

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOULOU MAMMERI DE TIZI-OUZOU
FACULTE DE GENIE DE LA CONSTRUCTION
DEPARTEMENT DE GENIE-MECANIQUE



Mémoire



*De Fin D'études
En vue de l'obtention du diplôme
De Master académique en Génie mécanique
Option : ENERGETIQUE*

THEME
THEME

**SIMULATION NUMERIQUE DES ECHANGES
THERMIQUES PAR CONVECTION FORCEEE DANS
UN CANAL PLAN, REMPLI D'UN MILIEU POREUX**

Dirigé par :
Mr : A. ABDEDYOU

Réalisé par :
Nacer KOULAL

PROMOTION
2010/2011

Remerciements

Dans un premier Temps, je tiens à exprimé ma sincère gratitude à M. Abdedou pour sa grande disponibilité, son solide appui, ses conseils éclairés et ses encouragements sans cesse durant tout ces mois de travail.

Mes remerciements s'adressent également à mes amis Lounes (Architecte), Fares, Fatah ainsi Hayet et tout les ami (es) de la promotion.

Nos remerciements vont également aux membres du jury pour l'honneur qu'ils nous font en acceptons d'examiner et de juger notre travail.

Nous remercions aussi tous ceux et celles qui ont contribué de près ou de loin pour l'accomplissement de ce modeste travail.

Enfin, toute mon affection à mes parents qui ont toujours répondu présents, été sources de soulagement, et sans qui, tout aurait été plus compliqué. A Lynda, sans qui le monde serait moins intéressant, vos conseils et votre soutien m'ont donné du courage. Merci.

Sommaire

Sommaire

<i>Introduction générale :</i>	<i>1</i>
--------------------------------------	----------

Premier Chapitre

Généralités et recherche bibliographiques

<i>I.1. Introduction :</i>	<i>3</i>
<i>I.2. Généralités sur les transferts de chaleur :</i>	<i>3</i>
<i>I.3. Notions sur la convection :</i>	<i>3</i>
I.3.1. Définition :	3
I.3.2. Type de convection :	4
I.3.2.1. La convection naturelle :	4
I.3.2.2. Convection forcée :	5
<i>I.4. Milieu poreux :</i>	<i>5</i>
I.4.1. Définition :	5
I.4.2. Classification des milieux poreux :	6
I.4.3. Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.) :	7
I.4.4. Paramètres caractéristique d'un milieu poreux :	8
I.4.4.1. La porosité :	8
I.4.4.2. Surface spécifique :	10
I.4.4.3. Saturation :	10
I.4.4.4. Perméabilité absolue :	11

I.4.4.5. Perméabilité effective :	12
I.4.4.6. Perméabilité relative :	12
I.4.4.7. Viscosité dynamique effective μ_{eff} :	13
I.4.4.8. Conductivité thermique effective K_{eff} :	13
I.4.5. Différents modèles d'écoulements dans les milieux poreux :	15
I.4.5.1. Modèle de Darcy :	15
I.4.5.2. Modèle de Darcy-Brinkman :	16
I.4.5.3. Modèle de Darcy-Forchheimer :	16
I.4.5.4. Modèle de Darcy-Forchheimer-Brinkman (Modèle général) :	17
I.5. Recherche bibliographique :	17
I.6. Conclusion :	24

Deuxième Chapitre

Modélisation mathématique

II.1. INTRODUCTION :	25
II.2. GEOMETRIE DU DOMAINE PHYSIQUE :	25
II.3. EQUATIONS REGISSANT LE CHAMP DYNAMIQUE :	27
II.3.1. Hypothèses simplificatrices pour le champ dynamique :	27
II.3.2. Equation de continuité :	27
II.3.3. Equations de la quantité de mouvement :	27
• Cas d'un canal sans milieu poreux :	27
• Cas d'un canal rempli d'un milieu poreux :	28
II.3.4. Conditions aux limites pour le champ dynamique :	28
II.4. EQUATIONS REGISSANT LE CHAMP THERMIQUE:	29
II.4.1. Hypothèses simplificatrices pour le champ thermique :	29

II.4.2. Equation d'énergie pour le cas d'un milieu fluide :	30
II.4.3. Equation d'énergie pour le cas d'un milieu poreux :	30
II.4.4. Conditions aux limites pour le champ thermique:	31
<i>II.5. MISE SOUS FORME ADIMENSIONNELLE DES EQUATIONS :</i>	<i>31</i>
II.5.1. Variables adimensionnelles :	31
II.5.2. Equation de continuité	32
II.5.3. Equations de mouvements :	32
• Cas d'un canal sans milieu poreux :	32
• Cas d'un canal rempli d'un milieu poreux :	32
II.5.4. Equations d'énergie :	33
II.5.5. Conditions aux limites adimensionnelles :	33
<i>II.6. COEFFICIENT DE TRANSFERT (NOMBRE DE NUSSELT) :</i>	<i>34</i>
<i>II.7. CONCLUSION :</i>	<i>36</i>

Troisième Chapitre

Résolution numérique

<i>III.1. Introduction :</i>	<i>37</i>
<i>III.2. Méthode des volumes finis :</i>	<i>37</i>
III.2.1. Introduction :	37
III.2.2. Forme générale de l'équation gouvernante :	37
III.2.3. Maillage :	38
III.2.3.1. Maillage typique	38
III.2.3.2. Maillage décalé :	39
<i>III.3. DISCRETISATION DES EQUATIONS :</i>	<i>40</i>
III.3.1. Densité de flux :	40

III.3.2. Discrétisation de l'Equation de continuité :	45
III.3.3. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant X :	46
III.3.3.1. Cas d'un canal sans milieux poreux :	47
III.3.3.2. Cas d'un canal remplie d'un milieu poreux :	49
III.3.4. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant Y :	51
III.3.4.1. Cas d'un canal sans milieu poreux :	52
III.3.4.2. Cas d'un canal remplie d'un milieu poreux :	54
III.3.5. Discrétisation de l'équation d'énergie :	57
III.3.5.1. Cas d'un canal sans milieu poreux :	57
III.3.5.2. Cas d'un canal remplie d'un milieu poreux :	58
III.3.6. Equation de correction de pression :	60
III.3.6.1. Algorithme SIMPLE :	60
III.4. RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATION :	63
III.5. PROCEDURE DE CALCUL DE L'ALGORITHME SIMPLE :	64
III.6. CONCLUSION :	65

Quatrième Chapitre

Résultats et interprétations

IV.1.INTRODUCTION :	67
IV.2.INFLUENCE DU MAILLAGE :	67
IV.3.VALIDATION DU CODE DE CALCUL :	69
IV.4.RESULTATS OBTENUS :	71
IV.4.1.Cas d'un canal sans milieu poreux :	71
IV.4.1.1.Profil des vitesses à quelques positions axiales :	71
• Influence du nombre de Reynolds sur le profil des vitesses	74

IV.4.1.2.Profil de température à quelques positions axiales :.....	75
IV.4.1.3.Nombre de Nusselt local :.....	76
IV.4.2.Cas d'un canal avec milieux poreux :.....	77
IV.4.2.1.Influence du nombre de Darcy sur le profil des vitesses :.....	79
IV.4.2.2.Nombre de Nusselt local et température:.....	79
• Effet de nombre de Darcy :.....	79.
• Effet du rapport des conductivités thermiques R_k :.....	80
IV.4.2.3.Nombre de Nusselt moyen :.....	82
• Effet du nombre de Darcy Da :.....	82
• Effet du rapport des conductivités thermiques R_k :.....	83
.....	
CONCLUSION GENERALE.....	84

Liste des figures :

Liste des figures :

Figure	Désignation	Page
Fig. I.1	Milieu poreux non consolidé	06
Fig. I.2	Milieu poreux consolidé	06
Fig. I.3	Représentation schématique du volume élémentaire représentatif	07
Fig. I.4	Modèle en série	14
Fig. I.5	Modèle en parallèle	14
Fig. II. 1	Représentation schématique du canal plan complètement fluide	26
Fig. II. 2	Représentation schématique d'un canal plan contenant un milieu poreux	26
Fig. III. 1	Volume de contrôle principal	39
Fig. III. 2	Volume de contrôle décalé dans la direction transversale	40
Fig. III. 3	Flux total entre deux points de la grille	41
Fig. III. 4	Maillage principal pour les grandeurs scalaires	45
Fig. III. 5	Maillage décalé pour l'équation du mouvement dans la direction longitudinale	46
Fig. III. 6	Représentation des vitesses U et V au niveau des facettes d'un maillage décalé suivant la direction longitudinale	50
Fig. III. 7	Maillage décalé pour l'équation de mouvement suivant la direction transversale	52
Fig. III. 8	Représentation des vitesses U et V au niveau des facettes d'un maillage décalé suivant la direction transversale	56
Fig. III. 9	Organigramme de l'algorithme SIMPLE	66
Fig. IV.1	Profils du nombre de Nusselt local, le long du canal, pour différents maillages.	68
Fig. IV.2	Profils de la vitesse axiale au centre du canal pour différentes valeurs du nombre de Darcy	69
Fig. IV.3	Valeurs du nombre de Nusselt local pour un écoulement complètement développé en fonction de la géométrie du canal [24]	70
Fig. IV.4	Profils du nombre de Nusselt local dans la région complètement développée, résultat de la présente étude.	70
Fig. IV.5	Profil de la composante horizontale de la vitesse à quelques positions axiales pour $Re= 50$	71
Fig. IV.6	Profil de la composante horizontale de la vitesse à quelques positions axiales pour $Re= 100$	72
Fig. IV.7	Profil de la composante horizontale de la vitesse à quelques positions axiales pour $Re= 500$	72
Fig. IV.8	Profil de la composante horizontale de la vitesse à quelques positions axiales pour $Re= 1000$	73
Fig. IV.9	Profil de la vitesse longitudinale au milieu du canal pour différentes	74

	valeurs du nombre de Reynolds	
Fig. IV.10	Profil de la température pour différentes positions axiales pour $Re = 50$	75
Fig. IV.11	Profil de la température pour différentes positions axiales pour $Re = 1000$	76
Fig. IV.12	Variation du nombre de Nusselt local le long du canal pour différentes valeurs du nombre de Reynolds	76
Fig. IV.13	Influence du Nombre de Darcy sur le profil de la vitesse axiale pour $Re = 100$	77
Fig. IV.14	Influence du Nombre de Darcy sur le profil de la vitesse axiale pour $Re = 100$	78
Fig. IV.15	Variation du nombre de Nusselt local le long du canal pour différentes valeurs du nombre de Darcy	79
Fig. IV.16	Influence du rapport des conductivités thermiques sur le profil pour $Re = 1000$ et $DA = 10^{-4}$	79
Fig. IV.17	Variation du nombre de Nusselt local le long du canal pour différentes valeurs du rapport des conductivités thermiques	81
Fig. IV.18	Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Darcy	82
Fig. IV.19	Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Darcy	83

Liste des tableaux :

Liste des tableaux :

Tableau	désignation	page
Tableau I. 1	Porosité de quelques matériaux [%]	09
Tableau I. 2	Valeurs de perméabilité de certains matériaux (Sheidegger 1974)	12
Tableau III. 1	Valeurs des paramètres définissant l'équation de convection diffusion	38
Tableau III. 2	Expressions des différents schémas d'approximation des flux convectifs	43
Tableau IV.1	Effet du maillage sur les caractéristiques dynamiques et thermiques de l'écoulement	68

Nomenclature.

ρ : Masse volumique [$Kg.m^{-3}$].

$\vec{g}$: Force de gravitation [$m.s^{-2}$]

$\vec{V}$: Vecteur vitesse.

t : Temps adimensionnel [s].

P : Pression [Pa].

μ : Viscosité dynamique du fluide [$Kg.m.s^{-1}$]

ν : Viscosité cinématique du fluide $= \frac{\mu}{\rho}$ [$m^2.s^{-1}$].

h : Coefficient d'échange de chaleur par convection [$W.m^{-2}.K^{-1}$]

k : Conductivité thermique [$W.m^{-1}.K^{-1}$].

C_p : Chaleur spécifique [$J.m^{-1}.K^{-1}$].

α : Diffusivité thermique [$m.s^{-1}$].

H : Hauteur du canal [m].

l : Longueur du canal [m].

U_0 : Vitesse de référence [$m.s^{-1}$].

T_0 : Température à l'entrée du canal [$^{\circ}K$].

T : Température dimensionnelle [$^{\circ}K$].

u : Composante de la vitesse suivant la direction x [$m.s^{-1}$].

v : Composante de la vitesse suivant la direction y [$m.s^{-1}$].

ΔX : Longueur adimensionnelle d'un volume de contrôle dans la direction X.

ΔY : Longueur adimensionnelle d'un volume de contrôle dans la direction Y.

U : Vitesse horizontale adimensionnelle.

V : Vitesse verticale adimensionnelle.

θ : Température adimensionnelle.

Re : Nombre de Reynolds.

Pr : Nombre de Prandtl.

Pe : Nombre de Peclet.

Da : Nombre de Darcy.

Nu : Nombre de Nusselt.

$\overline{Nu}$: Nombre de Nusselt moyen.

$\emptyset$: La variable dépendante.

ε : La porosité du milieu.

μ_e : La viscosité dynamique effective.

K : La perméabilité.

k_m : La conductivité thermique effective (moyenne).

R_k : Le rapport des conductivités thermiques (conductivité thermique du solide sur celle du fluide).

J_x : Densité de flux suivant la direction x

J_y : Densité de flux suivant la direction y

$A(|Pe|)$: Fonction du schéma numérique en fonction du nombre de Peclet

X_{we} : Dimension horizontale du volume fini.

Y_{sn} : Dimension verticale du volume fini.

F : Flux convectif

D : Conductances thermiques.

S : Le terme source.

Exposants :

$*$: Relatives aux valeurs estimées.

$'$: Relatives aux valeurs de corrections.

Indices :

P : Point au centre du volume fini

E : Point à l'est du point P

W : Point à l'ouest du point P

N : Point au nord du point P

S : Point au sud du point P

f : Référence au fluide.

s : Référence au solide.

référence au terme source S.

I : Indice d'un point du maillage suivant x.

J : Indice d'un point du maillage suivant y.

0 : Fais référence à l'entrée du canal.

INTRODUCTION GENERALE

L'étude des milieux poreux est devenue un domaine de recherche très important du fait du large champ de ses applications et Par rapport à son importance dans la mécanique du solide et la mécanique des fluides. Lorsque qu'elle est possible, l'utilisation de modèles continus est la démarche privilégiée par l'ingénieur, pour obtenir des prévisions fiables des phénomènes liés à ces milieux.

L'importance des milieux poreux dans les phénomènes et processus industriels et technologiques est aujourd'hui bien démontrée. Cependant et malgré la montée en puissance des moyens d'étude, des lacunes subsistent encore sur le plan des connaissances fondamentales, principalement la compréhension des phénomènes de transfert de chaleur et de masse dans des systèmes comportant des milieux poreux.

De ce fait, les études de la convection forcée en présence d'un milieu poreux font actuellement l'objet d'un intérêt accru. Cet intérêt est dû aux nombreuses applications pratiques qui s'y rapportent, et cela dans divers domaines tels que le refroidissement des circuits électroniques et des réacteurs nucléaires, la filtration massique, le séchage, la séparation d'espèces chimiques ; elles interviennent aussi, dans l'isolation thermique, le stockage des gaz liquides, la récupération d'énergie ou encore dans le domaine médical où on utilise des membranes poreuses pour concevoir des reins artificiels pour le processus de dialyse.

L'objectif du présent travail est d'étudier la convection forcée, laminaire et permanente dans un canal plan dans deux cas de figures : premièrement, canal plan sans milieu poreux et dans le second cas nous introduisons un milieu poreux dans le canal plan. De ce fait nous allons étudier les transferts de chaleur à travers le canal ainsi que l'influence de quelques paramètres dynamiques et thermodynamiques sur l'écoulement du fluide.

Le premier chapitre, présente des définitions et des notions fondamentales relatives à la convection forcée ainsi la description des milieux poreux. par la suite on citera quelques travaux numériques et expérimentaux menés en convection forcée dans les canaux plans afin de situer notre travail.

Dans le deuxième chapitre, après avoir bien posé le problème, nous établissons les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et de conservation d'énergie

INTRODUCTION GENERALE

tout en prenant en compte des hypothèses simplificatrices. Puis nous allons adopter la mise en forme adimensionnelle afin de mettre en considération quelques paramètres de contrôles.

Le quatrième chapitre est consacré à la discrétisation des équations gouvernant le champ dynamique et thermique pour les deux cas étudiés, obtenues dans le chapitre II. Nous avons utilisé la méthode des volumes finis pour la discrétisation des équations adimensionnelles. L'algorithme Simple a été introduit pour le couplage des vitesses et des pressions, et les équations résultantes sont résolues par la méthode SIP.

Dans le quatrième chapitre, nous commençons par la présentation d'une étude du maillage, ensuite nous validons notre code de calcul par des résultats issus de la littérature et enfin nous présentons les résultats des simulations numériques effectuées pour les deux cas étudiés. Les résultats consistent à présenter la distribution des vitesses, les températures, les nombres de Nusselt locaux et moyens ainsi que l'influence des paramètres de contrôle sur ces derniers.

CHAPITRE I :

GENERALITES ET RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1. Introduction :

Dans ce chapitre, des notions fondamentales sur les milieux poreux le transfert sont présentées, notamment les caractéristiques géométriques, les propriétés thermophysiques, et les différents modes d'écoulements dans les milieux poreux. On abordera ensuite une recherche bibliographique sur les différents travaux axés essentiellement sur la convection forcée dans les milieux fluide et poreux.

I.2. Généralités sur les transferts de chaleur :

Le processus par lequel le transfert de l'énergie s'effectue est désigné par le terme transfert de chaleur. La grandeur transférée, appelée chaleur, ne peut être ni mesurée ni observée directement, mais les effets qu'elle produit sont sujets à l'observation et aux mesures.

Le transfert thermique est l'un des modes les plus communs d'échange d'énergie. Il intervient naturellement entre deux zones, ou entre deux systèmes, dès qu'il apparait entre eux une différence de température et ce, quelque soit le milieu qui les sépare.

L'étude des transferts thermiques repose sur les concepts de quantité de chaleur, qui est associée au mouvement de translation, de vibration et de rotation des molécules, et des différences de températures qui caractérisent l'intensité de l'énergie transférée. Ces concepts sont définis par la thermodynamique qui ne s'intéresse qu'à des états d'équilibre, négligeant les mécanismes d'échange d'énergie qui y conduisent.

I.3. Notions sur la convection :

I.3.1. Définition :

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important du transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un

gaz. Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes.

D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux particules fluides adjacentes, L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces particules. Ensuite ces dernières vont se mélanger avec d'autres particules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie, celle-ci est à présent emmagasinée dans les particules fluides et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement.

I.3.2. Type de convection :

La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par convection libre et convection forcée. Lorsqu'il se produit au sein du fluide de courants dus simplement aux différences de densité résultant des gradients de température, on dit que la convection est naturelle ou libre. Par contre si le mouvement du fluide est provoqué par une action externe, telle une pompe ou un ventilateur, le processus est appelé convection forcée. Si les deux causes existent simultanément, sans que l'une soit négligeable par rapport à l'autre, la convection est dite mixte.

I.3.2.1 La convection naturelle :

En convection naturelle, les mouvements du fluide sont provoqués par des gradients de densité dus à la non uniformité du champ de température. Les couches chaudes, donc de poids spécifique plus faible, sont soumises à des forces dirigées vers le haut, suivant un mécanisme analogue à celui de la poussée d'Archimède. Dans les régions à température élevée, le fluide prend donc un mouvement ascendant. Le phénomène inverse de courants descendants se produit pour les parties du fluide dont la température est inférieure à celle du fluide chaud. Les courants de convection naturelle sont alors dus à des différences de poids spécifique et par conséquent le phénomène se produit en raison de l'existence du champ de pesanteur terrestre. L'intervention du poids a pour effet de donner à la verticale un rôle privilégié. La définition de la géométrie d'un système convectif doit donc faire intervenir la forme et les dimensions ainsi que la disposition par rapport à la verticale.

Les effets de convection naturelle sont familiers. On peut les observer quotidiennement dans l'eau que l'on chauffe dans un récipient, dans les panaches de certaines cheminées d'usines, la circulation atmosphérique, les vents, les tempêtes sont aussi des effets de la convection naturelle. Pour formaliser la convection naturelle, il faut décrire le couplage des

champs de température, de pression et de vitesse à partir des équations de conservation de la quantité de mouvement, de la masse et de l'énergie.

I.3.2.2 convection forcée :

La convection forcée est provoquée par une circulation artificielle (pompe, turbine) d'un fluide. Le transfert est plus rapide que dans le cas de la convection naturelle. Voici quelques exemples de convection forcée dans des appareillages : chauffage central avec accélérateur, chauffages électriques avec soufflerie, chauffe-eau solaire et four à convection de cuisinière. Le corps humain a son propre système de convection forcée, la circulation sanguine.

I.4. Milieu poreux :

I.4.1. Définition :

Un milieu poreux est une matrice solide rigide qui comporte des vides (pores), distribués d'une façon désordonnées dans tout le milieu, qui peuvent communiquer entre eux et contenir une ou plusieurs phases fluides (gaz ou liquide) pouvant s'écouler et, éventuellement, échanger entre elles et/ou avec le solide de la matière et/ou de l'énergie. Les pores d'un milieu poreux peuvent être très grands ou trop petits. Ils se présentent sous forme de structures géométriques simples ou complexes de dimensions irrégulières. Leur distribution dans un milieu poreux est pratiquement toujours variable et désordonnée. Ils peuvent être connectés ou isolés, soudés (consolidés) ou non.

On peut distinguer plusieurs exemples de matériaux poreux rencontrés dans la nature ou dans l'industrie, il peut s'agir d'empilement de billes, de panneaux de fibres, de béton, du bois, de roches ou bien de structures géologiques comme les bassins sédimentaires, les gisements de pétrole ou les couches aquifères [20].

I.4.2. Classification des milieux poreux :

L'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux est possible si la plupart des espaces vides sont interconnectés. Le milieu poreux est généralement supposé saturé par un fluide quand ce dernier est constitué d'une seule phase. La matrice solide constituant le milieu poreux peut se présenter sous deux formes différentes. Ainsi, on distingue deux grandes familles de milieux poreux :

- **Milieu poreux non consolidé :** Dans lequel la phase solide est formée de grains ou de fibres non soudés entre eux (gravier, sable, billes de verre et d'acier ...).



Figure I.1 : Milieu poreux non consolidé

- **Milieu poreux consolidé :** Dans lequel la phase solide compacte ne peut se diviser en grains ou fibres, elle est formée de grains cimentés (calcaire, grès, céramiques, tissus végétaux et animaux ...).



Figure I.2 : Milieu poreux consolidé

I.4.3. Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.) :

L'étude des écoulements dans un milieu poreux impose la description des phénomènes intervenant dans ce dernier. Pour cela deux échelles sont nécessaires pour leur analyse :

L'échelle des pores, ou échelle microscopique est associée au diamètre moyen des pores. A l'intérieur de cette échelle les grandeurs locales peuvent varier très largement.

A l'échelle du milieu poreux ou échelle macroscopique, la variation des grandeurs physiques sont moyennées à travers des volumes, en introduisant la notion du volume élémentaire représentatif (*V.E.R*) qui consiste à associer à un point mathématique les propriétés d'un volume suffisamment représentatif pour définir ou mesurer les propriétés moyennes du milieu (**Baer, 1972**). Le *V.E.R* peut-être défini comme suit (**Marsily 1981**) : Il est suffisamment grand pour contenir un grand nombre de pores, de façon que l'on puisse y définir une propriété moyenne globale, et il est suffisamment petit pour que les variations de paramètres d'un domaine au domaine voisin puissent être approchées par des fonctions continues. La taille du *VER* reste assez arbitraire [18]. Les dimensions caractéristiques de ce volume seront grandes par rapport à l'échelle de la taille des pores mais petites par rapport à l'encombrement de la matrice solide [17]. La figure (I.3) illustre la taille intermédiaire l du volume élémentaire représentatif (*V.E.R*) entre la taille du milieu poreux à l'échelle macroscopique L et à l'échelle des pores d [19].

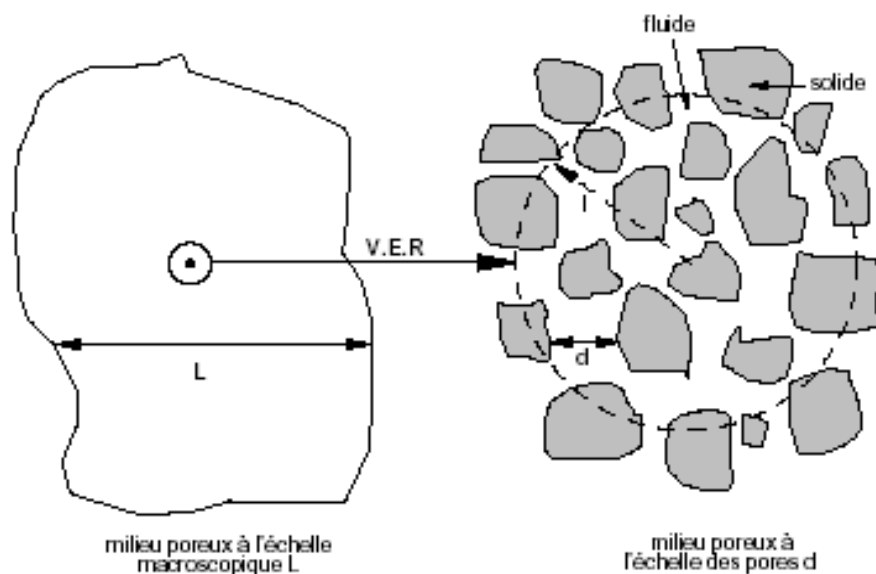


Figure 1.3 : Représentation schématique du volume élémentaire représentatif

I.4.4. Paramètres caractéristique d'un milieu poreux :

Un milieu poreux est caractérisé par un certain nombre de grandeurs moyennes, géométriques ou statistiques : porosité, perméabilité, saturation, etc....

I.4.4.1 La porosité :

La porosité est la grandeur physique à partir de laquelle est évaluée la capacité d'un milieu poreux à contenir une certaine quantité du fluide. Elle se définit comme étant le rapport le volume des vides au volume apparent du milieu poreux (solide + fluide).

$$\varepsilon = \frac{V_{pores}}{V_{total}} \quad (I.1)$$

Avec :

ε : Porosité en %

V_{pores} : Volume des pores (m^3)

V_{total} : Volume total de matrice poreuse (matrice solide + les pores) (m^3)

On distingue deux types de porosité :

- **Porosité totale (absolue) ε_t :**

Quand le rapport du volume occupé par les pores au volume du milieu poreux prend en compte les pores fermés ; la porosité est définie comme étant la porosité totale ou absolue, exprimée par :

$$\varepsilon_t = \frac{V_p}{V_t} \quad (I.2)$$

Où : V_p est le volume total des pores.

V_t est le volume total (volume des pores+volume du solide).

- **Porosité effective ε :**

Elle tient compte seulement des cavités interconnectées à travers lesquelles s'effectuent l'écoulement des masses fluides, elle est définie comme suit :

$$\varepsilon = \frac{V_{pa}}{V_t} \quad (I.3)$$

Où : V_{pa} est le volume des pores accessibles.

La définition (I.2) de la porosité est une définition tridimensionnelle. Elle peut être transposée à un rapport de surfaces. En effet, une coupe d'un échantillon poreux montre une surface. On définit alors la porosité surfacique (à deux dimensions) :

$$\varepsilon_t = \frac{A_p}{A_t} \quad (I.4)$$

Avec : A_p est la surface des pores.

A_t est la surface totale.

Le tableau ci-dessous illustre quelques valeurs de porosité de certains matériaux [20]:

Matériaux	Porosité (%)
Sols	50-60
Argile	45-55
Gravier	30-40
Grès	10-20
Calcaire	01-10
Mousse Métallique	98
Fibre de verre	88-93
Cuir	56-59
Poudre de Silicate	37-50
Empilement de Sphères	17-49
Brique	12-34
Poudre de cuivre compactée	9-34
Charbon	2-12

Tableau I.1 : Porosité de quelques matériaux [%]

I.4.4.2 Surface spécifique :

Elle permet d'évaluer la surface de contact qu'offre un réseau poreux à un fluide qui circule au travers. Elle se définit comme le rapport de l'air de la surface totale des interfaces solide-pores A_{sf} au volume de l'échantillon V :

$$A_{spé} = \frac{A_{sf}}{V} \quad (I.5)$$

Où: $A_{spé}$ est la surface spécifique.

I.4.4.3 Saturation :

Dans le cas le plus général, l'espace poreux peut contenir une phase gazeuse, une phase ou plusieurs phases liquides et une phase ou plusieurs phases solides. On définit la saturation S comme le rapport du volume de cette phase sur le volume poreux (ouvert). Par définition, la somme des saturations est égale à l'unité. Elle s'exprime comme suit :

$$S_i = \frac{V_i}{V_p}, \quad 0 \leq S_i \leq 1 \quad (I.6)$$

Avec : V_i est le volume occupé par la phase fluide.

V_p est le volume des pores.

I.4.4.4 Perméabilité absolue :

La perméabilité est une caractéristique physique qui représente la facilité qu'a un matériau à permettre l'écoulement d'un fluide à travers un réseau connecté, sous l'action d'un gradient hydraulique. Elle exprime la résistance du milieu à l'écoulement du fluide qui le traverse, par l'influence de viscosité. Elle est liée à la dimension et la connexion des pores entre eux. Elle est définie par la loi de Darcy sous la forme suivante :

$$K = \frac{Q\mu}{A\left(\frac{\Delta P}{\Delta L}\right)} \quad (I.9)$$

Où :

Q : Le débit du fluide traversant un échantillon poreux (m^3/s)

K : La perméabilité de l'échantillon poreux (m^2)

μ : La viscosité dynamique du fluide (kg/ms) (Pa.s)

A : La section de l'échantillon poreux traversée par le fluide (m^2)

ΔP : La variation de pression (Pa)

ΔL : La de longueur de l'échantillon poreux (m)

Dans le système international, la perméabilité est exprimée en (m^2). En pratique l'unité usuelle est le milli-Darcy : $1 \text{ mD} = 0.987 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$.

La perméabilité peut être considérée comme une caractéristique de la surface utilisable pour l'écoulement et elle dépend de la géométrie d réseau poreux. La loi de Darcy et donc la perméabilité, est définie pour des conditions d'écoulement laminaire dans un milieu homogène, isotrope et continu, le fluide n'interagissant pas avec le milieu, on distingue deux types de perméabilité :

I.4.4.5 Perméabilité effective :

La perméabilité effective exprime la propriété d'un milieu poreux d'être traversé par un fluide en présence d'un ou plusieurs autres fluides. Elle dépend non seulement du milieu poreux mais aussi des pourcentages respectifs des différents fluides en présence. En effet, la présence d'un autre fluide gêne l'écoulement de l'autre.

Par exemple, en présence de deux fluides a et b, la loi de DARCY permet d'écrire pour chaque fluide :

$$Q_a = -S \frac{K_a}{\mu_a} \frac{dP}{dx} \quad (\text{I-10})$$

$$Q_b = -S \frac{K_b}{\mu_b} \frac{dP}{dx} \quad (\text{I-11})$$

K_a et K_b sont les perméabilités effectives liées aux fluides a et b. Elles s'expriment en (m^2) ou en milli DARCYS.

I.4.4.6 Perméabilité relative :

La perméabilité relative correspond au rapport de la perméabilité effective à la perméabilité absolue.

$$K_r = \frac{K_{eff}}{K} \quad (\text{I.12})$$

Où :

K_r : Perméabilité relative

K_{eff} : Perméabilité effective

K : Perméabilité absolue

Le tableau I.2 donne les valeurs de la perméabilité de quelques matériaux [20] :

Matériaux	Perméabilité K en (m^2)
Ardoise noire en poudre	$4.9 \cdot 10^{-14}$ – $1.2 \cdot 10^{-13}$
Brique	$4.8 \cdot 10^{-15}$ – $2.2 \cdot 10^{-13}$
Béton bitumineux	10^{-13} – $2.2 \cdot 10^{-11}$
Cuivre (en poudre)	$3.3 \cdot 10^{-10}$ – $1.5 \cdot 10^{-9}$
Liège (en plaque)	$2.4 \cdot 10^{-11}$ – $5.1 \cdot 10^{-11}$
Cuir	$9.5 \cdot 10^{-14}$ – $1.2 \cdot 10^{-13}$
Calcaire (dolomite)	$2 \cdot 10^{-15}$ – $4.5 \cdot 10^{-14}$
Sable	$2 \cdot 10^{-11}$ – $1.8 \cdot 10^{-10}$
Grès	$5 \cdot 10^{-16}$ – $3 \cdot 10^{-12}$
Poudre de silice	$1.3 \cdot 10^{-14}$ – $5.1 \cdot 10^{-14}$
Sol	$2.9 \cdot 10^{-13}$ – $1.4 \cdot 10^{-11}$
Cigarette	$1.1 \cdot 10^{-9}$
Terre	$2.9 \cdot 10^{-13}$ – $1.4 \cdot 10^{-11}$

Tableau I.2 : Valeurs de perméabilité de certains matériaux (Sheidegger 1974)

I.4.4.7 Viscosité dynamique effective μ_{eff} :

Lorsque l'approche des modèles moyennés sur un volume élémentaire représentatif est adoptée, il est nécessaire de définir les propriétés thermophysiques évaluées sur le volume élémentaire représentatif incluant les deux phases fluide et solide. Ainsi la viscosité effective a été introduite par Brinkman (1947) afin de mettre en évidence la discontinuité des contraintes aux interfaces fluide-poreux et d'obtenir une expression pour la perméabilité. En combinant l'écoulement de Stocks avec celui de Darcy, il a obtenu l'équation vectorielle suivante [20]:

$$\nabla P = -\frac{\mu}{K}\vec{V} + \mu_{eff}\nabla^2\vec{V} \quad (I.13)$$

Ce modèle a été validé plu tard par Landgren qui démontra aussi que la viscosité effective était une fonction de la viscosité du fluide et de la porosité. Brinkman a considéré la viscosité dynamique effective comme étant égale à la viscosité du fluide considéré.

I.4.4.8 Conductivité thermique effective K_{eff} :

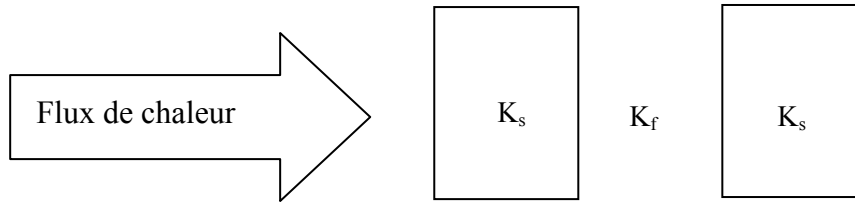
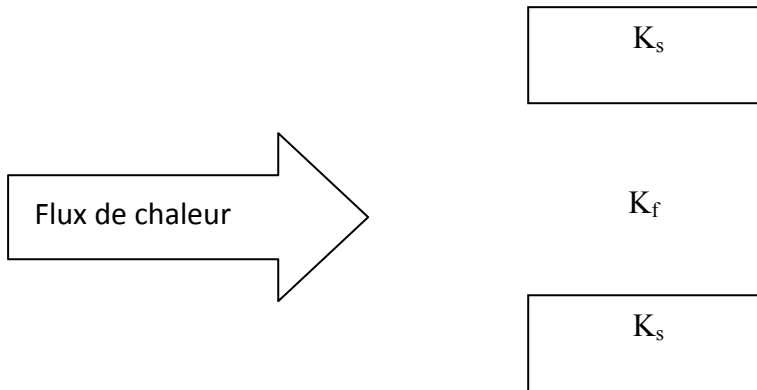
Le transfert de chaleur par conduction à travers un milieu poreux nécessite la contribution des deux phases, fluide et solide, constituant la matrice poreuse, qui se fait généralement avec des proportions différentes. A cet effet, l'introduction d'une conductivité qui tient compte de l'apport de chaque phase est importante dans la modélisation du transfert de chaleur dans un milieu poreux. Ainsi, la notion de la conductivité thermique effective est apparue pour donner un sens à un milieu hétérogène poreux. Cette dernière est fortement dépendante de la porosité et des conductivités thermiques des phases solide et fluide. D'une manière générale, les modèles proposées sont tous des combinaisons pondérées des modèles en série et en parallèles basés sur l'analogie électrique [20].

- **Modèle en série** : Dans le modèle en série, le flux de chaleur traverse successivement les phases solide et fluide. La résistance thermique du fluide est alors égale à la somme des résistances thermiques dans chacune des phases (Figure I.4).

$$\frac{1}{k_{eff}} = \frac{\varepsilon}{k_f} + \frac{(1-\varepsilon)}{k_s} \quad (I.14)$$

- **Modèle en parallèle** : Dans le modèle parallèle, le flux de chaleur traverse les deux phases fluide et solide en même temps. La conductivité thermique effective est alors une moyenne arithmétique des conductivités thermiques phasiques (Figure I.5).

$$k_{eff} = \varepsilon k_f + (1 - \varepsilon)k_s \quad (I.15)$$

**Figure I.4 : Modèle en série****Figure I.5 : Modèle en parallèle**

I.4.5. Différents modèles d'écoulements dans les milieux poreux :

Il existe différents modèles pour décrire les écoulements dans les milieux poreux qui sont construits à partir du modèle de base qui est le modèle de Darcy avec les différentes extensions en tenant compte de certains effets présents dans les milieux poreux, on distingue à cet effet [20]:

I.4.5.1 Modèle de Darcy :

Darcy a établi en 1856 une loi fondamentale qui régit la dynamique des fluides homogènes dans les milieux poreux. Cette loi, mise en évidence à partir d'écoulements unidirectionnels sur des colonnes de sables, fait apparaître la proportionnalité entre le gradient de pression appliqué et le débit d'eau traversant la colonne de sable. Depuis, les sciences hydrogéologiques se sont basées, même pour les écoulements multidirectionnels, sur la loi de Darcy. Elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\vec{\nabla}P = -\frac{\mu}{K}\vec{V} + \rho\vec{g} \quad (\text{I.16})$$

Où :

$\vec{V}$: La vitesse de filtration (m/s)

ρ : La masse volumique (kg/m³)

K : La perméabilité du milieu poreux (m²)

∇P : Le gradient de pression appliqué (Pas/m)

$\vec{g}$: Le vecteur accélération de la pesanteur (m/s²)

μ : La viscosité dynamique (kg/ms)

La loi de Darcy généralisée est valable pour les écoulements laminaires à faible nombre de Reynolds basé sur le diamètre des pores. Cette loi, qui reste largement utilisée, se trouve cependant insuffisante. D'une part elle ne peut pas traduire l'influence de la nature du fluide saturant sur l'écoulement, notamment dans les zones pariétales ; avec ce modèle, la condition de glissement du fluide sur les parois solides est retenue quelle que soit la nature du fluide. D'autre part cette loi ne prend pas en considération l'effet de forces visqueuses dans le cas des milieux poreux fortement perméables et ne prend pas en compte, non plus, l'effet de l'inertie dans le cas où les vitesses sont importantes. Des termes additionnels ont donc été apportés au modèle de Darcy pour remédier à l'insuffisance de ce dernier.

I.4.5.2 Modèle de Darcy-Brinkman :

Pour de grandes valeurs de perméabilité et de porosité, les effets de viscosité et du non glissement sur les surfaces solides ne sont plus négligeables. Le modèle de Darcy-Brinkman dérivé du modèle de Stokes pour des forces visqueuses autour d'une sphère peut s'écrire sous la forme générale suivante :

$$\nabla p = -\frac{\mu}{K}\vec{V} + \mu_{eff}\nabla^2\vec{V} + \rho\vec{g} \quad (I.17)$$

Cette loi empirique est connue sous le nom de formulation de Darcy – Brinkman. Le premier terme de droite de l'équation est le terme de Darcy et le deuxième est appelé le terme de Brinkman. Ce dernier, qui représente les forces visqueuses causées par le cisaillement macroscopique le long des frontières est très significatif dans les régions près des parois solides. Plusieurs auteurs ont montré l'influence du terme de Brinkman sur le champ dynamique qui permet de satisfaire la condition de d'adhérence aux parois. Concernant

l'aspect thermique, l'omission de ce terme peut influencer considérablement sur la valeur des coefficients de transfert.

I.4.5.3 Modèle de Darcy-Forchheimer :

Pour une grande vitesse de filtration, la loi de Darcy s'éloigne du comportement linéaire pour la vitesse ; elle doit donc être corrigée par un terme inertiel non linéaire du second degré qui tient compte des effets inertiels macroscopiques. Le modèle ainsi défini est dit modèle de Darcy-Forchheimer et peut se mettre sous la forme générale suivante :

$$\nabla p = -\frac{\mu}{K} \vec{V} - \frac{\rho F}{\sqrt{K}} |\vec{V}| \vec{V} \quad (\text{I.18})$$

Où F représente le coefficient de Forchheimer caractéristique des forces d'inertie dans le milieu poreux. Il existe une région de transition, définie par rapport au nombre de Reynolds du pore, située entre $1 < Re_p < 10$. Au dessous de $Re_p = 1$, le modèle de Darcy suffit à lui seul pour décrire fidèlement l'écoulement (écoulement lent), et les forces de pression sont prépondérantes. Au-dessus de $Re_p = 10$, les forces d'inerties sont dominantes, le modèle de Darcy n'est plus valable. Entre les deux, c'est la zone de transition et les deux modèles coexistent ensemble.

I.4.5.4 Modèle de Darcy-Forchheimer-Brinkman (Modèle général) :

Pour tenir compte de tous les effets cités précédemment, on associe à l'équation de Darcy, les termes de Brinkman et de Forchheimer. Le modèle ainsi formé est obtenu sous le nom du modèle de Darcy- Brinkman- Forchheimer. L'équation vectorielle de conservation de la quantité de mouvement à travers un milieu poreux s'écrit alors :

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\rho}{\varepsilon} \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\nabla p + \mu_{eff} \nabla^2 \vec{V} - \frac{\mu}{K} \vec{V} + \frac{\rho F \varepsilon}{\sqrt{K}} |\vec{V}| \vec{V} + \rho \vec{g} \quad (\text{I.19})$$

Où :

$\frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\rho}{\varepsilon} \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}$: Forces inertielles macroscopiques. Le terme $\frac{\rho}{\varepsilon} \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}$ est généralement négligé sauf dans les régions d'entrée de l'écoulement.

∇p : Gradient de pression

$\mu_{eff} \nabla^2 \vec{V}$	: Terme visqueux de Brinkman
$\frac{\mu}{K} \vec{V}$	: Terme De Darcy
$\frac{\rho F \varepsilon}{\sqrt{K}} \vec{V} \vec{V}$	: Forces inertielles microscopiques
$\rho \vec{g}$	: Force de volume.

I.5. Recherche bibliographique :

Nous présentons dans cette partie les quelques travaux existant dans la littérature traitant l'écoulement de la convection forcée dans un canal horizontal plan rempli par un milieu fluide ainsi qu'en présence d'un milieu poreux. Nous allons, dans ce qui suit, faire une synthèse des démarches adoptées ainsi que des résultats les plus parlants qui ont été dégagés :

Pei-Xue Jiang et al [1] ont étudié expérimentalement le transfert thermique par convection forcée dans un canal plan rempli de verre, de particules sphériques d'acier inoxydable ou de bronze. La section d'essai était de (58 × 80 × 5 mm) avec l'eau comme un fluide de fonctionnement. La distribution de la température locale de la paroi a été mesurée par les températures et les pressions du fluide d'entrée et de sortie. Les milieux poreux ont considérablement augmentés le coefficient de transfert thermique bien que la résistance hydraulique a été augmentée encore d'avantage. Les effets du diamètre des particules, de la conductivité thermique de la phase solide et de la vitesse du fluide ont été examinés pour la gamme de conductivité thermique (de 75.3 W/m.k pour le bronze à 0.744 W/m.k pour le verre) et pour trois tailles nominales de la particule (0.278, 0.428 et 0.7mm). Le débit d'eau réfrigérant dans le canal est de 0.01568 à 0.1992 Kg/s. Le coefficient du transfert thermique et le nombre de Nusselt sont augmentés avec la diminution du diamètre de la particule de bronze, mais diminue avec la diminution du diamètre de la particule de verre. Ils augmentent également avec l'augmentation de la conductivité thermique de la particule solide.

F.C. Chou et al [2] ont présenté une étude numérique et expérimentale sur la convection forcée dans des canaux carrés horizontaux remplis de sphères emballées. Les résultats expérimentaux confirment ceux théoriques, et les valeurs du nombre de Nusselt complètement développé sont principalement influencées par l'effet de canalisation pour des faibles valeurs du nombre de Peclet. Cependant, l'effet de la dispersion thermique devient dominant quand le nombre de Peclet est élevé et son effet sur le transfert de chaleur est plutôt

faible dans la région d'entrée, mais devient relativement significatif dans la région thermiquement développée. Le rapport du diamètre hydraulique équivalent au diamètre de la sphère affecte significativement le nombre de Nusselt quand le nombre de Peclet est élevé; cela est encore principalement dû à l'effet de la dispersion thermique.

G. Degan et al [3] ont analysé théoriquement la convection forcée d'un écoulement laminaire dans un canal poreux saturé par un fluide visqueux incompressible avec une perméabilité anisotrope dont les principaux axes sont orientés dans une direction oblique au vecteur de la pesanteur. Le canal est bidimensionnel avec des parois imperméables chauffées par un flux de chaleur considéré constant. Ils ont trouvé que pour une faible porosité, et pour des valeurs du nombre Darcy : $Da < 1$, la vitesse horizontale de l'écoulement et le profil de la température augmentent avec la diminution du rapport de la perméabilité et l'angle d'inclinaison des axes principaux de la matrice solide. Cependant, le taux du transfert convectif augmente avec l'augmentation du rapport de la perméabilité pour un angle d'inclinaison nul. Le maximum (minimum) de ce taux est atteint quand l'orientation de l'axe principal avec une perméabilité plus élevée soit parallèle (perpendiculaire) à l'axe de la pesanteur.

G. Hetsroni et al [4] ont étudié expérimentalement l'effet de la porosité sur le transfert thermique et la chute de pression dans un canal rectangulaire avec des insertions poreuses agglomérées, de différentes porosités. Les résultats ont montré qu'il y a une grande augmentation de la chute de pression du canal poreux par rapport du celle d'un canal vide, et elle augmente plus de 2 fois avec une diminution de 3 fois du diamètre du pore. Une augmentation de la dissipation du flux de chaleur et du nombre de Nusselt d'environ de 2 fois avec une diminution de 3 fois de diamètre du pore a été trouvée, en opérant avec un régime laminaire. La résistance thermique diminue légèrement avec la diminution de diamètre du pore, et considérablement dans le cas des échangeurs de chaleur à base de mousses poreuses d'Aluminium comparativement aux échangeurs à base d'insertions agglomérées, et ce pour la même puissance de pompage considérée. Cela exige à ces derniers des pompes à haute pression, ayant comme conséquence une augmentation d'alimentation d'énergie sur le pompage, d'où l'intérêt et l'efficacité des radiateurs poreux agglomérés pour les mini dispositifs de refroidissement avec un dégagement très élevé de la chaleur.

Une étude numérique détaillée de la convection forcée en régime laminaire, dans une conduite de forme carrée et de géométrie tridimensionnelle remplie d'un milieu granulaire isotopique et saturé avec un liquide newtonien, a été réalisée par **Chen et Hadim** (1999)[5]. Les résultats hydrodynamiques et ceux du transfert de chaleur sont obtenus pour trois conditions aux limites différentes pour le champ thermique. L'écoulement dans le milieu poreux a été modélisé en employant le modèle Darcy-Brinkman- Forchheimer. Des modèles empiriques pour la porosité variable et la dispersion thermique ont été déterminés basés sur des mesures expérimentales tridimensionnelles. Des études paramétriques ont été alors conduites pour examiner les effets du diamètre des particules, du nombre de Reynolds, du nombre de Prandtl et du rapport des conductivités thermiques. Il a été trouvé que le nombre de Reynolds et le diamètre des particules affectent principalement le gradient des vitesses. L'augmentation du nombre de Reynolds ou la diminution du diamètre des particules (c'est-à-dire, quand l'inertie et les effets de dispersion thermiques sont augmentés), augmente le nombre de Nusselt. Les effets de la variation du rapport d'aspect de la conduite, sur le facteur de friction, peuvent être négligés pour les petits diamètres de la particule ($D_p \leq 0.01$), ou pour les nombres de Reynolds élevés ($Re \geq 1000$).

Une étude a été faite par **BENMERKHI Meriem et AFRID Mohamed** [6] concernant la simulation numérique du transfert de chaleur et de matière dans un canal partiellement rempli d'une matière poreuse saturé par de l'air et d'une certaine concentration de la vapeur d'eau. La méthode numérique des volumes finis avec une discrétisation spatiotemporelle du second ordre est utilisée pour la résolution des équations de conservation de la masse, des quantités de mouvement, de l'énergie et de la matière. Ils ont considéré un canal horizontal divisé en trois parties égales, la première et la troisième contiennent un écoulement d'air, alors que la deuxième contient de l'air en écoulement à travers la matière poreuse. Les parois du premier et troisième tiers sont considérées adiabatiques et imperméables, mais celles du deuxième sont maintenues à une température constante inférieure à celle de l'écoulement à l'entrée, et une concentration constante supérieure à celle de l'écoulement à l'entrée. Ils ont commencé par le cas de l'écoulement dans le canal sans milieu poreux, alors ils ont constaté que l'écoulement développé est de type Poiseuille, la pression chute axialement, la température subit un refroidissement axial et transversal progressif, la concentration évolue dans la zone de transfert, et les deux nombres de Nusselt et de Sherwood diminuent axialement. Dans le canal partiellement rempli par une matière poreuse de conductivité thermique égale à 5.77 celle du fluide et une porosité 0.8 avec $D_a = 10^{-2}$, on trouve que

l'écoulement est différent de celui de Poiseuille. Ils ont trouvé qu'il y a une diminution de température plus rapide que celle du cas du canal sans milieu poreux. Une chute axiale continue de pression, concentrée dans le deuxième tiers du canal, très supérieure à celle du canal sans milieu poreux. Finalement, a été conclu que l'utilisation du milieu poreux entraîne une forte augmentation du nombre de Nusselt et une augmentation notable du nombre de Sherwood. Par conséquent, une forte chute de pression est le prix qui doit être payé en échange pour le gain d'augmentation considérable du transfert thermique et de matière.

Shohel Mahmud et Roydon Andrew Fraser (2004)[7] ont effectué une analyse analytique et numérique de la convection forcée entièrement développée d'un fluide saturé dans un canal poreux formé par deux plans parallèles. Ils ont pris en considération le transfert thermique par conduction à l'intérieur du mur du canal et l'ensemble du problème est traité comme problème conjugué du transfert thermique. L'écoulement dans le milieu poreux est décrit par l'équation de mouvement de Darcy-Brinkman. Des expressions analytiques pour le profil de vitesse, de température, et le nombre de Nusselt sont obtenues après simplification et résolution des équations gouvernantes en adoptant des approximations adéquates, sans pour autant diminuer de la consistance du problème. Les résultats obtenus par des calculs numériques montrent un excellent accord avec les résultats analytiques. Pour deux valeurs du nombre de Darcy $Da \rightarrow 0$ et $Da \rightarrow \infty$ le profil des vitesses s'approche d'un profil d'écoulement plat ou écoulement de Poiseuille. Le profil de température à l'intérieure de la région fluide est parabolique par contre la distribution à l'intérieure des plaques est linéaire pour $G = 1$ (d'où G est le nombre sans dimension de génération de chaleur). Une distribution non linéaire apparaît dans le solide lorsque $G > 1$.

Pei-Xue Jiang et al [8] ont étudié expérimentalement et numériquement le transfert thermique de l'air par convection forcé dans des canaux plans remplis de verre ou de particules sphériques en acier non-agglomérées. Ils ont analysé les effets de la dispersion thermique, des propriétés variables provoquées par la variation de pression, du diamètre des particules, de la conductivité thermique des particules et de la vitesse du fluide. Ils ont remarqué qu'avec la présence du milieu poreux, la pression diminue d'une manière significative par rapport à un canal vide. Le coefficient du transfert thermique a diminué avec des diamètres de particules de verre plus petits et a augmenté avec l'augmentation de la conductivité thermique des particules. Les résultats numériques obtenus pour les structures

poreuses métalliques ou de verres non-agglomérés en employant le modèle du déséquilibre thermique local et en prenant en considération la dispersion thermique sont en bonne concordance avec les résultats expérimentaux. Pour des débits relativement grands, la variation de la pression le long du canal affecte le transfert thermique convectif dans les matrices poreuses. L'influence de la conductivité thermique de la phase solide sur le transfert thermique au sein des milieux poreux non-agglomérés diminue avec l'augmentation de la conductivité thermique de particules solides.

S. Chikh et al [9] ont procédé à une analyse numérique détaillée de la convection forcée dans un canal avec des blocs poreux chauffés de façon intermittente en utilisant la méthode des volumes de contrôle. Afin d'expliquer l'inertie et les effets de bord, l'équation de Darcy-Brinkman-Forchheimer est employée pour modéliser l'écoulement dans la matrice poreuse. Les effets de plusieurs paramètres tels que le nombre de Darcy, les dimensions des blocs et le rapport de conductivité thermique, sur le modèle d'écoulement et le transfert thermique, sont analysés. Les résultats ont montré que pour les blocs poreux avec une faible perméabilité, des zones de recyclage apparaissent entre les blocs et empêchent le fluide de passer à travers les autres blocs. La présence des blocs réduit l'effort de cisaillement au niveau de la paroi inférieure, mais elle tend au cas fluide pur si Da augmente ou si la taille des blocs poreux était moins de 2 % de la taille du canal. Du point de vue thermique, le transfert thermique peut être augmenté par l'utilisation des blocs poreux dans un canal avec un chauffage par intermittence. Le nombre de Nusselt local est augmenté et une diminution jusqu'à 90 % de la température de la paroi peut être obtenue par l'insertion des blocs poreux.

Mohamed A. Teamah et al [10] ont étudié numériquement la convection forcée laminaire à travers un conduit partiellement et complètement rempli d'un milieu poreux pour trois cas différents. Dans le premier cas, le milieu poreux a une forme cylindrique placée à la ligne centrale du conduit, dans le deuxième cas le milieu poreux a une forme annulaire et dans le troisième cas le milieu poreux a une forme cylindrique et est placé à $Z_i = 0.05 l$ de l'admission du conduit. Les équations de quantité de mouvement sont employées pour décrire l'écoulement du fluide dans la région complètement fluide (conduit sans le milieu poreux). Le modèle de **Darcy Forcheimer-Brinkman** est adopté pour décrire l'écoulement du fluide dans la région poreuse. Le modèle mathématique pour le transport d'énergie est basé sur un modèle d'équation qui assume un équilibre thermique local entre les phases liquides et solides.

L'étude couvre un éventail du rayon externe adimensionnel du milieu poreux $0 < R_{pe} < 1$ et de l'effet du nombre de **Darcy** $2.10^{-4} < Da < 2.10^{-1}$. L'effet du rayon externes et le nombre de Darcy du milieu poreux sur les profils de vitesse, le nombre de Nusselt local, le nombre de Nusselt moyen et la chute de pression, le nombre de Prandtl, le nombre de Reynolds sont étudiés. Dans tous les cas de figure considérés 1, 2, et 3 et pour différentes valeurs de R_{pe} ainsi que pour des différents Da , l'insertion de la matrice poreuse dans le conduit mène à un nombre de Nusselt moyen plus élevé par rapport à un écoulement du fluide dans le conduit sans le milieu poreux. Des résultats portant sur le nombre de Nusselt moyen et de la chute de pression dans chaque cas ont été présentés, il a été constaté que n'importe quelle augmentation du rayon de milieu poreux au-dessus du rayon critique a un impact négatif sur l'exécution thermique et sur la puissance de pompage. Le premier cas offre le taux le plus haut du transfert de chaleur avec une chute de pression la plus élevée. Le nombre de Nusselt moyen du deuxième et troisième sont du même ordre de grandeur du premier cas. La plus petite chute de pression est trouvée dans le troisième cas où il y a une réduction considérable de celle-ci en comparaison de celle du premier cas, particulièrement pour une faible perméabilité.

Une analyse a été faite par **A. Nakayama, H. Koyama et F. Kuwahara**[11] sur la convection forcée dans un canal poreux bidimensionnel soumis à un flux de la chaleur uniforme. Le modèle Darcy-Brinkman a été employé pour prendre en considération les effets de la viscosité au niveau des frontières sur les aspects du transfert hydrodynamique et thermique. Une solution par une méthode approximative basée sur la relation intégrale de l'équation de quantité de mouvement a été employée pour évaluer les nombres de Nusselt. Même les détails des profils de vitesse et de température produits par la formule approximative sont tout à fait conformes avec ceux obtenus moyennant la solution exacte.

Une étude analytique et numérique du transfert de chaleur entre un écoulement pulsé et un cylindre chauffé dans l'espace annulaire a été présentée par **Y.BENAKCHA et al** [12]. L'étude analytique a permis d'établir une expression théorique de la vitesse et de la température. Les résultats numériques ont été obtenus, par la méthode des différences finies, montrent clairement comment les pulsations affectent le taux du transfert de chaleur et comment le phénomène dépend sur le nombre de Reynolds cinétique Re_w . Les calculs ont été obtenus pour un nombre de Reynolds cinétique Re_w variant de 1 à 1000, un nombre de Prandtl

($Pr = 0.7$) et une amplitude $A_w = 0.75$. Le transfert de chaleur entre le cylindre chauffé et le fluide est favorisé par la variation de la fréquence. Pour les faibles fréquences, l'échange de chaleur dû aux pulsations est appréciable le long de la paroi du cylindre chauffé. Pour les hautes fréquences, l'échange de chaleur est important à l'entrée de l'espace annulaire, par contre, dans la région aval, le transfert de chaleur ne change pratiquement pas avec les pulsations imposées. Cette étude réalisée en convection forcée a permis de conclure que le taux du transfert de chaleur est affecté par les pulsations et que le phénomène dépend de la gamme de fréquence.

Zakaria Doulfoukar et **Abderrahim Achiq** [13] ont traité numériquement la convection laminaire forcée dans le sillage d'une plaque chaude placée au milieu d'un canal. En aval immédiat du bord de fuite, une étude analytique basée sur une structure de trois couches a été menée. La vitesse et la température sur l'axe central du canal ainsi que le gradient de pression sont présentés sous formes asymptotiques. La comparaison des résultats numérique et asymptotique met en valeur l'étude analytique, et montre qu'elle décrit l'essentiel de l'évolution du sillage.

K.M. KELKAR ET K.E. STARNER [15] ont étudié numériquement la convection forcée laminaire dans un canal formé par deux plaques parallèles isothermes présentant des ailettes uniformes disposées d'une manière alternée. Les équations gouvernant le problème sont résolues par la méthode des volumes finis, l'influence de la conductivité et la hauteur des ailettes, pour deux valeurs de Prandtl (0.7, 4) sur le transfert de chaleur, pour deux types de matériaux ($k = 0$, k tend vers ∞) et pour les différents nombre de Reynolds < 600 , a été étudiée. Ils ont déterminé les variations longitudinales des lignes de courant et du nombre de Nusselt. L'écoulement est caractérisé par des zones de recirculations. L'implantation de ces ailettes entraîne un accroissement du transfert de chaleur et des pertes de pression, notamment pour les nombres de Prandtl élevés. Par ailleurs le fait d'augmenter la conductivité des ailettes favorise l'échange thermique.

C. HSIANG ET W. H. HUANG [16] ont effectué une étude numérique de la convection forcée laminaire à travers un canal horizontal muni de deux ailettes. La résolution numérique de l'équation de poisson, de la fonction du courant et de l'équation de l'énergie a permis de tracer le champs d'écoulement et les caractéristiques thermiques pour les nombres de Reynolds (10, 50, 100, et 200) tout en variant les hauteurs des ailettes. La présence des

ailettes influent sensiblement sur le nombre de Nusselt. Par contre le coefficient de pression est plus important au passage des ailettes. Dans cette étude l'épaisseur des ailettes ainsi que celle de la paroi ont été négligés.

I.6. Conclusion :

Dans ce chapitre, des notions fondamentales portant sur les propriétés thermophysiques des milieux poreux, des différents modèles d'écoulement dans les matrices poreuses à savoir le modèle de Darcy, le modèle de Darcy-Brinkman et le modèle général, ont été présentés. Par la suite, une synthèse des différents travaux effectués sur la convection forcée en présence d'un milieu poreux a été présentée.

CHAPITRE II :

MODELISATION MATHEMATIQUE

II.1. INTRODUCTION :

Dans ce chapitre, nous présenterons les équations mathématiques basées sur la formulation aux dérivées partielles, décrivant le transfert de chaleur par convection forcée dans un canal plan, de géométrie bidimensionnelle, en présence ou non d'un milieu poreux. La formulation mathématique, sous sa forme dimensionnelle et adimensionnelle, est basée sur l'équation de continuité, les équations de mouvement qui sont décrites par les équations de Navier et Stocks dans le cas d'un canal fluide et le modèle de Darcy Brinkman dans le cas d'un canal poreux et l'équation de l'énergie.

II.2. GEOMETRIE DU DOMAINE PHYSIQUE :

Le domaine d'étude, considéré dans ce travail, est un canal plan formé de deux plaques parallèles et horizontales (Figure II.1). La géométrie étant bidimensionnelle de coordonnées cartésiennes. Le canal est d'une longueur l et de largeur H . Nous allons considérer dans le présent travail deux cas de figure : le premier cas consiste en un canal traversé par l'écoulement du fluide et le second consiste en un canal (le même que le premier) contenant un milieu poreux homogène et isotrope parcouru par un écoulement fluide en régime laminaire. Les deux configurations des problèmes considérés sont illustrées sur les figures (II.1) et (II.2, respectivement). Le fluide pénètre dans le canal avec une distribution uniforme de la vitesse à l'entrée U_0 . Les deux parois sont soumises à une température constante T_p supérieur à la température du fluide à l'entrée T_0 . On constate à travers ces conditions que les deux configurations présentent une symétrie par rapport au plan médian (plan des abscisses), ce qui va nous conduire à considérer uniquement une partie du canal afin d'économiser un temps de calcul très appréciable.

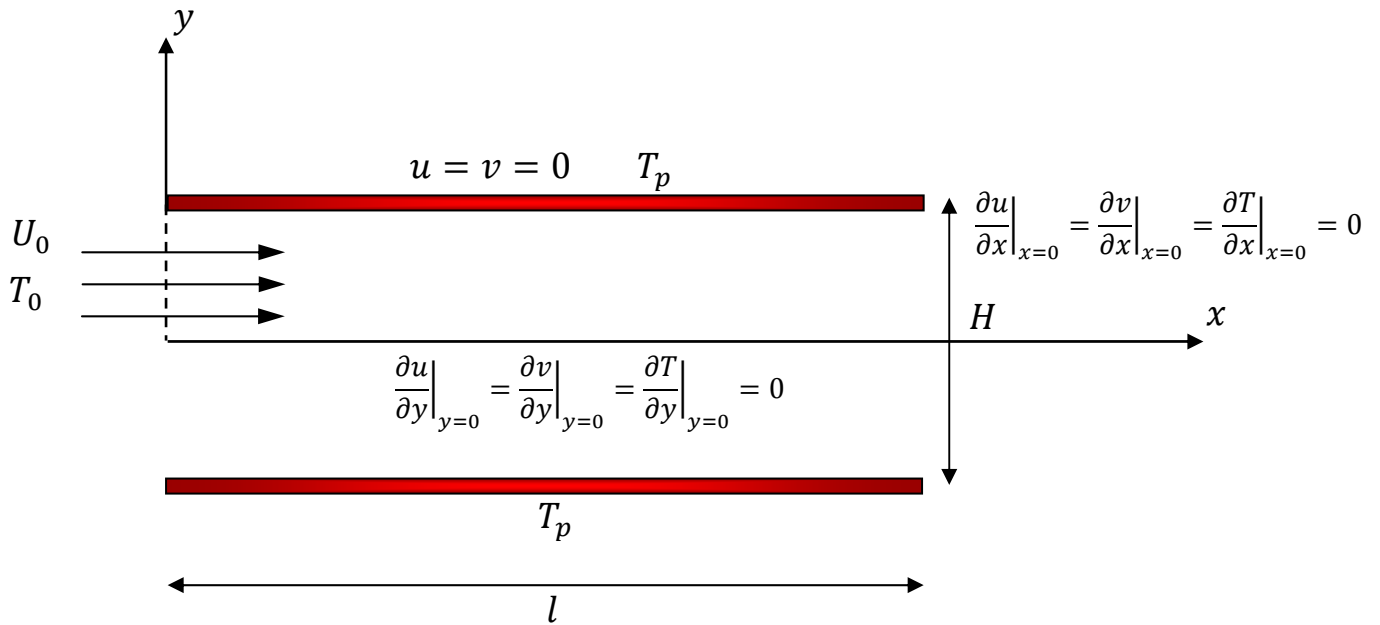


Figure II.1: Représentation schématique du canal plan complètement fluide

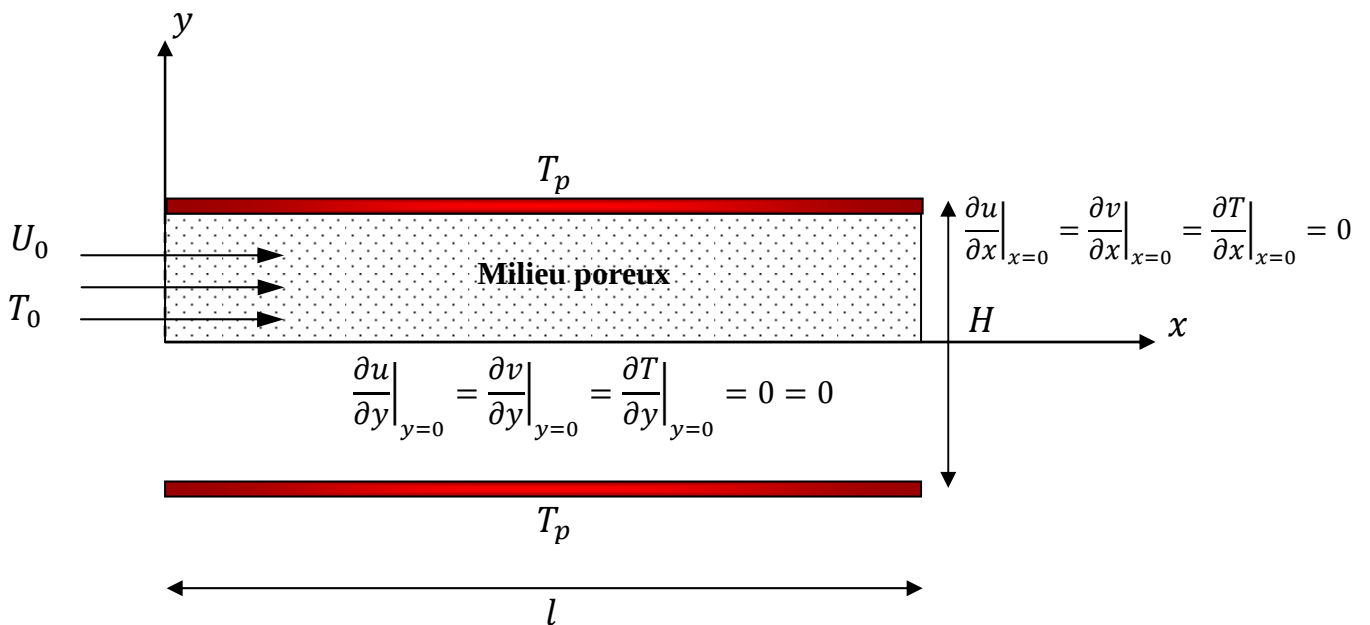


Figure II.2: Représentation schématique d'un canal plan contenant un milieu poreux

II.3. EQUATIONS REGISSANT LE CHAMP DYNAMIQUE :

II.3.1. Hypothèses simplificatrices pour le champ dynamique :

Durant notre étude, plusieurs approximations ont été adoptées afin de simplifier la formulation du modèle mathématique. Les hypothèses que nous retiendrons pour le champ dynamique sont les suivantes :

- Fluide newtonien et incompressible.
- L'écoulement engendré est supposé bidimensionnel en coordonnées cartésiennes.
- Régime d'écoulement laminaire et permanent.
- Les forces de volumes sont négligeables, on considère que la convection forcée est largement dominante.
- Concernant le deuxième cas de figure, en plus des hypothèses énumérées ci-dessus, qui demeure valable, nous allons considérer que le milieu poreux remplissant le canal est homogène, isotrope et ne subit de variation de la porosité le long du canal.

En tenant compte des hypothèses simplificatrices ci-dessus, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, régissant le champ dynamique, s'écrivent de la forme suivante :

II.3.2. Equation de continuité :

L'équation de la conservation de la masse, pour les deux cas de figure, est donnée par :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.1})$$

Où : u et v représentent les composantes longitudinale et transversale, respectivement, de la vitesse pour le cas du canal fluide et poreux.

II.3.3. Equations de la quantité de mouvement :

- **Cas d'un canal sans milieu poreux :**

La conservation de la quantité de mouvement, dans le cas d'un canal fluide (sans milieu poreux), est régie par les équations de Navier et Stocks, la projection de l'équation de mouvement selon la direction longitudinale donne :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.2})$$

et selon la direction transversale, on obtient :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.3})$$

• **Cas d'un canal rempli d'un milieu poreux :**

La conservation de la quantité de mouvement, dans le cas d'un canal rempli d'un milieu poreux, est régie par le modèle de Darcy-Brinkman, qui prend en considération les effets visqueux, la forme vectorielle s'écrit sous forme [20]:

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon} (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \frac{\mu_e}{\varepsilon} \nabla^2 \vec{v} - \frac{\mu}{K} \vec{v} \quad (\text{II.4})$$

Avec :

$\frac{\rho_f}{\varepsilon} (\vec{v} \nabla) \vec{v}$: représente les effets convectifs.

$\frac{\mu_e}{\varepsilon} \nabla^2 \vec{v}$: représente le terme de Brinkman, qui prend en considération les effets visqueux introduits par la présence des régions d'interfaces.

$\frac{\mu}{K} \vec{v}$: représente le terme de Darcy qui rassemble les résistances de frottement dues à la présence de la matrice poreuse.

La projection de l'équation (II.2) selon la direction longitudinale:

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon} \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_e}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu}{K} u \quad (\text{II.5})$$

et selon la direction transversale :

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon} \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_e}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu}{K} v \quad (\text{II.6})$$

Où ε représente la porosité du milieu, K sa perméabilité et μ_e la viscosité dynamique effective.

II.3.4. Conditions aux limites pour le champ dynamique :

Nous avons mentionné précédemment que le domaine d'étude, pour les deux cas de figures considérés, présente une symétrie par rapport au plan médian situé à mi-distance entre les deux parois constituant le canal. Les conditions aux limites associées au champ

dynamique, qui restent les mêmes que ce soit pour le canal fluide ou le canal avec milieu poreux, sont posées comme suit :

A l'entrée du canal, le profil de vitesse est considéré uniforme :

$$u\left(x = 0, 0 < y < \frac{H}{2}\right) = u_0 \quad (\text{II.7})$$

$$v\left(x = 0, 0 < y < \frac{H}{2}\right) = 0 \quad (\text{II.8})$$

Au niveau de la paroi supérieur, la condition de non glissement (adhérence) sur les vitesses longitudinale et transversale est imposée :

$$u\left(0 < x < l, y = \frac{H}{2}\right) = v\left(0 < x < l, y = \frac{H}{2}\right) = 0 \quad (\text{II.9})$$

Étant donné que les calculs se feront uniquement sur la partie supérieure du canal $\left(0 < y < \frac{H}{2}\right)$, du fait de la condition de symétrie, qui s'écrit pour les composantes de la vitesse :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(0 < x < l, y=0)} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(0 < x < l, y=0)} = 0 \quad (\text{II.10})$$

A la sortie du canal, on admet que la longueur est suffisamment grande pour considérer que l'écoulement est établi, de ce fait les conditions sur la vitesse longitudinale et transversale s'écrivent sous la forme suivante :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x=l, 0 < y < \frac{H}{2})} = \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x=l, 0 < y < \frac{H}{2})} = 0 \quad (\text{II.11})$$

II.4. EQUATIONS REGISSANT LE CHAMP THERMIQUE:

II.4.1. Hypothèses simplificatrices pour le champ thermique :

En plus des hypothèses dynamiques, certaines hypothèses simplificatrices sur le champ thermique sont admises, on considère à cet effet :

- Absence de source interne de chaleur, de source de masse ou de réaction chimique.
- La dissipation d'énergie due aux effets visqueux est négligeable.
- Les effets de la convection naturelle et du rayonnement sont négligeables
- Les propriétés thermophysiques du fluide sont constantes, soit : $k = cte$; $C_p = cte$.
- Pour le cas d'un canal rempli d'un milieu poreux, on considère qu'il existe un équilibre thermique local entre la phase solide et la phase fluide constituant la matrice poreuse.

II.4.2. Equation d'énergie pour le cas d'un milieu fluide :

En adoptant les hypothèses simplificatrices ci-dessus et en s'appuyant sur le premier principe de la thermodynamique, l'équation de la conservation de l'énergie pour le cas d'un canal fluide qui, en l'absence du terme transitoire du terme source, se réduit à la forme suivante :

$$(\rho C_p)_f \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k_f \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.12})$$

II.4.3. Equation d'énergie pour le cas d'un milieu poreux :

Les hypothèses simplificatrices pour le cas fluide restent valables pour le cas du canal rempli d'un milieu poreux, en ajoutant l'hypothèse de l'existence de l'équilibre thermique local entre les deux phases solide et fluide, cela se traduit par l'égalité des températures ($T_f = T_s = T$) où T_f et T_s représentent, respectivement, la température de la phase fluide et la température de la phase solide. Cette formulation est connue sous le nom du modèle à une équation de l'énergie qui consiste à moyenner sur un volume élémentaire représentatif (VER) contenant les deux phases fluide et solide. À l'opposé de cette modélisation, il existe dans la littérature, une autre approche qui consiste à moyenner séparément dans chaque phase, puis établir une équation d'énergie pour chaque phase, une pour la phase solide et une autre la phase fluide. Cette dernière approche est d'un degré de complexité plus élevé et qui fait rentrer d'autres considérations notamment la prise en compte des transferts convectifs interstitiels c'est-à-dire entre la phase fluide et la phase solide à l'échelle locale [19]. Pour notre cas nous allons nous contenter du modèle à une équation d'énergie. L'équation de l'énergie pour le cas du canal rempli d'un milieu poreux se met alors sous la forme suivante :

$$(\rho C_p)_f \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k_m \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.13})$$

Avec :

$k_m = (1 - \varepsilon)k_s + \varepsilon k_f$: Représente la conductivité thermique effective (moyenne) qui prend en considération la contribution de la phase fluide et de la phase solide via le paramètre porosité ε . En procédant à des arrangements adéquats, l'équation (II.13) se met sous la forme suivante :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha [(1 - \varepsilon)R_k + \varepsilon] \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.14})$$

Avec :

$R_k = \frac{k_s}{k_f}$: représente le rapport des conductivités thermiques (conductivité thermique du solide sur celle du fluide), qui est un paramètre adimensionnel.

$\alpha = \frac{k_f}{(\rho C_p)_f}$: représente la diffusivité thermique.

II.4.4. Conditions aux limites pour le champ thermique:

Les conditions aux limites thermiques, à l'instar de celles dynamiques, sont les mêmes pour les deux configurations étudiées. Elles sont posées comme suit :

A l'entrée du canal, le profil de température est uniforme :

$$T\left(x = 0, 0 < y < \frac{H}{2}\right) = T_0 \quad (\text{II.15})$$

Au niveau de la paroi supérieur, la condition à la limite étant la paroi isotherme portée à une température T_p :

$$T\left(0 < x < l, y = \frac{H}{2}\right) = T_p \quad (\text{II.16})$$

A la sortie du canal, la conduction axiale est supposée négligeable, donc la condition sur la température du fluide à la sortie du canal s'écrit :

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{\left(x=l, 0 < y < \frac{H}{2}\right)} = 0 \quad (\text{II.17})$$

Au niveau du plan médian, la condition de symétrie sur la température se met sous la forme :

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{(0 < x < l, y=0)} = 0 \quad (\text{II.18})$$

II.5. MISE SOUS FORME ADIMENSIONNELLE DES EQUATIONS :

II.5.1. Variables adimensionnelles :

Dans le but de généraliser les résultats à différents cas de figure, indépendamment de l'échelle et des caractéristiques thermophysiques du fluide, et afin de faire apparaître quelques groupements adimensionnels, qui seront des paramètres de contrôle de l'étude, il sera procédé, dans ce qui suit, à une mise sous forme adimensionnelle des équations gouvernantes ainsi que les conditions aux limites définies précédemment. Les variables réduites (adimensionnelles) seront toutes définies par rapport à des variables dites de références, soit la largeur du canal H , la vitesse du fluide à l'entrée U_0 et la température du

fluide à l'entrée T_0 . Les expressions des différentes variables adimensionnelles s'écrivent alors:

$$X = \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad L = \frac{l}{H}, \quad U = \frac{u}{U_0}, \quad V = \frac{v}{U_0}, \quad P = \frac{p}{\rho U_0^2}, \quad \theta = \frac{T-T_0}{T_p-T_0}$$

En remplaçant ces variables adimensionnelles dans les équations gouvernantes précédentes, on obtient la forme adimensionnelle des équations de continuité, de mouvement et d'énergie, qui s'écrivent comme suit :

II.5.2. Equation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{II.19})$$

II.5.3. Equations de mouvements :

- **Cas d'un canal sans milieu poreux :**

l'équation de mouvement selon la direction des X , sous sa forme adimensionnelle est donnée par :

$$\left(U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{II.20})$$

Et selon la direction des ordonnées, il se mettra sous la forme :

$$\left(U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{II.21})$$

- **Cas d'un canal rempli d'un milieu poreux :**

Dans le cas d'un canal rempli d'un milieu poreux, la mise sous forme adimensionnelle des équations (II.5) et (II.6), en utilisant les variables adimensionnelles ci-dessus, on aura, selon la direction longitudinale :

$$\left(U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) - \frac{1}{Re Da} U \quad (\text{II.22})$$

Et selon la direction transversale :

$$\left(U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) - \frac{1}{Re Da} V \quad (\text{II.23})$$

II.5.4. Equations d'énergie :

La forme adimensionnelle de l'équation de l'énergie, pour le cas du canal sans milieu poreux est donnée par :

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Re Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (II.24)$$

Et pour le cas d'un canal rempli d'un milieu poreux, l'équation adimensionnelle est de la forme suivante :

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{[(1-\varepsilon)R_k + \varepsilon]}{Re Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (II.25)$$

Nous constatons à travers ces équations que des groupements adimensionnels sont apparus, la plupart d'entre eux sont des nombres adimensionnels traditionnellement connus, à savoir :

$Re = \frac{U_0 H}{\nu}$: représente le nombre de Reynolds.

$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$: est le nombre de Prandtl.

$Pe = \frac{U_0 H}{\alpha} = \frac{U_0 H}{\nu} \frac{\nu}{\alpha} = Re Pr$: est le nombre de Peclet.

$Da = \frac{K}{H^2}$: est le nombre de Darcy.

II.5.5. Conditions aux limites adimensionnelles :

Les conditions aux limites dynamiques et thermiques décrites par les équations (II.7) à (II.11) et (II.15) à (II.18), respectivement vont se mettre sous une forme adimensionnelle, en suivant le même raisonnement que les équations des bilans, on obtient à cet effet :

A l'entrée du canal :

$$U \left(X = 0, 0 < Y < \frac{1}{2} \right) = 1 \quad (II.26)$$

$$V \left(X = 0, 0 < Y < \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (II.27)$$

$$\theta \left(X = 0, 0 < Y < \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (II.28)$$

Paroi supérieur :

$$U \left(0 < X < L, Y = \frac{1}{2} \right) = V \left(0 < X < L, Y = \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (II.29)$$

$$\theta\left(0 < X < L, Y = \frac{1}{2}\right) = 1 \quad (\text{II.30})$$

Au milieu du canal (condition de symétrie)

$$\left.\frac{\partial U}{\partial Y}\right|_{(0 < X < L, Y=0)} = \left.\frac{\partial V}{\partial Y}\right|_{(0 < X < L, Y=0)} = 0 \quad (\text{II.31})$$

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right|_{(0 < X < L, Y=0)} = 0 \quad (\text{II.32})$$

A la sortie du canal :

$$\left.\frac{\partial U}{\partial X}\right|_{(X=L, 0 < Y < \frac{1}{2})} = \left.\frac{\partial V}{\partial X}\right|_{(X=L, 0 < Y < \frac{1}{2})} = 0 \quad (\text{II.33})$$

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial X}\right|_{(X=L, 0 < Y < \frac{1}{2})} = 0 \quad (\text{II.34})$$

II.6. COEFFICIENT DE TRANSFERT (NOMBRE DE NUSSELT) :

Lorsque la vitesse du fluide est faible, le transport d'énergie n'est que faiblement aidé par les courants de mélange, à une échelle macroscopique. Par contre, si la vitesse est grande et si le mélange entre le fluide chaud et le fluide froid contribue notablement au transfert d'énergie, le mécanisme de conduction devient moins important. En conséquence, pour transporter par convection à travers un fluide une quantité de chaleur donnée, il est nécessaire que le gradient de température soit plus grand dans la région à faible vitesse que dans celle où la vitesse est élevée. Au voisinage immédiat de la paroi, la chaleur se meut par conduction pure, les molécules du fluide étant stationnaires par rapport à la frontière de la couche limite. On compte naturellement sur un grand gradient de la température dans cette couche. A mesure que l'on s'éloigne de la paroi, le mouvement du fluide favorise le transport d'énergie et le gradient de température diminue de moins en moins vite pour atteindre finalement celui du courant principal. Le nombre de Nusselt, qui est une quantité adimensionnelle, peut être interprété physiquement comme étant le rapport du gradient de température dans le fluide en contact immédiat avec la surface sur le gradient de température de référence. En pratique, le nombre de Nusselt est une mesure commode du coefficient d'échange de chaleur par convection car, une fois sa valeur connue, on peut calculer le coefficient d'échange de chaleur par convection d'après la relation [21] :

$$Nu = 2 \frac{h.H}{k} \quad (\text{II.35})$$

Cette relation est celle exprimant le nombre de Nusselt local pour un transfert convectif à travers un canal plan entre deux plaques parallèles. Comme à l'interface ($y = \frac{H}{2}$) la chaleur s'écoule seulement par conduction, la densité du flux de chaleur peut être calculée à partir de l'équation :

$$q_{surface-fluide} = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=\frac{H}{2}} \quad (\text{II.36})$$

Où : k représente la conductivité thermique du fluide.

On peut exprimer la quantité de chaleur transmise par convection entre une paroi solide et un fluide au moyen de l'équation suivante :

$$q_c = h \cdot S(T_p - T_m) \quad (\text{II.37})$$

Où : h représente le coefficient d'échange de chaleur par convection

On peut établir une relation entre le coefficient d'échange de chaleur h , défini par l'équation (III.37), et le gradient de température à la paroi. En égalisant les équations (III.36) et (III.37) on obtient :

$$q_c = S q_{surface-fluide} = h \cdot S(T_p - T_m) = -k \cdot S \frac{\partial T}{\partial y} \quad (\text{II.38})$$

On aura alors le rapport suivant :

$$\frac{h}{k} = \frac{-\frac{\partial T}{\partial y}}{(T_p - T_m)} \quad (\text{II.39})$$

En remplaçant donc ce rapport dans l'expression de Nusselt (II.35), on obtient :

$$Nu = \frac{-2H \frac{\partial T}{\partial y}}{(T_p - T_m)} \quad (\text{II.40})$$

Avec : T_m représente la température moyenne du mélange, donnée par l'équation suivante :

$$T_m = \frac{1}{u_m \frac{H}{2}} \int_0^{\frac{H}{2}} u T dy \quad (\text{II.41})$$

Et : u_m représente la vitesse moyenne du fluide définie, en chaque section du canal, par l'expression suivante :

$$u_m = \frac{1}{\frac{H}{2}} \int_0^{\frac{H}{2}} u dy \quad (\text{II.42})$$

Une autre formulation du nombre de Nusselt local peut être obtenue en introduisant les variables réduites (de référence) qui sont utilisées dans la mise sous forme adimensionnelle des équations. Le nombre de Nusselt s'écrit alors sous la forme suivante :

$$Nu = \frac{-2 \frac{\partial \theta}{\partial Y}}{(\theta_p - \theta_m)} \quad (\text{II.43})$$

Où θ_m représente la température du mélange adimensionnelle, elle est définie comme suit :

$$\theta_m = \frac{1}{U_{m\frac{1}{2}}} \int_0^{\frac{1}{2}} U \theta \, dY \quad (\text{II.44})$$

Avec U_m : la vitesse moyenne adimensionnelle, donnée par l'expression suivante :

$$U_m = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} U \, dY \quad (\text{II.45})$$

Le nombre de Nusselt moyen représentant le transfert de chaleur global effectué le long du canal, est exprimé par l'intégrale suivante :

$$\overline{Nu} = \frac{1}{L} \int_0^L Nu \, dX \quad (\text{II.46})$$

II.7. CONCLUSION :

Dans ce chapitre, les équations gouvernantes régissant la convection forcée dans un plan, formé par deux plaques parallèles, traversé par un milieu fluide où rempli d'un milieu poreux ainsi que les conditions aux limites correspondantes, ont été présentées sous leur forme dimensionnelle et adimensionnelle. Cette forme adimensionnelle a permis l'apparition des groupements adimensionnels qui serviront de paramètres de contrôle de notre étude. Des formes explicites des nombres de Nusselt local et moyen ont été élaborées.

CHAPITRE III

RESOLUTION NUMERIQUE

III.1. Introduction :

Dans le chapitre précédent, nous avons établi les équations de base régissant la convection forcée. Ces équations forment un système d'équations différentielles partielles non linéaires couplées et dans ce chapitre nous utilisons une méthode numérique pour résoudre ces équations. Il existe différentes méthodes numériques pour la résolution des systèmes d'équations aux dérivées partielles régissant les différents écoulements de transfert de chaleur, de masse, etc. Dans notre cas, nous avons porté notre choix sur la méthode des volumes finis.

III.2. Méthode des volumes finis :**III.2.1.Introduction :**

La méthode des volumes finis est une classe des arrangements de discrétisation qui ont été fortement couronnés de succès en rapprochant la solution d'une grande variété de systèmes des lois de conservation. Elle est intensivement employée dans la mécanique des fluides, la météorologie, l'électromagnétisme, la simulation de dispositif semi-conducteur et beaucoup d'autres secteurs de technologie régis par les systèmes conservateurs qui peuvent être écrits sous la forme intégrale d'un volume de contrôle.

On a choisi la méthode des volumes finis en vue de la géométrie du problème et les capacités de calcul. Cette méthode a été développée pour résoudre les problèmes de transfert de chaleur et d'écoulement de fluides, elle est décrites en détailles dans le livre de S.V. Patankar [22]. Son principe est de fractionner le domaine physique en un nombre de volumes dits volumes finis, ensuite d'intégrer les équations de conservation dans chaque volume. Le résultat de cette intégration, est l'obtention des équations algébriques, dites équations discrétisées.

III.2.2. Forme générale de l'équation gouvernante :

Les équations différentielles aux dérivées partielles adimensionnelles (II.19 à II.25) présentées dans le chapitre II, peuvent se mettre sous la forme générale d'une équation de transport de type convection diffusion (III.1) dont les expressions des grandeurs physiques, correspondant à chacune des équations (II.19 à II.25), sont données dans le tableau III.1.

$$\frac{\partial}{\partial X}(U\phi) + \frac{\partial}{\partial Y}(V\phi) = \frac{\partial}{\partial X}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y}\right) + S_c + S_p \quad (\text{III.1})$$

Avec : ϕ est la variable dépendante qui peut correspondre, dans notre cas, aux vitesses longitudinale et transversale et à la température.

Γ : est le coefficient de diffusion qui représente les propriétés thermo physiques du fluide qui, dans notre cas, s'exprime en fonction des paramètres adimensionnels.

S_c : représente le terme source qui diffère d'une équation à une autre.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de ces paramètres correspondant aux deux cas que nous étudions :

	Equation	ϕ	Γ	S_c	S_p
	continuité	1	0	0	0
Canal sans milieu poreux	Quantité de mouvement suivant X	U	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial X}$	0
	Quantité de mouvement suivant Y	V	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial Y}$	0
	Energie	θ	$\frac{1}{Re Pr}$	0	0
Canal remplie d'un milieu poreux	Quantité de mouvement suivant X	U	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial X} - \frac{1}{Re Da} U$	0
	Quantité de mouvement suivant Y	V	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial Y} - \frac{1}{Re Da} V$	0
	Energie	θ	$\frac{[(1 - \varepsilon)R_k + \varepsilon]}{Re Pr}$	0	0

Tableau III.1 : Valeurs des paramètres définissant l'équation de convection diffusion

III.2.3. Maillage :

III.2.3.1. Maillage typique

C'est le maillage obtenu par la discrétisation du domaine physique dans les deux directions, horizontale et verticale, afin d'obtenir un grand nombre de volumes finis. Chaque volume entoure un nœud, et entouré par d'autres volumes finis, dits voisins. Le volume est séparé de ces voisins par deux faces pour chaque direction, sauf pour les volumes finis qui se

trouvent sur les limites, qui peuvent avoir moins de faces. Dans les nœuds de ce maillage seront stockées les valeurs des quantités scalaires telles que la pression et la température. Aux centres des volumes finis, ils sont placés les points nodaux du maillage et les points limites sont centrées aux interfaces des volumes de contrôle. Le centre d'un volume fini typique est dénommé P. Chaque volume fini à l'intérieur du domaine de calcul est adjacent à quatre volumes finis voisins. Les centres des volumes finis voisins à l'est, à l'ouest, au nord et au sud du volume fini typique sont notés E, W, N et S, respectivement. Les positions des faces séparant le volume fini typique de ses voisins, à l'est, à l'ouest, au nord et au sud, sont notées e, w, n et s, respectivement.

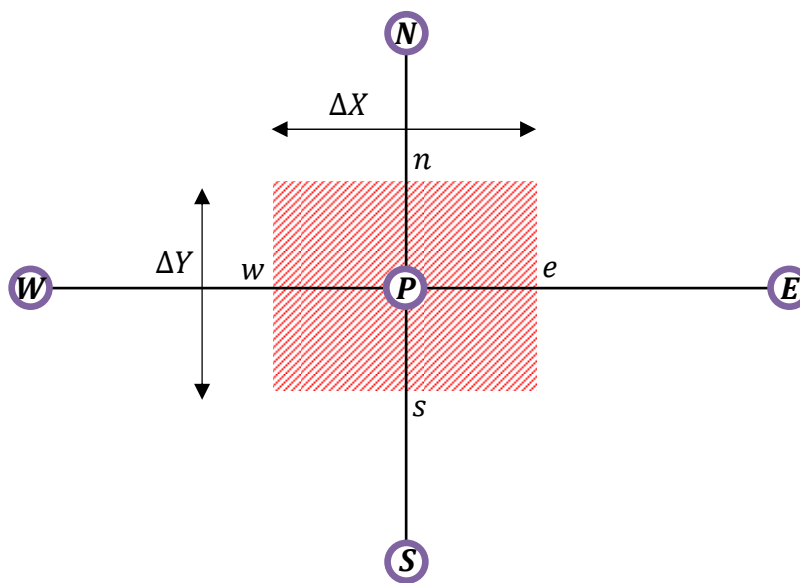


Fig.III.1 : Volume de contrôle principal.

III.2.3.2. Maillage décalé :

Le maillage typique décrit précédemment sera utilisé pour la discrétisation des équations des variables dépendantes scalaires. Cependant pour les variables dépendantes vectorielles (les composantes du vecteur de vitesse), il est nécessaire et recommandé d'utiliser un maillage décalé. L'idée du maillage décalé, est de stocker les composantes de la vitesse sur les faces des volumes de contrôle pour éviter une éventuelle satisfaction des équations de discrétisation par des solutions numériques spatialement oscillatoires et physiquement inacceptables. Arbitrairement on a choisi de décaler le maillage typique dans la direction positive des axes, ainsi le maillage de la composante horizontale de la vitesse est décalé à droite par rapport au maillage typique; et le maillage de la composante verticale de la vitesse est décalé vers le haut par rapport au maillage typique. Le résultat de ces décalages est

l'emplacement des composantes horizontales des vitesses aux milieux des faces verticales des volumes finis typiques; et l'emplacement des composantes verticales des vitesses aux milieux des faces horizontales des volumes finis typiques. La figure III.2 illustre un décalage du maillage dans la direction longitudinale. Des configurations plus complètes seront détaillées dans la suite de ce chapitre en abordant la discrétisations des différentes équations de conservation.

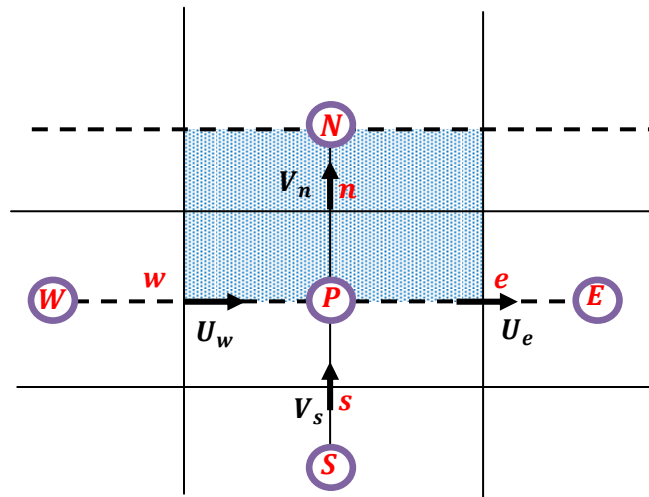


Fig.III.2 : Volume de contrôle décalé dans la direction transversale

III.3. DISCRETISATION DES EQUATIONS :

Dans cette partie, nous allons discrétiser le problème, c'est-à-dire découper le domaine physique en élément de volume sur lesquels nous allons écrire les différentes équations de conservation. Discrétiser une équation différentielle aux dérivées partielles revient à remplacer l'information continue exacte, contenue dans cette équation par une information discrète contenue dans une équation algébrique.

III.3.1. Densité de flux :

Pour d'obtenir un autre aperçu de la formulation de convection-diffusion, on construit une forme générale avec laquelle on utilisera les différents schémas. On considère une grille de point i et $i + 1$ séparés par une distance δ comme le montre la figure III.3, on s'intéresse à représenter le flux total J à travers l'interface des deux points de la grille. Ce flux total met en considération le flux convectif $\rho U \phi$ et le flux diffusif $- \Gamma \frac{d\phi}{dx}$.

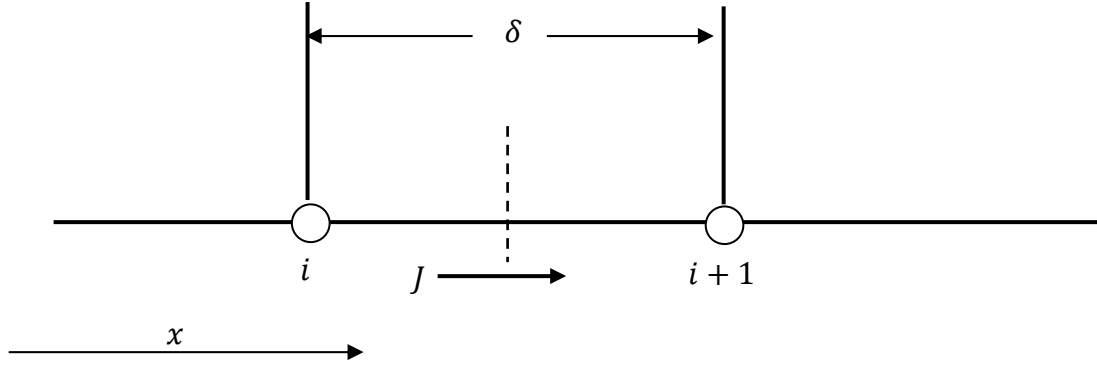


Fig.III.3 : Flux total entre deux points de la grille.

Alors le flux total s'écrira comme suit :

$$J = \rho U \phi - \Gamma \frac{d\phi}{dx} \quad (\text{III.2})$$

D'après l'équation de convection-diffusion qui est donnée par l'expression suivante [22] :

$$\frac{d}{dx}(\rho U \phi) = \frac{d}{dx}(\Gamma \frac{d\phi}{dx}) \quad (\text{III.3})$$

Alors la dérivée de ce flux total sera :

$$\frac{dJ}{dx} = 0 \quad (\text{III.4})$$

En multipliant l'équation (III.2) par $\frac{\delta}{\Gamma}$, on aura :

$$j = J \frac{\delta}{\Gamma} = Pe \cdot \phi - \frac{d\phi}{d(\frac{x}{\delta})} \quad (\text{III.5})$$

Pe : représente le nombre de Peclet.

La valeur de ϕ à l'interface sera une moyenne de ϕ_i et ϕ_{i+1} , tans dis que le gradient $\frac{d\phi}{d(\frac{x}{\delta})}$ sera

un multiple de $\phi_{i+1} - \phi_i$, alors il est proposé que [1]:

$$j = Pe[\alpha \phi_i + (1 - \alpha) \phi_{i+1}] - \beta(\phi_{i+1} - \phi_i) \quad (\text{III.6})$$

Avec α et β sont des coefficients sans dimension qui dépendent de Pe . De ce fait j peut s'exprimer de la manière suivante :

$$j = B\phi_i - A\phi_{i+1} \quad (\text{III.7})$$

Où : A et B sont des coefficients sans dimension qui dépendent de Pe .

$$A = Pe\alpha - Pe + \beta = \frac{Pe}{\exp(Pe)-1} \quad (\text{III.8})$$

$$B = Pe.\alpha + \beta = \frac{Pe \exp Pe}{\exp(Pe)-1} \quad (\text{III.9})$$

Et d'après ces deux dernières équations :

$$B = A + Pe \quad (\text{III.10})$$

Vu la symétrie qui existe entre A et B on peut écrire :

$$B(Pe) = A(-Pe) \quad (\text{III.10.a})$$

$$A(Pe) = B(-Pe) \quad (\text{III.10.b})$$

Et pour toute valeur de Pe positive ou négative, on peut écrire :

$$A(Pe) = A(|Pe|) + \max(-Pe, 0) \quad (\text{III.11})$$

$$B(Pe) = A(|Pe|) + \max(Pe, 0) \quad (\text{III.12})$$

Selon le schéma de discrétisation choisi, la fonction $A(|Pe|)$ peut prendre différentes expressions. Cinq schémas sont été cités par Patankar (1980). Le tableau III.2 résume d'une manière générale les différents schémas de discrétisation.

Pour la présente étude, nous avons opté pour le schéma amont pour l'approximation des flux convectifs au niveau des interfaces des volumes de contrôle. Dans ce cas particulier, la valeur fonction $A(|Pe|)$ est prise égale à l'unité. On peut aisément constater que ce choix présente un avantage en terme de facilité à mettre en oeuvre et donc d'un gain considérable sur le temps de calcul. Il peut toutefois présenter quelques inconvénient, notamment en termes de degré de précision, mais cela est tributaire de l'application au quelle est destiné et cela est d'autant plus valable pour les écoulements obliques, chose qui n'est guère rencontré dans le cas étudié où il est question de la convection forcée dans un canal plan entre deux plaques parallèles d'autant plus que l'écoulement arrive parallèlement à la direction longitudinale.

Schéma	Formule de $A(Pe)$	Expression des différents coefficients
Différences centrées	$1 - 0.5(Pe)$	$a_E = D_e [(1 - 0.5(Pe_e))] + \text{Max}(-F_e, 0)$ $a_W = D_w [1 - 0.5(Pe_w)] + \text{Max}(F_w, 0)$ $a_N = D_n [1 - 0.5(Pe_n)] + \text{Max}(-F_n, 0)$ $a_S = D_s [1 - 0.5(Pe_s)] + \text{Max}(F_s, 0)$
Upwind	$A(Pe) = 1$	$a_E = D_e + \text{Max}(-F_e, 0)$ $a_W = D_w + \text{Max}(F_w, 0)$ $a_N = D_n + \text{Max}(-F_n, 0)$ $a_S = D_s + \text{Max}(F_s, 0)$
Hybride	Schéma couplé de deux schémas différences centrées et Upwind : • $Pe < -2$ et $Pe > 2$: Upwind • $-2 < Pe < 2$: différences centrées	$a_E = \max[0.1 - 0.5(Pe_e)]. D_e + \text{Max}(-F_e, 0)$ $a_W = \max[0.1 - 0.5(Pe_w)]. D_w + \text{Max}(F_w, 0)$ $a_N = \max[0.1 - 0.5(Pe_n)]. D_n + \text{Max}(-F_n, 0)$ $a_S = \max[0.1 - 0.5(Pe_s)]. D_s + \text{Max}(F_s, 0)$
Exponentiel	$A(Pe) = \frac{ Pe }{\exp^{Pe} - 1}$	$a_E = \frac{ F_e }{\exp^{Pe_e} - 1} + \text{Max}(-F_e, 0)$ $a_W = \frac{ F_w }{\exp^{Pe_w} - 1} + \text{Max}(F_w, 0)$ $a_N = \frac{ F_n }{\exp^{Pe_n} - 1} + \text{Max}(-F_n, 0)$ $a_S = \frac{ F_s }{\exp^{Pe_s} - 1} + \text{Max}(F_s, 0)$
Loi de puissance	$A(Pe) = \max(0, (-0.1(Pe)^5)$	$a_E = \max(0, (-0.1(Pe_e)^5). D_e + \text{Max}(-F_e, 0)$ $a_W = \max(0, (-0.1(Pe_w)^5). D_w + \text{Max}(F_w, 0)$ $a_N = \max(0, (-0.1(Pe_n)^5). D_n + \text{Max}(-F_n, 0)$ $a_S = \max(0, (-0.1(Pe_s)^5). D_s + \text{Max}(F_s, 0)$

Tableau III.2: Expressions des différents schémas d'approximation des flux convectifs

En combinant les relations (III.7) et (III.10), on aura les deux équations suivantes :

$$j - Pe \cdot \phi_i = A(\phi_i - \phi_{i+1}) \quad (\text{III.13.a})$$

$$j - Pe \cdot \phi_{i+1} = B(\phi_i - \phi_{i+1}) \quad (\text{III.13.b})$$

En appliquant la relation du flux total (III.13.a) au niveau des interfaces e et w, en utilisant les relations (III.11) et (III.12), on obtient :

$$j_e - Pe_e \cdot \phi_P = A(Pe_e)(\phi_P - \phi_E) \quad (\text{III.14.a})$$

$$j_w - Pe_w \cdot \phi_P = A(Pe_w)(\phi_W - \phi_P) \quad (\text{III.14.b})$$

En remplaçant la fonction $A(|Pe|)$ donnée par la relation (III.11) dans l'équation (III.14.a) ainsi que (III.14.b), on aura:

$$j_e - Pe_e \phi_P = [A(|Pe_e|) + \max(-Pe_e, 0)](\phi_P - \phi_E) \quad (\text{III.15.a})$$

$$j_w - Pe_w \phi_P = [A(|Pe_w|) + \max(-Pe_w, 0)](\phi_W - \phi_P) \quad (\text{III.15.b})$$

En arrangeant ces deux dernières équations afin d'obtenir une forme plus généralisée et plus simple, et en multipliant les équations (III.15.a) et (III.15.b) par les coefficients de diffusion De et Dw , respectivement, on aura alors:

$$J_e - F_e \phi_P = D_e \cdot [A(|Pe_e|) + \max(-F_e, 0)](\phi_P - \phi_E) \quad (\text{III.16.a})$$

$$J_w - F_w \phi_P = D_w \cdot [A(|Pe_w|) + \max(-F_w, 0)](\phi_W - \phi_P) \quad (\text{III.16.b})$$

Avec : $Pe = \frac{F}{D}$: représente le nombre de Peclet qui est le rapport entre le coefficient de convection et celui de diffusion. En procédant de la même manière, on obtient les expressions au niveau des interfaces nord et sud, qui s'écrivent sous la forme suivante:

$$J_n - F_n \phi_P = D_n \cdot [A(|Pe_n|) + \max(-F_n, 0)](\phi_P - \phi_N) \quad (\text{III.17.a})$$

$$J_s - F_s \phi_P = D_s \cdot [A(|Pe_s|) + \max(-F_s, 0)](\phi_S - \phi_P) \quad (\text{III.17.b})$$

Les expressions des coefficients de diffusion pour un problème bidimensionnel sont comme suit :

$$D_e = \frac{\Delta Y}{Re X_{PE}}, \quad D_w = \frac{\Delta Y}{Re X_{PW}}, \quad D_n = \frac{\Delta X}{Re Y_{PN}}, \quad D_s = \frac{\Delta X}{Re Y_{PS}}$$

III.3.2. Discrétisation de l'Equation de continuité :

L'intégration de l'équation de continuité, définie dans le chapitre II, sur le volume de contrôle, représenté sur la figure III.4, donne :

$$\int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial Y} \right) dX dY = 0 \quad (\text{III.18})$$

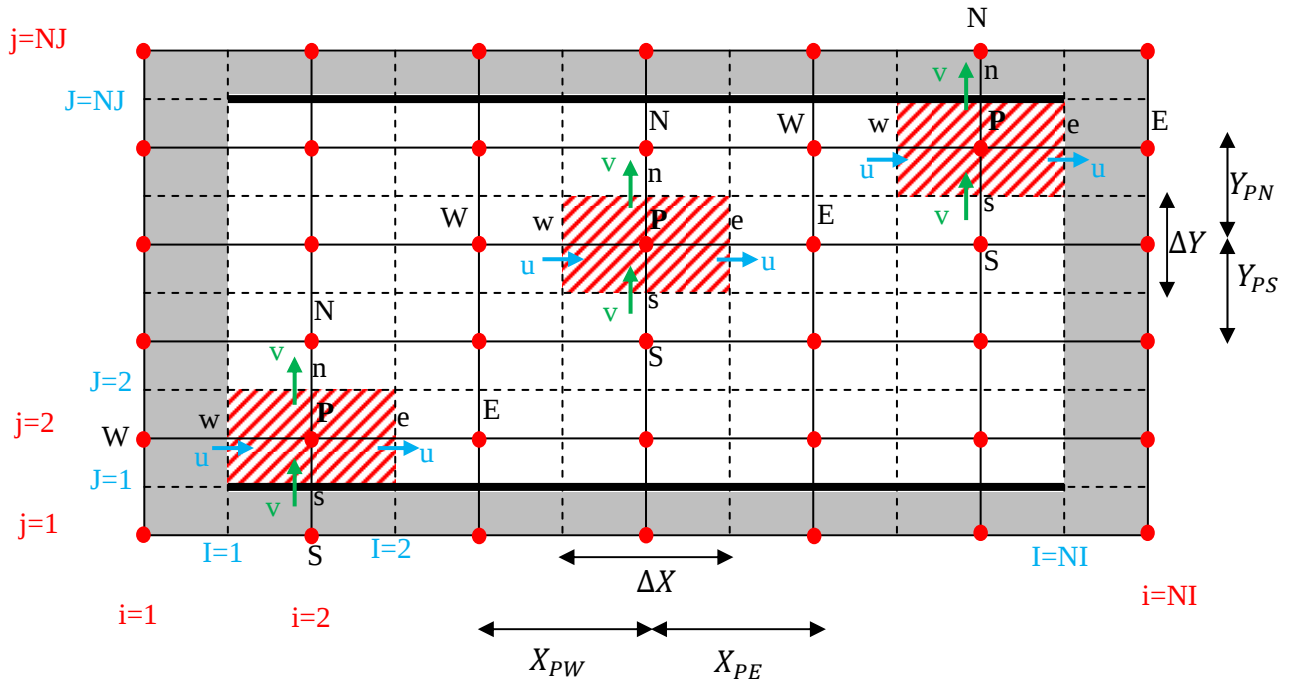


Fig.III.4 : Maillage principal pour les grandeurs scalaires.

En développant cette dernière, on aura :

$$\Delta Y (U_e - U_w) + \Delta X (V_n - V_s) = 0 \quad (\text{III.19})$$

Par définition, les flux convectifs à travers les facettes des volumes de contrôle s'écrivent:

$$F_e = \Delta Y (U_e) \quad (\text{III.19.a})$$

$$F_w = \Delta Y (U_w) \quad (\text{III.19.b})$$

$$F_n = \Delta X (V_n) \quad (\text{III.19.c})$$

$$F_s = \Delta X (V_s) \quad (\text{III.19.d})$$

En remplaçant les expressions des flux convectifs dans l'équation (III.19), l'équation de conservation de la masse s'écrit sous la forme suivante :

$$(F_e - F_w) + (F_n - F_s) = 0 \quad (\text{III.20})$$

On constate à travers cette équation que le bilan de la conservation de la masse sur un volume de contrôle est traduit comme étant un bilan des flux convectifs à travers les facettes du volume de contrôle. Cette équation joue un rôle déterminant dans la simplification de l'équation de la correction de pression et dans le contrôle de la convergence du processus itératif.

III.3.3. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant X :

Contrairement à l'équation de la conservation de la masse, la discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement dans la direction longitudinale se fera sur un maillage décalé d'une demi-maille dans la direction positive. En d'autres termes les composantes longitudinales de la vitesse seront évaluées au niveau des interfaces des volumes de contrôle, dans le cas où on considère le maillage de la figure III.4 comme maillage principal (de référence). Les volumes de contrôle pour la vitesse longitudinale sont schématisés sur la figure III.5.

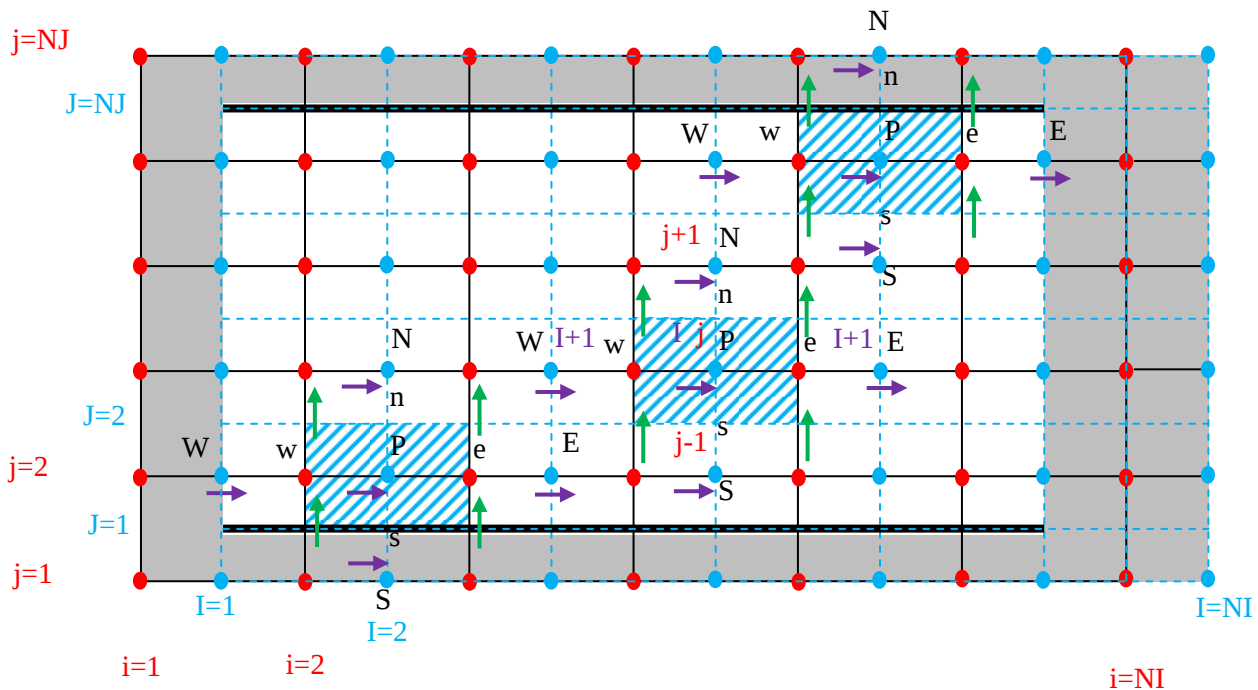


Fig.III .5 : Maillage décalé pour l'équation du mouvement dans la direction longitudinale

III.3.3.1. Cas d'un canal sans milieux poreux :

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement suivant la direction longitudinale, définie dans le chapitre II, dans le cas d'un plan complètement fluide (sans milieu poreux), à travers le volume de contrôle illustré sur la **figure III.5** donne :

$$\int_s^n \int_w^e \left(U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) dX dY = - \int_s^n \int_w^e \frac{\partial P}{\partial X} dX dY + \frac{1}{Re} \int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) dX dY \quad (\text{III.21})$$

Où encore :

$$\int_s^n \int_w^e \left(U \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \right) dX dY + \int_s^n \int_w^e \left(V \frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) dX dY = - \int_s^n \int_w^e \frac{\partial P}{\partial X} dX dY \quad (\text{III.22})$$

Par définition, les expressions des densités de flux s'écrivent :

$$J_X = \left(U \cdot U - \frac{1}{Re} \frac{\partial U}{\partial X} \right) \quad (\text{III.23.a})$$

$$J_Y = \left(V \cdot U - \frac{1}{Re} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \quad (\text{III.23.b})$$

En arrangeant cette équation de sorte à ce que les densités de flux apparaissent dans l'équation III.22, on aboutit à la forme suivante :

$$\int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial J_X}{\partial X} + \frac{\partial J_Y}{\partial Y} \right) dX dY = - \int_s^n \int_w^e \frac{\partial P}{\partial X} dX dY \quad (\text{III.24})$$

Après développement et arrangement, on obtient :

$$\Delta Y (J_{Xe} - J_{Xw}) + \Delta X (J_{Yn} - J_{Ys}) = \Delta Y (P_w - P_e) \quad (\text{III.25})$$

Avec :

$$J_e = \Delta Y (U \cdot U)_e - \frac{\Delta Y}{Re} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)_e = J_{Xe} \Delta Y \quad (\text{III.26.a})$$

$$J_w = \Delta Y (U \cdot U)_w - \frac{\Delta Y}{Re} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)_w = J_{Xw} \Delta Y \quad (\text{III.26.b})$$

$$J_s = \Delta X (V \cdot U)_s - \frac{\Delta X}{Re} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)_s = J_{Ys} \Delta X \quad (\text{III.26.c})$$

$$J_n = \Delta X (V \cdot U)_n - \frac{\Delta X}{Re} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)_n = J_{Yn} \Delta X \quad (\text{III.26.d})$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation (III.25), on aura :

$$(J_e - J_w) + (J_s - J_n) = \Delta Y(P_w - P_e) \quad (\text{III.27})$$

En reprenant l'équation de conservation de masse (III.20), en la multipliant par U_P et en la soustrayant de l'équation (III.27), on obtient alors :

$$(J_e - F_e U_P) - (J_w - F_w U_P) + (J_n - F_n U_P) - (J_s - F_s U_P) = \Delta Y(P_w - P_e) \quad (\text{III.28})$$

Avec :

$$J_e - F_e U_P = a_E (U_P - U_E) \quad (\text{III.29.a})$$

$$J_w - F_w U_P = a_W (U_W - U_P) \quad (\text{III.29.b})$$

$$J_n - F_n U_P = a_N (U_P - U_N) \quad (\text{III.29.c})$$

$$J_s - F_s U_P = a_S (U_S - U_P) \quad (\text{III.29.d})$$

En remplaçant les expressions (III.29) dans l'équation (III.27) on aura :

$$a_E (U_P - U_E) - a_W (U_W - U_P) + a_N (U_P - U_N) - a_S (U_S - U_P) = \Delta Y(P_w - P_e) \quad (\text{III.30})$$

En développant cette dernière équation et en arrangeant de part et d'autre, on obtient la forme discrétisée de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement dans la direction longitudinale pour le cas d'un canal sans milieu poreux :

$$a_P U_P = a_E U_E + a_W U_W + a_N U_N + a_S U_S + S_c \quad (\text{III.31})$$

Avec :

$$a_E = D_e A(|Pe_e|) + \text{Max}(-F_e, 0) \quad (\text{III.32.a})$$

$$a_W = D_w A(|Pe_w|) + \text{Max}(F_w, 0) \quad (\text{III.32.b})$$

$$a_N = D_n A(|Pe_n|) + \text{Max}(-F_n, 0) \quad (\text{III.32.c})$$

$$a_S = D_s A(|Pe_s|) + \text{Max}(F_s, 0) \quad (\text{III.32.d})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (\text{III.32.e})$$

$$S_c = \Delta Y(P_w - P_e) \quad (\text{III.32.f})$$

III.3.3.2. Cas d'un canal remplie d'un milieu poreux :

L'intégration de l'équation de la quantité de mouvement suivant la direction X pour le cas d'un canal remplie d'un milieu poreux, définie dans le chapitre II, sur le volume de contrôle illustré sur la figure III.5, s'écrit sous la forme suivante :

$$\int_s^n \int_w^e \left(U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) dX dY = - \int_s^n \int_w^e \frac{\partial P}{\partial X} dX dY + \frac{1}{Re} \int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) dX dY - \int_s^n \int_w^e \frac{1}{Re Da} U dX dY \quad (III.33)$$

Après l'arrangement de cette équation, on aura :

$$\int_s^n \int_w^e \left(U \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \right) dX dY + \int_s^n \int_w^e \left(V \frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) dX dY = - \int_s^n \int_w^e \frac{\partial P}{\partial X} dX dY - \int_s^n \int_w^e \frac{1}{Re Da} U dX dY \quad (III.34)$$

D'après ce passage, on constate que les densités de flux peuvent s'écrire comme suit :

$$J_X = \left(U \cdot U - \frac{1}{Re} \frac{\partial U}{\partial X} \right) \quad \text{et} \quad J_Y = \left(V \cdot U - \frac{1}{Re} \frac{\partial U}{\partial Y} \right)$$

En remplaçant ces densités de flux dans l'équation (III.34), on obtient alors :

$$\int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial J_X}{\partial X} + \frac{\partial J_Y}{\partial Y} \right) dX dY = - \int_s^n \int_w^e \frac{\partial P}{\partial X} dX dY - \int_s^n \int_w^e \frac{1}{Re Da} U dX dY \quad (III.35)$$

Et l'intégrale de cette équation donne lieu à :

$$\Delta Y (J_{Xe} - J_{Xw}) + \Delta X (J_{Yn} - J_{Ys}) = \Delta Y (P_w - P_e) - \frac{1}{Re Da} U \cdot \Delta Y \cdot \Delta X \quad (III.36)$$

Cette dernière peut prendre la forme suivante, en procédant par rentrer ΔX et ΔY à l'intérieur des densités de flux :

$$(J_e - J_w) + (J_n - J_s) = \Delta Y (P_w - P_e) - \frac{1}{Re Da} U \cdot \Delta Y \cdot \Delta X \quad (III.37)$$

A ce niveau, on constate qu'il y a une analogie avec le cas du canal sans milieu poreux dont la discrétisation a été détaillée. En suivant le même raisonnement, on aura donc la forme discrétisée de l'équation de la quantité de mouvement dans la direction longitudinale pour le cas d'un canal plan complètement rempli d'un milieu poreux, qui s'écrit comme suit :

$$a_P U_P = a_E U_E + a_W U_W + a_N U_N + a_S U_S + S_c \quad (III.38)$$

Avec :

$$a_E = D_e A(|Pe_e|) + \text{Max}(-F_e, 0) \quad (\text{III.39.a})$$

$$a_W = D_w A(|Pe_w|) + \text{Max}(F_w, 0) \quad (\text{III.39.b})$$

$$a_N = D_n A(|Pe_n|) + \text{Max}(-F_n, 0) \quad (\text{III.39.c})$$

$$a_S = D_s A(|Pe_s|) + \text{Max}(F_s, 0) \quad (\text{III.39.d})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S - S_p \quad (\text{III.39.e})$$

$$S_c = \Delta Y (P_w - P_e) \quad (\text{III.39.f})$$

$$S_p = -\frac{1}{Re Da} \Delta Y \cdot \Delta X \quad (\text{III.39.j})$$

Les expressions définissant les coefficients de l'équation discrétisée sont exprimées, entre autre, en fonction des flux convectifs (F_e, F_w, F_n, F_s) dont les valeurs demeurent inconnues, leurs évaluations se fait moyennant des interpolations linéaires. Sur les facettes est et ouest la vitesse horizontale est prise comme la moyenne des vitesses centrées sur les mailles adjacentes. Sur les facettes nord et sud, les vitesses verticales étant définies aux extrémités de la facette on en prend la moyenne. La **figure III.5** illustre un schéma détaillé de la distribution des deux composantes de la vitesse sur les volumes de contrôle.

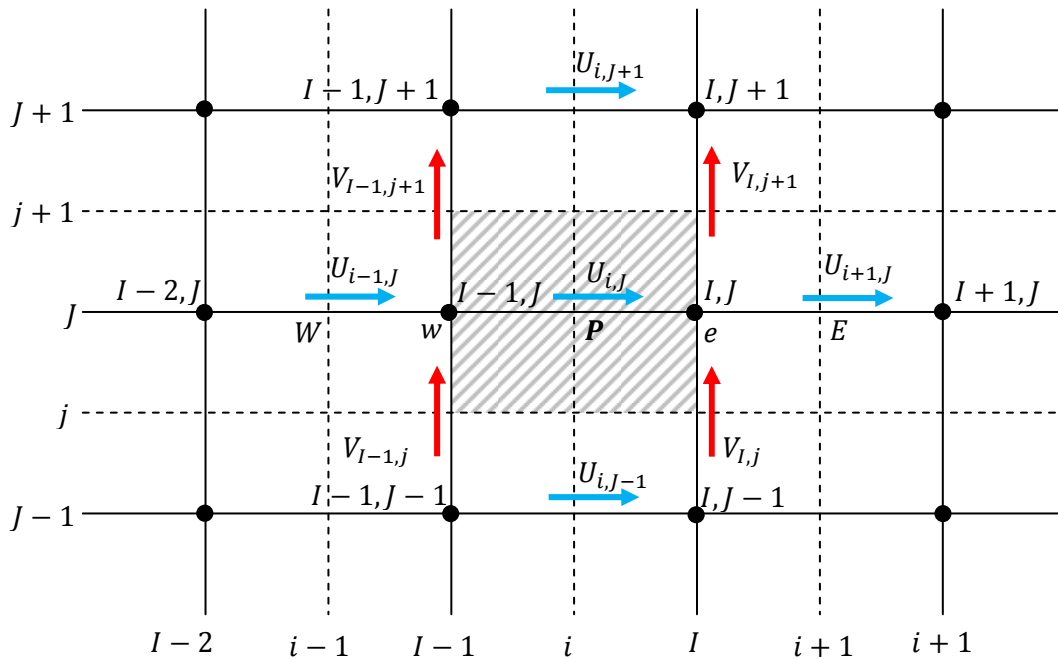


Fig.III.6 : Représentation des vitesses U et V au niveau des facettes d'un maillage décalé suivant la direction longitudinale.

Alors les flux convectifs s'écrivent sous la forme suivante:

$$F_e = \frac{F_{i+1,j} + F_{i,j}}{2} = \Delta Y \frac{U_{i+1,j} + U_{i,j}}{2} \quad (\text{III.40.a})$$

$$F_w = \frac{F_{i,j} + F_{i-1,j}}{2} = \Delta Y \frac{U_{i,j} + U_{i-1,j}}{2} \quad (\text{III.40.b})$$

$$F_n = \frac{F_{i,j+1} + F_{i,j-1}}{2} = \Delta X \frac{V_{i,j+1} + V_{i,j-1}}{2} \quad (\text{III.40.c})$$

$$F_s = \frac{F_{i,j} + F_{i-1,j}}{2} = \Delta X \frac{V_{i,j} + V_{i-1,j}}{2} \quad (\text{III.40.d})$$

Dans les relations (III.39), les grandeurs D_e, D_w, D_n et D_s sont les termes diffusifs et Pe_e, Pe_w, Pe_n et Pe_s sont donc, les nombres de Peclet, ils sont définis, respectivement, par :

Pour Les conductances, leurs expressions sont données comme suit :

$$D_e = \frac{\Delta Y}{Re X_{PE}} \quad (\text{III.41.a})$$

$$D_w = \frac{\Delta Y}{Re X_{PW}} \quad (\text{III.41.b})$$

$$D_n = \frac{\Delta X}{Re Y_{PN}} \quad (\text{III.41.c})$$

$$D_s = \frac{\Delta X}{Re Y_{PS}} \quad (\text{III.41.d})$$

Pour Les nombres de Peclet, ils s'écrivent :

$$Pe_e = \frac{F_e}{D_e} \quad (\text{III.42.a})$$

$$Pe_w = \frac{F_w}{D_w} \quad (\text{III.42.b})$$

$$Pe_n = \frac{F_n}{D_n} \quad (\text{III.42.c})$$

$$Pe_s = \frac{F_s}{D_s} \quad (\text{III.42.d})$$

III.3.4. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant Y :

Par analogie, l'équation de la quantité de mouvement dans la direction transversale se discrétise en choisissant un volume de contrôle approprié pour la vitesse V et ce en effectuant

un décalage du maillage d'une demi maille dans la direction des Y, comme le montre la figure III.6.

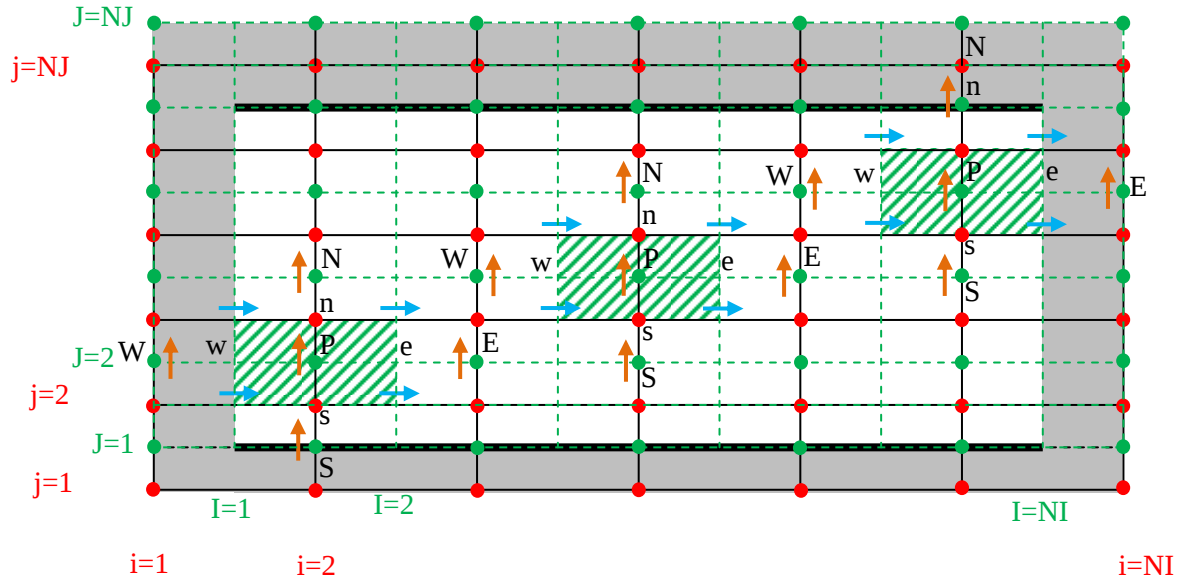


Fig.III.7 : maillage décalé pour l'équation de mouvement suivant la direction transversale

III.3.4.1 Cas d'un canal sans milieu poreux :

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement suivant la direction transversale, définie dans le chapitre II, à travers le volume de contrôle illustré sur la **figure III.6** donne :

$$\int_s^n \int_w^e \left(U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) dX dY = - \int_s^n \int_w^e \frac{\partial P}{\partial Y} dX dY + \frac{1}{Re} \int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) dX dY \quad (\text{III.43})$$

On peut écrire aussi cette équation come suit :

$$\int_s^n \int_w^e \left(U \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right) dX dY + \int_s^n \int_w^e \left(V \frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) dX dY = - \int_s^n \int_w^e \frac{\partial P}{\partial Y} dX dY \quad (\text{III.44})$$

En introduisant ainsi dans l'équation (III.44) les densités de flux suivant les deux directions longitudinale et transversale qui sont données comme suit :

$$J_X = \left(U \cdot V - \frac{1}{Re} \frac{\partial V}{\partial X} \right) \quad (\text{III.45.a})$$

$$J_Y = \left(V \cdot V - \frac{1}{Re} \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \quad (\text{III.45.b})$$

L'équation (III.44) s'écrira sous la forme suivante :

$$\int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial J_X}{\partial X} + \frac{\partial J_Y}{\partial Y} \right) dX dY = - \int_s^n \int_w^e \frac{\partial P}{\partial Y} dX dY \quad (\text{III.46})$$

En développant cette intégrale, on obtient :

$$\Delta Y (J_{Xe} - J_{Xw}) + \Delta X (J_{Yn} - J_{Ys}) = -\Delta X (P_n - P_s) \quad (\text{III.47})$$

Avec :

$$J_e = \Delta Y (U.V)_e - \frac{\Delta Y}{R_e} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right)_e = J_{Xe} \Delta Y \quad (\text{III.48.a})$$

$$J_w = \Delta Y (U.V)_w - \frac{\Delta Y}{R_e} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right)_w = J_{Xw} \Delta Y \quad (\text{III.48.b})$$

$$J_s = \Delta X (V.V)_s - \frac{\Delta X}{R_e} \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)_s = J_{Ys} \Delta X \quad (\text{III.48.c})$$

$$J_n = \Delta X (V.V)_n - \frac{\Delta X}{R_e} \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)_n = J_{Yn} \Delta X \quad (\text{III.48.d})$$

En remplaçant les équations (III.48) dans l'expression (III.47) on aura :

$$(J_e - J_w) + (J_s - J_n) = \Delta X (P_s - P_n) \quad (\text{III.49})$$

En multipliant l'équation de continuité par V_P et en la soustrayant de l'équation (III.49), on obtient :

$$(J_e - F_e V_P) - (J_w - F_w V_P) + (J_n - F_n V_P) - (J_s - F_s V_P) = \Delta X (P_s - P_n) \quad (\text{III.50})$$

Avec :

$$J_e - F_e V_P = a_E (V_P - V_E) \quad (\text{III.51.a})$$

$$J_w - F_w V_P = a_W (V_W - V_P) \quad (\text{III.51.b})$$

$$J_n - F_n V_P = a_N (V_P - V_N) \quad (\text{III.51.c})$$

$$J_s - F_s V_P = a_S (V_S - V_P) \quad (\text{III.51.d})$$

En remplaçant les équations (III.51) dans l'expression (III.50) on aura :

$$a_E (V_P - V_E) - a_W (V_W - V_P) + a_N (V_P - V_N) - a_S (V_S - V_P) = \Delta X (P_s - P_n) \quad (\text{III.52})$$

Après développement et arrangement de l'équation (III.52), on obtient à cet effet la forme finale de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement transversale, pour le cas d'un canal sans milieu poreux, qui s'écrit sous la forme suivante :

$$a_P V_P = a_E V_E + a_W V_W + a_N V_N + a_S V_S + S_c \quad (\text{III.53})$$

Avec :

$$a_E = D_e A(|Pe_e|) + \text{Max}(-F_e, 0) \quad (\text{III.54.a})$$

$$a_W = D_w A(|Pe_w|) + \text{Max}(F_w, 0) \quad (\text{III.54.b})$$

$$a_N = D_n A(|Pe_n|) + \text{Max}(-F_n, 0) \quad (\text{III.54.c})$$

$$a_S = D_s A(|Pe_s|) + \text{Max}(F_s, 0) \quad (\text{III.54.d})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (\text{III.54.e})$$

$$S_c = \Delta X(P_s - P_n) \quad (\text{III.54.f})$$

III.3.4.2 Cas d'un canal rempli d'un milieu poreux :

L'intégration de l'équation de la quantité de mouvement suivant la direction Y pour le cas d'un canal rempli d'un milieu poreux, sur le volume de contrôle illustré sur la figure III.6, donne:

$$\int_s^n \int_w^e \left(U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) dX dY = - \int_s^n \int_w^e \frac{\partial P}{\partial Y} dX dY + \frac{1}{Re} \int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) dX dY - \frac{1}{Re Da} V \quad (\text{III.55})$$

Après arrangement de cette équation, on aura :

$$\int_s^n \int_w^e \left(U \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right) dX dY + \int_s^n \int_w^e \left(V \frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) dX dY = - \int_s^n \int_w^e \frac{\partial P}{\partial Y} dX dY - \int_s^n \int_w^e \frac{1}{Re Da} V dX dY \quad (\text{III.56})$$

D'après ce passage, on constate que les densités de flux peuvent s'écrire comme suit :

$$J_X = \left(U \cdot V - \frac{1}{Re} \frac{\partial V}{\partial X} \right) \quad \text{et} \quad J_Y = \left(V \cdot V - \frac{1}{Re} \frac{\partial V}{\partial Y} \right)$$

En remplaçant ces densités de flux dans l'équation (III.56), on obtient alors :

$$\int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial J_X}{\partial X} + \frac{\partial J_Y}{\partial Y} \right) dX dY = - \int_s^n \int_w^e \frac{\partial P}{\partial Y} dX dY - \int_s^n \int_w^e \frac{1}{Re Da} V dX dY \quad (\text{III.57})$$

Et l'intégrale de cette équation donne conduit à l'expression suivante :

$$\Delta Y (J_{Xe} - J_{Xw}) + \Delta X (J_{Yn} - J_{Ys}) = \Delta X (P_s - P_n) - \frac{1}{Re Da} V \cdot \Delta Y \cdot \Delta X \quad (\text{III.58})$$

En faisant rentrer ΔX et ΔY à l'intérieur des expressions des densités de flux, cette dernière équation peut prendre la forme suivante:

$$(J_e - J_w) + (J_n - J_s) = \Delta X(P_s - P_n) - \frac{1}{Re Da} V \cdot \Delta Y \cdot \Delta X \quad (\text{III.59})$$

En multipliant l'équation de continuité par V_P et en la soustrayant de l'équation (III.59) on obtient alors :

$$(J_e - F_e V_P) - (J_w - F_w V_P) + (J_n - F_n V_P) - (J_s - F_s V_P) = \Delta X(P_s - P_n) - \frac{1}{Re Da} V_P \cdot \Delta Y \cdot \Delta X \quad (\text{III.60})$$

En remplaçant la variable générale $\emptyset$ par (V) et se référant aux expressions des équations (III.16.a), on obtient :

$$(J_e - F_e V_P) = [D_e(A|P_{e_e}|) + \max(-F_e, 0)](V_P - V_{P_E}) \quad (\text{III.61.a})$$

$$(J_w - F_w V_P) = [D_w(A|P_{e_w}|) + \max(F_w, 0)](V_{P_W} - V_P) \quad (\text{III.61.b})$$

$$(J_n - F_n V_P) = [D_n(A|P_{e_n}|) + \max(-F_n, 0)](V_P - V_N) \quad (\text{III.61.c})$$

$$(J_s - F_s V_P) = [D_s(A|P_{e_s}|) + \max(F_s, 0)](V_S - V_P) \quad (\text{III.61.d})$$

Alors l'équation (III.60) s'écrit sous la forme suivante :

$$a_E (V_P - V_E) - a_W (V_W - V_P) + a_N (V_P - V_N) - a_S (V_S - V_P) = \Delta X(P_s - P_n) - \frac{1}{Re Da} V_P \cdot \Delta Y \cdot \Delta X \quad (\text{III.62})$$

En arrangeant de part et d'autre les termes de l'équation (III.62), la forme finale de l'équation de mouvement selon la direction Y, sous sa forme discrétisée, pour le cas d'un canal complètement rempli par un milieu poreux, est donnée par :

$$a_P U_P = a_E U_E + a_W U_W + a_N U_N + a_S U_S + S_c \quad (\text{III.63})$$

Avec :

$$a_E = D_e A(|P_{e_e}|) + \max(-F_e, 0) \quad (\text{III.64.a})$$

$$a_W = D_w A(|P_{e_w}|) + \max(F_w, 0) \quad (\text{III.64.b})$$

$$a_N = D_n A(|P_{e_n}|) + \max(-F_n, 0) \quad (\text{III.64.c})$$

$$a_S = D_S A(|Pe_S|) + \text{Max}(F_S, 0) \quad (\text{III.64.d})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S - S_p \quad (\text{III.64.e})$$

$$S_c = \Delta X(P_S - P_n) \quad (\text{III.64.f})$$

$$S_p = -\frac{1}{Re Da} \Delta Y \cdot \Delta X \quad (\text{III.64.j})$$

Le terme S_p donné par les équations (III.64.j) et (III.39.j) représente le terme source dépendant de la variable objet de la résolution (U et V). Comme nous l'avons constaté, il y a deux termes source, en fait ce sont deux parties formant un seul terme source, une partie explicitement indépendante de la variable (S_c) et une partie dépendante de la variable (S_p). Cette procédure est définie dans certains ouvrages par la linéarisation du terme source et qui peut être la cause de la divergence ou la convergence d'un processus itératif.

De même, les flux convectifs traversant les facettes du volume de contrôle pour la vitesse V (F_e, F_w, F_n, F_s) ne sont pas connus, ils doivent être évalués en procédant avec des interpolations linéaires, selon le maillage présenté sur la figure III.7:

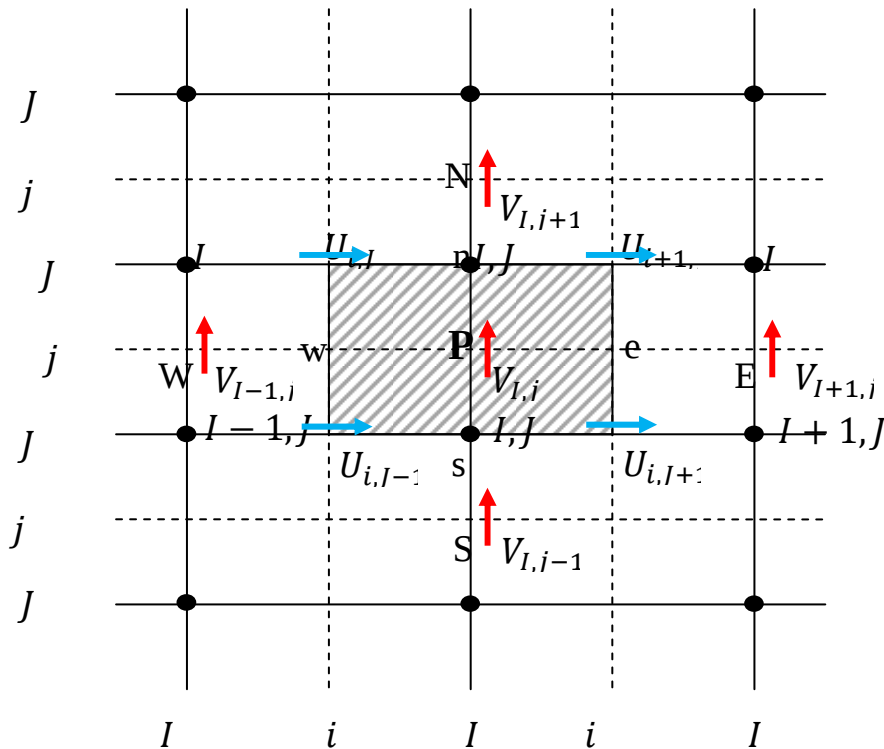


Fig.III.8 : Représentation des vitesses U et V au niveau des facettes d'un maillage décalé suivant la direction transversale.

$$F_e = \frac{F_{i+1,J} + F_{i+1,J-1}}{2} = \Delta Y \frac{U_{i+1,J} + U_{i+1,J-1}}{2} \quad (\text{III.65.a})$$

$$F_w = \frac{F_{i,J} + F_{i,J-1}}{2} = \Delta Y \frac{U_{i,J} + U_{i,J-1}}{2} \quad (\text{III.65.b})$$

$$F_n = \frac{F_{i,j} + F_{i,j+1}}{2} = \Delta X \frac{V_{i,j} + V_{i,j+1}}{2} \quad (\text{III.65.c})$$

$$F_s = \frac{F_{i,j-1} + F_{i,j}}{2} = \Delta X \frac{V_{i,j-1} + V_{i,j}}{2} \quad (\text{III.65.d})$$

Les expressions des conductances (D_e, D_w, D_n et D_s), apparues dans la définition des coefficients, sont données par :

$$D_e = \frac{\Delta Y}{Re X_{PE}} \quad (\text{III.66.a})$$

$$D_w = \frac{\Delta Y}{Re X_{PW}} \quad (\text{III.66.b})$$

$$D_n = \frac{\Delta X}{Re Y_{PN}} \quad (\text{III.66.c})$$

$$D_s = \frac{\Delta X}{Re Y_{PS}} \quad (\text{III.66.d})$$

III.3.5. Discrétisation de l'équation d'énergie :

La discrétisation de l'équation de l'énergie s'effectue de la même procédure que les équations de mouvement, sauf qu'ici la discrétisation de cette dernière se fait sur le maillage principal représenté sur la figure III.3.

III.3.5.1 Cas d'un canal sans milieu poreux :

L'intégration de l'équation de l'énergie, définie dans le chapitre précédent, sur le volume de contrôle de la figure III.3, donne :

$$\int_s^n \int_w^e \left(U \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \right) dX dY + \int_s^n \int_w^e \left(V \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) dX dY = 0 \quad (\text{III.67})$$

De la même manière que les équations de mouvement, on introduit les expressions des densités de flux définies comme suit :

$$J_X = \left(U \cdot \theta - \frac{1}{Pe} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) \quad (\text{III.68.a})$$

$$J_Y = \left(V \cdot \theta - \frac{1}{Pe} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \quad (\text{III.68.b})$$

L'équation (III.67) s'écrira sous la forme suivante :

$$\int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial J_X}{\partial X} + \frac{\partial J_Y}{\partial Y} \right) dX dY = 0 \quad (\text{III.69})$$

En adoptant la même procédure que celle appliquée pour la discrétisation des équations de mouvement, la forme finale de l'équation discrétisée pour le champ thermique, dans le cas d'un canal sans milieu poreux, sera :

$$a_P \theta_P = a_E \theta_E + a_W \theta_W + a_N \theta_N + a_S \theta_S \quad (\text{III.70})$$

Avec :

$$a_E = D_e A(|Pe_e|) + \text{Max}(-F_e, 0) \quad (\text{III.71.a})$$

$$a_W = D_w A(|Pe_w|) + \text{Max}(F_w, 0) \quad (\text{III.71.b})$$

$$a_N = D_n A(|Pe_n|) + \text{Max}(-F_n, 0) \quad (\text{III.71.c})$$

$$a_S = D_s A(|Pe_s|) + \text{Max}(F_s, 0) \quad (\text{III.71.d})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (\text{III.71.e})$$

$$S_c = 0 \quad (\text{III.71.f})$$

Les expressions des conductances (D_e, D_w, D_n et D_s), apparues dans la définition des coefficients, sont données par :

$$D_e = \frac{\Delta Y}{Pe X_{PE}} \quad (\text{III.72.a})$$

$$D_w = \frac{\Delta Y}{Pe X_{PW}} \quad (\text{III.72.b})$$

$$D_n = \frac{\Delta X}{Pe X_{PN}} \quad (\text{III.72.c})$$

$$D_s = \frac{\Delta X}{Pe X_{PS}} \quad (\text{III.72.d})$$

III.3.5.2 Cas d'un canal rempli d'un milieu poreux :

L'intégration de l'équation de l'énergie, définie dans le chapitre précédent pour le cas d'un canal complètement rempli d'un milieu poreux, sur le volume de contrôle de la figure III.3, donne :

$$\int_s^n \int_w^e \left[U \frac{\partial \theta}{\partial X} - \left(\frac{(1-\varepsilon)R_k + \varepsilon}{Re Pr} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \right] dX dY + \int_s^n \int_w^e \left[V \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \left(\frac{(1-\varepsilon)R_k + \varepsilon}{Re Pr} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right] dX dY = 0 \quad (III.73)$$

Les expressions des densités de flux pour ce cas seront définies de la manière suivante :

$$J_X = \left[U \cdot \theta - \left(\frac{(1-\varepsilon)R_k + \varepsilon}{Re Pr} \right) \frac{\partial \theta}{\partial X} \right] \quad (III.74.a)$$

$$J_Y = \left[V \cdot \theta - \left(\frac{(1-\varepsilon)R_k + \varepsilon}{Re Pr} \right) \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right] \quad (III.74.b)$$

En remplaçant ces deux expressions dans l'équation (III.73), on obtient alors :

$$\int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial J_X}{\partial X} + \frac{\partial J_Y}{\partial Y} \right) dX dY = 0 \quad (III.75)$$

En adoptant la même procédure que celle appliquée pour la discrétisation des équations de mouvement, la forme finale de l'équation discrétisée pour le champ thermique, dans le cas d'un canal complètement rempli par un milieu poreux, sera :

$$a_P \theta_P = a_E \theta_E + a_W \theta_W + a_N \theta_N + a_S \theta_S \quad (III.76)$$

Avec :

$$a_E = D_e A(|Pe_e|) + \text{Max}(-F_e, 0) \quad (III.77.a)$$

$$a_W = D_w A(|Pe_w|) + \text{Max}(F_w, 0) \quad (III.77.b)$$

$$a_N = D_n A(|Pe_n|) + \text{Max}(-F_n, 0) \quad (III.77.c)$$

$$a_S = D_s A(|Pe_s|) + \text{Max}(F_s, 0) \quad (III.77.d)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (III.77.e)$$

$$S_c = 0 \quad (III.77.f)$$

Les expressions des conductances thermiques sont données par :

$$D_e = \left(\frac{(1-\varepsilon)R_k + \varepsilon}{Re Pr} \right) \frac{\Delta Y}{X_{PE}} \quad (III.78.a)$$

$$D_w = \left(\frac{(1-\varepsilon)R_k + \varepsilon}{Re Pr} \right) \frac{\Delta Y}{X_{PW}} \quad (III.78.b)$$

$$D_n = \left(\frac{(1-\varepsilon)R_k + \varepsilon}{Re Pr} \right) \frac{\Delta X}{X_{PN}} \quad (III.78.c)$$

$$D_s = \left(\frac{(1-\varepsilon)R_k + \varepsilon}{Re Pr} \right) \frac{\Delta X}{X_{PS}} \quad (\text{III.78.d})$$

III.3.6. Equation de correction de pression :

III.3.6.1 Algorithme SIMPLE :

A l'origine cet algorithme est proposé par Patankar et Spalding (1972), il se base essentiellement sur la procédure guess-and- correct (estimation et correction) pour le calcul de la pression dans le maillage décalé. Pour résoudre les équations des vitesses, il nous faut la pression (inconnue) et pour résoudre l'équation de la pression nous avons besoin des vitesses (inconnues). Ce couplage des équations des vitesses et de la pression nécessite une solution simultanée et itérative. La solution commence par des estimations qui doivent être corrigées. Pour initier le processus de calcul SIMPLE (**S**emi-**I**mplicit **M**ethod for **P**ressure-**L**inked **E**quations), une pression P^* sera donnée (pression estimé). Les équations de mouvement discrétisées (III.31) et (III.53) peuvent se mettre sous la forme suivante [22] :

$$a_{i,j} U_{i,j} = \sum a_{nb} U_{nb} + (P_{I-1,J} - P_{I,J})\Delta Y \quad (\text{III.79})$$

$$a_{I,j} V_{I,j} = \sum a_{nb} V_{nb} + (P_{I,J-1} - P_{I,J})\Delta X \quad (\text{III.80})$$

Avec :

$$\sum a_{nb} U_{nb} = a_E U_E + a_W U_W + a_N U_N + a_S U_S \quad (\text{III.81})$$

$$\sum a_{nb} V_{nb} = a_E V_E + a_W V_W + a_N V_N + a_S V_S \quad (\text{III.82})$$

Pour un champ de vitesse résultant d'un champ de pression estimé P^* , les équations de mouvement (III.79) et (III.80) s'écrivent comme suit :

$$a_{i,j} U^*_{i,j} = \sum a_{nb} U^*_{nb} + (P^*_{I-1,J} - P^*_{I,J})\Delta Y \quad (\text{III.83})$$

$$a_{I,j} V^*_{I,j} = \sum a_{nb} V^*_{nb} + (P^*_{I,J-1} - P^*_{I,J})\Delta X \quad (\text{III.84})$$

On définit une correction P' de la pression, qui est la différence entre la valeur correcte et la valeur estimée. Elle est donnée comme suit :

$$P = P^* + P' \quad (\text{III.85})$$

De même, on définit des corrections U' et V' des vitesses pour relier les valeurs correctes aux valeurs estimées, on écrit alors :

$$U = U^* + U' \quad (\text{III.86})$$

$$V = V^* + V' \quad (\text{III.87})$$

Avec :

P, U et V : sont les valeurs exactes.

P^*, U^* et V^* : sont des valeurs estimées.

P', U' et V' : sont les valeurs des corrections.

En soustrayant les équations (III.83) et (III.94) des équations (III.79) et (III.80) respectivement, on obtient :

$$a_{i,j}(U_{i,j} - U^*_{i,j}) = \sum [a_{nb}(U_{nb} - U^*_{nb})] + [(P_{I-1,j} - P^*_{I-1,j}) - (P_{I,j} - P^*_{I,j})]\Delta Y \quad (\text{III.88})$$

$$a_{I,j}(V_{I,j} - V^*_{I,j}) = \sum a_{nb}(V_{nb} - V^*_{nb}) + [(P_{I,j-1} - P^*_{I,j-1}) - (P_{I,j} - P^*_{I,j})]\Delta X \quad (\text{III.89})$$

En utilisant les formules de correction (III.85 à 87) et en les remplaçant dans les équations (III.88) et (III.89), on obtient alors :

$$a_{i,j}U'_{i,j} = \sum a_{nb}U'_{nb} + [(P'_{I-1,j} - P'_{I,j})]\Delta Y \quad (\text{III.90})$$

$$a_{I,j}V'_{I,j} = \sum a_{nb}V'_{nb} + [(P'_{I,j-1} - P'_{I,j})]\Delta X \quad (\text{III.91})$$

L'une des hypothèses fondamentales de l'algorithme SIMPLE est de négliger les deux termes $\sum a_{nb}U'_{nb}$ et $\sum a_{nb}V'_{nb}$ [22]. Les équations (III.90) et (III.91) de correction de vitesse se simplifient alors pour se mettre sous la forme suivante :

$$U'_{i,j} = d_{i,j}(P'_{I-1,j} - P'_{I,j}) \quad (\text{III.92})$$

$$V'_{I,j} = d_{I,j}(P'_{I,j-1} - P'_{I,j}) \quad (\text{III.93})$$

$$\text{Avec : } d_{i,j} = \frac{\Delta Y}{a_{i,j}} \quad \text{et} \quad d_{I,j} = \frac{\Delta X}{a_{I,j}}$$

Les équations (III.92) et (III.93) décrivent les corrections apportées aux vitesses à travers les formules (III.86) et (III.87), alors les équations de correction des vitesses U et V s'écrivent sous la forme :

$$U_{i,j} = U^*_{i,j} + d_{i,j}(P'_{i-1,j} - P'_{i,j}) \quad (\text{III.94})$$

$$V_{i,j} = V^*_{i,j} + d_{i,j}(P'_{i,j-1} - P'_{i,j}) \quad (\text{III.95})$$

Il existe aussi des expressions similaires pour $U_{i+1,j}$ et $V_{i,j+1}$:

$$U_{i+1,j} = U^*_{i+1,j} + d_{i+1,j}(P'_{i,j} - P'_{i+1,j}) \quad (\text{III.96})$$

$$V_{i,j+1} = V^*_{i,j+1} + d_{i,j+1}(P'_{i,j} - P'_{i,j+1}) \quad (\text{III.97})$$

Avec :

$$d_{i+1,j} = \frac{Y_{sn}}{a_{i+1,j}} \quad \text{et} \quad d_{i,j+1} = \frac{X_{we}}{a_{i,j+1}}$$

Reprenant l'équation de continuité sous la forme indicelle suivante :

$$[U_{i+1,j} - U_{i,j}]\Delta Y + [V_{i,j+1} - V_{i,j}]\Delta X = 0 \quad (\text{III.98})$$

En remplaçant les équations de correction des vitesses (III.94 à 97) dans l'équation de continuité (III.98), on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta Y \left[\left(U^*_{i+1,j} + d_{i+1,j}(P'_{i,j} - P'_{i+1,j}) \right) - \left(U^*_{i,j} + d_{i,j}(P'_{i-1,j} - P'_{i,j}) \right) \right] + \\ \Delta X \left[\left(V^*_{i,j+1} + d_{i,j+1}(P'_{i,j} - P'_{i,j+1}) \right) - \left(V^*_{i,j} + d_{i,j}(P'_{i,j-1} - P'_{i,j}) \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.99})$$

En développant cette dernière on aura :

$$\begin{aligned} [\Delta Y \cdot d_{i+1,j} + \Delta Y \cdot d_{i,j} + \Delta X \cdot d_{i,j+1} + \Delta X \cdot d_{i,j}]P'_{i,j} = \Delta Y \cdot d_{i+1,j}P'_{i+1,j} + \Delta Y \cdot d_{i,j}P'_{i-1,j} + \\ \Delta X \cdot d_{i,j+1}P'_{i,j+1} + \Delta X \cdot d_{i,j}P'_{i,j-1} + [\Delta Y \cdot U^*_{i,j} - \Delta Y \cdot U^*_{i+1,j} + \Delta X \cdot V^*_{i,j} - \Delta X \cdot V^*_{i,j+1}] \end{aligned} \quad (\text{III.100})$$

Après ce développement et arrangement l'expression de l'équation discrétisée pour la correction de pression qui s'écrit sous la forme

$$a_{i,j}P'_{i,j} = a_{i+1,j}P'_{i+1,j} + a_{i-1,j}P'_{i-1,j} + a_{i,j+1}P'_{i,j+1} + a_{i,j-1}P'_{i,j-1} + b'_{i,j} \quad (\text{III.101})$$

Avec :

$$a_{I,J} = a_{I+1,J} + a_{I-1,J} + a_{I,J+1} + a_{I,J-1} \quad (\text{III.102.a})$$

$$a_{I+1,J} = \Delta Y \cdot d_{i+1,J} \quad (\text{III.102.b})$$

$$a_{I-1,J} = \Delta Y \cdot d_{i,J} \quad (\text{III.102.c})$$

$$a_{I,J+1} = \Delta X \cdot d_{I,j+1} \quad (\text{III.102.d})$$

$$a_{I,J-1} = \Delta X \cdot d_{I,j} \quad (\text{III.102.e})$$

$$b'_{I,J} = \Delta Y \cdot U^*_{i,J} - \Delta Y \cdot U^*_{i+1,J} + \Delta X \cdot V^*_{I,j} - \Delta X \cdot V^*_{I,j+1} \quad (\text{III.102.f})$$

III.4. RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATION :

Les méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques peuvent classées en deux classes, directes (inversement d'une matrice, Gauss, Gauss Jordan avec Pivot, L.U.avec substitution) et indirectes ou itératives (Jacobi, Gauss- Seidel; méthode de Balayage). Bien sur, le plus souvent sont les méthodes itératives surtout pour les problèmes non linéaires, d'autre cote, les méthodes directes exigent une mémoire énorme et un temps de calcul plus grand. Pour notre cas, nous utilisons la méthode SIP (Strongly Implicit Procedure), développée par STONE en 1968.

- **Technique de sous relaxation :**

La technique de sous relaxation est très pratique pour les problèmes non-linéaires car elle permet d'éviter la divergence des méthodes itératives utilisées pour les résoudre et d'assurer la stabilité du schéma numérique. La méthode de sous-relaxation est celle consistant à utiliser un facteur de relaxation α compris entre 0 et 1, alors l'expression de la grandeur sous relaxée est la suivante :

$$\phi_p^{k+1} = \phi_p^k + \alpha_\phi \left[\frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb}^{k+1} + b}{a_p} - \phi_p^k \right] \quad (\text{III.103})$$

ϕ_p^{k+1} : représente la valeur de la grandeur à l'itération (k+1).

α_ϕ : représente le facteur de sous relaxation. Où : $0 < \alpha_\phi < 1$

Dans notre cas, on déterminera un facteur de sous relaxation pour chaque grandeur de calcul à savoir la vitesse U , la vitesse V , la pression P et la température θ .

Il n'y a pas de règle générale pour choisir la valeur optimale de α . Cette valeur va dépendre de :

- La nature du problème (non-linéarités, etc.) ;
- Le nombre de nœuds du maillage ;
- La méthode itérative utilisée.

Seule l'expérience numérique en faisant plusieurs tests pour un problème donné pourra permettre de dégager une valeur optimale entre assurer la convergence et augmenter sa vitesse.

III.5. PROCEDURE DE CALCUL DE L'ALGORITHME SIMPLE :

L'algorithme SIMPLE se résume aux étapes suivantes :

1. Estimer le champ de pression P^* .
2. Calculer les coefficients pour les équations de quantité de mouvement et déterminer les vitesses U^* et V^* .
3. Calculer les coefficients pour l'équation de correction de pression.
4. Évaluer la source b et résoudre l'équation (III.101) pour P'
5. Corriger le champ de vitesse, en utilisant des équations comme l'équation (III.94) et (II.95).
Corriger le champ de pression en utilisant l'équation (III.85).
6. Résoudre les autres équations de $\emptyset$, mettre à jour les propriétés, les coefficients.
7. traitez la pression corrigée P comme une nouvelle pression estimée P^* avec la prise en considération de la sous-relaxation, retourner à l'étape 2, et répétez le procédé jusqu'à ce qu'une solution convergée soit obtenue.

III.6. CONCLUSION :

A travers ce chapitre, nous avons présenté brièvement la méthode de volume fini, les étapes de discrétisation du modèle mathématique et de résolution des équations algébriques. Le schéma amont est utilisé pour évaluer les flux convectifs aux interfaces des volumes de contrôle. L'algorithme simple a été adopté pour résoudre le couplage vitesse pression. Une description sommaire de la méthode SIP utilisée pour résoudre le système d'équations algébriques résultant a été présentée.

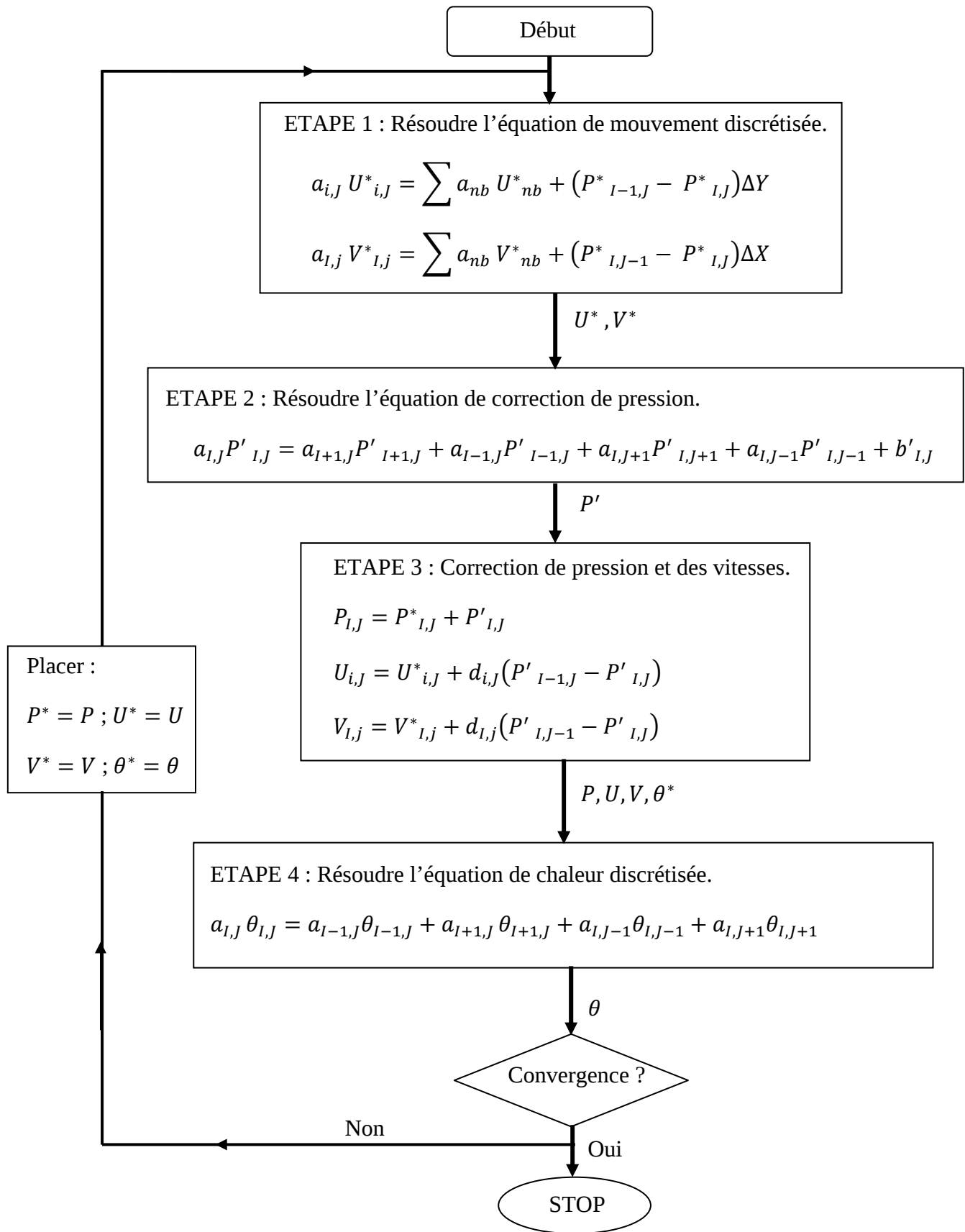


Fig.III.9 : Organigramme de l'algorithme SIMPLE

CHAPITRE IV

RESULTATS ET INTERPRETATIONS

IV.1. INTRODUCTION :

Ce chapitre est consacré pour la présentation des résultats numérique de la convection forcée dans un canal plan poreux et fluide soumis à des conditions aux limites spécifiées. Notre principale tâche consiste à étudier l'influence des paramètres de contrôle sur l'écoulement et les mécanismes de transfert de chaleur. Ces résultats sont présentés sous forme de graphes pour montrer l'influence :

- Du nombre de Reynolds Re .
- Du nombre de Darcy Da .
- Du rapport des conductivités Rk .
- Du nombre de Prandtl Pr .

IV.2. INFLUENCE DU MAILLAGE :

Le maillage utilisé dans le présent travail est un maillage uniforme dans les deux directions considérées (longitudinale et transversale). Afin d'illustrer une éventuelle influence du maillage, sur le champ dynamique et le champ thermique, nous avons exécuté le code pour différents maillages pour le cas d'un canal sans la matière poreuse. Nous avons considéré le cas où $Re = 1000$, $Pr = 0.7$. La figure (IV.1) illustre la variation du profil du nombre de Nusselt local le long du canal et ce pour différentes configurations où l'on a choisi plusieurs maillages. On remarque qu'à l'exception des premiers maillages (121x81) et (201x81) où l'on constate une légère différence, les profils du nombre de Nusselt pour les autres maillages restent presque inchangés.

Nous avons aussi effectué une approximation chiffrée de l'effet du maillage sur les résultats dynamiques et thermiques en calculant les valeurs du nombre de Nusselt moyen $\overline{Nu}$ et les valeurs de la vitesse axiale au centre du canal (vitesse maximale) U_c . Les résultats obtenus sont montrés sur le tableau IV.1. Le maillage que nous avons utilisé dans cette étude

est 251x121, on constate à travers les valeurs du tableau IV.4 que la valeur de l'erreur sur le nombre de Nusselt moyen est de 0.08 % et sur la vitesse axiale au centre du canal, elle est de 0.075 %, ce qui est largement acceptable.

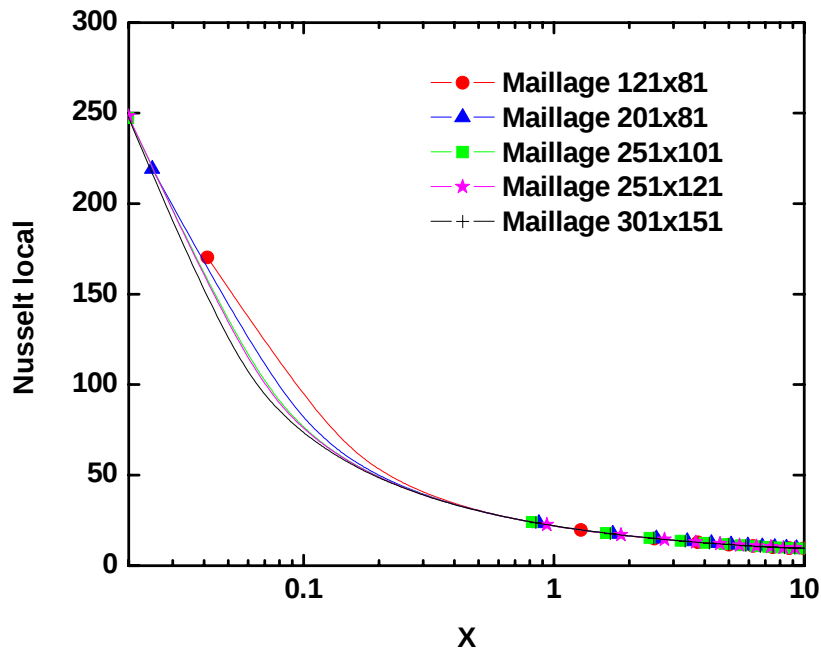


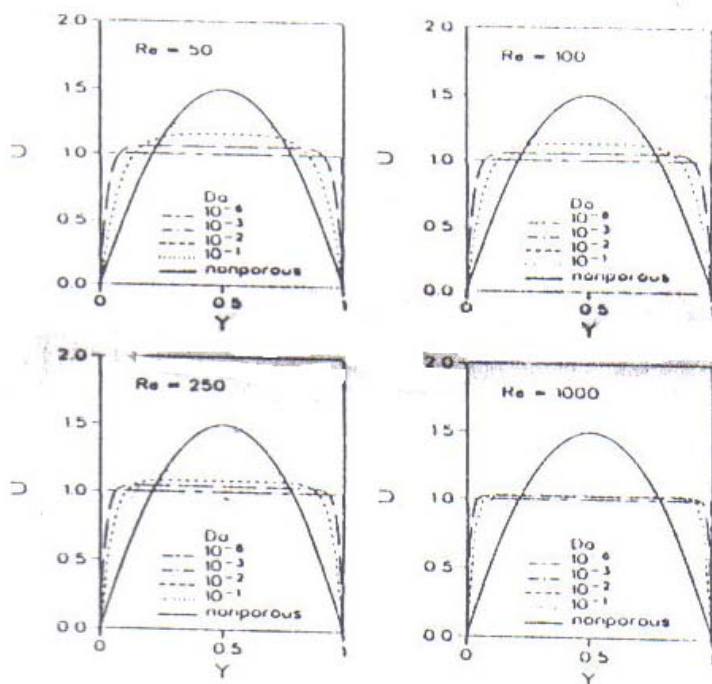
Figure IV.1 : Profils du nombre de Nusselt local, le long du canal, pour différents maillages.

N°	maillage	Nombre de Nusselt Moyen		Vitesse longitudinale au centre du canal U_c	
		$\overline{Nu}$	Err (%)	U_c	Err (%)
1	121x81	16.004572	0.90	1.205668	0.53
2	201x81	15.908890	0.30	1.201792	0.21
3	251x101	15.874184	0.09	1.200337	0.09
4	251x121	15.872378	0.08	1.200155	0.07
5	301x151	15.859818	*****	1.199254	*****

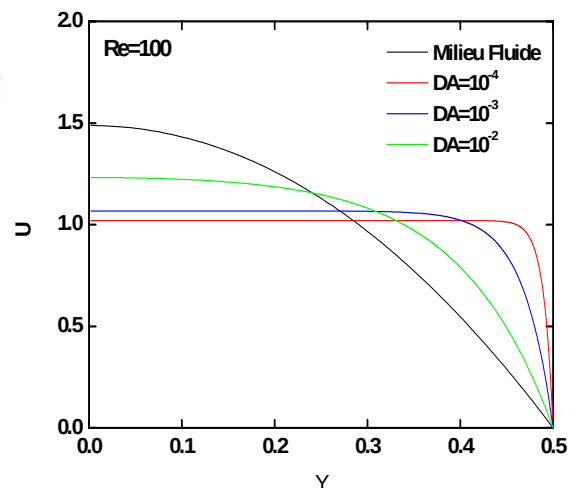
Tableau IV.1 : Effet du maillage sur les caractéristiques dynamiques et thermiques de l'écoulement

IV.3. VALIDATION DU CODE DE CALCUL :

Dans le but de valiser le code de calcul, nous avons considérés des cas qui ont été déjà étudiés, soit numériquement, soit analytiquement pour des cas limites simplifiés. Ainsi la première validation concerne l'écoulement en convection forcée dans un canal plan en présence de la matière poreuse menée par A. Hadim [donner la référence 01]. La figure IV.2. représente le profil de la vitesse axiale au milieu du canal en fonction de la distance transversale pour différents valeurs du nombre de Darcy.



a) Résultats de la référence [23]



b) Résultats de la présente étude

Figure IV.2 : Profils de la vitesse axiale au centre du canal pour différentes valeurs du nombre de Darcy

Nous avons choisi d'effectuer la comparaison avec la figure obtenue pour $Re=100$, c'est cette valeur qui correspond à un écoulement établi dans le canal. On constate que les profils coïncident pour toutes les valeurs du nombre de Darcy. On remarque aussi à travers la figure IV.2.b que la valeur adimensionnelle de la vitesse longitudinale au centre du canal est égal à 1.5 ce qui démontré analytiquement pour les écoulements à travers un canal plan. Un autre cas

limite couramment traité par les ouvrages du transfert de chaleur est le nombre de Nusselt local. dans la région complètement développée, pour le cas d'un canal plan. Cette valeur est de **7.541**, comme l'indique la figure IV.3.

geometry	a/b	Nu_D	
		uniform surface flux	uniform surface temperature
		4.364	3.657
	1	3.408	2.976
	2	4.123	3.391
	4	5.331	4.439
	8	6.490	5.597
	∞	8.235	7.541
		3.102	2.460

Figure IV.3 : Valeurs du nombre de Nusselt local pour un écoulement complètement développé en fonction de la géométrie du canal [24]

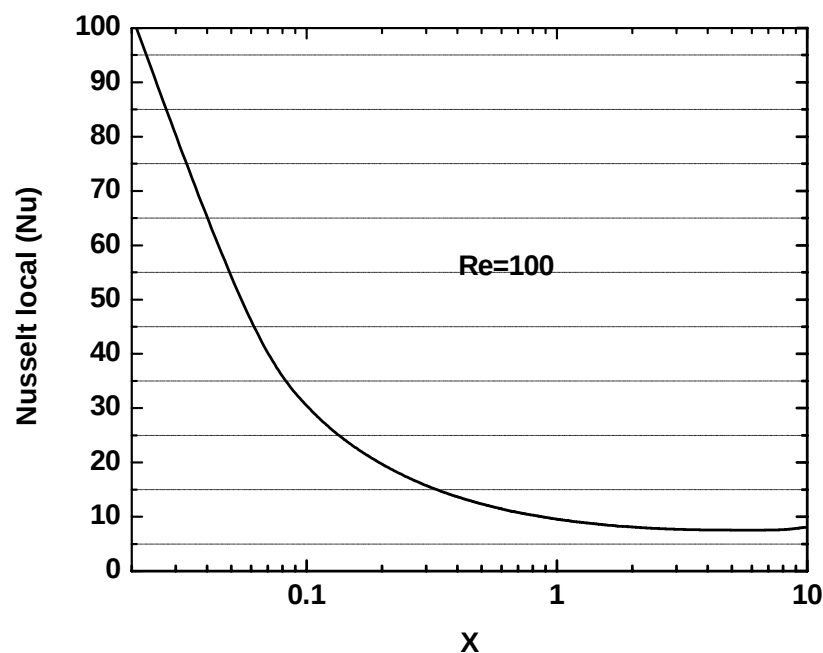


Figure IV.4 : Profils du nombre de Nusselt local dans la région complètement développée, résultat de la présente étude.

On constate à travers la courbe IV.4 que le profil du nombre de Nusselt, dans la région complètement développée converge vers une valeur constante de l'ordre de 7.55, d'où la concordance des résultats obtenus par rapport à ceux traités dans la littérature.

IV.4. RESULTATS OBTENUS :

Dans cette partie, nous allons présenter les résultats obtenus pour les deux cas considérés à savoir le canal sans milieux et le canal avec milieux poreux. Les résultats concerneront les profils de températures, les profils de vitesses, les profils du nombre de Nusselt local et moyen. Les résultats sont obtenus pour les gammes de paramètres adimensionnels suivants ; pour le cas fluide : $50 \leq Re \leq 1000$, $Pr = 0.7$ et pour le cas poreux : $Re = 100$, $Re = 1000$, $10^{-6} \leq Da \leq 1$, $0.1 \leq R_k \leq 100$, $0.1 \leq \varepsilon \leq 0.9$

IV.4.1. Cas d'un canal sans milieu poreux :

IV.4.1.1. Profil des vitesses à quelques positions axiales :

Dans le but de visualiser le comportement dynamique du fluide le long du canal Nous allons présenter le profil de la vitesse longitudinale en fonction de la distance transversale pour différentes positions axiales du canal et pour différents nombre de Reynolds, comme le montre les figures IV.4 à IV.7.

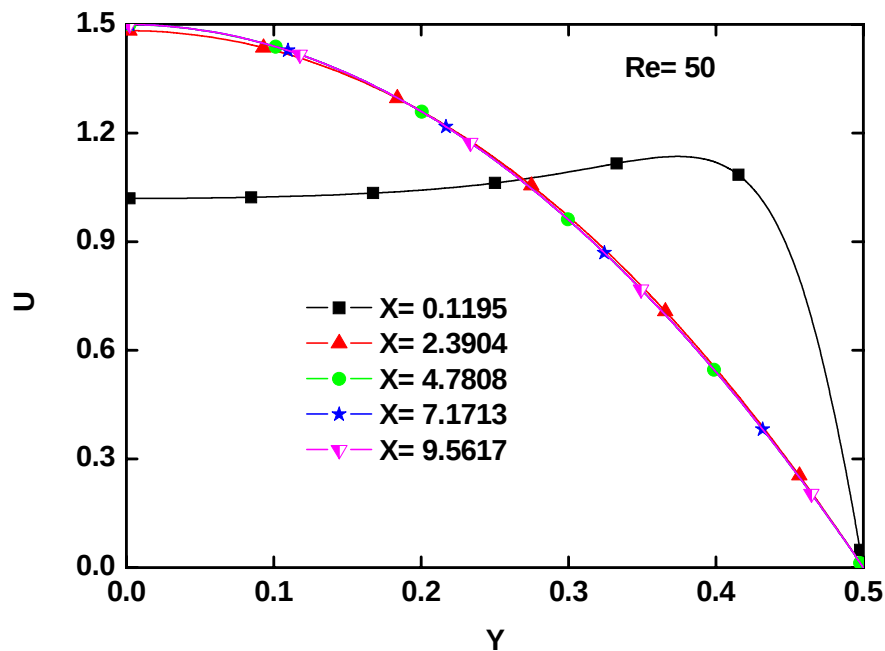


Fig. IV.5 : Profil de la composante horizontale de la vitesse à quelques positions axiales pour $Re= 50$

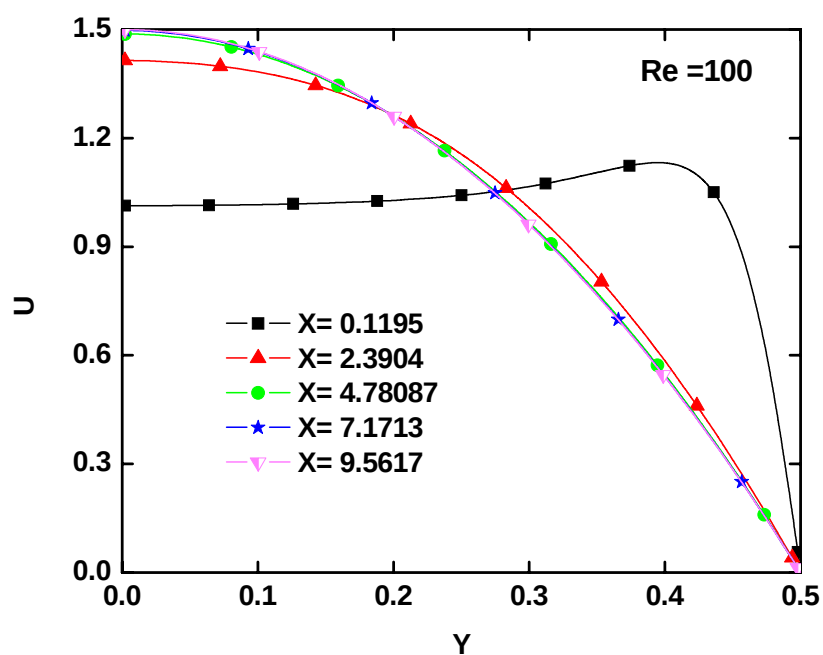


Fig. IV.6 : Profil de la composante horizontale de la vitesse à quelques positions axiales pour $Re= 100$

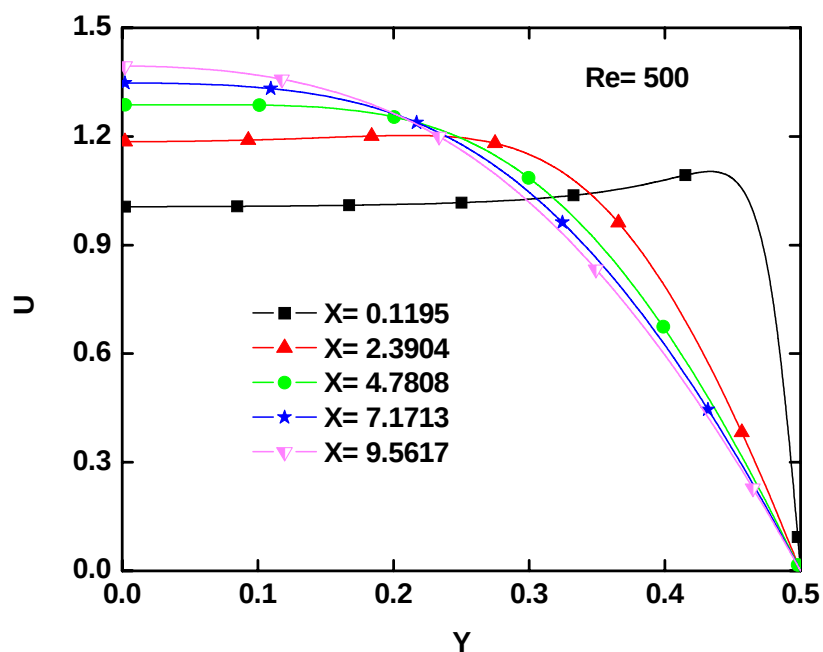


Fig. IV.7 : Profil de la composante horizontale de la vitesse à quelques positions axiales pour $Re= 500$

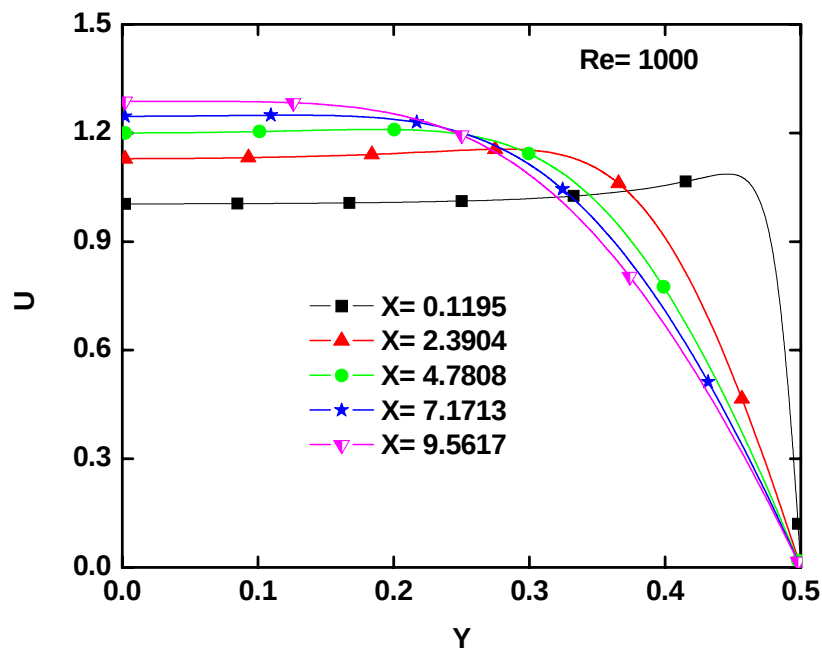


Fig. IV.8 : Profil de la composante horizontale de la vitesse à quelques positions axiales pour $Re = 1000$

Pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds (Fig. IV.5), on constate que le profil de la vitesse longitudinale a une forme plate près de l'entrée du canal ($X=0.1195$). La forme du profil change d'un profil plat à un profil parabolique lorsqu'on avance dans la direction de l'écoulement. On note tout de même que Cette forme parabolique est atteinte à une distance très proche de l'entrée ($X=2.3904$) à partir de laquelle le profil demeure inchangé et l'écoulement est complètement développé.

Pour une valeur du nombre de Reynolds légèrement supérieure (Fig. IV.5), le profil de la vitesse se présente toujours sous une forme plate au voisinage de l'entrée du canal, il change considérablement de forme à une distance ($X=2.3904$) pour devenir parabolique. En avançant encore dans le canal, on constate que le profil continue à se développer légèrement pour ensuite devenir inchangé à partir d'une distance ($X=4.8785$) jusqu'à la sortie du canal.

Pour des valeurs du nombre de Reynolds relativement élevés, (Fig. IV.7 & IV.8), le profil de la vitesse longitudinale se développe de façon importante pour des distances proches de l'entrée du canal. Ce développement devient moins important quand on progresse dans la direction de l'écoulement sans pour autant cesser de varier. Le régime dynamique établi n'étant pas encore atteint dans ce cas, même à l'extérieur de la conduite. On constate ainsi, que

l'intensité de la vitesse maximale, obtenue au milieu du canal, diminue quand le nombre de Reynolds augmente.

- **Influence du nombre de Reynolds sur le profil des vitesses :**

La figure (IV.9) illustre la variation du profil de la vitesse longitudinale, évalué au centre du canal et pour différentes valeurs du nombre de Reynolds..

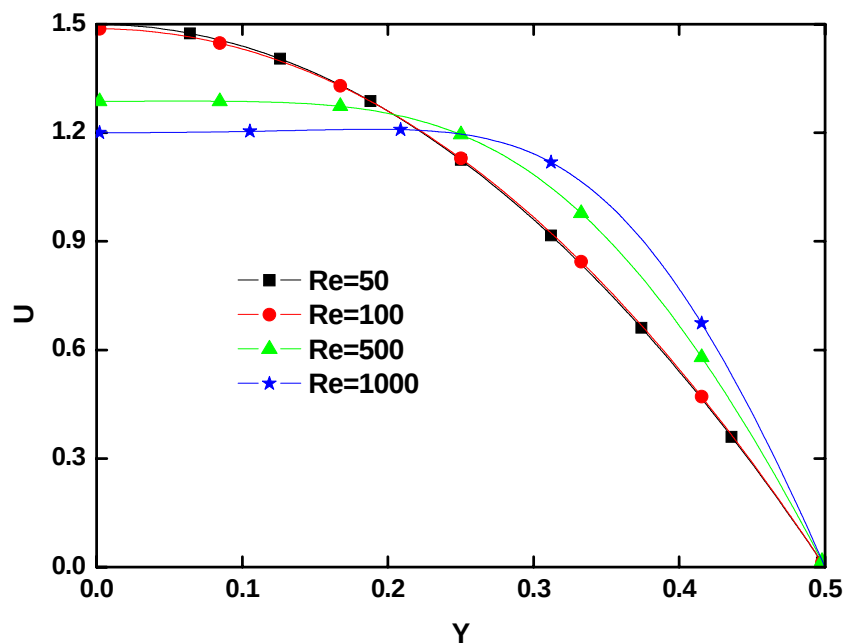


Figure. IV.9 : Profil de la vitesse longitudinale au milieu du canal pour différentes valeurs du nombre de Reynolds

On constate à travers la figure IV.9 que la valeur de la vitesse axiale au milieu du canal diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Il est à signaler que la valeur de 1.5 pour la vitesse et qui est caractéristique d'un écoulement dans un canal plan complètement développé, est atteinte pour des faibles nombres de Reynolds ($Re= 50$) et diminue en augmentant Reynolds pour être de l'ordre de 1.2 pour $Re= 1000$. Cette augmentation dans le nombre de Reynolds influe considérablement sur le profil de la vitesse, qui est fortement parabolique pour des valeurs de Reynolds élevés et tend à rejoindre un profil plat, au fur et à mesure qu'on augmente le nombre de Reynolds.

IV.4.1.2. Profil de température à quelques positions axiales :

Les résultats thermiques obtenus pour le cas d'un canal sans milieu poreux seront présentés en terme des profils de températures pour différentes positions axiales et différents nombres de Reynolds et en terme du profil du nombre de Nusselt local pour différents Reynolds.

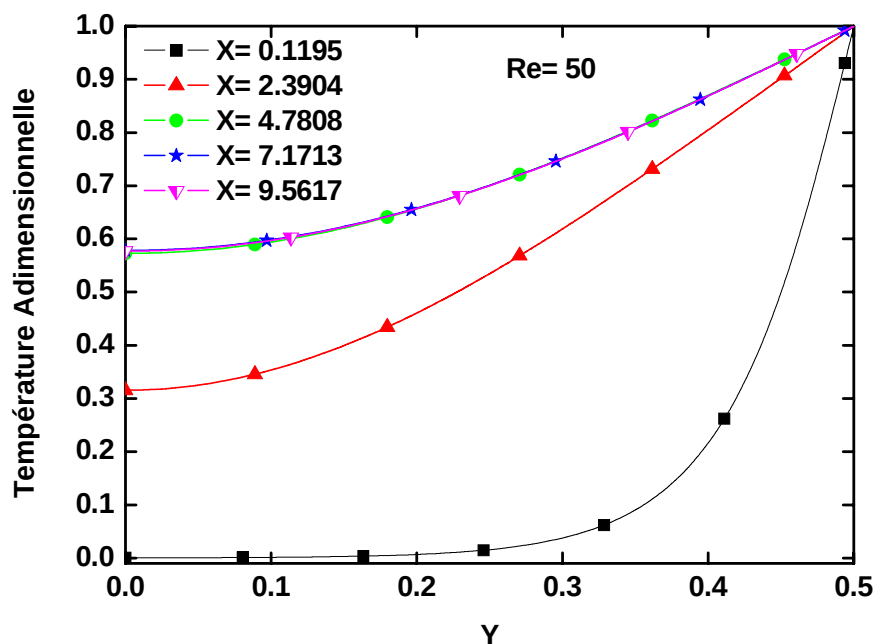


Fig. IV.10 : Profil de la température pour différentes positions axiales pour $Re = 50$

Les figures (IV.10 & IV.11) représentent la distribution des températures en fonction de la largeur Y du canal, pour différentes positions longitudinales. Elle montre l'évolution du profil des Températures le long du canal à partir de l'entrée vers la sortie. On constate que pour $Re = 50$, (figure IV.10), le profil évolue jusqu'à une certaine distance de l'entrée ($X = 4.7808$) à partir de laquelle il devient inchangé, ce qui correspond à l'atteinte du régime établi.

Pour le cas du nombre de Reynolds élevé, $Re = 1000$ (figure IV.11), le profil des températures évolue le long de la direction longitudinale du canal, à partir d'un profil plat à l'entrée vers un profil parabolique loin de l'entrée, sans pour autant atteindre un profil constant qui caractérise le régime établi. Pour des nombres de Reynolds élevés, l'épaisseur de la couche limite thermique devient très faible, ce qui augmentera la longueur d'établissement du régime thermique.

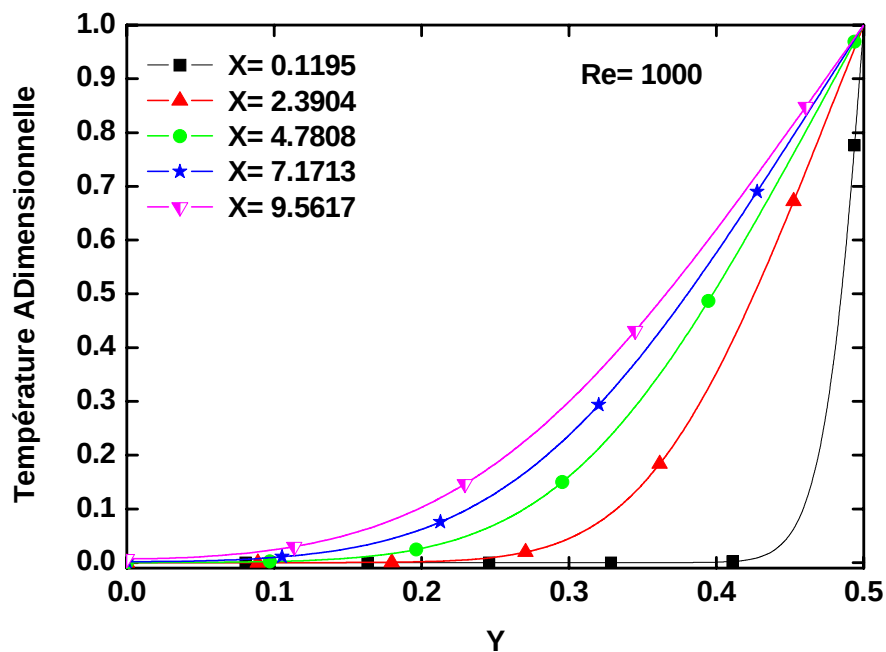


Fig. IV.11 : Profil de la température pour différentes positions axiales pour $Re=1000$

IV.4.1.3. Nombre de Nusselt local :

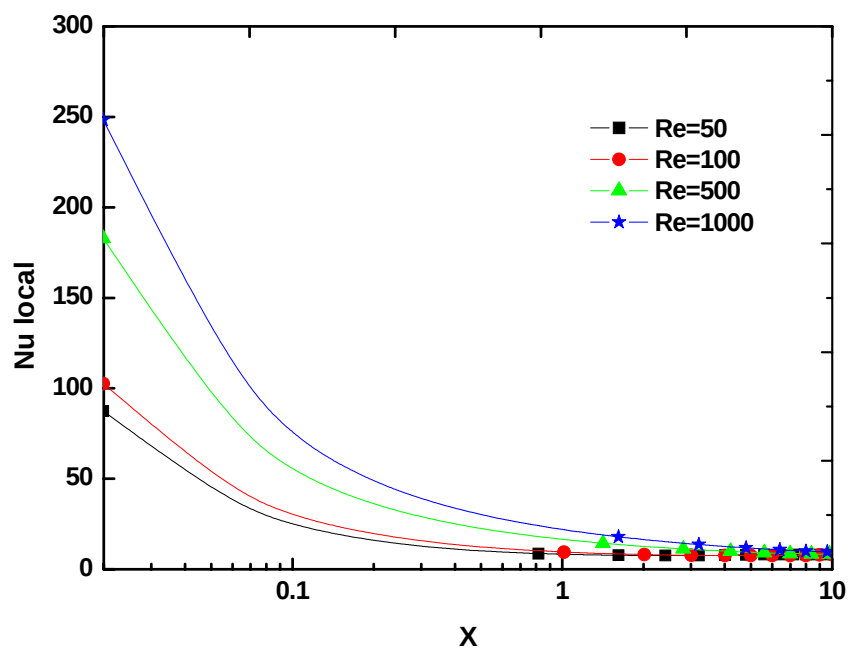


Fig. IV.12 : Variation du nombre de Nusselt local le long du canal pour différentes valeurs du nombre de Reynolds

La figure (IV.12) illustre la variation du nombre de Nusselt local le long du canal pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. On remarque que les échanges thermiques locaux sont plus importants à l'entrée du canal où les gradients sont plus importants (couche limite mince) et diminuent au fur et à mesure qu'on avance dans le canal pour tendre finalement vers une valeur limite constante. Cette dernière est indépendante de la valeur du nombre de Reynolds, même si elle est plus au moins rapidement atteinte, pour les faibles valeurs du nombre de Reynolds (établissement plus rapide du régime thermique à Re plus faible). On remarque aussi que l'intensité des échanges en dehors de la zone d'établissement augmente avec l'augmentation du nombre de Reynolds.

IV.4.2. Cas d'un canal avec milieux poreux :

Pour le cas d'un canal avec milieu poreux, nous allons examiner l'influence des paramètres de contrôle tels que le nombre de Darcy, le nombre de Reynolds et le rapport des conductivités thermiques sur les distributions de la vitesse axiale, de la température et des nombres de Nusselts (local et moyen), les résultats sont obtenus pour un nombre de Prandtl de 0.7 et une porosité de 0.9.

IV.4.2.1. Influence du nombre de Darcy sur le profil des vitesses :

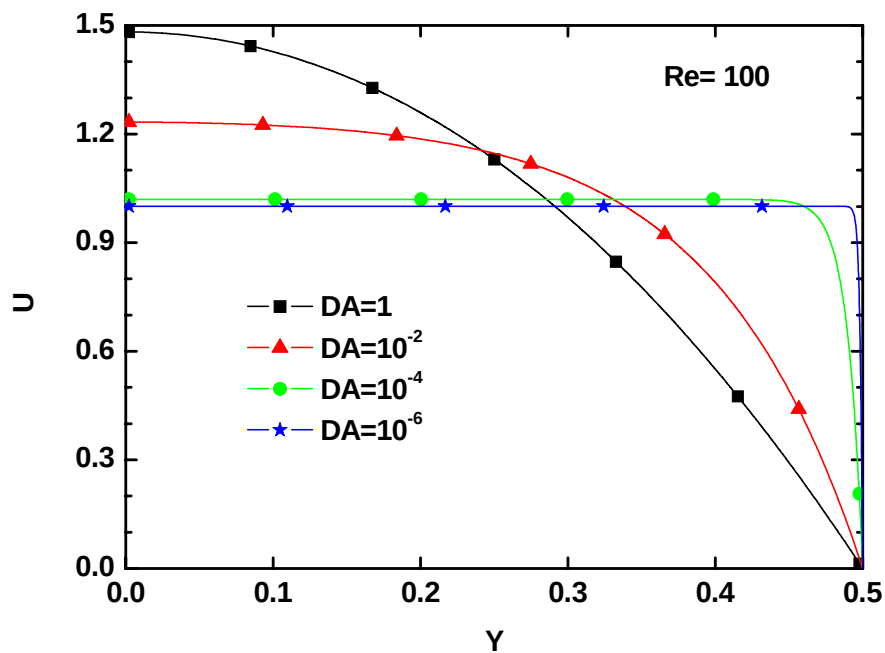


Fig. IV.13 : Influence du Nombre de Darcy sur le profil de la vitesse axiale pour $Re=100$

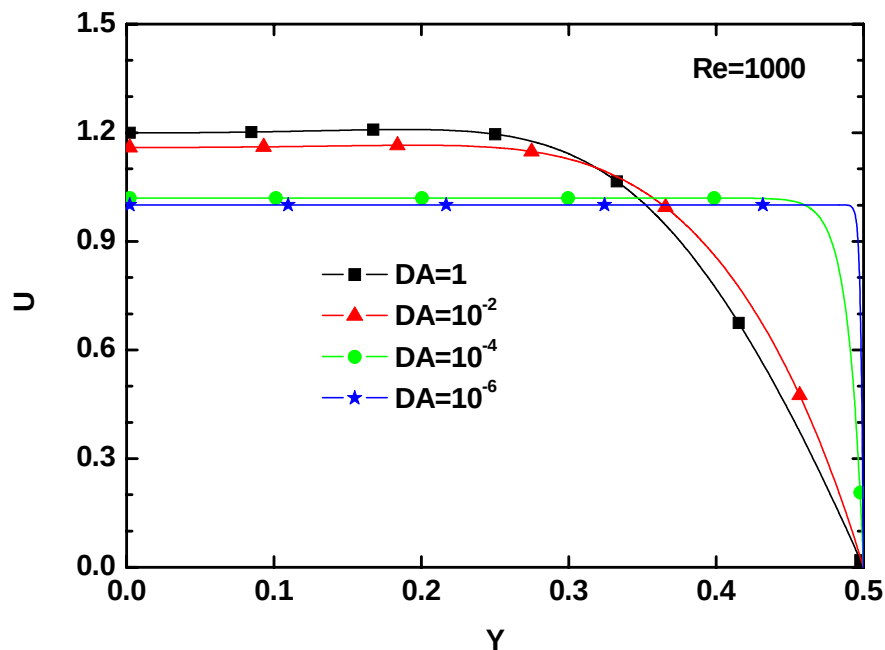


Fig. IV.14 : Influence du Nombre de Darcy sur le profil de la vitesse axiale pour $Re=1000$

Les effets des nombres de Reynolds et de Darcy sur le profil de la vitesse longitudinale à mi-longueur du canal rempli d'un milieu poreux sont illustrés sur les figures (IV.13) et (IV.14). On remarque que lorsque le nombre de Darcy diminue, la vitesse au centre du canal diminue et le profil change de forme, en allant d'un profil parabolique pour des nombres de Darcy élevés vers un profil plat, pour des nombres de Darcy faibles (cas d'un milieu poreux très peu perméable).

Quand le nombre de Reynolds augmente (Figure IV.14), l'effet de la matrice poreuse sur le profil de vitesse est plus important, le profil devient moins parabolique pour des valeurs du nombre de Darcy élevées. Ce qui est en accord avec les constatations établies pour le cas fluide. On constate aussi à travers ces figures que les cas limites pour la vitesse axiale sont visibles à savoir la valeur 1.5 pour le cas fluide (valeurs élevées du nombre de Darcy) et la valeur 1 pour le cas fortement poreux (faibles valeur de Darcy) et qui correspond au régime Darcien.

IV.4.2.2. Nombre de Nusselt local et température:

- Effet de nombre de Darcy :

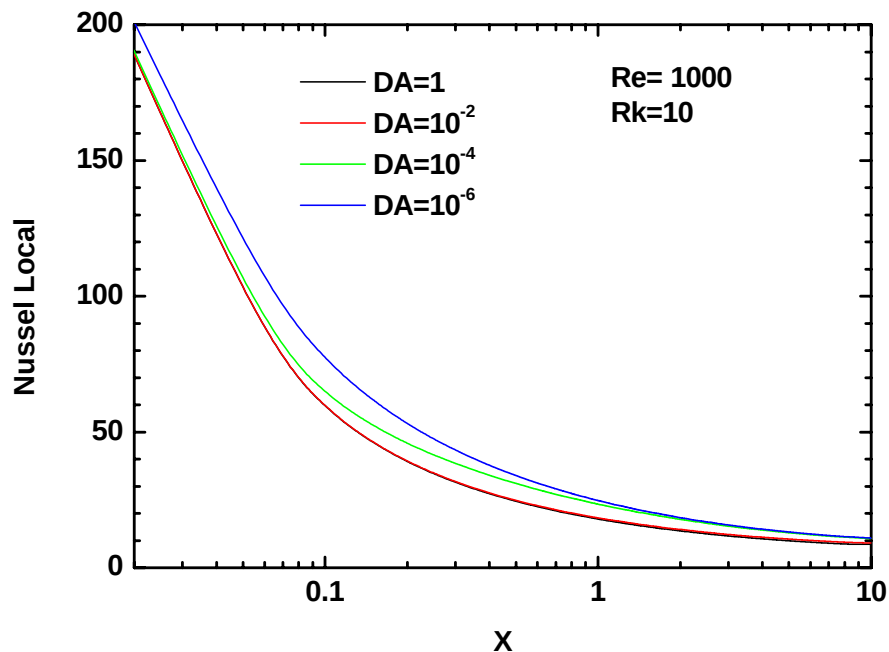


Fig. IV.15 : Variation du nombre de Nusselt local le long du canal pour différentes valeurs du nombre de Darcy

La figure (IV.15) illustre la variation du nombre du Nusselt local pour différentes valeurs du nombre de Darcy. On remarque que la diminution de la perméabilité entraîne une augmentation du coefficient de transfert thermique. Cette augmentation peut s'expliquer par le fait que l'insertion d'un milieu poreux de faible perméabilité conduit à une diminution sensible des couches limites dynamique et thermique, ce qui rend les gradients pariétaux très importants et par conséquent, entraîne une augmentation du transfert de chaleur par rapport au cas des milieux de perméabilité plus élevée. Ces écarts deviennent insignifiants lorsque le régime devient établi et que le transfert tend vers une valeur constante indépendante de la perméabilité.

- Effet du rapport des conductivités thermiques Rk :

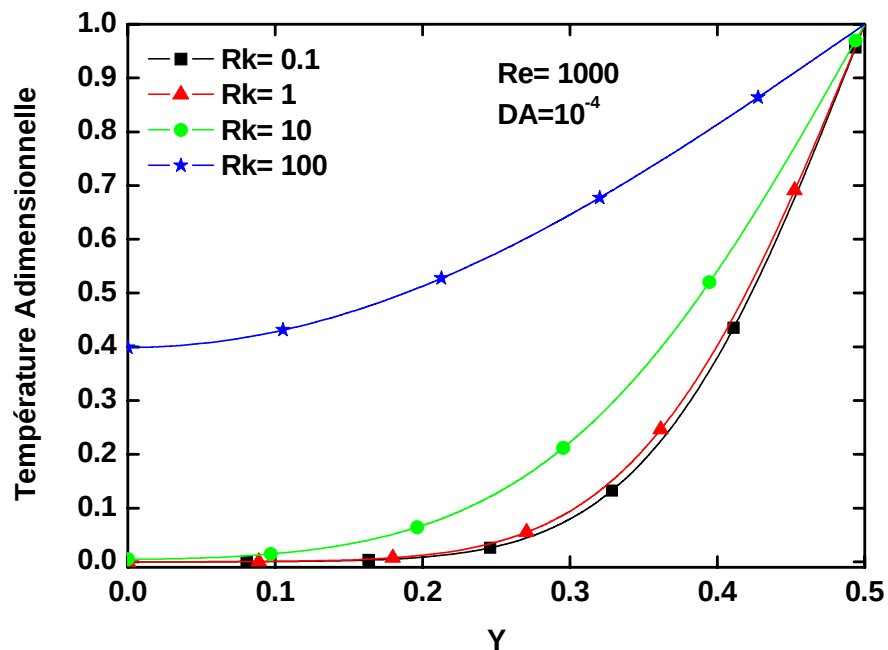


Fig. IV.16 : Influence du rapport des conductivités thermiques sur le profil pour $Re=1000$ et $DA=10^{-4}$

L'effet du rapport des conductivités, qui est défini comme le rapport de la conductivité du solide sur celle du fluide, sur le profil des températures est illustré sur la Figure IV.16. On remarque que pour des valeurs élevées du rapport des conductivités (le solide est plus conducteur que le fluide) le profil des températures tend à atteindre la température de la paroi, ceci est dû à la bonne communication thermique notamment conductive entre le solide et la paroi portée à une température constante. Par contre, pour le cas où les valeurs du rapport des conductivités sont faibles (le fluide est plus conducteur que le solide), le profil des températures s'éloigne du profil plat, caractérisant le régime établi, du fait de la faible conductivité thermique du solide.

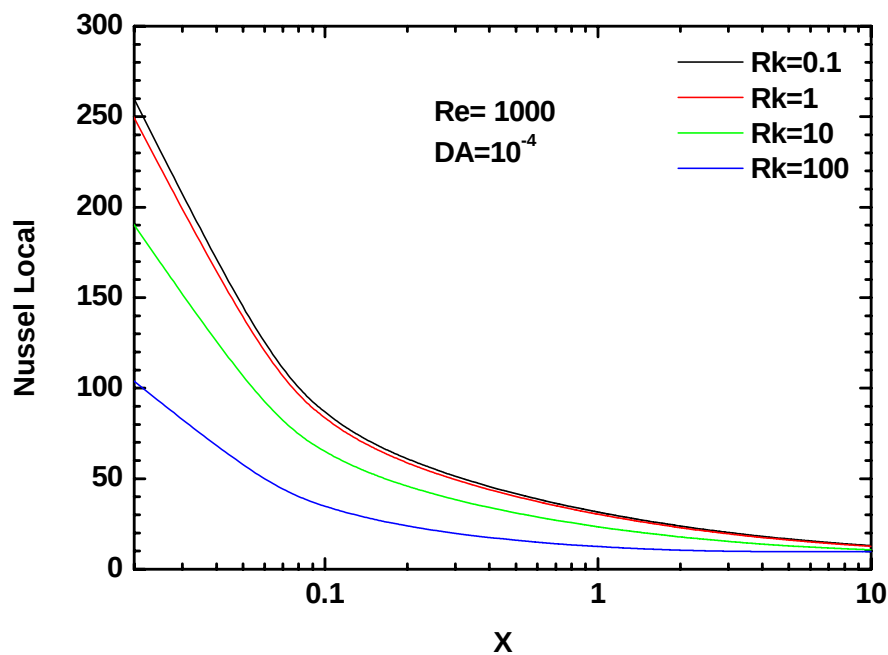


Fig. IV.17 : Variation du nombre de Nusselt local le long du canal pour différentes valeurs du rapport des conductivités thermiques

Sur la figure (IV.17) sont reportées les variations du nombre de Nusselt local le long de la direction longitudinale, pour différentes valeurs du rapport des conductivités thermiques. Le nombre de Nusselt qui est élevé à l'entrée, décroît régulièrement le long du canal; ceci s'explique par l'écart des températures entre le fluide et la paroi en chaque section. Cet écart s'anéantit au fur et à mesure qu'on s'enfonce dans la conduite, d'où les gradients thermiques décroissants. On note également dans ce cas, que lorsqu'on s'éloigne vers l'aval, les valeurs du transfert pour les différents rapports de conductivités tendent vers une limite commune correspondant au régime établi indépendamment de la valeur de ce rapport. En effet, du fait que les épaisseurs des couches limites sont entièrement développées et que les écarts de températures entre la paroi et le fluide deviennent relativement constants, le coefficient de transfert tend par conséquent, vers une valeur constante. Comme on le constate sur la figure (IV.17), la diminution du rapport des conductivités entraîne une augmentation du nombre de Nusselt, du fait que les valeurs élevées du rapport des conductivités favorisent les effets relatifs des transferts convectifs.

IV.4.2.3. Nombre de Nusselt moyen :

- Effet du nombre de Darcy Da :

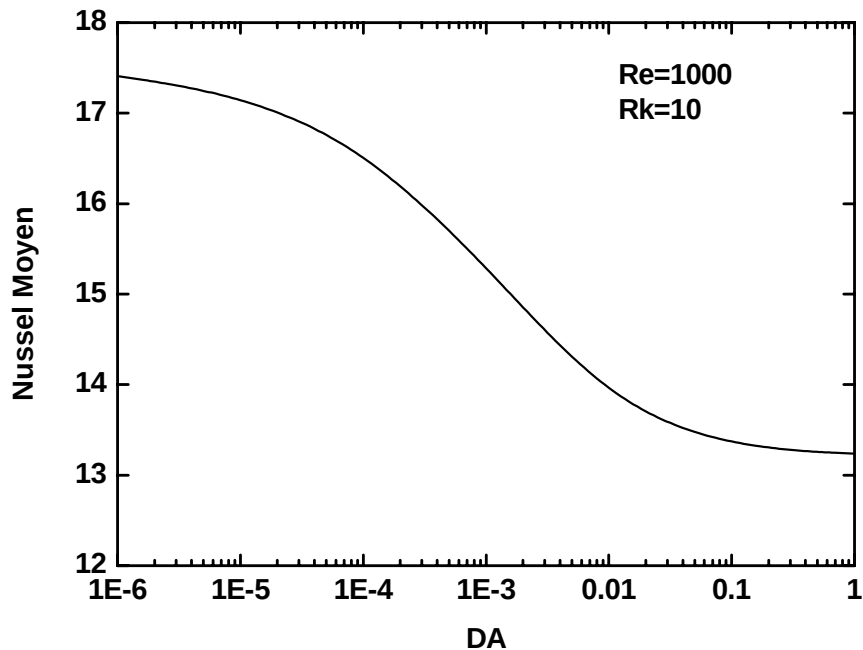


Fig. IV.18 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Darcy

Le comportement de ce nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Darcy est illustré sur la figure (IV.18). L'augmentation dans les valeurs du nombre de Darcy entraîne une diminution dans les valeurs du nombre de Nusselt. Quand le nombre de Darcy augmente, la perméabilité est plus importante et le comportement du canal poreux s'approche du comportement fluide. Par contre, pour des faibles valeurs du nombre de Darcy, le substrat tend à devenir une seule phase solide. Ces deux cas limites donnent le comportement asymptotique du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Darcy (valeurs limites constantes correspondant aux résultats précédemment établis).

- Effet du rapport des conductivités thermiques R_k :

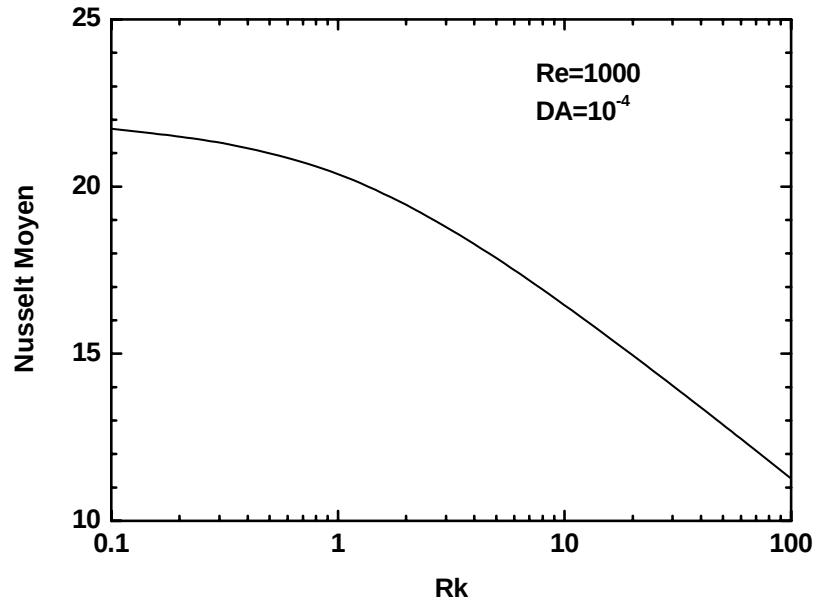


Fig. IV.19 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de R_k

La variation du nombre de Nusselt moyen sur la longueur du canal, en fonction du rapport des conductivités thermiques, est représentée sur la figure (IV.19). L'augmentation du rapport des conductivités entraîne une diminution du nombre de Nusselt global. Les faibles valeurs du rapport des conductivités correspondent aux faibles valeurs de la conductivité thermique du solide. Par conséquent, les effets convectifs dans le milieu poreux deviennent prédominants comparativement aux effets conductifs. Ce qui explique l'augmentation du nombre de Nusselt quand il y'a diminution du rapport de la conductivité du fluide sur celle du solide.

CONCLUSION GENERALE

L'importance des milieux poreux dans les processus industriels et technologiques est aujourd'hui bien démontrée. Diverses applications telles que le refroidissement des composants électroniques, la biomasse, le traitement thermique des déchets, le génie nucléaire, la conception et la fabrication des échangeurs de chaleur, continuent à faire l'objet de plusieurs travaux de recherche.

L'objectif de ce présent travail a été d'évaluer la contribution d'un milieu poreux inséré dans un canal sur le transfert de chaleur pour une large gamme des paramètres thermo physique. Pour cela une formulation mathématique du phénomène a été établie en se basant sur des équations gouvernantes mises sous formes adimensionnelles, régi par le modèle de Darcy- Brinkman. La méthode des volumes finis est adoptée pour la réalisation du système basé sur l'algorithme simple.

Ce travail a montré l'influence de plusieurs paramètres thermo-physiques sous forme adimensionnelle, sur le comportement dynamique et thermique. La présentation des résultats a été effectuée en termes de profils de vitesses et les profils des températures locales. Une discussion relative aux valeurs et aux évolutions des coefficients d'échange thermique a été menée. Elle concerne aussi bien les transferts locaux que les transferts moyens sur la longueur totale du canal. L'exploitation et l'analyse des différents résultats obtenus ont permis d'aboutir à un certain nombre d'observations et de constatations :

- Les profils de vitesses axiale et températures locales dépendent fortement de la valeur du nombre de Reynolds, qui influe directement sur le développement des couches limites dynamiques et thermiques et donc sur les longueurs d'établissement dynamique et thermique.
- L'effet de la matrice poreuse est très perceptible sur le profil des vitesses, en effet, il passe d'un profil parabolique dans le milieu fluide à un profil plat dans le substrat poreux. Le nombre de Reynolds a aussi tendance à aplatir les profils de vitesses et à augmenter la longueur d'établissement du régime dynamique lorsqu'il augmente.

CONCLUSION GENERALE

- L'introduction d'un milieu poreux à faible perméabilité, réduit l'épaisseur de la couche limite et augmente par conséquent les transferts thermiques. En effet, la diminution de la perméabilité entraîne une diminution sensible des épaisseurs des couches limites, dynamique et thermique, ce qui rend les gradients pariétaux très importants et par conséquent, entraîne une augmentation du transfert de chaleur par rapport au cas des milieux à perméabilité plus élevée.
- La diminution du rapport des conductivités entraîne un accroissement du nombre de Nusselt global.

Enfin le travail établit des perspectives de développement en prenant en considération le régime transitoire et aussi le changement de phase qui pourra surgir à l'intérieur du substrat poreux.

BIBLIOGRAPHIE

- [1]. Pei-Xue Jiang, Zhan Wang, Ze-Pei Ren, Bu-Xuan Wang, Experimental research of fluid flow and convection heat transfer in plate channels filled with glass or metallic particles, Experimental Thermal and Fluid Science, Vol.20, Issue.1, pp.45-54, 1999.**
- [2]. F. C. Chou, W. Y. Lien, S. H. Lin, Analysis and experiment of non-Darcian convection in horizontal square packed-sphere channels-1. Forced convection. Int. J. Heat Mass Transfer 35, No.1, pp. 195-205, 1992.**
- [3]. G. Degan, S. Zohoun, P. Vasseur, Forced convection in horizontal porous channels with hydrodynamic anisotropy, Int. J. Heat Mass Transfer 45, pp. 3181–3188, 2002.**
- [4]. G. Hetsroni, M. Gurevich, R. Rozenblit, Sintered porous medium heat sink for cooling of high-power mini-devices, Int. J. Heat Fluid Flow 27, pp.259–266, 2007.**
- [5]. CHEN G., HADIM H. A., Numerical study of three-dimensional non-Darcy forced convection in a square porous duct. International Journal for Numerical Methods for Heat and Fluid Flow, vol. 9, N° 2, pp. 151-169, 1999.**
- [6]. BENMERKHI MERIEM, AFRID MOHAMED, Transfert de chaleur et de matière dans un canal rempli partiellement d'une matière poreuse.**
- [7]. Shohel Mahmud et Roydon Andrew Fraser, « Conjugate heat transfer inside a porous channel »2004.**
- [8]. Pei-Xue Jiang, Guang-Shu Si, Meng Li et Ze-Pei Ren, » Experimental and numerical investigation of forced convection heat transfer of air in non-sintered porous media »**
- [9]. S. Chikh, A. Boumedien, K. Bouhadeef et G. Lauriat, « Analysis of fluid flow and heat transfer in a channel with intermittent heated porous blocks » Heat and Mass Transfer 33, 405-413, (1998).**

- [10]. Mohamed A. Teamah, Wael M. El-Maghlany et Mohamed M. Khairat Dawood, « Numerical simulation of laminar forced convection in horizontal pipe partially or completely filled with porous material » *International Journal of Thermal Sciences* 50, 1512-1522, (2011).
- [11]. A. Nakayama, H. Koyama et F. Kuwahara , « An analysis on forced convection in a channel filled with a Brinkman-Darcy porous medium: Exact and approximate solutions », *Wgrme- und Stoffübertragung* 23, 291-295, (1988).
- [12]. Y.BENAKCHA, R.HADJ-ALI, A.GHEZAL, J.C.LORAUD « Etude analytique et numérique des transferts de chaleur d'un écoulement pulsé dans une conduite en présence d'un cylindre chauffé », 19ème Congrès Français de Mécanique Marseille, 24-28 août 2009.
- [13]. Zakaria Doulfoukar et Abderrahim Achiq « Convection laminaire forcée dans le sillage d'une plaque chaude placée dans un canal », *C. R. Mecanique* 333, 499–506 (2005).
- [14]. Chenhua Gou, Ruixian Cai et Qibin Liu « Field synergy analysis of laminar forced convection between two parallel penetrable walls », *International Journal of Heat and Mass Transfer* 52, 1044–1052, (2009).
- [15]. B.H. CHANG ET A.F. MILLS « Numerical prediction of flow and heat transfer in a prallel plate channel with staggered fins ». *International journal of heat and mass transfer*. Vol 109/25, 1987.
- [16]. C. HSIANG ET W. H. HUANG « Laminar forced convection flows in horisontal channels with transverse fins placed in the entrace region ». *Numerical heat transfer*. VOL16 PP 77-100, 1989.
- [17]. S. Bories, M. Prat, *Transferts de chaleur dans les milieux poreux*, Techniques de l'ingénieur, Traité Génie Energétique, B8 250, 2005, pp.1-32.

- [18]. Charles Danquigny, Etude expérimentale du transfert de masse en milieu poreux hétérogène, Thèse doctorat de l'université de Louis Pasteur de Strasbourg, 2003.
- [19]. D.A. Nield, A. Bejan, Convection in porous media, 2nd ed, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [20]. HANDBOOK OF POROUS MEDIA, second edition. Edited by Kambiz Vafai. 2005 by Taylor & Francis Group, LLC.
- [21]. « Transmission de la chaleur et Thermodynamique »
par F. KREITH : Professeur de Mécanique, Université du Colorado,
TRADUCTION ET ADAPTATION par KODJA BADR-EL-DINE; MASSON ET
Cie, ÉDITEURS ; PARIS, 1967
- [22]. Suhas V. PATANKAR « NUMERICAL HEAT AND FLUID FLOW ». Edited by
Taylor and Francis.
- [23]. Hadim A, "Forced convection in porous channel with localized heat sources",
Journal of heat transfer, vol.116, pp.465-472, 1994.
- [24]. M. Jiji, Heat convection, Springer Berlin Heidelberg New York, 2006