2x + \frac{1}{2}y \geq 0, \forall z \in Z_0.$$

Donc, d'après le Théorème 4.5.2, on conclut que $z_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, 0, 1, 0)$ est une solution efficace pour $(PMFN1)$, et il en résulte que $(x_0, y_0) = (0, 0)$ est une solution efficace pour $(PBMFN1)$.

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié un problème de programmation bi-niveaux dans lequel la fonction objectif du niveau supérieur est vectorielle fractionnaire non linéaire, la fonction objectif du niveau inférieur est quadratique scalaire et la région réalisable commune est déterminée par des contraintes d'inégalités linéaires. En utilisant les conditions de Kuhn-Tucker (KKT) associées au problème du niveau inférieur, le problème $(PBMFN)$ a été transformé en un problème à un seul niveau multi-objectifs fractionnaire avec des contraintes d'égalités et d'inégalités $(PMFN)$. Comme le problème du niveau inférieur est convexe et ses contraintes sont linéaires pour tout x fixé, alors on a l'ensemble de solutions (faiblement) efficaces globales de $(PMFN)$ coïncide avec l'ensemble de solutions (faiblement) efficaces globales de $(PBMFN)$. Nous avons établi des conditions nécessaires d'efficacité globales de type Fritz John pour le problème $(PBMFN)$ sans utiliser aucune contrainte de qualification. De plus, nous avons obtenu des conditions suffisantes d'efficacité globales de type (Fritz John) pour qu'un point réalisable du problème $(PMFN)$ correspond à une solution (faiblement) efficace du problème $(PBMFN)$ sous des hypothèses d'invexité généralisée et des fonctions infines. Pour l'illustration des résultats obtenus un exemple numérique a été donné.

Conclusion générale

Les problèmes de programmation bi-niveaux sont des problèmes d'optimisation dans lesquels deux décideurs doivent optimiser leurs fonctions objectifs et pour lesquels un ordre hiérarchique existe. Chaque décideur vise à optimiser sa fonction objectif, mais il est influencé par les actions de l'autre. Le premier décideur (niveau supérieur ou leader) déclare sa décision en anticipant éventuellement sur la réaction du deuxième décideur (niveau inférieur ou suiveur). Et ce dernier doit choisir une décision qui tient compte de celle du leader. Bien que le leader a la priorité dans la prise de décision, mais il ne peut évaluer l'efficacité de son choix qu'après l'annonce de la décision du suiveur.

Les problèmes bi-niveaux multi-objectifs sont des problèmes bi-niveaux dont l'une au moins des fonctions objectifs du niveau supérieur et du niveau inférieur est vectorielle. Ces problèmes sont de plus en plus étudiés dans la littérature en raison de leurs divers applications pratiques dans plusieurs domaines.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés spécifiquement aux problèmes de programmation bi-niveaux multi-objectifs au niveau supérieur. En particulier, notre intérêt s'est surtout porté sur l'étude des conditions d'efficacité globales pour ces problèmes. Pour cela, nous avons considéré d'une part un problème de programmation bi-niveaux optimiste non linéaire (*PBMN*), où le niveau supérieur est un problème d'optimisation vectoriel et le niveau inférieur est un problème d'optimisation scalaire. Pour effectuer cette étude, nous nous sommes amenés à considérer deux étapes. Dans la première étape, en se basant sur l'approche de Karush-Kuhn-Tucker, nous avons transformé le problème (*PBMN*) en un problème à un seul niveau multi-objectifs non linéaire avec des contraintes d'égalités et d'inégalités (*PMN*). Des

relations entre les problèmes $(PBMN)$ et (PMN) ont été établies et, en particulier, nous avons montré sous des conditions appropriées de convexité et de contrainte de qualification que les ensembles des solutions (faiblement ou proprement) efficaces globales des problèmes $(PBMN)$ et (PMN) coïncident. Dans la seconde étape, nous avons étudié le problème obtenu après transformation (PMN) et nous avons prouvé des conditions nécessaires d'efficacité de type Fritz John pour (PMN) et donc pour $(PBMN)$ sans utilisation d'aucune contrainte de qualification. Par ailleurs, nous avons obtenu des conditions suffisantes d'efficacité de type (Fritz John) pour qu'un point réalisable de (PMN) corresponde à une solution (faiblement ou proprement) efficace du problème bi-niveaux $(PBMN)$ sous différentes formes d'invexité généralisée et de fonctions infines. D'autre part, nous avons généralisé ces résultats en considérant d'autres problèmes bi-niveaux multi-objectifs impliquant des fonctions linéaires, quadratiques, et/ou fractionnaires. Plusieurs exemples numériques ont été donnés pour l'illustration des résultats obtenus. Il y a lieu de signaler que c'est la première fois dans la littérature que des concepts d'invexité généralisée ont été utilisés pour l'étude des problèmes de programmation bi-niveaux.

A l'issue de ce travail nous avons dégagé plusieurs perspectives de recherche qui peuvent être exploitées dans des travaux futurs. Parmi ces perspectives, nous citons :

1. Elaboration de méthodes numériques de calcul de solutions (faiblement ou proprement) efficaces des problèmes bi-niveaux multi-objectifs au niveau supérieur.
2. Étude des conditions d'efficacité d'un problème bi-niveaux multi-objectifs au niveau supérieur avec d'autres approches telles que l'approche de la valeur optimale du problème du niveau inférieur.
3. Étude des problèmes bi-niveaux semi-vectoriels sous des conditions d'invexité généralisée.
4. Étude des problèmes bi-niveaux multi-objectifs en considérant la position pessimiste.
5. Étude des problèmes bi-niveaux multi-objectifs (fractionnaires) non différentiables sous des conditions d'invexité généralisée.
6. Exploration des problèmes pratiques pouvant être modélisés sous forme de problèmes bi-niveaux multi-objectifs (fractionnaires).

Bibliographie

- [1] G.B. Allende and G. Still. Solving bilevel programs with the KKT-approach. *Math. Program. Ser A.*, 138 :309–332, (2013).
- [2] M.J. Alves. *Using MOPSO to solve multiobjective bilevel linear problems*. M. Dorigo et al. (Eds.) : ANTS 2012, LNCS 7461 :332-339, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2012).
- [3] M.J. Alves, S. Dempe, and J.J. Júdice. Computing the Pareto frontier of a bi-objective bilevel linear problem using a multiobjective mixed-integer programming algorithm. *Optimization*, 61(3) :335-358, (2012).
- [4] G. Anandalingam and T.L. Friesz. Hierarchical optimization : An introduction. *Ann. Oper. Res.*, 34 :1-11, (1992).
- [5] G. Anandalingam and D.J. White. A penalty function approach for solving bilevel linear programming. *J. Glob. Optim.*, 3 :397-419, (1993).
- [6] Z. Ankhili and A. Mansouri. An exact penalty on bilevel programs with linear vector optimization lower level. *European J Oper Res.*, 197 :36-41, (2009).
- [7] T. Antczak. Optimality and duality for nonsmooth multiobjective programming problems with V-r-invexity. *J. Glob Optim.*, 45 :319–334, (2009).
- [8] C. Audet, G. Savard, and W. Zghal. New branch and cut algorithm for bilevel linear programming. *Technical report, Département de mathématiques et de génie industriel. Ecole polytechnique de Montréal*, (2004).
- [9] J.F. Bard. An algorithm for solving the general bilevel programming problem. *Math. Oper. Res.*, 8(2) :260-272, (1983).

- [10] J.F. Bard. *Practical bilevel optimization : Algorithms and applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1998).
- [11] J.F. Bard and J.E. Falk. An explicit solution to the multi-level programming. *Comput. Oper. Res.*, 9(1) :77-100, (1982).
- [12] J.F. Bard and J.T. Moore. A branch and bound algorithm for the bilevel programming problem. *SIAM J. Statist. Sci. Comput.*, 11(2) :281-292, (1990).
- [13] M.S. Bazaraa, H.D. Sherali, and C.M. Shetty. *Nonlinear programming : Theory and algorithmes*. Wiley, New York, Third Edition, (2006).
- [14] M. Bazine, A. Bennani, and N. Gadhi. Fuzzy optimality conditions for fractional multiobjective bi-level problems under fractional constraints. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 32(2) :126-141, (2011).
- [15] A. Ben-Israel and B. Mond. What is invexity? *J. Aust. Math. Soc. Ser. B*, 28 :1-9, (1986).
- [16] W.F. Bialas and M.H. Karwan. On two level optimization. *IEEE Transaction Automatic control*, 25(1) :211-215, (1982).
- [17] H. Bonnel. Optimality conditions for the semivectorial bilevel optimization problem. *Pac. J. Optim.*, 2(3) :447-467, (2006).
- [18] H. Bonnel and J. Morgan. Semivectorial bilevel optimization problem : Penalty approach. *J. Optim Theory Appl.*, 131(3) :365-382, (2006).
- [19] K. Bouibed, H. Slimani, and M.S. Radjef. Multiobjective bilevel optimization problem under generalized invexity. *Colloque International sur l'Optimisation et les Systèmes d'Information (COSI 2014) du 08 au 10 Juin 2014, Bejaia, Algérie. Actes du Colloque 227-238*, (2014).
- [20] K. Bouibed, H. Slimani, and M.S. Radjef. Necessary and sufficient optimality conditions for multiobjective bilevel optimization problem. *Congrès des Mathématiciens Algériens CMA '2014, du 11 au 13 Mai 2014, Tlemcen, Algérie*, (2014).
- [21] K. Bouibed, H. Slimani, and M.S. Radjef. Multiobjective fractional bilevel programming problem under generalized invexity. *International Conference Of Modelling, Computation and Optimization in Information Systems and Management Sciences (MCO2015) du 11 au 15 Mai 2015, Metz, France*, (2015).

- [22] K. Bouibed, H. Slimani, and M.S. Radjef. Efficiency conditions for multiobjective bilevel optimization problem under generalized invexity. *International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRA-PAM2016) du 19 au 23 Mai 2016, Bodrum-Mugla, TURKEY*, (2016).
- [23] K. Bouibed, H. Slimani, and M.S. Radjef. Global efficiency for multiobjective bilevel programming problems under generalized invexity. *J. Appl. Math. Comput.* DOI 10.1007/s12190-015-0979-2, (2016).
- [24] K. Bouibed, H. Slimani, M.S. Radjef, and M. Aidene. Multiobjective fractional bilevel programming problem under generalized invexity. *Soumis à Appl. Math.*, Mars, (2016).
- [25] J. Bracken and J.T. McGill. Mathematical programs with optimization problems in the constraints. *Oper. Res.*, 21 :37-44, (1973).
- [26] H.I. Calvete and C. Galé. The bi-level linear/linear fractional programming problem. *European J. Oper. Res.*, 114 (1) :188-197, (1999).
- [27] H.I. Calvete and C. Galé. Linear bilevel programs with multiple objectives at the upper level. *J. Comput. Appl. Math.*, 234 :950-959, (2010).
- [28] H.I. Calvete and C. Galé. Linear bilevel programs with multiple objectives at the upper level. *J. Comput Appl Math.*, 234 :950-959, (2011).
- [29] W. Candeler and R. Townsley. A linear two level programming problem. *Comput. Oper. Res.*, 9 :59-76, (1982).
- [30] W. Candler and R. Norton. Multilevel programming. *Technical Report 20, World Bank Development Research Center, Washington D.C.*, (1977).
- [31] Y. Chen and M. Florian. The nonlinear bilevel programming problem : formulation, regularity and optimality conditions. *Optimization*, 32 :193-309, (1995).
- [32] B.D. Craven. Invex functions and constrained local minima. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 24 :357-366, (1981).
- [33] B. Dandurand, P. Guarneri, G.M. Fadel, and M.M. Wiecek. Bilevel multiobjective packaging optimization for automotive design. *Struct Multidisc Optim.*, 50 :663-682, (2014).

- [34] S. Dempe. *Foundations of bilevel programming*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, (2002).
- [35] S. Dempe. Annotated bibliography on bilevel programming and mathematical programs with equilibrium constraints. *Optimization*, 52 :333-359, (2003).
- [36] S. Dempe and J. Dutta. Is bilevel programming a special case of a mathematical program with complementarity constraints. *Math. Program. Ser. A*, 131 :37-48, (2012).
- [37] S. Dempe, J. Dutta, and B.S. Mordukhovich. New necessary optimality conditions in optimistic bilevel programming. *Optimization*, 56 :577-604, (2007).
- [38] S. Dempe and N. Gadhi. Optimality results for a specific bilevel optimization problem. *Optimization*, 60(7) :813-822, (2011).
- [39] S. Dempe and N. Gadhi. Optimality results for a specific bilevel optimization problem. *Optimization*, 60(7) :813-822, (2011).
- [40] S. Dempe and N. Gadhi. A new equivalent single-level problem for bilevel problems. *Optimization*, 63(5) :789-798, (2012).
- [41] S. Dempe, N. Gadhi, and A.B. Zemkoho. New optimality conditions for the semivectorial bilevel optimization problem. *J. Optim Theory Appl.*, DOI 10.1007/s10957-012-0161-z, (2012).
- [42] S. Dempe, V. Kalashnikov, G.A. Pérez-Valdés, and N. Kalashnykova. Bilevel programming problems : Theory, algorithms and applications to energy networks. *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, (2015).
- [43] S. Dempe, B.S. Mordukhovich, and A.B. Zemkoho. Necessary optimality conditions in pessimistic bilevel programming. *Optimization*, 63(4) :505-533, (2014).
- [44] S. Dempe and M. Pilecka. Necessary optimality conditions for optimistic bilevel programming problems using set-valued programming. *J Glob Optim.*, 61 :769-788, (2015).
- [45] S. Dempe and A.B. Zemkoho. The bilevel programming problem : reformulations, constraint qualifications and optimality conditions. *Math. Program., Ser. A*, 138 :447-473, (2013).

- [46] P.P. Dey and S. Pramanik. Goal programming approach to linear fractional bilevel programming problem based on Taylor series approximation. *Int. J. Pure Appl. Sci. Technol.*, 6(2) :115-123, (2011).
- [47] P.P. Dey, S. Pramanik, and B.C. Giri. Topsis approach to linear fractional bi-level MODM problem based on fuzzy goal programming. *J. Ind. Eng. Int.* 10 :173-184, (2014).
- [48] W. Dinkelbach. On nonlinear fractional programming. *Manag. Sci.*, 137 :492-498, (1967).
- [49] K. Dutta and C.S. Lalitha. Bounded sets of KKT multipliers in vector optimization. *J. Glob Optim.*, 36 :425-437, (2006).
- [50] G. Eichfelder. Multiobjective bilevel optimization. *Math. Program. Ser. A*, 123(2) :419-449, (2010).
- [51] O.E. Emam. Interactive approach to bi-level integer multi-objective fractional programming problem. *Appl. Math. Comput.* 223 :17-24, (2013).
- [52] J.B.E. Etoa. *Optimisation hiérarchique : théorie, algorithmes et applications*. Editions Publibook, (2007).
- [53] J.B.E. Etoa. Solving quadratic convex bilevel programming problems using a smoothing method. *Appl. Math. Comput.*, 217 :6680-6690, (2011).
- [54] J.E. Falk and J. Liu. On bilevel programming, part I, general nonlinear case. *Math. Program.*, 70 :47-72, (1995).
- [55] N. Gadhi and S. Dempe. Necessary optimality conditions and a new approach to multiobjective bilevel optimization problems. *J. Global Optim. DOI* 10.1007/s10957-012-0046-1, (2012).
- [56] J. Gang, Y. Tu, B. Lev, J. Xu, W. Shen, and L. Yao. A multi-objective bi-level location planning problem for stone industrial parks. *Comput. Oper. Res.*, 56 :8-21, (2015).
- [57] E. Gebhardt and J. Jahn. Global solver for nonlinear bilevel vector optimization problems. *Pac. J. Optim.*, 5(3) :387-402, (2009).
- [58] A.M. Geoffrion. Proper efficiency and the theory of vector maximization. *J. Math. Anal. Appl.*, 22 :618-630, (1968).

- [59] W.J. Gutjahr and N. Dzubur. Bi-objective bilevel optimization of distribution center locations considering user equilibria. *Transportation Research Part E*, 85 :1–22, (2016).
- [60] M.A. Hanson. On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, 80 :545-550, (1981).
- [61] J.B. Hiriart-Urruty. *Math. Oper. Res.*, 4 :79-97, (1979).
- [62] J.B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal. *Convex analysis and minimization algorithms I*. Springer, Berlin, (1993).
- [63] R. Horst, P.M. Pardalos, and N.V. Thoai. Introduction to global optimization. *Kluwer Academic Publishers*, (2000).
- [64] B. Houska and M. Diehl. Nonlinear robust optimization via sequential convex bilevel programming. *Math. Program. Ser. A*, 142 :539-577, (2013).
- [65] R. Jagannathan. Duality for nonlinear fractional programs. *Zeitschrift fur Oper. Res.*, 17 :1-3, (1973).
- [66] V. Jeyakumar and B. Mond. On generalized convex mathematical programming. *J. Aust. Math. Soc. Ser.B* 34 :43–53, (1992).
- [67] Y. Jiang, X. Li, C. Huang, and X. Wu. An augmented Lagrangian multiplier method based on a CHKS smoothing function for solving nonlinear bilevel programming problems. *Knowledge-Based Systems*, 55 :9–14, (2014).
- [68] J.J. Júdice and A. Faustino. A sequential lcp method for bilevel linear programming., (1992).
- [69] J.J. Júdice and A. Faustino. The linear quadratic bilevel programming problem. *INFOR Inf. Syst. Oper. Res.*, 32 :87-98, (1994).
- [70] W. Karush. Minima of functions of several variables with inequalities as side conditions. *Master’s Thesis. Department of Mathematics, University of Chicago*, (1939).
- [71] R.N. Kaul and S. Kaur. Optimality criteria in nonlinear programming involving nonconvex functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 105 :104-112, (1985).

- [72] D.S. Kim, G.M. Lee, B.S. Lee, and Cho. Counterexample and optimality conditions in differentiable multiobjective programming. *J. Optim. Theory Appl.*, 109(1) :187-192, (2001).
- [73] B. Kohli. Optimality conditions for optimistic bilevel programming problem using convex factors. *J. Optim. Theory Appl.*, 152 :632-651, (2012).
- [74] H.W. Kuhn and A.W. Tucker. Nonlinear programming. *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, edited by J. Neyman, University of California Press, Berkeley, California, 481-492, (1951).
- [75] K. Lachhwani. Modified FGP approach for multi-level multi-objective linear fractional programming problems. *Appl. Math. Comput.*, 266(C) :1038-1049, (2015).
- [76] G.S. Liu, J.Y. Han, and J.Z. Zhang. Exact penalty functions for convex bilevel programming problems. *J. Glob Optim.*, 110(3) :621-643, (2001).
- [77] T. Lv, Q. Ai, and Y. Zhao. A bi-level multi-objective optimal operation of grid-connected microgrids. *Electric Power Systems Research*, 131 :60-70, (2016).
- [78] Y. Lv, Z. Chen, and Z. Wan. A neural network for solving a convex quadratic bilevel programming problem. *J. Comput. Appl. Math.*, 234 :505-511, (2010).
- [79] Y. Lv, T. Hu, G. Wang, and Z. Wan. A penalty function method based on Kuhn-Tucker condition for solving linear bilevel programming. *Appl. Math. Comput.*, 188 :808-813, (2007).
- [80] T. Maeda. Constraint qualifications in multiobjective optimization problems : Differentiable case I. *J. Optim. Theory Appl.*, 80(3) : 483-500, (1994).
- [81] A.A.K. Majumdar. Optimality conditions in differentiable multiobjective programming. *J. Optim Theory Appl.*, 92(2) :419-427, (1997).
- [82] O.L. Mangasarian. Nonlinear programming. *McGraw-Hill, New York*, (1969).
- [83] O.L. Mangasarian and S. Fromovitz. The Fritz John necessary optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints. *J. Math. Anal. Appl.*, 17 :37-47, (1967).

- [84] D.H. Martin. The essence of invexity. *J. Optim Theory Appl.*, 47 :65-76, (1985).
- [85] I. Marusciac. On Fritz John type optimality criterion in multiobjective optimization. *L'Analyse Numérique et la Théorie de L'Approximation* 11 :109-114, (1982).
- [86] Z. Meng, C. Dang, R. Shen, and M. Jiang. An objective penalty function of bilevel programming. *J. Optim Theory Appl.*, 153 :377-387, (2012).
- [87] A.G. Mersha and S. Dempe. Feasible direction method for bilevel programming problem. *Optimization*, 61(5) :597-616, (2012).
- [88] J. Mirrlees. The theory of moral hazard and unobservable behaviour-part I. *Rev. Econom. Stud.*, 66 :3-22, (1999).
- [89] S. Mishra. Weighting method for bi-level linear fractional programming problems. *European J. Oper. Res.*, 183 (1) :296-302, (2007).
- [90] S. Mishra and A. Ghosh. Interactive fuzzy programming approach to bi-level quadratic fractional programming problems. *Ann Oper. Res.*, 143 (1) :249-261, (2006).
- [91] S.K. Mishra, S.Y. Wang, and K.K. Lai. Optimality and duality for V-invex non-smooth multiobjective programming problems. *Optimization*, 57(5) :635-641, (2008).
- [92] B.S. Mordukhovich, N.M. Nam, and H.M. Phan. Variational analysis of marginal functions with applications to bilevel programming. *J Optim Theory Appl.*, 152 :557-586, (2012).
- [93] T.S. Motzkin. Beiträge zur theorie der linearen ungleichungen. *Inaugural Dissertation, Jerusalem, Israel*, (1936).
- [94] I. Nishizaki and M. Sakawa. Stackelberg solution to multiobjective two-level linear programming problems. *J. Optim Theory Appl.*, 103(1) :161-182, (1999).
- [95] R.A. Osuna-Gómez, A. Beato-Morero, and A. Rufián-Lizana. Generalized convexity in multiobjective programming. *J. Math. Anal. Appl.*, 233 :205-220, (1999).

- [96] R.A. Osuna-Gómez, A. Rufián-Lizana, and P. Ruíz-Canales. Inconvex functions and generalized convexity in multiobjective programming. *J. Optim Theory Appl.*, 98(3) :651-661, (1998).
- [97] R.A. Osuna-Gómez, A. Rufián-Lizana, and P. Ruíz-Canales. Multiobjective fractional programming with generalized convexity. *Top.*, 8(1) :97-110, (2000).
- [98] S. Ruuska, K. Miettinen, and M.M. Wiecek. Connections between single-level and bilevel multiobjective optimization. *J. Optim Theory Appl.*, 153(1) :60-74, (2012).
- [99] P. Sach, G.M. Lee, and D.S. Kim. Infine functions, nonsmooth alternative theorems and vector optimization problems. *J. Glob Optim.*, 27 :51-81, (2003).
- [100] M. Sakawa and I. Nishizaki. Interactive fuzzy programming for two-level linear fractional programming problem. *Fuzzy Sets Syst.*, 119 (1) :31-40, (2001).
- [101] M. Saraj and S. Sadeghi. Using fuzzy goal programming in solving quadratic bi-level fractional multi-objective programming problems. *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 7(1) :1-13, (2014).
- [102] M. Saraj and N. Safaei. Fuzzy linear fractional bi-level multi-objective programming problems. *Int. J. Appl. Math.*, 1 (4) :643-658, (2012).
- [103] M. Saraj and N. Safaei. A Taylor series approach for solving linear fractional decentralized bi-level multi-objective decision-making under fuzziness. *Int. J. Math. Comput.*, 5(1) :91-97, (2015).
- [104] S. Schaible. Fractional programming : applications and algorithms. *European J. Oper. Res.*, 7(2) :111-120, (1981).
- [105] H. Scheel and S. Scholtes. Mathematical programs with complementarity constraints : stationarity, optimality and sensitivity. *Math. Oper. Res.*, 26 :41-22, (2000).
- [106] X. Shi and H. Xia. Interactive bilevel multi-objective decision making. *J. Oper. Res. Society.*, 48 :943-949, (1997).
- [107] C. Singh. Optimality conditions in multiobjective differentiable programming. *J Optim Theory Appl.*, 53(1) :115-123, (1987).

- [108] H. Slimani. Optimalité et dualité dans les problèmes multi-objectifs sous des conditions d'invexité généralisée. *Thèse de Doctorat en Mathématiques Appliquées, Département de Recherche Opérationnelle, Université de Bejaia*, Juin (2009).
- [109] H. Slimani and M.S. Radjef. Duality for nonlinear programming under generalized Kuhn-Tucher condition. *Int. J. Optim. Theory Methods Appl.*, 01 :75-86, (2009).
- [110] H. Slimani and M.S. Radjef. *Multiobjective programming under generalized invexity : Optimality, Duality, Applications*. LAP Lambert Academic Publishing Saarbrücken, (2010).
- [111] H. Slimani and M.S. Radjef. Nondifferentiable multiobjective programming under generalized d_I -invexity. *European J. Oper. Res.*, 202 :32-41, (2010).
- [112] H. Slimani and M.S. Radjef. Fritz John type optimality and duality in nonlinear programming under weak pseudo-invexity. *RAIRO Oper. Res.*, 49 :451-472, (2015).
- [113] H.V. Stackelberg. The theory of the market economy. *Oxford University Press, Oxford*, (1952).
- [114] M.D. Toksari. Taylor series approach to fuzzy multiobjective linear fractional programming. *Inform. Sci.*, 178 (4) :1189-1204, (2008).
- [115] I. Tseveendorj. Mathematical programs with equilibrium constraints : A brief survey of methods and optimality conditions. *Optim. Appl.*, 76 :49-61, (2012).
- [116] H. Tuy, A. Migdalas, and N.T. Hoai-Phuong. A novel approach to bilevel nonlinear programming. *J. Glob Optim.*, 38 :527-554, (2007).
- [117] L.N. Vicente and P.H. Calamai. Bilevel and multilevel programming : A bibliography review. *J. Glob Optim.*, 5 :291-306, (1994).
- [118] G. Wang, X. Wang, Z. Wan, and Y. Lv. A globally convergent algorithm for a class of bilevel nonlinear programming problem. *Appl. Math. Comput.*, 188 :166-172, (2007).
- [119] G. Wang, K. Zhu, and Z. Wan. An approximate programming method based on the simplex method for bilevel programming problem. *Comput. Math. with Appl.*, 59 :3355-3360, (2010).

- [120] G. Wang, G. Ziyou, and W. Zhongping. A global optimization algorithm for solving the bi-level linear fractional programming problem. *Comput. Ind. Eng.*, *63*(2012) :428–432, (2012).
- [121] X. Wang, Y. Wang, and Y. Cui. A new multi-objective bi-level programming model for energy and locality aware multi-job scheduling in cloud computing. *Future Generation Computer Systems*, *36* :91-101, (2014).
- [122] T. Weir. A note on invex functions and duality in multiple objective optimization. *Opsearch*, *25* :98–104, (1988).
- [123] M. Xu and J.J. Ye. A smoothing augmented Lagrangian method for solving simple bilevel programs. *Comput. Optim. Appl.*, DOI 10.1007/s10589-013-9627-7, (2013).
- [124] X. Yang. Alternative theorems and optimality conditions with weakened convexity. *Opsearch*, *295*(2) :125-135, (1992).
- [125] H. Yano and M. Sakawa. A fuzzy approach to hierarchical multiobjective programming problems and its application to an industrial pollution control problem. *Fuzzy Sets Syst.*, *160*(22) :3309-3322, (2009).
- [126] J.J. Ye and D.L. Zhu. Optimality conditions for bilevel programming problems. *Optimization*, *33* :9–27, (1995).
- [127] J.J. Ye, D.L. Zhu, and Q.J. Zhu. Exact penalization and necessary optimality conditions for generalized bilevel programming problems. *SIAM J. Optim.*, *7* :481-507, (1997).
- [128] A. Yeza. First-order necessary optimality conditions for general bilevel programming problems. *J. Optim. Theory Appl.*, *89*(1) :189-219, (1996).
- [129] E.A. Youness, O.E. Emam, and M.S. Hafez. Fuzzy bi-level multi-objective fractional integer programming. *Appl. Math. Inf. Sci.*, *6* :2857-2863, (2014).
- [130] P.L. Yu. *Multicriteria decision making : Concepts, Techniques and Extensions*. Plenum Press, New York, NY, (1985).
- [131] R. Zeng and R.J. Caron. Generalized Motzkin theorems of the alternative and vector optimization problems. *J. Optim Theory Appl.*, *131*(2) :281-299, (2006).

-
- [132] G. Zhang, J. Lu, and T. Dillon. Decentralized multi-objective bilevel decision making with fuzzy demands. *Knowledge-Based Systems*, 20 :495-507, (2007).
- [133] G. Zhang, J. Lu, and T. Dillon. Solution concepts and an approximation Kuhn-Tucker approach for fuzzy multiobjective linear bilevel programming. In : A. Chinchuluun, P.M. Pardalos, A. Migdalas, L. Pitsoulis (eds.) *Pareto optimality, game theory and equilibria* 457-480, Springer, Berlin, (2008).
- [134] Y. Zheng and Z. Wan. A solution method for semivectorial bilevel programming problem via penalty method. *J. Appl Math Comput.*, 37 :207-219, (2011).
- [135] Y. Zheng, Z. Wan, and G. Wang. A fuzzy interactive method for a class of bilevel multiobjective programming problem. *Expert Systems with Applications*, 38 :10384-10388, (2011).

RÉSUMÉ

Dans cette thèse, nous avons étudié les conditions d'efficacité globales dans les problèmes de programmation bi-niveaux multi-objectifs. Pour cela, nous avons considéré d'une part un problème de programmation bi-niveaux optimiste non linéaire (PBMN), où le niveau supérieur est un problème d'optimisation vectoriel et le niveau inférieur est un problème d'optimisation scalaire. En utilisant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker associées au problème du niveau inférieur, nous avons transformé le problème (PBMN) en un problème à un seul niveau multi-objectifs non linéaire avec des contraintes d'égalités et d'inégalités (PMN). Nous avons établi des relations entre les problèmes (PBMN) et (PMN), et en particulier nous avons montré sous des conditions appropriées de convexité et de contrainte de qualification que les ensembles des solutions (faiblement ou proprement) efficaces globales des problèmes (PBMN) et (PMN) coïncident. De plus, nous avons prouvé des conditions nécessaires d'efficacité de type Fritz John pour (PBMN) sans utilisation d'aucune contrainte de qualification. Par ailleurs, nous avons obtenu des conditions d'efficacité suffisantes de type (Fritz John) pour qu'un point réalisable de (PMN) correspond à une solution (faiblement ou proprement) efficace du problème bi-niveaux (PBMN) sous différentes formes d'invexité généralisée et de fonctions infines. D'autres part, nous avons généralisé les résultats ci-dessus en considérant d'autres problèmes bi-niveaux multi-objectifs impliquant des fonctions linéaires, quadratiques, et/ou fractionnaires. Pour l'illustration des résultats obtenus plusieurs exemples ont été donnés.

Mots clés : Programmation bi-niveaux multi-objectifs, Programmation fractionnaire, Conditions de KKT, Invexité généralisée, Conditions d'efficacité globales, Solution (faiblement, proprement) efficace.

ABSTRACT

In this thesis, we have studied the sufficient efficiency conditions in multi-objective bi-level programming problems. For this, we have firstly considered a nonlinear optimistic bi-level programming problem (PBMN), where the upper level is a vector optimization problem and the lower level is a scalar optimization problem. By using the Karush-Kuhn-Tucker conditions associated to the lower-level problem, we have transformed the problem (PBMN) into a nonlinear multiobjective single-level programming problem with equality and inequality constraints (PMN). We have established relationships between the problems (PBMN) and (PMN), and in particular we have shown under appropriate constraint qualification and convexity assumptions that the sets of global (weakly or properly) efficient solutions of problems (PBMN) and (PMN) coincide. Furthermore, we have proved Fritz John type necessary efficiency conditions for (PBMN) without using any constraint qualification. Moreover, we have obtained (Fritz John) type sufficient efficiency conditions for a feasible point of (PMN) corresponds to a (weakly or properly) efficient solution for the bilevel problem (PBMN) under various forms of generalized invexity and infineness. On the other hand, we have generalized the above results by considering other multi-objective bi-level problems involving linear, quadratic, and/or fractional functions. To illustrate the obtained results several examples are given.

Keywords : Multiobjective bilevel programming, Fractional programming, KKT conditions, Generalized invexity, Global efficiency conditions, (Weakly, properly) efficient solution.