REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU
FACULTE DES SCIENCES - DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MÉMOIRE DE MASTER DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
Option : Processus Aléatoires et Statistique de la Décision

Fractions continues,Chaînes de Markov et Processus de Naissance et de Mort

sous la Direction de
Mme HARMIM DEHBIA

présenté par :

KHELOUI MOKRANE

le 09 /11/2014, devant le Jury :

Mr BOUDIBA MOHAND AREZKI, MCA, UMMTO, Président
Mme HARMIM DEHBIA, Chargée de Recherches, UMMTO, Rapporteur
Mr MAMOU MOHAMED, Chargé de Recherches, UMMTO, Examinateur

Remerciements

Je souhaite avant tout remercier le Professeur GÉRARD LETAC pour ses documentations et bibliographies ainsi que ses encouragements, pour cela et pour sa précieuse contribution au développement de la recherche, je lui exprime ma profonde gratitude.

C'est une chance d'avoir pu faire ma formation de Master avec une équipe d'encadrement compétente, pour laquelle j'exprime ma gratitude.

Je remercie chaleureusement Mr BOUDIBA MOHAND AREZKI qui a accepté de présider ce jury, après avoir joué un rôle important tout au long de ce travail. Je le remercie en particulier pour ses encouragements, ses conseils et aussi ses critiques. Il m'a fait connaître le monde de la recherche en mathématiques comme un domaine riche, exigeant et fascinant.

Je remercie ma Promotrice Mme HARMIM DEHBIA pour m'avoir proposé cette thématique et aussi pour ses conseils tout au long de la rédaction de ce mémoire,

Je suis très reconnaissant à Mr MAMOU MOHAMED et le remercie aussi pour avoir accepté de faire partie de ce jury.

Enfin, j'exprime mes remerciements à tous ceux, celles qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

A la mémoire de ma mère.

Table des matières

Introduction

L'étude de processus de Markov $(X_n)_n$ engendré par des produits de composition de fonctions aléatoires indépendantes F_n est intensément étudié ces dernières années. Le modèle le plus simple de ce type de processus est constitué par les marches aléatoires. La généralisation introduite par rapport aux marches aléatoires tient dans le type de fonction F_n. Ce qui est nouveau depuis quelques années, c'est qu'en général ces fonctions F_n ne sont pas linéaires et donc le modèle des marches aléatoires ne convient pas tout à fait. Depuis les travaux de Furstehberg dans les années 80, de nombreux auteurs se sont intéressés à ce type de processus : Letac, Diaconis, Guivarc'h, Bougerol, Mirek,... De nombreux travaux sont consacrés chaque année à l'étude des propriétés de ce type de processus.

L'absence d'une théorie générale, fait qu'au niveau des méthodes d'étude, un appareillage mathématique élaboré et diversifié est mis en oeuvre. Furstenberg utilise des algèbres et des groupes de Lie ; Diaconis développe l'analyse de Fourier ; Guivarc'h les opérateurs de Doeblin-Fortet ; Mirek la théorie ergodique,...

Les problèmes posés sont la recherche de conditions sur les F_n pour assurer la convergence du processus itéré $F_1 \circ F_2 \circ \cdots \circ F_n$. Souvent la question principale est de préciser les conditions de récurrence ou de transience pour la chaîne de Markov $(X_n)_n$.

Nous nous intéressons à ce type de processus dans le cas où les itérations sont produites par des fractions continues. Nous faisons une synthèse de quelques travaux récents et complétons le mémoire de Master de Mlle Hedjem Akila. Notre attention a été retenue aussi par l'occurrence de fractions continues dans les processus de naissance et de mort. Nous faisons aussi un résumé des résultats obtenus par O'Donohoe et Murphy synthétisés par Jones.

Concrètement dans le chapitre I, nous donnons les propriétés générales des fractions continues, ainsi que les conditions de convergence et d'analycité. Le chapitre II est consacré à l'étude de modèles de systèmes dynamiques et le traitement d'exemples de chaînes de Markov itératives ainsi qu'une synthèse sur les chaînes de Markov et les noyaux de transition, complétant le travail de Mlle Arezki Ouerdia dans son mémoire de Master. Le troisième est constitué de quelques généralités sur le processus de naissance et de mort et processus Markovien de sauts. Nous donnons aussi quelques propriétés de la transformée de Laplace et la formule d'inversion ainsi que son application à la recherche de la solution des équations différentielles associées aux processus de naissance et de mort, sous forme de fractions continues. Enfin, en conclusion nous donnons quelques idées sur les perspectives de ce travail.

Chapitre 1

Généralités sur les fractions continues

1.1 Premières propriétés

1.1.1 Définitions

Définition 1.1. Une fraction continue $F(z)$ de la variable complexe z est la donnée de deux suites $\big(a_n(z)\big)$, $\big(b_n(z)\big)$ de nombres complexes dépendantes de z tel que :

$$F(z) = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \cdots}}}}$$

En général on note $F(z) = \Phi\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$

Définition 1.2.
On appelle fraction réduite ou réduite d'ordre n, de la fraction continue $F(z)$,

la fraction
$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \cdots + \cfrac{a_n}{b_n}}}}}$$

A titre d'exemple, nous avons les propositions suivantes :

Proposition 1.1. $\forall x \in \mathbb{R}$, *nous avons*

$$\tan(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \cdots}}}}}$$

Démonstration. Nous avons :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}} = \cfrac{x}{\cfrac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}}}$$

Si l'on écrit $\tan(x)$ sous la forme $\tan(x) = \dfrac{x}{1 + R_1}$, on reconnaît

$$R_1 = -x^2 \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n)x^{2n-2}}{(2n+1)!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}} = \cfrac{x^2}{\cfrac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+2) x^{2n}}{(2n+3)!}}}$$

et de même, on peut alors écrire : $R_1 = \dfrac{-x^2}{3+R_2}$,
En itérant le procédé, on construit ainsi :

$$\tan(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cdots\cdots - \cfrac{x^2}{(2k-1)+R_k}}}}$$

Par récurrence presque immédiate, on a par ailleurs

$$R_k = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+2)(2n+4)\cdots(2n+2k)x^{2n+2}}{(2n+2k+1)!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}(2n+2)(2n+4)\cdots(2n+2k-2)x^{2n}}{(2n+2k-1)!}}$$

et donc on obtient finalement :

$$\tan(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \cdots}}}}}$$

□

Proposition 1.2. *Développement de e^x en fraction continue par la formule d'Euler :*
Nous avons, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$e^x = 2 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{4 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{6 + \cfrac{x}{1 + \cdots}}}}}}}}}$$

Définition 1.3. Soit F une fraction continue et $\dfrac{P_n}{Q_n}$ sa réduite d'ordre n.
On dit que la fraction continue converge si la suite $\left(\dfrac{P_n}{Q_n}\right)_n$ converge.

1.1.2 Approche géométrique : Homographies

Dans cette partie, nous introduisons quelques rappels sur les transformations géométriques simples et puis nous identifierons la composition de ces transformations dans l'homographie.

Définition 1.4 (**Translation**).
On appelle translation de vecteur $\overrightarrow{w}$ toute application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = f(z) = z + b$$

Avec $\overrightarrow{w}$ le vecteur d'affixe b

Définition 1.5 (**Rotation**).
On appelle rotation plane d'angle θ et de centre O, toute transformation T de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $T(z) = ze^{i\theta}$.
Si $z = re^{i\alpha}$ (où $r = |z|$ et $\alpha = \arg(z)$), alors $T(z) = re^{i\alpha}.e^{i\theta} = re^{i(\alpha+\theta)}$.

Définition 1.6 (**Homothétie**).
Soit k un réel non nul, l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = kz$ est l'homothétie de centre O et de rapport k.
Remarquons qu'on a $z' = kz$ où z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et z' l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM'}$ donc on a : $\overrightarrow{OM'} = K\overrightarrow{OM}$, ce qui correspond bien à la définition d'homothétie de centre O.

Définition 1.7 (**Similitude directe**).
L'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe
$z' = az + b$, (où $a,\ b \in \mathbb{C},\ a \neq 0$) est une similitude directe de centre le point ω tel que $\omega = a\omega + b$ de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$

Définition 1.8 (**Inversion**).
On appelle inversion de pôle l'origine O et de puissance k la transformation T de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $T(z) = \dfrac{k}{\overline{(z - z_0)}} + Z_0$

Définition 1.9.
Une homographie T est une transformation du plan complexe
$T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$z \mapsto T(z)$ tel que $\exists\, a, b, c, d \in \mathbb{C}$ vérifiant $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

Exemple 1.1. Cas $T(z) = \dfrac{b}{cz+d}$
À quoi correspondent les transformations de ce type ?

$$T(z) = z' = \frac{b}{cz+d}.$$

Il est immédiat que T est la composée de transformations géométriques élémentaires.
En effet, soit $Z = cz + d$ et la similitude directe $z \mapsto Z = cz + d = T_1(z)$.
On voit clairement qu'on passe de z à $z' = T(z)$ par la suite de transformations qui suivent :

$$z \xmapsto{T_1} Z = cz + d \xmapsto{T_2} z_1 = \frac{1}{Z} \xmapsto{T_3} z_2 = bz_1 = \frac{b}{Z} = z'.$$

La transformation T s'écrit donc :

$$T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$$

Où $T_1 = S$ est la similitude directe de rapport $|C|$,
$T_2 = I(O, 1)$ l'inversion de pôle l'origine O et de puissance 1,
et $T_3 = r(O, \theta) \circ h(O, K)$, avec $h(O, K)$ l'homothétie de centre O et de rapport $K = |b|$;
avec $r(O, \theta)$ la rotation de centre O et d'angle $\theta = \arg(b)$.
Ce qui montre que :

$$T = r(O, \theta) \circ h(O, K) \circ I(O, 1) \circ S$$

Remarque 1.1.

1. Si $c \neq 0$ on peut écrire :
$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{bc-ad}{c^2(z+d/c)} + \frac{a}{c}$$
Donc une homographie est la composition de transformations classiques : translation, inversion, rotation, et homothétie suivie par une autre translation.
C'est le cas générique ; il offre aussi une richesse géométrique immense.
2. Si $c = 0$: l'homographie est la composition de transformations : translation, rotation, et homothétie ; c'est donc une similitude directe.

Exemple

Cela nous permettra de voir comment s'utilisent les nombres complexes en géométrie et en même temps de constater que l'homographie est un peu différente des transformations que nous connaissons habituellement.
Soit f la transformation qui à M d'affixe z associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{2z+1}{z+1}$$

1- Montrer que f est un produit de transformations géométriques élémentaires (translations, homothéties, rotations, inversions...) qu'on précisera.
On peut écrire :

$$f(z) = z' = \frac{2z+2-1}{z+1} = 2 - \frac{1}{z+1}$$

On passe donc de z à z' par la suite d'applications qui suivent :

$$z \xmapsto{f_1} z+1 \xmapsto{f_2} \frac{1}{\overline{z+1}} \xmapsto{f_3} \frac{1}{z+1} \xmapsto{f_4} -\frac{1}{z+1} \xmapsto{f_5} 2 - \frac{1}{z+1}$$

où f_1 est la translation de vecteur (le nombre complexe) 1, f_2 est l'inversion de pôle l'origine et de puissance 1, f_3 est la symétrie par rapport à l'axe des abcisses, f_4 est la symétrie par rapport à l'origine et f_5 est la translation de vecteur 2.

2- Soit Ω_- la partie du plan telle que $x^2 + y^2 < 1$. Quelle est son image par la transformation f ?
Pour voir comment se transforme Ω, il est nécessaire de voir ça se passe pour le cercle Γ d'équation $x^2+y^2 = 1$ (c'est le cercle de centre O et de rayon 1 privé bien sûr du point $z = -1$ qui n'a pas d'image). Par f_1, Γ devient Γ_1, cercle de centre $O_1 = (1,0)$ et de rayon 1 ; l'inversion f_2 le transforme en la droite Γ_3 d'équation $x = \frac{1}{2}$, f_3 laisse Γ_3 invariante, f_4 la ramène sur la droite Γ_4 d'équation $x = -\frac{1}{2}$ et enfin f_5 taansforme cette dernière en la droite Δ d'équation $x = \frac{3}{2}$.
La transformation f est une bijection de l'ouvert $\mathbb{C}\backslash\{-1\}$ sur l'ouvert $\mathbb{C}\backslash\{2\}$. Elle a pour transformation inverse $f^{-1}(\omega) = \dfrac{-\omega+1}{\omega-2}$ (définie bien sûr sur $\mathbb{C}\backslash\{2\}$; donc :

$$f : \mathbb{C}\backslash\{-1\} \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{2\}$$

est un homéomorphisme.
Posons :

- $\Omega = \mathbb{C}\backslash(\{-1\} \cup \Gamma)$ et $\Omega' = \mathbb{C}\backslash(\{2\} \cup \Gamma)$,
- $\Omega_- = \{z \in \Omega :\mid z \mid< 1\}$ et $\Omega_+ = \{z \in \Omega :\mid z \mid< 1\}$,
- $\Omega'_- = \{z = x + iy \in \Omega' : x < \frac{3}{2}\}$ et $\Omega'_+ = \{z = x + iy \in \Omega' : x < \frac{3}{2}\}$

L'ouvert Ω est non connexe : ses composantes connexes sont Ω_- et Ω_+ ; de même l'ouvert Ω est non connexe : ses composantes connexes sont Ω'_- et Ω'_+. La restriction de f à Ω est un homéomorphisme sur Ω' ; f va donc envoyer homéomorphiquement la composante connexe Ω_- de Ω sur l'une des deux composantes connexes de Ω'. Pour savoir laquelle il suffit de voir où va le point $z_0 = 0$; celui-ci a pour image 1, il est donc dans Ω'_-. Le transformé par f' de l'ouvert Ω_- est donc l'ouvert Ω'_-.

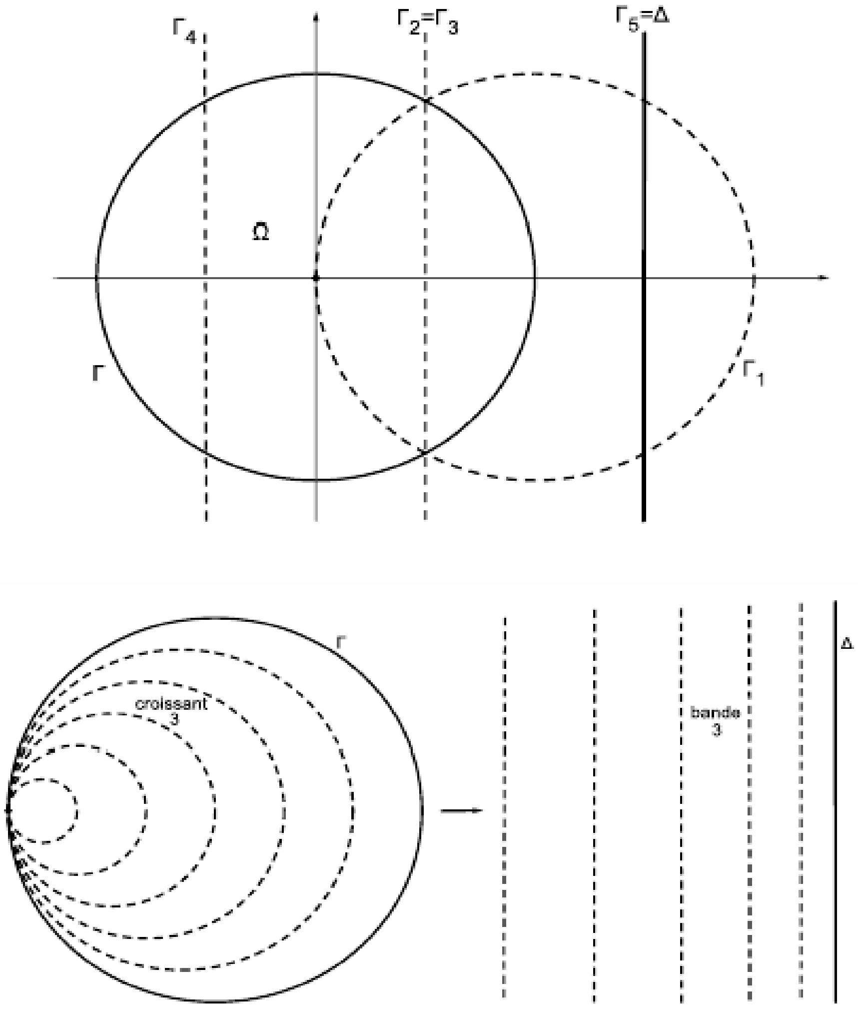

FIGURE 1.1 – Les cercles intérieurs au cercle Γ privés du point $z = -1$ et qui lui sont tangents en ce point forment un feuilletage du disque Ω_{-}. La transformation f les redresse en droites parallèles à Δ et situeés à sa gauche. On peut voir aussi que f envoie par exemple le 3ème croissant sur la 3 ème bande .

Proposition 1.3. *Soit S l'ensemble des homographies muni de la loi o de composition des applications, alors (S, o) est un groupe.*

Démonstration. Soient $h_1(z) = \dfrac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}$, et $h_2(z) = \dfrac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}$ deux homographies.
Nous avons :

$$h_2oh_1(z) = h_2\big(h_1(z)\big) = \frac{(a_2a_1 + b_2c_1)z + (a_2b_1 + b_2d_1)}{(c_2a_1 + d_2c_1)z + (c_2b_1 + d_2d_1)}$$

qui montre bien que h_2oh_1 est une homographie donc la loi de composition "o" est une loi interne.
Si h_1, h_2, h_3 sont des homographies, alors on a :

$$\big[(h_1oh_2)oh_3\big](z) = (h_1oh_2)(h_3(z)) = h_1\big[h_2(h_3(z))\big]$$

$$\big[h_1o(h_2)oh_3)\big](z) = h_1\big[(h_2oh_3)(z)\big] = h_1\big[h_2(h_3(z))\big]$$

d'où $(h_1oh_2)oh_3 = h_1o(h_2oh_3)$
Donc la composition des homographies est associative.
L'élément neutre de la loi "o" est l'identité $h(z) = z$ donnée par $a = d = 1$ et $b = c = 0$ ou $a = d = -1$ et $b = c = 0$.
Toute homographie $h(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ a un symétrique $h^{-1}(z) = \dfrac{dz + b}{-cz + d}$
On conclue que (S, o) est un groupe. □

1.1.3 Compositions d'homographies

Considérons les homographies $t_0, t_1, \ldots, t_n$, alors $t_0 \ o \ t_1 \ o \ldots o \ t_n$ est une homographie qui définit une fraction continue, quand n tend vers ∞ (n est assez grand).
Soient les homographies définies par :
$t_p : w \longmapsto t_p(w) = \dfrac{\alpha_p w + \beta_p}{\gamma_p w + \delta_p}$, avec $\alpha_p, \ \beta_p, \ \gamma_p, \ \delta_p \in \mathbb{C}, \quad \gamma_p \neq 0,$ $p = 0, 1, 2, \ldots$.
On considère la composée de $(n + 1)$ transformations $t_0 \ o \ t_1 \ o \ldots o \ t_n$.
Remarquons que

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2(z + d/c)}$$

avec $c \neq 0$.
Nous avons alors

$$t_p(w) = \frac{\alpha_p}{\gamma_p} - \frac{\Delta_p/\gamma_p^2}{\delta_p/\gamma_p + w}, \quad \Delta_p = \alpha_p\delta_p - \beta_p\gamma_p$$

Donc

$$t_0ot_1o\ldots ot_n(w) = \frac{\alpha_0}{\gamma_0} - \cfrac{\Delta_0/\gamma_0^2}{\frac{\delta_0}{\gamma_0} + \frac{\alpha_1}{\gamma_1} - \cfrac{\Delta_1/\gamma_1^2}{\frac{\delta_1}{\gamma_1} + \frac{\alpha_2}{\gamma_2} - \cdots - \cfrac{\Delta_{n-1}/\gamma_{n-1}^2}{\frac{\delta_{n-1}}{\gamma_{n-1}} + \frac{\alpha_n}{\gamma_n} - \cfrac{\Delta_n/\gamma_n^2}{\frac{\delta_n}{\gamma_n} + w}}}}$$

Quand n tend vers ∞ et pour $w = \infty$, $\ t_0\ o\ t_1\ o\ \ldots o\ t_n$ définit une fraction continue.

Proposition 1.4. *Soient $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ deux suites de nombres complexes et $(t_k)_{k\geq 0}$ la suite des homographies définies pour $u \in \mathbb{C}$, par*

$$u \longmapsto t_k(u) = \frac{a_k}{b_k + u}$$

si $(T_k)_k$ est la suite définie par $T_k = t_0 \circ t_1 \circ ... \circ t_k$ et si $W_k = T_k(0)$, alors la fraction continue $\phi\ (\frac{a_n}{b_n})$ converge si la suite $(W_n)_n$ converge dans $\mathbb{C}$ vers W.

Démonstration. On a

$$W_k = T_k(0) = \cfrac{a_0}{b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots + \cfrac{a_k}{b_k}}}}}$$

On notera aussi :

$$\Phi\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \cfrac{a_0}{b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots}}}} = W$$

Lorsqu'il y a convergence, car on confond alors la fraction continue et sa valeur. $\square$

Expression matricielle : On peut écrire les homographies sous forme matricielle grâce à la correspondance :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longleftrightarrow t : z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

En effet, remarquons que si

$$S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

et si on pose

$$z = \frac{z_1}{z_2}, w = \frac{w_1}{w_2}$$

alors

$$w = S(z) \Longleftrightarrow \frac{w_1}{w_2} = S(\frac{z_1}{z_2})$$

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{a\frac{z_1}{z_2} + b}{c\frac{z_1}{z_2} + d} = \frac{az_1 + bz_2}{cz_1 + dz_2}$$

on a alors w_1 et w_2, en considérant le vecteur

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow w_1 = az_1 + bz_2$ et $w_2 = cz_1 + dz_2$ donc on a : $w = \dfrac{az_1 + bz_2}{cz_1 + dz_2}$

Conclusion :

Si

$$S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

soit A la matrice associée $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

si $z \in \mathbb{C}$, soit z_1 et z_2 tel que $z = \dfrac{z_1}{z_2}$

pour trouver $w = S(z)$ on pose : $w = \dfrac{w_1}{w_2}$ et soit alors le vecteur

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

et le vecteur

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

nous avons

$$w = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$w_1 = az_1 + bz_2,\ w_2 = cz_1 + dz_2$

$$w = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix}$$

et le vecteur

$$z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}$$

nous avons

$$w = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$w_1 = az_1 + bz_2, w_2 = cz_1 + dz_2$

donc $w = \dfrac{w_1}{w_2} = \dfrac{az_1 + bz_2}{cz_1 + dz_2}$

on a l'image de z par S en utilisant la matrice A, donc A caractérise l'homographie.

Si on écrit

$$t_k = \begin{pmatrix} 0 & a_k \\ 1 & b_k \end{pmatrix},$$

$$T_k = \begin{pmatrix} M_k & P_k \\ N_k & Q_k \end{pmatrix}$$

On obtient par un calcul matriciel :

Propriété 1.1.

$$T_k = \begin{pmatrix} P_{k-1} & P_k \\ Q_{k-1} & Q_k \end{pmatrix}$$

avec

$$P_{-1} = 1,\ P_0 = 0,$$

$$Q_{-1} = 0,\ Q_0 = 1,$$

$$\begin{cases} P_k = a_k P_{k-2} + b_k P_{k-1} \\ Q_k = a_k Q_{k-2} + b_k Q_{k-1} \end{cases}$$

et alors :

$$W_k = T_k(0) = \frac{P_k}{Q_k}$$

P_k est le $k^{\text{ème}}$ numérateur et Q_k le $k^{\text{ème}}$ dénominateur de la fraction continue $\Phi\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$.

1.2 Convergence des fractions continues

On a : $T_k = t_0\ o\ t_1\ o \dots o\ t_k$, avec

$$t_k = \begin{pmatrix} 0 & a_k \\ 1 & b_k \end{pmatrix},$$

$$T_k = \begin{pmatrix} M_k & P_k \\ N_k & Q_k \end{pmatrix}$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$\begin{pmatrix} P_{k-1} & P_k \\ Q_{k-1} & Q_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_0 \\ 1 & b_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 1 & b_1 \end{pmatrix} \times \cdots \times \begin{pmatrix} 0 & a_k \\ 1 & b_k \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi en utilisant le déterminant :

$$P_{k-1}Q_k - P_kQ_{k-1} = (-1)^{k+1}\prod_{i=0}^{k} a_i$$

$$\begin{aligned}
W_{k-1}-W_k &= \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}-\frac{P_k}{Q_k}\\
&= \frac{P_{k-1}Q_k-P_kQ_{k-1}}{Q_{k-1}Q_k}\\
&= \frac{(-1)^{k+1}\prod_{i=0}^{k} a_i}{Q_{k-1}Q_k},\ si\ Q_{k-1}\neq 0,\ Q_k\neq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_k &= (W_k-W_{k-1})+(W_{k-1}-W_{k-2})+\cdots+(W_1-W_0)\\
&= \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^j\prod_{i=0}^{j} a_i}{Q_{j-1}Q_j},\ si\ \forall j\leq k,\ Q_j\neq 0.
\end{aligned}$$

Ainsi :

Propriété 1.2. Si $\forall j \leq k,\ Q_j \neq 0$, on a :

$$W_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^j\prod_{i=0}^{j} a_i}{Q_{j-1}Q_j}$$

ce qui ramène la convergence de W_k à la convergence d'une série.

Théorème 1.1 (Pringsheim). *Si* $\forall n \geq 1,\ a_n \neq 0$ *et* $\mid b_n \mid \geq \mid a_n \mid +1$, *alors* $\Phi\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *converge et :* $\forall n \geq 1,\ \mid W_k \mid < 1.$

Corollaire 1.1. *S'il existe une suite* $(P_n)_{n\geq 1},\ P_n > 1,\ \forall n \geq 1$ *telle que :*

$$\mid \frac{a_1}{b_1} \mid \leq \frac{P_1-1}{P_1},$$

$$\mid \frac{a_n}{b_{n-1}b_n} \mid \leq \frac{P_n-1}{P_nP_{n-1}}\ (\forall n \geq 2)$$

alors $\Phi\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *converge.*

Corollaire 1.2 (Worpitzky). *Si* $\forall n \geq 1,\ \mid a_n \mid \leq \frac{1}{4},\quad$ *alors* $\Phi\left(\frac{a_n}{1}\right)$ *converge.*

Corollaire 1.3. *Si* $\forall n \geq 1,\ \dfrac{1}{\mid b_{2n-1} \mid} + \dfrac{1}{\mid b_{2n} \mid} \leq 1,\quad$ *alors* $\Phi\left(\frac{1}{b_n}\right)$ *converge.*

Définition 1.10. La réduite

$$\frac{P_k}{Q_k} = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \cdots + \cfrac{a_n}{b_n}}}}}$$

est appelée aussi le $n^{\text{ème}}$ approximant de la fraction continue.
Le $0^{\text{ème}}$ approximant de la fraction continue est b_0.

Proposition 1.5 ([1]). *Soient les transformations définies par :*
$t_0(W) = b_0 + W,\ t_p(W) = \dfrac{a_p}{b_p + W},\ p = 1,\ 2,\ \cdots.$
Avec ces notations on a :

$$t_0 o t_1 o \cdots o t_n(W) = \frac{P_{n-1}W + P_n}{Q_{n-1}W + Q_n},\ n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots$$

avec $P_{n-1},\ P_n,\ Q_{n-1}$ *et* Q_n *sont indépendantes de* W *et* $P_{-1} = 1$,
$Q_{-1} = 0,\ P_0 = b_0,\ Q_0 = 1.$

$$\begin{cases} P_{p+1} = b_{p+1}P_p + a_{p+1}P_{p-1} \\ Q_{p+1} = b_{p+1}Q_p + a_{p+1}Q_{p-1} \end{cases},p = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

Démonstration. Montrons par récurrence

$$t_0 o t_1 o \cdots o t_n(W) = \frac{P_{n-1}W + P_n}{Q_{n-1}W + Q_n},\ n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots \qquad (\mathcal{P})$$

Pour $n = 0$ la propriété $(\mathcal{P})$ est vraie car $t_0(W) = b_0 + W$.
On suppose que $(\mathcal{P})$ est vraie pour $n = k$ et on démontre que $(\mathcal{P})$ est vraie

pour $n = k+1$.

$$\begin{aligned} t_0 o t_1 o \cdots o t_{k+1}(W) &= t_0 o t_1 o \cdots o t_k\Big(\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}+W}\Big) \\ &= \frac{P_{k-1}\Big(\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}+W}\Big)+P_k}{Q_{k-1}\Big(\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}+W}\Big)+Q_k} \\ &= \frac{P_kW+(b_{k+1}P_k+a_{k+1}P_{k-1})}{Q_kW+(b_{k+1}Q_k+a_{k+1}Q_{k-1})} \\ &= \frac{P_kW+P_{k+1}}{Q_kW+Q_{k+1}} \end{aligned}$$

Donc $(\mathcal{P})$ est vraie pour $n = k+1$ on conclue que $(\mathcal{P})$ est vraie pour tout n. □

Proposition 1.6 ([1]). *Avec ces notations nous avons :*

$$P_{n-1}Q_n - P_nQ_{n-1} = (-1)^n a_1a_2\cdots a_n, \;\; n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

Cette formule s'appelle formule du déterminant.

Démonstration. Calculons le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} P_{n-1} & P_n \\ Q_{n-1} & Q_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} P_{n-1} & P_n \\ Q_{n-1} & Q_n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} P_{n-1} & b_nP_{n-1}+a_nP_{n-2} \\ Q_{n-1} & b_nQ_{n-1}+a_nQ_{n-2} \end{vmatrix} \\ &= -a_n\begin{vmatrix} P_{n-2} & P_{n-1} \\ Q_{n-2} & Q_{n-1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

On itère cette relation jusqu'à $n = 1$ et comme $\begin{vmatrix} P_{-1} & P_0 \\ Q_{-1} & Q_0 \end{vmatrix} = 1$.
Nous avons donc :

$$P_{n-1}Q_n - P_nQ_{n-1} = (-1)^n a_1a_2\cdots a_n, \;\; n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

□

1.2.1 Conditions nécessaires de convergence

Théorème 1.2 ([2]). *Si la série* $\sum_p \mid b_p \mid$ *converge, alors la fraction continue*

$$\cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cdots}}}$$

diverge.
Les suites de ses numérateurs et dénominateurs pairs et impairs $(P_{2p})_p,\ (P_{2p+1})_p,\ (Q_{2p})_p,$ $(Q_{2p+1})_p$ *convergent vers les limites finies* $F_0,\ F_1,\ G_0,\ G_1,$ *respectivement ,*
avec $F_1G_0 - F_0G_1 = 1.$

Démonstration. Nous avons d'après la proposition (1.5) et puisque les a_n sont égaux à 1.

$$\begin{aligned} P_{2p} &= b_{2p}P_{2p-1} + P_{2p-2} \\ &= b_{2p}P_{2p-1} + b_{2p-2}P_{2p-3} + P_{2p-4} \\ &\vdots \\ &= b_{2p}P_{2p-1} + b_{2p-2}P_{2p-3} + \cdots + b_2P_1 \end{aligned}$$

Donc

$$P_{2p} = \sum_{r=1}^{p} b_{2r}P_{2r-1}$$

Nous avons d'après les hypothèses la série $\sum \mid b_{2r} \mid$ est convergente, pour montrer que la suite $(P_{2p})_p$ est convergente il suffit de montrer que $\mid P_{2p-1} \mid \leq c$ avec c est une constante indépendante de p.
Montrons par récurrence que si $M > \mid P_{-1} \mid$ et $M > \mid P_0 \mid$ alors

$$\mid P_n \mid \leq M(1+ \mid b_1 \mid)(1+ \mid b_2 \mid) \cdots (1+ \mid b_n \mid) \ldots \tag{1.1}$$

Pour $n = 1,\ \mid P_1 \mid \leq \mid b_1 \mid \mid P_0 \mid + \mid P_{-1} \mid \leq M(1+ \mid b_1 \mid).$
Donc (1.1) est vraie pour $n = 1.$

$$\begin{aligned} \textit{Pour } n = 2,\ \mid P_2 \mid &\leq \mid b_2 \mid \mid P_1 \mid + \mid P_0 \mid \leq M \mid b_2 \mid (1+ \mid b_1 \mid) + M \\ \mid P_2 \mid &\leq M(1+ \mid b_1 \mid)(1+ \mid b_2 \mid), \end{aligned}$$

Donc (1.1) est vraie pour $n = 2$.
Supposons que (1.1) est vraie pour $n = k-1$ et montrons qu'elle est vraie pour $n = k$.
Nous avons $\mid P_k \mid \leq \mid b_k \mid\mid P_{k-1} \mid + \mid P_{k-2} \mid$.

$$\begin{aligned} \mid P_k \mid &\leq \mid b_k \mid M(1+\mid b_1 \mid)(1+\mid b_2 \mid)\cdots(1+\mid b_{k-1} \mid) + M(1+\mid b_1 \mid)(1+\mid b_2 \mid)\cdots(1+\mid b_{k-2} \mid) \\ \mid P_k \mid &\leq M(1+\mid b_1 \mid)(1+\mid b_2 \mid)\cdots(1+\mid b_k \mid) \end{aligned}$$

Donc il suffit de prendre $C = M\prod_{1}^{\infty}(1+\mid b_p \mid)$ car la série $\sum \mid b_p \mid$ est convergente par hypothèse.
Donc $\prod_{1}^{\infty}(1+\mid b_p \mid)$ converge, par conséquent la suite $(P_{2p})_p$ est convergente.
De la même manière on démontre que $(P_{2p+1})_p,\ (Q_{2p})_p,\ (Q_{2p+1})_p$ sont convergentes.
D'après la proposition (1.6) on a :

$$P_{2p+1}Q_{2p} - P_{2p}Q_{2p+1} = 1.$$

En passant à la limite on aura :

$$F_1G_0 - F_0G_1 = 1.$$

La fraction continue est divergente car ses approximants oscillent entre les deux limites $\dfrac{F_0}{G_0}$ et $\dfrac{F_1}{G_1}$. □

Nous acceptons sans démonstration le résultat suivant :

Lemme 1.1. *Soit* $\cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cdots}}}$ *une fraction continue.*
$(P_n)_n$ *est la suite de ses numérateurs et* $(Q_n)_n$ *est la suite de ses dénominateurs.*

$$\begin{aligned} S_p &= \sum_{r=1}^{r=p} b_{2r} \\ \pi_k &= \prod_{p=1}^{k}(1 + b_{2n+2p+1}S_{n+p}) \end{aligned}$$

avec $|\, b_{2p+1}S_p \,| < 1$ *pour* $p \geq n$, $k = 1,\ 2,\ 3\ \ldots,$

Et soient $U_{2k} = \dfrac{P_{2n+2k+1}}{\pi_k}$, $V_{2k} = \dfrac{Q_{2n+2k+1}}{\pi_k}$,

$$\begin{aligned} U_{2k+1} &= (P_{2n+2k+2} - S_{n+k+1}P_{2n+2k+1})\pi_k, \\ V_{2k+1} &= (Q_{2n+2k+2} - S_{n+k+1}Q_{2n+2k+1})\pi_k,\ k = 0,\ 1,\ 2\ \ldots,\ (\pi_0 = 1) \end{aligned}$$

$C_{2k} = \dfrac{b_{2n+2k+1}}{\pi_{k-1}\pi_k}$, $C_{2k+1} = -b_{2n+2k+1}S_{n+k}^2\pi_{k-1}\pi_k$, $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$

Alors on a :

$$\begin{aligned} U_k &= C_kU_{k-1} + U_{k-2}, \\ V_k &= C_kV_{k-1} + V_{k-2},\ k = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots \end{aligned}$$

Théorème 1.3. *Si les séries* $\sum |\, b_{2p+1} \,|$ *et* $\sum |\, b_{2p+1}S_p^2 \,|$, *où* $S_p = \displaystyle\sum_{r=1}^{p} b_{2r}$ *sont convergentes, et* $\liminf\limits_{p\longrightarrow\infty} |\, S_p \,| < \infty$, *alors la fraction continue* $\cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cdots}}}$ *diverge.*
Les suites de ses numérateurs et dénominateurs impairs $(P_{2p+1})_p$ *et* $(Q_{2p+1})_p$ *convergent vers les limites finies* F_1 *et* G_1 *respectivement.*
Si la suite $(S_p)p$ *converge vers une limite finie* S *alors les suites* $(P_{2p})_p$ *et* $(Q_{2p})_p$ *convergent vers les limites finies* $F(S)$ *et* $G(S)$, *respectivement et* $F_1G(S) - G_1F(S) = 1$.
Finalement, si $\lim\limits_{p\longrightarrow\infty} S_p = \infty$ *alors on a :* $\lim\limits_{p\longrightarrow\infty} \dfrac{P_{2p}}{Q_{2p}} = \dfrac{F_1}{G_1}$ *(finie ou infinie).*

Démonstration. Montrons que la série $\sum |\, b_{2p+1}S_p \,|$ est convergente.

- Si $|\, S_p \,| \leq 1$ alors on a $|\, b_{2p+1}S_p \,| \leq |\, b_{2p+1} \,|$.
- Si $|\, S_p \,| > 1$ on a $|\, b_{2p+1}S_p \,| \leq |\, b_{2p+1}S_p^2 \,|$

Comme les séries $\sum |\, b_{2p+1} \,|$ et $\sum |\, b_{2p+1}S_p^2 \,|$ sont convergentes (par hypothèse).
Il en résulte que la série $\sum |\, b_{2p+1}S_p \,|$ est convergente.
La série $\sum |\, b_{2p+1}S_p \,|$ est convergente alors il existe un indice $n \geq 1$ tel que $|\, b_{2p+1}S_p \,| < 1$ pour $p \geq n$.

Par suite $\pi_k = \prod_{p=1}^{k}(1 + b_{2n+2p+1}S_{n+p}),\ k \geq 1$ sont différents de zéro et :

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \pi_k = \prod_{p=1}^{\infty}(1 + b_{2n+2p+1}S_{n+p})$$

converge et sa valeur est différente de zéro.

Soient $\quad U_{2k} = \dfrac{P_{2n+2k+1}}{\pi_k},\ V_{2k} = \dfrac{Q_{2n+2k+1}}{\pi_k},$

$$\begin{array}{rcl} U_{2k+1} & = & (P_{2n+2k+2} - S_{n+k+1}P_{2n+2k+1})\pi_k, \\ V_{2k+1} & = & (Q_{2n+2k+2} - S_{n+k+1}Q_{2n+2k+1})\pi_k,\ k = 0,\ 1,\ 2\ \ldots,\ (\pi_0 = 1) \end{array}$$

$C_{2k} = \dfrac{b_{2n+2k+1}}{\pi_{k-1}\pi_k},\ C_{2k+1} = -b_{2n+2k+1}S^2_{n+k}\pi_{k-1}\pi_k,\ \ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$

D'après le lemme (1.1) nous avons

$$\begin{array}{rcl} U_k & = & C_k U_{k-1} + U_{k-2}, \\ V_k & = & C_k V_{k-1} + V_{k-2},\ k = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots, \end{array}$$

Comme

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \pi_k = \prod_{p=1}^{\infty}(1 + b_{2n+2p+1}S_{n+p})$$

est convergent.

Et les séries $\sum \mid b_{2p+1} \mid,\ \ \sum \mid b_{2p+1}S_p^2 \mid$ sont convergentes (par hypothèse), il en résulte que $\sum \mid C_p \mid$ est convergente.

Nous avons d'après le théorème (1.2) les suites $(U_{2k})_k,\ (U_{2k+1})_k,\ (V_{2k})_k,$ $(V_{2k+1})_k$ sont convergentes, et donc les limites

$$\lim_{p \longrightarrow \infty}(P_{2p+1}) = F_1,\ \lim_{p \longrightarrow \infty}(Q_{2p+1}) = G_1 \tag{1.2}$$

et

$$\lim_{p \longrightarrow \infty}(P_{2p} - S_p P_{2p-1}) = X \tag{1.3}$$

$$\lim_{p \longrightarrow \infty}(Q_{2p} - S_p Q_{2p-1}) = Y \tag{1.4}$$

existent et sont finies.
D'après la proposition (1.6) on a :

$$P_{2p-1}(Q_{2p} - S_pQ_{2p-1}) - Q_{2p-1}(P_{2p} - S_pQ_{2p-1}) = P_{2p-1}Q_{2p} - Q_{2p-1}P_{2p} = 1 \tag{1.5}$$

En passant à la limite on aura $F_1Y - G_1X = 1$.
Soit S la limite finie de la suite $(S_p)_p$, nous avons d'après (1.2), (1.3) et (1.4) $\lim\limits_{p\longrightarrow\infty} P_{2p} = SF_1 + X = F(S)$; $\lim\limits_{p\longrightarrow\infty} Q_{2p} = SG_1 + Y = G(S)$.
D'après (1.5) on a $F_1G(S) - G_1F(S) = 1$.
Montrons maintenant $\lim\limits_{p\longrightarrow\infty} \dfrac{P_{2p}}{Q_{2p}} = \dfrac{F_1}{G_1}$.
On a $\lim\limits_{p\longrightarrow\infty} S_p = \infty$ (par hypothèse)

$$\frac{P_{2n+2p}}{Q_{2n+2p}} = \frac{P_{2n+2p-1} + \dfrac{U_{2p-1}}{\pi_{p-1}S_{n+p}}}{Q_{2n+2p-1} + \dfrac{V_{2p-1}}{\pi_{p-1}S_{n+p}}}$$

En passant à la limite on aura :

$$\lim_{p\longrightarrow\infty} \frac{P_{2p}}{Q_{2p}} = \frac{F_1}{G_1}.$$

(finie ou infinie). □

1.2.2 Condition suffisante de convergence

Théorème 1.4. *Soit* $\dfrac{1}{b_1 + \dfrac{1}{b_2 + \dfrac{1}{b_3 + \cdots}}}$ *une fraction continue complexe et soient les séries* $\sum \mid b_{2p+1} \mid, \quad \sum \mid b_{2p+1}S_p^2 \mid$ *avec* $S_p = \sum\limits_{r=1}^{r=p} b_{2r}$.

Si

. $\sum \mid b_{2p+1} \mid$ *et* $\sum \mid b_{2p+1}S_p^2 \mid$ *sont convergentes.*

. $\lim S_p = \infty$.

. $\mathrm{R}(b_1) > 0$ *et* $\mathrm{R}(b_p) \geq 0, \quad p = 2,\ 3,\ 4, \cdots,$

Alors :
la fraction continue $\cfrac{1}{b_1+\cfrac{1}{b_2+\cfrac{1}{b_3+\cdots}}}$ *est convergente.*
La valeur ν *de la fraction vérifie l'inégalité :*

$$\mid \nu - \frac{1}{2\mathrm{R}(b_1)} \mid \leq \frac{1}{2\mathrm{R}(b_1)}$$

Démonstration. Nous avons d'après les hypothèses $\sum \mid b_{2p+1} \mid$ et $\sum \mid b_{2p+1}S_p^2 \mid$ sont convergentes et $\lim S_p = \infty$, donc d'après le théorème 1.3

$$\lim_{p \longrightarrow \infty} \frac{P_{2p}}{Q_{2p}} = \frac{F_0}{G_0} = \lim_{p \longrightarrow \infty} \frac{P_{2p+1}}{Q_{2p+1}} = \frac{F_1}{G_1}$$

(finie ou infinie).
Pour montrer que la fraction est convergente il suffit de montrer que $\lim\limits_{p \longrightarrow \infty} \frac{P_p}{Q_p} = \frac{F_1}{G_1}$ est finie.
Soient les transformations homographiques définies par :

$$t_p(w) = \frac{1}{b_p + w}$$

Avec les hypothèses $R(b_1) > 0$ et $R(b_p) \geq 0$ on a admet l'inégalité suivante :

$$\mid t_1(w) - \frac{1}{2R(b_1)} \mid \leq \frac{1}{2R(b_1)}$$

on a : $t_1 o t_2 o ... o t_p(0) = \frac{P_p}{Q_p}$.
donc

$$\mid \frac{P_p}{Q_p} - \frac{1}{2R(b_1)} \mid \leq \frac{1}{2R(b_1)}, \; p \geq 1$$

En passant à la limite il en résulte que la fraction continue est convergente et sa valeur ν vérifie l'inégalité :

$$\mid \nu - \frac{1}{2R(b_1)} \mid \leq \frac{1}{2R(b_1)}$$

□

Théorème 1.5 (Stieltjes). *(Cf. [2])*

Soit $K(a_n z/1)$ une fraction S, tel que $a_n > 0$, $\forall n \geq 1$.

A) *Alors les suites des numérateurs et dénominateurs impairs de $K(a_n z/1)$ convergent vers les fonctions holomorphes dans la portion du plan*

$$R = \{z, \ |\arg z| < \pi\}$$

$K(a_n z/1)$ converge uniformément sur tout compact de R.

B) *La fraction $S = K(a_n z/1)$ converge vers une fonction holomorphe dans R si au moins une des deux series*

$$\sum |\frac{a_1 a_3 \cdots a_{2n-1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2n}}|, \ \ \sum |\frac{a_2 a_4 \cdots a_{2n-2}}{a_1 a_3 \cdots a_{2n-1}}|$$

diverge.

C) *Si la fraction $S = K(a_n z/1)$ converge en un point unique de R, alors elle converge en tout point de R vers une fonction holomorphe.*

D) *La condition suffisante pour qu'une fraction S converge vers une fonction holomorphe dans R est l'existence d'une constante $M > 0$ tel que $|a_n| \leq M, \ \ n \geq 1$.*

Démonstration. (Voir Jones continued fractions page 136). □

1.2.3 Convergence de fractions continues particulières

On considère maintenant des fractions continues de la forme :

$$\cfrac{g_1}{1 + \cfrac{g_2(1-g_1)z}{1 + \cfrac{g_3(1-g_2)z}{1 + \dots}}}$$

qui seront d'une importance fondamentale dans l'étude des marches aléatoires.
Elles sont particulièrement étudiées par (Cf. [4]).

Théorème 1.6. *Soit* $(g_n)_{n\geq 1}$ *vérifiant* $0 < g_n < 1$, $\forall n \geq 1$, *alors*

$$\cfrac{g_1}{1+\cfrac{g_2(1-g_1)z}{1+\cfrac{g_3(1-g_2)z}{1+\dots}}}$$

est uniformément convergente pour $\mid z \mid \leq 1$.
On peut même obtenir la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}/]-\infty,-1[$.

Ajoutons à ceci deux propriétés utiles par la suite :

Propriété 1.3. On peut calculer la valeur de la fraction continue précédente en -1 :

$$\cfrac{g_1}{1\cfrac{g_2(1-g_1)}{1-\cfrac{g_3(1-g_2)}{1-\dots}}} = 1 - \cfrac{1}{1+\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{g_1g_2\dots g_p}{(1-g_1)(1-g_2)\dots(1-g_p)}}$$

Propriété 1.4. Si $0 < g_n < 1$, $\forall n \geq 1$, on a alors :

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{g_1 z}{1+\cfrac{g_2(1-g_1)z}{1+\dots}}} \times \cfrac{1}{1+\cfrac{(1-g_1)z}{1+\cfrac{g_1(1-g_2)z}{1+\dots}}} = \frac{1}{1+z}$$

Chapitre 2

Etude de modèles de systèmes dynamiques

2.1 Exemples de chaînes de Markov itératives

Le cas le plus simple est la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$. Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoire *iid* à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et X_0 une variable aléatoire indépendante de $(Y_n)_n$. Si on considère la marche aléatoire $(X_n)_n$ engendrée par X_0 et $(Y_n)_n$, nous avons

$$\forall n > 0, X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$$

Soit alors la fonction f tel que :

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = x + y$$

Nous avons donc :

$$X_n = f(Y_n, X_{n-1}) = f_{Y_n}(X_{n-1}), \forall n > 0$$

La marche aléatoire $(X_n)_n$ apparaît donc comme une chaîne de Markov itérative sur $\mathbb{Z}$ dont la procédure d' itération est définie par la fonction f.

Si $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P sur un espace d'état E fini ou dénombrable, est-il possible de représenter $(X_n)_n$

comme une chaîne de Markov itérative de façon similaire à la représentation de la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, donnée ci-dessus ?

Le problème est résolu avec la proposition suivante :

Proposition 2.1. *Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov sur un espace des états E fini ou dénombrable de matrice de transition*

$$P = (p_{xy})_{x,y \in E}$$

alors

$$\exists f : E \times E \longrightarrow E$$

et $(Z_n)_n$ une suite iid de v.a à valeurs dans E tel que $\forall n,\ X_n$ est de la forme

$$X_n = f_{Z_n}(X_{n-1})$$

Démonstration.
Soit $(Z_n)_n$ une suite *iid* de v.a uniformes dans $[0, 1]$.

$$E = \{x_1, ..., x_n, ...\}$$
$$P[X_{n+1} = x_j | X_n = x_k] = p_{kj}$$

Pour $j, k \in \mathbb{N}$, soit

$$F_{j,k} = \sum_{i=0}^{k} p_{ji}.$$

Considérons la fonction $f : E \times E \longrightarrow E$ tel que :

$$f(x_j, z) = x_k \; si \; F_{j,k-1} < z \leq F_{j,k}$$

Soit $(Y_n)_n$ la chaîne de Markov définie par $Y_n = f_{Z_n}(Y_{n-1})$ alors $(Y_n)_n$ a la même matrice de transition que $(X_n)_n$

En effet :

$$\begin{aligned}
P[Y_n = x_k | Y_n = x_j] &= P[f_{Z_n}(Y_{n-1}) = x_k | Y_n = x_j] \\
&= \frac{P[f(Y_{n-1}, Z_n) = x_k, Y_n = x_j]}{P[Y_n = x_j]} \\
&= \frac{P[f(x_j, Z_n) = x_k, Y_n = x_j]}{P[Y_n = x_j]} \\
&= \frac{P[f(x_j, Z_n) = x_k] \times \; P[Y_n = x_j]}{P[Y_n = x_j]} \\
&= P[f(x_j, Z_n) = x_k] \\
&= P[F_{j,k-1} < Z_n \leq F_{j,k}] \\
&= F_{j,k} - F_{j,k-1} \\
&= \sum_{i=0}^{k} p_{ji} - \sum_{i=0}^{k-1} p_{ji} \\
&= p_{jk}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
P[Y_n = x_j | Y_{n-1} = x_k] &= p_{jk} \\
&= P[X_n = x_j | X_{n-1} = x_k]
\end{aligned}$$

C'est-à-dire $(Y_n)_n$ et$(X_n)_n$ sont des chaînes de Markov sur E avec la même matrice de transition.
On conclue que $(Y_n)_n \equiv (X_n)_n$ par conséquent la chaîne de Markov $(X_n)_n$ peut être représentée sous forme itérative. $\square$

Nous signalons que dans le cas d'une chaîne de Markov d'espace des états non dénombrable et de noyau P, nous n'arrivons pas à resoudre le problème de sa representation sous forme de chaîne itérative..

2.2 Chaînes de Markov sous forme de fractions continues

Nous résumons ci-après, un cas de chaîne de Markov itérative engendrée par des fractions continues. Nous nous plaçons dans le cas particulier

$F_n = f_{Y_n}$ où $(Y_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et f_y est une fonction réelle $x \longmapsto f_y(x)$ avec $y \in \mathbb{R}$, de la variable réelle x. X_0 est une variable aléatoire indépendante des Y_n. Pour simplifier, on pose $X_0 = x \in \mathbb{R}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} X_1^x &= f_{Y_1}(X_0) = f_{Y_1}(x) \\ X_2^x &= f_{Y_2}(X_1^x) = f_{Y_2}(f_{y_1}(x)) = f_{Y_2} o f_{Y_1}(x) \\ &\vdots \\ X_n^x &= f_{Y_n}(X_{n-1}^x) \\ &= f_{Y_n} o f_{Y_{n-1}} o \ldots o f_{Y_1}(x) \end{aligned}$$

Dans ce cas $(X_n^x)_n$ est alors une chaîne de Markov sur $\mathbb{R}$. La proposition suivante montre que dans certains cas, la limite de la suite $(X_n)_n^x$ existe

Proposition 2.2. *(Cf. [14]) : Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et soit $f_y(x) = y + g(x)$, la fonction réelle des variables réelles x et y, où g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et tel que $\mid g' \mid \leq k < 1$. Si $(X_n)_n$ est la chaîne de Markov définie par : X_0 une variable aléatoire donnée et indépendante des Y_n et pour $n \geq 1$,*

$$X_n = f_{Y_n}(X_{n-1}),$$

alors $\lim\limits_n X_n$ existe p.s.

Cas de l'itération de $f_y(x) = y + \dfrac{1}{x}$

Si $f_y(x) = y + \dfrac{1}{x}$, dans ce cas nous avons $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Soit alors $(Y_n)_n$ une suite i.i.d. de variables aléatoires. La chaîne de Markov $(X_n)_n^x$ est alors définie par

$$\begin{aligned}
X_0 &= x \\
X_1^x &= f_{Y_1}(x) = Y_1 + \frac{1}{x} \\
X_2^x &= f_{Y_2}(X_1^x) = Y_2 + \cfrac{1}{Y_1 + \cfrac{1}{x}} \\
&\vdots \\
X_n^x &= f_{Y_n}(X_{n-1}^x) = Y_n + \cfrac{1}{Y_{n-1} + \cfrac{1}{Y_{n-2} + \ldots + \cfrac{1}{x}}}
\end{aligned}$$

(X_n^x) est une chaîne de Markov sous la forme d'une fraction continue illimitée.

Nous avons :

$$\mid g'(x) \mid = \mid \frac{-1}{x^2} \mid < \frac{1}{a^2} < 1$$

D'aprés la proposition (2.2) la chaîne de Markov définie par l'algorithme aléatoire $f_y(x) = y + \frac{1}{x}$ converge *p.s.*

Soit le processus $(H_n^x)_n$ défini par :

$$H_n^x = f_{y_1} o f_{y_2} o \ldots o f_{y_n}(x), \quad n \geq 1$$

avec $X_0^x = x$

Quand $n \longrightarrow \infty$, on obtient la convergence presque sure de H_n^x vers une variable aléatoire H_∞.

Conséquence :

La chaîne de Markov

$$(X_n^x)_n \text{ avec } X_n^x = f_{Y_n} o X_{n-1}^x \text{ et } X_0^x = x$$

converge en loi vers la loi de la variable aléatoire H_∞.

En effet, les processus $(X_n^x)_n$ et $(H_n^x)_n$ ont la même loi car $\forall n$, $\mathcal{L}(H_n^x)$ est déterminée par les lois de $Y_n \ldots Y_1$. Mais $\mathcal{L}(Y_1 \ldots Y_n) = \mathcal{L}(Y_n \ldots Y_1)$.

Nous nous appuyons dans notre étude sur le principe de contraction.

Théorème 2.1 (Principe de contraction). *Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace localement compact, $(F, \mathcal{F}, Q)$ un espace de probabilité, et $f : E \times F \longrightarrow E$ une fonction tel que pour tout y fixé $x \longrightarrow f(x, y) = f_y(x)$ est continue, et soit $(H_n^x)_n$ le processus défini par :*

$$H_n^x = f_{Y_1} o f_{Y_2} o \dots o f_{Y_n}(x)$$

avec $(Y_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et de même loi Q et indépendante de x.
Si $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} H_n^x = H$ existe p.s *et ne dépend pas de x alors $\pi = \mathcal{L}(H)$ est une loi stationnaire pour le noyau P.*

Pour démontrer ce théorème on a besoin de la proposition suivante :

Proposition 2.3. *Avec ces notations, soit X_n^x le processus défini par :*

$$X_n^x = f_{Y_n} o X_{n-1}^x$$

et soit $\forall n$, $\pi_n^x = \mathcal{L}(X_n^x)$. Alors si $(\pi_n^x)_n$ converge vaguement vers π et ne dépend pas de x, alors π est une loi stationnaire pour le noyau P.

Démonstration. Soit $C(E) = \{$ les fonctions continues bornées sur $E\}$.
On a π_n^x converge vaguement vers π *i.e.*

$$\forall g \in C(E), \int_E g(x) \pi_n^x(d(x)) \longrightarrow \int_E g(x) \pi(dx)$$

Montrons que :

$$\int_E g(x_1) \pi_n^x(d(x_1)) = \int_{E \times F} g(f_y(x_1)) \pi_{n-1}^x(d(x_1)) Q(dy) \tag{2.1}$$

On a :

$$\pi_n^x(dx_1) = P[X_n^x \in dx_1] = P[f_{Y_n(X_{n-1}^x)} \in dx_1] = P[X_{n-1}^x \in f_y^{-1}(dx_1),\ Y_n \in dy]$$

Soit Q la loi des $(Y_n)_n$ on a donc

$$\int_E g(x_1) \pi_n^x(d(x_1)) = \int_F \int_F g(f_y(x_2)) \pi_{n-1}^x(d(x_2)) Q(dy) = \int_{E \times F} g(f_y(x_1)) \pi_{n-1}^x(d(x_1)) Q(dy)$$

Montrons maintenant que :

$$x_1 \longrightarrow \int_F g(f_y(x_1))Q(dy)$$

est continue.
En effet
$x \longrightarrow f_y(x)$ est continue (par hypothèse), donc si $(x_n)_n$ converge vers x_1 alors

$$f_y(x_n) \longrightarrow f_y(x_1)$$

et d'autre part g est continue car $g \in C(E)$ donc

$$\lim_{n\to\infty} g(f_y(x_n)) = g(\lim_{n\to\infty} f_y(x_n)) = g(f_y(x_1))$$

et comme g est bornée on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_F g(f_y(x_n))Q(dy) = \int_F \lim_{n\to\infty} g(f_y(x_n))Q(dy) = \int_F g(f_y(x_1))Q(dy)$$

donc

$$x_1 \to \int_F g(f_y(x_1))Q(dy) \;\text{ est continue}$$

En passant à la limite dans la relation (2.1) on aura :

$$\int_E g(x_1)\pi(dx_1) = \int_{E\times F} g(f_y(x_1))\pi(dx_1)Q(dy) \tag{2.2}$$

En effet

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g(x_1)\pi_n^x(dx_1) \text{ (car } \; g \in C(E) \text{ et } \pi_n^x \text{ converge vaguement vers } \pi)$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E\times F} g(f_y(x_1))\pi_{n-1}^x d(x_1)Q(dy) = \int_{E\times F} g(f_y(x_1))\pi(d(x_1)Q(dy)$$

(car $x_1 \longrightarrow \displaystyle\int_F g(f_y(x_1))Q(dy)$ est continue et π_n^x converge vaguement vers π).
En posant

$$g = \lim_{n\to\infty} g_n \text{ avec } g_n = \mathbb{I}_B,\; B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

dans la relation (2.2) on aura

$$(2.2) \Leftrightarrow \int_E \lim_{n\to\infty} g_n(x_1)\pi(dx_1) = \int_{E\times F} \lim_{n\to\infty} g_n(f_y(x_1))\pi(dx_1)Q(dy)$$

$$(2.2) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x_1)\pi(dx_1) = \lim_{n\to\infty} \int_{E\times F} g_n(f_y(x_1))\pi(dx_1)Q(dy)$$

$$(2.2) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_E \mathbb{I}_B(x_1)\pi(dx_1) = \lim_{n\to\infty} \int_{E\times F} \mathbb{I}_B(f_y(x_1))\pi(dx_1)Q(dy)$$

$$(2.2) \Rightarrow \pi(B) = \int_E P(B, x_1)\pi(dx_1)$$

i.e. π est stationnaire pour le noyau P. □

Démonstration du théorème 2.1.

$$\lim_{n\to\infty} H_n^x = H \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(H_n^x) = \mathcal{L}(H)$$

comme

$$\mathcal{L}(H_n^x) = \mathcal{L}(X_n^x)$$

et d'après la proposition (2.3), $\pi = \mathcal{L}(H)$ est stationnaire pour le noyau P. □

Chapitre 3

Fractions continues et Processus de Naissance et de Mort

3.1 Introduction - Généralités

Nous aurons besoin de la propriété dite "lack of memory" pour une variable aléatoire, que nous rappelons ci-dessous.

Définition 3.1. Une variable aléatoire X est dite sans mémoire si

$$\forall s, t, P[X > s + t/X > s] = P[X > t]$$

Proposition 3.1.

$$\begin{array}{rcl} X \textit{est sans mémoire} & \Leftrightarrow & \exists \lambda > 0 \textit{ tel que } X \in \mathcal{E}(\lambda), \\ & & P[X \in dx] = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x) \end{array}$$

Démonstration.
$\Rightarrow$) Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle λ, $\lambda > 0$. Pour montrer que X est sans mémoire, nous devons montrer que

$$P[X > s + t/X > s] = P[X > t], \forall s, t > 0$$

Nous avons

$$P[X > s + t/X > s] \quad = \quad \frac{P[X > s + t, X > s]}{P[X > s]}$$

Pour $s,\ t > 0$

$$\begin{aligned} \omega \in \{X > s+t\} \quad &\Rightarrow \quad \omega \in \{X > s\} \\ &donc \quad \{X > s+t\} \subset \{X > s\} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} P[X > s+t/X > s] &= \frac{P[X > s+t]}{P[X > s]} \\ &= \frac{\displaystyle\int_{s+t}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx}{\displaystyle\int_{s}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx} \end{aligned}$$

Comme on a :

$$\int_{s}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \quad = \quad -e^{-\lambda x}\Big]_{s}^{\infty} = e^{-\lambda s}$$

On conclue que :

$$P[X > s+t/X > s] \quad = \quad \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P[X > t]$$

On a montré que : $P[X > s+t/X > s] = P[X > t]$ et donc X est sans mémoire.
$\Leftarrow$) Supposons que X est sans mémoire on a donc

$$P[X > s+t/X > s] = P[X > t]$$

montrons alors que : $\exists \lambda > 0$ tel que $X \in \mathcal{E}(\lambda)$.
Par définition de la probabilité conditionnelle

$$P[X > s+t | X > s] = \frac{P[X > s+t, X > s]}{P[X > s]}$$

On a :

$$P[X > s+t, X > s] = P[X > s+t]$$

car

$$\{X > s+t\} \subset \{X > s\},\ s,t > 0$$

Donc
$$P[X > s+t] = P[X > t] \times P[X > s]$$
Si on pose $\varphi(t) = P[X > t]$
Cela revient à chercher une fonction continue $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tel que :
$$\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$$
Si $s,\ t = 0$:
$$\begin{array}{rcl} \varphi(0) = \varphi^2(0) & = & \varphi(0)(1-\varphi(0)) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \varphi(0) = 0 \text{ ou } \varphi(0) = 1. \end{array}$$

1.
$$\begin{array}{rcl} \varphi(0) = 0 & \Rightarrow & \varphi(s) = \varphi(0+s) = \varphi(0)\varphi(s) \\ & \Rightarrow & \varphi(s) = 0,\ \forall s \\ & \Rightarrow & \varphi \equiv 0 \ \text{ (fonction nulle)} \end{array}$$

2. Ou bien $\varphi(0) \neq 0$ on a alors $\varphi(0) = 1$.

Si $s, t \in \mathbb{N}$
$$\begin{array}{rcl} s \in \mathbb{N},\ \varphi(s+1) & = & \varphi(s)\varphi(1) \\ \varphi(s+2) & = & \varphi(s+1)\varphi(1) \\ & = & \varphi^2(1)\varphi(s) \\ & \vdots & \\ \varphi(s+n) & = & \varphi^n(1)\varphi(s) \end{array}$$
$\Rightarrow$
$$\begin{array}{rcl} \varphi(n+1) & = & \varphi^n(1)\varphi(1) = [\varphi(1)]^{n+1} \\ \varphi(n) & = & [\varphi(1)]^n\varphi(0) = [\varphi(1)]^n \\ \varphi(-n+n) & = & \varphi(0) = \varphi(-n)\varphi(n) \\ \Rightarrow \varphi(-n) & = & \dfrac{\varphi(0)}{\varphi(n)} = \dfrac{1}{\varphi(n)} \end{array}$$
Si $s, t \in \mathbb{Q}$
$$n \in \mathbb{N}^*, \varphi(n.\frac{1}{n}) = \varphi(1)$$

$$\begin{aligned}\varphi\left(2.\frac{1}{2}\right) &= \varphi(1)\\ &= \varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\\ &= \left(\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2\end{aligned}$$

donc $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = (\varphi(1))^{\frac{1}{2}}$.
Si $\varphi(1) = Cte\ C$ alors on doit poser $C > 0$.
On a donc $\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = (C)^{1/n}$.
Si $x \in \mathbb{Q}^+, x = \dfrac{p}{q},\ (p,\ q > 0)$.

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{p}{q}\right) &= \varphi\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\cdots+\frac{1}{q}\right)\\ &= \left(\varphi\left(\frac{1}{q}\right)\right)^p\\ &= ((\varphi(1))^{1/q})^p = (\varphi(1))^{p/q}\\ &= C^{p/q}\end{aligned}$$

φ définie sur $\mathbb{Q}^+$ et donc sur $\mathbb{Q}$.
$\varphi(s) > 0$
on a si $x \in \mathbb{Q}^+,\ x = \dfrac{p}{q}$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi\left(\frac{p}{q}\right) = (\varphi(1))^{p/q}\\ &= C^{p/q} = C^x\end{aligned}$$

Si $x \in \mathbb{R},\ \exists (x_n) \in \mathbb{Q}$ tel que $x_n \longrightarrow x$.
Par continuité de φ au point x.
On a

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(\lim x_n)\\ &= \lim_n \varphi(x_n)\end{aligned}$$

$x_n \in \mathbb{Q},\ \varphi(x_n) = C^{x_n} = e^{x_n \ln C}$.
On a posé $C > 0$
donc

$$\begin{aligned}
\lim_n \varphi(x_n) &= \lim_n e^{x_n \ln C} \\
&= e^{(\lim_n) \ln C} \\
&= e^{x \ln C}
\end{aligned}$$

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(s) = e^{s\lambda},\ \forall s > 0$
c'est à dire $P[X > s] = e^{s\lambda}$
D'où l'implication est démontrée. $\square$

3.2 Processus markoviens de sauts et chaîne de Markov à temps continu

Définition 3.2. Soit E un ensemble fini ou dénombrable, $(X_t)_t$ un processus à valeurs dans E et soit $(\tau_n)_n$ la suite *iid*, de variables aléatoires définie pour $X_0 = x$, par

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \inf\{t, X_t \neq x\} \\
\tau_2 &= \inf\{t > \tau_1, X_t \neq X_{\tau_1}\} \cdots \tau_n
\end{aligned}$$

Les instants τ_n sont les instants de saut du processus et $(X_t)_t$ est appelé un processus de saut.

Définition 3.3. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable $(X_t)_t$ est un processus à valeurs dans E. $(X_t)_t$ est un processus de markov si :
$\forall$ f mesurable, $f : E \longrightarrow E$ bornée

$$\mathbb{E}[f(X_t)/\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(X_t)/X_s] \text{ où } \mathcal{F}_s = \sigma(X_t,\ t \leq s)$$

Proposition 3.2. *Soit $(X_t)_t$ un processus de sauts à valeurs dans E dénombrable et $(\tau_n)_n$ la suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi F tel que*
$X_0 = x_0,\ (X_t = x_1,\ t < \tau_1),\ (X_t = x_2,\ \tau_1 \leq t < \tau_2), \cdots, (X_{\tau_n} = x_n,\ \tau_n > t)$

$$\begin{aligned}
(X_t)_t \textit{ est un processus de Markov } &\Leftrightarrow \exists\ \lambda,\ F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \\
& \quad \textit{i.e. les } \tau_n \textit{ sont de loi exponentielle}
\end{aligned}$$

Idée de la démonstration. $\Rightarrow$) On veut montrer que si $(X_t)_t$ est processus de Markov alors τ vérifie la propriété :

$$P_x[\tau_1 > s + t/\tau_1 > s] = P_x[\tau_1 > t],\ \forall\ s,\ t \geq 0 \tag{3.1}$$

Si (3.1) est vraie alors $\exists\ \lambda,\ \tau \in \mathcal{E}(\lambda)$.
On doit donc montrer (3.1).
Soit $F_x(t) = P_x[\tau \leq t]$.

$$P_x[\tau > s + t/\tau > s] = \frac{P_x[\tau > s + t, \tau > s]}{P_x[\tau > s]}$$

$s,\ t \geq 0,\ \tau > s + t \Rightarrow \tau > s.$

$$\begin{aligned}
\{\tau > s + t, \tau > s\} &= \{\tau > s + t\} \\
P_x[\tau > s + t/\tau > s] &= \frac{P_x[\tau > s + t]}{P_x[\tau > s]} \\
&= \frac{1 - P_x[\tau \leq s + t]}{1 - P_x[\tau \leq s]} \\
&= \frac{1 - F_x(s + t)}{1 - F_x(s)}
\end{aligned}$$

$$(3.1) \Leftrightarrow \frac{1 - F_x(s + t)}{1 - F_x(s)} = 1 - F_x(t) \tag{3.2}$$

La loi de τ vérifie (3.2). $\square$

Définition 3.4. Un processus de naissance et de mort $(X_t)_t$ est un processus de markov, à valeurs dans $\mathbb{N}$ c'est à dire il vérifie la propriété de Markov suivante :

$$E[f(X_t)/\mathcal{F}_s] = E[f(X_t)/X_s] \tag{3.3}$$

pour $f \geq 0$ bornée et mesurable, $\forall\ t > s$ si $\mathcal{F}_s = \sigma(X_u,\ u \leq s)$.
(3.3) $\Leftrightarrow P[X_t = y/\mathcal{F}_s] = P[X_t = y/X_s]$

Définitions 3.1. Soit un processus stochastique $\{X(t);\ t \geq 0\}$, à états discrets $n = 0, 1, 2, \cdots$ et homogène dans le temps, c'est-à- dire tel que :

$$P[X(t + s) = j/X(s) = i] = P_{ij}(t)$$

ne dépend pas de s.
Alors $\{X(t);\ t \geq 0\}$ est un processus de naissance et de mort s'il satisfait les conditions suivantes :

1.

$$P_{i,i+1}(dt) = P(X_{t+dt} = i+1/X_t = i) = \lambda_i dt + o(dt),\ i \geq 0$$

est la probabilité d'avoir une naissance pendant laps de temps dt (passage de l'état i à l'état $i+1$).

2.

$$P_{i,i-1}(dt) = P(X_{t+dt} = i-1/X_t = i) = \mu_i dt + o(dt),\ i \geq 1$$

est la probabilité d'avoir une mort pendant laps de temps dt (passage de l'état i à l'état $i-1$).

3.

$$P_{i,i}(dt) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)dt + o(dt),\ i \geq 0$$

λ_i et μ_i sont appelés respectivement les taux de naissance et de mort du processus.

Remarque 3.1. $(X_t)_t$ est un processus Markovien de sauts

Proposition 3.3. *Les équations de Chapman-Kolmogorov d'un processus de naissance et de mort sont :*

$$\begin{cases} P'_{ij}(t) = \lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j)P_{ij}(t) + \mu_{j+1}P_{i,j+1}(t),\ j \geq 1 \\ P'_{i0}(t) = -\lambda_0 P_{i,0}(t) + \mu_1 P_{i,1}(t) \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) = 1 \end{cases}$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
P_{ij}(t+dt) &= P(X_{t+dt}=j) \\
&= P[X_{t+dt}=j,\ \cup_{k=j,j-1,j+1}(X_t=k)] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P[X_{t+dt}=j,\ X_t=k] \\
&= P[X_{t+dt}=j,\ X_t=j]+P[X_{t+dt}=j,\ X_t=j+1] \\
&+ P[X_{t+dt}=j,\ X_t=j-1]+\sum_{|i-j|\geq 2} P[X_{t+dt}=j,\ X_t=i] \\
&= P[X_{t+dt}=j/\ X_t=j+1]P(X_t=j) \\
&+ P[X_{t+dt}=j/\ X_t=j+1]P(X_t=j+1) \\
&+ P[X_{t+dt}=j,\ X_t=j-1]P(X_t=j-1) \\
&= P_{j,j}(dt)P_{ij}(t)+P_{j+1,j}(dt)P_{i,j+1}(t)+P_{j-1,j}(dt)P_{i,j-1}(t) \\
&= [1-(\lambda_j+\mu_j)dt]P_{ij}(t)+\mu_{j+1}dtP_{i,j+1}(t)+\lambda_{j-1}dtP_{i,j-1}(t) \\
&= P_{ij}(t)-(\lambda_j+\mu_j)P_{ij}(t)dt+\mu_{j+1}P_{i,j+1}(t)dt+\lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t)dt \\
\Rightarrow P_{ij}(t+dt)-P_{ij}(t) &= \lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t)dt-(\lambda_j+\mu_j)P_{ij}(t)dt+\mu_{j+1}P_{i,j+1}(t)dt
\end{aligned}
$$

On conclue que :

$$
\begin{aligned}
P'_{ij}(t) &= \lim_{dt\to 0}\frac{P_{ij}(t+dt)-P_{ij}(t)}{dt} \\
&= \lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t)-(\lambda_j+\mu_j)P_{ij}(t)+\mu_{j+1}P_{i,j+1}(t)
\end{aligned}
$$

par suite :

$$P'_{i0}(t)=-\lambda_0P_{i0}(t)+\mu_1P_{i,1}(t)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}P_{ij}(t)=1$$

□

3.2.1 Régime transitoire

$X=(X_t)_{t\in T}$ est non stationnaire, le système est instable, cependant la résolution analytique des équations de Kolmogorov se montre complexe.
On ne considère donc généralement que la distribution stationnaire du processus.

3.2.2 Régime permanent

X est stationnaire c'est à dire $P_{ij}(t) = P_{ij}$.
Si X admet une solution stationnaire, les limites $\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = P_j$ existent et sont indépendantes de l'état initial du processus et satisfont les équations :

$$\begin{cases} -\lambda_0 P_0 + \mu_1 P_1 = 0 \\ \lambda_{j-1}P_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j)P_j + \mu_{j+1}P_{j+1} = 0, \ j \geq 1 \end{cases}$$

En écrivant en chaque état l'égalité on retrouve :

$$\begin{cases} \mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0 \\ \mu_2 P_2 + \lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1 + \lambda_1 P_1 \\ \mu_3 P_3 + \lambda_1 P_1 = \mu_2 P_2 + \lambda_2 P_2 \\ \vdots \\ \mu_{j+1}P_{j+1} + \lambda_{j-1}P_{j-1} = \mu_j P_j + \lambda_j P_j \end{cases}$$

Ces équations se simplifient successivement pour donner finalement le système :

$$\begin{cases} \mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0 \\ \mu_2 P_2 = \lambda_1 P_1 \\ \vdots \\ \mu_j P_j = \lambda_{j-1}P_{j-1} \end{cases}$$

On en déduit alors :

$$P_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j} P_0, \ \ j \geq 1$$

Comme

$$\begin{aligned} \sum_{j\geq 0} P_j = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad P_0 + \sum_{j\geq 1}\prod_{i=1}^{j} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} P_0 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad P_0 = \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1} \end{aligned}$$

Pour qu'une distribution stationnaire existe, il faut donc que la somme figurant dans l'expression ci-dessus converge.
Notons que ceci a toujours lieu si l'ensemble des états des processus en question est fini.

Définition 3.5. Les probabilités conditionnelles définies pour $0 \leq s < t$ par :

$$P_{ij}(s,t) = P(X_t = j/X_s = i)$$

sont appelées probabilités de transitions de la chaîne de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$.

Définition 3.6. La chaîne de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ est dite homogène ou à probabilités de transitions stationnaires si ces nombres sont indépendants du temps t.
On écrit $P_{ij}(s,t) = P_{ij}(t-s)$.
$(X_t)_{t\geq 0}$ est dit aussi processus de Markov homogène.

Proposition 3.4. *Si $(X_t)_t$ est un processus à accroissements indépendants alors $(X_t)_t$ est un processus de Markov.*

Démonstration. Soient $i, j, k \in E$ et $u < s < t \in T$
On doit montrer que :

$$\begin{aligned}
P[X_t = j/X_s = i, X_u = k] &= P[X_t = j/X_s = i] \\
&= \frac{P[X_t = j, X_s = i, X_u = k]}{P[X_s = i, X_u = k]} \\
&= \frac{P[X_t - X_s = j - i, X_s - X_u = i - k, X_u = k]}{P[X_s - X_u = i - k, X_u = k]} \\
&\overset{PAI}{=} \frac{P[X_t - X_s = j - i]P[X_s - X_u = i - k]P[X_u = k]}{P[X_s - X_u = i - k]P[X_u = k]} \\
&= P[X_t - X_s = j - i]
\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
P[X_t = j/X_s = i] &= \frac{P[X_t = j, X_s = i]}{P[X_s = i]} \\
&= \frac{P[X_t - X_s = j - i, X_s = i]}{P[X_s = i]} \\
&\overset{PAI}{=} \frac{P[X_t - X_s = j - i]P[X_s = i]}{P[X_s = i]} \\
&= P[X_t - X_s = j - i]
\end{aligned}$$

Ainsi $(X_t)_{t\in T}$ est un processus de Markov. $\square$

Exemple 3.1. Si $(X_t)_t$ est un processus à accroissements indépendants, tel que :

$$P[X_t - X_s = j] = \frac{\left(\int_s^t \rho(u)du\right)^j}{j!} \exp\left(- \int_s^t \rho(u)du\right)$$

pour $j = 0, 1, 2, \ldots,\ s < t$ où $\rho(u),\ u \geq 0$ est une fonction continue (non négative) alors (X_t) est par définitions un processus de Poisson et c'est un Markov d'aprés la proposition (3.4).
D'ailleurs :

$$\begin{aligned} P_{ij}(s,t) &= P(X_t = j/X_s = i) \\ &= \frac{P(X_t = j, X_s = i)}{P(X_s = i)} \\ &= \frac{P[X_t - X_s = j - i]P[X_s = i]}{P[X_s = i]} \\ &= \begin{cases} \frac{\left(\int_s^t \rho(u)du\right)^{j-i}}{(j-i)!} \exp\left(- \int_s^t \rho(u)du\right) & \text{pour } j \geq i \\ 0 & \text{si } j < i \end{cases} \end{aligned}$$

On pose $\rho(u) = \lambda$ (constante), on a pout tout $u \geq 0$.

$$P_{ij}(s,t) = \begin{cases} \frac{[\lambda(t-s)]^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda(t-s)} & \text{pour } i \leq j \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$$

Dans ce cas (X_t) est un processus de Poisson de paramètre λ.

Si $X_t = \sum_{k=0}^{N_t} Y_k$, $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ alors (X_t) est un processus à accroissements indépendants, donc de Markov d'après la proposition (3.4).

Démonstration.

$$\begin{aligned}
P_{ij}(s,t) &= P[X_t = j/X_s = i] \\
&= \frac{P[X_t = j, X_s = i]}{P[X_s = i]} \\
&= \frac{P[X_t - X_s = j - i, X_s = i]}{P[X_s = i]} \\
&\overset{PAI}{=} \frac{P[X_t - X_s = j - i]P[X_s = i]}{P[X_s = i]} \\
&= P[X_t - X_s = j - i]
\end{aligned}$$

Donc par définition de $(X_t)_t$.

$$\begin{aligned}
P_{ij}(s,t) &= P\left[\sum_0^{N_t} Y_k - \sum_0^{N_s} Y_k = j - i\right] \\
&= P\left[\sum_{N_s}^{N_t} Y_k = j - i\right] \\
&= P\left[\left\{\sum_{N_s}^{N_t} Y_k = j - i\right\} \cap \left\{\cup_l \{N_t - N_s = l\}\right\}\right] \\
&= P\left[\cup_l \left\{\sum_{N_s}^{N_t} Y_k = j - i\right\} \cap \left\{N_t - N_s = l\right\}\right] \\
&= \sum_l P\left[\sum_{N_s}^{N_t} Y_k = j - i, N_t - N_s = l\right] \\
&= \sum_l P\left[\sum_0^{l} Y_k = j - i, N_t - N_s = l\right] \\
&= \sum_l P\left[\sum_0^{l} Y_k = j - i\right] P\left[N_t - N_s = l\right] \\
&= \sum_l f^{*l}(j-i)\frac{[\lambda(t-s)]^l}{l!}e^{-\lambda(t-s)}
\end{aligned}$$

où

- $f = L(y_k)$

– f^{*l} est la $l^{\text{ième}}$ convolution de f.

□

3.3 Eléments sur la formule d'inversion de la transformée de Laplace

Définition 3.7. Si f est une fonction, on appelle transformée de Laplace de f, la fonction de la variable complexe p, $Lf(p)$ définie par :

$$Lf(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

Plus généralement si X est une variable aléatoire, on appelle transformée de Laplace de X (ou de la loi de X) la fonction

$$s \longrightarrow \mathbb{E}[e^{-sX}]$$

Propriétés 3.1.

1) Unicité : La transformée de Laplace est unique; c'est à dire, si deux fonctions f et g ont la même transformée de Laplace alors elles sont égales.

2) Linéarité : Si α et β sont des constantes quelconques et, $F(t)$ et $G(t)$ des fonctions dont les transformées de Laplace sont respectivement, $f(s)$ et $g(s)$ alors

$$L(\alpha F(t) + \beta G(t)) = \alpha L(F(t) + \beta L(G(t) = \alpha f(s) + \beta g(s)$$

Exemple 3.2. La transformée de Laplace d'une constante

$$\forall s > 0, \quad L1(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \frac{1}{s}$$

Exemple 3.3. La transformée de Laplace d'une fonction exponentielle.
Soit $a \in \mathbb{R}$

$$\forall s > a, \quad Le^{at}(s) = \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st}dt = \frac{1}{s-a}$$

Proposition 3.5. *Soient f, g deux fonctions.*
La transformée de Laplace du produit de convolution $f * g$ défini par :

$$\forall t > 0, \quad (f * g)(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx$$

vérifie :

$$L(f * g(s)) = Lf(s)Lg(s)$$

Preuve.

$$L(f * g)(s) = \int_0^\infty \int_0^t f(t-x)g(x)e^{-st}dxdt$$

En posant $u = t - x \quad$ et $\quad v = x$, on obtient

$$L(f * g)(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(u)g(v)e^{-(u+v)}dudv$$

En utilisant le théorème de Fubini, on a bien :

$$L(f * g)(s) = Lf(s)Lg(s)$$

□

Proposition 3.6. *Soit f une fonction, dérivable et de dérivée continue, alors*

$$Lf'(s) = sLf(s) - f(0)$$

Preuve.

$$Lf'(s) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$Lf'(s) = sLf(s) - f(0)$$

□

Définition 3.8. Soit f une fonction, $(Lf)(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$, pour $s \in \mathbb{C}$.
$\alpha \in \mathbb{R}_+$, α =abcisse de convergence

$$= \inf\{x \ \text{ tel que } \int e^{-xt}|f(x)|dt < \infty\}$$

car pour $s \in \mathbb{C}$ avec $s = x + iy,\ R(s) > \alpha,\ F(s)$ a un sens.

Formule d'inversion :
Avec des conditions adéquates sur f (cf. [Doetsch])
si $F(s) = Lf(s)$ alors on a :

$$f(t) = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} Res(z_k)$$

si $z_1, ..., z_n$ sont les pôles de $e^{st}F(s)$.

Remarquons $z_1, ..., z_n \in \{z, R(z) < \alpha\}$ si α =abscise de convergence,
car dans les conditions $e^{st}F(s)$ est analytique dans $\{z, R(z) > \alpha\} = A_\alpha$

$F^{'}(s)$ existe $\forall s \in A_\alpha$, on peut dériver sous le signe $\int$.

Démonstration. (idée :) Si $F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$, soit $s = x + iy,\ x > \alpha$ alors :

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-xt-iyt}f(t)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-iyt}e^{-xt}f(t)dt \end{aligned}$$

On définit :

$$\bar{f} = \begin{cases} f & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Notée encore f

Donc $F(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{-iyt}e^{-xt}f(t)dt$ i.e $F(x, y) = \int_{-\infty}^\infty e^{-yt}g(t)dt$

Si $g(t) = e^{-xt}f(t)$ c'est à dire que : $F(x, y) = \hat{g}(y) = F(e^{-xt}f(t))(y)$,

Or la formule d'inversion de Fourier assure que :

$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \hat{g}(y)e^{iyt}dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(x, y)e^{iyt}dy$

$$e^{-xt}f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty F(s)dse^{iyt} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty e^{st}F(s)ds$$

On choisit le contour $\Gamma_R = AB \cap C_R$ et on applique le théorème des résidus à $e^{st}F(s)$

Les pôles de F sont dans $z,\ R(z) < \alpha = A_\alpha$

$$\lim_{y\to 0}\int_{AB} e^{st}F(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{st}F(s)ds$$
$$\lim_{R\to 0}\int_{C_R} e^{st}F(s)ds = 0$$

La formule des résidus pour une fonction F sur un contour orienté C

$$\int_C F(z)dz = 2i\pi\sum_{k=1}^{n} Res(z_k)$$

$z_1, \cdots z_n$ sont des pôles de F dans C_R

□

3.4 Fractions continues et Processus de Naissance et de mort

On considère un processus de Naissance et de Mort $(X_t)_t$ de taux $\lambda_r > 0$ et $\mu_r > 0$, $\forall r \geq 0$ avec $X_0 = m \geq 0$ et,

$$P[X_{t+dt} = r+1|X_t = r] = \lambda_r dt + 0((dt)^2)$$
$$P[X_{t+dt} = r-1|X_t = r] = \mu_r dt + 0((dt)^2)$$

Proposition 3.7. *Soit* $p_r(t) = P[X_t = r]$
Alors $p_r(t)$ *obéit aux équations différentielles :*

$$(S)\begin{cases} p\prime_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \\ p\prime_r(t) = \lambda_{r-1}p_{r-1}(t) - (\lambda_r + \mu_r)p_r(t) + \mu_{r+1}p_{r+1}(t) \end{cases}$$

Démonstration. En utilisant la transformée de Laplace, on pourra résoudre les équations précédentes, soit :

$$p_r(s) = L(p_r)(s)$$

$$L(p_r)(s) = F_r(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} p_r(t)dt$$

$$\begin{aligned} L(p\prime_r)(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} p\prime_r(t)dt \\ &= \left[e^{-st}p_r(t)\right]_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} e^{-st}p_r(t)dt \\ &= -p_r(0) + sL(p_r)(s) \\ &= -p_r(0) + sp_r(s) \end{aligned}$$

Or $p_r(0) = P[X_0 = r] = \delta_{r,m}$ (car on a supposé que $X_0 = m$)

On a : $L(p\prime_0)(s) = -\lambda_0 p_0(s) + \mu_1 p_1(s)$

$\Rightarrow -p_0(0) + sp_0(s) = -\lambda_0 p_0(s) + \mu_1 p_1(s)$

$\Rightarrow -\delta_{0,m} + sp_0(s) = -\lambda_0 p_0(s) + \mu_1 p_1(s)$

Et $L(p\prime_r)(s) = p_r(0) + p_r(s)$

Donc $L(p\prime_r)(s) = \delta_{r,m} + p_r(s)$

D'où : $sp_r(s) - \delta_{r,m} = \lambda_{r-1}p_{r-1}(s) - (\lambda_r + \mu_r)p_r(s) + \mu_{r+1}p_{r+1}(s)$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 p_1(s) &= (\lambda_0 + s)p_0(s) - \delta_{0,m} \cdots (1) \\ \mu_{r+1}p_{r+1}(s) &= -\lambda_{r-1}p_{r-1}(s) + (\lambda_r + \mu_r + s)p_r(s) - \delta_{r,m} \cdots (2) \end{cases}$$

Donc par la transformée de Laplace on a :

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow -\delta_{0,m} + sp_0(s) = -\lambda_0 p_0(s) + \mu_1 p_1(s) \\ &\Leftrightarrow -\mu_1 p_1(s) = -(\lambda_0 + s)p_0(s) + \delta_{0,m} \\ &\Leftrightarrow \mu_1 p_1(s) = (\lambda_0 + s)p_0(s) - \delta 0, m \end{aligned}$$

Donc on a : $-p_r(0) + sp_r(0) = \lambda_{r-1}p_{r-1}(s) - (\lambda_r + \mu_r)p_r(s) + \mu_{r+1}p_{r+1}(s)$
D'où :

$$(S\prime) \begin{cases} \mu_1 p_1(s) &= (\lambda_0 + s)p_0(s) - \delta_{0,m} \cdots (1) \\ \mu_{r+1}p_{r+1}(s) &= (\lambda_r + \mu_r + s)p_r(s) - \lambda_{r-1}p_{r-1}(s) - \delta_{r,m} \end{cases}$$

$\square$

Introduisons la notation :

$$L_r = \lambda_0 \times \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_r$$

$$M_r = \mu_1 \times \mu_2 \times \cdots \times \mu_r$$

Et

$$f_0^{(m)}(s) = p_0(s) = L(p_0)(s)$$
$$f_r^m(s) = (-1)^r M_r p_r(s) = L(p_r)(s)$$

Alors on a :

Proposition 3.8.

$$\begin{aligned} f_0(s) &= \cfrac{1}{\lambda_0 + s + \cfrac{f_1(s)}{f_0(s)}} \\ &= \cfrac{1}{\lambda_0 + s - \cfrac{\lambda_0\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1 + s - \cfrac{\lambda_1\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2 + s - \cdots - \cfrac{\lambda_{r-1}\mu_r}{\lambda_r + \mu_r + s + \cfrac{f_{r+1}(s)}{f_r(s)}}}}} \end{aligned}$$

$\forall r \geq 1$

Démonstration.

$$\begin{aligned} (1) \text{ de } (S\prime) &\Leftrightarrow -\mu_1 p_1(s) = \delta_{0,m} - (\lambda_0 + s) f_0^m(s) \\ &\Leftrightarrow f_1^m(s) = \delta_{0,m} - (\lambda_0 + s) f_0^m(s) \end{aligned}$$

$$-\mu_{r+1}(-1)^r M_r p_{r+1} = (-1)^{r+1} M_{r+1} p_{r+1} = f_{r+1}^{(m)}(s)$$

$$\begin{aligned} &= -(-1)^r M_r p_r(s)(\lambda_r + \mu_r + s) + \lambda_{r-1}(-1)^r M_r p_{r-1}(s) + (-1)^r M_r \delta_{r,m} \\ &= -f_r^m(s)[\lambda_r + \mu_r + s] - \lambda_{r-1}\mu_r f_{r-1}^{(m)}(s) + (-1)^r M_r \delta_{r,m} \end{aligned}$$

Donc :

$$(S\prime) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1^{(m)}(s) = \delta_{0,m} - (\lambda_0 + s) f_0^{(m)}(s) \\ f_{r+1}^{(m)}(s) = -(\lambda_r + \mu_r + s) f_r^{(m)}(s) - \lambda_{r-1}\mu_r f_{r-1}^{(m)}(s) + (-1)^r M_r \delta_{r,m} \end{cases}$$

Soit $m = 0$ et $f_r^{(0)}(s) = f_r(s)$, alors :

$$(S\prime) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1^{(0)}(s) = 1 - (\lambda_0 + s) f_0(s) \cdots (1) \\ f_{r+1}(s) = -(\lambda_r + \mu_r + s) f_r(s) - \lambda_{r-1}\mu_r f_{r-1}(s) \cdots (2) \end{cases}$$

La transformée de Laplace de $(S\prime)$ définit alors la fraction continue.

$$\begin{aligned} (1) \text{ de } (S\prime) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{f_1(s)}{f_0(s)} + (\lambda_0 + s) = \frac{1}{f_0(s)} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\dfrac{f_1(s)}{f_0(s)} + (\lambda_0 + s)} = f_0(s) \\ &\Leftrightarrow \quad f_0(s) = \frac{1}{\lambda_0 + s + \dfrac{f_1(s)}{f_0(s)}} \end{aligned}$$

De même, on peut écrire :

$$f_2(s) = -(\lambda_1 + \mu_1 + s) f_1(s) - \lambda_0 \mu_1 f_0(s)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -\frac{f_2(s)}{f_1(s)} &= (\lambda_1 + \mu_1 + s) + \lambda_0 \mu_1 \frac{f_0(s)}{f_1(s)} \\ \Leftrightarrow \frac{f_0(s)}{f_1(s)} &= -\frac{1}{\lambda_0 \mu_1} \frac{f_2(s)}{f_1(s)} - \frac{\lambda_1 + \mu_1 + s}{\lambda_0 \mu_1} \\ \Leftrightarrow f_0(s) &= \frac{1}{\lambda_0 + s - \dfrac{\lambda_0 \mu_1}{\left[(\lambda_1 + \mu_1 + s) + \dfrac{f_2(s)}{f_1(s)} \right]}} \end{aligned}$$

En itérant le procédé, on construit ainsi la fraction continue ; après calcul de : $\dfrac{f_2}{f_1}, \dfrac{f_3}{f_2}, \cdots$etc.

$$
\begin{aligned}
f_0 &= \frac{1}{(\lambda_0+s)+\dfrac{f_1}{f_0}} \\
&= \cfrac{1}{(\lambda_0+s)-\cfrac{\lambda_0\mu_1}{\lambda_1+\mu_1+s-\cfrac{\lambda_1\mu_2}{\lambda_2+\mu_2+s-\cdots-\cfrac{\lambda_{r-1}\mu_r}{\lambda_r+\mu_r+s+\cfrac{f_{r+1}}{f_r}}}}}, \ \forall r \geq 1
\end{aligned}
$$

D'où :$f_0 = K\left(\dfrac{1}{\lambda_0+s}, \dfrac{\lambda_{n-1}\mu_n}{\lambda_n+\mu_n+s}\right)$ $\square$

Considérons la fraction J définie par :

$$J = \frac{1}{\lambda_0+s-}\ \frac{\lambda_0\mu_1}{\lambda_1+\mu_1+s-}\ \frac{\lambda_1\mu_2}{\lambda_2+\mu_2+s-}\cdots$$

En utilisant le théorème de Stieltjes, on pourra montrer que la fraction J est convergente $\forall s \in R$, tel que R est la portion du plan définie par :

$$R = \{s, |args| < \pi\}$$

Nous indiquons sa valeur par f_0 et on définit $f_1, f_2, f_3, \cdots$ par récurrence.
$p_r(s)$ définie comme suit :

$$p_r(s) = L(p_r(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} p_r(t)dt$$

est la solution du système aux équations différentielles $(S\prime)$.
En utilisant la transformée de Laplace inverse L^{-1} on définit $p_r(t)$ par :

$$p_r(t) = L^{-1}(p_r(s)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{st} p_r(s)d\omega$$

où $s = c + i\omega,\ c > 0$.
Notre but c'est d'utiliser les fractions continues $p_r(s)$ pour calculer la solution

$p_r(t)$ du système (S).
Pour cela on fait introduire $p_{r,n}(s)$ qui est la réduite de la fraction continue $p_r(s)$.
On a alors :

$$p_{r,n}(t) = L^{-1}(p_{r,n}(s)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{st} p_{r,n}(s) d\omega$$

avec $s = c + i\omega,\ c > 0$ et $p_{r,n}(t)$ la réduite de la fraction continue $p_r(t)$.
On applique l'estimateur de Henrici-Pfluger pour tronquer l'erreur de fraction convergente.

Théorème 3.1. *$p_{r,n}(t)$ et $p_r(t)$ sont définis respectivement par :*

$$p_{r,n}(t) = L^{-1}(p_{r,n}(s)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{st} p_{r,n}(s) d\omega$$

et

$$p_r(t) = L^{-1}(p_r(s)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{st} p_r(s) d\omega,\ (r \geq 0)$$

Alors

A) *Pour toute $r \geq m$, il existe une fonction $k(t)$ indépendante de n tel que :*

$$|p_r(t) - p_{r,n}(t)|^2 \leq k(t) \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(\sqrt{\lambda_{r+k}} + 2\sqrt{c})^{1/x_n}(\sqrt{\mu_{r+k}} + 2\sqrt{c})^{1/x_n}}{(1 + 2\sqrt{c}/\sqrt{\lambda_{r+k}})(1 + 2\sqrt{c}/\sqrt{\mu_{r+k}})}$$

avec $x_n = r - m + \frac{7}{4} + \frac{n}{2}$.
Un résultat similaire reste valable pour $0 \leq r \leq m$.

B) *S'il existe une constante α tel que : $0 < \lambda_r \leq \alpha_r$ et $0 < \mu_r \leq \alpha_r$ pour $r \geq 1$ alors $\lim_{n\to\infty} p_{r,n}(t) = p_r(t)$*

Remarque 3.2. Les estimateurs de calcul peuvent être obtenus par la vitesse de la convergence de $p_{r,n}(t)$ vers sa limite $p_r(t)$.

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons synthétisé les propriétés de base des fractions continues, suivant les travaux de Wall et de Jones. Notre but initial était l'étude des chaînes de markov itératives dans le cas particulier où les itérations sont produites par des fractions continues. Les travaux de Jones sur les fractions continues et les processus de naissance et de mort ont retenu notre attention. Nous avons donc synthétisé les résultats principaux des travaux de Murphy et O'donohoe résumés dans Jones. Le résultat est que l'introduction des fractions continues permet une approximation des probabilités $p_r(t)$.
Les perspectives de ce travail sont les méthodes d'approximation des $p_r(t)$ et les algorithmes et programmes de calcul sur des données réelles. Cela peut être d'un bon apport pour l'étude des processus de naissance et de mort (cf. [Lenin]).

Bibliographie

[1] H. S. Wall (1948). *Analytic theory of continued fractions.* Van Nostrand.

[2] W.B. Jones et W.J. Thron (1980). *Continued fractions.* Addison- Wesley.

[3] G. Letac (1986). *A contraction principle for certain markov chains and its applications.* Contemp. Math. 50, 263-273.

[4] W. Feller (1966). *An introduction to probability theory and its applications.* Tome II, 2eme édition, Willey.

[5] HEDJEM.A. Mémoire de Master(2012). *Fractions Continues et Systèmes Dynamiques*, Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou

[6] Murphy, J.A., and O'Donohoe, M.R., (1977). *A class of algorithms for obtaining rational approximants to functions which are defined by power series.* J. appl. math, and phys. (ZAMP) 28, pp 1121-1131.

[7] Murphy, J.A., and O'Donohoe, M.R., (1975). *Some properties of continued fractions with applications in Markov processes.* J. inst. math, applics. 16, pp 57-71.

[8] Parthasarathy, P.R. and Lenin, R.B., (1998). *A Birth and Death process related to the Rogers-Ramanujan continued fraction.* Journal of mathematical analysis and applications 224, pp 297-315.

[9] Doetsch, G. (1970). *Introduction to theory and application of the Laplace transform.* Edition Birkhauser.