République Algérienne Démocratique et populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou

Faculté de Génie Electrique et d'Informatique

Département Automatique

MEMOIRE DE MAGISTER

En Automatique

Option : **Automatique des Systèmes Continus et productique**

Présenté par :
HAMDOUS Ouiza

Thème :

Mise en œuvre d'une commande par interconnexion basée sur la passivité

Mémoire soutenu le : 19/12/2013 devant le jury d'examen composé de:

Président : **MAIDI Ahmed** Maître de conférences Classe A UMMTO.

Rapporteur : **DJENNOUNE Saïd** Professeur, UMMTO.

Examinateur : **KARA Redouane** Maître de conférences Classe A, UMMTO.

Examinateur : **MELLAH Rabah** Maître de conférences Classe A, UMMTO.

Sommaire

Chapitre III : CBP-AIA: Principe et applications

Chapitre IV : Conception d'observateur par la méthode d'immersion et invariance

Notations

Abréviations

CBP: Commande Basée sur la Passivité

CBP-AIA: Commande Basée sur la Passivité aves Assignation d'Interconnexion et d'Amortissement

CBP-AIAS: Commande Basée sur la Passivité aves Assignation d'Interconnexion et d'Amortissement Simultanément

EDP : Equation aux Dérivées Partielles

EDO : Equation différentielle ordinaire

EL: Euler Lagrange

HCP: Hamiltonien Commandé par Port

I&I: Immersion et Invariance

KYP: Kalman Yacubovich Popov

LQR: commande linéaire quadratique

MG: Mode Glissant

PLvCC: Linéarisation Partielle via un Changement de Coordonnées

PI : proportionnel intégral

FT : Fonction de transfert

RP: Réel positif

SRP: Strictement réel positif

S_{CI} : Inertie constant

S_{ZCS} : Symboles de Christoffel nuls

S_{ZRS} : Symboles de Riemann nuls

S_T : Condition d'antisymétrie

Symboles

A^T : Transposé de la matrice A

A^{-1} : Inverse de la matrice A

$A > 0$: Matrice A positive définie

$A \geq 0$: Matrice A positive semi-définie

C: Classe de la fonction

f_{T} : Troncature de f

g : Accélération de la gravité

g: Force dérivée de l'énergie potentielle

G : Matrice de force d'entrée

H : Hamiltonien

H_d : Hamiltonien désiré

I : Matrice identité

J : Matrice d'interconnexion

J_d : Matrice d'interconnexion désirée

L : Lagrangien

L_{2e}: Espace L_2 étendu

L_f : Dérivée de Lie le long de champ de vecteur f.

M : Matrice d'inertie

M_d : Matrice d'inertie désirée

p : Moment généralisé

q : Coordonnée généralisée

$\Re$: Ensemble des nombres réels.

$\Re^+$: Ensemble des nombres réels positifs

$\mathbb{N}$: Ensemble des nombres entiers

R : Matrice de dissipation

R_d : Matrice de dissipation désirée

$\mathrm{Re}[G]$: Partie réelle de G

s : Variable de Laplace

$[T_1, T_2]$: Crochet de Lie standard des vecteurs colonnes T_1 et T_2

U : Espace d'entrée

u: Entrée de commande

u_{di} : Commande pour injecter l'amortissement

u_{es} : Commande pour façonner l'énergie

V : Energie potentielle

$\mathbf{V}$: Fonction candidate du Lyapunov

E_c : Energie cinétique

V_d : Energie potentielle désirée

w : Taux d'approvisionnement

X : Espace d'état

Y : Espace de sortie

$\langle f, g \rangle$: Produit interne de f et g

$\|.\|$: Norme euclidienne

$|\ |$: Valeur absolue

$\dot{q}$: Vitesse généralisée

$\frac{\partial}{\partial(.)}$:Dérivée partielle

∇ : Gradient

$\forall$: Pour tous

t : Temps

$\exists$: Il existe

Notations utilisées dans le chapitre II (section II.5) et dans le chapitre IV (section IV.4)

Pour toute matrice $A \in \Re^{n \times n}$:

$A_i \in \Re^n$ est la $i^{ième}$ colonne,

$A^i \in \Re^n$ est la $i^{ième}$ ligne,

A_{ij} est le $ij^{ième}$ élément.

e_i $\left(i \in \bar{n} = \{1, ..., n\}\right)$ sont les vecteurs de la base Euclidienne,

$A_i = A\, e_i$, $A^i = e_i^T A$ et $A_{ij} = e_i^T A e_j$.

Liste des figures

Liste des Tableaux

Introduction générale

Introduction Générale

La théorie des systèmes a connu des progrès importants à travers les années. La plupart des techniques d'analyse et de synthèse sont basées sur des modèles linéaires des procédés commandés. Néanmoins, la nature non linéaire des systèmes physiques et en raison des performances de plus en plus croissantes exigées dans les applications industrielles, l'usage de méthodes non linéaires devient indispensable.

De nos jours, la commande non linéaire est devenue l'un des domaines de recherche les plus actifs. Disposant de calculateurs puissants et d'une variété d'outils logiciels, la synthèse de lois de commande non linéaires et leur exécution en temps réel devient plus facile.

La première étape, très importante, dans la conception de lois de commande est la modélisation du système. Des modèles simples sont souvent adoptés. Le calcul de la loi de commande se fait ensuite d'une manière séparée, à base du modèle élaboré, sans prise en compte de certains aspects physiques du processus à commander. Ce qui conduit à l'apparition d'une certaine lacune entre la modélisation des systèmes et la synthèse des lois de commande. Parmi la grande diversité des techniques de commande disponibles dans la littérature, on s'est intéressé à celles fondées sur des principes “universels”. Une telle approche par façonnement d'énergie consiste à placer la notion d'énergie au cœur du problème. L'énergie est l'objet central dans le problème de commande. Elle joue le rôle principal dans l'étape de modélisation, la spécification des objectifs de performance et l'étape de conception.
Les avantages d'une perspective fixée autour de l'énergie sont multiples:

- les modèles mathématiques basés sur le concept d'énergie sont plus simples. Les méthodes lagrangienne et hamiltonienne sont des exemples évidents de l'utilisation du concept d'énergie dans la modélisation des systèmes,
- l'étude du comportement énergétique d'un système basée sur l'observation de certains phénomènes physiques (production, dissipation ou stockage d'énergie) donne, au delà d'une interprétation intuitive et physique de l'énergie, une base pour l'analyse des propriétés, tel que la stabilité,
- cette perspective énergétique offre aussi des avantages pratiques: les praticiens venant de domaines différents sont familiarisés avec les concepts d'énergie, ce qui peut faciliter la communication avec les théoriciens de l'automatique, incorporant ainsi des connaissances préalables et apportant des interprétations physiques au mode de régulation.

Dans l'étape de synthèse de la commande, le concept d'énergie est incorporé naturellement par le concept de passivité. La théorie de la passivité est un concept important de l'automatique pour l'analyse et pour la commande des systèmes dont certaines caractéristiques entrée-sortie sont établies en termes de critères énergétiques.

La commande basée sur la passivité (CBP) est une commande non linéaire, développée dans les travaux d'Ortega [Ortega-89]. C'est une méthode de conception qui, à partir des propriétés de passivité du système, propose un contrôleur qui transforme le système en un autre système passif ayant une fonction d'énergie différente (façonnée). Afin de stabiliser un point d'équilibre, on choisit une fonction d'énergie positive définie pour qu'elle agisse comme une fonction de Lyapunov. Dans une deuxième étape, on rajoute de l'amortissement au système pour atteindre la stabilité asymptotique. Cette procédure est connue comme façonnement de l'énergie (*energy shaping*) et injection d'amortissement (*damping injection*). La CBP intègre l'étape de la modélisation dans la synthèse de la loi de commande.

Il est bien connu, que pour stabiliser certains systèmes mécaniques sous-actionnés, ainsi que la plupart des systèmes électriques et électromécaniques, il est nécessaire de modifier la fonction d'énergie totale. Malheureusement, le façonnement de l'énergie totale avec la procédure classique de la CBP n'est pas possible. En effet, cette méthode, dans laquelle on sélectionne la fonction de stockage puis on conçoit la commande qui rend la fonction de stockage décroissante le long des trajectoires du système (cette approche est clairement une réminiscence des méthodes standards de Lyapunov), détruit la structure physique du système, la boucle fermée n'est plus un système lagrangien. De plus, la fonction de stockage n'est pas une fonction d'énergie. Pour résoudre ce problème, une nouvelle méthodologie d'élaboration de la commande basée sur la passivité appelée Assignation d'Interconnexion et d'Amortissement(AIA) a été développée [Ortega-99a], [Van der Schaft-00]. Cette méthode a été conçue pour les systèmes qui peuvent êtres décrits par un modèle hamiltonien commandé par port. L'avantage d'utiliser ces modèles réside dans le fait que cette structure fournit des renseignements énergétiques essentiels à la synthèse du système bouclé. Ainsi, la matrice d'interconnexion donne une indication sur l'échange d'énergie entre les variables, tandis que la propriété positive semi-définie de la matrice d'amortissement indique que les termes appartenant à cette matrice sont des termes associés à la dissipation.

La structure HCP a été présentée par Van der Schaft et Maschke aux débuts des années 90 [Maschke-92] et [Van der Schaft-95]. Le système HCP est passif et donc stable en soi. Ce n'est généralement pas suffisant d'un point de vue de l'automatique, car le système pourrait être stable autour d'un équilibre non désiré. Il y a également des considérations de performance à prendre en compte. L'ensemble des équilibres stables d'un système mécanique est habituellement définit comme l'ensemble des minimums de l'énergie potentielle du système. L'idée derrière le façonnement de l'énergie est de trouver un retour d'état, qui ajoute ou enlève artificiellement de l'énergie potentielle au système redéfinissant ainsi l'ensemble des équilibres stables.

La différence principale entre la CBP classique et la CBP-AIA est que dans cette dernière la fonction d'énergie de la boucle fermée est obtenue (et non proposée). L'idée est de stabiliser un point d'équilibre désiré du système en cherchant un système qui, en boucle fermée, possède une structure HCP. Ce dernier est conçu en changeant la nature de l'interconnexion interne ainsi que la fonction hamiltonienne du système. Les conditions pour que ces changements mènent à un système qui peut probablement être obtenu comme système en boucle fermée du système original, en choisissant une loi appropriée de rétroaction, constituent un nouvel ensemble de conditions assorties. (*matching conditions*). En fait, il faut résoudre un ensemble d'équations aux dérivées partielles (EDPs) non linéaires afin d'obtenir la structure d'interconnexion et l'hamiltonien de la boucle fermée. Le concept d'énergie utilisé afin de stabiliser le système est la passivité, et puisque la boucle fermée est construite en façonnant l'interconnexion interne du système, le terme de commande basée sur la passivité par interconnexion et assignation d'amortissement fut adopté pour décrire cette méthode.

La résolution d'une équation aux dérivées partielles est en général difficile. Cependant une judicieuse sélection des structures d'interconnexion et d'amortissement désirées (en considérant des caractéristiques physiques du système) peut aider à obtenir la solution de l'EDP correspondante.

La méthode CBP-AIA a été appliquée avec succès aux systèmes mécaniques. Tous les résultats sur la simplification des équations correspondantes sont limités aux systèmes mécaniques simples.

Le problème de la reconstruction des vitesses des systèmes mécaniques, d'un grand intérêt pratique, a été intensivement étudié dans la littérature. Depuis la publication du premier résultat fondateur [Nicosia-90] en 1990, de nombreuses solutions ont été proposées.

Récemment, l'approche d'immersion et invariance (I&I) a été adoptée pour formuler le problème de construction d'observateurs [Astolfi-07], [Karagiannis-07]. L'objectif de cette approche est la création d'une variété invariante et attractive, définie dans l'espace d'état étendu constitué des états du système et de ceux de l'observateur. Cette variété est définie par une fonction inversible telle que la partie non mesurable de l'état est reconstruite par inversion de cette fonction.

Dans ce mémoire, le formalisme HCP des systèmes mécaniques occupera un rôle central dans la conception de la commande et d'observateur. On adoptera l'approche CBP-AIA pour réaliser la stabilisation de systèmes mécaniques sous-actionnés. L'objectif est de concevoir une loi de commande tel que le système en boucle fermée soit HCP. Puis, on construit un observateur par la méthode d'immersion et d'invariance, afin d'estimer les vitesses généralisées des systèmes mécaniques sous actionnés partiellement linéarisables via un changement de coordonnées. La classe de systèmes mécaniques correspondante sera désignée à l'aide de l'abréviation PLvCC.

Notre étude repose principalement sur les notions de passivité, d'immersion (d'un système) et d'invariance (d'une variété). Afin de mieux présenter notre travail, on a réparti le mémoire en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, on donnera les notions de bases de la théorie de la passivité.

Au deuxième chapitre, on présentera le cadre de modélisation choisi dans notre travail, on rappellera les équations d'Euler-Lagrange, on expliquera le concept de sous actionnement et la technique de linéairisation partielle par feedback de Spong [Spong-98], on présentera les équations hamiltoniennes du mouvement, on parlera de formalisme hamiltonien commandé par port et on donnera les conditions nécessaires et suffisantes pour linéariser ce type de systèmes par un changement de coordonnées partiel.

Dans le troisième chapitre, on étudie la CBC-AIA. Une étude détaillée de l'une de ces variantes qui est la CBP-AIA paramétrique sera présentée. Les performances et l'efficacité de cette commande seront illustrées par simulation en utilisant Matlab sur plusieurs systèmes mécaniques sous actionnés.

Au quatrième chapitre on présentera l'approche d'I&I pour le problème de la construction d'observateur. On se concentrera sur les systèmes PLvCC et on fournira une procédure constructive pour obtenir un observateur d'ordre réduit afin d'estimer les vitesses généralisées. On vérifiera que l'interconnexion d'une CBP-AIA avec l'observateur I&I proposé conserve la stabilité asymptotique du point d'équilibre en boucle fermée.

Ce mémoire s'achève par une conclusion générale.

Chapitre I

Passivité: principe et théorèmes

I.1 Introduction

La passivité trouve son origine dans le domaine des circuits électriques. Elle consiste à vérifier si l'énergie fournie à travers l'entrée sera dissipée ou générée par le système vu de sa sortie. Pour cela, le choix de la sortie joue un rôle important dans l'analyse de la passivité d'un système donné. Un modèle peut être passif ou non selon le choix du couple entrée-sortie.

Le principe de la dissipativité est d'élargir, au sens théorique, le sens du stockage d'énergie. La propriété de dissipation à été introduite par [Willems-72], elle est une généralisation de la passivité via une inégalité basée sur une description d'état et en introduisant la notion de fonction de stockage et le taux d'approvisionnement (débit énergétique).

La motivation pour étudier les théories de passivité et dissipativité réside dans la relation de ces dernières avec le concept de stabilité [Hill-88], [Byrnes-91] et la facilité de concevoir des lois de commande en s'appuyant sur la notion d'interconnexion de systèmes.

Dans ce chapitre, les notions de passivité et dissipativité ainsi que les théorèmes qui sont liés à la stabilité et l'interconnexion des systèmes passifs seront présentées.

I.2 Exemples introductifs

Avant, d'introduire les notions de passivité et de dissipativité, il est commode de motiver ces concepts avec quelques exemples tirés de la théorie des circuits. On commence par rappeler que la puissance exprime le transfert d'énergie par unité de temps

$$\mathrm{p}(t) = \frac{dE}{dt} \tag{1.1}$$

L'énergie est définie comme suit

$$E(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{p}(t)dt \tag{1.2}$$

Considérons le circuit de la figure 1.1. v et i sont la tension et le courant respectivement. L'affectation de la polarité est arbitraire.

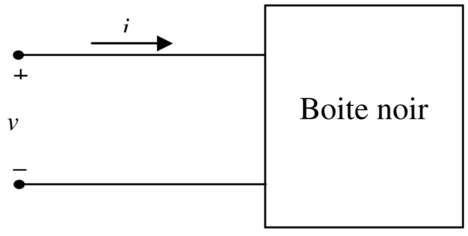


Figure 1.1: Réseau passif 1

On a

$$\mathrm{p}(t) = v(t)\ i(t) \tag{1.3}$$

L'énergie absorbée par le circuit à l'instant t est :

$$E(t) = \int_{-\infty}^{t} v(\tau)i(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{0} v(\tau)i(\tau)d\tau + \int_{0}^{t} v(\tau)i(\tau)d\tau \tag{1.4}$$

Le premier terme du côté droit de l'équation (1.4), représente l'effet des conditions initiales différentes de zéro dans les éléments de circuit. Avec la convention de signe indiquée, on a

- Si $E(t) > 0$, la boîte absorbe de l'énergie (ce qui est le cas, par exemple, pour une résistance).
- Si $E(t) < 0$, la boîte fournit de l'énergie (ce qui est le cas, par exemple, pour une batterie, avec une tension négative par rapport à la polarité indiquée à la figure 1.1).

Dans la théorie des circuits, les éléments qui ne génèrent pas leur propre énergie, sont dits passif. Un élément de circuit est passif si :

$$\int_{-\infty}^{t} v(\tau)i(\tau)d\tau \geq 0 \tag{1.5}$$

Les résistances, les condensateurs et les inductances satisfont la condition (1.5) et sont donc des éléments passifs.

Considérons le circuit illustré à la figure 1.2. On suppose que la boîte noire contient un élément passif.

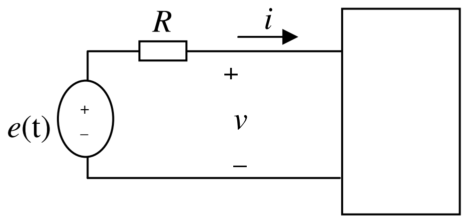


Figure1.2 : Réseau passif 2

On a :

$$e(t) = \mathrm{R}\ i(t) + v(t) \tag{1.6}$$

Sachant que la force électromotrice de la source e est telle que :

$$\int_{0}^{T} e^2(\tau)d\tau \geq 0 \tag{1.7}$$

On a

$$\int_{0}^{T} e^2(\tau)d\tau = \mathrm{R}^2\int_{0}^{T} i^2(\tau)d\tau + 2\mathrm{R}\int_{0}^{T} i(\tau)v(\tau)d\tau + \int_{0}^{T} v^2(\tau)d\tau \tag{1.8}$$

Puisque la boîte noire est passive, c.à.d. $\int_0^T i(\tau)v(\tau)d\tau > 0,$ il s'ensuit que

$$\int_0^T e^2(\tau)d\tau \geq \mathrm{R}^2\int_0^T i^2(\tau)d\tau + \int_0^T v^2(\tau)d\tau \tag{1.9}$$

La tension appliquée est telle que $\int_0^\infty e^2(\tau)d\tau < \infty$. On peut prendre la limite $T \to \infty$ des deux côtés de l'inégalité (1.9), donc on a :

$$\mathrm{R}^2\int_0^\infty i^2(\tau)d\tau + \int_0^\infty v^2(\tau)d\tau \leq \int_0^\infty e^2(\tau)d\tau < \infty \tag{1.10}$$

Le courant i et la tension v ont une énergie finie. Ceci, implique que l'énergie dans ces deux grandeurs peut être commandée à partir de la source d'entrée e.

Considérons le réseau électrique de la figure 1.3.

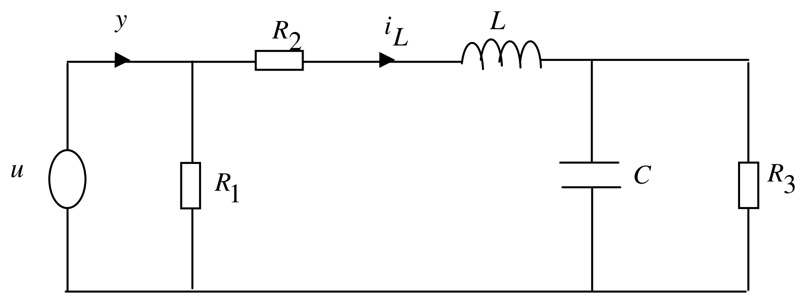


Figure 1.3: circuit RLC

La puissance délivrée à ce circuit à un instant t est $u(t)i(t)$ où $u(t)$ est la tension de la source et $i(t)$ est son courant. Le modèle d'état de ce circuit, avec $x_1 = i_L$, $x_2 = v_c$ et la sortie $y = i(t)$, s'écrit :

$$\begin{cases} L\dot{x}_1 = -R_2x_1 - x_2 + u \\ C\dot{x}_2 = x_1 - \dfrac{1}{R_3}x_2 \end{cases} \tag{1.11}$$

$$y = x_1 + \frac{1}{R_1}u \tag{1.12}$$

À l'instant t, l'énergie emmagasinée dans le circuit est :

$$V(x) = \frac{1}{2}Lx_1^2 + \frac{1}{2}Cx_2^2 \tag{1.13}$$

Le circuit RLC ne génère pas d'énergie, il est donc passif. Soit $V(x_0)$ l'énergie emmagasinée dans ce circuit à l'instant t_0. Ce circuit dissipe au maximum autant d'énergie que celle qui lui est fournie, c.à.d.:

$$V\left(x(0)\right)+\int_0^t u(\tau)y(\tau)d\tau \geq V\left(x(t)\right) \tag{1.14}$$

L'inégalité (1.14) doit être vérifiée pour tout t. Donc la puissance instantanée vérifie, pour tout t, l'inégalité :

$$u(t)\,y(t) \geq \dot{V}\left(x(t)\right) \tag{1.15}$$

I.3 Théorie de la dissipativité et de la passivité

Avant d'introduire la notion de passivité, on doit définir la dissipativité. Bien que le concept de la passivité est apparu dans la littérature en premier, la dissipativité, nous donne une manière plus explicite pour comprendre ce qui est la passivité et quand un système peut être définie comme passif.

Afin de définir mathématiquement la notion de la dissipativité, on introduit deux fonctions :

- *La vitesse d'injection (taux d'approvisionnement) :* c'est le débit d'arrivée d'énergie vers le système.
- *La fonction de stockage :* elle mesure la quantité d'énergie contenue dans le système.

Ces fonctions sont reliées par l'inégalité de dissipation, qui exprime que pour un système dissipatif, la vitesse d'injection est supérieure ou égale à la variation de la fonction de stockage au cours du temps.

Pour aborder la passivité, il faudra introduire les notions d'entrée $u\in\mathfrak{R}^{m}$ et de sortie $y\in\mathfrak{R}^{m}$ du système car on verra ci après qu'un système est dit passif s'il est dissipatif pour la vitesse d'injection $w(u,y)=u^T y$.

Considérant le système non linéaire suivant:

$$\Sigma:\begin{cases}\dot{x}=f(x,u)\\ y=h(x,u)\end{cases} ,x(t_0)=x_0 \tag{1.16}$$

où $x\in X\subset\mathfrak{R}^n$, $u\in U\subset\mathfrak{R}^m$ et $y\in Y\subset\mathfrak{R}^r$ sont les variables d'état, les entrées et les sorties. X,U et Y sont respectivement les espaces d'état, d'entrée et de sortie. La représentation $x(t)=\Phi(t,t_0,x_0,u)$ dénote l'état atteint à l'instant t partant de l'état x_0 à l'instant t_0 pour une entrée u, c.à.d. une solution à (1.16). On suppose que $f(x,u)$ et $h(x,u)$ sont des champs de vecteurs lisses, et que Σ a un point d'équilibre en $u=0$, $x=0$ et $y=0$. Ainsi $f(0,0)=0$ et $h(0,0)=0$.

Associons au système Σ, une fonction réelle $w(u, y)$ appelée taux d'approvisionnement et qui est formellement définie comme suit:

Définition 1.1 [Willems-72] *Le taux d'approvisionnement* $w(t) = w\big(u(t), y(t)\big)$ *est une fonction à valeur réelle, définie de* $U \times Y$ *, tel que pour tous* $u(t) \in U, x_0 \in X$ et $y(t) = h\big(\Phi(t, t_0, x_0, u)\big)$ $w(t)$ *satisfait :*

$$\int_{t_0}^{t_1} |w(t)| dt < \infty \tag{1.17}$$

pour tous $t_1 \geq t_0 \geq 0$.

Le taux d'approvisionnement peut être n'importe quelle fonction définie sur l'espace d'entrée et de sortie qui satisfait (1.17). Par exemple, dans un circuit électrique $\int_{t_0}^{t_1} w\big(u(t), y(t)\big) dt$ peut être associé à l'énergie fournie au circuit dans l'intervalle $[t_0, t_1]$, c.à.d. $\int_{t_0}^{t_1} v(t) i(t) dt$ où $v(t)$ est la tension et $i(t)$ est le courant dans le circuit.

Un système dissipatif est défini comme suit:

Définition 1.2 [Willems-72.a] *Le système* Σ *avec le taux d'approvisionnement* $w(t)$ *est dit être dissipatif s'il existe une fonction réelle non négative* $V\big(x(t)\big) : X \rightarrow \Re^+$ *appelée fonction de stockage tel que pour tous* $t_1 \geq t_0 \geq 0,\ x_0 \in X$ *et* $u(t) \in U$, *l'inégalité de dissipation suivante est vérifiée*

$$V\big(x(t_1)\big) - V\big(x(t_0)\big) \leq \int_{t_0}^{t_1} w\big(u(t), y(t)\big) dt \tag{1.18}$$

où $x(t_1) = \Phi\big(t_1, t_0, x_0, u\big)$.

L'interprétation énergétique de la définition 1.2 est la suivante. Si on considère que V correspond à l'énergie du système, que $\int_{t_0}^{t_1} w\big(u(t), y(t)\big) dt$ correspond à l'énergie injectée dans le système par la commande $u(t)$ sur $[t_0, t_1]$, alors l'équation (1.18) caractérise le fait que pour un système dissipatif, l'énergie au temps t_1 est inférieure à l'énergie initiale plus l'énergie fournie par la commande.

Un système passif est défini comme suit:

Définition1.3 [Bao-07] *Un système est dit passif s'il est dissipatif par rapport au taux d'approvisionnement suivant:*

$$w\left(u(t), y(t)\right) = u^T(t)\, y(t) \tag{1.19}$$

et la fonction de stockage $V(x)$ *satisfait* $V(0) = 0$.

Autrement dit, un système dissipatif est dit passif s'il est carré et le taux d'approvisionnement est le terme bilinéaire $w = u^T y$.

Deux cas extrêmes de systèmes passifs sont les systèmes sans perte et les systèmes strictement passifs en état dont les définitions sont :

Définition1.4 [Bao-07] *Le système passif* Σ *avec la fonction de stockage* $V(x)$ *est dit sans perte si pour tous* $t_1 \geq t_0 \geq 0, x_0 \in X$ *et* $u(t) \in U$ *on a*

$$V(x(t_1)) - V(x(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} u^T(t)\, y(t) dt \tag{1.20}$$

Définition1.5 [Bao-07] *Le système passif* Σ *avec la fonction de stockage* $V(x)$ *est dit strictement passif en état s'il existe une fonction définie positive* $\psi : X \to \Re^+$ *tel que pour tous* $t_1 \geq t_0 \geq 0, x(t_0) \in X$ *et* $u \in U$

$$V\left(x(t_1)\right) - V\left(x(t_0)\right) = \int_{t_0}^{t_1} y^T(t) u(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \psi\left(x(t)\right) dt \tag{1.21}$$

Autrement dit, le système Σ est strictement passif en état s'il existe une constante $\lambda > 0$ tel que Σ est dissipatif par rapport au taux d'approvisionnement

$$w(u, y) = u^T y - \lambda \psi(x) \tag{1.22}$$

I.4 Propriétés des systèmes passifs

Pour analyser et caractériser les systèmes passifs, les propriétés de I.4.1 et de I.4.2 sont utilisées.

I.4.1 Propriété de Kalman-Yacubovich-Popov

Une des propriétés les plus importantes des systèmes passifs est liée à la définition suivante:

Définition 1.6 [Bao-07] *Considérons le système affine en entrée suivant*

$$\Sigma' : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x) u \\ y = h(x) \end{cases} \tag{1.23}$$

où $x \in X \subset \Re^n, u \in U \subset \Re^m$ et $y \in Y \subset \Re^m$. *Le système* Σ' *a la propriété de Kalman-Yacubovich-Popov (KYP) s'il existe une fonction non négative* $V(x) : X \to \Re^+$, *de classe* C^1 *avec* $V(0) = 0$ *tel que*

$$L_f V(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq 0 \qquad (1.24)$$

$$L_g V(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) = h^T(x) \qquad (1.25)$$

pour tous $x \in X$.

Les notions de passivité et de dissipativité sont applicables aussi bien aux systèmes linéaires que non linéaires. Cependant, dans le cas des systèmes linéaires représentés par des fonctions de transferts à coefficients réels, la passivité et la positivité de la partie réelle de la fonction de transfert sont équivalentes [Slotine-91]. Ceci dit, il sera donc possible de tester la positivité de la fonction de transfert pour vérifier sa passivité, ce qu'on verra dans la prochaine section.

I.4.2 Propriété entrée-sortie

Dans ce qui suit, on introduira la positivité d'une fonction de transfert (FT) et on donnera les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle soit réelle positive (RP).

Considérons un système linéaire représenté par une FT rationnelle et à coefficients réels

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots a_1 s + a_0} \qquad (1.26)$$

Définition1.7 [Slotine-91] *Une fonction de transfert* $G(s)$ *est réelle positive si*

$$\mathrm{Re}\left[G(s)\right] \geq 0, \quad \forall\, \mathrm{Re}\left[s\right] \geq 0 \qquad (1.27)$$

où $\mathrm{Re}[.]$ *est la partie réelle de* $[.]$. *Elle est strictement réelle positive(SRP) si* $\exists \varepsilon > 0 / G(s-\varepsilon)$ *est réelle positive.*

Par exemple, $1/s$ est RP et $1/(s+a)$ est SRP pour tout $a > 0$.

Le théorème suivant donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une FT soit RP.

Théorème 1.1 [Slotine-91] *Une fonction de transfert* $G(s)$ *est RP si est seulement si*

- $G(s)$ *est analytique pour* $\mathrm{Re}\left[s\right] > 0$,
- *Les pôles sur l'axe imaginaire (y inclus les pôles à* $s = 0, \infty$ *) sont simples et leurs résidus sont réels et non négatifs ,*
- $\forall w \geq 0,\ \mathrm{Re}\left[G(jw)\right] \geq 0,$ *exceptés aux pôles.*

Ce théorème offre des conditions nécessaires simples pour vérifier si une FT est RP :

1. $G(s)$ n'a ni pôles ni zéros dans le demi-plan droit,
2. $G(s)$ a un degré relatif 1,
3. Les zéros à l'infini sont simples.

Le théorème suivant résume les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système linéaire soit passif.

Théorème 1.2 [Slotine-91] *Un système linéaire, représenté par une fonction de transfert rationnelle analytique, est (strictement) passif si et seulement si sa fonction de transfert est (strictement) réelle positive.*

Des relations (1.18) et (1.19), on obtient des résultats fondamentaux sur la stabilité du système. Si l'on fixe $u^T = 0$, on observe une décroissance de $V(x)$ à partir de n'importe quelle trajectoire de (1.16), ce qui montre que les systèmes passifs avec une fonction de stockage définie positive sont stables au sens de Lyapunov. La même propriété est observée si l'on annule la sortie $(y = 0)$, ce qui implique une dynamique des zéros stable.
Dans ce qui suit, on établira la relation entre les concepts de passivité et de stabilité.

I.5 Stabilité des systèmes passifs

Dans cette section on établira la relation entre la passivité et la stabilité interne (au sens de Lyapunov) et la stabilité externe (entrée –sortie).

I.5.1 Stabilité interne (Stabilité au sens de Lyapunov)

Le concept de la passivité implique la stabilité si une fonction de stockage positive définie est utilisée. Puisque la fonction de stockage est positive semi définie dans la définition 2.2, alors la stabilité n'est pas toujours assurée par la passivité. Par conséquent, en présence d'une partie instable non observable dans un système, l'équilibre $x = 0$ peut être instable. Par exemple, le système instable $\dot{x}_1 = x_1; \dot{x}_2 = u; y = x_2$ est passif avec la fonction de stockage $V(x) = (1/2)\, x_2^2$, mais la passivité avec cette fonction de stockage n'implique pas la stabilité de x_1. Pour que la passivité implique la stabilité de Lyapunov, il faut exclure de telles situations. Dans les systèmes linéaires ceci est réalisé avec une hypothèse de détectabilité, qui exige que la partie non observable du système est asymptotiquement stable. On définit maintenant un concept analogue pour les systèmes non linéaires.

Définition 1.8 [Bao-07] *Le système Σ (1.16) est à état zéro observable si pour n'importe quel $x \in X$*

$$y(t) = h\big(\phi(t, t_0, x, 0)\big) = 0,\ \forall t \geq t_0 \geq 0 \Rightarrow x = 0 \tag{1.28}$$

et le système est localement à état zéro observable s'il existe un voisinage X_n de 0 tel que pour tous $x \in X_n$, (1.28) est vérifié, où $\phi(.)$ représente la solution pour $x(t)$.
Le système est à état zéro détectable si pour n'importe quel $x \in X$

$$y(t) = h\big(\phi(t, t_0, x, 0)\big) = 0,\ \forall t \geq t_0 \geq 0 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \phi(t, t_0, x, 0) = 0 \tag{1.29}$$

et le système est localement à état zéro détectable s'il existe un voisinage X_n de 0 tel que pour *tous* $x \in X_n$*, (1.29) est vérifiée.*

Avec la définition de l'état zéro détectable, la relation entre la passivité et la stabilité au sens de Lyapunov peut être établie comme suit:

Théorème 1.3 [Bao-07] *Soit le système passif* Σ *(1.16) avec la fonction de stockage* $V(x)$ *de classe* C^1*. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *Si* $V(x)$ *est positive définie, alors l'équilibre* $x = 0$ *de* Σ *avec* $u = 0$ *est Lyapunov stable.*
2. *Si le système* Σ *est à état zéro détectable, alors l'équilibre* $x = 0$ *de* Σ *avec* $u = 0$ *est Lyapunov stable.*
3. *Si en plus de la condition 1 ou de la condition 2,* $V(x)$ *est radialement non bornée (c.à.d.* $V(x) \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$ *), alors l'équilibre* $x = 0$ *dans les conditions ci-dessus est globalement stable.*

I.5.2 Stabilité entrée-sortie (Stabilité L_2)

La philosophie de la stabilité entrée-sortie consiste à regarder, un système comme une boîte noire munie d'entrées et de sorties, sans se préoccuper de savoir ce qui se passe à l'intérieur. Comme l'approche est essentiellement de type transfert, les systèmes considérés seront décrits par l'équation $y = \Sigma\ u$ où $u(t)$ et $y(t)$ représentent respectivement l'entrée et la sortie du système Σ. Ces signaux sont décrits comme appartenant aux espaces L_p qui sont définis par la norme du même nom notée $\|.\|_{L_p}$ dont l'expression est donnée par :

$$\|u\|_{L_p} = \left(\int_0^\infty \|u(t)\|^p \, dt \right)^{1/p} < \infty \tag{1.30}$$

L'espace des fonctions de carré intégrable, aussi appelé d'énergie finie, fait partie des espaces L_p où $p = 2$. Comme les signaux d'amplitude constante sont très importants en commande, notamment pour des consignes et qu'ils ne sont pas d'énergie finie, on a recours aux espaces L_2 étendus notés L_{2e} qui sont tels que si la troncature temporelle et causale d'un signal $u(t)$ appartient à L_2, alors le signal $u(t)$ appartient lui-même à L_{2e}. Formellement, on écrit

$$L_{2e} = \{ u / u_T \in L_2, \forall T \geq 0 \} \tag{1.31}$$

Définition 1.9 *Soit* $f : \Re^+ \to \Re$ *. Alors pour tous* $T \geq 0$ *la fonction* $f_T(t)$ *est définie par*

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t < T \\ 0, & t \geq T \end{cases} \tag{1.32}$$

et elle est appelée la troncature de f *dans l'intervalle* $[0, T]$.

Un système est dit stable au sens entrée-sortie si à une entrée bornée correspond une sortie bornée. Une manière de formaliser ceci consiste à définir une forme de stabilité entrée-sortie en rapport avec le gain fini du système.

Définition1.10 (Stabilité au sens L_2)[Desoer-75] Σ *est* L_2 *stable si* $\forall x_0 \in \Re^n$, $\exists \beta = \beta(x_0) < \infty$ *et* $\exists \gamma > 0$ *tel que*

$$\|y_T\|_2 \leq \gamma \|u_T\|_2 + \beta, \qquad \forall T \geq 0 \tag{1.33}$$

Le rôle du terme β est de prendre en compte la valeur initiale x_0. La valeur la plus petite de γ pour laquelle l'inégalité (1.33) est vérifiée est appelée gain du système.
En utilisant la définition ci-dessus, on peut définir la passivité comme une propriété d'entrée-sortie.

Définition 1.11 (Passivité) [Desoer-75] *Soit* $\Sigma : u \in L_{2e}^{m} \mapsto y \in L_{2e}^{r}$. *Le système* Σ *est passif s'il existe une constante* $\beta \in \Re$ *tel que*

$$\langle u(t), y(t) \rangle_T = \int_0^T \left(u^T(t) y(t) \right) dt \geq \beta, \qquad \forall u \in L_{2e}^{m}, \forall T \geq 0 \tag{1.34}$$

L'introduction de la constante β est due au fait que $x(0) = 0$ n'est pas assuré dans (1.34). Un cas possible est $\beta = V(x(0))$, où $V(x)$ est la fonction de stockage.

Des sections précédentes, il est clair que la motivation pour étudier la théorie de passivité réside dans la relation de cette dernière avec le concept de stabilité.
Il est facile de concevoir des lois de commandes stabilisantes en s'appuyant sur la notion d'interconnexion des systèmes. Dans la prochaine section on abordera le concept d'interconnexion des systèmes passifs.

I.6 Interconnexion des systèmes passifs

Un système passif est très facile à commander par un retour de sortie. Par exemple, un système linéaire passif ($G(s) = 1/s$) peut être stabilisé uniquement par un correcteur proportionnel avec un gain positif. De même, on a la condition de stabilité suivante pour les systèmes non-linéaires.

Théorème1.4 *Stabilisation par rétroaction statique* [Bao-07] *Pour un système non linéaire passif* Σ' *donné par* (1.23), *une loi de commande par retour de sortie* $u = -ky$ *stabilise asymptotiquement l'équilibre* $x = 0$ *pour tous* $k > 0$ *à condition que* Σ' *est à état zéro détectable.*

La condition de stabilité par retour de sortie n'est pas limitée à la rétroaction statique comme il est mentionné dans le théorème ci-dessous :

Théorème 1.5 *Interconnexion des systèmes passifs* [Bao-07]
Supposons que les systèmes H_1 *et* H_2 *sont passifs (figure1.4), alors les deux systèmes, dont l'un est obtenu par l'interconnexion parallèle et l'autre obtenu par l'interconnexion feedback, sont tous les deux passifs. Si les systèmes* H_1 *et* H_2 *sont à état zéro détectable et leurs fonctions de stockage* $V_1(x_1)$ *et* $V_2(x_2)$ *respectivement sont de classe* C^1, *alors l'équilibre* $(x_1, x_2) = (0,0)$ *des deux interconnexions est stable.*

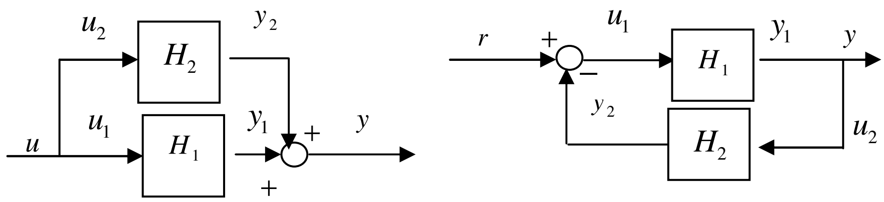


Figure 1.4.a: Anticipation

Figure 1.4.b: Feedback

Figure 1.4: Interconnexion des systèmes passifs

I.7 Conclusion

La passivité a longtemps été un outil important et efficace dans l'analyse des systèmes non linéaires et la conception de la commande.

Dans ce chapitre, les concepts de base des systèmes passifs ont été introduits. Les définitions et les théorèmes relatifs à ces systèmes ont été définis. Les propriétés de ces derniers sont discutées, tout en mettant l'action sur une propriété clé, à savoir, l'interconnexion de deux systèmes passifs est encore passive.
Le lien entre la passivité et la stabilité est mis en évidence. Les systèmes passifs sont Lyapunov stable. Par ailleurs, l'interconnexion en parallèle et en feedback des systèmes passifs sont à nouveau passif et donc Lyapunov stable. La stabilité n'est pas toujours assurée par la passivité. Pour cela, des conditions additionnelles (détectabilité, observabilité) sont exigées.

Dans les prochains chapitres, une méthodologie de conception de commande basée sur le concept de la passivité nommée commande basée sur la passivité (CBP) sera exposée.

Chapitre II

Modélisation des systèmes mécaniques et leurs simplifications

II.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la modélisation des systèmes mécaniques. La première partie est consacrée à la présentation des systèmes Lagrangiens. On explique, le concept de sous actionnement, puis, la technique de linéairisation partielle par feedback de Spong [Spong-98] qui simplifie les dynamiques, facilite la manipulation des équations et la synthèse des lois de commande. La deuxième partie est consacrée à la présentation des systèmes hamiltoniens. On parlera, ensuite de formalisme hamiltonien commandé par port. Les conditions nécessaires et suffisantes pour linéariser ce type de systèmes par un changement de coordonnées partiel seront présentées. Une caractérisation et une classification complètes des systèmes mécaniques qui satisfont ces conditions seront exposées.

II.2 Méthodes lagrangienne et hamiltonienne pour la modélisation des systèmes physiques

II.2.1 Méthode lagrangienne

La méthode lagrangienne, issue du calcul variationel, a comme idée principale la définition des fonctions d'énergie en termes de coordonnées et vitesses généralisées, ce qui mène à la définition d'une fonction appelée lagrangienne. La dynamique d'un système mécanique lagrangien est définie par l'ensemble d'équations différentielles appelé équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q})\right)-\frac{\partial L}{\partial q}(q,\dot{q})=G(q)u \tag{2.1}$$

où $q\in\Re^n$ représente le vecteur des coordonnées généralisées pour un système avec n degré de liberté et $\dot{q}$ le vecteur des vitesses généralisées correspondant. $u\in\Re^{\mathrm{m}}$ est le vecteur des forces externes et $G\in\Re^{n\times\mathrm{m}}$ est la matrice correspondante qui répartit les forces sur le système (elle lie les entées externes aux coordonnées généralisées).

La fonction lagrangienne $L(q,\dot{q})$ est définie, pour les systèmes mécaniques simples, comme étant la différence entre l'énergie cinétique $E_c(q,\dot{q})$ et l'énergie potentielle $V(q)$.

$$L(q,\dot{q})=E_c(q,\dot{q})-V(q) \tag{2.2}$$

Pour les systèmes mécaniques, l'énergie cinétique est donnée par

$$E_c(q,\dot{q})=\frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} \tag{2.3}$$

avec $M(q)=M^T(q)>0\in\Re^{n\times n}$ est la matrice d'inertie généralisée.

L'énergie potentielle est inférieurement bornée, c.à.d, il existe un $\mathrm{c}\in\Re$ tel que $V(q)\geq \mathrm{c}$

pour tout $q \in \Re^n$.

Les équations du mouvement dérivent de l'équation (2.1) et sont données par :

$$\sum_j \left(M_{kj}(q)\ddot{q}_j \right) + \sum_{i,j} \left(C_{ijk}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j \right) + \mathrm{g}_k(q) = e_k^T G(q)u \quad , \quad k = 1,\ldots,n \qquad (2.4)$$

où e_k est la base standard de $\Re^n$, $\mathrm{g}_k(q) = \nabla_{q_k} V(q)$, M_{kj} sont les éléments de la matrice d'inertie et C_{ijk} sont les symboles de Christoffel de première espèce définis par

$$C_{ijk}(q) = \frac{1}{2}\left\{ \nabla_{q_j} M_{ik} + \nabla_{q_i} M_{jk} - \nabla_{q_k} M_{ij} \right\} \qquad (2.5)$$

L'écriture de la formule (2.4) sous une forme vectorielle donne :

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + \mathrm{g}(q) = G(q)u \qquad (2.6)$$

où $M(q)$ est la matrice d'inertie et $C(q,\dot{q})$ est une matrice composée des éléments :

$$C_{ij}(q,\dot{q}) = \sum_{k=1}^{n} \left(C_{ijk}(q)\dot{q}_k \right) \qquad (2.7)$$

$C(q,\dot{q})\dot{q}$ contient deux types d'éléments: ceux qui font intervenir les produits $\dot{q}_i\dot{q}_j$ pour $i = j$, ils sont appelés forces centrifuges et ceux qui correspondent aux indices $i \neq j$, ils sont les forces de Coriolis. Le vecteur $\mathrm{g}(q)$ représente les forces de gravité.

La relation entre la matrice d'inertie M et la matrice des forces de Coriolis et de centrifuges C est donnée par les deux propriétés ci-dessous

$$\dot{M}(q) = C(q,\dot{q}) + C^T(q,\dot{q}) \qquad (2.8)$$

$$\nabla_q \left\{ \frac{1}{2}\dot{q}^T M \dot{q} \right\} = (\dot{M} - C)\dot{q} \qquad (2.9)$$

Considérons le système (2.6). Ce système mécanique est dit complètement actionné si le nombre des entrées de commande est égal au nombre de degrés de liberté: $rang(G) = \mathrm{m} = n$ ou, autrement dit, $G(q)$ est une matrice carrée inversible. Par conséquent, les systèmes mécaniques complètement actionnés sont linéarisables par retour d'état statique (c.à.d, ils n'admettent pas une dynamique des zéros [Isidori-95]). Ceci peut être montré en appliquant la commande suivante :

$$u = G^{-1}(q)\left[M(q)v + C(q,\dot{q})\dot{q} + \mathrm{g}(q) \right] \qquad (2.10)$$

On obtient un double intégrateur $\ddot{q} = v$ et on peut appliquer les concepts de l'automatique linéaire classique, ce qui signifie que la commande des systèmes mécaniques complètement actionnés et sans perturbation ne pose pas de défis en termes de commande.

Un système mécanique est dit sous actionné s'il admet moins d'actionneurs que de degrés de liberté, soit $rang(G) = m < n$. Cette restriction empêche une linéarisation par bouclage statique de la dynamique complète du système. Néanmoins, une propriété intéressante valable pour tous ces systèmes est celle de la possibilité d'une linéarisation partielle par feedback. Cette propriété est due à Spong [Spong-98] et représente une conséquence de la positivité de la matrice d'inertie.

En tenant compte de (2.6), la forme générale des équations dynamiques des systèmes sous-actionnés peut être donnée par :

$$m_{11}(q)\ddot{q}_1 + m_{12}(q)\ddot{q}_2 + C_1(q,\dot{q}) + g_1(q) = 0 \qquad (2.11)$$

$$m_{21}(q)\ddot{q}_1 + m_{22}(q)\ddot{q}_2 + C_2(q,\dot{q}) + g_2(q) = G(q)u \qquad (2.12)$$

où $u \in \Re^m$ est la commande et $G(q) \in \Re^{n\times m}$ une matrice non carrée des forces extérieures avec $m < n$. Supposons que $G(q) = [0, I_m]^T$, alors le vecteur de configuration peut être partitionné en $q = (q_1, q_2) \in \Re^{n-m} \times \Re^m$ où q_1 représente le vecteur de configuration non actionné et q_2 représente le vecteur de configuration actionné.

À cause du manque de contrôle dans la première équation (2.11), il n'est pas possible de linéariser complètement ce système par un changement de commande. Par contre, il est possible de le linéariser partiellement telle que la dynamique de q_2 soit transformée en un double intégrateur.

Lorsque la dynamique actionnée est q_2, la procédure de linéarisation de cette dynamique s'appelle linéarisation partielle localisée (de l'anglais : collocated partial feedback linearization). Dans [Spong-98], les auteurs ont montré que la partie actionnée du système (de dimension m) peut être linéarisée en utilisant un changement de commande.

En appliquant :

$$u = G^{-1}(q)\left[\left(m_{22}(q) - \frac{m_{12}(q)m_{21}(q)}{m_{11}(q)}\right)v - \frac{m_{21}(q)}{m_{11}(q)}C_1(q,\dot{q}) - \frac{m_{21}(q)}{m_{11}(q)}g_1(q) + C_2(q,\dot{q}) + g_2(q)\right] \qquad (2.13)$$

à (2.12), on obtient

$$m_{11}(q)\ddot{q}_1 + m_{12}(q)\ddot{q}_2 + C_1(q,\dot{q}) + g_1(q) = 0 \qquad (2.14)$$

$$\ddot{q}_2 = v \qquad (2.15)$$

Pour mieux illustrer les différents calculs précédents, concéderons l'exemple du système pendule inversé.

Exemple: système pendule inversé

Le pendule inversé de la figure 2.1 est composé, d'un chariot libre en translation le long d'un rail de guidage, et d'un pendule solidaire au chariot et libre en rotation.

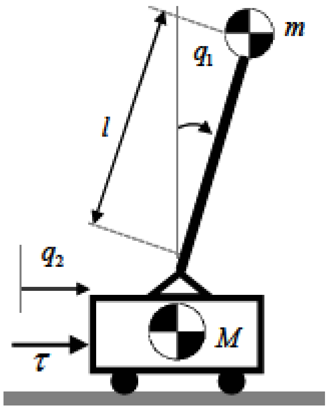


Figure 2.1: Pendule inversé

Afin de pouvoir écrire les équations dynamiques régissant le mouvement du pendule, on considère les coordonnées généralisés $q_1 = \theta$ et $q_2 = x$, où θ représente la position angulaire mesurée de la tige et x la position du chariot sur son rail, également mesurée. M et m sont les masses du chariot et du pendule, respectivement, l est la distance du centre de gravité du pendule à son axe de rotation, τ est l'entrée de commande.

– L'énergie cinétique totale de l'ensemble chariot et pendule est exprimée par:

$$E_c = \frac{1}{2}\mathrm{M}\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\,\dot{x}\,l\cos\theta\,\dot{\theta} + l^2\dot{\theta}^2) \tag{2.16}$$

– L'énergie potentielle du centre de gravité de la tige est :

$$V = mgl\cos\theta \tag{2.17}$$

– Le lagrangien est donné par :

$$L = E_c - V = \frac{1}{2}(\mathrm{M}+m)\dot{x}^2 + ml\cos\theta\;\dot{\theta}\dot{x} + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos(\theta) \tag{2.18}$$

En appliquant l'équation d'Euler-Lagrange (2.1), on obtient les équations dynamiques suivantes :

$$\begin{cases} (\mathrm{M}+m)\ddot{x} + ml\cos(\theta)\ddot{\theta} - ml\sin(\theta)\dot{\theta}^2 = \tau \\ ml\cos(\theta)\ddot{x} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\sin(\theta) = 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

On pose

$$a = \frac{g}{l};\; b = \frac{1}{l};\quad m_3 = \frac{\mathrm{M}+m}{ml^2};\quad \tau' = \frac{\tau}{ml^2} \tag{2.20}$$

où g est la constante de gravité. En utilisant les coordonnées généralisées, $q_1 = \theta$ qui est non actionnée, et $q_2 = x$ qui est actionnée, l'équation (2.19) devient :

$$M_a\ddot{q} + C_a + g_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\tau' \tag{2.21}$$

La matrice d'inertie M_a est donnée par

$$M_a = \begin{bmatrix} m_{a11} & m_{a12} \\ m_{a21} & m_{a22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b\cos(q_1) \\ b\cos(q_1) & m_3 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

La matrice des forces de Coriolis et de centrifuge C_a, la matrice de pesanteur g_a et le vecteur d'entrée G_a sont respectivement

$$C_a = \begin{bmatrix} c_{a1} \\ c_{a2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -b\sin(q_1)\dot{q}_1^2 \end{bmatrix} \; ; \quad g_a = \begin{bmatrix} g_{a1} \\ g_{a2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a\sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \quad G_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Pour simplifier le calcul de la commande, une linéarisation partielle par bouclage statique est appliquée. La loi de commande obtenue est

$$\tau' = \overline{m}_{a22}u + \overline{c}_{a2} + \overline{g}_{a2} \tag{2.24}$$

avec

$$\begin{aligned} \overline{m}_{a22} &= m_{a22} - m_{a21}m_{a11}^{-1}m_{a12} \\ \overline{c}_{a2} &= c_{a2} - m_{a21}m_{a11}^{-1}c_{a2} \\ \overline{g}_{a2} &= g_{a2} - m_{a21}m_{a11}^{-1}g_{a2} \end{aligned} \tag{2.25}$$

où $u \in \Re$ est la nouvelle entrée de commande. Le système original (2.21) est transformé en

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} a\sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b\cos(q_1) \\ 1 \end{bmatrix}u \tag{2.26}$$

Le système (2.26) a une matrice d'inertie M , et une fonction d'énergie potentielle V comme suit :

$$M = I_2 \tag{2.27}$$

$$V(q_1) = a\cos(q_1) \tag{2.28}$$

Où I est la matrice identité. On définit le vecteur G de l'équation (2.26) comme suit:

$$G(q_1) = \begin{bmatrix} -b\cos(q_1) \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

II.2.2 Méthode hamiltonienne

Dans la formulation hamiltonienne, les équations d'Euler-Lagrange sont écrites en fonction de la position et de la quantité de mouvement généralisée au lieu de la position et de la vitesse généralisée. Le vecteur des moments généralisés $p = (p_1, p_2, ..., p_n)^T$ est défini pour tout Lagrangien L comme :

$$p = \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}} \tag{2.30}$$

ou bien $$p = M\,(q)\,\dot{q} \tag{2.31}$$

De plus, dans la méthode hamiltonienne, on définit par transformation de Legendre de $L(q,\dot{q})$ une fonction d'énergie totale $H\,(q,p)$ qui, pour les systèmes mécaniques, est égale à la somme des énergies cinétique et potentielle du système.

$$H\,(q,p) = \frac{1}{2}p^T M^{-1}(q)\,p + V\,(q) \quad \left(= \frac{1}{2}\dot{q}^T M\,(q)\,\dot{q} + V(q) \right) \tag{2.32}$$

Le vecteur d'état dans la formulation hamiltonienne est:

$$(q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_n)^T \tag{2.33}$$

Les n équations différentielles de second ordre (2.1) se transforment en $2n$ équations différentielles de premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p}(q,p) \quad \left(= M^{-1}(q)\,p\right) \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}(q,p) + Gu \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0_n \\ G \end{bmatrix} u \tag{2.34}$$

où on note I_n la matrice identité d'ordre n et 0_n la matrice nulle d'ordre n.

Les systèmes dont la dynamique est décrite par l'équation (2.34) sont appelés systèmes hamiltoniens. La fonction d'énergie totale $H\,(q,p)$ est appelée fonction hamiltonienne.

II.3 Modèle hamiltonien commandé par port

Le système hamiltonien commandé par port (SHCP) introduit dans [Maschke-92] et [Van der Schaft-95] est une généralisation des systèmes hamiltoniens à des systèmes ouverts dans le sens où ils peuvent échanger de l'énergie avec leur environnement.

Cette méthode de modélisation consiste à décomposer le système en sous-systèmes en identifiant les échanges énergétiques. Les éléments qui accumulent de l'énergie sont "isolés" afin d'obtenir un système hamiltonien. L'interaction du système ainsi obtenu avec son environnement est décrite en définissant des ports d'interconnexions comme les endroits où les éléments échangent de l'énergie. La représentation du système complet est finalement obtenue en branchant à chaque port du système hamiltonien les éléments qui n'accumulent pas d'énergie (sources ou éléments dissipatifs). Un réseau d'échange d'énergie est ainsi obtenu.

Les ports de puissance sont les moyens par lesquels le système physique échange de la puissance avec le monde extérieur et en particulier avec d'autres systèmes physiques. Les

systèmes sont interconnectés entre eux par une structure qui préserve l'énergie.
Deux paires de variables sont associées aux ports d'interconnexion: variables de puissance (variable de flux et d'effort), variables d'énergie (déplacement généralisé, quantité du mouvement généralisée). Ces variables permettent de caractériser l'interaction entre deux sous-systèmes.

En plus de considérer la conservation de l'énergie, cette modélisation souligne des propriétés structurelles du système modélisé. Elle permet aussi de mettre en évidence les échanges énergétiques qui se produisent, à l'aide de la matrice d'interconnexion et de la matrice de dissipation. Un autre aspect considéré par les modèles HCP est le fait que la structure d'interconnexion interne et l'interconnexion avec l'extérieur sont différenciées.

Exemple: système masse-ressort

Considérons le système masse-ressort comme le montre la figure 1.2. Il est modélisé comme deux systèmes, et une structure d'interconnexion (voir figure 2.3). Soit q l'allongement du ressort, p la quantité de mouvement de la masse, k est la raideur du ressort, et m est la masse. L'énergie de ce système, qui est la somme de l'énergie cinétique E_c de la masse et l'énergie potentielle V du ressort, est donnée par :

$$E = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2}\mathrm{k}q^2 \tag{2.35}$$

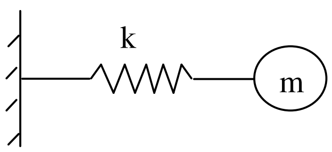


Figure 2.2: Système masse-ressort

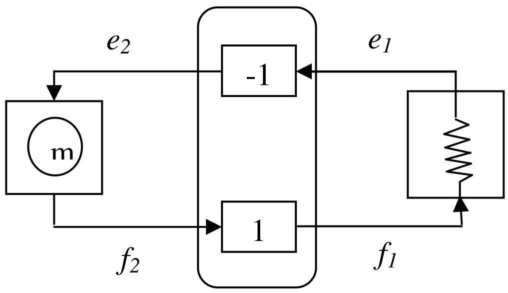


Figure 2.3 : modèle masse-ressort, et structure d'interconnexion

Les systèmes ressort - masse sont régies par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{q} = f_1 \\ e_1 = q\mathrm{k} \end{cases} \tag{2.36}$$

$$\begin{cases} \dot{p} = e_2 \\ f_2 = \dfrac{p}{m} \end{cases} \tag{2.37}$$

De (2.36) et (2.37), il est possible de calculer la quantité d'énergie extraite de la masse $\dot{E}_c$, et du ressort $\dot{V}$:

$$\begin{aligned} \dot{E}_c &= \frac{\partial E_c}{\partial p}\dot{p} = \frac{p}{m}e_2 = f_2 e_2 = P_2 \\ \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial q}\dot{q} = \mathrm{k}qf_1 = e_1 f_1 = P_1 \end{aligned} \tag{2.38}$$

La structure d'interconnexion préserve l'énergie, donc

$$P_1 + P_2 = 0 \tag{2.39}$$

L'expression mathématique de la structure peut être écrite comme:

$$f_1 = f_2 \ , \qquad e_2 = -e_1 \tag{2.40}$$

De (2.38) et (2.39), on a : $\dot{V} = -\dot{E}_c$, c.à.d, l'énergie est transférée entre les deux systèmes.

La définition formelle des systèmes HCP est formulée dans la définition ci-dessous.

Définition 2.1 [Van der Schaft-00] *Un système hamiltonien commandé par port sur* $\Re^n$ *est défini par une matrice de structure* $J(x)$ *anti-symétrique de dimension* $(n \times n)$*, une fonction hamiltonienne* $H(x) : \Re^n \to \Re$, *une matrice d'entrées* $\mathrm{g}(x)$ *de dimension* $(n \times \mathrm{m})$ *et les équations dynamiques :*

$$\begin{cases} \dot{x} = J(x)\dfrac{\partial H}{\partial x}(x) + \mathrm{g}(x)\ u \\ y = \mathrm{g}^T(x)\dfrac{\partial H}{\partial x}(x) \end{cases} \tag{2.41}$$

où $x \in \Re^n$ *est le vecteur des variables d'énergie et* $(u, y) \in \Re^{\mathrm{m}} \times \Re^{\mathrm{m}}$ *sont les variables de puissance associées au port d'interconnexion du système avec l'extérieur.*

Dans ce cas, la fonction hamiltonienne $H(x)$ correspond à l'énergie totale du système, la matrice de structure représente la structure d'interconnexion des éléments d'accumulation d'énergie et les variables de puissance des ports décrivent l'interaction avec l'extérieur. Les systèmes considérés sont avec conservation d'énergie (ou continuité de puissance) ce qui permet d'écrire la condition d'anti-symétrie de J : $J(x) = -J^T(x) \quad \forall x \in \Re^n$.

Dans le cas des systèmes avec dissipation d'énergie, les éléments dissipatifs peuvent être branchés à un des ports, ce qui implique le remplacement de terme $\mathrm{g}(x)$ par :

$$\begin{bmatrix} \mathrm{g}(x) & \mathrm{g}_R(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_R \end{bmatrix} = \mathrm{g}(x)u + \mathrm{g}_R(x)u_R \tag{2.42}$$

L'équation (2.41) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = J(x)\dfrac{\partial H}{\partial x}(x) + \mathrm{g}(x)u + \mathrm{g}_R(x)u_R \\ y = \mathrm{g}^T(x)\dfrac{\partial H}{\partial x}(x) \\ y_R = {\mathrm{g}_R}^T(x)\dfrac{\partial H}{\partial x}(x) \end{cases} \tag{2.43}$$

où u_R et y_R dénotent les variables de puissance aux ports où sont branchés les éléments résistifs. Si on ne considère que des éléments résistifs linéaires, la relation entre les variables de flux et d'effort est donnée par l'expression: $u_R = -S\ y_R$, avec $S = S^{\mathrm{T}} \geq 0$.

La définition 2.1 a été étendue aux systèmes avec dissipation d'énergie, elle est reformulée dans la définition ci-dessous.

Définition 2.2 [Van der Schaft-00] *Un système hamiltonien commandé par port avec dissipation sur* $\Re^n$ *est défini par une matrice de structure* $J(x)$ *anti-symétrique de dimension* $(n \times n)$, *une matrice symétrique positive* $R(x)$, *une fonction hamiltonienne* $H(x): \Re^n \to \Re$, *une matrice d'entrée* $\mathrm{g}(x)$ *de dimension* $(n \times \mathrm{m})$ *et les équations dynamiques :*

$$\begin{cases} \dot{x} = \left[J(x) - R(x)\right] \dfrac{\partial H}{\partial x}(x) + \mathrm{g}(x) u \\ y = \mathrm{g}^T(x) \dfrac{\partial H}{\partial x}(x) \end{cases} \tag{2.44}$$

II.4 Bilan d'énergie, passivité et stabilisation des SHCP

II.4.1 Bilan d'énergie

La variation de l'énergie dans le système dissipatif (2.44) est donnée par le bilan énergétique suivant :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial^T H}{\partial x} \left[\left[J(x) - R(x)\right] \frac{\partial H}{\partial x}(x) + \mathrm{g}(x) u \right] \tag{2.45}$$

En considérant la propriété de conservation d'énergie $\left(J(x) = -J^T(x)\right)$ et l'expression de la sortie y, on a :

$$\frac{dH}{dt}(x) = -\frac{\partial^T H}{\partial x} R(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x) + u^T y \tag{2.46}$$

La variation de l'énergie dans le système est donc égale à l'énergie fournie $\left(u^T y\right)$ moins l'énergie dissipée $\left(-\dfrac{\partial^T H}{\partial x} R(x) \dfrac{\partial H}{\partial x}(x)\right)$. En intégrant l'équation (2.46), on a :

$$H\left[x(t_1)\right] - H\left[x(t_0)\right] = \int_{t_0}^{t_1} u^T(t) y(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^T H}{\partial x}\left(x(t)\right) R\ \left(x(t)\right) \frac{\partial H}{\partial x}\left(x(t)\right) dt \tag{2.47}$$

L'équation (2.47) exprime le fait que le système ne puisse pas accumuler plus d'énergie que celle qui lui est fournie par l'extérieur moins l'énergie dissipée.

II.4.2 Passivité et stabilité des SHCP

La relation entre les systèmes hamiltoniens commandés par ports et les systèmes passifs peut être récapitulée au moyen de la proposition suivante.

Proposition 2.1 [Van der Schaft-00] *Un système HCP avec dissipation est un système passif et la fonction de stockage est la fonction hamiltonienne.*

En effet, un système HCP avec dissipation peut être interprété comme un système affine en l'entrée, où :

$$f(x) = [J(x) - R(x)]\frac{\partial H}{\partial x}(x), \qquad \mathrm{g}(x) = \mathrm{g}(x), \qquad h(x) = \mathrm{g}^T(x)\frac{\partial H}{\partial x}(x) \tag{2.48}$$

La relation suivante est alors vérifiée :

$$L_{[J(x)-R(x)]\frac{\partial H}{\partial x}} H(x) = \frac{\partial H^T}{\partial x}[J(x) - R(x)]\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{-\partial^T H}{\partial x}R(x)\frac{\partial H}{\partial x} \leq 0 \tag{2.49}$$

où la propriété d'anti symétrie de J a été exploitée et l'inégalité suit du fait que $R(x)$ est positive semi définie. De plus :

$$L_g H(x) = \frac{\partial^T H}{\partial x}\mathrm{g}(x) = \left[\mathrm{g}^T(x)\frac{\partial H}{\partial x}(x)\right]^T \tag{2.50}$$

Ainsi un SHCP avec dissipation vérifie la propriété de KYP et par conséquent, c'est un système passif.

Si $R(x) = 0$, c.à.d., s'il n'y a aucune dissipation dans le système, alors

$$L_{[J(x)-R(x)]\frac{\partial H}{\partial x}} H(x) = 0 \tag{2.51}$$

Donc, un SHCP sans dissipation est un système sans perte. De plus, si $R(x)$ est définie positive, le système hamiltonien commandé par ports est strictement passif. Ainsi, la caractérisation d'un système sans perte, la passivité et la passivité stricte du SHCP peuvent être déterminées en vérifiant simplement le signe de la matrice $R(x)$. En fait, de (2.46) la relation suivante peut être obtenue pour la puissance :

$$\mathrm{P}{=}u^T y{=}\frac{dH(x)}{dt} + \underbrace{\frac{\partial^T H(x)}{\partial x}R(x)\frac{\partial H(x)}{\partial x}}_{P_{dissipée}} \tag{2.52}$$

Le signe de la puissance dissipée dépend de la matrice $R(x)$. Si $R(x)$ est positive définie, $P_{dissipée} > 0$ c'est à dire qu'une certaine puissance est toujours dissipée par le système et par conséquent le système est strictement passif. Si $R(x) = 0$ alors $P_{dissipée} = 0$, ce qui signifie qu'il n'y a aucune dissipation et que par conséquent le système est sans perte. Si $R(x)$ est négative définie, $P_{dissipée} < 0$ ce qui signifie que le système n'est pas passif puisqu'il y a une certaine production interne d'énergie.

Ainsi, les systèmes hamiltoniens commandés par ports héritent toutes les propriétés des systèmes passifs. Il est alors possible de stabiliser asymptotiquement une configuration d'équilibre à un point minimum (local) de la fonction hamiltonienne par la loi de commande $u=-ky$. Ce type de commande s'appelle *stabilisation par injection d'amortissement*. Le nom découle du fait que l'action de la commande peut être physiquement interprétée comme l'ajout d'un certain amortissement au système. En effet, en considérant un système hamiltonien commandé par port avec dissipation où $u=-ky$ et $k>0$, le système commandé est représenté par l'équation suivante :

$$\dot{x}=\left[J(x)-\left(R(x)+\mathrm{g}(x)k\,\mathrm{g}^{T}(x)\right)\right]\frac{\partial H}{\partial x} \tag{2.53}$$

L'injection d'amortissement ajoute au système une certaine dissipation d'énergie supplémentaire qui est modélisée par la matrice symétrique positive semi définie $\left(\mathrm{g}(x)k\,\mathrm{g}^{T}(x)\right)$. Il permet aussi d'augmenter le taux par lequel le système évolue vers une configuration minimale d'énergie. On peut conclure que n'importe quel minimum strict de la fonction hamiltonienne correspond à une configuration stable de Lyapunov qui peut être stabilisée asymptotiquement par l'injection d'amortissement. En effet, pour les systèmes mécaniques en général, la fonction hamiltonienne est considérée comme étant l'énergie totale stockée dans le système, qu'on pourra prendre comme étant une fonction candidate de Lyapunov.

Pour illustrer tout cela, reprenons l'exemple masse-ressort de la figure 2.2.

Soit x et p les variables d'énergies, tel que x l'allongement du ressort, et p la quantité de mouvement de la masse. L'entrée u est la force qui agit sur la masse et la sortie y est la vitesse de la masse.

La fonction hamiltonienne est

$$H(x,p)=\frac{1}{2m}p^{2}+\frac{1}{2}\mathrm{k}x^{2} \tag{2.54}$$

Le modèle hamiltonien commandé par ports est

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{p}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial p}\end{bmatrix}^{T}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u\\ y&=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial p}\end{bmatrix}^{T}\end{aligned} \tag{2.55}$$

Le point $(0,0)$ est non seulement un point d'équilibre mais aussi un point minimum global de la fonction hamiltonienne. II est possible de faire une analyse de la stabilité du point d'équilibre. En considérant la fonction hamiltonienne du système en tant que fonction candidate de Lyapunov, les relations ci-dessous sont satisfaites :

$$\begin{aligned} &H(x,p) > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad \forall p \neq 0; \qquad H(0,0) = 0 \\ &\frac{dH}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^T H}{\partial x} & \frac{\partial^T H}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix}^T = 0 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Par conséquent, le point d'équilibre $(0,0)$ est Lyapunov stable mais pas asymptotiquement stable. II est possible de le stabiliser asymptotiquement par l'ajout d'amortissement. Considérons la loi de commande suivante :

$$u = -ky = -k\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix}^T \quad ; \; k > 0 \tag{2.57}$$

Le système commandé est toujours un SHCP, et il est représenté par les équations suivantes:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix}^T \\ &y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{2.58}$$

L'état $(0,0)$ est toujours un point d'équilibre. En considérant la fonction hamiltonienne comme une fonction candidate de Lyapunov pour le système commandé (2.58), les relations ci-dessous sont satisfaites :

$$\begin{aligned} &H(x,p) > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad \forall p \neq 0; \qquad H(0,0) = 0 \\ &\frac{dH}{dt} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial^T H}{\partial x} & \frac{\partial^T H}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix}^T \leq 0 \end{aligned} \tag{2.59}$$

D'après l'équation (2.59), $\dot{H} \leq 0$. L'ensemble où $\dot{H} = 0$ est $Z = \{(x,p) / p = 0\}$. Le plus grand sous ensemble de Z est $\{0,0\}$. En utilisant le principe d'invariance de LaSalle [Khalil-02], le point d'équilibre $(0,0)$ est asymptotiquement stable.

La commande par injection d'amortissement a une interprétation physique simple. En fait, puisque l'objectif principal de l'ajout d'amortissement est d'introduire une certaine dissipation dans le système, le contrôleur peut être interprété comme un amortisseur virtuel qu'on interconnecte à la masse (figure 2.4).

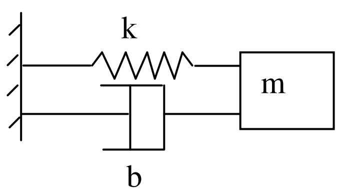


Figure 2.4: Système masse-ressort avec injection d'amortissement

II.5 Modèle HCP et linéarisation partielle d'un système mécanique sous actionné

Un système mécanique sous actionné, sans dissipation naturelle est décrit par le modèle HCP suivant [Ortega-02a]:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} u \tag{2.60}$$

où $p = M\dot{q} \in \Re^n$ est la quantité du mouvement généralisée, $u \in \Re^{\mathrm{m}}$ est l'entrée et $G \in \Re^{n\times \mathrm{m}}$ est la matrice d'entrée avec $rang(G) = \mathrm{m} < n$.

L'énergie totale du système (2.60) en boucle ouverte est donnée par

$$H(q,p) = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + V(q) \tag{2.61}$$

A ce stade, le vecteur d'état, la matrice d'entrée, les matrices d'interconnexion et d'amortissement de l'équation (2.41), sont respectivement donnés comme suit :

$$x = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}; \quad J(x) = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}; \quad R(x) = 0; \quad \mathrm{g}(x) = \mathrm{g}(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} \tag{2.62}$$

Les systèmes mécaniques modélisés par le formalisme HCP (équation (2.60)) peuvent être linéairisés en états non mesurables via un changement de coordonnées de la forme $(q, \boldsymbol{P}) = (q, \Psi^T(q)p)$ avec $\Psi : \Re^n \to \Re^{n\times n}$ est une matrice de rang plein. La classe des systèmes qui satisfont ce changement de coordonnée (entièrement déterminé par la matrice d'inertie M) est appelée " partiellement linéarisable via un changement de coordonnées" *(de l'anglais: Partially Linearizable via Coordinate Changes)* (PLvCC). Comme illustré dans [Bedrossian-92], [Spong-92], [Besançon-00], [Karagiannis-09] et [Venkatraman-10a], la réalisation de la linéarité en $\boldsymbol{P}$ simplifie le problème de conception de l'observateur ainsi que celui de la commande.

Avant d'entrer dans les détails de la caractérisation des systèmes PLvCC, nous jugeons utile d'expliciter les notations qui seront utilisées ultérieurement.

Pour toute matrice $A \in \Re^{n\times n}$: $A_i \in \Re^n$ est la $i^{ième}$ colonne, $A^i \in \Re^n$ la, $i^{ième}$ ligne, A_{ij} est le $ij^{ième}$ élément. $e_i, i \in \bar{n} = \{1,...,n\}$ sont les vecteurs de la base Euclidienne, $A_i = Ae_i$, $A^i = e_i^T A$ et $A_{ij} = e_i^T A e_j$.

II.5.1 Caractérisation de la classe des systèmes PLvCC

Dans cette section, on identifie la classe des systèmes mécaniques pour laquelle un changement de coordonnées de la forme $(q, \boldsymbol{P}) = (q, \Psi^T(q)p)$, avec Ψ de rang plein, rend le système linéaire en $\boldsymbol{P}$. On utilisera pour ce faire la proposition 2.2.

Proposition 2.2 [Venkatraman-10b] *Soit* Ψ *une matrice de rang plein, d'ordre* n. *La dynamique de* (2.60) *exprimée dans les coordonnées* $(q, \boldsymbol{P})$, *où* $\boldsymbol{P} = \Psi^T(q)p$, *est linéaire en* $\boldsymbol{P}$ *si est seulement si pour tous* $i \in \overline{n}$, $\overline{n} = \{1, ..., n\}$, *on a*

$$\mathrm{B}_{(i)}(q) + \mathrm{B}_{(i)}^T(q) = 0; \tag{2.63}$$

où les matrices $\mathrm{B}_{(i)}$ *sont définies comme suit*

$$\mathrm{B}_{(i)}(q) = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \left[\Psi_i, \Psi_j \right] \Psi_j^T (M \Psi \Psi^T)^{-1} + \frac{1}{2} \Psi_{ji} \Psi \nabla_{q_j} (\Psi^T M \Psi)^{-1} \Psi^T \right\} \tag{2.64}$$

$\left[\Psi_i, \Psi_j \right]$ *est le crochet de Lie. Sous la condition (2.63); le système (2.60) devient*

$$\dot{q} = (\Psi^T M)^{-1} \boldsymbol{P} \quad ; \quad \dot{\boldsymbol{P}} = -\Psi^T (\nabla_q V - Gu) \tag{2.65}$$

Comme on le constate, l'équation pour $\dot{q}$ de (2.65) découle de la définition de $\boldsymbol{P}$. Pour ce qui est de $\dot{\boldsymbol{P}}$**,** il peut être exprimé comme suit

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \dot{\Psi}^{\mathrm{T}} p + \Psi^T \dot{p} = -\mathrm{D}_{\Psi(q,p)} - \Psi^T (\nabla V(q) - G(q)u) \tag{2.66}$$

où D_Ψ est défini par :

$$\mathrm{D}_{\Psi(q,p)} = \Psi^T \nabla_q \left\{ \frac{1}{2} p^T M^{-1} p \right\} - \dot{\Psi}^T p \tag{2.67}$$

On montrera que chaque élément de vecteur D_Ψ est une forme quadratique en p, c'est-à-dire

$$\mathrm{D}_\Psi = \sum_{i=1}^{n} e_i p^T \, \mathrm{B}_{(i)} \, p \tag{2.68}$$

qui sera nul pour tous les p si et seulement si la condition (2.63) est satisfaite.

Pour montrer cela, on calcule d'abord :

$$\begin{aligned} \nabla_q \left\{ \frac{1}{2} p^T M^{-1} p \right\} &= \nabla_q \left\{ \frac{1}{2} p^T \Psi (\Psi^T M \Psi)^{-1} \Psi^T p \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} e_i \left\{ 2 p^T (\nabla_{q_i} \Psi)(\Psi^T M \Psi)^{-1} \Psi^T p + p^T \Psi \nabla_{q_i} ((\Psi^T M \Psi)^{-1}) \Psi^T p \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_i \left\{ p^T (\nabla_{q_i} \Psi) \Psi^{-1} M^{-1} p + \frac{1}{2} p^T \Psi \nabla_{q_i} ((\Psi^T M \Psi)^{-1}) \Psi^T p \right\} \end{aligned} \tag{2.69}$$

En Remplaçant (2.69) dans (2.67), on obtient

$$\mathrm{D}_\Psi = -\dot{\Psi}^T p + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \begin{array}{l} (\Psi^T e_i)(p^T \nabla_{q_i} \Psi) \Psi^{-1} M^{-1} p + \frac{1}{2} (\Psi^T e_i) \\ \left[p^T \Psi \nabla_{q_i} ((\Psi^T M \Psi)^{-1}) \Psi^T p \right] \end{array} \right\} \tag{2.70}$$

Pour continuer les calculs, on utilisera les deux lemmes suivants:

Lemme 2.1 [Venkatraman-10b] *Soit* $\Psi(q)$ *une matrice de rang plein, d'ordre* n. *La matrice* J *d'ordre* n *est définie comme suit*

$$\mathrm{J} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ (p^T \nabla_{q_i} \Psi)^T (e_i^T \Psi) - (\Psi^T e_i)(p^T \nabla_{q_i} \Psi) \right\} \tag{2.71}$$

Le $jk^{ième}$ élément de la matrice J est donné par

$$\mathrm{J}_{jk} = -p^T \left[\Psi_j, \Psi_k \right] \tag{2.72}$$

où $\left[\Psi_j, \Psi_k \right]$ est le crochet de Lie des vecteurs colonnes Ψ_j et Ψ_k.

Lemme 2.2 [Venkatraman-10b] *Soit les matrices $\bar{\mathrm{J}}_i$ d'ordre n définies comme suit*

$$\bar{\mathrm{J}}_i = \sum_{j=1}^{n} \left[\Psi_i, \Psi_j \right] \Psi_j^T (\Psi \Psi^T)^{-1} M^{-1}, \quad i \in \bar{n} \tag{2.73}$$

alors

$$\sum_{i=1}^{n} (\Psi^T e_i)(p^T \nabla_{q_i} \Psi) \Psi^{-1} M^{-1} p - \dot{\Psi}^T p = \sum_{i=1}^{n} e_i (p^T \bar{\mathrm{J}}_i \, p) \tag{2.74}$$

L'équation (2.70) devient :

$$\mathrm{D}_{\Psi} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ e_i (p^T \bar{\mathrm{J}}_i \, p) + \frac{1}{2} (\Psi^T e_i) \left[p^T \Psi \nabla_{q_i} ((\Psi^T M \Psi)^{-1}) \Psi^T p \right] \right\} \tag{2.75}$$

En utilisant la définition de $\mathrm{B}_{(i)}$ donnée par (2.64) on obtient

$$\mathrm{D}_{\Psi} = \sum_{i=1}^{n} e_i p^T \, \mathrm{B}_{(i)} \, p \tag{2.76}$$

Si la matrice d'inertie M satisfait la condition (2.63) pour une matrice Ψ de rang plein, alors le système mécanique (2.60) devient linéaire en $\boldsymbol{P}$ et il est dit PLvCC. La classe de M pour laquelle il existe une telle matrice Ψ est notée par S_{PLvCC}. Donc, $M \in S_{PLvCC}$ si et seulement s'il existe Ψ tel que la condition (2.63) est satisfaite.

Pour une matrice Ψ générale, de rang plein, qui ne satisfait pas la condition (2.63), on pourra utiliser le lemme 2.3 ci-dessous. Ce lemme peut aussi être utilisé pour une matrice Ψ qui satisfait la condition (2.63).

Lemme 2.3 [Venkatraman-10b] *Pour une matrice générale Ψ de rang plein, la dynamique transformée dans les coordonnées $(q, \boldsymbol{P})$ est donnée par*

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\boldsymbol{P}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Psi \\ -\Psi^T & \mathrm{J} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_q \bar{H} \\ \nabla_{\boldsymbol{P}} \bar{H} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi^T G \end{pmatrix} u \tag{2.77}$$

avec la nouvelle fonction d'énergie étant

$$\bar{H}(q, \boldsymbol{P}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{P}^T (\Psi^T M \Psi)^{-1} \boldsymbol{P} + V(q) \tag{2.78}$$

et le $jk^{ième}$ élément de la matrice antisymétrique J est donné par

$$\mathrm{J}_{jk}(q, p) = -p^T \left[\Psi_j, \Psi_k \right] \tag{2.79}$$

En résumé, la classe des systèmes mécaniques qui peuvent être rendu partiellement linéaire via un changement de coordonnées est l'ensemble des systèmes mécaniques qui appartiennent à S_{PLvCC}. Dans la prochaine section, on donne l'interprétation physique de l'ensemble S_{PLvCC}.

II.5.2 Etude de l'ensemble S_{PLvCC}

Une question naturelle qui se pose à ce stade est la suivante: Pour quel type de matrices d'inertie M la condition (2.63) est satisfaite? Fournir une réponse complète correspond à la détermination de toutes les solutions des EDPs (2.63), (2.64) dont l'inconnue est la fonction Ψ. Cette tâche semble difficile. Cependant, il s'avère que cet ensemble contient des sous-ensembles intéressants qui ont une interprétation physique claire. Certains de ces sous ensembles ont été étudiés dans la littérature, qu'on va maintenant passer brièvement en revue dans cette section.

II.5.2.1 Définition des sous-ensembles de l'ensemble S_{PLvCC}

Pour obtenir une meilleure compréhension de la condition (2.63), on présentera quatre ensembles (voir la figure 2.5) qui sont en réalité des sous-ensembles de S_{PLvCC}.

Avant de présenter ces ensembles, il nous semble important d'introduire la définition 2.3**,** qui est largement utilisée par la suite.

Définition 2.3 [Venkatraman-10b] *La matrice* T *de rang plein est une factorisation de* M^{-1} *si*

$$M^{-1}(q) = \mathrm{T}(q)\mathrm{T}^{T}(q) \tag{2.80}$$

La définition 2.4 ci-dessous présente les quatre ensembles de S_{PLvCC}

Définition 2.4 [Venkatraman-10b] *Les ensembles* S_{CI}, S_{ZCS}, S_{ZRS} et S_T *sont définis comme suit :*

(i) *Inertie constant*

$$S_{CI} = \left\{ M > 0 \,/\, M_{ij} = \text{constante},\ i, j \in \overline{n} \right\} \tag{2.81}$$

(ii) *Symboles de Christoffel nuls*

$$S_{ZCS} = \left\{ M > 0 \,/\, C_{ijk} = 0,\ i, j, k \in \overline{n} \right\} \tag{2.82}$$

avec C_{ijk} *sont les symboles de Christoffel de première espace définis dans (2.5) pour une matrice d'inertie donnée.*

(iii) *Symboles de Riemann nuls*

$$S_{ZRS} = \left\{ M > 0 \,/\, R_{ijlk} = 0,\ i, j, l, k \in \overline{n} \right\} \tag{2.83}$$

avec R_{ijlk} *sont les symboles de Riemann définis comme suit*

$$\begin{aligned} R_{ijlk}(q) = {} & \frac{1}{2}\left[\nabla^2_{q_j q_l} M_{ik} + \nabla^2_{q_i q_k} M_{jl} - \nabla^2_{q_j q_k} M_{il} - \nabla^2_{q_i q_l} M_{jk} \right] \\ & + \sum_{a,b=1}^{n} (M^{-1})_{ab} \left[C_{jla} C_{ikb} - C_{ila} C_{jkb} \right] \end{aligned} \tag{2.84}$$

avec $(M^{-1})_{ab}$ *est l'élément* $ab^{ième}$ *de la matrice d'inertie inverse* M^{-1}.

(iv) *Condition d'antisymétrie*

$$S_T = \left\{ M > 0 \,/\, M^{-1} \text{ admet une factorisation } \mathrm{T} \text{ tel que} \right.$$

$$\left. \sum_{j=1}^{n} \left[\mathrm{T}_i, \mathrm{T}_j \right] \mathrm{T}_j^T = -\left[\sum_{j=1}^{n} \left[\mathrm{T}_i, \mathrm{T}_j \right] \mathrm{T}_j^T \right]^T,\ i \in \overline{n} \right\} \tag{2.85}$$

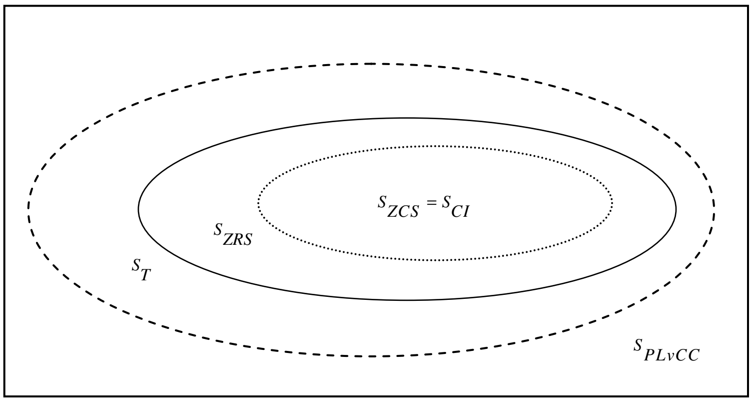


Figure 2.5: Les ensembles des matrices d'inertie

La proposition 2.3 ci-dessous explicite les différents liens entre les quarte sous ensembles de l'ensemble S_{PLvCC} comme le montre la figure 2.5.

Proposition 2.3 [Venkatraman-10b] *Les ensembles des matrices d'inertie dans la définition de 2.4 satisfont*

$$S_{CI} = S_{ZCS} \subset S_{ZRS} \subset S_T \subseteq S_{PLvCC} \tag{2.86}$$

où l'inclusion $S_{ZCS} \subset S_{ZRS}$ *est stricte pour tout* $n > 1$, *et l'inclusion* $S_{ZRS} \subset S_T$ *est stricte pour tout* $n > 2$.

Une propriété importante de l'ensemble S_{ZRS}, est que les symboles de Riemann donnés par (2.84), pour une matrice d'inertie M sont nuls si et seulement si la matrice M admet une factorisation $M^{-1} = \mathrm{T}\mathrm{T}^T$ de telle sorte que les crochets de Lie des colonnes de la matrice T sont égal à zéro [Bedrossian-92], [Spong-92], [Spivak-99]. Donc:

$$R_{ijlk} = 0,\ \ i, j, l, k \in \overline{n} \Leftrightarrow M^{-1} \text{admet une factorisation } \mathrm{T} \text{ tel que}$$

$$\left[\mathrm{T}_i, \mathrm{T}_j \right] = 0,\ \ i, j \in \overline{n} \tag{2.87}$$

Exemple: Pendule inversé

Soit le système pendule inversé qui a été introduit précédemment. On montre que sa matrice d'inertie appartient à l'ensemble S_{ZRS} mais ses symboles de Christoffel ne sont pas nuls. En effet, considérons la matrice d'inertie donnée par (2.22)

$\left(M_a = \begin{bmatrix} 1 & b\cos(q_1), & b\cos(q_1) & m_3 \end{bmatrix}^T\right)$.

Pour toute matrice donnée M positive définie, il est toujours possible de trouver une factorisation triangulaire inférieure de Cholesky, unique, T de M^{-1} satisfaisant (2.80) et de telle sorte que ses éléments diagonaux sont positifs [Horn-90].

Pour la matrice d'inertie (2.22), on a :

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{m_3}}{\sqrt{m_3 - b^2\cos^2 q_1}} & 0 \\ \dfrac{-b\cos q_1}{\sqrt{m_3}\sqrt{m_3 - b^2\cos^2 q_1}} & \dfrac{1}{\sqrt{m_3}} \end{bmatrix} \tag{2.88}$$

Il est facile de vérifier que $[\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2] = 0$. Ainsi, à partir de (2.87), la matrice d'inertie (2.22) a des symboles de Riemann nuls, donc $M_a \in S_{ZRS}$. Ensuite, en calculant les symboles de Christoffel pour M_a on obtient $C_{112} = -b\sin q_1$, tandis que le reste des symboles sont tous nuls, donc $M_a \notin S_{ZCS}$. Ainsi, l'inclusion $S_{ZCS} \subset S_{ZRS}$ est stricte.

II.5.2.2 Interprétation physique des ensembles S_{ZCS}, S_{ZRS}, S_T

Dans cette section, on détermine les classes des systèmes physiques, pour lesquelles la matrice d'inertie appartient aux ensembles de la proposition 2.3.

La condition (2.63) est satisfaite si et seulement si D_Ψ, défini dans (2.67), est nul.

Soit $\tilde{\mathrm{D}}_\Psi$ une fonction vectorielle définie comme suit

$$\tilde{\mathrm{D}}_\Psi(q, p) = \mathrm{D}_\Psi(q, M(q)\dot{q}) \tag{2.89}$$

La relation entre D_Ψ, défini en (2.67), avec les matrices M et C dans le modèle d'Euler-Lagrange (2.6), en utilisant (2.67) est donnée comme suit:

$$\tilde{\mathrm{D}}_\Psi = \Psi^T \nabla_q \left\{ \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \right\} - \dot{\Psi}^T M \dot{q} = \left[\Psi^T C - \frac{d}{dt}(\Psi^T M) \right] \dot{q} \tag{2.90}$$

où, pour obtenir la deuxième identité, on utilise l'équation (2.9).

L'ensemble S_{ZCS} est interprété dans la proposition 2.4 ci-dessous

Proposition 2. 4 [Venkatraman-10b] *Les énoncés suivants sont équivalents*

(i) $M \in S_{ZCS}$

(ii) *La condition* (2.63) *est vérifiée pour toute matrice* Ψ *constante.*

(iii) *Les forces de Coriolis et de centrifuge* $C(q, \dot{q})\dot{q}$ *sont nulles. De plus, si* $M \in S_{ZCS}$, *et en prenant* $\Psi = M^{-1}$*; le système* (2.65) *devient*

$$\dot{q} = \boldsymbol{P}, \quad \dot{\boldsymbol{P}} = -M^{-1}(\nabla_q V - Gu) \tag{2.91}$$

L'ensemble S_{ZRS} est interprété dans la proposition 2.5 suivante :

Proposition 2.5 [Venkatraman-10b] *Les énoncés suivants sont équivalents*

(i) $M \in S_{ZRS}$

(ii) *Il existe une matrice* T *qui est une factorisation de* M^{-1}, *tel que,* $M^{-1} = \mathrm{T}\mathrm{T}^{T}$ *et une fonction* $Q : \Re^{n} \to \Re^{n}$ *tel que*

$$\nabla Q(q) = \mathrm{T}^{-1}(q) \tag{2.92}$$

L'ensemble S_T est interprété dans la proposition 2.6 ci-dessous

Proposition 2.6 [Venkatraman-10b] Pour toute matrice T, qui est une factorisation de M^{-1}, les énoncés suivants sont équivalents

(i) $M \in S_T$

(ii) *La condition* (2.63) *est vérifiée avec* $\Psi = \mathrm{T}$, *donc* $\mathrm{D_T} = 0$.

De plus, si $M \in S_T$, *le système* (2.65) *prend la forme suivante*

$$\dot{q} = \mathrm{T}\,\boldsymbol{P}, \quad \dot{\boldsymbol{P}} = -\mathrm{T}^{T}(\nabla_{q} V - Gu) \tag{2.93}$$

II.5.2.3 Ensemble S_{PLvCC}

Dans cette section, on présente l'exemple du système de" jambe robotique". Ce système appartient à S_{PLvCC}. On présentera aussi le système " bille sur rail " et on montre qu'il n'appartient pas à S_{PLvCC}.

Exemple: Système " pied robotique" *(Robotic leg)*

Soit le système " pied robotique" de la figure 2.6. Ce système est constitué d'un corps rigide qui est fixé à un point sur le sol en son centre de masse. Le corps peut tourner autour de ce point fixe et a un moment d'inertie I autour de l'axe de rotation. Le corps possède un pied extensible sans masse, qui est fixé au point fixe du sol. Le pied est lié à une masse m en son extrémité. La coordonnée φ représente l'angle du corps, θ représente l'angle formé par le pied extensible avec l'axe horizontal fixe et r désigne l'extension de pied qui est supposée être strictement positif (voir figure 2.6). F^{1} représente le couple agissant sur le point de rotation qui commande l'angle entre le corps et le pied et F^{2} représente la force qui commande l'extension de pied.

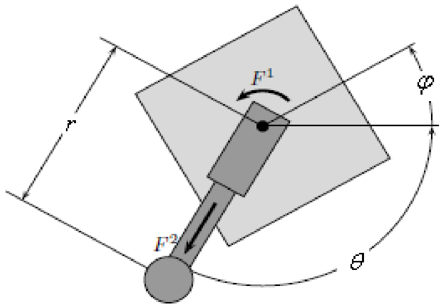


Figure 2.6: Système pied robotique

Ce système possède trois degrés de liberté $q=(r,\theta,\varphi)$. Sa matrice d'inertie est

$$M = diag\left\{m, mq_1^2, \mathrm{I}\right\} \tag{2.94}$$

où $q_1>\varepsilon>0$.

Tout d'abord, les seuls symboles de Christoffel non nuls pour M sont $C_{122}=-C_{221}=mq_1$ ce qui implique que $M\notin S_{ZCS}$. En outre, le symbole de Riemann $R_{1212}=m\neq 0$ implique que $M\notin S_{ZRS}$.

Après calcul, on a [Sarras-10a], [Venkatraman-10b] :

$$\Psi(q_1,q_2)=\begin{bmatrix} \sin(q_2) & \sin(q_2) & 0 \\ \frac{1}{q_1}\cos(q_2)+\kappa & \frac{1}{q_1}\cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \kappa\neq 0 \tag{2.95}$$

La matrice $\Psi(q_1,q_2)$ est définie, de rang plein pour tout $q\in\left\{q_1\geq\varepsilon>0, q_2\neq i\pi\right\}$, et assure que $\mathrm{D}_\Psi=0$ pour l'inertie la matrice (2.94). Il convient de souligner que (2.95) a été obtenue en résolvant les EDPs (2.63) et (2.64) pour la matrice d'inertie (2.85). Dans ce cas on a $M\in S_{PLvCC}$.

Exemple : Bille sur rail *(ball and beam)*

Soit le système bille sur rail de la figure 2.7. Ce système est constitué d'une bille dont la position le long de la barre est décrite par la coordonnée q_1, l'angle formé par la barre avec l'axe horizontal est représenté par q_2. u est le couple qui agit sur la barre et contrôle sa position angulaire.

La matrice d'inertie de système est $M=diag(1, L^2+q_1^2)$, où $L>0$ est la longueur de la barre, et $q\in\left\{|q_1|\leq L\right\}$. Les EDPs (2.63) et (2.64) pour le système bille sur rail sont:

$$\nabla_{q_1}\Psi_{11}=0\ ;\quad \nabla_{q_2}\Psi_{11}+(L^2+q_1^2)\nabla_{q_1}\Psi_{21}\ ;\quad \nabla_{q_2}\Psi_{21}=\frac{-q_1}{L^2+q_1^2}\Psi_{11} \tag{2.96}$$

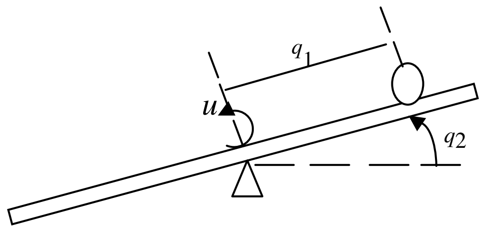


Figure 2.7: Système bille sur rail.

La première et la troisième EDP de (2.96) implique :

$$\Psi_{21}(q_1,q_2)=\frac{q_1}{L^2+q_1^2}\tilde{\Psi}_{21}(q_2)+\kappa \tag{2.97}$$

où $\Psi_{11}(q_2)=-\nabla_{q_2}\tilde{\Psi}_{21}$. Ensuite, en utilisant (2.97) avec la deuxième EDP de (2.96) on a l'équation différentielle ordinaire (EDO)

$$\nabla^2\tilde{\Psi}_{21}(q_2)=\frac{L^2-q_1^2}{L^2+q_1^2}\tilde{\Psi}_{21}(q_2) \tag{2.98}$$

qui n'admette pas de solution. Par conséquent $M \notin S_{PLvCC}$.

II.6 Conclusion

Dans ce chapitre, la modélisation des systèmes mécaniques par les approches énergétiques a été abordée, le modèle hamiltonien commandé par port a été developper. L'avantage d'utiliser ce modèle réside dans le fait que cette structure fournit des renseignements énergétiques essentiels à la synthèse du système bouclé. Ainsi, la matrice d'interconnexion donne une indication sur l'échange d'énergie entre les variables, tandis que la propriété positive semi définie de la matrice d'amortissement indique que les termes appartenant à cette matrice sont des termes associés à la dissipation.

Les notions de base sur les systèmes hamiltoniens commandés par port, ainsi que la relation entre ces derniers et la passivité ont été présentées.

On a aussi présenté les simplifications des modèles d'Euler-Lagrange et hamiltonien commandé par port, qui facilitent le calcul de la commande et la conception d'observateur. Dans le chapitre suivant, on montrera comment ces formalismes peuvent être utilisés de manière effective pour traiter le problème de commande des systèmes non linéaires, en particulier les systèmes mécaniques.

Chapitre III

CBP-AIA: Principe et applications

III.1 Introduction

La commande basée sur la passivité avec assignation d'interconnexion et injection d'amortissement (CBP-AIA) est une méthode de commande non linéaire qui stabilise un système en façonnant son énergie totale, tout en préservant sa structure HCP et en utilisant la passivité.

Après un historique sur la CBP-AIA, on présente la méthodologie de cette commande ainsi que ses principales variantes. Une étude détaillée de la CBP-AIA paramétrique sera présentée. La caractéristique principale de cette commande est que la fonction d'énergie totale en boucle fermée est obtenue via la résolution des EDPs, comme un résultat de notre choix des structures d'interconnexion et d'amortissement désirées. Il est bien connu que la résolution des EDPs est, en général, une tâche difficile. On exposera les deux méthodes les plus citées dans la littérature pour la résolution des EDPs obtenues, à savoir la méthode constructive proposée dans [Ortega-02a] et la méthode non constructive proposée dans [Acosta-05] et modifiée dans [Viola-07a]. Les performances et l'efficacité de cette commande sont illustrées par simulation en utilisant Matlab sur plusieurs systèmes mécaniques sous actionnés.

III.2 Etat d'art de la CBP-AIA

L'idée du façonnement de l'énergie prend ses racines dans le travail de Takegaki et Arimoto [Takegaki-81], où la modification de l'énergie potentielle pour les robots manipulateurs complètement actionnés a été étudiée.

Dans [Ortega-89], le terme de commande basée sur la passivité (CBP) a été défini pour désigner la conception de contrôleurs tels que le système en boucle fermée devient passif avec une fonction de stockage donnée. La CBP trouve ses racines dans les travaux fondamentaux de [Takegaki-81]. Le domaine d'application concerne toujours les robots-manipulateurs auxquels est bien adaptée la commande passive.

La CBP fut couronnée de succès pour la commande de systèmes physiques, tels que les systèmes mécaniques, électriques et électromécaniques, en particulier ceux décrits par les équations du mouvement d'Euler-Lagrange [Ortega-98] Elle est aussi utilisée pour la commande des robots [Chopra-06] et la commande des procédés chimiques [Jillson-07].

Il est bien connu, que pour stabiliser certains systèmes mécaniques sous-actionnés, ainsi que la plupart des systèmes électriques et électromécaniques, il est nécessaire de modifier la fonction d'énergie totale. Malheureusement, l'énergie totale façonnée par la procédure classique de la CBP, détruit la structure Euler Lagrange (EL). Dans ce cas, la boucle fermée, bien qu'elle définisse un opérateur passif, n'est plus un système EL, et physiquement, la fonction de stockage n'est pas une fonction d'énergie. Pour résoudre ce problème, une nouvelle méthodologie de conception de la CBP appelée "commande basée sur la passivité avec assignation d'interconnexion et injection d'amortissement" (CBP-AIA) a été développée [Ortega-99a]. L'idée est de stabiliser un point d'équilibre désiré du système en cherchant un système, qui en boucle fermée possède une structure hamiltonienne commandée par port (HCP). Ce dernier est conçu en changeant la nature de l'interconnexion interne ainsi que la fonction hamiltonienne du système. Les conditions pour que ces changements mènent à un système qui puisse être obtenu comme système en boucle fermée du système original, en choisissant une loi appropriée de rétroaction, constituent un nouvel ensemble de conditions assorties (*matching conditions*). En fait, il faut résoudre un ensemble d'EDPs non linéaires afin d'obtenir la structure d'interconnexion et l'hamiltonien de la boucle fermée. Le concept d'énergie utilisé afin de stabiliser le système est la passivité.

La différence principale entre la CBP classique et la CBP-AIA est que la fonction de stockage de la boucle fermée est laissée libre, mais le concepteur impose la structure HCP.

La CBP-AIA et le contrôleur lagrangien sont des commandes par retours d'état qui transforment un système hamiltonien donné (respectivement, EL) en un autre système hamiltonien (respectivement, EL) [Bloch-00]. Une différence essentielle entre ces méthodes est que, tandis que la dynamique cible EL dans le contrôleur lagrangien commandé est obtenue en ne modifiant que la matrice d'inertie généralisée et la fonction de l'énergie potentielle, dans la CBP-AIA on a aussi la possibilité de changer la matrice d'interconnexion. Une comparaison de ces deux approches est exposée dans [Blankenstein-00].

Depuis l'introduction de la CPB-AIA plusieurs extensions théoriques et applications pratiques de cette méthodologie de synthèse de commande ont été développés dans la littérature. Parmi les applications on peut citer: le pendule [Ortega-99b], les moteurs électriques [Petrovic-01], [Batlle-04], la lévitation magnétique [Ortega-01], [Fujimoto-01a] et les convertisseurs de puissance [Becherif-02], [Rodriguez-00]. La CBP-AIA a aussi été appliquée à la structure HCP perturbée dans [Becherif-05], elle a permis de robustifier la commande aux incertitudes paramétriques.

Pour élargir l'ensemble des systèmes qui peuvent être stabilisés par l'intermédiaire de la CBP-AIA, Batlle et al. [Batlle-07] ont suggéré d'effectuer simultanément les étapes de façonnement d'énergie et d'injection d'amortissement et de se référer à cette variation de la méthode par la commande basée sur la passivité avec assignation d'interconnexion et d'amortissement simultanés (CBP-AIAS). Ils ont illustré l'application de la CBP-AIAS avec deux exemples pratiques. Tout d'abord, ils ont montré que le problème fondamental de couple du moteur à induction et la régulation du flux rotorique, ne peut pas être résolu avec les deux étapes de la CBP-AIA. Cependant, le problème peut être résolu avec la CBP-AIAS. Ensuite, ils ont montré qu'avec la CBP-AIAS, on pouvait peut façonner l'énergie totale de la dynamique complète (électrique et mécanique) d'un générateur à induction à double alimentation, tandis qu'avec les deux étapes de la CBP-AIA, seulement l'énergie électrique pourrait être façonnée, comme indiqué dans [Batlle-04].

La méthode CBP-AIA, a été appliquée avec succès aux systèmes mécaniques. Dans [Astolfi-02a], elle a servi à la stabilisation de l'équilibre d'un véhicule sous-marin et dans [Astolfi-02b] à l'orientation d'un satellite. Cette méthode a été étendue à une classe de systèmes mécaniques sous-actionnés sous contraintes cinématiques dans [Blankenstein-02]. Dans [Gómez-Estern-04], la technique CBP-AIA pour la commande des systèmes mécaniques sous-actionnés, a été étendue pour intégrer un phénomène important qui a été négligé dans les études précédentes à savoir l'amortissement en boucle ouverte. Les auteurs ont donné une condition nécessaire et suffisante pour que la passivité soit maintenue (et donc la stabilité) dans de tels cas. Dans [Dirksz-08], les auteurs ont montré qu'il est possible de façonner l'énergie totale d'un système mécanique et de le stabiliser asymptotiquement par la CBP-AIA sans avoir à mesurer les vitesses. Pour les applications, cela est intéressant, car cela signifie que les capteurs de vitesse ne sont pas nécessaires. Dans [Sandoval-10], les auteurs ont présenté une extension de la méthodologie CBP-AIA pour commander une classe de systèmes mécaniques sous actionnés avec frottement. Les auteurs ont effectué quelques expériences pour comparer les performances de la CBP-AIA sur un pendule Furuta, lorsque les frottements sont pris en compte et quand ils sont négligés. Le problème de stabilisation d'un nouveau type de grue, le 2D-Spider Crane, est considéré dans [Sarras-10b], et il est résolu par la technique CBP-AIA en assurant la stabilité asymptotique presque globale du point d'équilibre désiré en boucle fermée. La CBP-AIA pour les systèmes mécaniques sous actionnés avec un frottement dynamique non linéaire a été présentée dans [Cornejo-07].

Le succès de la CBP-AIA réside dans la résolution de l'équation correspondante ou assortie (*matching equation*) qui est une EDP. Beaucoup d'efforts de recherche ont été consacrés à la résolution de cette dernière. Dans [Bloch-00], les auteurs ont donné une série de conditions sur le système et les matrices d'inertie assignables telles que les EDPs peuvent être résolues. Également, des techniques pour résoudre ces équations ont été rapportées dans [Auckly-00], [Blankenstein-02] Certains aspects géométriques de ces équations ont été étudiés dans [Lewis-04]. Le cas des systèmes sous actionnés avec une sous action de degré un a été étudié en détail dans [Auckly-02] et [Acosta-05]. Dans ce dernier, une simplification majeure de la méthode CBP-AIA telle qu'elle est appliquée à la stabilisation des systèmes mécaniques sous-actionnés a été effectuée, où une paramétrisation adaptée de la fonction d'énergie a été proposée. La contribution principale de [Acosta-05] est la caractérisation d'une classe de systèmes pour laquelle la méthode CBP-AIA conduit à une commande qui stabilise asymptotiquement un point d'équilibre désiré et avec un domaine d'attraction garanti. Cette classe est décrite en termes de possibilité de résolution des EDPs. Le cas de la sous-action de degré un a été considéré. Leurs nouveaux résultats ont été appliqués pour obtenir un schéma de commande qui stabilise (presque) globalement un modèle d'avion à décollage et atterrissage vertical, et le système pendule inversé. La CBP-AIA est capable de remonter le pendule à partir de n'importe quelle position dans le demi-plan supérieur et de stopper le chariot à une position quelconque désirée.

À noter aussi, qu'une solution constructive pour le cas de sous-actionnement de degré un a été présentée dans [Viola-07a]. L'attention des auteurs est portée sur l'EDP associée à l'énergie cinétique qui est non linéaire non homogène et dont la solution, qui est définie par la matrice d'inertie désirée doit être positive définie comme indiqué dans [Acosta-05]. Les auteurs ont étudié la possibilité d'éliminer (ou de simplifier) le terme de forçage dans cette EDP. Leur contribution principale est de prouver qu'il est possible d'atteindre cet objectif par la reparamétrisation de la dynamique cible et en introduisant un changement de coordonnées dans le système original. Avec ce changement de coordonnées on obtient une autre EDP homogène (semblable à l'EDP associée à l'énergie cinétique) mais cette fois-ci, sans l'exigence de la positivité de la matrice d'inertie désirée. La technique proposée a été appliquée avec succès au pendule inversé et le pendule de Furuta.

III.3 Méthodologie de la CBP-AIA

La CBP-AIA a été introduite dans [Ortega-99a], [Ortega-02b] comme une procédure de commande des systèmes physiques décrits par les modèles HCP de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = \left[J(x) - R(x)\right]\nabla_x H(x) + \mathrm{g}(x)u \\ y = \mathrm{g}^T \nabla_x H(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

où $x \in \Re^n$ est le vecteur d'état, $u \in \Re^{\mathrm{m}}, (\mathrm{m} < n)$ est la commande, $H : \Re^n \to \Re$ est l'énergie totale emmagasinée, $J(x) = -J^T(x)$, $R(x) = R^T(x) \geq 0$, sont les matrices d'interconnexion et d'amortissement naturel, respectivement. $u, y \in \Re^{\mathrm{m}}$, sont des variables conjuguées dont le produit a l'unité d'une puissance .

Dans l'approche CBP-AIA, le fait d'écrire le système initial (en boucle ouverte) sous la forme (3.1) permet d'identifier des propriétés physiques importantes. Néanmoins, dans certaines applications d'ingénierie, les modèles HCP sont trop complexes pour la conception de la commande, une étape de réduction est généralement nécessaire. Ces réductions peuvent détruire la structure HCP, d'où l'intérêt d'étendre la CBP-AIA à une classe plus générale des systèmes, comme décrit dans la proposition suivante.

Proposition 3.1 [Ortega-04] *Considérons le système*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{3.2}$$

Supposons qu'il existe des matrices $g^{\perp}(x),\ J_d(x) = -J_d^T(x),\ R_d(x) = R_d^T(x) \geq 0,$ *et une fonction* $H_d(x) : \Re^n \to \Re$*, qui vérifient l'EDP suivante*

$$g^{\perp}(x) f(x) = g^{\perp}(x)\left[J_d(x) - R_d(x)\right]\nabla_x H_d(x) \tag{3.3}$$

où $g^{\perp}(x)$ *de rang plein, est l'annulateur à gauche de* $g(x)$ (c.à.d. $g^{\perp}(x)g(x) = 0$) *et* $H_d(x)$ *est tel que*

$$x^* = \arg\min H_d(x) \tag{3.4}$$

avec $x^* \in \Re^n$ *est le point d'équilibre à stabiliser. Alors, le système (3.2) en boucle fermée avec la commande* $u = \beta(x)$ *où*

$$\beta(x) = \left[g^T(x)g(x)\right]^{-1} g^T(x)\left\{\left[J_d(x) - R_d(x)\right]\nabla_x H_d(x) - f(x)\right\} \tag{3.5}$$

est un système hamiltonien commandé par port.

$$\dot{x} = \left[J_d(x) - R_d(x)\right]\nabla_x H_d(x) \tag{3.6}$$

avec x^* *un équilibre (localement) stable. Il sera asymptotiquement stable si, en outre,* x^* *est un minimum isolé de* $H_d(x)$*. Le plus grand ensemble invariant du système en boucle fermée (3.6) contenue dans* $\left\{x \in \Re^n / \left[\nabla_x H_d(x)\right]^T R_d(x)\left[\nabla_x H_d(x)\right] = 0\right\}$ *est égale à* $\left\{x^*\right\}$*. Par ailleurs, une estimation de son domaine d'attraction est donnée par le plus grand ensemble* $\left\{x \in \Re^n / H_d(x) \leq c\right\}$.

D'après la proposition 3.1, l'étape clé dans la conception de la CBP-AIA est la résolution de l'équation (3.3). On note que dans cette équation $J_d(x)$ et $R_d(x)$ sont libres, avec les contraintes d'antisymétrie pour J_d et de positivité semi définie pour R_d .L'énergie $H_d(x)$ peut être totalement ou partiellement fixée, à condition que (3.4) soit vérifiée. $g^{\perp}(x)$ est un degré de liberté supplémentaire qui n'est pas uniquement défini par $g(x)$. Comme indiqué dans [Acosta-05], ce degré de liberté peut être utilisé pour linéariser une EDP non linéaire qui apparaît dans les systèmes mécaniques.

On désire trouver la commande u qui permet d'écrire le système non linéaire affine en la commande (3.2) sous la forme HCP (3.6). Il est claire que (3.6) dispose de deux inconnus: les matrices désirées $J_d(x)$ et $R_d(x)$ qui ont les propriétés décrites dans la proposition 3.1 et la fonction d'énergie désirée H_d qui intervient dans (3.6) par le biais de son gradient. Ainsi, trois approches existent, traitées en détail dans [Ortega-04]:

1) *AIA non paramétrique:* adoptée dans [Ortega-02b]. On fixe J_d et R_d ainsi que $g^{\perp}$. On obtient alors une EDP dont l'inconnu est la fonction d'énergie désirée H_d, qui est soumise à la contrainte (3.4).
2) *AIA algébrique:* initialement proposée par [Fujimoto-01b]. On fixe la fonction d'énergie désirée H_d (par exemple une fonction d'erreurs quadratique) par conséquent ∇H_d. L'équation (3.3) devient une équation algébrique de J_d, R_d et $g^{\perp}$.
3) *AIA paramétrique:* applicable principalement aux systèmes mécaniques sous-actionnés [Ortega-02a]. Pour certains types de systèmes, il est préférable de restreindre la fonction de stockage d'énergie H_d à une certaine classe de fonctions. Par exemple, pour un système mécanique, c'est la somme de l'énergie potentielle qui ne dépend que des positions généralisées et de l'énergie cinétique qui a une forme quadratique en moments généralisés. En donnant une structure à H_d, on obtient alors une nouvelle EDP qui fournira des contraintes sur les matrices J_d et R_d.

Il n'y a pas une meilleure méthode pour résoudre l'équation (3.3). Chaque problème de commande nécessite une étude individuelle pour savoir laquelle des stratégies ci-dessus fournit une solution acceptable à l'équation correspondante.

Afin de clarifier la méthodologie de la CBP-AIA paramétrique, on présente l'exemple du moteur à courant continu de la figure 3.1.

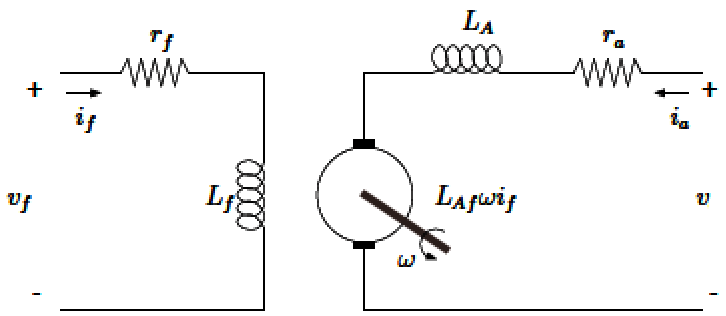


Figure 3.1: Moteur à courant continu

Les équations de moteur à courant continu sont :

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_f &= -r_f i_f + v_f \\
\dot{\lambda}_a &= -L_{Af} i_f \omega - r_a i_a + v \\
\dot{w} &= \frac{L_{Af} i_f i_a}{J_m} - \frac{B_r \omega}{J_m} - \frac{\tau_e}{J_m}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

v et v_f sont les tensions aux bornes de l'induit et l'inducteur respectivement. r_f et L_f sont respectivement la résistance et l'inductance de l'inducteur. r_a et L_A sont respectivement la résistance et l'inductance de l'induit. On suppose que l'inductance mutuelle est négligée. ω est la vitesse du rotor du moteur. τ_e est le couple mécanique. $\left(L_{Af} i_f \omega\right)$ est la tension induite. i_a est le courant traversant le circuit d'induit. B_r est le coefficient de frottement visqueux. J_m est l'inertie.

Les équations (3.7) avec les variables d'états $\lambda_f = L_f i_f$ (flux du champ), $\lambda_a = L_A\, i_a$ (le flux induit) et $p_m = J_m \omega$ (moment angulaire mécanique du rotor) devient:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_f &= -r_f i_f + v_f \\
\dot{\lambda}_a &= -L_{Af} i_f \omega - r_a i_a + v \\
\dot{p}_m &= L_{Af} i_f i_a - B_r \omega - \tau_e
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Les équations (3.8) peuvent être données sous forme HCP, avec les variables hamiltoniennes $x = \left[\lambda_f, \lambda_a, p_m\right]^T$ et la fonction hamiltonienne

$$H(x) = \frac{1}{2}\lambda^T L^{-1} \lambda + \frac{1}{2J_m} p_m^2 \tag{3.9}$$

où
$$L = \begin{bmatrix} L_f & 0 \\ 0 & L_A \end{bmatrix}, \quad \lambda = \left[\lambda_f, \lambda_a\right]^T \tag{3.10}$$

Les matrices d'interconnexion et d'amortissement sont :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_{Af} i_f \\ 0 & L_{Af} i_f & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_f & 0 & 0 \\ 0 & r_a & 0 \\ 0 & 0 & B_r \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

et la matrice de port est $\mathrm{g} = I_3$, avec les entrées $u = \left[v_f, v, \tau_e\right]^T$.

Dans ce qui suit, on néglige le flux λ_f et on pose $\mathrm{K} = L_{Af} i_f = C^{te}$. Le système HCP est décrit par :

$$\dot{x} = (J - R)\frac{\partial H(x)}{\partial x} + \mathrm{g} + \mathrm{g}_u\, u \tag{3.12}$$

avec $x \in \Re^2$, $x = [\lambda, p_m]^T$, et $\lambda = \lambda_a$

Les matrices, d'interconnexion, d'amortissement et de port sont :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -K \\ K & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & B_r \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_e \end{bmatrix}, \quad g_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

avec l'entrée de commande $u = v$ et $r_a = r$. Il est à noter que les entrées du système ont été divisées selon qu'elles puissent être contrôlées ou non lorsque la machine fonctionne en moteur. Dans ce cas, le couple mécanique peut être vu comme une perturbation externe. r_a et B_r représentent respectivement les pertes électrique et mécanique. La fonction hamiltonienne est donnée par

$$H(x) = \frac{1}{2J_m} p_m^2 + \frac{1}{2L}\lambda^2 \tag{3.14}$$

L'objectif de commande est de maintenir le moteur à la vitesse désirée ω^d . En termes de ω^d , les valeurs d'équilibre de i et v sont

$$\begin{aligned} i^* &= \frac{1}{K}(B_r\omega^d + \tau_e) \\ u^* &= ri^* + K\omega^d \end{aligned} \tag{3.15}$$

Pour appliquer la technique CBP-AIA en suivant l'approche algébrique, une fonction hamiltonienne désirée H_d est choisie comme suit

$$H_d(x) = \frac{1}{2L}(\lambda - \lambda^*)^2 + \frac{1}{2J_m}(p_m - p_m^*)^2 \tag{3.16}$$

ce qui implique (avec les relations, $\lambda = Li$ et $p_m = J_m\omega$)

$$\partial H_d(x) = \begin{bmatrix} i - i^* \\ \omega - \omega^d \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

Afin de résoudre l'équation correspondante (3.3), J_d et R_d sont pris comme suit

$$J_d - R_d = \begin{bmatrix} -r_d & -j_d \\ j_d & -b_d \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

où r_d, j_d et b_d sont à déterminer.

La première ligne de l'équation correspondante donnera la commande, tandis que la deuxième ligne impose

$$j_d(i - i^*) - b_d(\omega - \omega^d) = Ki - B_r\omega - \tau_e \tag{3.19}$$

En posant $b_d = B_r$ et en utilisant l'expression du point d'équilibre (3.15), on obtiendra $j_d = K$.

Le paramètre r_d est un paramètre de réglage libre. Enfin, en substituant $j_d = K$ dans la première ligne de l'équation correspondante, on aura la commande suivante :

$$u = -r_d(i - i^*) + ri + \mathrm{K}\omega^d \tag{3.20}$$

On remarque que (3.21) est un contrôleur proportionnel plus une constante de compensation.

Les figures 3.2 et 3.3, montrent le comportement du système avec la loi de commande (3.21). Les paramètres du moteur sont $r = 0.05\ \Omega$; $L = 2$ mH ; $\mathrm{K} = 0.07$ N.m.A^{-1} ; $B_r = 0.0001$ N.m.rad^{-1}s^{-1}; $J_m = 0.0006$ Kg.m^2 et le couple nominal est $\tau_e = 2$N.m . La vitesse mécanique désirée est fixée à $\omega^d = 250$ rad.s^{-1} pour $0\ \mathrm{s} < t \leq 0.5\mathrm{s}$, et à $\omega^d = 300$ rad.s^{-1} pour $0.5\mathrm{s} < t \leq 1\mathrm{s}$.

La figure 3.2 montre la vitesse mécanique pour différentes valeurs d'amortissement r_d.

Il est à noter que pour une valeur plus élevée de r_d, le transitoire devient plus amortie, ce qui donne une interprétation physique de la matrice R_d de (3.18) . La figure 3.3 montre le courant inducteur i, avec un comportement similaire à celui de ω.

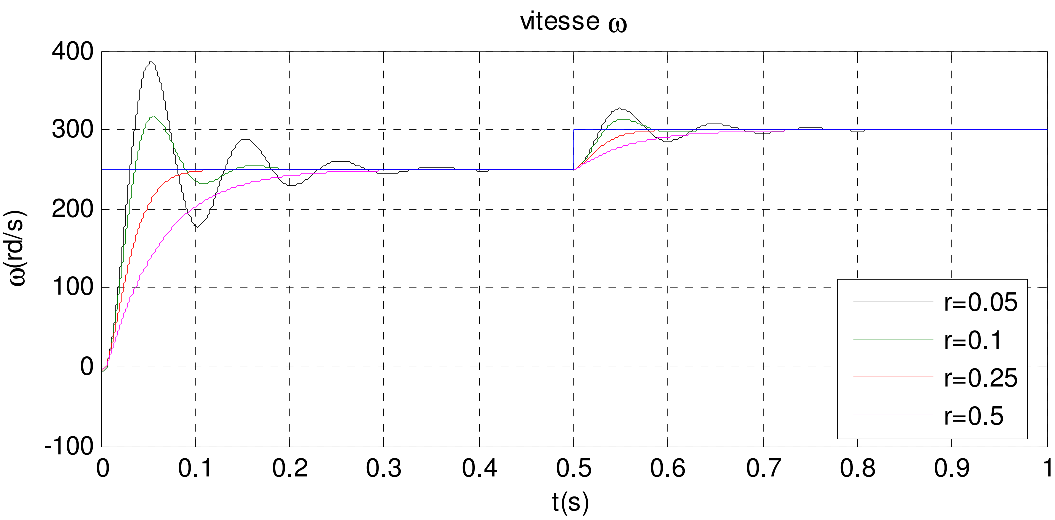


Figure 3.2 : Vitesse mécanique (ω) pour différentes valeurs de r_d

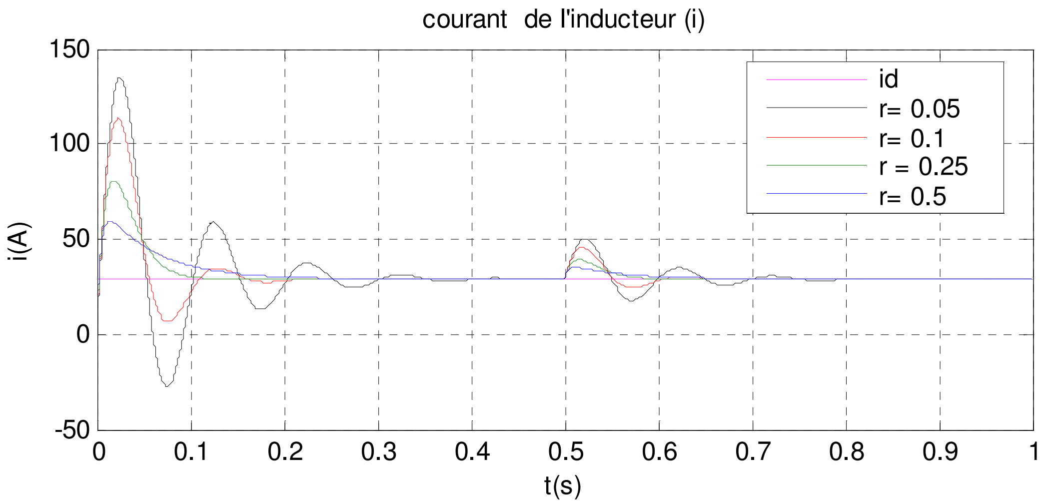


Figure 3.3 : Courant de l'inducteur pour différentes valeurs de r_d

Lors de la conception de la CBP-AIA, il est naturel de diviser l'action de la commande en deux types d'entrées de commande. L'une est u_{es} pour façonner l'énergie totale, et l'autre, est u_{di} pour injecter l'amortissement afin de garantir la stabilité asymptotique. D'où:

$$u = u_{es} + u_{di} \tag{3.21}$$

En fixant la matrice $R_d(x) = g(x)K_v\, g^T(x)$ avec $K_v > 0$, l'EDP (3.3) devient

$$g^{\perp}(x)f(x) = g^{\perp}(x)J_d(x)\nabla_x H_d(x) \tag{3.22}$$

on a

$$\begin{aligned} u_{es}(x) &= \left[g^T(x)g(x)\right]^{-1} g^T(x)\left[J_d(x)\nabla_x H_d(x) - f(x)\right] \\ u_{di}(x) &= -K_v\, g^T(x)\nabla_x H_d(x) \end{aligned} \tag{3.23}$$

III.4 CBP-AIA pour les systèmes mécaniques sous actionnés

Rappelons (chapitre II) que le modèle HCP d'un système mécanique sous actionné, sans dissipation naturelle (sans frottements) est décrit par

$$\Sigma : \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} u \tag{3.24}$$

où $p = M\dot{q} \in \Re^n$ est la quantité de mouvement généralisée, $u \in \Re^m$ est l'entrée et $G \in \Re^{n\times m}$ avec $rang(G) = m < n$.

L'énergie totale du système en boucle ouverte est donnée par

$$H(q,p) = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + V(q) \tag{3.25}$$

III.4.1 Stabilisation des systèmes mécaniques sous-actionnés

Dans cette section, on applique l'approche AIA paramétrique pour la commande de la position des systèmes mécaniques sous-actionnés. Pour cela, on suit les deux étapes de base de la CBP-AIA déjà citées, à savoir, le façonnement de l'énergie totale pour atteindre l'équilibre désiré $(q^*, 0)$ et l'ajout de l'amortissement pour assurer la stabilité asymptotique. Afin de préserver l'interprétation énergétique du mécanisme de stabilisation, on impose que le système en boucle fermée soit HCP. Motivé par (3.25), la forme de la fonction d'énergie désirée est

$$H_d(q,p) = \frac{1}{2} p^T M_d^{-1}(q) p + V_d(q) \tag{3.26}$$

où $M_d = M_d^T > 0$ et V_d représentent la matrice d'inertie et l'énergie potentielle désirées en boucle fermée, respectivement. On exige que V_d ait un minimum isolé à q^*, alors

$$q^* = \arg\min V_d(q) \tag{3.27}$$

Comme déjà mentionné, l'entrée de commande est naturellement décomposée en deux termes:

$$u = u_{es}(q,p) + u_{di}(q,p) \tag{3.28}$$

Elle transforme le système HCP en boucle ouverte de l'équation (3.24) en un système HCP en boucle fermée de la forme:

$$\Sigma_d : \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \left[J_d(q,p) - R_d(q,p) \right] \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

avec $J_d = -J_d^T = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}M_d \\ -M_d M^{-1} & J_2(q,p) \end{bmatrix}$ et $R_d = R_d^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & GK_vG^T \end{bmatrix} \geq 0$ les nouvelles matrices d'interconnexion et d'amortissement désirées, respectivement.

La matrice J_2 est donnée comme suit [Ortega-02a], [Blankenstein-02] :

$$J_2 = M_d M^{-1} \left(\left[\nabla_q (M M_d^{-1} p) \right]^T - \nabla_q (M M_d^{-1} p) \right) M^{-1} M_d \tag{3.30}$$

Une autre forme de J_2 est [Ortega-02a] :

$$(J_2)_{(i,j)} = -p^T M_d^{-1} M \left[\left(M^{-1} M_d \right)_{(.\,,\,i)}, \left(M^{-1} M_d \right)_{(.\,,\,j)} \right] \tag{3.31}$$

où $[.\,,\,.]$ est le crochet de Lie et $(.)_{(i,j)}$ désigne le terme (i, j) d'une matrice.

Les observations suivantes peuvent être portées :

- De l'équation (3.24) et (3.25) on a $\dot{q} = M^{-1}p$. Cette relation est maintenue en boucle fermée puisque $\dot{q}$ n'est pas actionnée.
- La matrice R_d est introduite pour ajouter de l'amortissement au système. Ceci est réalisé par l'intermédiaire d'un retour négatif de la nouvelle sortie passive, qui dans ce cas est $G^T \nabla_p H_d$. Par conséquent, on sélectionne le second terme de (3.28) comme suit

$$u_{di} = -K_v G^T \nabla_p H_d \tag{3.32}$$

  avec K_v une matrice symétrique positive définie.
- La matrice antisymétrique J_2 (et quelques-uns des éléments de M_d) peuvent être utilisés comme paramètres libres afin de réaliser le façonnement de l'énergie cinétique. Fournir ces degrés de liberté est l'essence de la CBP-AIA.

Pour obtenir le terme u_{es} du contrôleur, on remplace (3.28) et (3.32) dans (3.24) et on le fait correspondre à (3.29)

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} u_{es} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}M_d \\ -M_d M^{-1} & J_2(q,p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

La première ligne des équations ci-dessus est clairement satisfaite, la seconde équation peut être exprimée comme suit :

$$G u_{es} = \nabla_q H - M_d M^{-1} \nabla_q H_d + J_2 M_d^{-1} p \tag{3.34}$$

L'équation (3.34) est transformée en

$$G^{\perp} \left\{ \nabla_q H - M_d M^{-1} \nabla_q H_d + J_2 M_d^{-1} p \right\} = 0 \tag{3.35}$$

où $G^{\perp} \in \Re^{m \times n}$ est l'annulateur à gauche de G et $rang(G^{\perp}) = n - m$.

L'équation (3.35), avec H_d donné par (3.26), est une EDP non linéaire, non homogène, avec les inconnus M_d et V_d, et le paramètre libre J_2. Si on détermine la solution de cette EDP, la loi de commande u_{es} qui en résulte sera donnée comme suit :

$$u_{es} = (G^T G)^{-1} G^T (\nabla_q H - M_d M^{-1} \nabla_q H_d + J_2 M_d^{-1} p) \tag{3.36}$$

L'EDP (3.35) peut être séparée en termes qui dépendent de p et en termes qui sont indépendants de p, c.à.d., ceux correspondant aux énergies cinétique et potentielle, respectivement. Ainsi, l'équation (3.35) peut être écrite d'une manière équivalente comme suit :

$$G^{\perp} \left\{ \nabla_q (p^T M^{-1} p) - M_d M^{-1} \nabla_q (p^T M_d^{-1} p) + 2 J_2 M_d^{-1} p \right\} = 0 \tag{3.37}$$

$$G^{\perp}\left\{\nabla_q V - M_d M^{-1}\nabla_q V_d\right\} = 0 \tag{3.38}$$

La formulation de l'approche CBP-AIA pour le cas des systèmes mécaniques sous-actionnés modélisés par HCP est récapitulée dans la prochaine proposition.

Proposition 3.2 [Acosta-05] *Supposons qu'il existe* $M_d(q) = M_d^T(q) > 0 \in \Re^{n\times n}$ *et une fonction* $V_d(q)$ *qui satisfont les EDPs (3.36) et (3.37) suivantes*

$$G^{\perp}\left\{\nabla_q(p^T M^{-1} p) - M_d M^{-1}\nabla_q(p^T M_d^{-1} p) + 2J_2 M_d^{-1} p\right\} = 0$$

$$G^{\perp}\left\{\nabla_q V - M_d M^{-1}\nabla_q V_d\right\} = 0$$

pour $J_2(q,p) = -J_2^T(q,p) \in \Re^{n\times n}$, *un annulateur à gauche* $G^{\perp}(q) \in \Re^{(n-m)\times n}$ *de* G *et* $rang(G^{\perp}) = n - m$, *alors, le système en boucle fermée (3.24) avec la CBP-AIA:*

$$u = (G^T G)^{-1} G^T(\nabla_q H - M_d M^{-1}\nabla_q H_d + J_2 M_d^{-1} p) - K_v G^T \nabla_p H_d \tag{3.39}$$

où $K_v = K_v^T > 0$, *prend la forme hamiltonienne*

$$\begin{bmatrix}\dot{q}\\ \dot{p}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & M^{-1}M_d\\ -M_d M^{-1} & J_2 - G K_v G^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nabla_q H_d\\ \nabla_p H_d\end{bmatrix} \tag{3.40}$$

où la nouvelle fonction d'énergie totale est $H_d(q,p) = \dfrac{1}{2} p^T M_d^{-1}(q) p + V_d(q)$.

En outre, si M_d *est positive définie au voisinage de* q^* *et* $q^* = \arg\min V_d(q)$, *alors* $(q^*, 0)$ *est un point d'équilibre stable de (3.40) avec* H_d *est la fonction de Lyapunov. Cet équilibre est asymptotiquement stable s'il est localement détectable pour la sortie* $\left(G^T(q) M_d^{-1}(q) p\right)$.

Une estimation du domaine d'attraction est donnée par $\Omega_{\bar{c}}$ *où* $\Omega_c = \left\{(q,p) \in \Re^{2n} / H_d(q,p) < c\right\}$ *et* $\bar{c}$ *correspond à le plus grand sous ensemble borné de* H_d

$$\bar{c} = \sup\left\{c > H_d(q^*, 0) / \Omega_c \text{ est bornée}\right\} \tag{3.41}$$

III.4.2 Méthodes de résolution des EDPs assorties

L'équation (3.37) est une EDP non-linéaire et non homogène, qui doit être résolue pour les éléments inconnus de la matrice d'inertie M_d en boucle fermée. En donnant M_d, l'équation (3.38) est une simple EDP linéaire. La difficulté principale réside dans la résolution de l'équation (3.37). Beaucoup d'efforts de recherche ont été consacrés à la résolution de ces équations. Dans ce qui suit, on développera les deux méthodes les plus citées, à savoir la méthode non constructive proposée par Ortega et al. [Ortega-02a] et la méthode constructive proposée par Acosta et al. [Acosta-05] et modifiée par Viola et al. [Viola-07a].

III.4.2.1 Méthode non constructive pour la résolution des EDPs

Dans cette section, on présente la méthode proposée dans [Ortega-02a] pour simplifier les EDPs pour une classe de systèmes. Pour cela, Il y a deux hypothèses à vérifier.

Hypothèse 1: $m = n-1$. Sous cette condition (c.à.d. le système est sous actionné, avec un sous actionnement de degré un), on a

$$G^{\perp} = e_k^T \tag{3.42}$$

où k est un nombre entier qui représente l'indice de la coordonnée sous-actionnée et e_k est un vecteur où tous les éléments sont nuls excepté le $k^{ième}$ élément, qui est égal à 1.

Hypothèse2: M et M_d ne dépendent que de la coordonnée sous-actionnée.

Sous ces hypothèses, l'EDP (3.37) peut être simplifiée à une EDO comme suit [Ortega-02a]:

$$\frac{d}{dq_k}(M_d)_{(.\,,k)} = -\frac{1}{\left(M_d M^{-1}\right)_{(k\,,k)}}\left\{M_d\left(\frac{d}{dq_k}M^{-1}\right)M_d\right\}_{(.\,,k)} \tag{3.43}$$

Cette EDO est définie si $\left(M_d M^{-1}\right)_{(k\,,k)} \neq 0$.

Pour illustrer les différents calculs, on appliquera la méthode non constructive pour la résolution des EDPs sur trois exemples à savoir les systèmes bille sur rail, pendule à roue inertielle et grue portique.

III.4.2.1.1 Stabilisation du système bille sur rail

Soit le système bille sur rail de la figure 2.7 (chapitre II). Le système est composé d'une barre pouvant pivoter dans le plan vertical par l'application d'un couple u au point de rotation (le centre), et d'une bille dont on restreindra le mouvement à un glissement sans frottement le long de la barre.

Le comportement dynamique du système est décrit par les équations EL suivantes [Ortega-02a]:

$$\begin{aligned} &\ddot{q}_1 + g\sin(q_2) - q_1\dot{q}_2^2 = 0 \\ &(L^2+q_1^2)\ddot{q}_2 + 2q_1\dot{q}_1\dot{q}_2 + gq_1\cos(q_2) = u \end{aligned} \tag{3.44}$$

où q_1 et q_2 sont respectivement la position de la bille et l'angle de la barre. L est la longueur de la barre.

Puisque on s'intéresse à ce que la bille reste sur la barre, donc L apparaît explicitement dans le modèle. Ceci est possible car L^2 est un facteur du moment d'inertie de la barre.

Le modèle hamiltonien est obtenu en définissant les matrices :

$$M(q_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L^2+q_1^2 \end{bmatrix};\; G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

et la fonction d'énergie potentielle

$$V(q) = gq_1 \sin(q_2) \tag{3.46}$$

L'objectif de commande est d'une part de stabiliser la tige à la position horizontale $(q_2^* = 0)$ et d'autre part de stabiliser la bille au centre de la tige $(q_1^* = 0)$, par la seule commande disponible u appliquée au point de rotation de la barre.

a. Conception de la commande

La conception de la CBP-AIA se fait en trois étapes à savoir, le façonnement de l'énergie cinétique, le façonnement de l'énergie potentielle et l'analyse de la stabilité asymptotique.

a.1 Façonnement de l'énergie cinétique

Tout d'abord, on note que M est en fonction de q_1 seulement, il est donc raisonnable de prendre M_d fonction de q_1 aussi :

$$M_d(q_1) = \begin{bmatrix} a_1(q_1) & a_2(q_1) \\ a_2(q_1) & a_3(q_1) \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

Les coefficients $a_1, a_2,$ et a_3 (à définir) sont en fonction de q_1 aussi. Ils vérifient les inégalités $a_1 > 0$ et $a_1 a_3 - a_2^2 > 0$. Ces dernières sont imposées pour assurer que $M_d > 0$.

J_2 est pris comme suit :

$$J_2(q,p) = \begin{bmatrix} 0 & j(q,p) \\ -j(q,p) & 0 \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

avec la fonction j à définir aussi.

On applique la formule (3.43), avec $G^{\perp} = [1 \quad 0]$, pour obtenir l'EDO pour M_d. Cela mène au système d'EDO suivant :

$$\frac{d}{dq_1} a_1(q_1) = \frac{2q_1}{(L^2 + q_1^2)^2} \frac{a_2^2}{a_1} \tag{3.49}$$

$$\frac{d}{dq_1} a_2(q_1) = \frac{2q_1}{(L^2 + q_1^2)^2} \frac{a_2 a_3}{a_1} \tag{3.50}$$

qui doit être résolu pour a_1, a_2 et en considérant a_3 comme un paramètre libre.

Pour obtenir deux équations à deux inconnus, a_3 est pris égale à $a_1 a_2$ $(a_3 = a_1 a_2)$, donc les solutions explicites des EDO (3.49) et (3.50) sont:

$$a_1 = \sqrt{2(K + q_1^2)} \quad ; \qquad a_2 = L^2 + q_1^2 \tag{3.51}$$

avec K une constante libre qui doit être choisie de telle sorte que M_d soit positive définie. Il est clair que $a_1 > 0$ pour tout $K > 0$, de plus le déterminant de M_d est :

$$a_1 a_3 - a_2^2 = (L^2 + q_1^2)(q_1^2 + 2K - L^2) \tag{3.52}$$

qui est positif pour tout $K > \frac{L^2}{2}$. Par souci de simplicité, K est pris égale à L^2, $(K = L^2)$ dans la suite. La matrice M_d résultant est alors :

$$M_d = (L^2 + q_1^2)\begin{bmatrix} \sqrt{2}(L^2 + q_1^2)^{-1/2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2(L^2 + q_1^2)} \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

Le façonnement de l'énergie cinétique est complété, en évaluant j à partir de (3.37) et de M_d calculée ci-dessus

$$j = q_1\left[p_1 - \sqrt{2}(L^2 + q_1^2)^{-1/2} p_2 \right] \tag{3.54}$$

a.2 Façonnement de l'énergie potentielle

Une fois les matrices M_d et J_d sont déterminées, on définit l'énergie potentielle désirée en boucle fermée en résolvant (3.38), qui dans ce cas est exprimée comme suit :

$$a_1(q_1)\frac{\partial V_d}{\partial q_1}(q) + \frac{a_2(q_1)}{L^2 + q_1^2}\frac{\partial V_d}{\partial q_2}(q) = g\sin(q_2) \tag{3.55}$$

En substituant les expressions de a_1 et a_2 dans (3.55), on obtient

$$\sqrt{2(L^2 + q_1^2)}\frac{\partial V_d}{\partial q_1} + \frac{\partial V_d}{\partial q_2} = g\sin(q_2) \tag{3.56}$$

La solution de cette EDP est donnée dans [Ortega-02a] (en utilisant le langage symbolique de Maple) comme suit

$$V_d(q) = -g\cos(q_2) + \Phi\big(z(q)\big) \tag{3.57}$$

où

$$z(q) = q_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsinh}\big(q_1/L\big) \tag{3.58}$$

avec Φ une fonction différentiable arbitraire de z. Cette fonction doit être choisie telle que la condition de stabilité (3.27) soit satisfaite avec $q^* = 0$. Ceci est vérifié si la condition nécessaire $\nabla_q V_d(0) = 0$ est satisfaite et la condition suffisante $\nabla_q^2 V_d(0) > 0$ est vérifiée. On prend $\Phi\big(z(q)\big) = \frac{k_p}{2} z^2$, avec $k_p > 0$, [Ortega-02a].

L'énergie potentielle désirée prend la forme finale :

$$V_d = g\left[1-\cos(q_2)\right]+\frac{k_p}{2}\left[q_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin h\left(\frac{q_1}{L}\right)\right]^2 \tag{3.59}$$

a.3 Analyse de la stabilité asymptotique

Pour calculer la loi de commande finale, on détermine d'abord le terme u_{es} de (3.36), qui dans ce cas prend la forme :

$$u_{es} = \nabla_{q_2}H-(M_dM^{-1})_{(2,1)}\nabla_{q_1}H_d-(M_dM^{-1})_{(2,2)}\nabla_{q_2}H_d+(J_2M_d^{-1})_{(2,1)}p_1+(J_2M_d^{-1})_{(2,2)}p_2 \tag{3.60}$$

En remplaçant M_d et j dans l'expression u_{es} ci-dessus, et après calcul, on obtient l'expression :

$$u_{es} = \frac{q_1}{\sqrt{2}(L^2+q_1^2)}\left[-\sqrt{L^2+q_1^2}\,p_1^2+\sqrt{2}p_1p_2+\frac{1}{\sqrt{L^2+q_1^2}}p_2^2\right]+\xi(q) \tag{3.61}$$

où

$$\xi(q) = gq_1\cos q_2 - g\sqrt{2(L^2+q_1^2)}\sin q_2 - k_p\sqrt{\frac{L^2+q_1^2}{2}}\left(q_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{q_1}{L}\right)\right) \tag{3.62}$$

La conception de la commande est complétée avec le terme u_{di} de (3.32), ce qui donne

$$u_{di} = \frac{k_v}{(L^2+q_1^2)}\left(p_1-\sqrt{\frac{2}{L^2+q_1^2}}p_2\right) \tag{3.63}$$

La commande $u=u_{es}+u_{di}$, c.à.d.,(3.61) plus (3.63), rend l'origine du système bille sur rail (3.44) asymptotiquement stable en boucle fermée, avec un domaine d'attraction $\Omega_{\bar{c}} = \left\{(q,p)\in\Re^4 / H_d(q,p)<\bar{c}\right\}$, où H_d de la forme (3.26) est une fonction de Lyapunov, sachant que M_d est donnée par (3.53), V_d et $\bar{c}$ sont définis par (3.59) et (3.41) respectivement.

Dans [Ortega-02a], les auteurs ont étudié l'effet de réglage du paramètre k_p sur la taille du domaine d'attraction, et ils ont quantifié explicitement un ensemble de conditions initiales telles que la bille reste en permanence sur la barre, c.à.d. $|q_1(t)|\le L$ pour tout $t\ge 0$. Leur résultat est résumé dans la proposition ci-dessous.

Proposition 3.3 [Ortega-02a] C*onsidérons le modèle de bille sur rail (3.44) en boucle fermée avec le retour d'état statique CBP-AIA,* $u=u_{es}+u_{di}$ *et* $k_v>0$.

i. *On peut calculer une constante* $k_p^M > 0$, *fonction des conditions initiales* $\left(q(0), p(0)\right)$, *de telle sorte que pour tous* $k_p \le k_p^M$, *l'ensemble* $\left\{(q,p)/\frac{1}{2}p^T M_d^{-1}(q)p + g(1-\cos q_2) < 2g\right\}$ *est une estimation du domaine d'attraction de l'équilibre zéro. En particulier, toutes les trajectoires avec une vitesse initiale nulle, et* $q_2(0) \in (-\pi, \pi)$ *convergeront asymptotiquement vers l'origine.*

ii. *En Fixant* $k_p \le k_p^M$ *et en supposant que* $|q_1(0)| \le L$, *alors*

$$\left\{(q,p)/\frac{1}{2}p^T M_d^{-1}(q)p + g(1-\cos q_2)\frac{k_p}{2}\left(q_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin h\left(\frac{q_1}{L}\right)\right) < \frac{1}{8}\frac{k_p g}{2k_p + g}\right\} \quad (3.64)$$

est un domaine d'attraction de l'équilibre zéro, tel que toutes les trajectoires qui partent dans cet ensemble satisfont $|q_1(t)| \le L$ *pour tout* $t \ge 0$.

b. Simulations

Les résultats de simulation sont présentés sur la figure 3.4. On a $g = 9.81\ \mathrm{m}/s^2$, $k_p = 1$. Les deux premières figures (les deux premières colonnes) montrent l'effet observé en augmentant la constante d'amortissement k_v avec une position initiale verticale de la barre. On note que la convergence n'est pas toujours accélérée avec des valeurs plus élevées de k_v.

Dans la troisième figure (la troisième colonne) la barre est en position initiale horizontale et la bille au bord de la barre. On constate que la commande fonctionne mieux à partir de $q_2(0) = 0$. Pour s'assurer que la condition initiale est dans le domaine d'attraction, k_p est choisi plus petit que k_p^M selon la proposition 3.3. La figure 3.4 illustre aussi la nature monotone de H_d (elle joue le rôle d'une fonction de Lyapunov comme prévu théoriquement) avec le fait que $V_d(t) < H_d(t) < H_d(0)$ pour tout t.

L'effet de limiter la longueur de la barre et l'utilisation de la dernière partie de la proposition 3.3 sont illustrés par simulation dans la figure 3.5. Les paramètres sont $k_p = 1$, $k_v = 50$ et $L = 10$ m. Par conséquent, la condition pour garder la bille dans les limites de la barre est $H_d(0) < 0.1038$. La première simulation commence à $\left(q(0), p(0)\right) = (8, 0, 1, 1)$ avec $H_d(0) = 0.1837$. En raison de la vitesse initiale, la commande est incapable de stabiliser la bille avant que cette dernière n'atteigne la limite de la barre ($L = 10$ m).

Dans la seconde simulation, on a $\left(q(0), p(0)\right) = (6, 0, 0.5, 1)$ et $H_d(0) = 0.0928$, donc la condition $|q_1(t)| \le L$ est garantie et la bille reste dans les limites de la barre.

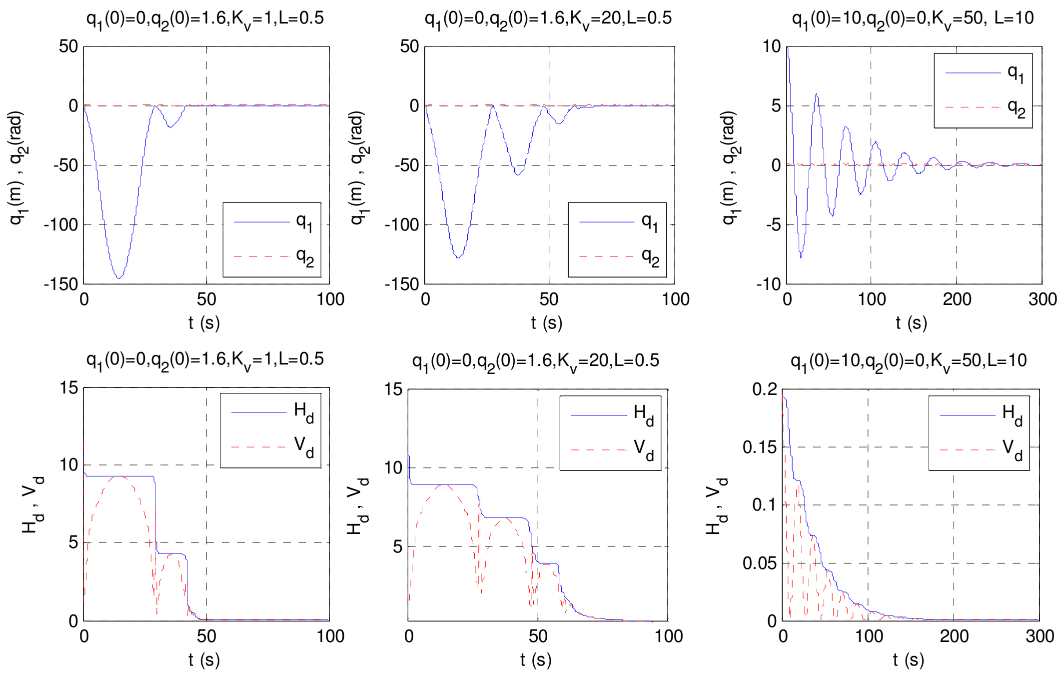


Figure 3.4 : Simulations du système bille sur rail avec une vitesse initiale nulle.

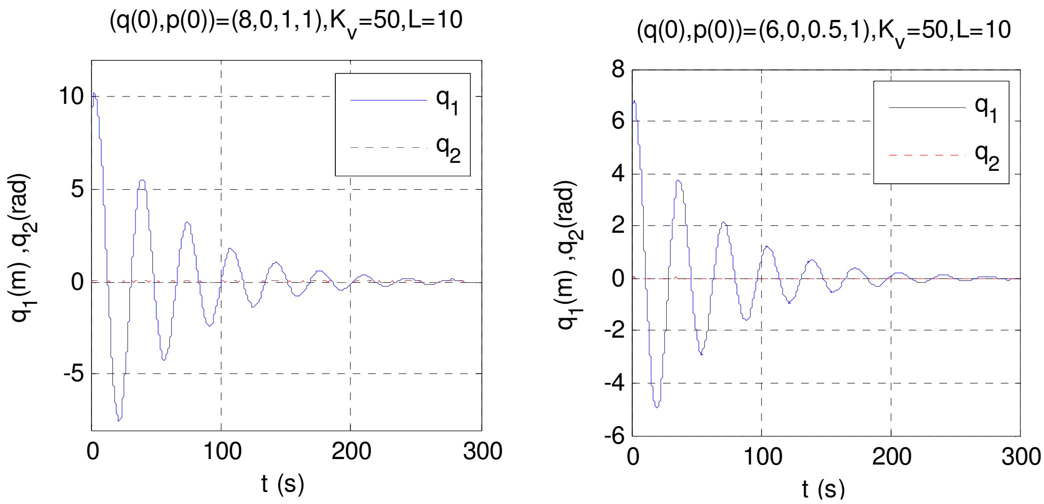


Figure 3.5 : L'évolution de q_1 et q_2 avec une vitesse initiale non nulle.

III.4.2.1.3 Stabilisation du système pendule à roue inertielle

Le pendule à roue inertielle (*inertia wheel pendulum*), représenté sur la figure 3.6, est constitué d'un pendule libre en rotation autour d'un axe lié au sol, l'autre extrémité du pendule étant reliée à un disque actionné par un moteur et le couple généré par l'accélération angulaire du disque est utilisé pour contrôler le système. Les équations dynamiques du système en utilisant la formulation EL [Santibanez-05], sont:

$$\begin{bmatrix} m_{11}+m_{22} & m_{22} \\ m_{22} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -m_3\sin(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \tag{3.65}$$

où θ_1 et θ_2 respectivement sont les angles du pendule et du disque, $m_3 = (m_1 g l_{c_1} + m_2 g l_1)$, $m_{11} = m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_1^2 + \mathrm{I}_1$, $m_{22} = \mathrm{I}_2$, où m_1, m_2, I_1, I_2 sont respectivement les masses et les inerties du pendule et de la roue, l_1, l_{c_1} représentent la longueur et la longueur du centre du pendule. u est le couple d'entrée de commande agissant entre le disque et le pendule.

Le changement de coordonnées

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

conduit au modèle simplifié suivant:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_3 \sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{3.67}$$

où
$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad V(q_1) = m_3 \left(\cos q_1 - 1 \right) \tag{3.68}$$

Le modèle hamiltonien du système est :

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 / m_{11} \\ p_2 / m_{22} \\ m_3 \sin(q_1) - u \\ u \end{bmatrix} \tag{3.69}$$

L'hamiltonien est donné par

$$H_d(q,p) = \frac{1}{2} \left[\frac{p_1^2}{m_{11}} + \frac{p_2^2}{m_{22}} \right] + m_3 \cos(q_1) \tag{3.70}$$

où $q = [q_1, q_2]^T$ et $p = [p_1, p_2]^T = [m_{11}\dot{q}_1, m_{22}\dot{q}_2]^T$ sont respectivement les positions généralisées et les impulsions.

L'objectif de commande est d'une part de stabiliser le pendule à la position d'équilibre verticale et d'autre part de stabiliser le mouvement rotatif de la roue, c.à.d., $q_1^* = q_2^* = 0$.

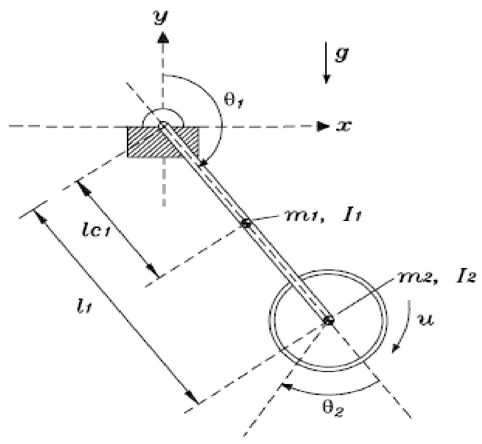


Figure 3.6: Pendule à roue inertielle

Tout d'abord, on note que la matrice d'inertie M est indépendante de q_1, par conséquent, on peut prendre $J_2 = 0$ et M_d une matrice constante, donnée comme suit :

$$M_d = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix} \tag{3.71}$$

avec $a_1 > 0$; $a_1 a_3 - a_2^2 > 0$ (3.72)

Les inégalités (3.72) sont imposées pour s'assurer que M_d soit positive définie. La seule EDP à résoudre est alors l'EDP de l'énergie potentielle donnée par l'équation (3.38):

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{m_{11}}\right)\frac{\partial V_d}{\partial q_1} + \left(\frac{a_2 + a_3}{m_{22}}\right)\frac{\partial V_d}{\partial q_2} = -m_3 \sin(q_1) \tag{3.73}$$

La solution générale de (3.73) est de la forme [Ortega-02a]:

$$V_d(q) = \frac{m_{11} m_3}{a_1 + a_2}\cos(q_1) + \Phi\big(z(q)\big) \tag{3.74}$$

avec $z(q) = q_2 + \gamma_2 q_1$ (3.75)

où $\gamma_2 = -m_{11}(a_2 + a_3) / m_{22}(a_1 + a_2)$ (3.76)

et Φ est une fonction différentiable arbitraire qu'on doit choisir pour satisfaire la condition (3.27) pour $q^* = 0$. La condition nécessaire $\nabla_q V_d(0) = 0$ est satisfaite si et seulement si $\nabla\Phi\big(z(0)\big) = 0$, tandis que la condition suffisante $\nabla_q^2 V_d(0) > 0$ est vérifiée si la hessienne de Φ à l'origine est positive, et

$$a_2 < -a_1 \tag{3.77}$$

Ces conditions sur Φ sont satisfaites, avec un choix de $\Phi = \frac{k_1}{2} z^2$, où $k_1 > 0$, [Ortega-02a].

L'entrée de commande u_{es} est donnée par :

$$u_{es} = \gamma_1 \sin(q_1) + k_p(q_2 + \gamma_2 q_1) \tag{3.78}$$

avec
$$\gamma_1 = \frac{a_2}{a_1 + a_2} m_3 \ ; \quad k_p = -k_1\left[\frac{a_1 a_3 - a_2^2}{m_{22}(a_1 + a_2)}\right] \tag{3.79}$$

On rappelle que a_1, a_2 et a_3 devrait satisfaire les inégalités (3.72) et (3.77). Quelques calculs simples montrent que ces conditions se traduisent par :

$$\gamma_1 > m_3 \ ; \quad \gamma_2 > \frac{m_{11}}{m_{22}} \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - m_3} \tag{3.80}$$

qui, avec $k_p > 0$, définissent les valeurs admissibles pour le réglage des gains.

La commande u_{di} permet d'ajouter de l'amortissement en boucle fermée via la nouvelle sortie passive $\left((\nabla_p H_d)^T G\right)$, qui est calculée comme suit :

$$G^T \nabla_p H_d = -k_2(\dot{q}_2 + \gamma_2 \dot{q}_1) \tag{3.81}$$

où
$$k_2 = -\frac{m_{22}(a_1 + a_2)}{a_1 a_3 - a_2^2} > 0. \tag{3.82}$$

Le terme u_{di} est donné par :

$$u_{di} = k_v k_2(\dot{q}_2 + \gamma_2 \dot{q}_1) \tag{3.83}$$

Finalement la loi de commande est :

$$u = \gamma_1 \sin(q_1) + k_p(q_2 + \gamma_2 q_1) + k_v k_2(\dot{q}_2 + \gamma_2 \dot{q}_1) \tag{3.84}$$

Les résultats de simulations sont donnés dans les figures 3.7 et 3.8. Les paramètres du système sont : $a_1 = 1,\ a_2 = -1.5,\ a_3 = 6,\ m_{11} = 0.1,\ m_{22} = 0.2$ et $m_3 = 10$. Les gains de réglage de la commande (3.84) sont : $\gamma_1 = 30,\ \gamma_2 = 4.5,\ k_p = 3.75,\ k_v = 10,$ et $k_2 = 0.0266$.

Les conditions initiales sont $\left(q(0), p(0)\right) = \left(\pi, 0, 0, 0\right)$.

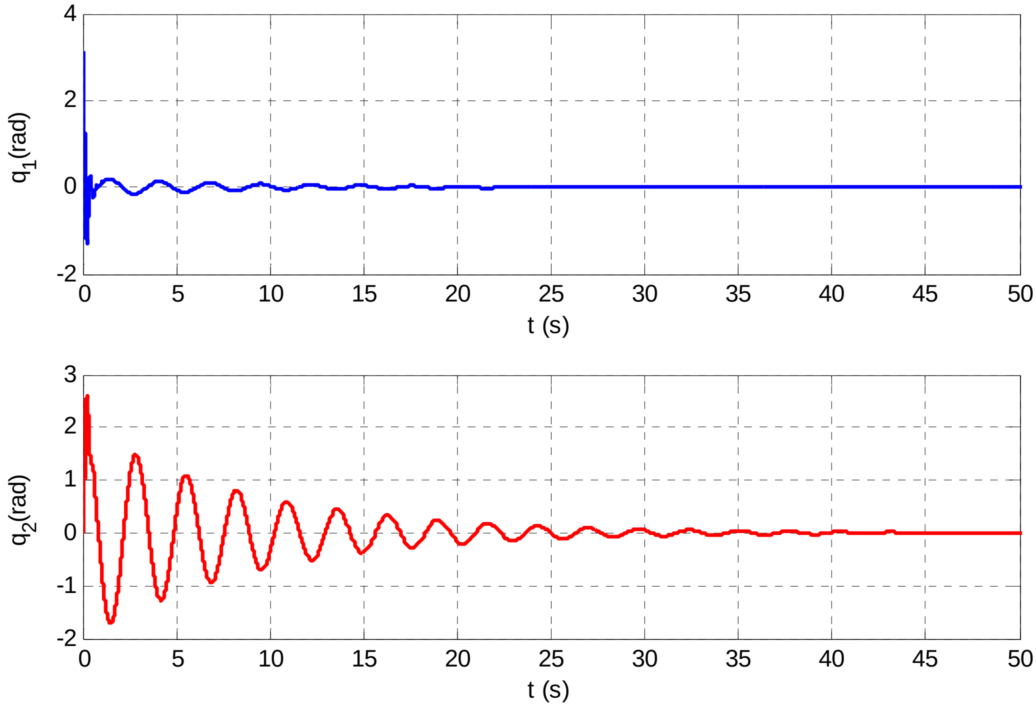


Figure 3.7: Evolution du $q_1(t)$ et $q_2(t)$ pour $k_p = 3.75$ et $k_v = 10$

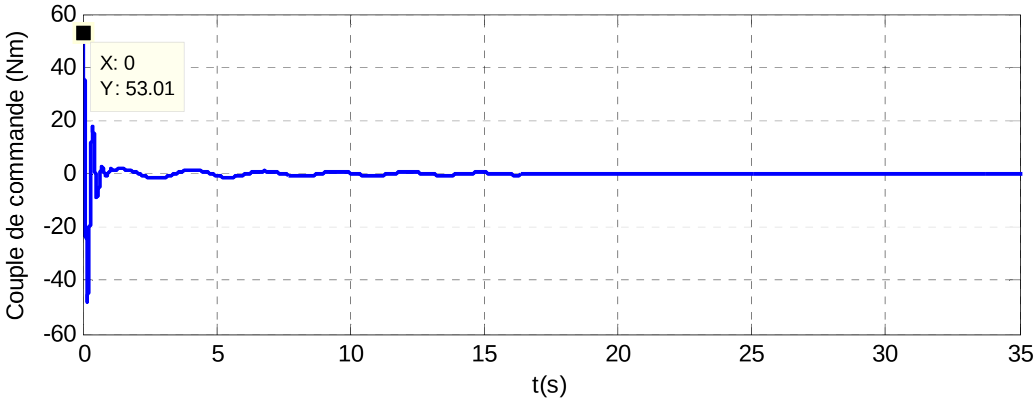


Figure 3.8 : Couple de commande u

Une caractéristique importante de la commande (3.84), est quelle balance et stabilise le pendule en position haute sans avoir à commuter entre deux commandes différentes. Cependant, cette commande peut exiger un couple d'entrée élevé ce qui rend difficile une mise en œuvre pratique. Dans ce qui suit, on propose de calculer une CBP-AIA qui fournit un couple borné dans les limites souhaitées, comme proposé dans [Santibanez-05].

Le problème de commande sous contraintes de couple de l'actionneur est formulé comme suit. Considérons le modèle du pendule à roue inertielle (3.67). On suppose que l'actionneur est capable de fournir un couple maximal connu $u^{\max}$ tel que

$$|u(t)| \leq u^{\max} \quad (3.85)$$

On suppose également que le couple maximal satisfait la condition suivante:

$$u^{\max} > m_3 \quad (3.86)$$

Formellement, l'objectif de commande est de trouver une loi de commande de telle sorte que

$$\lim_{t\to\infty} dist\left(q_1(t), \Gamma\right) = 0 \text{ et } |u(t)| \leq u^{\max} \quad (3.87)$$

où $dist\left(q_1(t), \Gamma\right)$ désigne la plus petite distance entre q_1 et chaque élément de

$$\Gamma = \{..., -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, ...\}$$

Le terme u_{di} (3.83) peut être écrit en termes de coordonnées généralisées q et des moments p comme suit :

$$u_{di} = k_v k_3 (p_2 + k_4 p_1) \quad (3.88)$$

où

$$k_3 = -\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_3 - a_2^2} > 0 \ ; \quad k_4 = -\frac{a_2 + a_3}{a_1 + a_2} \quad (3.89)$$

Ainsi, la loi de commande (3.84) peut être réécrite comme suit :

$$u = \gamma_1 \sin(q_1) + k_p (q_2 + \gamma_2 q_1) + k_v k_3 (p_2 + k_4 p_1) \quad (3.90)$$

Pour la conception de la nouvelle CBP-AIA, on suit des étapes similaires aux calculs précédant. Le nouveau terme u_{es} est donné comme suit :

$$u_{es} = \gamma_1 \sin(q_1) + k_p \tanh(q_2 + \gamma_2 q_1) \quad (3.91)$$

avec γ_1 et γ_2 donnés en (3.79), (3.76) respectivement et $k_p > 0$. Cette nouvelle commande u_{es} est le résultat de la fonction d'énergie potentielle désirée suivante [Santibanez-05] :

$$V_d(q) = \frac{I_1 m_3}{a_1 + a_2} \cos(q_1) + k_1 \ln\left[\cosh(q_2 + \gamma_2 q_1)\right] \quad (3.92)$$

En outre, puisque l'action de la commande doit être limitée, le terme d'injection d'amortissement u_{di} est pris comme suit:

$$u_{di} = k_v \tanh\left(k_3 (p_2 + k_4 p_1)\right) \quad (3.93)$$

Les constantes k_3 et k_4 sont donnés dans (3.89) et $k_v > 0$.

Par conséquent, la nouvelle loi de commande est

$$u = \gamma_1 \sin(q_1) + k_p \tanh(q_2 + \gamma_2 q_1) + k_v \tanh\left(k_3 (p_2 + k_4 p_1)\right) \quad (3.94)$$

Les constantes positives k_p et k_v doivent être choisis suffisamment petites. Plus précisément, elles doivent satisfaire

$$u^{\max} - \gamma_1 > k_p + k_v \tag{3.95}$$

On remarque que tous les termes de (3.94) sont bornés; par ailleurs, la loi de commande est délimitée par :

$$\begin{aligned} |u(t)| &\le \gamma_1 + k_p + k_v \\ &\le u^{\max} \end{aligned} \tag{3.96}$$

Une caractéristique de la méthodologie CBP-AIA est que la fonction d'énergie désirée $H_d(q,p)$ est considérée comme une fonction candidate de Lyapunov $\mathbf{V}(q,p)$. Ainsi, pour mener à bien l'analyse de stabilité on a:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(q,p) &= H_d(q,p) \\ &= \frac{1}{2\Delta}\left[a_3 p_1^2 - 2a_2 p_1 p_2 + a_1 p_2^2\right] + \frac{m_{11} m_3}{a_1 + a_2}\cos(q_1) + k_1 \ln\left[\cosh(q_2 + \gamma_2 q_1)\right] \end{aligned} \tag{3.97}$$

avec $\Delta = a_1 a_3 - a_2^2$.

Le système en boucle fermée est obtenu en combinant la loi de commande (3.94) et le système en boucle ouverte (3.69), ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1/m_{11} \\ p_2/m_{22} \\ m_3 \sin(q_1) - \left[\gamma_1 \sin(q_1) + k_p \tanh(q_2 + \gamma_2 q_1) + k_v \tanh\left(k_3(p_2 + k_4 p_1)\right)\right] \\ \gamma_1 \sin(q_1) + k_p \tanh(q_2 + \gamma_2 q_1) + k_v \tanh\left(k_3(p_2 + k_4 p_1)\right) \end{bmatrix} \tag{3.98}$$

L'ensemble des équilibres de (3.98) est

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ p_1^* \\ p_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\pi \\ -\gamma_2 n\pi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.99}$$

où $n \in \mathbb{N}$, (n pair correspond aux équilibres désirés).

La dérivée temporelle de la fonction (3.97) le long des trajectoires de l'équation en boucle fermée (3.98) est :

$$\dot{\mathbf{V}}(q,p) = -k_v\left[k_3(p_2 + k_4 p_1)\right]\tanh\left(k_3(p_2 + k_4 p_1)\right) \tag{3.100}$$

qui est une fonction négative semi-définie, puisque par conception $k_v > 0$.

Comme l'équation en boucle fermée (3.98) est autonome, on peut utiliser le principe d'invariance de LaSalle [Khalil-02] pour démontrer que l'équilibre correspondant à n pair dans l'ensemble Υ est asymptotiquement stable [Santibanez-05].

Pour la simulation, le couple maximal que peut fournir l'actionneur est supposé $u^{\max} = 45Nm$. En substituant les valeurs $\gamma_1 = 30$, $k_p = 3.75$ et $k_v = 10$ dans la loi de commande (3.94), on a :

$$|u(t)| < \gamma_1 + k_p + k_v = 43.75N\mathrm{m} \prec u^{\max} \tag{3.101}$$

Les conditions initiales sont $(q(0), p(0)) = (\pi, 0, 0, 0)$.

Une simple observation, montre que les figures 3.7 et 3.9 sont très similaires et les deux convergent vers le point d'équilibre $(q, p) = (0, 0, 0, 0)$. L'application de l'entrée de commande bornée est présentée dans la figure 3.10. On note que le couple évolue clairement à l'intérieur de la limite prescrite dans (3.96) avec un couple maximal de $37.9N\mathrm{m}$, tandis que dans l'application de l'entrée de commande non bornée (figure 3.8), le couple atteint des valeurs supérieures à $u^{\max} = 45N\mathrm{m}$.

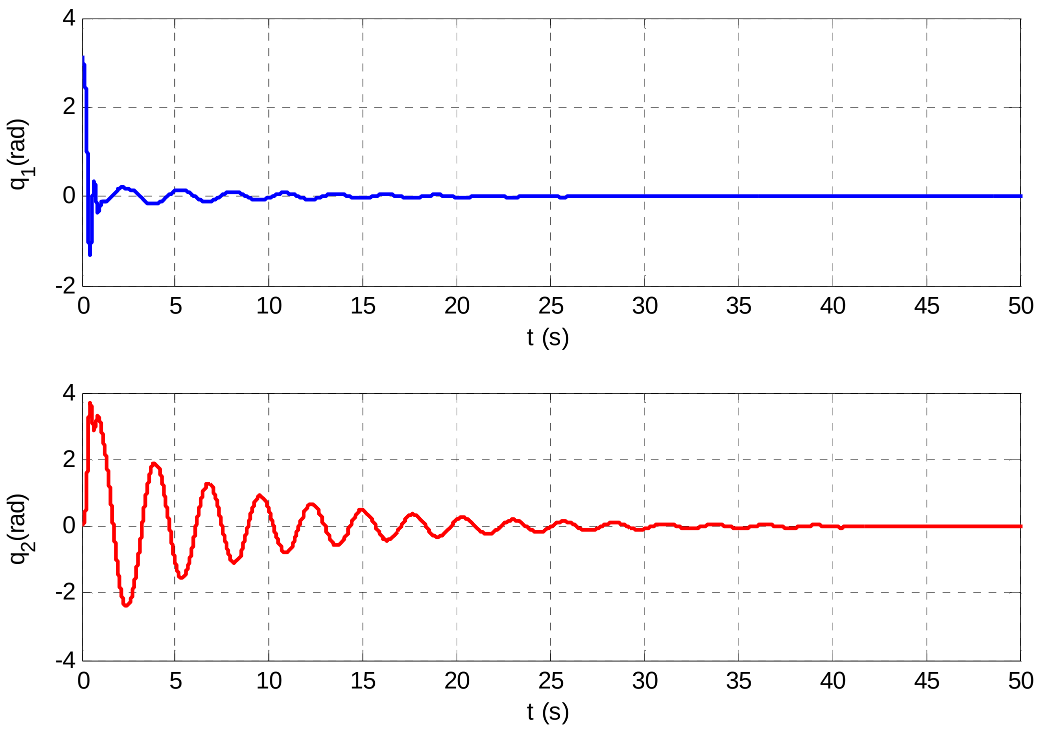


Figure 3.9: Evolution du $q_1(t)$ et $q_2(t)$ en appliquant la loi du commande bornée

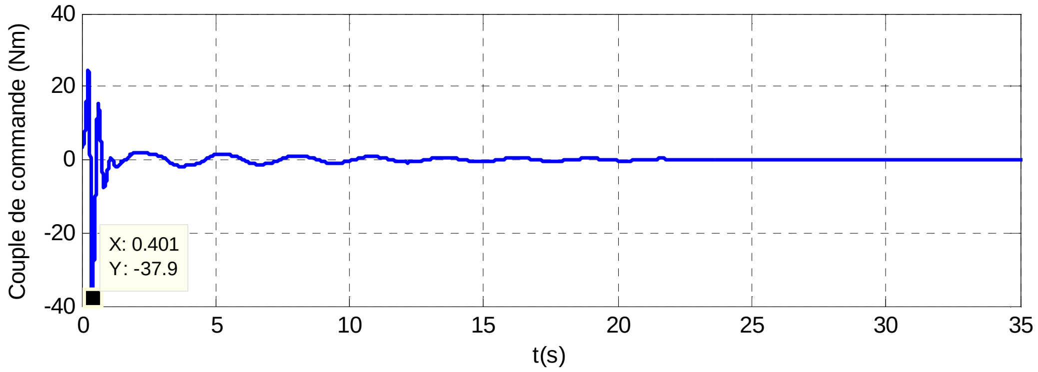


Figure 3.10: Couple de commande borné u

IV.4.2.1.3 Suivi d'une trajectoire pour une grue portique

Considérons une grue portique (*gantry crane*) comme le montre la figure 3.11. M est la masse du chariot, m est la masse de la charge. La tige de longueur l est supposée sans masse et les frottements sont négligés.

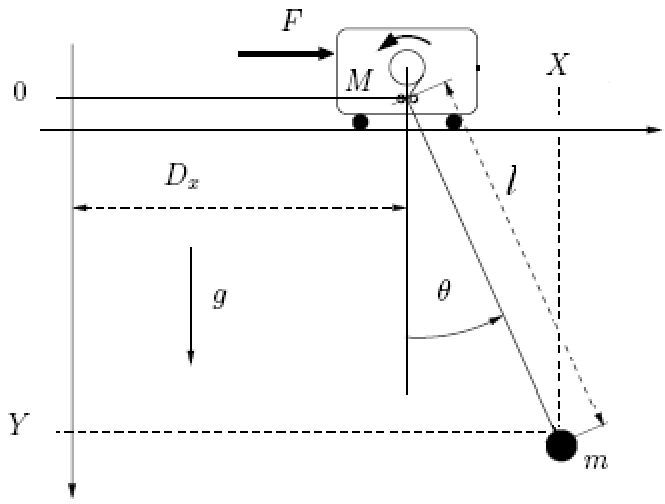


Figure 3.11: Grue portique

Les coordonnées de configuration sont

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \tag{3.102}$$

où $x(t)$ désigne la position du chariot et de $\theta(t)$ désigne l'angle que fait la charge avec la verticale. Le modèle dynamique du système en utilisant le formalisme EL est donné :

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + \nabla_q V = G\tau \tag{3.103}$$

où

$$
\begin{aligned}
&M(q)=\begin{bmatrix} m_{11}(q) & m_{12}(q) \\ m_{21}(q) & m_{22}(q) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M+m & ml\cos(q_2) \\ ml\cos(q_2) & ml^2 \end{bmatrix} \\
&\mathrm{C}(q,\dot{q})=\begin{bmatrix} 0 & -ml\dot{q}_2\sin(q_1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\nabla_q V(q)=\begin{bmatrix} 0 \\ mgl\sin(q_2) \end{bmatrix} \\
&G=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\tau=[F,0]^T
\end{aligned}
\tag{3.104}
$$

La trajectoire désirée est définie comme suit :

$$
q_d=\begin{bmatrix} q_{1d} \\ q_{2d} \end{bmatrix};\ \dot{q}_d=\begin{bmatrix} \dot{q}_{1d} \\ \dot{q}_{2d} \end{bmatrix};\ \ddot{q}_d=\begin{bmatrix} \ddot{q}_{1d} \\ \ddot{q}_{2d} \end{bmatrix} \tag{3.105}
$$

Pour le suivi de la trajectoire de vitesse constante, la trajectoire désirée peut être exprimée par

$$
q_{1d}=\alpha+\beta t\ ;\quad \dot{q}_{1d}=\beta\ ;\ \text{ et }\ \ddot{q}_{1d}=0 \tag{3.106}
$$

où α est la valeur de q_{1d} à $t=0$ et β est la vitesse constante désirée. Puisque l'objectif est d'annuler le mouvement angulaire de la charge, les valeurs souhaitées pour les coordonnées de configuration sont respectivement

$$
q_{2d}=\dot{q}_{2d}=\ddot{q}_{2d}=0 \tag{3.107}
$$

L'erreur est définie comme suit $e_q=q-q_d$, où $e_q=\left[e_{q_1},e_{q_2}\right]^T$, alors

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} e_{q_1} \\ e_{q_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q_1-q_{1d} \\ q_2-q_{2d} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q_1-(\alpha+\beta t) \\ q_2 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} \dot{e}_{q_1} \\ \dot{e}_{q_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dot{q}_1-\dot{q}_{1d} \\ \dot{q}_2-\dot{q}_{2d} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dot{q}_1-\beta \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} \ddot{e}_{q_1} \\ \ddot{e}_{q_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.108}
$$

En remplaçant (3.108) dans (3.103), on obtient le modèle suivant :

$$
M(e_q)\ddot{e}_q+\mathrm{C}(e_q,\dot{e}_q)\dot{e}_q+\nabla_{e_q}V(e_q)=G(e_q)\tau \tag{3.109}
$$

Ce modèle d'erreur (3.109) est utilisé pour développer les deux lois de commande suivantes : la CBP-AIA et la commande par l'approche directe de Lyapunov.

a. Conception de la loi CBP-AIA

Le système d'erreur formulé dans (3.109) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}&(\mathrm{M}+m)\ddot{e}_{q_1}+ml\cos(e_{q_2})\ddot{e}_{q_2}+f_1(e_q,\dot{e}_q)=\tau\\&ml\cos(e_{q_2})\ddot{e}_{q_1}+ml^2\ddot{e}_{q_2}+f_2(e_q,\dot{e}_q)=0\end{aligned}\tag{3.110}$$

ou bien
$$\begin{bmatrix}m_{e11}(e_q) & m_{e12}(e_q)\\ m_{e21}(e_q) & m_{e22}(e_q)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{e}_{q_1}\\ \ddot{e}_{q_2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}f_1(e_q,\dot{e}_q)\\ f_2(e_q,\dot{e}_q)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\tau\tag{3.111}$$

avec
$$\begin{bmatrix}m_{e11}(e_q) & m_{e12}(e_q)\\ m_{e21}(e_q) & m_{e22}(e_q)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{M}+m & ml\cos(e_{q_2})\\ ml\cos(e_{q_2}) & ml^2\end{bmatrix}\tag{3.112}$$

Pour simplifier le calcul de la commande, une linéarisation partielle par feedback est appliquée (voir chapitre II). Par conséquent, le système (3.110) devient :

$$\ddot{e}_q+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{g}{l}\sin(e_{q_2})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -\dfrac{1}{l}\cos(e_{q_2})\end{bmatrix}u\tag{3.113}$$

Le système d'erreur formulé en (3.109) peut être écrit sous la forme suivante :

$$M_f(e_q)\ddot{e}_q+\mathrm{C}_f(e_q,\dot{e}_q)\dot{e}_q+\nabla_{e_q}V_f(e_q)=G_2(e_q)u\tag{3.114}$$

où
$$M_f=I_2;\ \mathrm{C}_f(e_q,\dot{e}_q)=0;\ \nabla_{e_q}V_f(e_q)=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{-g}{l}\sin(e_{q_2})\end{bmatrix};\ G_2=\begin{bmatrix}1\\ -\dfrac{1}{l}\cos(e_{q_2})\end{bmatrix}\tag{3.115}$$

La forme hamiltonienne de (3.114) est

$$\begin{aligned}\dot{e}_q&=M_fe_p\\ \dot{e}_p&=\tilde{f}_0(e_q,e_p)+\tilde{f}_1(e_q)+G_2(e_q)u\end{aligned}\tag{3.116}$$

avec
$$\tilde{f}_0(e_q,e_p)=0;\quad \tilde{f}_1(e_q)=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{-g}{l}\sin(e_{q_2})\end{bmatrix};\quad G_2=\begin{bmatrix}1\\ -\dfrac{1}{l}\cos(e_{q_2})\end{bmatrix}\tag{3.117}$$

L'hamiltonien est donné comme suit :

$$H(e_q,e_p)=\frac{1}{2}e_p^TM_f^{-1}(e_q)e_p+V_f(e_q)\tag{3.118}$$

La nouvelle entrée de commande se décompose en deux termes

$$u=u_{es}(e_q,e_p)+u_{di}(e_q,e_p)\tag{3.119}$$

La dynamique hamiltonienne désirée est donnée par :

$$\begin{bmatrix}\dot{e}_q\\ \dot{e}_p\end{bmatrix}=\left[J_d(e_q,e_p)-R_d(e_q,e_p)\right]\begin{bmatrix}\nabla_{e_q}H_d\\ \nabla_{e_p}H_d\end{bmatrix}\tag{3.120}$$

où
$$J_d=-J_d^T=\begin{bmatrix}0 & M_f^{-1}M_d\\ -M_dM_f^{-1} & J_2(e_q,e_p)\end{bmatrix};\ R_d=R_d^T=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & G_2K_vG_2^T\end{bmatrix}\geq 0\tag{3.121}$$

représentent les structures d'interconnexion et d'amortissement désirées.

L'hamiltonien désiré est :

$$H_d(e_q,e_p)=\frac{1}{2}e_p^T M_d^{-1}(e_q)e_p+V_d(e_q) \tag{3.122}$$

Le terme u_{di} dans (3.119) est donné comme suit :

$$u_{di}(e_q,e_p)=-K_v G_2^T \nabla_p H_d \tag{3.123}$$

où $K_v=K_v^T>0$.

La loi de commande u_{es} dans (3.119) est donnée comme suit :

$$u_{es}=\left(G_2^T G_2\right)^{-1} G_2^T\left(-\tilde{f}_0-\tilde{f}_1-M_d M_f^{-1}\nabla_{e_q}H_d+J_2\nabla_{e_p}H_d\right) \tag{3.124}$$

En remplaçant M_f et $\tilde{f}_0$ par leurs expressions, l'équation (3.124) peut être écrite de façon équivalente :

$$0=G_2^{\perp}\left(-M_d\nabla_{e_q}\left(e_p^T M_d^{-1}e_p\right)+J_2 M_d^{-1}e_p\right) \tag{3.125}$$

et $$G_2^{\perp}\tilde{f}_1=-G_2^{\perp}M_d\nabla_{e_q}V_d \tag{3.126}$$

On choisit $M_d=I_2$ pour résoudre (3.125), ce qui donne $J_2=0$.

En substituant M_d, $\tilde{f}_1$ de (3.117) et $G_2^{\perp}=\begin{bmatrix}\dfrac{\cos(e_q)}{l} & 1\end{bmatrix}$ dans (3.126), on aura :

$$\cos(e_{q_2})\nabla_{e_{q_1}}V_d+l\,\nabla_{e_{q_2}}V_d-g\sin(e_{q_2})=0 \tag{3.127}$$

La solution de (3.127) est :

$$V_d(e_{q_1},e_{q_2})=-\frac{g}{l}\cos(e_{q_2})+\Phi\left(z(e_q)\right) \tag{3.128}$$

Avec $$z(e_q)=\frac{\sin(e_{q_2})-e_{q_1}}{l} \tag{3.129}$$

où Φ représente une fonction différentiable arbitraire de z. Cette fonction doit être choisie tel que V_d ait un minimum isolée à $e_{q*}=0$, c.à.d., $e_{q*}=\arg\min V_d(e_q)$

Le gradient de V_d est donné par :

$$\nabla_{e_q}V_d(e_q)=\begin{bmatrix}-\nabla_z\Phi\left(z(e_q)\right)\\ \dfrac{g}{l}\sin(e_{q_2})+\dfrac{1}{l}\cos(e_{q_2})\nabla_z\Phi\left(z(e_q)\right)\end{bmatrix} \tag{3.130}$$

Pour assigner l'équilibre zéro, la condition nécessaire $\nabla_z\Phi\left(z(e_{q*})\right)=0$ est satisfaite avec le choix de $\Phi(z)=\frac{a}{2}(z-z_*)^2$ et la condition suffisante $\nabla_{e_q}^2 V_d(e_{q*})>0$ est satisfaite si la matrice hessienne de Φ est positive à l'origine. La hessienne à e_{q_*} est $\nabla_z^2\Phi(z_*) = a$. C'est pourquoi on choisit $a > 0$ pour la stabilité de l'équilibre. Le déterminant de la matrice hessienne de V_d, est égale à $\left(\frac{g}{l}a\right)$ et il est positif. Il garantit que l'équilibre est stable.

La nouvelle énergie potentielle prend la forme finale

$$V_d(e_{q_1}, e_{q_2}) = -\frac{g}{l}\cos(e_{q_2}) + \frac{a}{2}\left(\frac{\sin(e_{q_2}) - e_{q_1} l}{l}\right)^2 \tag{3.131}$$

La commande u_{es} (3.124) qui façonne l'énergie est :

$$u_{es} = \frac{\left(\sin(e_{q_2}) - l e_{q_1}\right)a}{l} \tag{3.132}$$

La loi de commande u_{di} (3.123) pour injecter l'amortissement est :

$$u_{di} = -k_v \dot{e}_{q_1} + \frac{k_v \dot{e}_{q_2}\cos(e_{q_2})}{l} \tag{3.133}$$

La loi de commande finale est :

$$u = u_{es} + u_{di} = \frac{\left(\sin(e_{q_2}) - l e_{q_1}\right)a}{l} - k_v \dot{e}_{q_1} + \frac{k_v \dot{e}_{q_2}\cos(e_{q_2})}{l} \tag{3.134}$$

b. Commande basée sur l'approche directe de Lyapunov

La conception de la commande pour le suivi de trajectoire de la grue portique, en utilisant une technique basée sur la théorie de Lyapunov a été principalement réalisée dans [Fang-01]. Pour faciliter la conception de cette commande, on détermine l'énergie totale du système d'erreur de la grue portique, notée $E(e_q, \dot{e}_q)$, comme suit :

$$E(e_q, \dot{e}_q) = \frac{1}{2}\dot{e}_q^T M(e_q)\dot{e}_q + mgl\left(1 - \cos(e_{q_2})\right) \geq 0 \tag{3.135}$$

La dérivée temporelle de l'énergie totale (3.135), en remplaçant $M(e_q)\ddot{e}_q$ de (3.109) et en utilisant le fait que $(\dot{M} = C^T + C)$, est exprimée comme suit :

$$\dot{E} = \dot{e}_{q_1}\tau \tag{3.136}$$

L'objectif de la commande est de ramener l'erreur e_{q_1} à zéro, tout en maintenant l'angle de rotation de la charge à zéro. Dans ce cas, on calcule une loi de commande qui assure la régulation asymptotique pour le système d'erreur dans le sens que

$$\lim_{t\to\infty}(e_{q_1}, \dot{e}_{q_1}, e_{q_2}, \dot{e}_{q_2}) = (0,0,0,0) \tag{3.137}$$

La loi de commande est donnée comme suit [Singhal-06] :

$$u = \frac{-k_d \dot{e}_{q_1} - k_p e_{q_1}}{k_E} \tag{3.138}$$

où k_d, k_p, $k_E \in \Re$ sont des gains constants positifs.

Considérons la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$\mathbf{V}_e = k_E E + \frac{1}{2} k_p e_{q_1}^2 \tag{3.139}$$

En calculant la dérivée temporelle de (3.139), et par substitution de (3.138) et (3.136) pour les expressions de u et $\dot{E}$ respectivement, on obtient l'expression suivante :

$$\dot{\mathbf{V}}_e = -k_d \dot{e}_{q_1}^2 \tag{3.140}$$

ce qui implique que l'origine du système d'erreur est stable au sens de Lyapunov. En outre, l'application du théorème d'invariance de LaSalle [Khalil-02] nous permet d'assurer la régulation asymptotique de la grue à une trajectoire désirée [Fang-01].

Pour les simulations, les paramètres du système sont la masse du chariot $\mathrm{M} = 200\ Kg$, la masse de la charge $m = 100\ Kg$ et la longueur de la tige $l = 2.5$ m. On considère la trajectoire désirée suivante $x = x_0 + \alpha\, t$, où la position initiale désirée est $x_0 = 0.2$ m et la vitesse désirée est $\alpha = 0.2\ \mathrm{m}/s$.

Les conditions initiales sont : $e_{q_1(0)} = 0.5$ m , $e_{q_2(0)} = 1\ rad$, $\dot{e}_{q_1(0)} = 0.1\ (\mathrm{m}/s)$ et $\dot{e}_{q_2(0)} = 1\ (\mathrm{m}/s^2)$.

Pour la CBP-AIA, les paramètres de réglage sont l'injection d'amortissement $k_v = 1$ et $a = 1$.

Pour la commande basée sur la théorie de Lyapunov, on a $K_E = 0.1$, $K_p = 30$ et $K_d = 50$.

La figure 3.12 représente la position, la vitesse, l'angle et la force nécessaire pour commander la grue, obtenus en utilisant la CBP-AIA. La figure 3.13 représente les résultats obtenus en appliquant la commande basée sur l'approche directe de Lyapunov. Dans les deux figures, on peut remarquer, que les deux commandes permettent d'atteindre l'objectif de la commande.

Les figures 3.14 et 3.15, montrent les résultats de simulations correspondant aux commandes CBP-AIA et l'approche directe de Lyapunov pour les quantités suivantes : $\mathrm{M} = 1\ Kg$, $m = 0.2\ Kg$ et $l = 0.25$ m. Les conditions initiales et les gains de réglage des deux commandes sont les mêmes que précédemment. Il est à noter que les paramètres de la grue ont radicalement changé, mais la CBP-AIA fonctionne très bien. Il est clair qu'à partir de la figure 3.14 pour les différents paramètres (masse et longueur), on a un bon suivi de trajectoire désirée. Toutefois, l'approche directe de Lyapunov est incapable de stabiliser l'angle de la charge à la valeur désirée. En outre, sur la figure 3.15 correspondant à la force, on remarque le saut de $-200\ N$ à $0\ N$ au début.

De la discussion ci-dessus, il est clair que la CBP-AIA est robuste tandis que la commande basée sur l'approche directe de Lyapunov ne l'est pas.

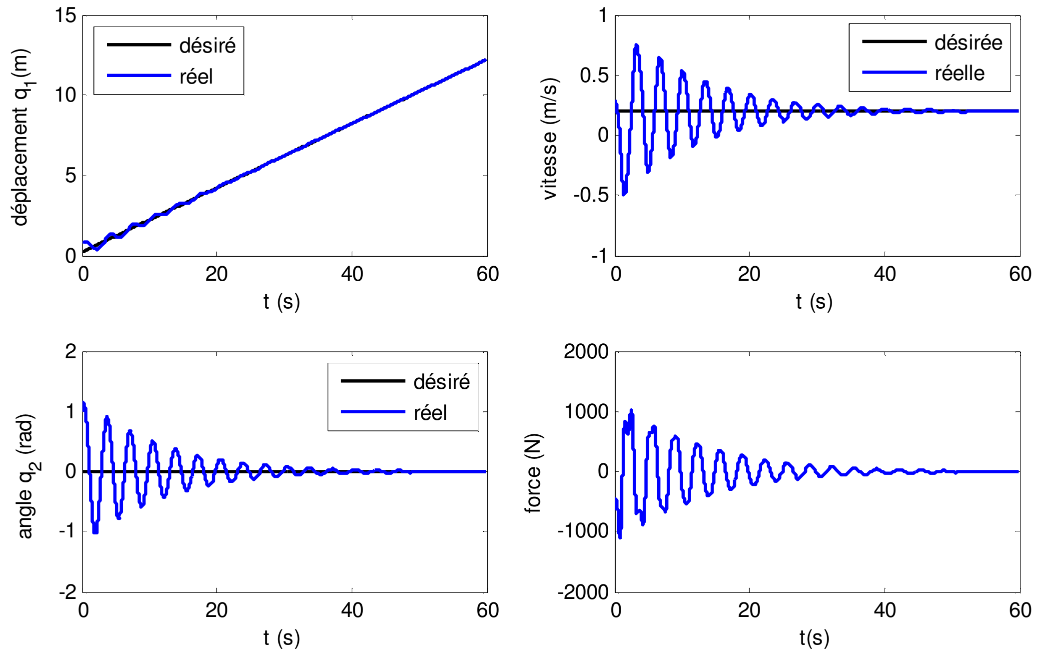


Figure 3.12: Résultats de simulation pour la CBP-AIA

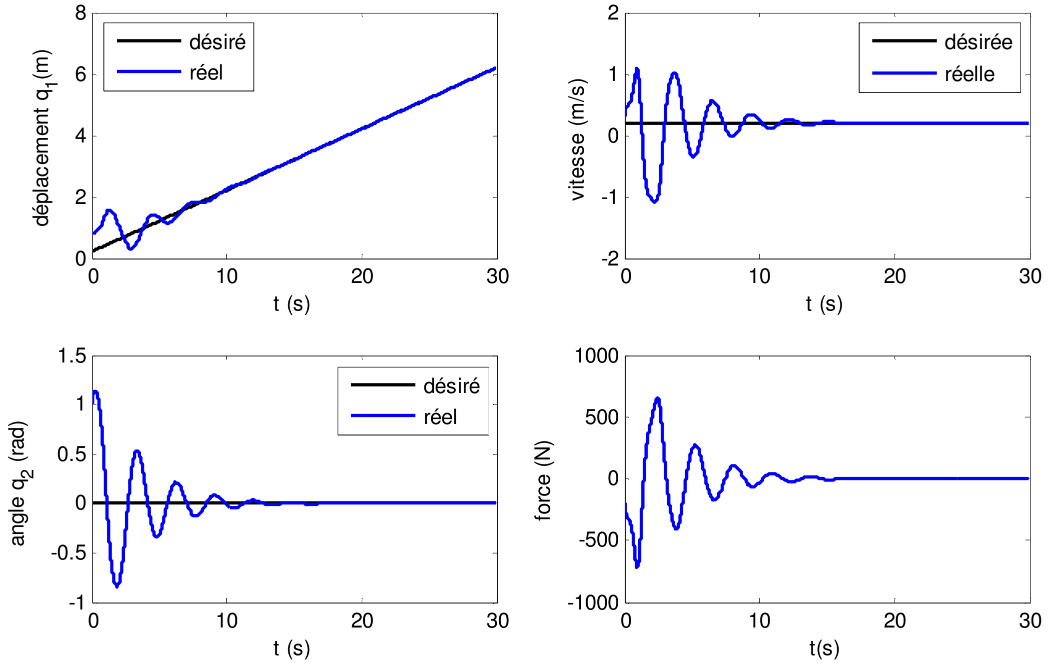


Figure 3.13 : Résultats de simulation pour la commande basée sur l'approche de Lyapunov

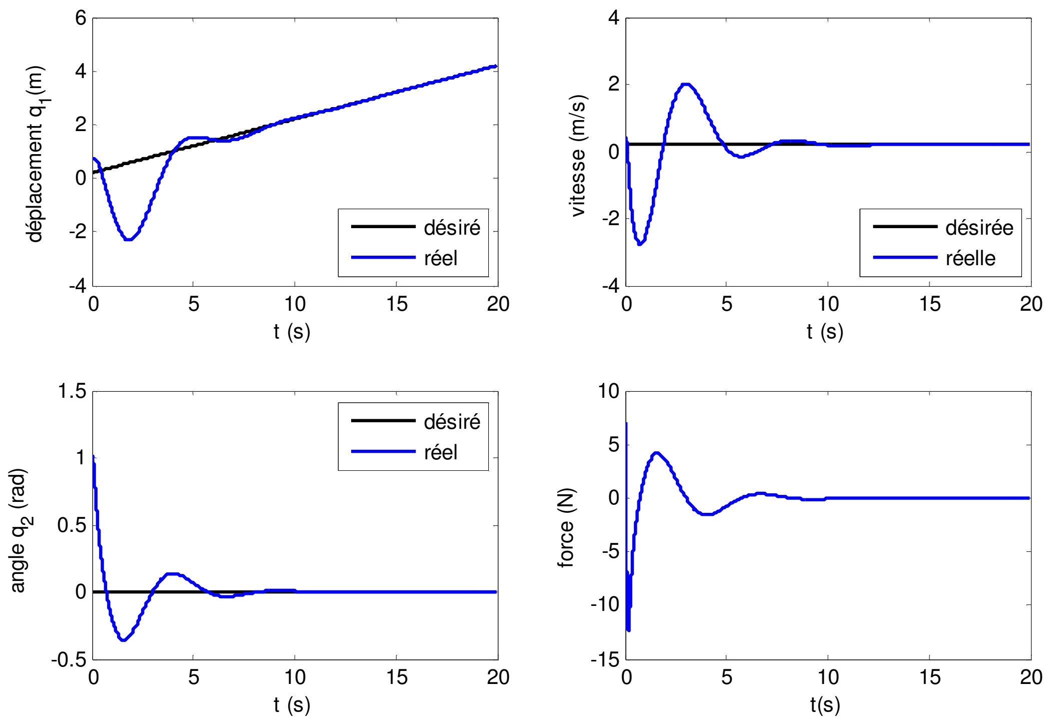


Figure 3.14 : Résultats de simulation pour la CBP-AIA avec des paramètres différents

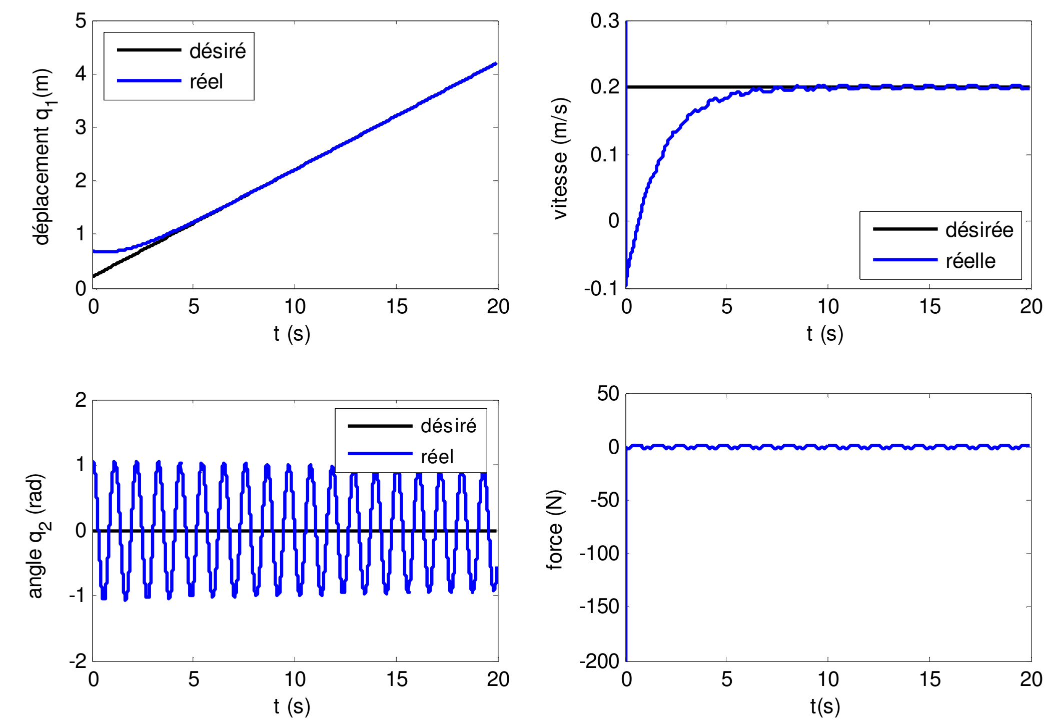


Figure 3.15 : Simulation pour la commande basée sur Lyapunov avec des paramètres différents

III.4.2.2 Méthodes constructives pour la résolution des EDPs assorties

Dans cette section, nous allons étudier deux méthodes constructives pour la résolution des EDPs assorties, l'une proposée par Acosta [Acosta-05] et l'autre par Viola [Viola-07a].

III.4.2.2.1 Méthode proposée par Acosta

Dans cette section, on suit la démarche proposée par Acosta et al. [Acosta-05] pour construire une solution de l'EDP de l'énergie cinétique (3.37). Une fois la solution de cette EDP est obtenue, on pourra alors résoudre l'EDP de l'énergie potentielle (3.38).

a Résolution de l'EDP de l'énergie cinétique

On suppose que la matrice d'inertie M ne dépende pas des coordonnées non actionnées, éliminant ainsi le terme $G^{\perp}\nabla_q(p^T M^{-1} p)$ de (3.37). En second lieu, en introduisant des paramétrisations appropriées pour J_2 et M_d, on verra que, pour le cas de la sous action de degré un, on a suffisamment de degrés de liberté dans J_2, ce qui nous permettra de résoudre l'équation algébrique obtenue une fois M_d fixé. Pour ce faire, on considère les deux hypothèses suivantes :

Hypothèse A1: le système a une sous-action de degré un, i.e. $m = n-1$.

Hypothèse A2 : Il existe un annulateur à gauche $G^{\perp}$ de G tel que

$$G^{\perp}\nabla_q(p^T M^{-1} p) = 0 \tag{3.141}$$

L'hypothèse A2 impose essentiellement que M ne dépend pas de la coordonnée non actionnée. Cette hypothèse peut être satisfaite si on utilise une linéarisation partielle par feedback [Spong-98]; ou bien un changement de coordonnées [Voila-07a].

Pour simplifier les calculs, une représentation de l'EDP de l'énergie cinétique (3.37) est nécessaire. Par conséquent, il est commode d'exprimer (3.37) sous une forme équivalente. Pour cela, J_2 peut être paramétrée sous la forme

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{p}^T\alpha_1 & \tilde{p}^T\alpha_2 & \dots & \tilde{p}^T\alpha_{n-1} \\ -\tilde{p}^T\alpha_1 & 0 & \tilde{p}^T\alpha_n & \dots & \tilde{p}^T\alpha_{2n-3} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ -\tilde{p}^T\alpha_{n-1} & -\tilde{p}^T\alpha_{2n-3} & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{3.142}$$

où les fonctions vectorielles $\alpha_i(q) \in \Re^n$ $\left(i = 1,\dots,n_0 \text{ et } n_0 = (n/2)(n-1)\right)$ sont des paramètres libres. Soit la coordonnée partielle :

$$\tilde{p} = M_d^{-1} p \tag{3.143}$$

On peut écrire

$$J_2 = \sum_{i=1}^{n_0} \tilde{p}^T \alpha_i W_i \tag{3.144}$$

avec $W_i \in \Re^{n\times n}$ $(i = 1,...., n_0)$ sont définis comme ci-après. Pour définir les W_i on construit d'abord n^2 matrices de dimension $n \times n$, , qu'on note $F^{kl} = \{ f_{ij}^{kl} \}$, k, $l \in \{1,2,...,n\}$, selon la règle :

$$f_{ij}^{kl} = \begin{cases} 1 \text{ si } j > i, i = k \text{ et } j = l \\ 0, \text{ autrement} \end{cases} \tag{3.145}$$

On note que seules n_0 matrices sont différentes de zéro. Ensuite, on définit $W^{kl} = F^{kl} - (F^{kl})^T$. Enfin, il est évident que $W_1 = W^{12}, W_2 = W^{13}, \ldots, W_n = W^{1n}, W_{n+1} = W^{23}, \ldots, W_{n_0} = W^{(n-1)n}$.

Par exemple, pour le cas $n = 3$, pour lequel aussi $n_0 = 3$, on obtient

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, W_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.146}$$

En utilisant cette paramétrisation, le terme $G^{\perp} J_2$ qui apparaît dans (3.37) devient

$$G^{\perp}(q) J_2(q, p) = \tilde{p}^T \Im(q) \mathrm{A}^T(q) \tag{3.147}$$

où
$$\Im(q) = \left[\alpha_1 \;\vdots\; \alpha_2 \;\vdots\; \ldots \;\vdots\; \alpha_{n_0} \right] \in \Re^{n \times n_0} \tag{3.148}$$

$$\mathrm{A} = -\left[W_1 (G^{\perp})^T, W_2 (G^{\perp})^T, \ldots, W_{n_0} (G^{\perp})^T \right] \in \Re^{n \times n_0} \tag{3.149}$$

Proposition 3.4 [Acosta-05] *Sous les hypothèses A1 et A2, l'EDP (3.37) devient*

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i(q) \frac{dM_d}{dq_i} = -\left[\Im(q) \mathrm{A}^T(q) + \mathrm{A}(q) \Im^T(q) \right] \tag{3.150}$$

où
$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)^T = M^{-1} M_d (G^{\perp})^T \in \Re^n \tag{3.151}$$

En utilisant l'hypothèse A1, (3.147) et (3.151), l'EDP (3.37) peut être écrite comme suit

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i p^T \frac{dM_d^{-1}}{dq_i} p - 2 \tilde{p}^T \Im(q) \mathrm{A}^T \tilde{p} = 0 \tag{3.152}$$

Donc, en utilisant la relation : $\frac{dM_d^{-1}}{dq_i} = -M_d^{-1} \frac{dM_d}{dq_i} M_d^{-1}$, et le fait que la matrice $\Im \mathrm{A}^T$ est symétrique , on a :

$$\tilde{p}^T \left[\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \frac{dM_d}{dq_i} + 2 \Im \mathrm{A}^T \right] \tilde{p} = 0 \tag{3.153}$$

Pour la suite, on réalise une paramétrisation de la matrice d'inertie désirée pour laquelle il existe un $\Im$ qui permet d'avoir le terme entre parenthèses de (3.153) égal à zéro est présenté. Pour plus de commodité ce terme est écrit comme suit :

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \frac{dM_d}{dq_i} = -2\mathrm{A}\Im^T \tag{3.154}$$

Rappelons que les γ_i, tels que définis dans (3.151), sont des fonctions de M_d. Il est important de souligner que l'ensemble de M_d qui satisfait (3.154) est strictement contenue dans l'ensemble qui satisfait (3.150), qui comme indiqué dans la proposition 3.4, caractérise toutes les solutions de (3.37). On travaillera avec ce petit ensemble, car, comme on le verra ci-dessous, on peut de cette manière donner une expression explicite simple pour M_d. Donc, toutes les solutions de (3.154), sont des solutions de (3.37) [Acosta-05].

On résout (3.154) comme une équation algébrique dont l'inconnu est $\Im$ pour un M_d donnée. Pour ce faire, on note qu'à partir de (3.149) et des matrices antisymétriques W_i, on a

$$G^{\perp}\mathrm{A} = 0 \tag{3.155}$$

L'équation ci-dessus indique que $\mathrm{A} \in \mathrm{Im}(G)$. En tenant compte de (3.154), M_d est choisi tel que $\left(dM_d/dq_i\right) \in \mathrm{Im}\, G$.

Pour résumer, la matrice M_d, solution de (3.37) doit satisfaire:

$$M_d = M_d^T > 0 \quad \text{et} \quad G^{\perp}\left(dM_d/dq_i\right) = 0 \tag{3.156}$$

On doit prouver maintenant que, pour la matrice d'inertie M_d de (3.156), il existe $\Im$ solution de l'équation algébrique (3.154). L'existence de $\Im$ solution de (3.154) dépendra du rang de la matrice A comme le montre le lemme suivant :

Lemme 3.1 [Acosta-05] *Considérons la matrice* $\mathsf{A} \in \Re^{n \times n_0}$ *avec* $n_0 \geq n > 2$, $rang\mathsf{A} = n-1$, *et tel que* $w^T\mathsf{A} = 0$ *pour* $w \in \Re^n$. *Alors, pour tous les vecteurs* $x \in \Re^n$ *tels que* $w^T x = 0$ *il existe un vecteur* $y \in \Re^{n_0}$ *tel que* $x = \mathsf{A}y$.

Pour utiliser le lemme 3.1, on doit montrer que A satisfait la condition nécessaire de rang.

Lemme 3.2 [Acosta-05] *Pour la matrice* A *définie dans (3.149), on a* $rang(\mathrm{A}) = n-1$.

Pour donner la paramétrisation de M_d de telle sorte que (3.37) puisse être résolue explicitement, on a besoin de l'hypothèse suivante.

Hypothèse A3 : la matrice G dépend seulement de q_r, avec r est un entier qui appartient à l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$.

La solution de l'équation (3.37) est alors donnée par la proposition ci-dessous.

Proposition 3.5 [Acosta-05] En *supposant que les hypothèses A1-A3, sont satisfaites. Sous ces conditions, pour toute matrice d'inertie désirée positive définie de la forme :*

$$M_d(q_r) = \int_{q_r^*}^{q_r} G(\mu)\psi(\mu)G^T(\mu)d\mu + M_c \tag{3.157}$$

où la matrice $\psi = \psi^T \in \Re^{(n-1)\times(n-1)}$ *et la matrice constante* $M_c = M_c^T > 0$ *, peuvent être choisies arbitrairement, il existe une matrice* J_2 *telle que l'EDP (3.37) de l'énergie cinétique soit vérifiée au voisinage de* q_r^* *, où* q_r^* *représente le* $r^{ième}$ *élément de l'équilibre désirée* q^* *.*

D'après la proposition 3.5, on note que les limites d'intégration ont été choisies de telle sorte que $M_d(q_r^*) > 0$. Par conséquent, $M_d > 0$ au voisinage de q_r^*. Comme M_d est seulement fonction de q_r, (3.154) devient

$$\gamma_r(q)\frac{dM_d}{dq_r} = -2\mathrm{A}(q_r)\Im^T(q_r) \tag{3.158}$$

On doit prouver que, pour la matrice d'inertie proposée (3.157), il existe $\Im$ solution de l'équation algébrique (3.158). Ce qu'on obtient, en utilisant le lemme 3.1, le lemme 3.2, l'équation (3.155) et le fait que $G^\perp\left(dM_d/dq_r\right) = 0$.

Par exemple, pour $n = 2$, on a $n_0 = 1$, par conséquent $\mathrm{A}(q_r)$ est un vecteur, donc on peut donner une expression explicite pour $\Im(q_r)$ en terme de pseudo inverse de $\mathrm{A}(q_r)$.

b. Résolution de l'EDP de l'énergie potentielle

L'EDP (3.38) peut être écrite en utilisant (3.151) comme suit

$$\gamma^T(q)\nabla_q V_d = s(q) \tag{3.159}$$

où, pour simplifier la notation, on définit la fonction scalaire

$$s = G^\perp \nabla_q V \tag{3.160}$$

Cette fonction, qui est uniquement déterminée par le système en boucle ouverte, joue un rôle essentiel dans le problème de stabilisation ; on propose de l'analyser.

Tout d'abord, on note que pour tout équilibre admissible $\overline{q}$, on a

$$s(\overline{q}) = 0 \tag{3.161}$$

l'équation (3.161) découle des équations dynamiques des moments (3.24), dont le côté droit évalué pour $p = 0$ devient $(-\nabla_q V + Gu)$. Ensuite, le vecteur $\nabla_q V$ contient les forces induites par l'énergie potentielle, en particulier, $G^{\perp}\nabla_q V$ sont les forces qui ne peuvent pas être (directement) affectées par la commande. Se référant à l'EDP (3.38), on rappelle que le mécanisme de façonnement de l'énergie potentielle est introduit par le terme $M_d M^{-1}$. Puisque, M_d doit dépendre d'une seule coordonnée, il est raisonnable d'exiger que s dépende aussi uniquement de q_r.

Une fois M_d est fixé, γ tel qu'il est donné par (3.151) est également fixé et (3.159) est une EDP linéaire qui peut être résolue. Puisque on s'intéresse à la construction d'une solution au problème de stabilisation, deux hypothèses supplémentaires sont imposées afin de résoudre explicitement (3.159).

Hypothèse A4 : Le vecteur γ et la fonction s définis dans (3.151), (3.160) respectivement, dépendent uniquement de q_r, déterminé dans l'hypothèse A3

Hypothèse A5: $$\gamma_r(q_r^*) \neq 0 \qquad (3.162)$$

Sous l'hypothèse A3 et avec M_d définie par (3.157), γ est en fonction de q_r si M est en fonction de q_r. Cette hypothèse est une condition qui est imposée pour assurer que l'EDP (3.159) admet une solution bien définie dans un voisinage de q_r^*. Cela provient du fait que les γ_i sont en fonctions de q_r, et en vue de (3.161), s est nul à q_r^*.

La solution de l'équation (3.38) est alors résumée dans la proposition suivante :

Proposition 3.6 [Acosta-05]: *En supposons que les hypothèses A1-A5 sont satisfaites et que M_d est donné par (3.157), toutes les solutions de l'EDP (3.38) sont données par*

$$V_d(q) = \int_0^{q_r} \frac{s(\mu)}{\gamma_r(\mu)} d\mu + \Phi(z(q)) \qquad (3.163)$$

avec γ et s définis dans (3.151) et (3.160)*, respectivement. $z \in \Re^n$ est défini comme suit :*

$$z(q) = q - \int_0^{q_r} \frac{\gamma(\mu)}{\gamma_r(\mu)} d\mu \qquad (3.164)$$

avec Φ est une fonction différentielle arbitraire.

Pour simplifier la CBP-AIA, la fonction Φ est prise comme suit [Acosra-05]

$$\Phi(z(q)) = \frac{1}{2}\left[z(q) - z(q^*)\right]^T P\left[z(q) - z(q^*)\right] \qquad (3.165)$$

où $P = P^T > 0$.

Pour assurer la stabilité, on exige, en plus de la positivité de M_d, que V_d soit minimale à l'équilibre, c.à.d. l'équation (3.27) soit vérifiée. À partir de (3.163), et le fait que Φ est arbitraire, il est clair que les restrictions seront imposées, sur le terme $\int (s/\gamma_r)$. De l'équation (3.162) et l'hypothèse A5, on constate que cette fonction a déjà un extremum en q_r^*. Afin de s'assurer que c'est un minimum, on vérifie que sa dérivée seconde, évaluée en q_r^*, est positive. Quelques calculs montrent que cette condition est équivalente à l'hypothèse suivante :

Hypothèse A6 : $$\gamma_r(q_r^*)\frac{ds}{dq_r}(q_r^*) > 0 \tag{3.166}$$

On rappelle que s représente les forces induites par la fonction d'énergie potentielle. q_r^* correspond à un équilibre qui est généralement instable en boucle ouverte, donc la fonction d'énergie potentielle V en boucle ouverte aura un maximum en ce point et $(ds/dq_r)(q_r^*) < 0$. À partir de (3.38) et (3.151), on a γ_r qui est l'élément de terme de couplage "$M^{-1}M_d G^{\perp}$" et à travers lequel on peut modifier l'énergie potentielle en boucle ouverte. En résumé, l'hypothèse A6 reflète notre capacité à façonner, pour des fins de stabilisation, l'énergie potentielle par la modification de l'énergie cinétique.

Considérons que les hypothèses A1 jusqu'à A6 sont satisfaites alors la CBP-AIA stabilise l'équilibre désiré q^*. De plus, une seule condition supplémentaire est imposée pour garantir la stabilité asymptotique. Elle est donnée comme suit :

Hypothèse A 7 : $$\left|G^T M^{-1} e_r(q_r^*)\right| \neq 0 \tag{3.167}$$

Pour résumer, la CBP-AIA satisfaisant toutes les hypothèses ci-dessus stabilise asymptotiquement le système, au moins, au voisinage de q_r^*.

Pour illustrer tout cela, reprenons l'exemple du pendule inverse.

c. Application au pendule inversé

Dans cette section, on applique la CBP-AIA au pendule inversé, pour cela on commencera par la vérification des hypothèses A1-A7.

on rappelle (chapitre II) que le modèle du pendule inversé après linéarisation partielle par feedback, est donné comme suit :

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} a\sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b\cos(q_1) \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{3.168}$$

De (3.168) on a

$$M = I_2 \tag{3.169}$$

$$V(q_1) = a\cos(q_1) \tag{3.170}$$

$$G(q_1) = \begin{bmatrix} -b\cos(q_1) \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.171}$$

On note que $n = 2$ et $m = 1$ donc la sous-action est de degré un.

Vérification de l'hypothèse A1: cette supposition est satisfaite

Vérification de l'hypothèse A2: Cette supposition est satisfaite car la matrice d'inertie en boucle ouverte (3.169) est constante. $G^{\perp}$ est calculé comme suit

$$G^{\perp} = \begin{bmatrix} 1 & b\cos(q_1) \end{bmatrix} \tag{3.172}$$

Vérification de l'hypothèse A3: d'après l'équation (3.171), on a G qui dépend seulement de q_1. Donc l'hypothèse A3 est satisfaite et $r = 1$.

Vérification de l'hypothèse A4: la matrice ψ est choisie de tel sorte quelle dépendra uniquement de q_1 et γ dépend aussi seulement de q_1 (d'après les équations (3.171), (3.157) et (3.151)). Dans ce cas, ψ est pris comme suit [Acosta-05] :

$$\psi(q_1) = -\mathrm{k}\sin(q_1) \tag{3.173}$$

où $\mathrm{k} > 0$ est un paramètre libre et s devient :

$$s = -a\sin q_1 \tag{3.174}$$

Donc l'hypothèse 4 est satisfaite.

Vérification des hypothèses A5 et A6: Dans cette étude, le redressement du pendule n'est pas considéré mais on suppose que le pendule est dans le demi-plan supérieur. Donc $q_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ et ceci conduit à $\dfrac{ds}{dq_1} = -a\cos(q_1) < 0$. Les hypothèses A5 et A6 peuvent être intégrés dans une seule hypothèse qui est écrite comme suit :

$$\gamma_1(q_1^*) < 0 \tag{3.175}$$

Vérification de l'hypothèse A7 : l'équation (3.167) est calculée comme suit

$$\left| b\cos(q_1^*) \right| \neq 0 \tag{3.176}$$

Cette hypothèse est toujours satisfaite pour $q_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Considérons l'équation (3.151), on constate que la matrice M_d est importante pour l'hypothèse intégrée (3.175), ce qui signifie que la matrice constante M_c est un paramètre libre qui doit être sélectionné soigneusement.

Supposons que $M_d(q_1^*) > 0$. De (3.157), et après calcul on obtient la matrice M_d suivante

$$M_d(q_1) = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{k}b^2}{3}\cos^3(q_1) & \frac{-\mathrm{k}b}{2}\cos^2(q_1) \\ \frac{-\mathrm{k}b}{2}\cos^2(q_1) & \mathrm{k}\cos(q_1) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} m'_{c11} & m'_{c12} \\ m'_{c21} & m'_{c22} \end{bmatrix}}_{M'_c} \tag{3.177}$$

La matrice M_c est donnée par :

$$M_c = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{k}b^2}{3}\cos^3(q_1^*) + m'_{c11} & \frac{-\mathrm{k}b}{2}\cos^2(q_1^*) + m'_{c12} \\ \frac{-\mathrm{k}b}{2}\cos^2(q_1^*) + m'_{c21} & \mathrm{k}\cos(q_1^*) + m'_{c22} \end{bmatrix} \tag{3.178}$$

et $$q_1^* = 0 \tag{3.179}$$

est l'équilibre désiré.

Le second terme de l'équation (3.177) est noté M'_c. C'est une matrice constante symétrique qui peut être sélectionnée arbitrairement telle que $M_d(q_1^*) > 0$ soit vérifiée. Dans [Acosta-05] et [Van der Burg-07], les éléments m'_{c11} et $m'_{c12} = (m'_{c22})$ sont fixés à zéro alors que ces paramètres ne sont pas fixés à zéro dans [Yokoyama-10]. Ce dernier cas conduit à façonner l'énergie cinétique activement. Une méthode pour la sélection de la matrice M_c, qui rend le réglage de la CBP-AIA facile est proposée dans [Yokoyama-10].

L'hypothèse intégrée (3.175) dépend de M_d. Par conséquent, l'utilisation de tous les paramètres de M'_c rend l'hypothèse plus complexe. Pour éviter cela, on suppose que M'_c dépend du paramètre k de l'équation (3.173), qui est impliqué dans tous les éléments de la matrice d'inertie (3.177) de la boucle fermée. Dans ce cas :

$$M'_c = \mathrm{k}\, M''_c = \mathrm{k}\begin{bmatrix} m''_{c11} & m''_{c12} \\ m''_{c21} & m''_{c22} \end{bmatrix} \tag{3.180}$$

où $M''_c = \left(M''_c\right)^T$ est une matrice qui peut être choisie arbitrairement tel que $M_d(q_1^*) > 0$ est vérifiée. Ces opérations simplifient les hypothèses, et les paramètres libres dans M'_c peuvent être facilement sélectionnés dans une région à deux dimensions où toutes les hypothèses sont satisfaites.

Considérons $\mathrm{k} > 0$, l'hypothèse $M_d(q_1^*) > 0$ correspond à :

$$\begin{cases} m''_{c11} > \dfrac{1}{1+m''_{c22}}\left(m''_{c12} - \dfrac{b}{2}\right)^2 - \dfrac{b^2}{3} & (3.181) \\ m''_{c22} > -1 & (3.182) \end{cases}$$

Ces hypothèses dépendent des paramètres m''_{c11}, m''_{c12} et m''_{c22}. En donnant m''_{c22} selon l'inégalité (3.182), alors (3.181) est réduite à une simple équation d'une parabole. Il est à noter que sans la condition (3.180), l'hypothèse $M_d(q_1^*) > 0$ dépendra de $m''_{c11}, m''_{c12}, m''_{c22}$ et k. Par conséquent le choix des paramètres devient plus compliqué.
L'hypothèse intégrée (3.175) est calculée comme suit :

$$m''_{c11} < -bm''_{c12} + \frac{b^2}{6} \tag{3.183}$$

L'inégalité (3.183) dépend de m''_{c11} et m''_{c12}, et peut être représentée par une droite. Il est à noter aussi que sans (3.180), l'hypothèse $M_d(q_1^*) > 0$ dépendra de m''_{c11}, m''_{c12} et k. Par conséquent le choix des paramètres devient plus compliqué.
La représentation graphique de (3.181) et (3.183) est montrée dans la figure 3.16. La zone grise représente l'ensemble des m''_{c11} et m''_{c12} qui satisfont les hypothèses de stabilisation. Par conséquent, étant donné m''_{c22} qui satisfait l'inégalité (3.182), le concepteur peut sélectionner graphiquement m''_{c11} et m''_{c12} de la région grise de la figure 3.16. Ainsi la modification de l'énergie cinétique est facile et les performances transitoires de la CBP-AIA sont améliorées.

Par ailleurs, en égalisant les côtés gauches dans les équations (3.181) et (3.183) et en considérant l'équation obtenue de second ordre dont l'inconnu est m''_{c12}, son déterminant est :

$$\Delta = b^2(m''_{c22}+1)^2 > 0 \tag{3.184}$$

Cela indique que la parabole et la droite se croisent toujours en deux points différents. L'équation (3.182) doit être satisfaite et la parabole est toujours convexe. On peut dire que la zone grise existe toujours pour chaque paramètre b constant positif du système.

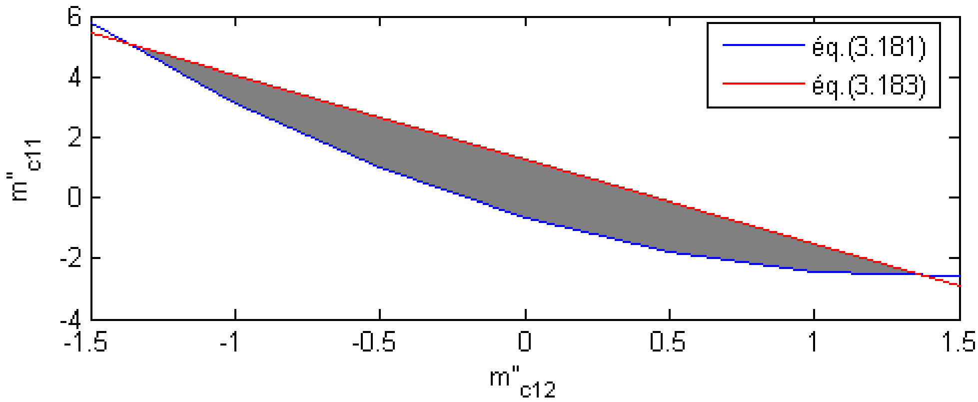


Figure 3.16: Représentation graphique des hypothèses

En calculant V_d en utilisant les équations (3.163) à (3.65), l'entrée de CBP-AIA est donnée comme suit

$$u = (G^T G)^{-1} G^T (A_{ke} + A_{pe} + A_{J_2}) - A_{di} \tag{3.185}$$

$$A_{ke}(q_1, p) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} m_{d11}(q_1) p^T M_d^{-1}(q_1) G(q_1) \psi(q_1) G^T(q_1) M_d^{-1}(q_1) p \\ m_{d12}(q_1) p^T M_d^{-1}(q_1) G(q_1) \psi(q_1) G^T(q_1) M_d^{-1}(q_1) p \end{bmatrix} \tag{3.186}$$

$$A_{pe}(q) = \begin{bmatrix} -a\sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} - M_d(q_1)\left\{\begin{bmatrix} \dfrac{s(q_1)}{\gamma_1(q_1)} \\ 0 \end{bmatrix} + P_{22}\begin{bmatrix} (q_2 - q_2^* + F(q_1) - F(q_1^*))\dfrac{dF(q_1)}{dq_1} \\ q_2 - q_2^* + F(q_1) - F(q_1^*) \end{bmatrix}\right\} \tag{3.187}$$

$$A_{J_2}(q_1, p) = J_2(q_1, p) M_d^{-1}(q_1) p \tag{3.188}$$

$$A_{di}(q_1, p) = K_v G^T(q_1) M_d^{-1}(q_1) p \tag{3.189}$$

où
$$P = P^T = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > 0 \tag{3.190}$$

$$F(q_1) = -\int_0^{q_1} \frac{\gamma_2(\mu)}{\gamma_1(\mu)} d\mu \tag{3.191}$$

$P_{11}, P_{12} = P_{21}$ seront éliminés en calculant l'entrée. J_2 est donnée [Acosta-05] et [van der Burg-07] comme suit :

$$J_2(q_1, p) = \begin{bmatrix} 0 & j_2 \\ -j_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.192}$$

où
$$j_2(q_1, p) = -\frac{1}{2}\gamma_1(q_1) p^T M_d^{-1}(q_1) G(q_1) \psi(q_1) G^T(q_1) e_2 \tag{3.193}$$

avec $e_2 = [0,1]^T$.

En résumé, la commande CBP-AIA est paramétrée par $\{m''_{c11}, m''_{c12}, m''_{c22}, \mathrm{k}, P_{22}, K_v\}$.

Pour vérifier l'efficacité de la CBP-AIA on réalise une simulation. Les paramètres de réglage de la cette dernière sont donnés dans le tableau 3.1. Le cas 1 représente l'étude effectuée dans [Van der Burg-07]. Dans le cas 2 seul M_c'' est réglé pour améliorer les performances transitoires et les autres paramètres sont les mêmes que le cas 1. Dans le cas 3 tous les paramètres sont réglés.

Les paramétrés du pendule inversé sont $m = 0.39Kg$, $\mathrm{M} = 0.6Kg$ et $l = 0.36\mathrm{m}$. On a $g = 9.81\ \mathrm{m}/s^2$. Les conditions initiales sont $q_1 = 0.1$ et $q_2 = 0$.

Tableau 3.1 : Trois cas de paramètres du réglage de la CBP-AIA

	m''_{c11}	$m''_{c12} = m''_{c21}$	m''_{c22}	k	P_{22}	K_v
Cas 1	0	0	0	0.07	20	0.13
Cas 2	0.05	0.1	-0.1	0.07	20	0.13
Cas 3	0.0001	-0.002	-0.01	2.5	5	7

En premier lieu, on compare le cas 1 avec le cas 2 afin de montrer l'influence de réglage de M_c'' (équivalent au réglage de M_c'). Les résultats de simulation sont présentés sur la figure 3.17. Les figures 3.17 (a) et 3.17 (c) montrent les réponses de l'angle du pendule, et la force d'entrée τ respectivement. Les deux cas montrent des réponses transitoires similaires. Les réponses transitoires du déplacement du chariot sont présentées sur la figure 3.17 (b). Le cas 1 est plus lent que celui du cas 2. La figure 3.17 (d) montre l'énergie totale du système en boucle fermée. L'énergie prend des valeurs positives et elle diminue dans le temps. Elle joue le rôle d'une fonction de Lyapunov comme prévu théoriquement. Ces résultats montrent que le réglage de M_c'' peut mener à une amélioration des réponses transitoires.

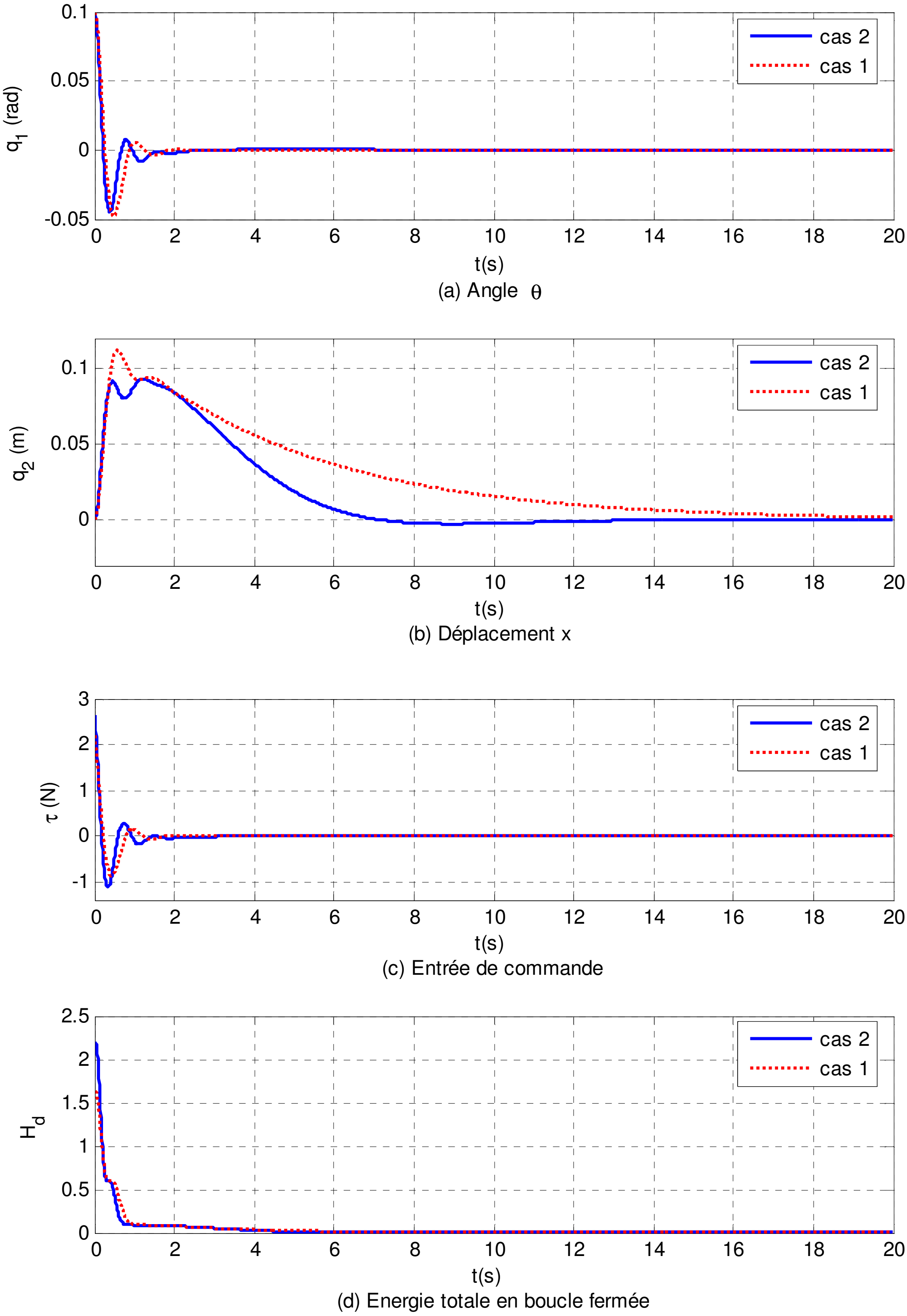


Figure 3.17: Réponses du pendule inversé à la CBP-AIA dans le cas 1 et 2

Dans ce qui suit, la CBP-AIA avec une sélection des paramètres adéquats dans le cas 3 est comparée avec le cas 1, la commande LQR et la commande par mode glissant. Dans le cas 3, les paramètres sont déterminés en considérant que, K_v agit comme un gain d'amortissement, et P_{22} comme un gain de retour de déplacement q_2 dans (3.187). Les autres sont choisis par essais des erreurs en utilisant M_c'' [Yokoyama-10].

Pour le calcul de la commande LQR, les matrices de pondérations avec le vecteur d'état $X = [q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2]$ sont choisies comme suit:

$$Q = diag[75, 50, 1, 15] \tag{3.194}$$

$$R = 5 \tag{3.195}$$

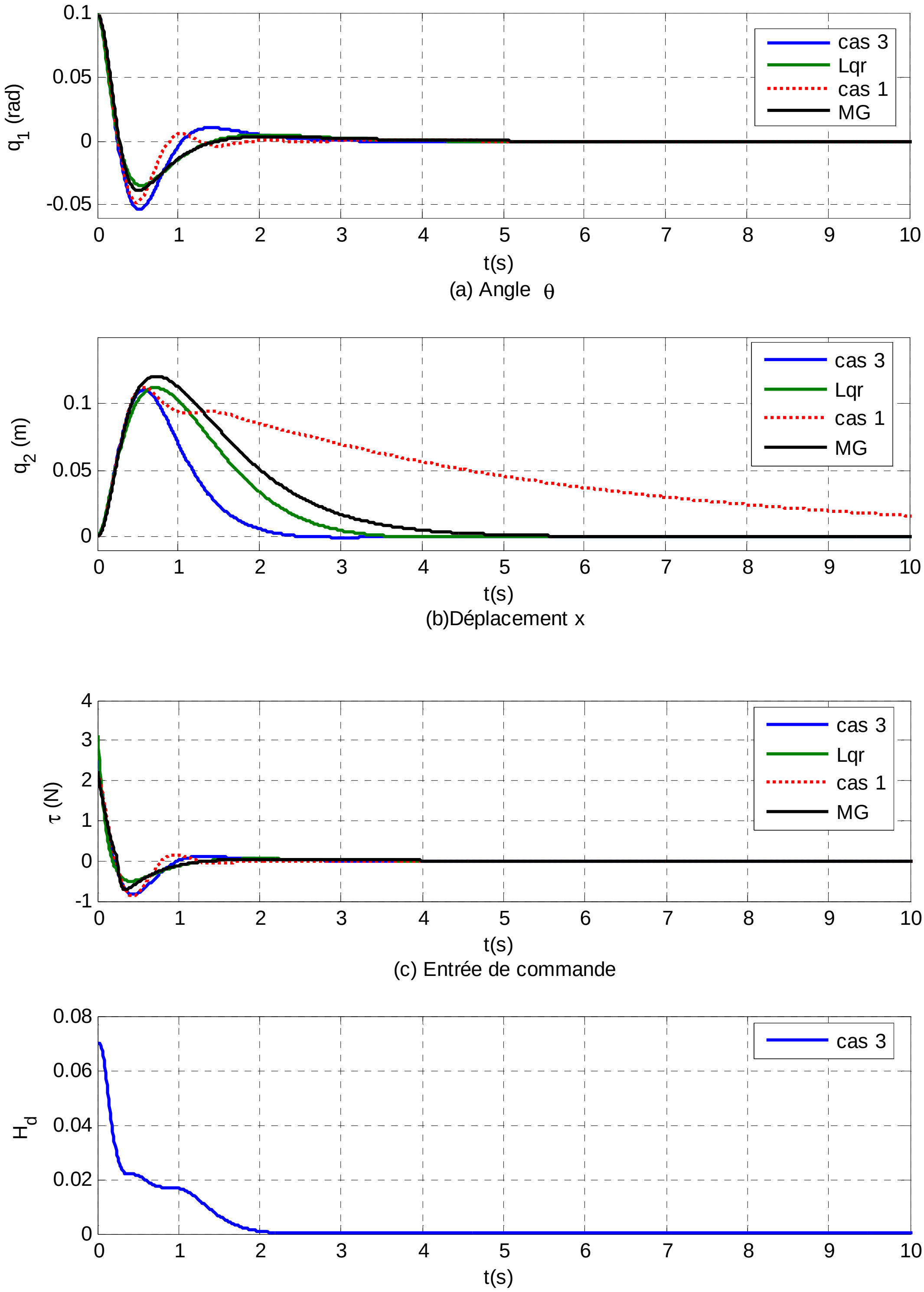
Dans la commande par mode glissant (MG), pour asservir la position du chariot et du pendule vers les états désirés, la surface de glissement à base de retour d'états autour du point d'équilibre instable, sera alors appliquée. Dans ce cas la surface de glissement est choisie comme suit

$$S = \lambda X \tag{3.196}$$

λ est déterminé par placement de pôles sur le système linéarisé autour du point d'équilibre instable (c.à.d. autour de l'origine).

Les réponses du système sont données à la figure 3.18. Dans les figures 3.18 (a) et 3.18 (c), la CBP-AIA montre un dépassement de l'angle du pendule et l'entrée de commande légèrement plus grande dans le cas de la commande LQR et de la commande MG. Le taux de convergence de toutes les commandes est similaire. La figure 3.18 (b) montre que la vitesse de la réponse transitoire du déplacement du chariot dans le cas 3 est le plus rapide de toutes les commandes. La commande dans le cas 3 montre aussi des performances transitoires rapides que celles dans le cas 2, figure 3.17 (b).

On conclut que la modification de l'énergie cinétique par M_c'' et la sélection adéquate des paramètres peuvent améliorer les performances transitoires de la CBP-AIA.



(a) Angle θ

(b)Déplacement x

(c) Entrée de commande

(d) Energie totale en boucle fermée

Figure 3.18: Réponses du pendule inversé aux commandes : CBP-AIA, LQR et MG

III.4.2.2.2 Méthode proposée par Viola

Selon Acosta et al. [Acosta-05], si $n - m = 1$ et si la matrice d'inertie et la force induite par l'énergie potentielle sont indépendantes de la coordonnée non actionnée, alors les EDPs (3.37) et (3.38) peuvent être explicitement résolues. La première hypothèse sur la matrice d'inertie implique, précisément, que le terme $G^{\perp}\nabla_q(p^T M^{-1} p) = 0$, ceci est essentiel pour la construction des solutions.

Dans Viola et al. [Viola-07a], les auteurs ont montré qu'il est possible de transformer l'EDP de l'énergie cinétique non homogène (3.37) en une EDP homogène (c.à.d, avec $G^{\perp}\nabla_q(p^T M^{-1} p) = 0$) en utilisant une transformation de coordonnées et une reparamétrisation de la dynamique cible (dynamique en boucle fermée). Ce qui peut être réalisé à condition que la matrice de transformation de coordonnées existe. Cette nouvelle EDP est semblable à l'EDP de l'énergie cinétique (3.37), mais sans l'exigence de la positivité de ses solutions.

La stratégie proposée dans [Viola-07a] pour éliminer le second membre dans l'EDP de l'énergie cinétique (3.37) se compose de deux étapes.

Tout d'abord, il faut exprimer le système (3.24) $\left(\Sigma : \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} u \right)$

dans les nouvelles coordonnées $(q, \tilde{p})$, avec

$$p = T(q)\tilde{p} \tag{3.197}$$

où $T \in \Re^{n\times n}$ de rang plein. Ce qui donne :

$$\tilde{\Sigma} : \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\tilde{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & T^{-T} \\ -T^{-1} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q \tilde{H} \\ \nabla_{\tilde{p}} \tilde{H} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ T^{-1}G(q) \end{bmatrix} u \tag{3.198}$$

où
$$F_{22} = -T^{-1}\left[S(q,\tilde{p}) - S^T(q,\tilde{p}) \right] T^{-T} \tag{3.199}$$

$$\tilde{H}(q,\tilde{p}) = \frac{1}{2}\tilde{p}^T T^T(q) M^{-1}(q) T(q)\tilde{p} + V(q) \tag{3.200}$$

et
$$S(q,\tilde{p}) = \nabla_q \left(T(q)\tilde{p} \right) \tag{3.201}$$

Deuxièmement, on définit une nouvelle dynamique cible dans les coordonnées $(q, \tilde{p})$, comme suit :

$$\tilde{\Sigma}_d : \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\tilde{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & F_{12} \\ -F_{12}^T & \tilde{J}_2(q,\tilde{p}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q \tilde{H}_d \\ \nabla_{\tilde{p}} \tilde{H}_d \end{bmatrix} \tag{3.202}$$

où
$$\tilde{H}_d(q,\tilde{p}) = \frac{1}{2}\tilde{p}^T \tilde{M}_d^{-1}(q)\tilde{p} + \tilde{V}_d(q)$$

(3.203)

$$F_{12} = M^{-1}(q) T(q) \tilde{M}_d(q) \tag{3.204}$$

$\tilde{M}_d \in \Re^{n\times n}$ et $\tilde{J}_2 = \tilde{J}_2^T$ est libre.

Le lien entre (3.202) et le système dynamique cible (3.29) $\left(\Sigma_d : \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = [J_d - R_d] \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix} \right)$

exprimé dans les nouvelles coordonnées sera établie par la suite.

Hypothèse B: la matrice de rang plein T est telle que, pour $k = 1,\dots,n-\mathrm{m}$,

$$\sum_{i=1}^{n}\left[T^T M^{-1} e_i G_k^{\perp}\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial T^T}{\partial q_i}\left(e_i G_k^{\perp}\right)^T M^{-1}T+G_k^{\perp}e_i T^T\frac{\partial M^{-1}}{\partial q_i}T\right]=0 \qquad (3.205)$$

Proposition 3.7 [Viola-07a] *Considérons le système (3.24) et le changement de coordonnées partiel $p = T(q)\tilde{p}$, où T satisfait l'hypothèse B. Pour toute matrice $\tilde{M}_d(q) = \tilde{M}_d^T(q) \in \Re^{n\times n}$ et fonction $\tilde{V}_d(q)$ qui satisfont les EDPs*

$$G^{\perp}T\left[\tilde{M}_d T^T M^{-1}\nabla_q\left(\tilde{p}^T\tilde{M}_d^{-1}\tilde{p}\right)-2\tilde{J}_2\tilde{M}_d^{-1}\tilde{p}\right]=0 \qquad (3.206)$$

$$G^{\perp}T\tilde{M}_d T^T M^{-1}\nabla_q\tilde{V}_d = G^{\perp}\nabla_q V \qquad (3.207)$$

pour $\tilde{J}_2(q,\tilde{p}) = -\tilde{J}_2^T(q,\tilde{p}) \in \Re^{n\times n}$, le système (3.24) en boucle fermée avec la CBP-AIA $u = \hat{\tilde{u}}(q,\tilde{p})$, où

$$\hat{\tilde{u}}(q,\tilde{p}) = (G^T G)^{-1}G^T(\nabla_q H + \dot{T}\tilde{p} + T\tilde{J}_2\tilde{M}_d^{-1}\tilde{p} - T\tilde{M}_d T^T M^{-1}\nabla_q\tilde{H}_d) \qquad (3.208)$$

prend dans les coordonnées $(q,\tilde{p})$ la forme hamiltonienne (3.202), (3.203).

Proposition 3.8 [Viola-07a] *L'hypothèse B est vérifiée avec $T = M$ si et seulement si*

$$G^{\perp}(q)C(q,\dot{q})\dot{q} = 0 \qquad (3.209)$$

où $C \in \Re^{n\times n}$ est la matrice des forces de Coriolis et de centrifuges du système (3.24).

Selon la proposition 3.8, la possibilité de simplifier les EDPs est déterminée par l'interaction entre les forces de Coriolis et de centrifuge et de la structure d'actionnement.

La version modifiée du résultat rapporté dans [Acosta-05], qui donne une solution constructive de l'EDP de l'énergie cinétique homogène (3.37) pour les systèmes avec une sous-action de degré un est donnée dans la proposition suivante.

Proposition 3.9 [Viola-07a] *Considérons l'équation (3.206). Supposons que $n-\mathrm{m}=1$, M ne dépend pas des coordonnées non actionnées et les matrices G et* T *sont en fonction uniquement de l'élément q_r de q avec $r \in \{1,\dots,n\}$, alors, pour toute matrice d'inertie positive définie de la forme*

$$\tilde{M}_d(q_r) = \int_{q_r^*}^{q_r} T^{-1}(\mu)G(\mu)\psi(\mu)G^T(\mu)T^{-T}(\mu)d\mu + \tilde{M}_c$$

(3.210)

où la matrice $\psi = \psi^T \in \Re^{(n-1)\times(n-1)}$ et la matrice constante $\tilde{M}_c = \tilde{M}_c^T > 0 \in \Re^{n\times n}$, peuvent être choisies arbitrairement, il existe une matrice $\tilde{J}_2$ telle que l'EDP de l'énergie cinétique (3.206), soit vérifiée au voisinage de q_r^*.

Plusieurs remarques peuvent être apportées, elles sont :

1. En comparant (3.37) avec (3.206), on remarque l'absence du terme de forçage $G^{\perp}\left\{\nabla_q(p^T M^{-1} p)\right\}$ dans la dernière équation, donc, l'EDP qui doit être résolu est plus simple. Comme il sera montré dans la proposition3.10, cette simplification a été atteinte sans modifier l'EDP de l'énergie potentielle (3.38), mais elle est soumise à la condition de trouver une matrice T satisfaisant l'hypothèse B.
2. Contrairement à M_d qui doit être symétrique et positive définie, la seule condition sur T est qu'elle doive être inversible.
3. Pour établir la proposition 3.7, on n'a pas besoin d'utiliser la dynamique du système transformées (3.198) sous forme hamiltonienne. Cela est conforme au fait que la CBP-AIA est applicable aux systèmes de la forme générale $\dot{x} = f(x) + g(x)u$.
4. Le changement de coordonnées du système et la dynamique cibles n'affectent pas les conditions assorties (matching conditions) et par conséquent, les EDPs seront équivalentes. Le système cible Σ_d est paramétré par le triplet $\{M_d, V_d, J_2\}$ tandis que le système $\tilde{\Sigma}_d$ est paramétré par le triplet $\{\tilde{M}_d, \tilde{V}_d, \tilde{J}_2\}$. Un feedback de la forme $u = \alpha(q,p) + \beta(q,p)v$, avec $\beta \in \Re^{m\times m}$ de rang plein, n'affectera pas les EDPs. En effet, pour un système de la forme $\dot{x} = f(x) + g(x)\, u$ et la dynamique cible $\dot{x} = F(x)\nabla H_d$ les équations assorties sont $g^{\perp} f = g^{\perp}\ F\ \nabla H_d$, avec $g^{\perp}\ g = 0$, indépendamment de l'action de la contre-réaction.

La proposition 3.7 établit que, en résolvant les nouvelles EDPs (3.206) et (3.207) et en considérant le système Σ décrit par les équations (3.24), le système en boucle fermée avec la CBP-AIA (3.208) prend, dans les coordonnées $(q, \tilde{p})$, la forme hamiltonienne $\tilde{\Sigma}_d$ décrite par les équations (3.202).

La proposition est mieux expliquée en se référant à la figure 3.19. Les connexions entre les nœuds Σ, $\tilde{\Sigma}$ et $\tilde{\Sigma}_d$ sont données par la proposition 3.7. Il reste à établir la connexion avec le nœud de la dynamique cible originale Σ_d. À cette fin, le système Σ_d décrit par les équations (3.29) est exprimé dans les nouvelles coordonnées. Il faut prouver l'existence d'une application bijective $\Psi : \{\tilde{M}_d, \tilde{V}_d, \tilde{J}_2\} \to \{M_d, V_d, J_2\}$, qui rende le système transformé équivalent à $\tilde{\Sigma}_d$, c.à.d., ayant la même matrice de structure et la même fonction hamiltonienne. Cela prouve que Σ et Σ_d sont équivalents et par conséquent, les paramètres $\{M_d, V_d, J_2\}$ résolvent les EDPs, et définissent la commande $\hat{u}(q,p)$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large] (q,\ p)\ \Sigma \arrow[r, "\hat{u}"] \arrow[d, shift right, "\Phi"'] & \Sigma_d\ \overset{(q,p)}{\{M_d, V_d, J_2\}} \arrow[d, shift right, "\Psi,\ \Phi"'] \\ (q,\ \tilde{p})\ \tilde{\Sigma} \arrow[r, "\hat{\hat{u}}"'] \arrow[u, shift right] & \tilde{\Sigma}_d\ \overset{(q,\tilde{p})}{\{\tilde{M}_d, \tilde{V}_d, \tilde{J}_2\}} \arrow[u, shift right] \end{tikzcd}$$

Figure 3.19 : Description schématique des transformations des systèmes

Proposition 3.10 [Viola-07b] *Le triplet* $\{\tilde{M}_d, \tilde{V}_d, \tilde{J}_2\}$ *résout les nouvelles équations correspondantes (3.206) et (3.207) si et seulement si le triplet* $\{M_d, V_d, J_2\}$ *résout les équations correspondantes originales (3.37) et (3.38) où*

$$\begin{aligned} &M_d(q) = T\tilde{M}_d(q)T^T \\ &V_d(q) = \tilde{V}_d(q) \\ &J_2 = T\tilde{J}_2(q, T^{-1}p)T^T + S(q, T^{-1}p)M^{-1}T\tilde{M}_dT^T - T\tilde{M}_dT^TM^{-1}S^T(q, T^{-1}p) \end{aligned} \tag{3.211}$$

et $S(q, \tilde{p})$ *est donnée en (3.201). En outre, la commande*

$$\hat{u} = (G^TG)^{-1}G^T(\nabla_q H - M_dM^{-1}\nabla_q H_d + J_2M_d^{-1}p) \tag{3.212}$$

qui fait correspondre Σ *à* Σ_d *est* $\hat{u}(q, p) = \hat{\hat{u}}(q, T^{-1}(q)p)$ *avec* $\hat{\hat{u}}$ *défini dans (3.208).*

On utilise le même exemple que précédemment à savoir le pendule inversé comme application de cette méthode aussi. L'objectif désiré est de stabiliser le pendule à la position haute, avec le chariot placé à n'importe quel endroit désiré, ce qui correspond à $q_1^* = 0$ et un q_2^* arbitraire.

D'après le chapitre II, on a : $M\ddot{q} + C + G_a = G\tau'$ avec

$$\begin{aligned} &M = \begin{bmatrix} 1 & b\cos(q_1) \\ b\cos(q_1) & m_3 \end{bmatrix} \\ &C_a = \begin{bmatrix} 0 \\ -b\sin(q_1)\dot{q}_1^2 \end{bmatrix};\ G_a = \begin{bmatrix} -a\sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix}\ ;\quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &a = \frac{g}{l};\ b = \frac{1}{l};\ m_3 = \frac{\mathrm{M} + m}{ml^2};\quad \tau' = \frac{\tau}{ml^2} \end{aligned} \tag{3.213}$$

On a $G^\perp = [1, 0]$.

La condition $G^\perp(q)C(q, \dot{q})\dot{q} = 0$ est satisfaite. Par conséquent, d'après la proposition 3.8,

$T = M$. On recherche une solution de l'EDP homogène (3.26), qui devient:

$$G^{\perp} M \left[\tilde{M}_d \nabla_q \left(\tilde{p}^T \tilde{M}_d^{-1} \tilde{p} \right) - 2 \tilde{J}_2 \tilde{M}_d^{-1} \tilde{p} \right] = 0 \tag{3.214}$$

Les hypothèses de la Proposition 3.9 sont satisfaites avec $r = 1$. En sélectionnant

$$\psi(\mu) = \frac{-k \sin \mu}{m_3 - b^2 \cos^2 \mu} \;, \quad \tilde{M}_c = \begin{bmatrix} \frac{kb^2}{3} \cos^3(q_1^*) & \frac{-kb}{2} \cos^2(q_1^*) \\ \frac{-kb}{2} \cos^2(q_1^*) & k \cos(q_1^*) + m'_{c22} \end{bmatrix} \tag{3.215}$$

avec $k > 0$ et $m'_{c22} \geq 0$ qui sont des paramètres libres, il s'ensuit que la solution est donnée par

$$\tilde{M}_d = \begin{bmatrix} \frac{kb^2}{3} \cos^3(q_1) & \frac{-kb}{2} \cos^2(q_1) \\ \frac{-kb}{2} \cos^2(q_1) & k \cos(q_1) + m'_{c22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{J}_2 = \tilde{p}^T \tilde{M}_d^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.216}$$

$\tilde{M}_d$ est positive définie pour tout $q \in (-\pi/2, \pi/2)$. Les fonctions libres $\alpha_1(q)$ et $\alpha_2(q)$ sont prises comme dans [Yalçin-10],

$$\begin{aligned} \alpha_1(q) &= k^2 b^3 \cos^4(q_1) \sin(q_1)/12 \\ \alpha_2(q) &= -k^2 b^2 \cos^3(q_1) \sin(q_1)/12 \end{aligned} \tag{3.217}$$

En outre, la fonction d'énergie potentielle souhaitée $\tilde{V}_d$ est prise comme suit [Viola-07a] :

$$\tilde{V}_d = \frac{3a}{kb^2 \cos^2(q_1)} + \frac{k_p}{2} \left[q_2 - q_2^* + \frac{3}{b} \ln\left(\sec(q_1) + \tan(q_1) \right) + \frac{6m'_{c22}}{kb} \tan(q_1) \right]^2 \tag{3.218}$$

avec $k_p > 0$ arbitraire.

Les résultats de simulation sont présentés dans la figure 3.20. Les paramètres du système sont $m = 1Kg$, $\mathrm{M} = 5Kg$ et $l = 1\mathrm{m}$. Les paramètres de conception de la commande sont $k_v = 0.5$, $k_p = 1$, $k = 0.1$ et $m'_{c22} = 0.002$. Les conditions initiales sont $\left(q(0), p(0) \right) = \left(\pi/4, -0.1, 0.1, 0.5 \right)$ et la position désirée du chariot est $q_2^* = 20$.

On constat que la technique proposée par Viola est appliquée avec succès au système pendule inversé.

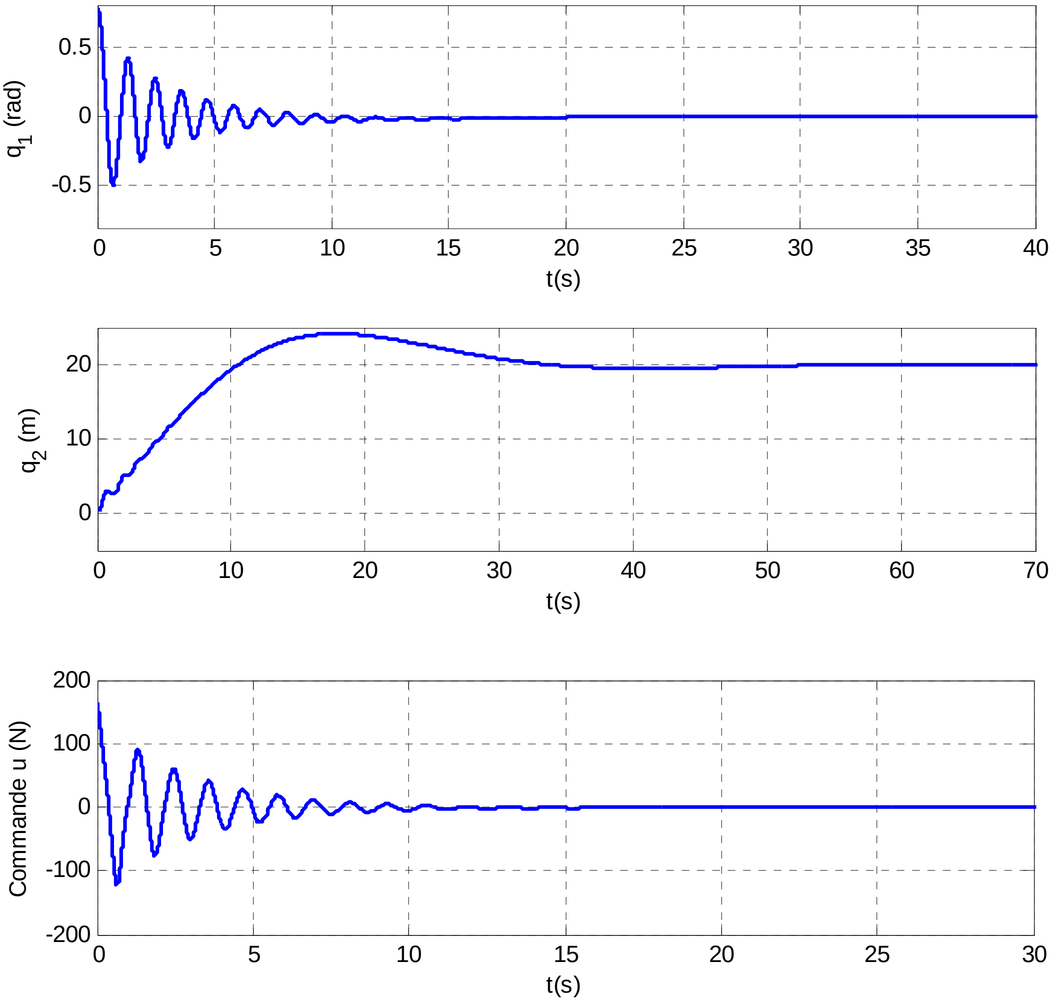


Figure: 3.20: Résultats de simulation du pendule inversé

III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la CBP-AIA est étudiée en détail. On a présenté les principales variantes de cette commande. Elle a été appliquée au système modélisé par le modèle HCP. Ce modèle nous offre des degrés de libertés supplémentaires (matrices d'interconnexion et d'amortissement) qu'on peut exploiter dans la conception de la commande. On a vu que la caractéristique principale de cette commande est que la fonction d'énergie totale en boucle fermée est obtenue via la résolution des EDPs dans le cas de l'AIA paramétrique, en imposant notre choix des structures d'interconnexion et d'amortissement désirées. Pour ce faire deux méthodes de résolutions de ces équations ont été étudiées.

Les performances et l'efficacité de la CBP-AIA sont illustrées par simulation sur les systèmes mécaniques sous actionnés bille sur rail, pendule à roue inertielle, grue portique et pendule inversé, qui ont un sous actionnement de degré.

Dans ce chapitre, on a examiné le problème de la construction d'une loi de commande stabilisante pour les systèmes mécaniques sous actionnés. Tout au long de la conception, on a supposé que toutes les variables d'états étaient mesurables. Cependant, en réalité, soit on n'a pas de capteurs pour mesurer toutes les variables, soit ils sont trop coûteux pour être ajoutés au système. Motivé par ces considérations pratiques, dans le chapitre suivant, on examinera le problème de la reconstruction des vitesses ou des quantités de mouvement d'un système mécanique. L'approche proposée est basée sur les notions d'immersion (de système) et d'invariance (d'une variété).

Chapitre IV

Conception d'observateur par la méthode d'immersion et invariance

IV.1 Introduction

La méthode d'immersion et invariance (I&I) est une technique développée afin d'élaborer des nouvelles lois de commande asymptotiquement stabilisantes et adaptatives pour les systèmes non linéaires [Astolfi-03], [Karagiannis-07], [Astolfi-07], [Astolfi-08]. Elle s'appuie sur les notions d'immersion des systèmes et des variétés invariantes, qui sont des outils classiques de la théorie non linéaire et de la commande non linéaire, mais exploités dans une nouvelle perspective. L'idée de base consiste à immerger la dynamique d'un système dans un autre système cible (éventuellement d'ordre inférieur) et qui reflète le comportement désiré. Les caractéristiques principales d'I&I sont illustrées dans [Astolfi-08], parmi elles, on peut citer:

- I&I réduit le problème de conception de la commande à d'autres sous-problèmes qui, dans certains cas, pourraient être plus faciles à résoudre,
- I&I diffère de la plupart des méthodes existantes de conception de commande car en principe, elle ne nécessite pas la connaissance d'une fonction de Lyapunov, autrement dit, elle nous permet la construction de lois de commande non linéaires sans avoir recours à la théorie de Lyapunov,
- contrairement à la commande optimale où l'objectif est d'optimiser un cout scalaire de performance, l'approche I&I ne requiert aucune opération de minimisation. En outre, en raison de son approche en deux temps (immersion et invariance), celle ci est conceptuellement différente des méthodologies qui reposent sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov. Des similitudes existent avec la commande par mode glissant mais les lois de commande obtenues ne reposent a priori sur aucun phénomène discontinu, caractéristique de la commande par mode glissant.

Récemment, l'approche I&I a été adoptée pour formuler le problème de construction d'observateurs [Astolfi-07], [Karagiannis-07]. L'objectif de cette approche est la création d'une variété invariante et attractive, définie dans l'espace d'état étendu constitué des états du système et ceux de l'observateur. Cette variété est définie par une fonction inversible telle que la partie non mesurable de l'état est reconstruite par inversion de cette fonction. Dans [Venkatraman, Ortega-10], une classe de systèmes mécaniques pour qu'un observateur I&I d'ordre réduit globalement exponentiellement stable puisse être construit est identifié. Cette classe est caractérisée par un ensemble d'EDPs et contient tous les systèmes qui peuvent être rendus linéaires en moments (non mesurables) par un changement de coordonnées partiel. En plus, ils ont prouvé le principe de séparation pour la combinaison de l'observateur d'I&I avec la commande par retour d'état complet asymptotiquement stabilisante de type assignation d'interconnexion et injection d'amortissement.

Dans ce chapitre, l'approche d'I&I pour le problème de la conception d'observateurs est présentée. On se concentrera sur les systèmes PLvCC. Une procédure constructive pour obtenir un observateur d'ordre réduit afin d'estimer les impulsions généralisées sera présentée. Le problème de conception d'observateur est formulé comme suit : la position est supposée être mesurable et la vitesse n'est pas mesurable, et doit donc être estimée.

IV.2 Notion d'immersion et d'invariance

Les définitions mathématiques de l'invariance d'une variété et l'immersion d'un système sont données ci-dessous.

Soit un système autonome

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{4.1}$$

où $x \in \Re^n$ est le vecteur d'état et $y \in \Re^m$ est le vecteur de sortie.

Définition 4.1 [Astolfi-08] *La variété* $\mathcal{M} = \{x \in \Re^n \,/\, \phi(x) = 0\}$, *où* $\phi(x)$ *est lisse, est dite (positivement) invariante pour le système* $\dot{x} = f(x)$ *si*

$$x(0) \in \mathcal{M} \Rightarrow x(t) \in \mathcal{M}, \qquad \forall t \geq 0 \tag{4.2}$$

Soit le système cible (auxiliaire)

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \alpha(\zeta) \\ \xi &= \eta(\zeta) \end{aligned} \tag{4.3}$$

où $\zeta \in \Re^p$ est le vecteur d'état $(p<n)$ et $\xi \in \Re^m$ est le vecteur de sortie.

Définition 4.2 [Astolfi-08] *Le système cible (4.3) est dit immergé dans le système (4.1) s'il existe une application lisse* $\pi : \Re^p \to \Re^n$ *qui satisfait*

$$x(0) = \pi\left(\zeta(0)\right) \text{ et } \eta(\zeta_1) \neq \eta(\zeta_2) \Rightarrow h\left(\pi(\zeta_1)\right) \neq h\left(\pi(\zeta_2)\right) \tag{4.4}$$

et tel que $$f\left(\pi(\zeta)\right) = \frac{\partial \pi(\zeta)}{\partial \zeta}\alpha(\zeta) \tag{4.5}$$

et $$h\left(\pi(\zeta)\right) = \eta(\zeta) \tag{4.6}$$

pour tous $\zeta \in \Re^p$.

En d'autres termes, un système Σ_2 est dit être immergé dans un système Σ_1 si l'application entrée–sortie de Σ_2 est une restriction de l'application entrée–sortie de Σ_1, c.à.d. toute réponse de sortie génerée par Σ_2 est aussi une réponse de sortie Σ_1 pour un ensemble de conditions initiales données [Astolfi-08].

Dans les sections suivantes, on va montrer comment ces deux notions ont été combinées dans la méthodologie d'immersion et d'invariance (I&I) qui est utilisée pour la conception de la commande et de l'observateur.

Dans ce qui suit, on illustre l'approche I&I avec le problème fondamental de la stabilisation par retour d'état d'un point d'équilibre d'un système non linéaire. Le problème de la stabilisation par retour d'état est choisi pour faciliter la présentation, mais, néanmoins l'approche est applicable à une large classe de problèmes de commande y compris le suivi de trajectoire, l'estimation des paramètres et des états, et la stabilisation par retour de sortie.

IV.3 Principe de stabilisation en utilisant l'immersion et l'invariance

L'approche I&I propose de capturer le comportement désiré du système à commander à l'aide d'un système cible auxiliaire. Le problème de commande se réduit alors à la conception d'une loi de commande qui garantisse que le système commandé

$$\dot{x} = f(x) + \mathrm{g}(x)u, \quad x \in \Re^n, \quad u \in \Re^m \tag{4.7}$$

converge asymptotiquement vers le système cible, avec un point d'équilibre (globalement) asymptotiquement stable. Autrement dit, le problème est de trouver une loi de commande par retour d'état $u = \vartheta(x)$ de telle sorte que le système en boucle fermée ait un équilibre (globalement) asymptotiquement stable à l'origine. Ceci est analogue à la recherche :

- d'un système cible dynamique

$$\dot{\zeta} = \alpha(\zeta), \quad \zeta \in \Re^p, \quad p<n \tag{4.8}$$

qui a un équilibre (globalement) asymptotiquement stable à l'origine,

- d'une application lisse $x = \pi(\zeta)$ et d'une loi de commande $u = \vartheta(x)$ tel que

$$\pi\left(\zeta(0)\right) = x(0) \tag{4.9}$$

$$\pi(0) = 0 \tag{4.10}$$

et

$$f\left(\pi(\zeta)\right) + \mathrm{g}\left(\pi(\zeta)\right)\,\vartheta\left(\pi(\zeta)\right) = \frac{\partial \pi}{\partial \zeta}\alpha(\zeta) \tag{4.11}$$

Si les conditions ci-dessus sont vérifiées, alors toute trajectoire $x(t)$ du système en boucle fermée

$$\dot{x} = f(x) + \mathrm{g}(x)\vartheta(x) \tag{4.12}$$

sera l'image par π de la trajectoire $\zeta(t)$ du système cible (4.3), comme illustré sur la figure 4.1.

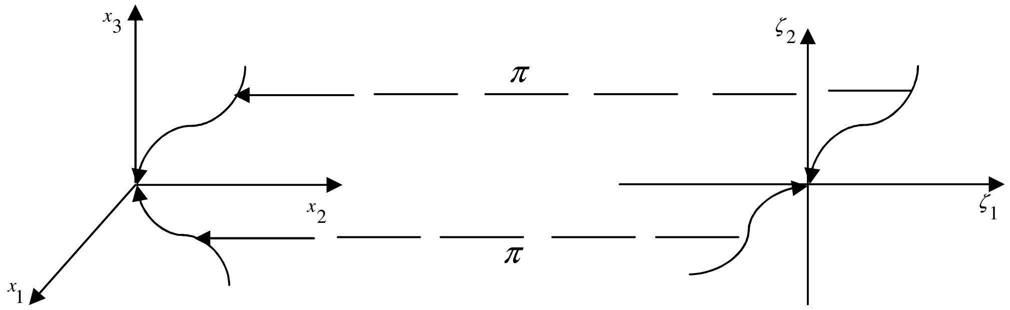


Figure 4.1: Illustration graphique de la correspondance entre les trajectoires du système à commander et le système cible pour $p = 2$ et $n = 3$.

De (4.10) et le fait que l'équilibre (l'origine) du système cible est asymptotiquement stable, ceci implique que $x(t)$ converge vers l'origine. Ainsi, le problème de stabilisation de l'équilibre zéro (l'origine) du système (4.7) peut être reformulé comme étant un problème de résolution de l'équation aux dérivées partielles (4.11) avec les conditions (4.9) et (4.10).

Une interprétation géométrique de (4.9)-(4.11) est donnée comme suit. Considérons le système en boucle fermée (4.12) et une variété des n variables d'état, définie comme suit

$$\mathcal{M} = \left\{ x \in \Re^n \,/\, x = \pi(\zeta), \zeta \in \Re^p \right\}, \tag{4.13}$$

et tel que les conditions (4.9) et (4.10) soient vérifiées. De (4.11), la variété $\mathcal{M}$ est invariante avec la dynamique interne (4.8), donc toutes les trajectoires $x(t)$ qui partent de la variété $\mathcal{M}$ y restent et convergent asymptotiquement vers le point $\pi(0)$ qui est l'origine, par (4.10). En outre, la condition (4.9) garantit que l'état initial de (4.12) se situe sur $\mathcal{M}$.

La formulation ci-dessus n'est pas pratique pour deux raisons. D'abord, à partir de (4.9) et (4.11), l'application π et la commande u dépendent, en général, des conditions initiales. En suite, il peut être impossible de trouver pour tout $x(0) \in \Re^n$, une application $\pi(\zeta)$ de telle sorte que (4.9), (4.10) et (4.11) soient vérifiées simultanément. Ces obstacles peuvent être éliminés par la détermination d'une solution de (4.10) et (4.11) seulement et en modifiant la loi de commande $u = \vartheta(x)$ de telle sorte que pour toutes les conditions initiales, les trajectoires du système (4.12) restent bornées et convergent asymptotiquement vers la variété $\mathcal{M}$, c.à.d., $\mathcal{M}$ est rendue attractive. L'attractivité de la variété $\mathcal{M}$ peut être exprimée en fonction de la distance

$$|z| = dist(x, \mathcal{M}) \tag{4.14}$$

qui doit être conduite à zéro. Il est à noter que la variable z, appelée coordonnée d'éloignement de la variété (de l'anglais : *off-the-manifold coordinate)*, n'est pas définie de manière unique. Ceci fournit un degré de liberté supplémentaire dans la conception de la commande.

Le problème consiste donc à trouver une variété qui peut être rendue invariante et attractive, avec la dynamique interne comme une copie de la dynamique en boucle fermée désirée et à concevoir une loi de commande qui oriente l'état du système suffisamment proche de cette variété.

Les conditions suffisantes pour la construction de la loi de commande par retour d'état globalement asymptotiquement stabilisante pour les systèmes non linéaires sont résumées dans le théorème suivant:

Théorème 4.1 [Astolfi-08] *Soit le système* $\dot{x} = f(x) + g(x)\,u$, *avec l'état* $x \in \Re^n$, *l'entrée* $u \in \Re^m$ *et* $x^* \in \Re^n$ *un point d'équilibre à être stabiliser. Supposons qu'il existe des applications dérivables* $\alpha : \Re^p \to \Re^p$; $\pi : \Re^p \to \Re^n$; $\phi : \Re^n \to \Re^{n-p}$; $\vartheta : \Re^p \to \Re^m$ *et* $\psi : \Re^{n\times(n-p)} \to \Re^m$ *avec* $p < n$, *telles que les hypothèses suivantes soient vérifiées:*

H.1) Le système cible

$$\dot{\zeta} = \alpha(\zeta) \tag{4.15}$$

avec l'état $\zeta \in \Re^p$, *a un équilibre globalement asymptotiquement stable à* $\zeta^* \in \Re^p$ *et* $x^* = \pi(\zeta^*)$

H.2) (Condition d'immersion). Pour tous $\zeta \in \Re^p$

$$f\left(\pi(\zeta)\right) + g\left(\pi(\zeta)\right)\vartheta\left(\pi(\zeta)\right) = \frac{\partial \pi(\zeta)}{\partial \zeta}\alpha(\zeta) \tag{4.16}$$

H.3) (Variété implicite). L'égalité suivante est satisfaite

$$\mathcal{M} = \left\{x \in \Re^n \,/\, \phi(x) = 0\right\} = \left\{x \in \Re^n \,/\, x = \pi(\zeta), \zeta \in \Re^p\right\} \tag{4.17}$$

H.4) *(Attractivité de la variété et trajectoire bornées). Toutes les trajectoires du système*

$$\dot{z} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\left[f(x) + g(x)\psi(x,z)\right] \tag{4.18}$$

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\psi(x,z) \tag{4.19}$$

sont bornées et satisfont

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0 \tag{4.20}$$

alors x^* *est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable du système en boucle fermée*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\psi\left(x, \phi(x)\right) \tag{4.21}$$

L'approche est illustrée graphiquement dans la figure 4.2. Elle consiste à établir une application qui associe aux trajectoires dans l'espace-ζ des trajectoires dans l'espace x se trouvant, avec le point d'équilibre désiré, - dans une variété attractive et invariante $\mathcal{M}$. En outre, toutes les trajectoires qui partent en dehors de $\mathcal{M}$ (c.à.d. avec $|z| \neq 0$) convergent vers l'origine.

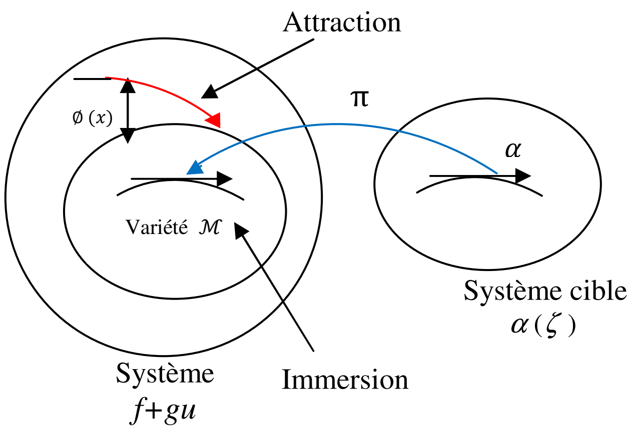


Figure 4.2: Illustration graphique de l'approche I&I

Le résultat du théorème 4.1 implique que le problème de stabilisation du système (4.7) peut être divisé en deux sous-problèmes. Premièrement, étant donné le système cible (4.15), il foudra trouver, si possible, une variété $\mathcal{M}$ décrite implicitement par $\{x \in \Re^n / \phi(x) = 0\}$ et en forme paramétrée par $\{x \in \Re^n / x = \pi(\zeta), \zeta \in \Re^p\}$, qui puisse être rendue invariante dont la dynamique interne soit une copie de la dynamiques cible. Deuxièmement, concevoir une loi de commande $u = \psi(x, z)$ qui conduit la coordonnée d'éloignement de la variété $z = \phi(x)$ à zéro et qui maintient les trajectoires du système bornées.

Pour illustré les différents calculs précédents, on considère le problème de stabilisation du pendule inversé représenté à la figure 4.3. On suppose qu'une étape de linéarisation partielle par feedback est appliquée [Spong-98]. Après normalisation, on a le modèle suivant :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = a\sin(x_1) - b\cos(x_1)u, \\ \dot{x}_3 = u, \end{cases} \tag{4.22}$$

$(x_1, x_2) \in S^1 \times \Re$, avec S^1 désignant le cercle unitaire, x_1 et x_2 sont respectivement l'angle du pendule par rapport à la verticale et sa vitesse. $x_3 \in \Re$ est la vitesse du chariot et $u \in \Re$ est l'entrée de commande. Les constantes positives $a = \frac{g}{l}$ et $b = \frac{1}{l}$, avec g désignant l'accélération de pesanteur et l la longueur du pendule, sont des paramètres physiques. L'équilibre à stabiliser est la position du pendule vers le haut avec le chariot à l'arrêt, ce qui correspond à $x^* = 0$.

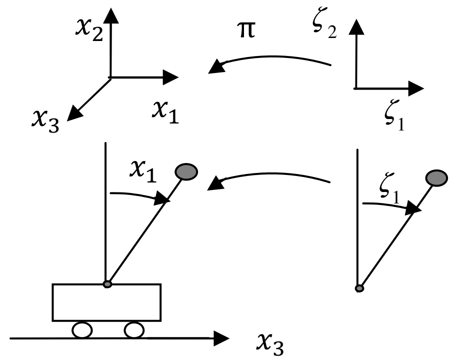


Figure 4.3: Pendule inversé et dynamique cible

Pour calculer la commande, on vérifie les hypothèses H1-H4 du théorème 4.1.

Vérification de l'hypothèse H1 (Système cible) : en général, la sélection de la dynamique cible dans laquelle le système en boucle fermée est immergé est une tâche difficile. Comme indiqué dans [Astolfi-03], un choix naturel pour le système cible est le sous-système mécanique. L'idée principale est d'immerger un système de dimension deux décrivant la dynamique du pendule simple (dont les fonctions d'énergie potentielle et d'amortissement sont à concevoir (voir Figure 4.3, à gauche)) dans un système de dimension trois (4.22). Ainsi, on définit la dynamique cible comme suit :

$$\Sigma_T : \begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 = -V'(\zeta_1) - R(\zeta_1, \zeta_2)\zeta_2 \end{cases} \tag{4.23}$$

où $V(\zeta_1)$ est l'énergie potentielle du système qui doit être choisie et $R(\zeta_1, \zeta_2)$ est la fonction d'amortissement (éventuellement non linéaire) qui doit être choisie.

Le système cible (4.23) est un pendule simple avec la fonction d'énergie

$$H(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{2}\zeta_2^2 + V(\zeta_1) \tag{4.24}$$

Afin de s'assurer que la dynamique cible ait un équilibre asymptotiquement stable à l'origine, on introduit l'hypothèse suivante :

Hypothèse A1 [Acosta-08] :

(i) La fonction d'énergie potentielle $V(\zeta_1)$ satisfait

$$\left.\frac{\partial V(\zeta_1)}{\partial \zeta_1}\right|_{\zeta_1=0} = 0 \text{ et } \left.\frac{\partial^2 V(\zeta_1)}{\partial \zeta_1^2}\right|_{\zeta_1=0} > 0 \tag{4.25}$$

(ii) La fonction d'amortissement (dissipation) est telle que $R(0,0) > 0$.

Vérification de l'hypothèse H2 (Condition d'immersion). Compte tenu des objectifs de la commande et le choix de la dynamique cible, la fonction π est sélectionnée comme suit

$$\pi(\zeta) = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \pi_3(\zeta_1, \zeta_2) \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

où π_3 est une fonction à déterminer. Avec ce choix de π et la dynamique cible (4.23), la condition d'immersion (4.16) se traduit par un ensemble de deux EDPs :

$$a \sin \zeta_1 - b \cos \zeta_1 c\left(\pi(\zeta)\right) = -V'(\zeta_1) - R(\zeta_1, \zeta_2)\zeta_2 \tag{4.27}$$

$$c\left(\pi(\zeta)\right) = \frac{\partial \pi_3}{\partial \zeta_1}\zeta_2 - \frac{\partial \pi_3}{\partial \zeta_2}\left[V'(\zeta_1) + R(\zeta_1, \zeta_2)\zeta_2\right] \tag{4.28}$$

On rapelle que $c\left(\pi(\zeta)\right)$ est la commande qui rend la variété invariante. Après avoir éliminé la commande de (4.27) en utilisant (4.28), on obtient une seule EDP à résoudre :

$$b \cos \zeta_1 \left(\zeta_2 \frac{\partial \pi_3}{\partial \zeta_1} - \left[V'(\zeta_1) + R(\zeta_1, \zeta_2)\zeta_2\right]\frac{\partial \pi_3}{\partial \zeta_2} \right) = a \sin \zeta_1 + V'(\zeta_1) + R(\zeta_1, \zeta_2)\zeta_2 \tag{4.29}$$

Dans l'application standard de I&I, V' et R sont fixés puis on résout l'EDP (4.29) dont l'inconnu est π_3. Dans cet exemple, comme dans [Acosta-08], on laisse V' et R libres (ils sont en fonction de π_3 et de ses dérivés). Deux conditions sur π_3 pour que (4.29) puisse être résolue seront introduites. À cette fin, on réécrit (4.29) sous la forme :

$$\left(b \cos \zeta_1 \frac{\partial \pi_3}{\partial \zeta_1} - R(\zeta_1, \zeta_2)\Delta(\zeta) \right)\zeta_2 = a \sin \zeta_1 + \Delta(\zeta)V'(\zeta_1) \tag{4.30}$$

où la fonction Δ est définie comme suit :

$$\Delta(\zeta) = 1 + \frac{\partial \pi_3}{\partial \zeta_2} b \cos \zeta_1 \tag{4.31}$$

On verra plus loin que cette fonction joue un rôle fondamental dans l'étape de stabilisation (c.à.d. dans l'hypothèse H4 de la procédure d'I&I). Considérons maintenant les hypothèses suivantes :

Hypothèse A 2 [Acosta-08] : Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\left|\Delta(0)\right| = \left| 1 + \frac{\partial \pi_3}{\partial \zeta_2}(0) \right| \geq \varepsilon > 0 \tag{2.32}$$

Hypothèse A 3 [Acosta-08] : $\dfrac{\partial \pi_3}{\partial \zeta_2}$ est une fonction de ζ_1 seulement, et par conséquent Δ ne dépond pas de ζ_2.

Si les hypothèses A2 et A3 sont satisfaites, alors l'EDP (4.30) est résolue en sélectionnant

$$V'(\zeta_1) = -\frac{a\sin\zeta_1}{\Delta(\zeta)}, \qquad R(\zeta_1,\zeta_2) = \frac{b\cos\zeta_1}{\Delta(\zeta)}\frac{\partial \pi_3}{\partial \zeta_1}. \tag{4.33}$$

Les équations ci-dessus fournissent une paramétrisation de V et R en terme de la fonction (libre) π_3. Avant de procéder à la sélection des fonctions π_3, telles que les hypothèses A1-A3 soient vérifiées, on continue la vérification des hypothèses restantes du théorème 4.1.

Vérification de l'hypothèse H3 (Variété Implicite) : La variété $\mathcal{M}$ est implicitement décrite par $\mathcal{M} = \{x \in \Re^3 / \phi(x) = 0\}$, avec

$$\phi(x) = x_3 - \pi_3(x_1, x_2) \tag{4.34}$$

Vérification de l'hypothèse H4 (Attractivité de la variété et trajectoire bornées). On doit maintenant déterminer la distance définie par $z = \phi(x)$ entre les trajectoires du système et la variété. Si on choisit $\phi(x)$ comme dans (4.34)**,** les dynamiques z sont données comme suit

$$\begin{aligned} \dot z &= \dot x_3 - \dot\pi_3(x_1, x_2) \\ &= \psi(x,z) - \frac{\partial \pi_3}{\partial x_1}x_2 - \frac{\partial \pi_3}{\partial x_2}\left(a\sin x_1 - b\cos x_1 \psi(x,z)\right) \\ &= -\frac{\partial \pi_3}{\partial x_1}x_2 - \frac{\partial \pi_3}{\partial x_2}a\sin x_1 + \Delta(x_1,x_2)\psi(x,z) \end{aligned} \tag{4.35}$$

où $\psi\left(x,\phi(x)\right)$ est la commande actuelle qu'on appliquera. De l'équation (4.35) on note que sous l'hypothèse A 2, la tâche qui consiste à ramener z à zéro est facile. En effet, en divisant par Δ on peut attribuer arbitrairement la dynamique d'éloignement, par exemple $\dot z = -\gamma z$, avec γ une constante positive. Dans ce cas on a

$$\psi(x,z) = \frac{1}{\Delta(x_1,x_2)}\left(-\gamma z + \frac{\partial \pi_3}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial \pi_3}{\partial x_2}a\sin x_1\right) \tag{4.36}$$

La commande est alors définie comme suit :

$$\psi\left(x,\phi(x)\right) = \frac{1}{\Delta(x_1,x_2)}\left(-\gamma\left(x_3 - \pi_3(x_1,x_2)\right) + \frac{\partial \pi_3}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial \pi_3}{\partial x_2}a\sin x_1\right) \tag{4.37}$$

On observe que la commande (4.37) fixe la dynamique d'éloignement de la variété à $\dot z = -\gamma z$, donc la sélection de $\gamma > 0$ conduit z exponentiellement vers zéro, avec un taux de convergence γ.

La proposition suivante résume le résultat de la stabilité en appliquant la commande (4.37).

Proposition 4.1 [Acosta-08] *Pour toute fonction* π_3 *qui vérifie les hypothèses A2 et A3, et tel* *que l'hypothèse A1 soit vérifiée pour les fonctions V et R données dans (4.31) et (4.33), l'équilibre zéro du système pendule inversé (4.22) en boucle fermée avec la commande I&I et $\gamma > 0$ est localement asymptotiquement stable.*

La procédure de conception est achevée, comme indiqué ci-dessus, en proposant une fonction π_3 telles que les hypothèses A1-A3 seront satisfaites avec les fonctions V' et R données respectivement par (4.31) et (4.33). Comme expliqué dans [Acosta-08], différents choix sont possibles. Par souci de simplicité, on sélectionne :

$$\pi_3(x_1, x_2) = -k_1 x_1 - k_2 \frac{x_2}{\cos x_1} \tag{4.38}$$

cela donne une constante $\Delta = 1 - k_2 b$. La commande correspondante prend la forme très simple :

$$u = -\frac{1}{1 - k_2 b}\left(\begin{bmatrix} \gamma k_1 & k_1 + \dfrac{\gamma k_2}{\cos x_1} & \gamma \end{bmatrix} x + k_2 \tan x_1 \left(\frac{x_2^2}{\cos x_1} + a\right)\right) \tag{4.39}$$

La commande (4.39) n'est pas définie globalement car π_3 a une singularité à $\dfrac{\pi}{2}$.

La commande I&I (4.37) avec le choix (4.38) de π_3 assure que l'équilibre zéro du système pendule (4.22) en boucle fermée soit asymptotiquement stable avec un domaine d'attraction contenant l'ensemble $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \Re \times \Re$, c.à.d. tout le demi-plan haut ouvert [Sarras-10c].

Pour simuler, les paramètres du système sont $a = 27.4176$, $b = 2.7949$ et $l = 0.36$. Les valeurs des gains de la commande k_1, k_2 et le taux de convergence γ sont choisis comme suit : $k_1 = 8$, $k_2 = 3$ et $\gamma = 3$.

Les simulations montrent que le pendule inversé peut être stabilisé avec des conditions initiales pratiquement sur l'axe horizontal, voir figures 4.5 et 4.6. Cependant, on peut observer que plus on choisit l'axe horizontal plus la réponse transitoire est oscillatoire et l'effort de la commande a significativement augmentée.

Les résultats obtenus présentent clairement le comportement souhaité en boucle fermée: en premier lieu, on a la convergence vers la variété c'est à dire $z(t) \to 0$ à une vitesse déterminée par γ, puis, à l'approche de la variété où le système pendule inversé se comporte comme un pendule simple, on a convergence vers l'équilibre.

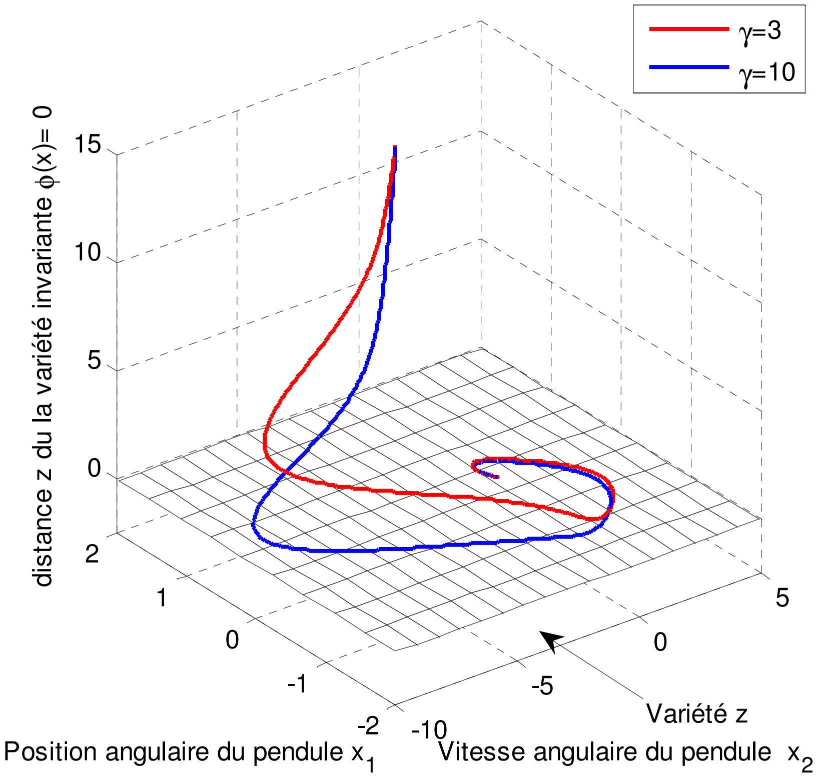


Figure 4.4: Attractivité de la variété invariante

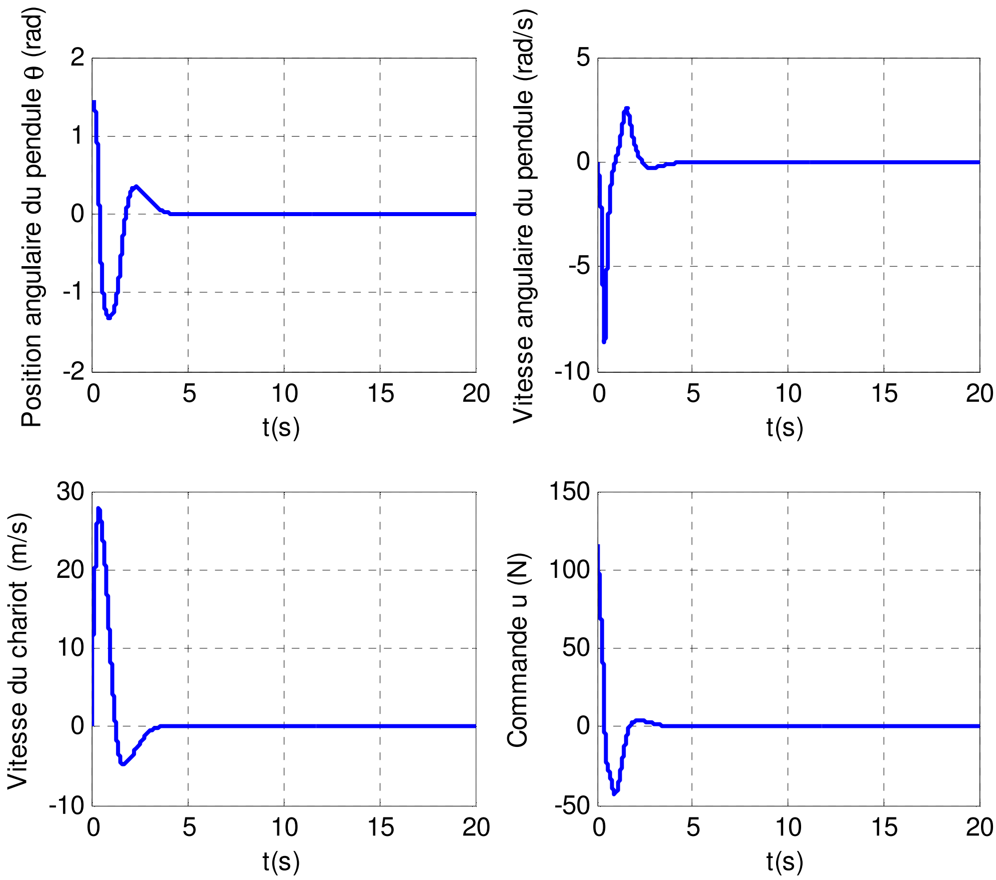


Figure 4.5: Comportement transitoire pour les conditions initiales $x(0) = [\pi/2 - 0.1, 0, 0]^T$

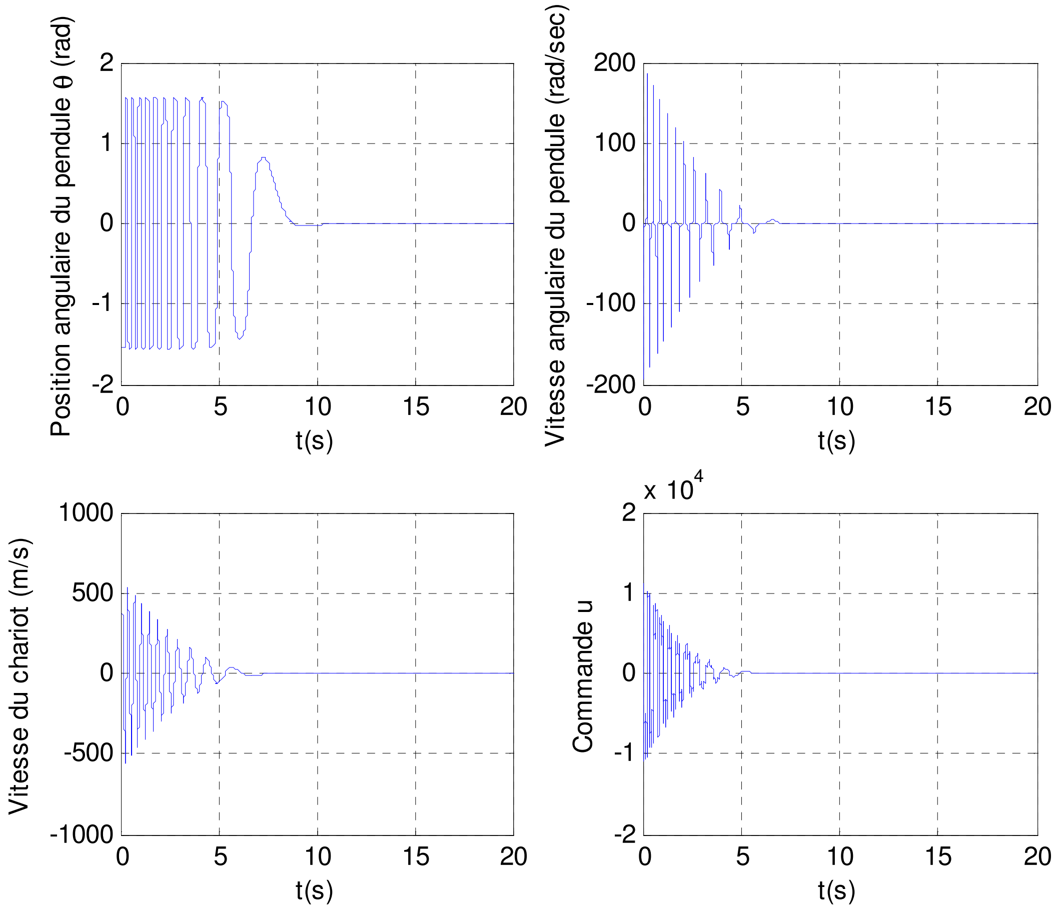


Figure 4.6: Comportement transitoire pour les conditions initiales $x(0)=\left[\pi/2-10^{-3},0,0\right]^{T}$

Comme on dispose d'une commande localement asymptotiquement stabilisante, on veut ramener le chariot à l'équilibre zéro. Pour cela, on introduit dans la loi de commande un correcteur PI (proportionnel intégral). Les paramètres du PI sont choisis comme suit : $K_p = 0.5$ et $K_i = 1$.

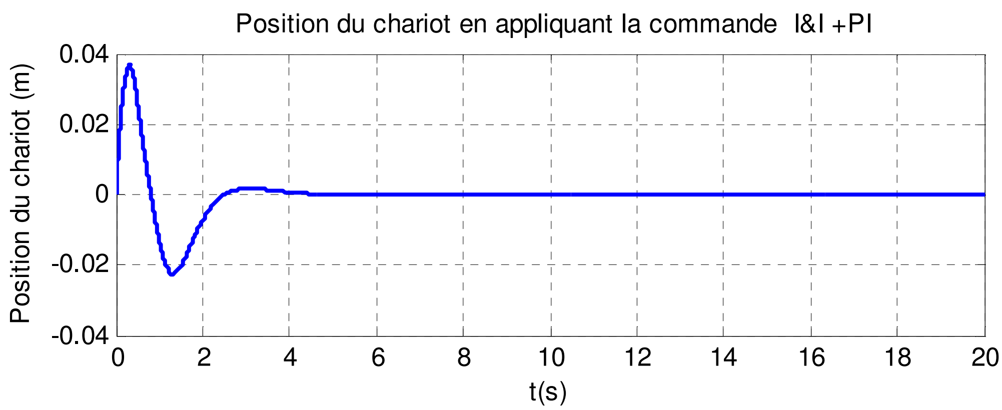


Figure 4.7: Position du chariot en appliquant la commande I&I + PI

Dans la prochaine section, on verra comment les concepts d'immersion et d'invariance sont utilisés pour la conception d'observateur.

IV.4 Principe d'observation en utilisant l'immersion et l'invariance

L'observateur est conçu d'après le concept général d'I&I, mais avec une vision différente du système cible et de la variété invariante.

On commence d'abord avec le concept d'un observateur d'ordre réduit pour un système linéaire qui est basé sur les idées de l'observateur de Luenberger [Luenberger-64].

Soit un système décrit par la dynamique linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x + A_2 y \\ \dot{y} &= A_3 x + A_4 y \end{aligned} \tag{4.40}$$

où $x \in \Re^n$ est la partie non mesurée de l'état et $y \in \Re^p$ est la partie mesurée de l'état.

Considérons le sous-espace vectoriel suivant

$$\upsilon = \{(x, y, \zeta) / \zeta = \mathrm{T}y + x\} \subset \Re^n \times \Re^p \times \Re^n \tag{4.41}$$

On définit la dynamique de $\zeta \in \Re^n$ comme suit

$$\dot{\zeta} = (\mathrm{T}A_3 + A_1)(\zeta - \mathrm{T}y) + (\mathrm{T}A_4 + A_2)\, y \tag{4.42}$$

Soit

$$z = \zeta - \mathrm{T}y - x \tag{4.43}$$

la distance de sous-espace. On a

$$\dot{z} = (\mathrm{T}A_3 + A_1)\, z \tag{4.44}$$

Si la matrice T est conçue de telle sorte que les valeurs propres de $(\mathrm{T}A_3 + A_1)$ sont dans le demi-plan gauche négative alors elle assure que z tende vers zéro asymptotiquement. Par conséquent, la trajectoire (x, y, ζ) atteint le sous-espace υ et compte tenu de l'invariance du sous-espace, la trajectoire (x, y, ζ) reste en fait sur υ. Ainsi ζ, qui a la même dimension que x est un observateur d'ordre réduit pour x et l'estimé asymptotique de x est donnée par $\zeta - \mathrm{T}y$.

Dans ce qui suit, on étendra la notion d'observateur d'ordre réduit au cas non-linéaire. Le sous-espace υ sera remplacé par une variété. En outre, il peut également arriver que la dimension de l'observateur (qui est ζ) soit supérieure à la dimension de x. En général, on peut avoir une dimension supérieure ou égale à x.

Pour éclaircir l'idée, considérons le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y) \\ \dot{y} &= f_2(x, y) \end{aligned} \tag{4.45}$$

où $x \in \Re^n$ est la partie non mesurée de l'état (à estimer) et $y \in \Re^p$ est la partie mesurée de l'état.

Avant de définir l'observateur pour le système (4.45), on introduit la définition d'une application inversible à gauche.

Définition 4.3 [Venkatraman-10b] *Une application* $\varphi(x, y): \Re^l \times \Re^m \to \Re^p$ *est inversible à gauche (par rapport à* x *) s'il existe une application* $\varphi^L : \Re^p \times \Re^m \to \Re^l$ *de telle sorte que,* $\varphi^L(\varphi(x, y), y) = x$ *pour tous les* $x \in \Re^l$ *et* $y \in \Re^m$.

L'observateur pour le système (4.45) est défini comme suit

Définition 4.4 [Astolfi-08] *Le système dynamique*

$$\dot{\zeta} = \alpha(\zeta, y) \tag{4.46}$$

avec $\zeta \in \Re^q$, $q \geq n$ *est un observateur pour le système* (4.45)*, s'il existe des applications* $\beta : \Re^q \times \Re^p \to \Re^q$ *et* $\phi : \Re^n \times \Re^p \to \Re^q$ *qui sont inversibles par rapport à leur premier argument et telle que la variété*

$$\mathcal{M} = \{(x, y, \zeta) \in \Re^n \times \Re^p \times \Re^q : \beta(\zeta, y) = \phi(x, y)\} \tag{4.47}$$

ait les propriétés suivantes :

(i) Toutes les trajectoires du système étendu (4.45)-(4.46) initialisées sur la variété $\mathcal{M}$ *restent sur celle-ci pour tout temps futur, c'est à dire,* $\mathcal{M}$ *est positive invariante.*

(ii) Toutes les trajectoires du système étendu (4.45)-(4.46) initialisées dans un voisinage de $\mathcal{M}$ *convergent asymptotiquement vers* $\mathcal{M}$ *, c'est à dire,* $\mathcal{M}$ *est attractive.*

La définition ci-dessus implique qu'un estimé asymptotique de l'état x est donné par $\hat{x} = \phi^L(\beta(\zeta, y), y)$ où ϕ^L est l'inverse à gauche de ϕ (c.à.d. par rapport au premier argument). Ainsi l'erreur de l'estimation $\hat{x} - x$ est nulle sur la variété $\mathcal{M}$. En outre, si la propriété (ii) est vérifiée pour tout $(x(t_0), y(t_0), \zeta(t_0))$ alors (4.46) est un observateur global pour le système (4.45). Il est à noter que, l'ordre de la dynamique de l'observateur est réduit par rapport à celui du système, ce qui simplifie sa conception.

Le théorème suivant décrit la construction de l'observateur d'ordre réduit.

Théorème 4.2 [Astolfi-08] *Soit les systèmes (4.45) et (4.46) et supposons qu'il existe des applications* C^1 $\beta(\zeta, y): \Re^q \times \Re^p \to \Re^q$ *et* $\phi(x, y): \Re^n \times \Re^p \to \Re^q$ *avec l'inverse par rapport au premier argument* $\phi^L : \Re^q \times \Re^p \to \Re^n$ *tel que les hypothèses suivantes soient vérifiées*

A. Quels que soient y, ζ *, on a* $\beta(\zeta, y)$ *est inversible par rapport au premier argument* ζ *et le déterminant*

$$\det\left(\frac{\partial\beta}{\partial\zeta}\right)\neq 0 \tag{4.48}$$

B. Le système

$$\begin{aligned}\dot{z} = &-\frac{\partial\beta}{\partial y}\{f_2(\hat{x},y)-f_2(x,y)\}+\left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{x=\hat{x}} f_2(\hat{x},y)-\frac{\partial\phi}{\partial y}f_2(x,y)\\ &+\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}} f_1(\hat{x},y)-\frac{\partial\phi}{\partial x}f_1(x,y)\end{aligned} \tag{4.49}$$

avec $\hat{x}=\phi^L\left(\phi(x,y)+z,y\right)$ *a le point d'équilibre* $z=0$ *(globalement) asymptotiquement stable en* (x,y)*, alors le système (4.46) avec*

$$\alpha(\zeta,y)=-\left(\frac{\partial\beta}{\partial\zeta}\right)^{-1}\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}f_2(\hat{x},y)-\left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{x=\hat{x}}f_2(\hat{x},y)-\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}}f_1(\hat{x},y)\right) \tag{4.50}$$

où $\hat{x}=\phi^L\left(\beta(\zeta,y),y\right)$ *est un observateur (global) pour le système (4.45).*

En pratique, $z=\beta-\phi$ traduit la dynamique d'éloignement de la variété. La synthèse de l'observateur revient donc à la recherche des fonctions β, ϕ et ϕ^L qui satisfont le théorème 4.2. Ces fonctions associées à celles de $f_1(x,y)$ et $f_2(x,y)$ décrivant le modèle du procédé permettent de définir le modèle dynamique de l'observateur donné par les relations (4.46) et (4.50). Le choix des fonctions β et ϕ n'est pas unique, des formes particulière peuvent être utilisées. Le résultat de théorème 4.2 sera exploité dans la section suivante dans le cas de conception d'observateur pour les systèmes $PLvCC$.

IV.5 Conception d'observateur global d'ordre réduit par I&I pour les $SPLvCC$

Dans cette section, on construit un observateur global d'ordre réduit, à convergence exponentielle pour les systèmes $PLvCC$, en utilisant la méthode d'I&I introduite dans la section précédente. En procédant de la même manière, on définit un observateur pour le système :

$$\begin{bmatrix}\dot{q}\\ \dot{p}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nabla_q H\\ \nabla_p H\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ G(q)\end{bmatrix}u \tag{4.51}$$

L'observateur d'ordre réduit par I&I du système (4.51) est défini ci après

Définition 4.5 [Venkatraman-10c] *Le système dynamique*

$$\dot{\zeta}=\alpha(q,\zeta,u) \tag{4.52}$$

avec $\zeta\in\Re^n$ *est un observateur d'ordre réduit par I&I du système* (4.51) *s'il existe une matrice* $\Psi:\Re^n\rightarrow\Re^{n\times n}$ *de rang plein et une fonction* $\beta:\Re^n\rightarrow\Re^n$*, tel que la variété*

$$\mathcal{M}=\left\{(\zeta,q,p)\in\Re^n\times\Re^n\times\Re^n:\beta(q)=\zeta+\Psi^T(q)p\right\} \tag{4.53}$$

soit invariante et attractive par rapport au système étendu (4.51), (4.52). L'estimé *asymptotique de* p *, noté par* $\hat{p}$ *est donné comme suit :*

$$\hat{p} = \Psi^{-T}(\beta - \zeta) \tag{4.54}$$

Avant de présenter les étapes de conception de l'observateur proposé, on a besoin de l'hypothèse suivante :

Hypothèse B1 [Venkatraman-10b] *Il existe une fonction* $\beta : \Re^n \to \Re^n$ *qui satisfait l'inégalité matricielle suivante :*

$$\mathsf{Q}\mathbf{A}(q) + \mathbf{A}^T(q)\mathsf{Q} \geq \varepsilon I_n \tag{4.55}$$

pour un $\varepsilon > 0$ *et une certaine matrice* $\mathsf{Q} \in \Re^{n\times n}$ *positive définie, où*

$$\mathbf{A}(q) = \nabla_q \beta(q)\left[\Psi^T(q) M(q)\right]^{-1} \tag{4.56}$$

Proposition 4.2 [Venkatraman-10c] *Considérons le système mécanique (4.51). Supposons que la matrice d'inertie* $M \in S_{PLvCC}$ *avec une matrice* Ψ *dont l'inverse est uniformément bornée et qu'il existe une fonction* β *satisfaisant l'hypothèse B1, donc, le système dynamique*

$$\dot{\zeta} = \nabla_q \beta(q)\left[\Psi^T(q) M(q)\right]^{-1}(\beta - \zeta) + \Psi^T(\nabla_q V - Gu)$$
$$\hat{p} = \Psi^{-T}(\beta - \zeta)$$
(4.57)

est un observateur global d'ordre réduit à convergence exponentielle par I&I avec l'erreur d'estimation qui vérifie $\left|\hat{p}(t) - p(t)\right| \leq \alpha \exp^{-\sigma t}\left|\hat{p}(0) - p(0)\right|$, *pour* $\alpha, \sigma > 0$, *où* $|.|$ *est la norme euclidienne.*

L'hypothèse B1 peut être reformulée comme suit. Au lieu de supposer l'existence de β , on suppose qu'il existe $\mathcal{N} : \Re^n \to \Re^{n\times n}$ tel que (4.55) soit vérifié, avec

$$\mathbf{A}(q) = \mathcal{N}(q)\left[\Psi^T(q) M(q)\right]^{-1} \tag{4.58}$$

et

$$\nabla \mathcal{N}^j = (\nabla \mathcal{N}^j)^T,\ j \in \overline{n} \tag{4.59}$$

Cette dernière condition (intégrabilité) garantit qu'il existe un β de telle sorte que

$$\nabla \beta = \mathcal{N} \tag{4.60}$$

Autrement dit, le problème est réduit à la résolution de l'EDP (4.59) sous la contrainte d'inégalité (4.55) et (4.58).

Dans ce qui suit, on présente l'algorithme proposé dans [Venkatraman-10b] et [Venkatraman-10c] pour la construction de la matrice $\mathcal{N}$ qui satisfait l'hypothèse B1, pour le choix particulier de $\Psi = \mathrm{T}$ (T est donnée par (2.80), voir chapitre 2) avec T étant la factorisation triangulaire inférieure de Cholesky de M^{-1}. Le point de départ de la procédure consiste à choisir T comme étant la factorisation triangulaire inférieure de Cholesky de la matrice d'inertie M .

L'idée est alors de construire une matrice $\mathscr{N}$ de telle sorte que, d'une part, $\mathscr{N}\,\mathrm{T}$ est une matrice diagonale avec les coefficients diagonaux positifs et d'autre part, $\mathscr{N}$ soit facile à intégrer selon (4.58)-(4.60). La première condition assurera (4.55) de l'hypothèse B1, tandis que la seconde garantie (4.59). Comme prévu, la construction implique la résolution de certaines équations aux dérivées partielles. On montrera que ces équations peuvent être facilement résolues dans le cas de système pendule inversé.

Dans notre étude, on présente l'algorithme pour le cas le plus simple, c.à.d. quand la matrice d'inertie dépend d'une seule coordonnée, pour laquelle les équations différentielles à résoudre sont des équations différentielles ordinaires (EDO).

La généralisation de la procédure pour le cas où la matrice d'inertie dépend de k coordonnées avec $k \in \bar{n}$, peut être trouvée dans [Sarras-10a], [Venkatraman-10b] et [Venkatraman-10c]

Pour calculer $\mathscr{N}$ lorsque M dépend d'une seule coordonnée, on suppose que M est en fonction de q_1. On propose la forme suivante pour la matrice $\mathscr{N}$ [Venkatraman-10c]

$$\mathscr{N} = \Lambda + \nabla_q \{\rho(q_1) + \varphi(q_1)q\} \tag{4.61}$$

où Λ est une matrice diagonale constante d'ordre n, $\rho : \Re \to \Re^n$ est une fonction à déterminer qui dépend de q_1 seulement et vérifie $e_1^T \rho = 0$. $\varphi : \Re \to \Re^{n\times n}$ est également à déterminer, ne dépend que de q_1 et vérifie $e_i^T \varphi\, e_j = 0$ pour tous $j \geq i$ et $\varphi\, e_1 = 0$. Compte tenu de la forme proposée pour $\mathscr{N}$, la condition (4.56) de l'hypothèse B1 est satisfaite et β peut être calculé comme suit :

$$\beta = \Lambda q + \rho(q_1) + \varphi(q_1)q \tag{4.62}$$

La matrice $\mathscr{N}$ est triangulaire inférieure, par conséquent, $\mathrm{N}(q) = \mathscr{N}(q)\mathrm{T}(q)$ est également triangulaire inférieure puisque la matrice T est triangulaire inférieure. En outre, chaque élément diagonal de N est donné comme $\mathrm{N}_{ii} = \Lambda_{ii}\,\mathrm{T}_{ii} > 0$. Pour satisfaire la condition de positivité (4.55) de l'hypothèse B1, la stratégie est de trouver φ et ρ tel que la matrice N devient diagonale.

La matrice N a la forme suivante [Venkatraman-10b]:

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11}\,\mathrm{T}_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{\partial\rho_2}{\partial q_1}\mathrm{T}_{11}+\Lambda_{22}\,\mathrm{T}_{21} & \Lambda_{22}\,\mathrm{T}_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \left\{\dfrac{\partial\rho_3}{\partial q_1}+\dfrac{\partial\varphi_{32}}{\partial q_1}q_2\right\}\mathrm{T}_{11}+\varphi_{32}\,\mathrm{T}_{21}+\Lambda_{33}\,\mathrm{T}_{31} & \varphi_{32}\,\mathrm{T}_{22}+\Lambda_{33}\,\mathrm{T}_{32} & \Lambda_{33}\,\mathrm{T}_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \begin{array}{l}\left\{\dfrac{\partial\rho_4}{\partial q_1}+\dfrac{\partial\varphi_{42}}{\partial q_1}q_2+\dfrac{\partial\varphi_{43}}{\partial q_1}q_3\right\}\mathrm{T}_{11}+\varphi_{42}\,\mathrm{T}_{21} \\ +\varphi_{43}\,\mathrm{T}_{31}+\Lambda_{44}\,\mathrm{T}_{41}\end{array} & \begin{array}{l}\varphi_{42}\,\mathrm{T}_{22}+\varphi_{43}\,\mathrm{T}_{32} \\ +\Lambda_{44}\,\mathrm{T}_{42}\end{array} & \varphi_{43}\,\mathrm{T}_{33}+\Lambda_{44}\,\mathrm{T}_{43} & \Lambda_{44}\,\mathrm{T}_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ .. & .. & .. & .. & .. & \Lambda_{nn}\,\mathrm{T}_{nn} \end{bmatrix}$$

L'algorithme procède le long des étapes suivantes:

1. Pour chaque $i \geq 3$, résoudre $\mathrm{N}_{i,\,i-1} = 0$ pour obtenir la fonction $\varphi_{i,i-1}$.

   Par exemple, on calcule $\varphi_{32} = -\dfrac{\Lambda_{33}\,\mathrm{T}_{32}}{\mathrm{T}_{22}}$, $\varphi_{43} = -\dfrac{\Lambda_{44}\,\mathrm{T}_{43}}{\mathrm{T}_{33}}$ et ainsi de suite. Il est à noter que les termes $\mathrm{T}_{ii} > 0$ pour tout $i \in \overline{n}$.
2. Pour chaque $i \geq 4$, résoudre $\mathrm{N}_{i,\,i-2} = 0$ en utilisant la fonction $\varphi_{i,i-1}$ obtenue à l'étape 1 pour obtenir $\varphi_{i,\,i-2}$. Par exemple, $\varphi_{42} = \dfrac{\Lambda_{44}}{\mathrm{T}_{22}\,\mathrm{T}_{33}}\{\mathrm{T}_{43}\,\mathrm{T}_{32} - \mathrm{T}_{42}\,\mathrm{T}_{33}\}$.
3. Procéder ainsi jusqu'à ce que $i = n$ pour compléter le calcul de φ.
4. Résoudre les équations différentielles ordinaires $\mathrm{N}_{i1} = 0;\ 2 \leq i \leq n$ et calculer le vecteur ρ. Par exemple, la fonction ρ_2 est obtenue en résolvant l'EDO $\dfrac{\partial\rho_2}{\partial q_1} = -\dfrac{\Lambda_{22}\,\mathrm{T}_{21}(q_1)}{\mathrm{T}_{11}(q_1)}$. On continue de cette manière, utiliser la fonction φ (maintenant connue) et calculer la fonction ρ en résolvant les EDOs.

Les éléments de la matrice Λ peuvent être choisis librement et il suffit simplement de veiller à ce qu'ils soient des constantes positives. Enfin, après avoir calculé $\mathscr{N}$, on obtient β à partir de (4.62). Dans le cas où la dimension du système mécanique est $n \leq 2$, la matrice φ n'est pas nécessaire et on se passe des trois premières étapes.

Pour illustrer les différents calculs de cet algorithme, considérons l'exemple du pendule inversé.

On construit un observateur de vitesse pour le système pendule inversé dont la matrice d'inertie est donnée par $M = \begin{bmatrix}1 & b\cos(q_1), & b\cos(q_1) & m_3\end{bmatrix}^T$ (voir chapitre 2, équation (2.22)) et sa factorisation triangulaire inférieure de Cholesky est donnée comme suit

$$T = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{m_3}}{\sqrt{m_3 - b^2\cos^2 q_1}} & 0 \\ \dfrac{-b\cos q_1}{\sqrt{m_3}\sqrt{m_3 - b^2\cos^2 q_1}} & \dfrac{1}{\sqrt{m_3}} \end{bmatrix}$$ (voir chapitre 2, équation (2.88)).

On construit maintenant $\mathscr{N}$ en suivant l'algorithme ci-dessus, par conséquent on a :

$$\mathscr{N} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & 0 \\ 0 & \Lambda_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \nabla_{q_1}\rho_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.63}$$

où $\Lambda_{ii} > 0$. Par la suite, on résout l'EDO $N_{21} = 0,$ qui a la forme :

$$\nabla_{q_1}\rho_2 = \frac{\Lambda_{22} b}{m_3}\cos(q_1) \tag{4.64}$$

et donc :

$$\rho_2 = \frac{\Lambda_{22} b}{m_3}\sin(q_1) \tag{4.65}$$

Ainsi, on obtient

$$\beta = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} q_1 \\ \Lambda_{22}\left(q_2 + \dfrac{b}{m_3}\sin(q_1)\right) \end{bmatrix} \tag{4.66}$$

Les résultats de simulation de cet exemple seront présentés dans la prochaine section.

IV.6 Stabilité asymptotique de la conception CBP-AIA avec l'observateur I&I

Dans cette section, on étudie les propriétés de stabilité de la combinaison de la CBP-AIA paramétrique introduite dans le chapitres 3 avec l'observateur I&I déterminé dans la section précédente. En particulier, on montrera que la mesure des quantités de mouvement p , nécessaire dans la CBP-AIA, peut être remplacée par son estimé $\hat{p}$, en préservant la stabilité asymptotique de l'équilibre désiré.

Rappelant du chapitre 3, que la CBP-AIA est donnée comme suit

$$u(q, p) = (G^T G)^{-1} G^T (\nabla_q H - M_d M^{-1}\nabla_q H_d + J_2 M_d^{-1} p) - K_v \overline{p} \tag{4.67}$$

avec

$$\overline{p}(q, p) = G^T(q)\nabla_p H_d(q, p) = G^T(q) M_d^{-1}(q) p \tag{4.68}$$

Le système en boucle fermée est donné par :

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}M_d \\ -M_d M^{-1} & J_2 - GK_v G^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{pmatrix} \tag{4.69}$$

L'équation (4.67) peut être mise sous la forme [Acosta-05]

$$u(q,p)=u_0(q)\begin{bmatrix} p^T \mathrm{A}_1(q)p \\ \vdots \\ p^T \mathrm{A}_m(q)p \end{bmatrix} - K_v \overline{p} \tag{4.70}$$

où le vecteur $u_0:\Re^n \to \Re^n$ et les matrices $\mathrm{A}_i:\Re^n \to \Re^{n\times n}$ sont en fonction de q .

Comme on le verra ci-dessous, établir que $\mathrm{A}_i\left(i=1,...m\right)$ sont bornées sera crucial pour l'analyse. Pour cela, on se concentre sur les termes quadratiques en p de (4.67) découlant de $\nabla_q H$ et $\nabla_q H_d$, et on d'introduit l'hypothèse B2 ci dessous. En outre, à partir de la matrice $J_2(q,p)$ (voir chapitre 3, équation (3.142)) donnée par

$$J_2=\begin{bmatrix} 0 & \tilde{p}^T\alpha_1 & \tilde{p}^T\alpha_2 & \dots & \tilde{p}^T\alpha_{n-1} \\ -\tilde{p}^T\alpha_1 & 0 & \tilde{p}^T\alpha_n & \dots & \tilde{p}^T\alpha_{2n-3} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ -\tilde{p}^T\alpha_{n-1} & -\tilde{p}^T\alpha_{2n-3} & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

il est clair que le terme $J_2 M_d^{-1} p$ est aussi quadratique en p .

Hypothèse B2: les matrices $\nabla_{q_i} M$, $\nabla_{q_i} M_d$ et G sont bornées

Proposition 4.3 [Venkatraman-10b] *Considérons le système (4.51) et supposons que $M \in S_{PLvCC}$. Soit la commande par feedback de position $u=u(q,\hat{p})$ avec $\hat{p}$ un estimé de p généré par l'observateur I&I (4.57). Supposons que $\overline{p}(q,p)$ dans (4.68) est une sortie détectable pour le système en boucle (4.69) et que l'hypothèse B1 est satisfaite, alors il existe un voisinage du point $(q^*,0,\beta(q^*))$ de telle sorte que toutes les trajectoires de système en boucle qui partent de ce voisinage sont bornées et satisfont*

$$\lim_{t\to\infty}\left(q(t),p(t),\zeta(t)\right)=\left(q^*,0,\beta(q^*)\right) \tag{4.71}$$

En outre, si l'hypothèse B2 est vérifiée et la commande par retour d'état (4.70) assure la stabilité asymptotique globale, alors le voisinage est tout l'espace entier $\Re^{3n}$, ainsi, la bornitude et la convergence sont globales.

Les résultats théoriques des sections précédentes sont vérifiés par simulation sur l'exemple du pendule inversé. La CBP-AIA est calculée d'après [Viola-07a] (voir chapitre 3).

L'estimé $\hat{p}$ de moment p généré par l'observateur I&I est donné comme suit

$$\dot{\zeta}_1=\frac{\Lambda_{11}\sqrt{m_3}}{\sqrt{m_3-b^2\cos^2 q_1}}(\beta_1-\zeta_1)-\frac{a\sqrt{m_3}\sin q_1}{\sqrt{m_3-b^2\cos^2 q_1}}+\frac{b\cos q_1}{\sqrt{m_3}\sqrt{m_3-b^2\cos^2 q_1}}u \tag{4.72}$$

$$\dot{\zeta}_2=\frac{\Lambda_{22}}{\sqrt{m_3}}(\beta_2-\zeta_2)-\frac{1}{\sqrt{m_3}}u \tag{4.73}$$

$$\hat{p}_1=\frac{\sqrt{m_3-b^2\cos^2 q_1}}{\sqrt{m_3}}(\beta_1-\zeta_1)+\frac{b\cos q_1}{\sqrt{m_3}}(\beta_2-\zeta_2) \tag{4.74}$$

$$\hat{p}_2 = \sqrt{m_3}(\beta_2 - \zeta_2) \tag{4.75}$$

avec β donné par (4.66). La dynamique d'erreur de l'observateur est donnée par

$$\dot{z}_1 = -\frac{\Lambda_{11}\sqrt{m_3}}{\sqrt{m_3 - b^2\cos^2 q_1}} z_1 \tag{4.76}$$

$$\dot{z}_2 = -\frac{\Lambda_{22}}{\sqrt{m_3}} z_2 \tag{5.78}$$

à partir de laquelle il est clair que le taux de convergence est (essentiellement) déterminé par les constantes Λ_{11} et Λ_{22}.

Les paramètres du système et les paramètres de la CBP-AIA, ainsi que les conditions initiales, sont présentés dans le tableau 4.1. Les conditions initiales de l'observateur $(\zeta_1(0), \zeta_2(0))$ sont choisies de telle sorte que l'estimé initiale est $\hat{p}(0) = 0$, c.à.d.il n'y a aucune connaissance préalable à l'instant initial.

Tableau 4.1: paramètres de simulations pour l'exemple pendule inversé

$q_2^* = 20$	$q_1(0) = \frac{\pi}{2} - 0.2$
$a = m_3 = 1$	$q_2(0) = -0.1$
$b = 1/g$	$p_1(0) = 0.1$
$\Lambda_{11} = \Lambda_{22} = 1$	$p_2(0) = 0.2$
$K_v = k = m_{22}^0 = 0.01$	$\zeta_1(0) = \Lambda_{11} q_1(0)$
$P_{22} = 1$	$\zeta_2(0) = \Lambda_{22}\left(q_2(0) + \frac{b\sin(q_1(0))}{m_3}\right)$

Les résultats de simulation sont présentés pour le système en boucle ouverte, c'est à dire, $u = 0$, dans la figure 4.8. Pour révéler le rôle des gains de réglage de l'observateur, les dynamiques d'erreur sont représentées pour le cas $\Lambda_{11} = \Lambda_{22}$ pour les valeurs 1 et 10.

La figure 4.9 montre le comportement du système en boucle fermée avec la commande par retour d'état complet CBP-AIA et le retour d'état basé sur l'observateur. Comme on peut le constater, les trajectoires du système par le retour d'état basé sur l'observateur montrent un comportement presque identique avec les trajectoires du système par retour d'état complet, ce qui démontre le principe de séparation.

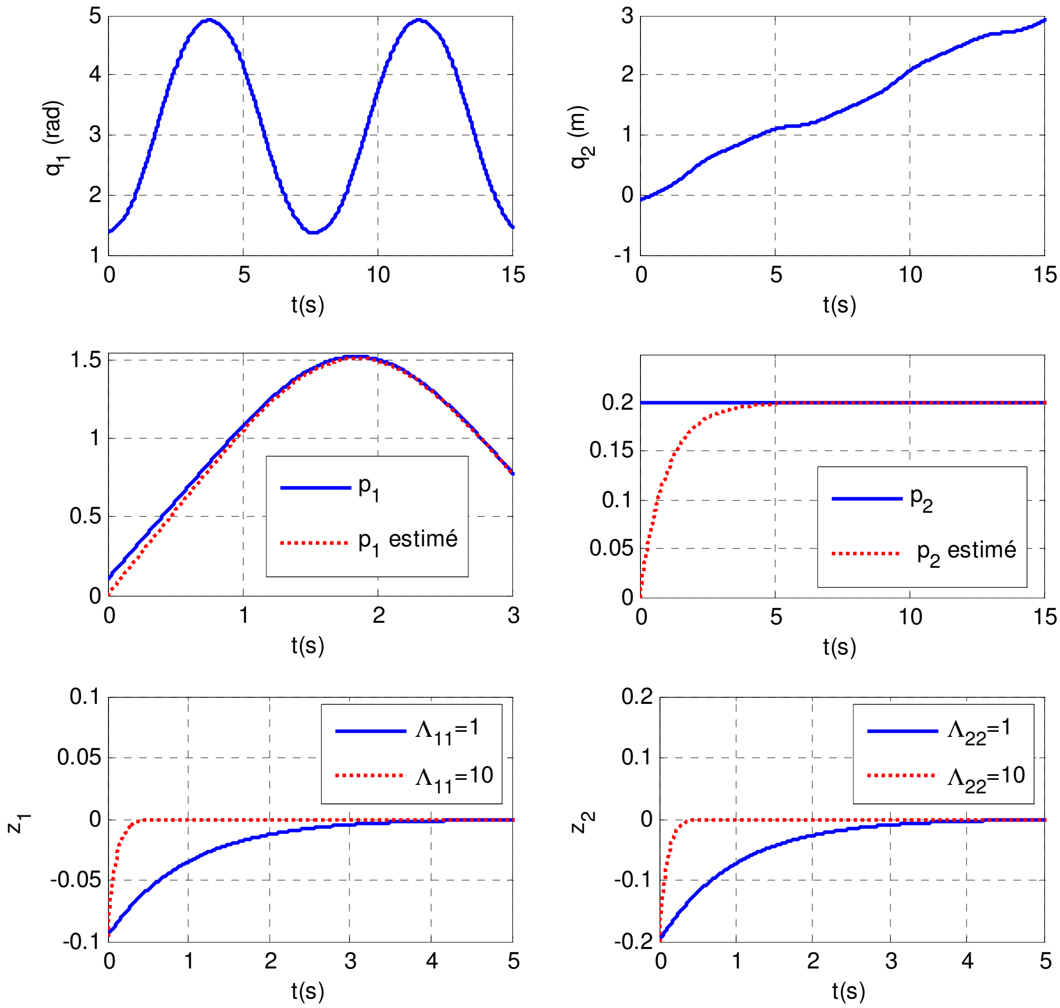


Figure 4.8: Observateur I&I pour le système en boucle ouverte $(u = 0)$

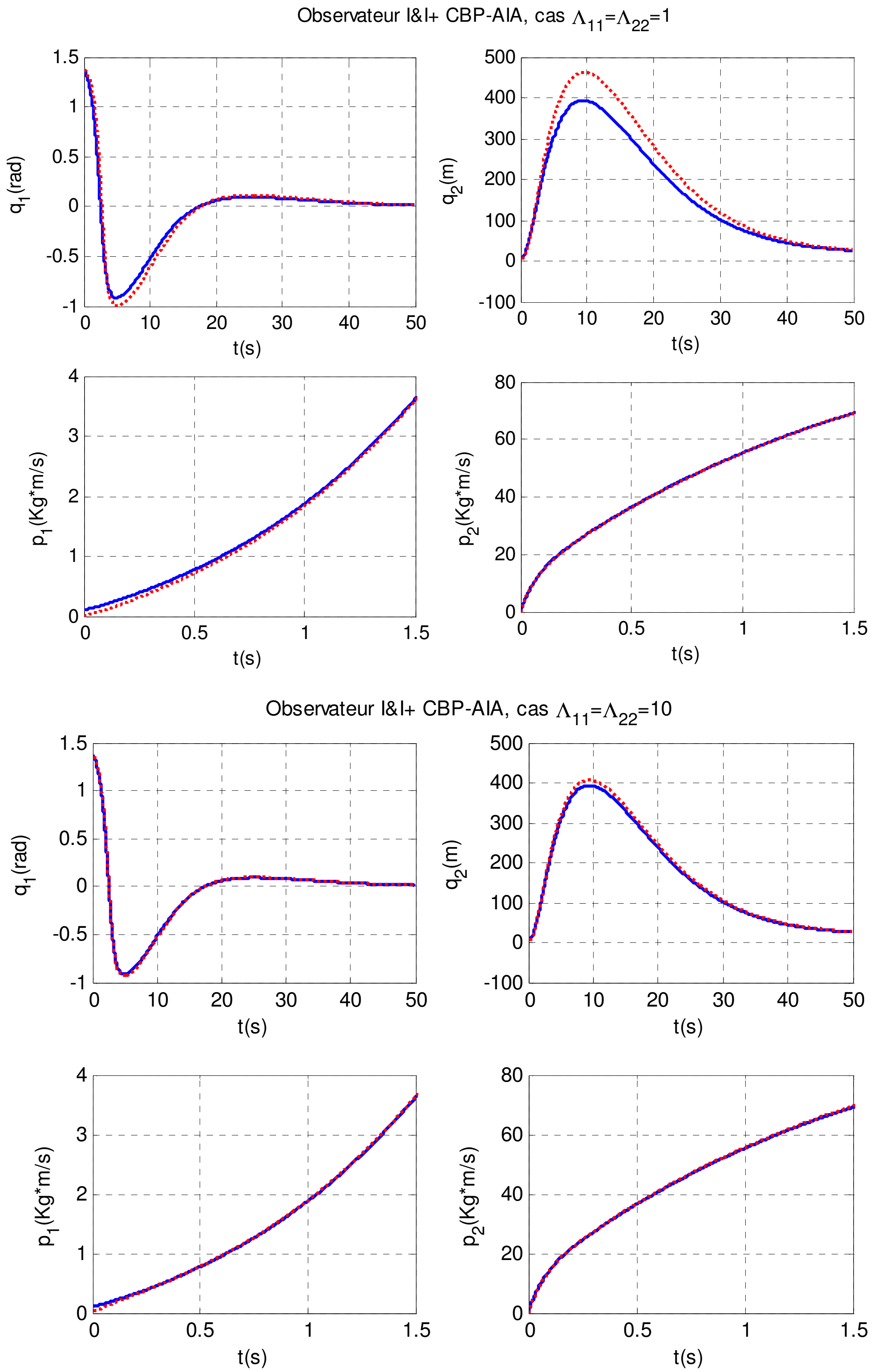


Figure 4.9: Réponses du pendule inversé en appliquant le retour d'état complet CBP-AIA (ligne continue) et le retour basé sur l'observateur (ligne pointillée) pour $\Lambda_{11} = \Lambda_{22} = 1$ et $\Lambda_{11} = \Lambda_{22} = 10$.

IV.7 Conclusion

Dans ce chapitre, quelques résultats sur la méthode d'immersion et d'invariance pour la stabilisation et la conception d'observateur pour un système non linéaire sont passés en revue. Un intérêt particulier est porté à la conception d'observateur pour les systèmes $PLvCC$.

Un observateur global d'ordre réduit à convergence exponentielle pour les systèmes $PLvCC$ est aussi construit. Le principe de séparation pour la combinaison observateur par immersion et invariance avec la commande par retour d'état complet asymptotiquement stabilisante de type assignation d'interconnexion et injection d'amortissement a été vérifié.

Conclusion générale

Conclusion générale

Le travail réalisé dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la commande basée sur la passivité. Il porte essentiellement sur l'une de ses variantes qui est la commande basé sur la passivité avec assignation d'interconnexion et d'amortissement (CBP-AIA). C'est une méthode de commande non linéaire qui stabilise un système en façonnant son énergie totale, tout en préservant la structure hamiltonienne commandée par port du système et en utilisant la passivité. Cette commande a été appliquée avec succès aux systèmes mécaniques sous actionnés.

On a utilisé des modèles basés sur l'énergie, premièrement pour la conception d'une loi de commande qui a permet de façonner l'énergie du système afin de le stabiliser à l'équilibre souhaité, plus précisément assurer la stabilité asymptotique, et deuxièmement pour la conception d'un observateur.

On a présenté au premier lieu les définitions de base et les résultats sur la passivité et les systèmes passifs en général afin d'introduire et de comprendre certaines des techniques de commande les plus importantes développées pour la stabilisation des systèmes hamiltoniens commandés par ports, à savoir: injection d'amortissement, commande par interconnexion et façonnement de l'énergie. Pour cela on a rappelé les équations d'Euler-Lagrange et les équations hamiltoniennes pour les systèmes mécaniques. Ensuite, on a simplifié les équations dynamiques, soit par un changement de coordonnées ou par rétroaction, pour faciliter le calcul de la commande et la conception de l'observateur.

Une étudie détaillée de la CB-AIA a été effectuée. On a présenté les principales variantes de cette commande, à savoir AIA non paramétrique, AIA algébrique et AIA paramétrique.
La caractéristique principale de cette dernière commande est que la fonction d'énergie totale en boucle fermée est obtenue via la résolution des EDPs. Pour ce faire, des méthodes de résolution de ces équations ont été proposées. Cette commande a été appliquée avec succès aux systèmes mécaniques sous actionnés.

Un intérêt particulier est porté à la conception d'observateur pour les systèmes PLvCC. On a construit un observateur global d'ordre réduit à convergence exponentielle pour les systèmes PLvCC. Le principe de séparation pour la combinaison de l'observateur d'I&I avec la commande par retour d'état complet asymptotiquement stabilisante de type assignation d'interconnexion et injection d'amortissement a été vérifié dans ce travail.

Bibliographie

Bibliographie

[Acosta-05] J. A. Acosta, R. Ortega, A. Astolfi, and A. D. Mahindrakar. "Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control of Mechanical Systems with Underactuation Degree One". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 12, pp. 1936-1955, 2005.

[Acosta-08] J. A. Acosta, R. Ortega, A. Astolfi, I. Sarras. A constructive solution for stabilization via immersion and invariance: The cart and pendulum system. *Automatica*, vol.44, no9, pp 2352–2357, 2008.

[Astolfi-02a] A. Astolfi, D. Chhabra, R.Ortega. "Asymptotic stabilization of selected equilibria of the underactuated Kirchhoff's equations". *Systems Control Lett.*, vol.45, pp.184-187, 2002.

[Astolfi-02b] A. Astolfi, R. Ortega. Energy based stabilization of the angular velocity of a rigid body operating in failure configuration". *J. Guidance control Dyn.*, vol.25, pp.184-187, 2002.

[Astolfi-03] A. Astolfi, R. Ortega. Immersion and invariance: A new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, vol.48, pp.590–606. 2003.

[Astolfi-07] A. Astolfi. D. Carnevale, D. Karagiannis. Reduced-order observer design for nonlinear systems. *Proc. European Contr. Conf.*, pp. 559-564, 2007.

[Astolfi-08] A. Astolfi, D. Karagiannis, R. Ortega. *Nonlinear and adaptive control with applications.* Springer-Verlag, 2008.

[Auckly-00] D. Auckly, L. Kapitanski, and W. White. "Control of nonlinear underactuated systems". *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 3, pp. 354–369, 2000.

[Auckly-02] D. Auckly and L. Kapitanski. "On the λ–equations for matching control laws". *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 41, pp.1372–1388, 2002.

[Bao-07] J. Bao and P.L. Lee. *Process Control. The Passive Systems Approach.* Springer,2007.

[Batlle-04] C. Batlle, A. Doria-Cerezo, R. Ortega. "Power flow control of a doubly-fed induction machine coupled to a flywheel". *IEEE International Conference on Control Applications*, vol.2, pp. 1645–1650, 2004.

[Batlle-07] C. Batlle, A. Doria-Cerezo, G. Espinosa-Pérez and R.Ortega. "*Simultaneous Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control: Two Practical Examples*". Springer.vol. 366, pp. 157-169. 2007.

[Becherif-02] M. Becherif, H. Rodriguez, E. Mendes, and R. Ortega. "Comparaison expérimentale de méthodes de commande d'un convertisseur élévateur cc-cc". *CIFA, 2002.*

[Becherif-05] M. Becherif, E. Mendes. "Stability and robustness of disturbed–port controlled Hamiltonian system with dissipation". *16th IFAC World Congress*, Prague; 2005.

[Bedrossian-92] N. S. Bedrossian. Linearizing coordinate transformation and Riemannian curvature. *IEEE Conference on Decision & Control*, pp. 80–85, 1992.

[Besançon-00] G. Besançon. Global output feedback tracking control for a class of Lagrangian systems. *Automatica*, vol.36, no.12, pp.1915–1921, 2000.

[Blankenstein-00] G. Blankenstein. Matching and stabilization of constrained systems. *Proceedings of Symposium on Mathematical Theory of Signals and Systems (MTNS), Kyoto,* Japan, 2000.

[Blankenstein-02] G. Blankenstein, R. Ortega and A.J. Van der Schaft, The matching conditions of controlled Lagrangians and interconnection assignment passivity based control, *Int J of Control*, vol. 75, no. 9, pp. 645–665, 2002.

[Bloch-00] A. Bloch, N. Leonard and J. Marsden. "Controlled lagrangians and the stabilization of mechanical systems". *IEEE Trans. Automat. Control*, 2000.

[Byrnes-91] C.I. Byrnes, A. Isidori. Asymptotic Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 35, pp. 1122-1137, 1991.

[Chopra-06] N.Chopra, M.W.Spong. Advances in Robot Control: From everyday physics to human like mouvements, chapitre: Passivity based control of multi agent systems, pp.107-134. *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 2006.

[Cornejo-07] C. Cornejo, L. Alvarez-Icaza. "A nonlinear friction model for the passivity-based control of underactuated mechanical systems". *46th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3859–3864, 2007.

[Desoer-75] C. Desoer, M. Vidysagar. *Feedback System : Input-Output Properties*. Academic Press, 1975.

[Dirksz-08] D.A. Dirksz, J.M.A. Scherpen, R. Ortega. "Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control for Port-Hamiltonian mechanical systems with only position measurements". *47th IEEE CDC, Cancun,* Mexico, Dec. 9-11, 2008.

[Fang-01] Y. Fang, E. Zergeroglu, W. E. Dixon and D. M. Dawson. "Non linear Coupling Control Laws for an Overhead Crane System". *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications, Mexico City, Mexico*, pp. 639-644, 2001.

[Fujimoto-01a] K. Fujimoto, K. Sakurama, and T. Sugie. "Trajectory tracking control of port-controlled hamiltonian systems and its application to a magnetic levitation system". *IEEE Conference on Decision and Control*, vol.4, pp. 3388–3393, 2001.

[Fujimoto-01b] K. Fujimoto, T. Sugie. "Canonical transformations and stabilization of generalized Hamiltonian systems". *Systems and Control Letters*, vol. 42, no. 3, pp.217–227, 2001.

[**Gomez-Estern-04]** F. Gómez-Estern, A.J. Van der Schaft and J.Á. Acosta. "Passivation of underactuated systems with physical damping". *In Proceedings, 6th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems,* pp. 1-3, 2004.

[Hill-88] D.J.Hill. Dissipativeness, stability theory and some remaining problems. In *Analysis* *and Control of Nonlinear Systems*, eds CI Byrnes, CF Martin and RE Saeks, North-Holland, Amsterdam, 1988.

[Horn-90] R. A. Horn and C. R. Johnson. Matrix analysis. *Cambridge University Press,* 1990.

[Isidori-95] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems.* Springer-Verlag, London, 1995.

[Jillson-07] K.Jillson, B.E. Ydstie. Process networks with decentralized inventory and flow control. *Journal of Process Control,* vol. 17, pp. 399-413, 2007.

[Karagiannis-07] D. Karagiannis A. Astolfi and R. Ortega. Nonlinear and Adaptive Control with Applications. *Springer-Verlag, Berlin, Communications and Control Engineering,* 2007.

[Karagiannis-09] D. Karagiannis, M. Sassano, and A. Astolfi. Dynamic scaling and observer design with application to adaptive control. *Automatica*, vol.45, no.12, pp. 2883–2889, 2009.

[Khalil-02] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems. Third edition.* Prentice-Hall. 2002.

[Lewis-04] A. Lewis. "Notes on energy shaping". *43rd IEEE Conf Decision and Control,* Dec 14-17, 2004.

[Luenberger-64] D. G. Luenberger. Observing the state of a linear system. *IEEE Transactions on Military Electronics*, vol. 8, pp.74–80, 1964.

[Maschke-92] B.M. Maschke, A.J. Van der Schaft. Port-controlled Hamiltonian systems: Modelling origins and system theoretic properties. *Proc. of the IFAC Int. Symp. On Nonlinear Control Systems Design, NOLCOS92.* Bordeaux, France. 1992.

[Nicosia-90] S. Nicosia and P. Tomei. "Robot control by using only joint position measurements. *IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 35, No. 9, pp. 1058-1061,* Sep 1990

[Ortega-01] R. Ortega, A.J. Van der Schaft, I. Mareels, and B. Maschke. "Putting energy back in control". *IEEE Control Systems,* vol.21, no.2, pp. 18 - 33, 2001.
rements. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 35, no. 9, pp. 1058-1061, 1990.

[Ortega-02a] R. Ortega, M. W. Spong, F. Gómez-Estern and G. Blankenstein. "Stabilization of a Class of Underactuated Mechanical Systems via Interconnection and Damping Assignment", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, no. 8, pp. 1218-1233, 2002.

[Ortega-02b] R. Ortega, A. J. Van der Schaft, B. Maschke, G. Escobar. "Interconnection and damping assignment passivity–based control of port–controlled Hamiltonian systems". *Automatica,* vol. 38, no.4, pp 585–596, 2002.

[Ortega-04] R. Ortega, E. Garcia–Canseco. "Interconnection and Damping Assignment Passivity–Based Control: A Survey". European Journal of Control, vol. 10, pp.432–450, 2004.

[Ortega-89] R. Ortega, M. W. Spong. Adaptive motion control of rigid robots: A tutorial. *Automatica*, vol. 25, no. 6, pp. 877-888, 1989.

[Ortega-98] R. Ortega, A. Loria, P.J. Nicklasson, and H. Sira-Ramirez. *Passivity–based control of Euler–Lagrange systems.* Springer–Verlag, Berlin, 1998.

[Ortega-99a] R. Ortega, A. J. Van der shaft, B. M. Maschke, et G. Escobar. "Energy shaping of port-controlled Hamiltonian systems by interconnection". *Proceedings of the 38th IEEE*

Conference on Decision Control, vol. 2, pp. 1646–1651, 1999.

[Ortega-99b] R. Ortega, A. Astolfi, G. Bastin, and H. Rodriguez. *Output feedback stabilization of nonlinear systems.* Springer, 1999.

[Petrovic-01] V. Petrovic, R. Ortega, and A. M. Stankovich. Interconnection and damping assignment approach to control of permanent magnet synchronous motor. *IEEE Transactions on Control Systems Technology;* vol. 9, no. 6, pp. 811–820, 2001.

[Rodriguez-00] H. Rodriguez, R. Ortega, G. Escobar, and N. Barabanov. A robustly stable output feedback saturated controller for the boost DC-to-DC converter. *Systems and Control Letters*, vol. 40, no. 1, pp. 1–8, 2000.

[Sandoval-10] J. Sandoval, R. Kelly, V. Santibanez. Interconnection and damping assignment passivity-based control of a class of underactuated mechanical systems with dynamic friction. *International Journal of Robust and Nonlinear Control***,** vol. 21, no. 7, pp738–751, 2011.

[Santibanez-05] V. Santibanez, R. Kelly and J. Sandoval. " Control of the Inertia Wheel Pendulum by Bounded Torques". *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 8266-8270, 2005.

[Sarras-10a] I. Sarras. Sur la conception constructive des lois de commande et d'observateurs pour des systèmes mécaniques par passivité, immersion et invariance. *Thèse de doctorat, université de Paris-Sud. Faculté des Sciences d'Orsay*, 2010.

[Sarras-10b] I.Sarras, F.Kazi, R.Ortega, R.Banavar. "Total Energy-Shaping IDA-PBC Control of the 2D-Spider Crane". *49th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1122–1127, 2010.

[Sarras-10c] I. Sarras, H.B. Siguerdidjane, R. Ortega. Stabilization of the Experimental Cart–Pendulum System with Proven Domain of Attraction. *European Journal of Control*, vol.4, pp.329–340, 2010.

[Singhal-06] R .Singhal, P. Rupesh, and R.N. Banavar. "Tracking a trajectory for a gantry crane: Comparison between IDA-PBC and direct Lyapunov approach". *IEEE International Conference on Industrial Technology*, pp. 1788-1793, 2006.

[Slotine-91] J.J. Slotine, W.Li. Applied Nonlinear Control. Prentice Hall Publihers, 1991.

[Spivak-99] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry*, *3rd edition, volume 2.* Publish or Perish, 1999.

[Spong-92] M. W. Spong. Remarks on robot dynamics: canonical transformations and Riemannian geometry. *IEEE Conference on Robotics & Automation*, pp. 554–559, 1992.

[Spong-98] M.W. Spong. Underactuated mechanical systems. in *Control Problems in Robotics and Automation*, (eds.) B. Siciliano and K. Valavanis, LNICS Vol. 230, Springer-Verlag, 1998.

[Takegaki-81] M. Takegaki, S. Arimoto. A new feedback method for dynamic control of manipulators. *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, vol.103, pp.119-125. 1981.

[Van der Burg-07] J. C. M. Van der Burg, R. Ortega, J. M. A. Scherpen, J. A. Acosta, and H.

B. Siguerdidjane. "An Experimental Application of Total Energy Shaping Control: Stabilization of the Inverted Pendulum on a Cart in the Presence of Friction". *European Control Conference*, pp. 1990-199, 2007.

[Van der Schaft-00] A. J. Van der Schaft. *L2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear*. Springer-Verlag, 2000.

[Van der Schaft-95] A.J. Van der Schaft, B.M. Maschke. The Hamiltonian formulation of energy conserving physical systems with ports. *Archiv Elektronik und Übertragungstechnik*, vol. 49, pp. 362-371, 1995.

[Venkatraman-10a] A. Venkatraman and A. J. Van der Schaft. Full order observer design for a class of port–Hamiltonian systems. *Automatica*, vol.46, no.3, pp.555–561, 2010.

[Venkatraman-10b] A. Venkatraman. Control of Port-Hamiltonian Systems: Observer Design and Alternate Passive Input-Output Pairs. *Thèse de doctorat, université de Groningen, Pays-Bas*, 2010.

[Venkatraman-10c] A. Venkatraman, R. Ortega, I. Sarras, A.J. Van der Schaft. Speed Observation and Position Feedback Stabilization of Partially Linearizable Mechanical Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control, vol.55, no.5, 2010.*

[Viola-07a] G. Viola, R. Ortega, R. Banavar, J. A. Acosta, and A. Astolfi. "Total energy shaping control of mechanical systems: simplifying the matching equations via coordinate changes". *IEEE Trans. Automat. Contr.* vol. 52, no.6, pp.1093–1099, 2007.

[Viola-07b] G. Viola, R. N. Banavar, J. A. Acosta, and A. Astolfi, "Some remarks on interconnection and damping assignment passivity-based control of mechanical systems," *Taming Heterogeneity and Complexity of Embedded Control*, pp. 721–735, ISTE, 2007

[Yalçin-10] Yaprak Yalçin, Leyla Goren Sumer, "Direct discrete-time control of port controlled Hamiltonian systems", *Turk J Elec Eng & Comp Sci*, vol.18, no.5, 2010.

[Yokoyama-10] K.Yokoyama, M. Takahashi. "Stabilization of a Cart-Inverted Pendulum with Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control Focusing on the Kinetic Energy Shaping". *Journal of System Design and Dynamics*, vol. 4, no 5, pp. 698-711, 2010.

[Willems-72] J.C. Willems. Dissipative dynamical systems –Part I: General theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol.45, no5, pp.321–351. 1972.