



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU
FACULTE DU GENIE DE LA CONSTRUCTION
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

MEMOIRE DE MAGISTER

SPECIALITE : GENIE MECANIQUE
OPTION : SCIENCES DES MATERIAUX

PRESENTE PAR

AIMENE KAHINA

Etude comparative de lois constitutives pour matériaux
hyperélastiques soumis à des chargements cycliques.

Devant le jury d'examen composé de :

| | | |
|-----------------------------------|---|-------------------|
| Mr. HANNACHI Naceur Eddine | Pr. à U.M.M.T.O | Président |
| Mr. OULD OUALI Mohand | M.C.A. à U.M.M.T.O | Rapporteur |
| Mr. AIT TAHAR Kamal | Pr. à U.M.M.T.O | Examineur |
| Mr. NECIB Kamel | Pr. Ecole Militaire polytechniques | Examineur |

Année 2013

Ce n'est qu'en essayant continuellement que l'on
finit par réussir. . . En d'autres termes, plus ça
rate et plus on a de chance que ça marche !
Les Shadocks

Remerciements

Ce présent mémoire n'aurait pas été possible sans le bienveillant soutien de certaines personnes. Et je ne suis pas non plus capable de dire dans les mots qui conviennent, le rôle qu'elles ont pu jouer à mes côtés pour en arriver là. Cependant, je voudrais les prier d'accueillir ici tous mes sentiments de gratitude qui viennent du fond de mon cœur, en acceptant mes remerciements.

Je tiens en premier lieu à remercier OULD OUALI Mouhand qui m'a encadré pendant la durée de ce mémoire. Il a toujours su m'indiquer de bonnes directions de recherche quand il le fallait, étant toujours attentifs à mon travail et cela dans les moindres détails. Je le remercie également pour son éternel optimisme, il a toujours su remonter le moral.

Ma reconnaissance va naturellement à tous les membres du jury, à savoir Monsieur HANNACHI Naceur Eddine qui a accepté la lourde responsabilité de présider ma soutenance. Je remercie particulièrement Messieurs AIT TAHAR Kamal et Mr. NECIB Kamel qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ce travail.

J'aurai aimé n'omettre personnes dans cette liste de remerciements, mais cela n'est pas une chose facile, je pense aussi à tous les autres (camarades et amis) pour leur soutien et leur encouragement qui m'ont aidé à aller devant. Merci à vous tous.

Enfin, ces dernières lignes sont dédiées à ceux qui occupent une place privilégiée dans mon cœur, qui m'ont encouragée et soutenue, je remercie mes parents qui m'ont toujours laissé la liberté dans le choix de mon cursus scolaire et qui de plus, m'ont toujours donné le soutien moral nécessaire. A mes deux sœurs (Nabila et Sisi) et mon frère Jugurtha, à mes beaux parents et à mes beaux frères et sœurs. J'espère que toute ma famille trouvera dans ces travaux et ce manuscrit toute la reconnaissance et l'amour que je leur porte.

Je n'aurai pas assez de mots pour remercier également mon mari et ma moitié Said. Je trouve chez lui une grande source de motivation. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance éternelle pour sa compréhension, sa présence, son grand cœur. Sans son soutien, ce travail n'aurait pu être achevé. J'espère à mon tour lui apporter autant qu'il me donne.

Table des matières

Glossaire

Liste de Figures

| | |
|----------------------------|---|
| Introduction générale..... | 9 |
|----------------------------|---|

Chapitre I Les matériaux élastomères

| | |
|---|----|
| I.1 Introduction | 12 |
| I.2 Historique..... | 13 |
| I.3 De l'arbre a la gomme | 14 |
| I.4 Mise en œuvre des élastomères | 15 |
| - La formulation | 15 |
| - Le mélangeage | 16 |
| - La mise en forme..... | 16 |
| - Un réseau tridimensionnel – Vulcanisation | 17 |
| I.5 Catégories de caoutchouc..... | 18 |
| I.6 Domaines d'utilisation | 19 |
| I.7 Dégradation du caoutchouc naturel | 20 |
| I.7 Comportement des élastomères..... | 20 |
| 1) Physico-chimie des élastomères..... | 20 |
| 2) Élasticité non-linéaire | 22 |
| 3) Incompressibilité | 23 |
| 4) Les mécanismes dissipatifs | 24 |
| 5) Les mécanismes d'endommagement | 26 |
| 6) Comportement thermique..... | 30 |
| I.8 Conclusion..... | 32 |

Chapitre II Modélisation du comportement des élastomères

| | |
|--|----|
| I.1 Introduction | 34 |
| II.2 Motivation | 35 |
| II.3 Formulation d'un problème mécanique | 35 |
| II.3.1 Cinématique..... | 35 |
| II.3.2 Formulation variationnelle..... | 36 |
| II.4 Résolution numérique..... | 37 |
| II.4.1 Approche incrémentale | 37 |
| II.4.2 Choix du logiciel élément finis | 38 |
| II.5 Les schémas de résolution numérique..... | 39 |
| II.5.1 Schéma de résolution statique implicite (SI) | 39 |
| II.5.2 Schéma de résolution dynamique explicite (DE) | 40 |
| II.6 Quelques exemples de densités d'énergie sans endommagement..... | 41 |
| II.6.1 Modèles isotropes incompressibles | 42 |
| II.6.2 Modèles isotropes compressibles..... | 46 |
| II.6.3 Modèles microphysiques..... | -- |
| II.7 Modélisation de l'effet Mullins..... | |

| | |
|---|----|
| II.7.1 Les modèles macroscopiques | 50 |
| II.7.2 Les modèles micro-physiquement motivés | 53 |
| I.8 conclusion..... | 55 |

Chapitre III Interprétation des résultats

| | |
|--|----|
| I.1 objectifs de l'étude | 57 |
| II.2. Les résultats expérimentaux de la bibliographie..... | 58 |
| III.3 Les essais de Treloar (1944) | 58 |
| III.4 Représentation des modèles | 60 |
| III.5 Résultats numériques | 60 |
| 1) Prédiction du modèle de Biderman..... | 60 |
| 2) Le modèle de Haines-Wilson | 64 |
| 3) Le Modèle de Harth-Smith | 65 |
| 4) Le Modèle de Gent..... | 66 |
| 5) Le Modèle tube..... | 67 |
| 6) Le modèle tube étendu..... | 68 |
| III.6 Conclusion sur ces modèles de comportement..... | 69 |
| III.7 Extension du modèle Tube étendu au vieillissement..... | 69 |
| III.7.1 application du modèle vieilli | 70 |
| III.7 Introduction de l'effet thermique | 78 |
| Conclusions et perspectives..... | |

Glossaire

Mesure des déformations d'un domaine solide continu

| | |
|-------------|---|
| X | Position d'un point matériel dans la configuration non déformée. $d\vec{x} = \mathbf{F} \cdot d\vec{X}$ |
| x | Position d'un point matériel dans la configuration déformée. |
| u | Champ de déplacement. |
| F | Gradient de la déformation $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \mathbf{I}$ |
| J | Variation locale de volume $J = \det \mathbf{F}$ |
| C | Tenseur de CAUCHY-GREEN droit $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ |
| B | Tenseur de CAUCHY-GREEN gauche $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$ |
| U, R | Tenseur droit de déformation pure et Tenseur des rotations, proviennent de la décomposition polaire de F , tels que : $\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U}$. On a également $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$ |
| V, R | Tenseur gauche de déformation pure et Tenseur des rotations, proviennent de la décomposition polaire de F , tels que : $\mathbf{F} = \mathbf{V} \mathbf{R}$. On a également $\mathbf{B} = \mathbf{V}^2$ |
| E | Tenseur de GREEN-LAGRANGE $\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I})$ |
| L | Tenseur des vitesses de déformation $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$ |
| D | Tenseur taux de déformation $\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$ |

Mesure des contraintes d'un domaine solide continu

| | |
|----------|---|
| Π | Premier tenseur des contraintes de PIOLA-KIRCHHOFF $\Pi = J \cdot \mathbf{F}^{-T}$ |
| S | Second tenseur des contraintes de PIOLA-KIRCHHOFF $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \Pi$ |
| σ | Tenseur des contraintes de CAUCHY |
| τ | Tenseur des contraintes de KIRCHHOFF $\boldsymbol{\tau} = \det(\mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma}$ |

Quantités physique

| | |
|-----------|--|
| ρ_0 | Masse volumique mesurée dans la configuration non-déformée |
| ρ | Masse volumique mesurée dans la configuration déformée $\rho = J^{-1} \rho_0$ |
| ψ | Énergie libre de HELMHOLTZ définie par unité de masse |
| T | Température |
| S | Entropie spécifique |
| \vec{q} | Flux de chaleur dans la configuration actuelle |
| \vec{Q} | Transporté du flux de chaleur dans la configuration initiale $\vec{Q} = J \mathbf{F}^{-1} \vec{q}$ |

Liste de Figures

| | |
|--|-----------|
| Figure I.1 : extraction de latex..... | 1 |
| Figure I.2 : Composition d'un mélange de caoutchouc..... | |
| Figure I.3 : Le caoutchouc naturel : de l'arbre au produit fini. Les étapes d'élaboration selon le type de produit fabriqué | |
| Figure I.4 : propriétés physiques et mécaniques en fonction de la densité de réticulation | |
| Figure I.5 : Schématisation d'une pelote statistique..... | |
| Figure I.6 : Spectre thermomécanique des polymères : évolution schématique du module d'Young en fonction de la température | |
| Figure I.7 : Zone de raidissement lors d'une charge et décharge sur un Polychloroprène stabilisé | |
| Figure I.8 : Stabilisation d'un SBR non cristallisant et d'un NR cristallisant. La courbe en pointillés représente le comportement du matériau non-cyclé..... | |
| Figure I.9 : Chargement cyclique de traction uniaxiale avec variation de la déformation maximale imposée..... | |
| Figure I.10 : Les différentes échelles de taille des charges. La particule élémentaire est une entité physique qui n'existe pas dans la pratique : l'élément de base est l'agrégat | |
| Figure I.11 : Observation "macro-méso-micro" pour un élastomère réticulé..... | |
| Figure I.12 : Deux types de mécanismes d'endommagement au sein d'un VER..... | |
| Figure I.13 : L'effet Mullins est souvent représenté de manière idéalisée | |
| Figure I. 14 : module de Young en fonction de temps | |
| Figure II.1 : <i>Structure en équilibre</i> | 36 |
| Figure II.2 : <i>Cadre générale du problème mécanique non linéaire</i> | 38 |
| Figure II.3 : Organigramme d'implémentation d'une <i>loi de comportement hyperélastique Abaqus</i> | 41 |
| Figure III.1 : L'évolution de la contrainte nominale en fonction de la déformation lors d'un essai de traction uniaxiale dans le modèle de Treloar..... | 59 |
| Figure III.2 :L'évolution de la contrainte nominale en fonction de la déformation lors d'un essai de traction uniaxiale dans le modèle de Treloar..... | 59 |
| Figure III.3 : comparaison des prédictions numérique du modèle de Bidermann avec les résultats expérimentaux de Treloar..... | 61 |
| Figure III.4 : Influence du facteur de compressibilité sur le comportement des élastomères en traction uniaxiale et en traction equibiaxial..... | 62 |
| Figure III.5 : Représentation de l'effet Mullins | 64 |
| Figure III.6 : comparaison des prédictions numériques du modèle de Haines-Wilson avec les résultats expérimentaux de Treloar | 65 |
| Figure III.7 : comparaison des prédictions numérique du modèle de Harth-Smith de paramètres $G = 0.175$ MPa, $k_1 = 2.86 \cdot 10^{-4}$, $k_2 = 0.311$, avec les résultats expérimentaux de Treloar | 66 |
| Figure III.8 : comparaison des prédictions numériques du modèle de Gent avec les résultats expérimentaux de Treloar..... | 67 |
| Figure III.9 : comparaison prédictions numérique du modèle de tube avec les résultats expérimentaux de Treloar..... | |

| | |
|--|----|
| Figure III.10: comparaison des prédictions numériques du modèle de tube étendu avec les résultats expérimentaux de Treloar..... | 69 |
| Figure III.11 : l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation du NBR vulcanisé chargé avec 20% de noir de carbone..... | 71 |
| Figure III.12 : l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation du NBR vulcanisé chargé avec 70% de noir de carbone..... | 71 |
| Figure III.13 : les conditions aux limites de simulation..... | 72 |
| Figure III.14 : le maillage de la structure (C3D8H) | 72 |
| Figure III.15 : les résultats numériques obtenu avec le modèle tube étendu non vieilli..... | 73 |
| Figure III.16: NBR non vieilli à 20% de CB | 74 |
| Figure III.17 : Comparaison des résultats expérimentaux du modèle vieilli | 75 |
| Figure III.18 : L'influence du vieillissement sur le comportement du NBR à 20% de noir de carbone | 75 |
| Figure III.19: NBR non vieilli renforcé à 70% de CB..... | 76 |
| Figure III.20 : comparaison des résultats expérimentaux du modèle tube étendu pour le vieilli | 77 |
| Figure III.21 : l'influence du vieillissement sur le comportement du NBR renforcé à 70% de noir de carbone..... | 77 |
| Figure III.22 : influence du vieillissement sur les élastomères chargés | 78 |
| Figure III.23: effet de la température sur le comportement des élastomères en traction uniaxiale..... | 79 |

Introduction générale

Introduction générale

La demande sans cesse croissante du monde industriel pour des pièces mécaniques répondant à la fois à des critères de faibles coût, de légèreté, de grande résistance, de sécurité en conditions d'utilisation conduit à la mise en œuvre, combinés ou non, de 'nouveaux' matériaux ayant souvent des comportements thermomécaniques complexes. Ces matériaux, généralement prédestinés pour des utilisations particulières, peuvent rompre sous l'effet de sollicitations non attendues et entraîner des situations fâcheuses. Parmi ces matériaux, nous pouvons citer les matériaux élastomères. En effet, la conception, l'élaboration, le dimensionnement ainsi que la fabrication des ces matériaux dépendent sensiblement de l'usage auquel ils sont destiné. De plus, ils ne présentent plus un comportement dominant, mais bien souvent des comportements faisant intervenir à la fois hyperélasticité, viscosité, endommagement, et une forte sensibilité aux conditions de pression et de température aussi bien aux petites qu'aux grandes déformation. Jusqu'à pas si longtemps, les travaux théoriques dans le cadre de la description des grandes déformations que subissent les élastomères, trouvaient peu d'applications parmi les ingénieurs du caoutchouc car les mathématiques rendaient très difficile, la résolution analytique de problèmes en grandes déformation. L'arrivée des outils de calcul et de simulation accessibles et puissants ont changé ce contexte et ont amené le challenge du caoutchouc aux ingénieurs de calculs. Ce contexte a favorisé le développement de plusieurs modèles élaborés dans le cadre des approches phénoménologique et physique. L'objectif de ce travail de magistère est de réaliser une étude comparative de lois constitutives pour matériaux hyperélastiques soumis à des chargements monotones et cycliques prenant en compte l'endommagement instantané et continu. Des extensions pour la prise en compte du vieillissement accéléré et de l'échauffement thermique seront aussi proposées.

Ce manuscrit est décomposé en trois parties dans lesquelles sont abordé successivement les thématiques ayant trait aux développements réalisés.

Le premier chapitre est consacré à une présentation générale des propriétés des matériaux élastomères. Par la suite, nous nous focalisons sur la description de leur morphologie à l'échelle macromoléculaire, qui nous permettra de comprendre les mécanismes induisant les différents modes de comportement. Ainsi, en partant de l'élasticité caoutchoutique, nous abordons les comportements dissipatifs et l'influence des charges, pour finir par la description de quelques mécanismes d'endommagement, notamment l'effet Mullins.

Le second chapitre est dédié à la modélisation des comportements hyperélastiques. L'isotropie, l'anisotropie, l'incompressibilité,... sont ainsi passées en revue à travers différents modèles de comportements, mais avant nous avons présenté dans la première séquence successivement le problème mécanique en transformation finie, la formulation tensorielle c

son intégration dans le code de calcul par élément finis Abaqus. En ce qui concerne la dernière partie de ce chapitre nous avons jugé utile de citer quelques modèles prenant en compte l'effet Mullins : les modèles macroscopique et les modèles microphysique dont les motivations sont liées à des observations microscopiques.

Dans le dernier chapitre, une étude comparative des prédictions des modèles choisies (Biderman, Haines-Wilson, Hart-Smith, Gent, Tube et Tube étendu) sont comparées aux résultats expérimentaux. Les paramètres matériau sont identifiés en calibrant les calculs sur un élément de volume avec les résultats de l'expérience. Puis, les modèles sont utilisés pour le calcul de structures mécaniques. A la fin de ce chapitre, deux modélisations sont proposées. La première concerne, l'incorporation du vieillissement dans le modèle 'tube étendu'. Cette formulation a été implémentée et validée en comparaison avec des résultats expérimentaux. La seconde traite l'extension du modèle de Gent pour inclure l'échauffement thermique. Le manuscrit est enrichi par la proposition de quelques perspectives tant sur le plan expérimental que sur le plan de la modélisation physique et phénoménologique des structures élastomères.

Chapitre I

LES MATÉRIAUX ÉLASTOMÈRES

Les matériaux élastomères

La nature d'un matériau élastomère est le résultat d'une forte interaction entre sa composition chimique, sa morphologie à différentes échelles, le procédé de son élaboration, ses propriétés physicochimiques et des performances visées en service [BD00]. La maîtrise des mécanismes de comportement de tels matériaux nécessite donc, entre autres, une bonne connaissance de sa microstructure et des procédés de sa mise en œuvre.

L'objectif de ce chapitre est de donner un bref aperçu sur ces deux aspects, afin de comprendre les mécanismes locaux qui induisent le comportement macroscopique du matériau.

Après un bref historique et quelques généralités sur les principales familles d'élastomères et de leurs propriétés caractéristiques, nous proposerons une description de leur morphologie à l'échelle macromoléculaire, qui nous permettra de comprendre les mécanismes induisant les différents modes de comportement. Ainsi, en partant de l'élasticité caoutchoutique, nous aborderons les comportements dissipatifs et l'influence des charges, pour finir par la description de quelques mécanismes d'endommagement, notamment l'effet Mullins.

I.2 Historique

L'histoire des élastomères commence par celle du « caoutchouc naturel » au 16^{ème} siècle. Le caoutchouc naturel provient du latex d'un arbre d'origine amazonienne, l'Hévée brésilien. Après sa première découverte au 16^{ème} siècle, il a fallu attendre 1736 pour que le français Charles Marie La Condamine, Lors de son expédition géographique en Amérique du Sud, redécouvre cette substance élastique, qu'il a nommé «**caoutchouc**» (**bois qui pleure**). Il rapporte des échantillons de latex, mais son utilisation reste limitée en raison de sa sensibilité au froid (il fige) et à la chaleur (il devient visqueux). Puis vient l'ingénieur François Fresneau, qui s'est intéressé à cette substance élastique et mène les premières études scientifiques. Il s'est servi du latex pour imprégner une de ses paires de bottes (imperméabilisation), mais ce n'était guère efficace, car sous l'action du soleil, le caoutchouc devenait visqueux et fondait.

Il s'ensuivit une longue histoire pleine de rebondissements présentée ici par ordre chronologique [Mar04], [Bou07], [Ben06]

- 1770 : Le chimiste britannique Joseph Priestley découvre que le caoutchouc peut **effacer ou gommer** des marques d'encre par frottement.
- 1819 : Thomas Hancock avait obtenu, lors d'un procédé de moulage, une masse pâteuse et plastique qu'il était possible de modeler. Cette opération prit plus tard le nom de « **mastication** ». Pour la première fois, il était possible de fabriquer des objets à partir de caoutchouc brut, mais un inconvénient majeur retardait encore la progression de l'industrie du caoutchouc : les objets ainsi modelés s'altéraient rapidement selon les variations de la température (ils devenaient visqueux à la chaleur, durs et cassants au froid).
- 1834 : Charles Diez a conçu les bandages de roues en caoutchouc compact,
- 1839: Goodyear révolutionne le caoutchouc en mettant au point ce qui deviendra le procédé de vulcanisation. Il découvre que le soufre permet de fixer l'élasticité du matériau à chaud, tout en supprimant son adhésivité et sa rigidification par le froid.
- 1860 : le chimiste britannique Charles Hanson Williams démontre que le caoutchouc naturel est un **polymère** de l'isoprène.
- 1876 - 1877 : première transplantation de l'Hévée brésilien en Asie à Ceylan,
- 1888 : pneumatiques pour vélo. John B. Dunlop conçoit une chambre à air « enveloppée » d'une toile en coton tissé, qu'il colle et cloue sur une jante en bois. Son invention obtint un succès immédiat auprès des utilisateurs de vélo.
- 1892 : pneumatiques démontables pour vélo et auto (André et Edouard Michelin).

- 1906 : la fabrication du caoutchouc synthétique devint possible : premier brevet déposé par le chimiste allemand Fritz Hoffmann.
- 1920 : Le chimiste allemand Hermann Straudinger s'intéresse à ces nouveaux produits et montre que les polymères sont des molécules géantes, assemblages de chaînes de molécules plus petites.
- 1940 : fabrication des caoutchoucs de silicone,
- 1946 : pneu radial (Michelin), qui va supplanter le pneu conventionnel à structure croisée,
- 1952 : début de la véritable ère industrielle des caoutchoucs "synthétiques",
- 1950 – 2000 : très forte croissance de la production automobile stimulant l'industrie du pneumatique et de la pièce technique en caoutchouc,
- Années 50 : apparition du premier élastomère thermoplastique de synthèse : le polyuréthane thermoplastique,
- A la fin des années 60 apparaissent les polycarbonates, le téflon, le poly sulfone. Les plastiques renforcés prennent également de l'importance.

Pour conclure, ce n'est qu'avec les découvertes de la mastication (Hancock) et de la vulcanisation par le soufre (Goodyear) que commence véritablement l'ère industrielle du caoutchouc. À partir de ce moment, la production monte en flèche et l'utilisation du caoutchouc ne cesse de croître – grâce au développement de la bicyclette et de l'automobile.

I.3 De l'arbre à la gomme

Alors que le caoutchouc de synthèse est obtenu industriellement, le caoutchouc naturel n'est pas un matériau prêt à l'emploi, il nécessite diverses opérations de préparation avant de pouvoir être utilisé industriellement. En effet le caoutchouc naturel provient du latex d'un arbre d'origine brésilien, l'Hévéa brasiliensis. Il coule de l'arbre après une fente faite en enlevant au moyen d'un couteau un fin ruban d'écorce suivant une spirale descendante couvrant généralement une demi-circonférence du tronc. C'est un liquide blanc, laiteux qui contient 1/3 environ de cis-poly isoprène, 10 % d'éléments minéraux et organiques, le reste étant de l'eau. Quelle que soit sa présentation, solide ou liquide, il est transporté en usine, où il subit un traitement chimique, mécanique et thermique.

Liquide, il est soit conservé sous forme de latex et centrifugé jusqu'à élever sa teneur en caoutchouc à 60%, soit coagulé artificiellement au moyen d'acide formique ou d'acide acétique dilué. Dans ce cas, on obtient un coagulum, sorte de fromage blanc élastique, gorgé d'eau, qui est découpé en feuilles ou en granulés et lavé avant d'être séché et parfois fumé. Après pressage, le produit sec est livré sous forme de balles. S'il résulte de la coagulation naturelle du latex, il est découpé en granulés, lavé énergiquement, séché et pressé en balles.



Figure I.1 : extraction de latex. [Kos]

I.4 Mise en œuvre des élastomères

✚ La formulation

Chaque réalisation technique doit satisfaire les conditions du cahier des charges mis au point par l'utilisateur.



Figure I.2 : Composition d'un mélange de caoutchouc. [Kos]

La formulation consiste à choisir les élastomères qui répondent aux lignes fondamentales de ce cahier des charges puis à ajouter les ingrédients entrant dans le mélange pour obtenir le meilleur équilibre entre les propriétés requises : charges renforçantes (noirs de carbone, silice), permettant d'ajuster les propriétés mécaniques ; plastifiants (huiles), facilitant l'incorporation des charges et conférant de la souplesse au produit fini ; ingrédients de vulcanisation (soufre, oxyde de zinc, acide stéarique, accélérateurs), produits organiques, améliorant la résistance au vieillissement ; enfin, produits divers tels que colorants, cires, agent gonflant (caoutchouc mousse). [Bou06]

✚ Le mélangeage

Il s'agit d'une étape importante de la production puisque la qualité des produits qui sortiront de l'usine est directement liée à la qualité de ce mélange. S'il est bien fait, le mélange permet d'obtenir une masse de caoutchouc homogène qui répond aux propriétés exigées par la formule. Bien que le processus de mélange puisse varier selon les entreprises, le mélange est le plus souvent effectué en deux étapes : le gros du travail est réalisé dans un mélangeur interne et se termine sur un moulin.

✚ La mise en forme

La pâte plastique obtenue par mélange est ensuite mise en forme par extrusion, calandrage ou moulage.

Extrusion : consiste à faire passer le mélange dans une filière de profil choisi, correspondant à celui des produits finis à obtenir : bandes, joncs, tubes pour envelopper des câbles ou réaliser des joints de formes complexes (par exemple, pour les portières ou le pare-brise en automobile).

Le calandrage : Le calandrage a pour objectif de mettre le mélange en feuilles minces (3 mm maximum) et de recouvrir de caoutchouc un textile ou des fils métalliques. Ces composites calandrés sont largement utilisés dans la fabrication de pneumatiques (carcasses), bandes transporteuses, draps d'hôpitaux, vêtements de pluie... Pour réaliser de faibles épaisseurs.

Le moulage : est la technique la plus utilisée, elle permet d'obtenir, à l'aide d'une presse et d'un moule, n'importe quelle forme de pièce à condition que celle-ci soit de taille raisonnable : les joints, amortisseurs et dispositifs antivibratoires, simples ou complexes.

La figure I.3 représente les étapes d'élaboration du caoutchouc : du latex jusqu'au produit fini.

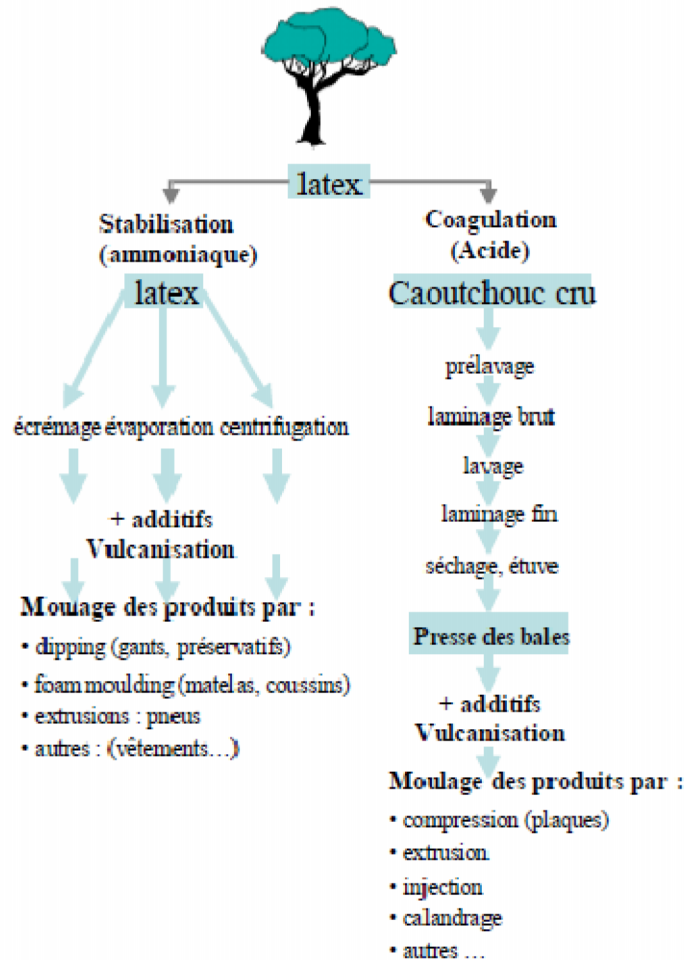


Figure I.3 : Le caoutchouc naturel : de l'arbre au produit fini.
 Les étapes d'élaboration selon le type de produit fabriqué. [Ben06]

✚ Un réseau tridimensionnel – Vulcanisation

A l'état cru, c'est-à-dire sans vulcanisation, les chaînes constituant l'élastomère sont indépendantes. Sous l'application d'une contrainte extérieure, elles glissent irréversiblement les unes sur les autres et se relâchent, créant ainsi du fluage et une déformation permanente. Cette plasticité exclut toute stabilité dimensionnelle ainsi que toute possibilité d'utilisation mécanique classique du matériau d'où le besoin de vulcaniser celui-ci afin de créer des liaisons de pontages chimiques entre les chaînes de l'élastomère. La présence de ces nœuds de réticulation va permettre de constituer ainsi un réseau tridimensionnel. C'est cette opération essentielle qui donne à l'élastomère ses propriétés mécaniques. [Bou06]. Plus le matériau sera réticulé plus il sera rigide, et nous pouvons obtenir, pour des taux de réticulation très élevés un matériau à très haut module.

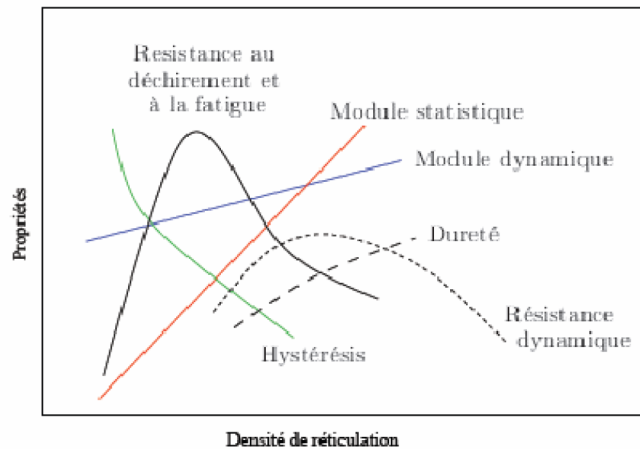


Figure I.4: propriétés physiques et mécaniques en fonction de la densité de réticulation. [Gra08]

Il existe divers procédés de vulcanisation, dont les principaux sont :

- La vulcanisation par le soufre qui s’applique au caoutchouc naturel et aux caoutchoucs butyle.
- La vulcanisation par peroxydes organiques, mettant en jeu un processus radicalaire qui a pour effet de créer des liaisons C–C entre les macromolécules. De ces liaisons solides et courtes découle une excellente résistance au vieillissement et à la chaleur, mais un comportement dynamique médiocre.
- La vulcanisation par peroxydes métalliques est adaptée aux élastomères contenant des halogènes.
- La vulcanisation par diamines qui concerne principalement les polymères fluorés.

I.5 Catégories de caoutchouc

Tous les caoutchoucs ne présentent pas des propriétés identiques. Leur structure chimique détermine en grande partie leurs propriétés. La performance d’un produit en caoutchouc passe d’abord par une sélection adéquate du caoutchouc de base.

On distingue plusieurs familles d'élastomères, disposant chacune d'atouts spécifiques :

1. **Les élastomères à usage général** : ont des propriétés suffisamment équilibrées et ils sont en même temps assez bon marché pour être utilisés en tonnages importants dans leurs domaines d'application. Le copolymère de styrène et de butadiène SBR est l'élastomère le plus répandu dans le monde ; il sert à la fabrication de certaines parties des pneumatiques, des courroies, des tuyaux, des dallages « en caoutchouc », des envers de tapis et moquettes. Le polyisoprène de synthèse IR est la réplique chimique du caoutchouc naturel. Il en

propriétés mais son prix est plus élevé. Le polybutadiène BR, en mélange avec d'autres élastomères, entre dans la confection de certaines parties des pneumatiques (flancs, bandes de roulement) car il confère une bonne résistance à l'abrasion et à la fatigue. Le polychloroprène CR, résistant bien à la corrosion, est utilisé en câblerie, pour la confection de certains joints et la réalisation de feuilles étanches (toitures, réservoirs d'eau). Le copolymère d'éthylène et de propylène sert à la fabrication, entre autres, des joints de pare-brise et de portières d'automobile car il résiste à l'ozone et à la lumière.

2. **Les élastomères à usages spéciaux** : Cette catégorie comprend les caoutchoucs qui ne visent pas à succéder au caoutchouc naturel dans tous ses usages, soit parce qu'ils n'ont pas l'ensemble des qualités techniques nécessaires, soit parce que leurs prix sont trop élevés. Ces caoutchoucs sont caractérisés par des propriétés spécifiques plus performantes telles que les résistances aux huiles (nitrile), l'imperméabilité aux gaz (butyle) ou la résistance à l'ozone (EPDM), le polychloroprène (CR) pour sa très bonne résistance au vieillissement, à la chaleur et pour ses propriétés adhésives. Ils sont utilisés dans divers secteurs d'activités (industrie pharmaceutique, nucléaire, automobile, aéronautique...).

3. **Les caoutchoucs à usages très spéciaux** : Cette catégorie regroupe des caoutchoucs qui se distinguent par leur excellente résistance à la chaleur, au vieillissement ou aux huiles. Ils conservent l'essentiel de leurs propriétés à des températures élevées. Ils sont cependant coûteux et ne sont utilisés que dans des applications très spécifiques tels les joints, les tubes et autres produits soumis à de hautes températures. Font partie de cette classe, les polyuréthanes, silicones, fluoropolymères et les fluoroélastomères.

I.6 Domaine d'utilisation

L'application la plus connue du caoutchouc est le pneumatique. Mais cette application est loin d'être la seule. Ainsi, le développement fantastique de l'industrie électromécanique repose, en grande partie, sur le caoutchouc du fait de ses propriétés isolantes et mécaniques exceptionnelles: élasticité, résistance aux chocs, qualités d'amortissement des vibrations et des bruits. Le caoutchouc s'impose quand il faut amortir des vibrations ne mettant en jeu que des puissances faibles ou des chocs, dans le cas des semelles de chaussures par exemple. Pour des applications statiques (joints de machines, de tuyauteries), sa déformabilité est la qualité la plus appréciée. Pour les applications cinématiques telles que clapets, membranes et obturateurs de pompe, joints de transmission, on recherche son élasticité et ses possibilités de déformation alternée. Grâce à son élasticité maximale et à ses propriétés d'absorption des vibrations, le caoutchouc est utilisé dans les suspensions de moteur et de machine, dans des trains d'atterrissage d'avion, dans les accouplements c

dans les butées de chocs. Le caoutchouc entre aussi dans la composition de matériaux composites de complexité croissante : caoutchouc-métal, caoutchouc et fibres diverses (courroies de puissance ou transporteuses dans lesquelles le caoutchouc lie les fibres et les protège contre l'usure et l'attaque chimique). Ses propriétés adhésives exceptionnelles l'ont rendu indispensable dans la confection de joints adhésifs à chaud, de colles, de rubans adhésifs. Enfin, les applications directes du latex, du caoutchouc naturel et des élastomères sont nombreuses : gants, articles chirurgicaux, versos de tapis et de moquettes, matelas.

I.7 Dégradation du caoutchouc naturel

La dégradation du caoutchouc naturel peut provenir de plusieurs types de phénomènes :

- Amorçage des fissures
- Dégradation thermique
- Oxydation
- Dégradation par l'ozone

I.8 Comportement des élastomères

Malgré la diversité des élastomères utilisés dans l'industrie et la multitude de formulations que l'on peut proposer, ces matériaux présentent des caractéristiques communes spécifiques. Nous présentons dans cette section les principales particularités thermomécaniques de ces matériaux.

1) Physico-chimie des élastomères

Les élastomères sont obtenus par polymérisation de molécules à base organique identique (les monomères). [BD00]. Dans le cas du caoutchouc, les chaînons monomères peuvent s'articuler librement les uns avec les autres, à la température ambiante : la chaîne est alors très flexible ; elle bouge constamment de façon désordonnée et tend spontanément à se pelotonner au cours de ses mouvements (figure I.5). Il faut alors exercer une certaine force à ses extrémités pour l'étirer : elle se comporte comme un ressort.

Ce dépliage des chaînes se fait seulement par ré-conformation des liaisons entre monomères : chaque changement de conformation nécessite de franchir une barrière de potentiel. Au delà d'une certaine température, dite de transition vitreuse (T_g) (voir la figure I.6), les changements de conformation sont aisés. Le matériau est dans un état caoutchoutique, il se déforme facilement. En dessous de cette température, les changements de conformations sont très difficiles. Le matériau devient vitreux. Il se déforme difficilement, ne supporte pas les grandes déformations et son

module de Young gagne un rapport de 1000 par rapport au module dans l'état caoutchoutique, (voir figure I.6). Les élastomères sont des polymères avec une température de transition vitreuse inférieure à la température ambiante.

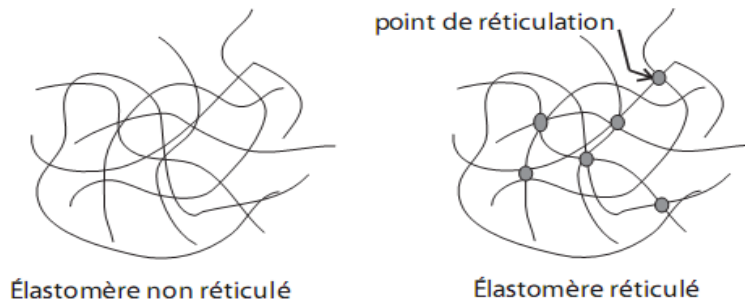


Figure I.5 : Schématisation d'une pelote statistique. [Bou07]

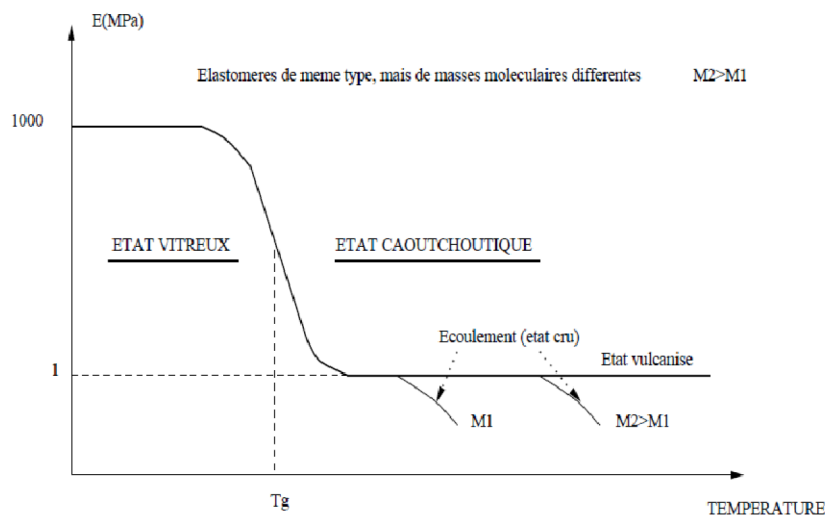


Figure I.6 : Spectre thermomécanique des polymères : évolution schématique du module d'Young en fonction de la température. [Mor00]

- **Mouvements moléculaires associés**

Ces différents types de comportements traduisent l'existence de mouvements moléculaires locaux. A faibles températures, le matériau est dense, et il n'existe que peu de place pour autoriser des mouvements de chaîne. Lorsque l'on augmente la température, le matériau se dilate, il se crée d'avantage de volume libre et des mouvements d'origines diverses vont pouvoir se produire.

2) Élasticité non-linéaire

Les élastomères sont caractérisés par une aptitude à supporter de très grandes déformations de façon quasi-réversible. L'élasticité caoutchoutique a un caractère essentiellement entropique, c'est-à-dire liée aux changements de conformation des chaînes [Bou07]. La force de rappel élastique est due à la diminution de l'entropie qui traduit la diminution du nombre de conformations possibles. Ces dernières sont en effet capables, si leur mobilité est suffisante, de se déformer entre les « points d'ancrage » que constituent les nœuds du réseau macromoléculaire [Ver95]. Les caoutchoucs naturels peuvent s'étendre jusqu'à 10 fois leur taille d'origine avant de rompre. L'allure générale d'une courbe de traction d'un élastomère est fortement non-linéaire et peut présenter, à partir d'un niveau important de déformation, une zone de raidissement dû à l'alignement par extension des chaînes du réseau (figure I.7).

Cette non linéarité peut être modélisée par une théorie statistique se basant sur les hypothèses suivantes :

- Le réseau est supposé parfait, c'est-à-dire sans défaut. Toutes les fins de chaînes sont donc fixées ;
- la distribution des longueurs de chaînes est supposée gaussienne ;
- aucune énergie n'est emmagasinée ;
- toutes les chaînes ont la même répartition de masse et une conformation affine.

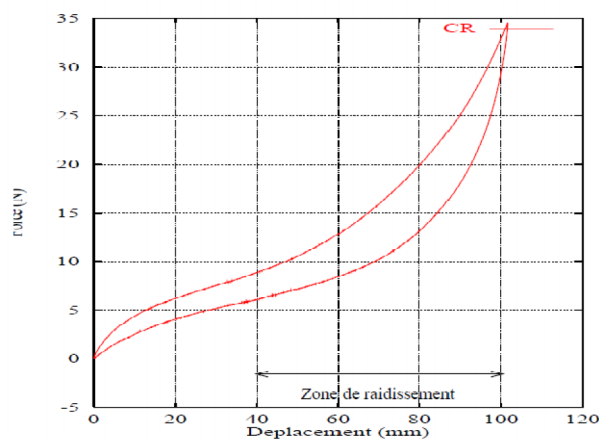


Figure I.7 : Zone de raidissement lors d'une charge et décharge sur un Polychloroprène stabilisé. [Mor00]

➤ *Cristallisation sous contraintes*

Les phénomènes de cristallisation sous contrainte sont reliés directement aux mécanismes d'orientation des chaînes macromoléculaires, [Cab11]. Lors d'un chargement mécanique, si l'on atteint de très grandes déformations (>400%), les chaînes s'orientent dans le sens de la sollicitation, conduisant au durcissement de la matière. Dès que la contrainte est relâchée cette cristallisation va disparaître complètement.

Afin de vérifier si un élastomère est cristallisant ou non sous contraintes, on peut réaliser un essai comprenant plusieurs cycles d'amplitude croissante, [Mor00]. Ainsi, si les cycles réponses ne rejoignent pas la courbe non-cyclée alors l'élastomère est cristallisant et son "module", c'est-à-dire la contrainte pour une élongation donnée, augmente. Si ces derniers rejoignent la courbe de comportement du matériau non-cyclé alors le matériau est non cristallisant (figure I.8).

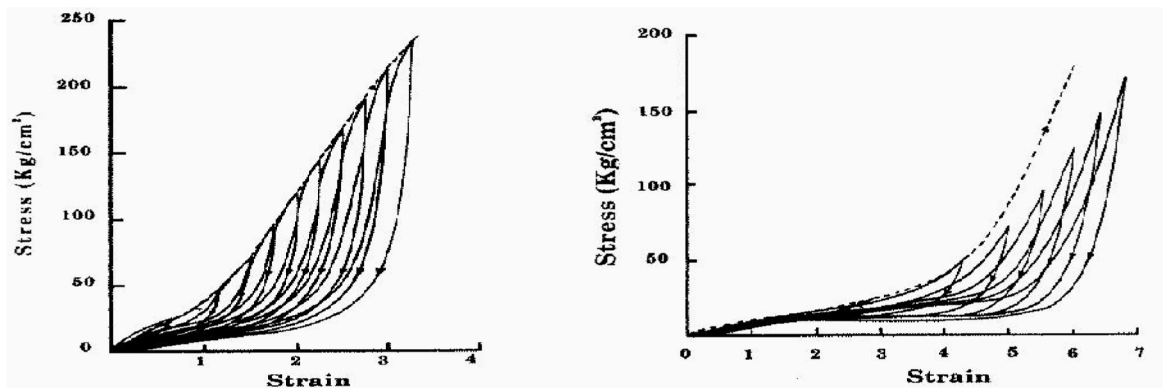


Figure I.8 : *Stabilisation d'un SBR non cristallisant et d'un NR cristallisant. La courbe en pointillés représente le comportement du matériau non-cyclé.* [Mor00]

3) Incompressibilité

La plupart des caoutchoucs sont considérés comme incompressibles, c'est-à-dire qu'ils se déforment à volume constant. En réalité, un essai de compression hydrostatique montre qu'ils sont très légèrement compressibles. Cependant, le module de compressibilité est relativement grand devant le module de cisaillement. La loi de comportement est alors modifiée par l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange, noté η :

$$\Pi = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} - \eta \mathbf{C}^{-1}$$

Dans les cas où la compressibilité ne peut pas être négligée, le troisième invariant I_3 , qui correspond à la variation de volume, intervient dans le potentiel W au même titre que les deux premiers invariants. Une démarche courante, en particulier dans le cas où le matériau est peu compressible, consiste à supposer que le potentiel peut se décomposer en un terme dit « déviatorique » et un terme dit « hydrostatique » [Aba00] :

$$W = W_D(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + W_H(I_3)$$

Où \bar{I}_1 et \bar{I}_2 sont les invariants du tenseur de Cauchy déviatorique, c'est-à-dire $\bar{I}_1 = J^{-\frac{2}{3}} I_1$ et $\bar{I}_2 = J^{-\frac{4}{3}} I_2$.

4) Les mécanismes dissipatifs

4.1. Frottement interne

Le comportement des élastomères diffère avec l'échelle de temps considérée. L'élasticité concerne les temps courts alors que la viscoélasticité intervient avec des temps intermédiaires.

En effet, il existe un retard entre la contrainte imposée et la déformation dû au déploiement de la structure qui est gênée par le frottement visqueux entre les chaînes et les enchevêtrements. Les deux essais classiques permettant de mettre en évidence cette dépendance au temps sont le fluage et la relaxation.

La viscosité peut pourtant provoquer des effets secondaires indésirables. L'énergie produite est dissipée sous forme de chaleur, ce qui provoque une forte élévation de température, car ces matériaux ont une faible conductivité thermique. Or les variations de température modifient les propriétés mécaniques de façon notable. De plus, pour des chargements répétés à vitesse élevée, il est possible d'atteindre des échauffements suffisants pour détruire le matériau.

4.2 Hystérésis

Dans le diagramme force/déplacement la réponse à faible vitesse d'une éprouvette en caoutchouc, la courbe de retour ne se superpose pas à la courbe d'allée. Il y a hystérésis, mettant en évidence l'existence de frottements internes dans le matériau. Les éléments libres des chaînes moléculaires glissent les uns sur les autres, entraînant un frottement sec interne générateur de perte d'énergie.

L'énergie dissipée au cours d'un cycle d'hystérésis sous forme de chaleur traduit les propriétés d'amortissement du matériau. Dans le cas d'oscillations libres, cet aspect se traduit par une diminution de l'amplitude des vibrations au cours du temps.

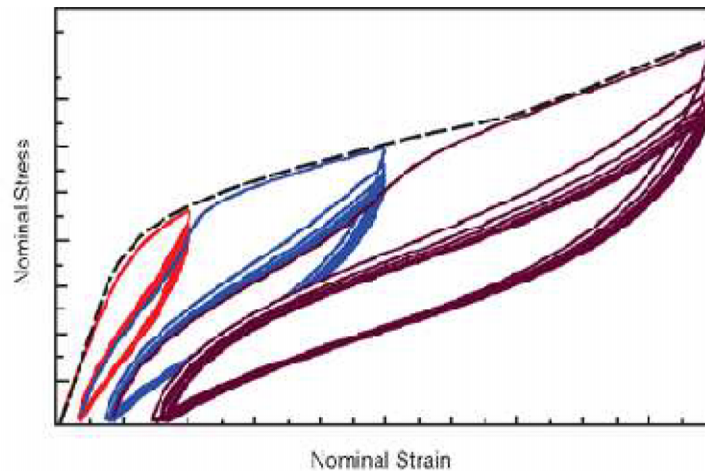


Figure I.9 : *Chargement cyclique de traction uniaxiale avec variation de la déformation maximale imposée. [Fer11]*

Il est montré [GHW93] que l'hystérésis croît lorsque la température diminue ou lorsque la déformation augmente. Ce phénomène dissipatif est donc fonction de la structure du matériau (taux de cristallisation, nombre de liaisons secondaires, ...).

4.3 Renforcement par les charges

Le comportement d'un élastomère est lié à sa nature chimique, mais aussi à des additifs que l'on y incorpore lors de son élaboration. Parmi ces additifs, les charges renforçantes conditionnent fortement le comportement du matériau fini. Elles ont pour effet d'améliorer de nombreuses propriétés mécaniques (contrainte à rupture, résistance à l'abrasion) et chimiques (vieillessement).

L'utilisation d'un seul type de charge ne permettant pas d'optimiser l'ensemble des caractéristiques, des charges de différentes natures sont utilisées, leur choix et leur proportion faisant largement partie du savoir-faire des caoutchoutiers. L'élastomère est constitué de plusieurs phases:

- la matrice qui constitue un réseau d'élastomère réticulé (**la gomme**),
- les particules fines regroupées en agrégats ou agglomérats (Figure I.10) formés lors de la phase de malaxage (**les charges de renfort**).

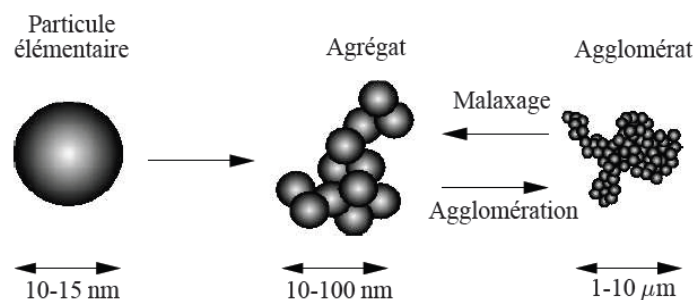


Figure 1.10 : *Les différentes échelles de taille des charges.* La particule élémentaire est une entité physique qui n'existe pas dans la pratique : l'élément de base est l'agrégat

5) Les mécanismes d'endommagement

5.1 Processus d'endommagement

Le matériau peut être vu à trois échelles décroissantes (Figure I.11).

1. le matériau à l'échelle macroscopique que l'on cherche à modéliser,
2. à l'échelle mésoscopique, la matrice et les agglomérats,
3. à l'échelle microscopique, les chaînes et les charges.

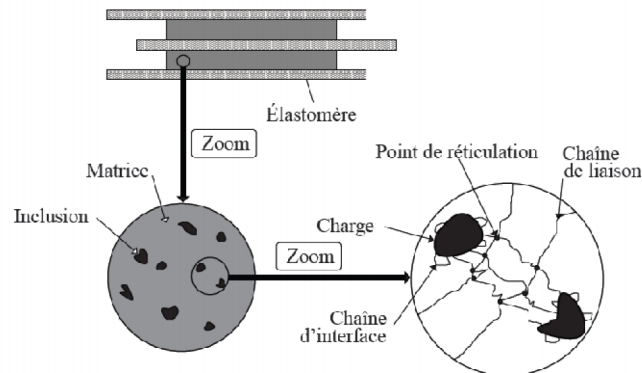


Figure I.11 : Observation "macro-méso-micro" pour un élastomère réticulé. [Bou06]

L'endommagement des élastomères est donc lié à:

- la rupture des liaisons charges-chaînes, et des chaînes elles-mêmes (Figure I.12);
- la décohésion des charges;
- la rupture des agglomérats.

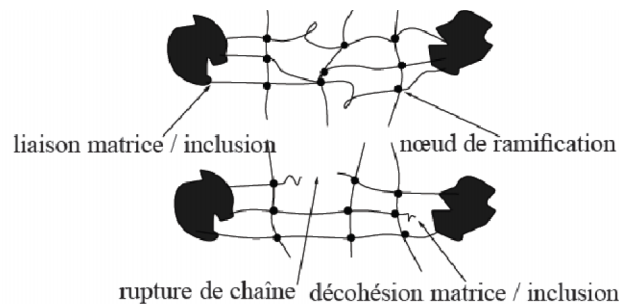


Figure I.12 : Deux types de mécanismes d'endommagement au sein d'un VER. [Bou06]

5.2 Effet Mullins

L'effet Mullins est associé à une dissipation quasi-statique, c'est-à-dire indépendante de la vitesse du chargement. Il est observé lors des premières sollicitations d'un échantillon. Il est caractérisé par une baisse notable des niveaux de contrainte quand l'élastomère réticulé est étiré une seconde fois aux mêmes taux de déformation. Cette première extension entraîne une perte de rigidité pour les déformations suivantes et une déformation rémanente (figure I.13). Ce phénomène est recouvrable

partiellement à température ambiante sur des temps très longs (plusieurs jours) ou en quelques heures à des températures proches de celle de la vulcanisation.

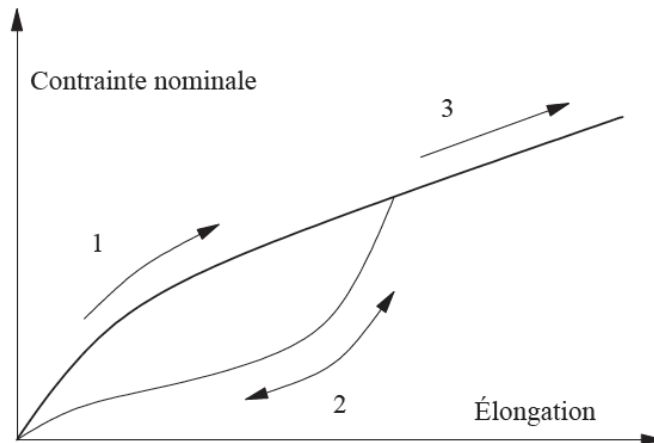


Figure I.13 : L'effet Mullins est souvent représenté de manière idéalisée : lors de la première charge jusqu'à un chargement donné, la réponse suit la courbe en gras (1) ; les décharges et recharges suivantes s'effectuent selon la courbe (2) de façon réversible tant que le chargement maximal précédemment atteint n'est pas dépassé ; lorsque le chargement devient supérieur à celui-ci, la réponse du matériau revient sur la courbe de première charge (3). [Rao10]

Il serait dû à plusieurs phénomènes physiques différents :

- rupture des chaînes interparticulaires;
- rupture ou glissement à l'interface (charge / matrice);
- rupture du réseau de percolation formé par les charges;
- endommagement par cavitation aux pôles des inclusions ou des amas de charges;
- décohésion du réseau percolant (charge/ matrice /charge).

L'effet Mullins est souvent assimilé à un endommagement dans la mesure où il représente une dégradation permanente du matériau accompagnée de déformations rémanentes. En fait, cet « endommagement » n'est pas complètement irréversible. Le matériau a une capacité de restauration, très lente à température ambiante, plus rapide à température élevée. Ceci permet parfois de considérer l'effet Mullins comme résultant d'une viscosité à très grande échelle de temps.

5.3 Vieillessement des élastomères

5.3.1 Définition du vieillissement

Le terme de vieillissement est utilisé dans le cas des polymères pour décrire toute modification et/ou altération, généralement lente et irréversible, des propriétés d'un matériau, résultant de son instabilité propre ou d'effet d'environnement extérieur. Cette altération peut concerner la structure chimique des molécules ou des adjuvants (vieillessement chimique) [1].

composition du matériau ou son état physique (taux de cristallinité, fraction de volume libre, contrainte interne,...).

Les élastomères présentent des propriétés quelque peu antagonistes (opposantes), par exemple le NBR résiste aux huiles et graisses, mais ne résiste plus à eau.

5.3.2 Les Origines de vieillissement [BD99]

Les traces de pollution représentent l'un des premiers indices d'un vieillissement d'un élastomère. Ce vieillissement se caractérise par la présence des débris et dépôt gras sur la surface de matériau.

On peut diviser les origines de vieillissement en deux causes principales : [BL99]

- *Causes externe*

Le vieillissement peut être les résultats des faits externes : la température, humidité, UV, milieu gazeux,..., en présence ou non des contraintes mécanique.

- *Causes interne*

Le vieillissement peut être les résultats des faits internes : la migration des additifs, poursuite de réticulation, poursuite de la cristallisation,....

5.3.3 Les mécanismes de vieillissement

Le vieillissement des élastomères, peut être classé en trois catégories : le vieillissement physique, le vieillissement chimique et sous contrainte. [BL99]

1- vieillissement Physique

Le vieillissement physique est le phénomène où la structure chimique n'est pas affectée. Donc on a seulement des modifications sur le plan morphologique.

Le vieillissement physique peut être classé en deux catégories :

a) *Résultant d'un transfert de masse*

Il est lié à la pénétration de solvant ou à la disparition de plastifiants.

- *La pénétration des solvants*

La pénétration des solvants conduit à une plastification de l'élastomère. La plastification détruit partiellement les interactions entre chaînes et transforme le matériau rigide en matériau plus flexible.

- La plastification

Les molécules de solvant qui pénètrent dans le polymère brisent les liaisons secondaires de type Van Der Waals, ces liaisons assurent en grande partie la rigidité du matériau. Leur rupture va s'accompagner d'une augmentation de la mobilité des chaînes, et ainsi modifier les propriétés du matériau. Le module de Young et de cisaillement du matériau vont diminuer. [Fer11]

- Le gonflement

La pénétration d'un solvant dans un élastomère entraîne l'augmentation de son volume, c'est le gonflement. [Fer11]. A l'échelle macromoléculaire, le gonflement s'interprète par l'étirement des chaînes polymères, qui s'oppose à la force de rappel. Cette est d'origine entropique, tend à ramener les chaînes sous forme de pelote statistique. Ces deux phénomènes opposés, laissent la structure en équilibre.

b) Sans transfert de masse

Il est lié à deux phénomènes : la fissuration sous contrainte mécanique en milieu tension actif, et les dilatations différentielles dues à la température.

- Fissuration sous contrainte mécanique en milieu tension actif

Un élastomère mis en contact avec un solvant ou une solution tensioactive, et soumis sous contraintes externes ou internes, subit des fissurations ce qui provoque la rupture ; cela est dû au solvant qui a modifié la tension superficielle du matériau. [BL99].

- Dilatation différentielles

Les variations de température peuvent entraîner des dilatations différentielles, créant des contraintes internes qui peuvent se libérer dans le temps et occasionner des dommages.

2- Vieillessement Chimique

On classe souvent le vieillissement chimique en plusieurs types : thermique (pyrolyse ou hydrolyse), photochimique et biodégradation. [BL99]

a) Vieillessement thermique-oxydatif

La température joue un rôle crucial par rapport à l'oxydation. La température d'utilisation dépend fortement de la température de la transition vitreuse et de la température de fusion. Elles doivent être inférieures à 50°C et 80°C, pour éviter l'oxydation, la dégradation et

b) Vieillissement chimique en milieu liquide-hydrolyse

L'hydrolyse est le fait de nombreux polymères qui portent des liaisons susceptibles d'interagir avec la molécule d'eau.

c) Vieillissement photochimique

Ce genre de vieillissement est dû à la lumière solaire et au rayonnement UV. Il agit ensemble avec d'autres facteurs comme l'humidité, la pluie, les polluants, la température. Le changement de couleur est l'un des actions remarquables de vieillissement photochimique, surtout pour les PVC, PS, PE et les PP.

d) Vieillissement par biodégradation

Le vieillissement par biodégradation est le fait des micro-organismes comme : les moisissures, les levures et les bactéries. Les micro-organismes agissent superficiellement sur le polymère. Les organismes vivants peuvent synthétiser des bio polymères comme : les protéines, les acides nucléique et les cellulose. Aussi, ils sont capable de coloniser et dégrader des polymères synthétiques. La dégradation constatée se limite alors à une altération de la couleur et de la surface.

3- Vieillissement Sous contrainte

Le fluage est l'aspect le plus important de la viscoélasticité des matériaux polymères. La sensibilité au fluage dépend des liaisons intermoléculaires de faible énergie.

On trouve ce type de dégradation dans divers cas pratique : citerne et réservoir, chargement en compression de pièce...

5.3.4 Prévision des vieillissements

Pour prévoir le vieillissement il faut suivre ces démarches suivantes [BL99]:

- La première démarche à suivre consiste à définir le cahier de charge en sachant un maximum d'informations sur l'utilisation réelle de la pièce.
- Choix des stabilisants : La cinétique de vieillissement est condamnée par l'ajout de divers stabilisants tel les stabilisants thermiques, les antioxydants, les anti UV....

6) Comportement thermique**6.1 La cristallisation et la fusion**

La fusion est une transition de premier ordre qui a eu lieu à une température bien définie. Par contre la cristallisation dépend de la cinétique de l'arrangement des chaî

L'état cristallin est l'état le plus stable. Cependant cette cristallisation sollicite l'alignement ordonné des chaînes, ce qui est difficile à accomplir si la chaîne procède des groupes latéraux disposés de manière aléatoire. Le comportement thermique de l'échantillon influe beaucoup sur la taille des cristallites.

I.6.2 Phénomène de relaxation/mouvement moléculaire

Les segments moléculaires d'un polymère qui subissent une déformation à l'état fondu, s'orientent dans la direction de cette déformation. Les molécules perdent alors leur forme pelotonnée qui est l'état le plus stable pour acquérir une forme moins stable (l'entropie diminue). Dans un premier temps, le polymère, réagira comme un solide élastique, capable de stocker de l'énergie pour l'utiliser à retrouver sa forme initiale. Ensuite, les molécules se réorganisent et se libèrent des contraintes créées lors de la déformation. Ainsi, malgré la déformation imposée; ces molécules retrouvent leur forme stable. C'est ce mécanisme qui s'appelle relaxation polymère. Les différentes étapes de la relaxation sont représentées sur la figure I.14.

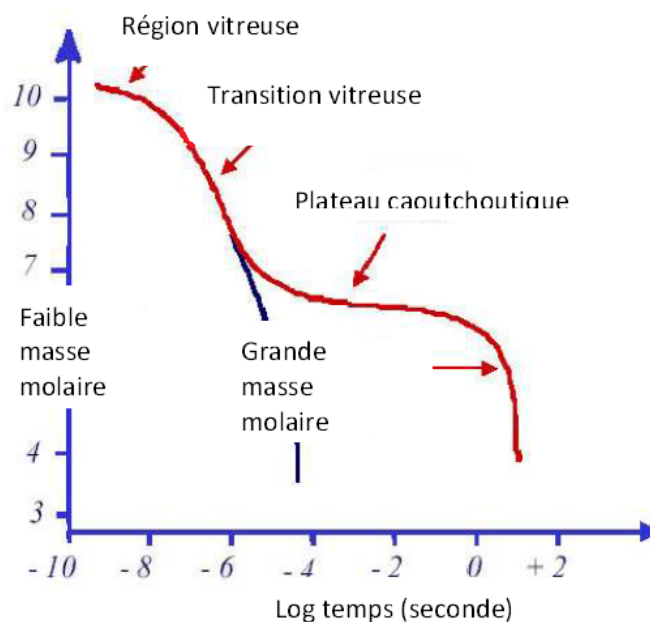


Figure I. 14: *module de Young en fonction de temps.* [Fer11]

Conclusion

De par leur composition et leur élaboration (relevant bien souvent du secret industriel) les matériaux élastomères sont constitués d'une microstructure complexe qui se traduit par la combinaison des comportements mécaniques: élasticité, effet visqueux, endommagement... Ceux-ci peuvent être plus ou moins accentués en fonction du chargement mécanique et de l'environnement (température, atmosphère, UV...). Ce comportement complexe peut difficilement être représenté dans sa totalité. Certaines caractéristiques sont d'ailleurs encore mal comprises. En particulier, les phénomènes physiques responsables de la boucle d'hystérésis en régime stabilisé ne sont pas encore tous identifiés ; il pourrait s'agir de viscosité (frottement des chaînes l'une sur l'autre), d'une réorganisation du réseau macromoléculaire (rupture et rétablissement de liaisons faibles) ou bien encore d'un phénomène de cristallisation/ décristallisation.

Par ailleurs, certains phénomènes comme la viscosité ou l'existence de déformations rémanentes sont peu marqués dans le domaine d'utilisation concerné. On ne retiendra donc pour la suite que les phénomènes du premier ordre pour notre étude, c'est-à-dire l'élasticité non-linéaire du comportement, l'incompressibilité et l'effet Mullins.

Chapitre II

MODÉLISATION DU COMPORTEMENT DES ÉLASTOMÈRES

Modélisation du comportement des élastomères

Pour décrire le comportement statique ou quasi statique des élastomères, les modèles les plus couramment utilisés sont les modèles hyperélastiques. Les premiers modèles, ont été proposés à partir des les années 40. Certains étaient basés sur des observations expérimentales du caoutchouc vulcanisée isotrope et incompressible; d'autres étaient issus de considérations microstructurales et traduisaient l'origine essentiellement entropique de l'élasticité caoutchoutique.

Nous présenterons dans la première partie successivement le problème mécanique en transformation finie, la formulation tensorielle de la loi de comportement et son intégration dans le code de calcul par élément finis Abaqus.

Dans la seconde partie, nous donnerons ensuite quelques formes d'énergie de déformation hyperélastique en distinguant les modèles phénoménologiques et les modèles élaborés à partir des considérations microphysiques. A la fin de ce chapitre nous proposerons une revue des différents modèles incorporant l'effet Mullins.

II.2 Motivation

Nous abordons ici la partie numérique ayant pour objectif l'implémentation de lois de comportement dans un code de calcul éléments finis. Nous nous intéressons à l'intégration de lois hyperélastiques. Le développement de ces outils numérique a nécessité une quantité de travail très significative durant la préparation de ce travail de magistère, pour autant, cela apparaîtra peu dans ce mémoire.

Dans ce qui suit, nous rappelons d'abord la démarche à suivre pour résoudre un problème par éléments finis, puis nous décrivons l'implémentation numérique de lois hyperélastiques.

II.3 Formulation d'un problème mécanique

On rappelle succinctement la description de la cinématique des milieux continus en déformation finies et l'expression d'équilibre sous la forme du principe des travaux virtuels (PTV).

II.3.1 Cinématique

Soit X la position d'un point matériel à l'instant initial t_0 et $x = \Phi(X; t)$ sa position à l'instant t . La transformation Φ est en général une application continue et dérivable en espace et en temps, ce qui exprime la continuité du milieu.

Si l'on prend comme référence la configuration initiale C_0 , on parle de coordonnées lagrangiennes (notées ici en lettres majuscules), tandis que si l'on prend comme référence la configuration actuelle C_t , on parle de coordonnées eulériennes (notées ici en lettres minuscules).

$d\vec{X}$ et $d\vec{x}$ étant les vecteurs reliant deux particules matériels voisines dans les configurations initial et actuelle respectivement. L'état de déformation est complètement défini par le tenseur gradient de transformation \mathbf{F} :

$$d\vec{x} = \mathbf{F}d\vec{X} \quad \text{II.1}$$

Le tenseur gradient de vitesse \mathbf{L} est alors défini par :

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad \text{II.2}$$

\mathbf{L} se décomposant en une partie symétrique \mathbf{D} et une autre antisymétrique \mathbf{W} .

II.3.2 Formulation variationnelle

Soit un solide en équilibre occupant à un instant donné un volume V de frontière Γ . Il est soumis à des forces volumiques F_v , des forces surfaciques F_s appliquées sur la partie Γ_s de sa frontière Γ et à des efforts de contact F_c sur la portion Γ_c de Γ .

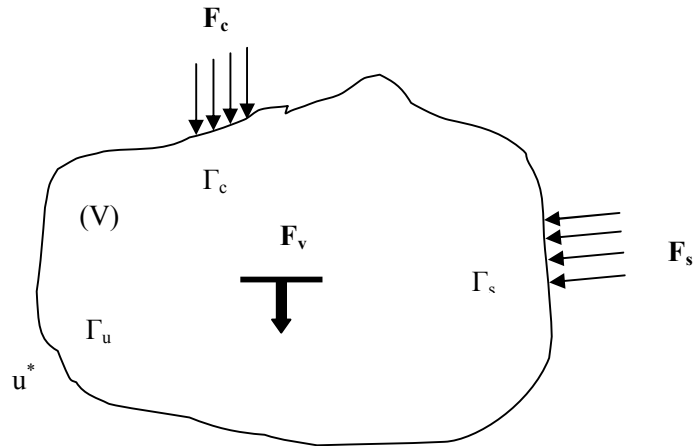


Figure II.1: Structure en équilibre.

Les conditions aux limites en déplacement u imposé au solide sur le domaine Γ_u de Γ .

L'équation du mouvement s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{div}} + F_v = \rho \ddot{u} \quad \text{II.3}$$

Où \ddot{u} représente la dérivée seconde du vecteur déplacement \mathbf{u} .

La base d'une formulation éléments finis en déplacement est l'introduction d'approximations spatiales de la solution. Pour développer une telle approximation on remplace les équations du mouvement (II.3) par une forme faible équivalente en la multipliant par une fonction test. La fonction test adoptée dans ABAQUS est un champ de vitesse virtuel arbitraire $\delta \dot{u}$ suffisamment continu et vérifiant les conditions aux limites $\delta \dot{u} = 0$ sur u . Après développement nous aboutissons à l'écriture du principe des puissances virtuelles (PPV) :

$$- \int_V \delta \mathbf{D} dV + \int_V F_v \delta \dot{u} dV + \int_{\Gamma_s} F_s \delta \dot{u} d + \int_{\Gamma_c} F_c \delta \dot{u} d = \int_V \rho \mathbf{u} \delta \dot{u} dV \quad \text{II.4}$$

Où $\delta \mathbf{D}$ est lié à l'accroissement virtuel des champs de déplacement \mathbf{u} .

Les déplacements réels et virtuels de tout point du solide V sont reliés aux déplacements des nœuds adjacents par des fonctions appropriées. En utilisant la méthode de GALERKIN

$$u^e = N_n u_n^e \quad \text{II.5}$$

$$\delta u^e = N_n \delta u_n^e \quad \text{II.6}$$

N_n sont les fonctions d'interpolations nodales sur l'élément (e). elle dépendent des coordonnées spatiales et sont exprimées dans l'espace de référence. u_n^e désigne le vecteur contenant les déplacements de chaque nœud de l'élément.

Les vitesses réelles et virtuelles ainsi que l'accélération sont interpolées en dérivant les équations (II.5 et II.6)

$$\dot{u}^e = N_n \dot{u}_n^e$$

$$\delta \dot{u}^e = N_n \delta \dot{u}_n^e \quad \text{II.7}$$

$$\ddot{u}^e = N_n \ddot{u}_n^e$$

En introduisant les approximations (II.6)-(II.8) dans (II.4), nous obtenons une fonctionnelle élémentaire de la forme :

$$I_e = (M^e \ddot{u}^e + F_{int}^e - F_{ext}^e) \delta \dot{u}^e = 0 \quad \text{II.8}$$

Où M^e est la matrice masse élémentaire cohérente ou consistante dans le sens où elle est calculée avec les fonctions d'interpolations N_n de l'élément. F_{int}^e est le vecteur élémentaire des efforts internes et F_{ext}^e est le vecteur des forces externes de l'élément (e).

L'équilibre du système global est obtenu en assemblant les fonctionnelles élémentaires I_e sur toute la structure est de la forme :

$$I = \sum_e I_e = (M \ddot{u} + F_{int} - F_{ext}) \delta \dot{u} = 0 \quad \text{II.9}$$

II.4 Résolution numérique

La démarche de résolution d'un problème non linéaire de calcul de structure est présentée dans ce qui suit.

II.4.1 Approche incrémentale

Le caractère non linéaire du problème nécessite une approche incrémentale : la configuration au temps t est connue et on recherche l'état à $t + \Delta t$.

La description lagrangienne actualisée, qui suit l'évolution temporelle de chacun des points matériels de la structure est généralement employée dans les codes de calculs. La formulation lagrangienne réactualisée considère l'instant t comme état de référence. (Figure II.2)

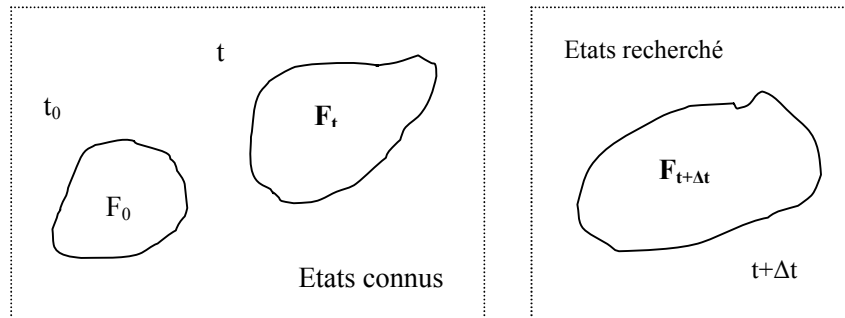


Figure II.2 : *Cadre générale du problème mécanique non linéaire.*

Les contraintes et déformations à $t + \Delta t$ sont obtenues par interpolation implicite ou explicite à partir de l'état t . Les valeurs recherchées à $t + \Delta t$ sont obtenues par des développements limités. De nombreux schémas existent dans la littérature. L'ordre de l'approximation modifie les conditions de convergence.

II.4.2 Choix du logiciel élément finis

Le logiciel de calcul retenu ici est ABAQUS standard. Ce choix résulte surtout d'une question d'opportunité. Il n'est pas de notre ressort de discuter des intérêts respectifs de codes concurrents. Le solveur utilise une formulation lagrangienne totale et un schéma incrémentale de Newton pour la résolution du problème non linéaire.

L'implémentation de loi de comportement dans ce logiciel s'effectue à l'aide d'une routine Umat (User material) codée en langage fortran. Ce programme donne l'état de contrainte ainsi que la matrice des modules tangents en tout point de Gauss de la structure. En entrée, le programme accède entre autre aux grandeurs suivantes:

- le pas de temps ;
- les valeurs et incréments de déformation totale ;
- les contraintes de Cauchy au début de l'incrément ;
- la taille des matrices (termes non nuls) ;
- la possibilité de définir et conserver les variables internes...

II.5 Les schémas de résolution numérique

Le logiciel de calcul ABAQUS offre la possibilité d'introduire de nouvelles lois de comportement en utilisant des sous-routines utilisateurs qui dépendent du schéma de résolution choisi. La sous-routine **Vumat** est employée avec le schéma Dynamique Explicite (DE) alors que la sous-routine **Umat** est utilisée lors de la simulation avec le schéma Statique Implicite (SI).

II.5.1 Schéma de résolution statique implicite (SI)

Le schéma statique implicite correspond à la situation où le terme d'inertie qui apparaît dans l'équation peut être négligé. Par conséquent, l'équation II.11 se réduit à :

$$R_{n+1} = (F_{int})_{n+1} - (F_{ext})_{n+1} \quad \text{II.13}$$

Où R_{n+1} est le résidu de l'équilibre statique à l'instant $n+1$. La résolution de cette équation dans le cadre du package standard du code ABAQUS est effectuée par la méthode itérative de Newton Raphson modifiée. Le résidu R_{n+1} est donc linéarisé en utilisant un développement limité de Taylor d'ordre 1 :

$$R_{n+1}^{iter+1} = R_n^{iter} + \left(\frac{\partial R_n}{\partial u_{n+1}} \right)^{iter} \delta U_n + \dots = 0 \quad \text{II.14}$$

Où $\delta U_n = U_{n+1}^{iter+1} - U_n^{iter}$ est l'incrément de déplacement entre les itérations successives ($iter$) et ($iter+1$). Ce processus itératif continue jusqu'à convergence du système ($|R_{n+1}| \leq \varepsilon$) (convergence du système itératif).

L'équation fait apparaître l'expression de la matrice tangente à l'itération ($iter$) :

$$[K_T^{iter}(U_n)] = - \left(\frac{\partial R_n}{\partial u_{n+1}} \right)^{iter} \quad \text{II.15}$$

$[K_T^{iter}(U_n)]$ joue un rôle central dans la vitesse de convergence de ce schéma itératif. La détermination de cet opérateur se fait par le calcul du résidu R_n dont la formulation dans l'espace est donnée par :

$$R_n = \int_{V_e^0} B_n^e T dV_e^0 - \int_{V_e^0} N_n^e F_v J dV_e^0 - \int_{\Gamma_s} N_n^e F_s J_s d\Gamma_e^0 - \int_{\Gamma_c} N_n^e F_c J_s d\Gamma_e^0 = 0 \quad \text{II.16}$$

Où J et J_s sont, respectivement, les jacobiens de volume et de surface entre l'élément de référence et l'élément réel. La matrice tangente $[K_T^{iter}(U_n)]$ de chaque élément est obtenue en calculant la variation de R_n par rapport aux déplacements. En adoptant deux hypothèses ayant trait aux faibles variations de la géométrie de l'élément au cours de l'incrément de chargement et au type de forces appliquées.

$$[K_T^e(U_n)] = \int_{V_e^0} B_n^e T \frac{\partial \Sigma}{\partial E} : B_n^e J dV_e^0 - \int_{V_e^0} N_n^e \frac{\partial F_c}{\partial U_n} J_s d\Gamma_e^0 \quad \text{II.19}$$

II.5.2 Schéma de résolution dynamique explicite (DE)

Les méthodes de résolution s'appuyant sur un schéma d'intégration explicite en temps expriment le champ de déplacement solution à $t+\Delta t$ sur la base du champ de déplacement solution à l'instant t , de l'accélération au temps t , et des deux champs de vitesse associés aux demi-incréments de temps centrés autour de t . Par utilisation de cette technique de différence centrale, la détermination du champ de déplacement à l'instant $t+\Delta t$ est réalisée.

Avec ces méthodes, il n'y a donc pas de recherche d'équilibre, et donc pas d'itération nécessaire pour obtenir cet équilibre.

Dans la pratique, ces deux schémas de résolution sont mis en œuvre dans le domaine de la simulation numérique du comportement des élastomères. Il ressort cependant que le schéma implicite est associé à des résultats numériques de très bonnes qualités mais à d'éventuelles difficultés de convergence pour certains cas. Le schéma explicite présente une plus grande robustesse en termes de convergence, mais il demeure nécessaire d'être particulièrement soigneux sur la définition du modèle numérique, notamment pour les cas quasi-statiques, dans la mesure où la solution numérique pourrait s'écarter notablement de la solution du problème simulé [Aba00].

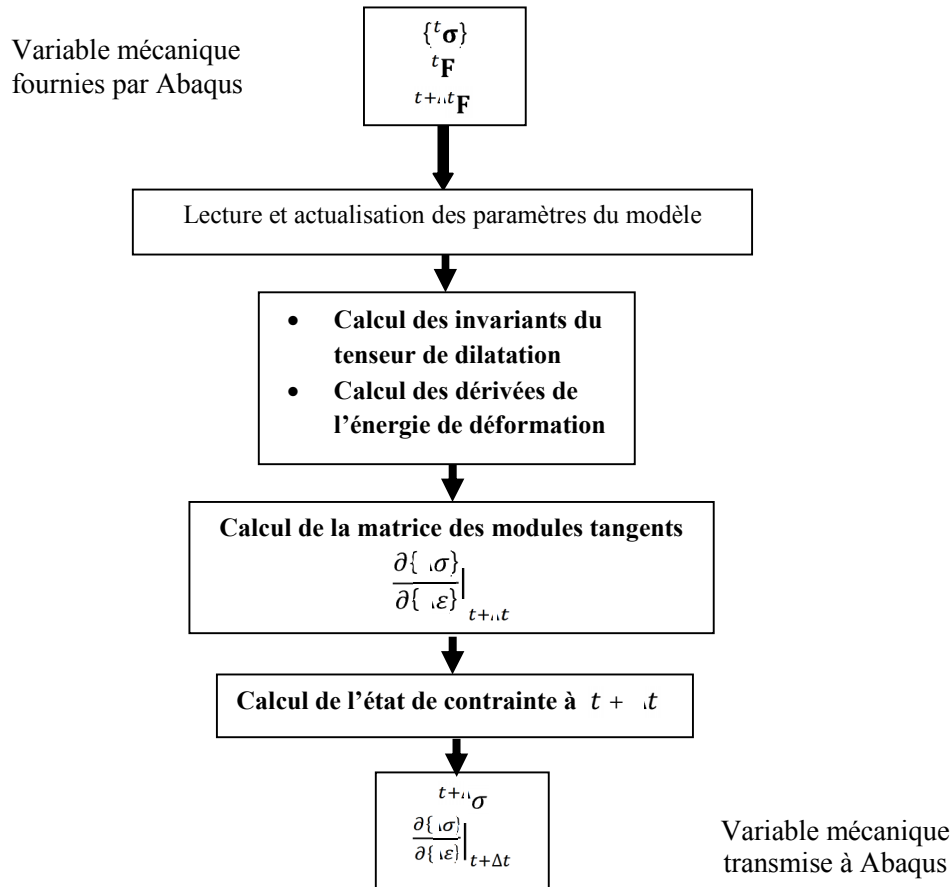


Figure II.3: Organigramme d'implémentation d'une *loi de comportement hyperélastique Abaqus*

II.6 Quelques exemples de densités d'énergie sans endommagement

Comme montré précédemment, la résolution d'un problème mécanique passe par le calcul tenseur des contraintes. Dans le cas d'élastomères de nombreuses formes d'énergie permettant de décrire les contraintes ont été proposées dans la littérature depuis la fin des années 40. Ces travaux initialement focalisés sur les caoutchoucs naturels puis sur les élastomères (chargés, synthétiques, etc.) se sont depuis étendus à de nombreux matériaux.

On oppose généralement l'approche *microphysique*, aux approches dites *phénoménologiques*. Les modèles phénoménologiques ne prennent pas directement en considération la microstructure du matériau, mais se basent sur des considérations mathématiques, qui exigent une bonne compréhension des phénomènes physiques de déformation du matériau de l'étude.

II.6.1 Modèles isotropes incompressibles

II.6.1.1 Le modèle de Mooney (1940)

Rivlin a montré que l'énergie de déformation d'un matériau incompressible s'exprimait par un développement en série de fonction des invariants I_1 et I_2 du tenseur de Cauchy-Green droit C :

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad \text{II.20}$$

Ce modèle reste de loin le plus utilisé pour sa simplicité et sa capacité à refléter convenablement le comportement des élastomères pour des niveaux de déformation allant jusqu'à 100%. [Gac07]

II.6.1.2 Le modèle de Rivlin & Saunders (1951)

C'est une généralisation du modèle précédent. Il s'agit de considérer l'énergie comme une série polynomiale de $(I_1 - 3)$ et $(I_2 - 3)$:

$$\psi(I_1, I_2) = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad \text{avec } C_{00} = 0 \quad \text{II.21}$$

Cette approche polynomiale de l'énergie libre permet de modéliser différents types d'élastomères, en notant cependant qu'une augmentation de l'ordre de la série entraîne par la même occasion un plus grand nombre de paramètre à identifier. [Lej06]

III.6.1.3 Le modèle de Biderman

Biderman utilise une forme extraite du modèle de Mooney-Rivlin à l'ordre 3 en I_1 et 1 en I_2 , il a une forme polynomiale réduite. La fonction de la densité d'énergie est donnée par l'expression suivante :

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + C_{01}(I_2 - 3) \quad \text{II.22}$$

Ce modèle à quatre coefficients C_{10} , C_{20} , C_{30} , C_{01} .

III.6.1.4 Le modèle de Haines-Wilson :

James *et al* remarquent que l'ordre des exposants des termes en I_1 et I_2 du modèle de Mooney-Rivlin n'est pas similaire à l'ordre des exposants lorsque la série mathématique est écrite en termes de λ_i . Ceci leur permet de conclure que, physiquement, la troncature à l'ordre 2 s'écrit plutôt (prise en compte des nombres croisés):

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) \\ + C_{02}(I_2 - 3)^2 + C_{01}(I_2 - 3) \quad \text{II.23}$$

III.6.1.5 le modèle de Hart-Smith

Hart-Smith propose la fonction d'énergie suivante :

$$W = G \exp K_1 (I_1 - 3)^2 dI_1 + K_2 \ln \left(\frac{I_2}{3} \right) \quad \text{II.24}$$

Le premier terme permet de décrire le phénomène de raidissement tandis que le second terme permet de reproduire la courbure à l'origine du matériau. Ce modèle fut le premier capable de décrire le raidissement en gardant une formulation en invariant avec un nombre de paramètres limité. Il offre une représentation pertinente du comportement hyperélastique des élastomères. [Bou06]

Cette forme d'énergie décrit correctement le comportement des élastomères pour des déformations allant jusqu'à 500%. Il traduit en particulier le phénomène de cristallisation sous déformation, mais semble trop compliquée pour permettre la résolution explicite de problèmes. En outre, cette densité ne convient pas pour tous les caoutchoucs.

III.6.1.6. Le modèle de Gent

Gent représente le raidissement en choisissant une fonction présentant une asymptote verticale à un certain niveau de déformation (ce qui est cohérent avec l'hypothèse de l'existence d'une extension limite des chaînes). [Mar04]

Il propose alors un modèle empirique à deux constantes ayant un sens physique. Il compare ainsi son modèle au modèle physique d'Arruda et Boyce en justifiant son approche par le fait que le réseau de chaînes réel ne suit pas exactement la forme obtenue statistiquement et que son modèle en est une approximation possible:

$$W = -\frac{E}{6} (I_m - 3) \ln \left[1 - \frac{I_1 - 3}{I_m - 3} \right] \quad \text{II.25}$$

Le tableau II.1 présente quelques formes polynomiales rencontrées dans la littérature.

| Références | Coefficients | | | | | | | | | |
|-------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| MOONEY (1940) | C ₁₀ | C ₀₁ | | | | | | | | |
| JEMES & AL (1975) | C ₁₀ | C ₀₁ | C ₁₁ | C ₂₀ | C ₀₂ | | | | | |
| JEMES & AL (1975) | C ₁₀ | C ₀₁ | C ₁₁ | C ₂₀ | C ₀₂ | C ₂₁ | C ₁₂ | C ₃₀ | C ₀₃ | |
| ISHIHARA & AL (1951) | C ₁₀ | C ₀₁ | | C ₂₀ | | | | | | |
| JEMES & AL (1975) | C ₁₀ | C ₀₁ | C ₁₁ | C ₂₀ | | | | C ₃₀ | | |
| RIVLIN & SAWYERS (1976) | C ₁₀ | C ₀₁ | | | C ₀₂ | | | | | |
| BIDERMAN (1958) | C ₁₀ | C ₀₁ | | C ₂₀ | | | | C ₃₀ | | |
| TSCHOEGL (1971) | C ₁₀ | C ₀₁ | C ₁₁ | | | | | | | |
| TSCHOEGL (1975) | C ₁₀ | C ₀₁ | | | | | C ₂₂ | | | |
| YEOH (1990) | C ₁₀ | | | C ₂₀ | | | | C ₃₀ | | |
| LION (1997) | C ₁₀ | C ₀₁ | | | | | | | | C ₅₀ |
| HAUPT & SEDLAN (2001) | C ₁₀ | C ₀₁ | C ₁₁ | | C ₀₂ | | | C ₃₀ | | |

Tableau II.1 : Modèles polynomiaux d'énergie libre. [Lej06]

II.6.1.7 Le modèle de Gent-Thomas (1958)

Il est basé sur les mêmes constats que le modèle précédent, une fonction logarithmique du deuxième invariant est choisie à la place de $f(I_2)$:

$$\psi(I_1, I_2) = C_1(I_1 - 3) + C_2 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right) \quad \text{II.26}$$

Cette forme permet, par sa non linéarité, de modéliser convenablement le comportement hyperélastique pour des déformations élevées et particulièrement une bonne représentation des comportement de matériaux cristallisable sous contraintes élevées.

II.6.1.8 Le modèle d'Ogden (1972)

Ce modèle est précédents est couramment utilisé en raison de sa simplicité et de sa capacité à reproduire les résultats expérimentaux.

$$\psi(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3) \quad \text{II.27}$$

avec :

$$\sum_{p=1}^N \mu_p \alpha_p = 2\mu \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad \mu_p \alpha_p > 0 \quad \text{II.28}$$

où μ est le module de cisaillement.

Les modèles présentés précédemment sont largement utilisés pour le calcul de structures hyperélastiques. Les polynômes d'ordre un ou deux sont très appréciés pour leur simplicité d'utilisation et d'identification, mais ne représentent le comportement des élastomères que de manière partielle. Par

exemple, la loi de Mooney Rivlin ne décrit que la première courbure de la courbe de traction et est incapable de reproduire le comportement aux grandes déformations (au delà de 100%). Les polynômes d'ordre plus élevé permettent une description précise du comportement, aussi bien aux petites qu'aux grandes déformations. Cependant, l'identification de leurs paramètres est sujette à caution car la stabilité du comportement n'est pas assurée pour toutes les valeurs possibles que peuvent prendre ces paramètres. Par ailleurs, ces modèles ne garantissent pas une bonne description multiaxiale ; ils peuvent donc conduire à une réponse simulée éloignée de la réponse expérimentale pour un type de chargement.

II.6.1.9 Autres formulations

De nombreux auteurs ont proposé des formulations composées de deux termes distincts : le premier terme permet de définir le raidissement aux grandes déformations et l'autre terme définit la courbure à l'origine. Nous citons dans le tableau II.2 quelques formes qui nous paraissent les plus intéressantes :

| Référence | Densité d'énergie | Caractéristiques |
|---------------------|--|---|
| ALEXENDER (1968) | $W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + C_3 \ln \left(\frac{I_2 - 3 - C_4}{C_4} \right)$ | Modèle adapté à un niveau important de déformation ($> 500\%$) |
| DELFINO AL (1997) | $W = \frac{a}{b} \left\{ \exp \left[\frac{b}{2} (I_1 - 3) \right] - 1 \right\}$ | Modèle pour les artères carotides, traduisant le phénomène de rigidification sous forte pression. |
| LAMBERT-DIANI & REY | $W = \left\{ \exp \right\} \sum_{i=0}^n a_i (I_1 - 3)^i dI_1 \left\{ + \left\{ \exp \right\} \sum_{i=0} b_i \ln(I_2)^i dI_2 \left\{$ | Modèle générique, valable pour une large gamme d'élastomères et pour des élongations importantes. |

Tableau II.2 : Quelques potentiels, phénoménologiques, d'énergies isotropes incompressibles. [Lej06]

Ces formulations plus riches que les formulations polynomiales permettent de décrire correctement le comportement global du caoutchouc avec un nombre limité de paramètres. Malheureusement, cela contraint le domaine de pertinence de la forme de comportement adoptée.

II.6.2 Modèles isotropes compressibles

II.6.2.a Formulation

Les élastomères sont souvent considérés comme des matériaux incompressibles en raison de leur capacité à se déformer fortement sans subir de changement appréciable de volume. Toutefois, lorsque la pièce est utilisée dans un environnement confiné, cette hypothèse peut entraîner des erreurs de modélisation non négligeables. Une prise en compte de cette faible compressibilité nécessite rigoureusement une reformulation de la loi de comportement en décomposant dans un premier temps, le mouvement local du milieu en une transformation purement sphérique et une transformation isochore:

$$\bar{\mathbf{F}} \stackrel{\text{def}}{=} J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F} \quad \text{II.29}$$

$$\bar{\mathbf{B}} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^T \quad \text{donc} \quad \bar{\mathbf{B}} \stackrel{\text{def}}{=} J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{B} \quad \text{II.30}$$

Les invariants de déformations correspondant à la transformation purement incompressible, s'écrivent donc :

$$\bar{I}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \text{trace}(\bar{\mathbf{B}}) = \mathbf{I} \cdot \bar{\mathbf{B}} \quad \text{alors} \quad \bar{I}_1 = J^{-\frac{2}{3}} I_1 \quad \text{II.31}$$

$$\text{Et } \bar{I}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\bar{I}_1^2 \text{trace}(\bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}}) \right) = \frac{1}{2} \left(\bar{I}_1^2 - \mathbf{I} \cdot \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}} \right) \quad \text{donc} \quad \bar{I}_2 = J^{-\frac{4}{3}} I_2 \quad \text{II.32}$$

La densité d'énergie de déformation est ensuite découpée en une partie sphérique et une partie déviatorique:

$$W(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = W_D(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + W_S(J) \quad \text{II.33}$$

La fonction $\psi_{vol}(J)$ ou $W_S(J)$ doit être convexe et doit vérifier la condition de normalité: $\psi_{vol}(1) = 0$, la condition de contraintes nulles dans l'état naturel ${}^1\dot{\psi}_{vol}(1) = 0$ et les conditions de coercivité.

La partie volumique de l'énergie est en général écrite sous la forme :

$$\rho_0 \psi_{vol}(J) = KG(J) \quad \text{II.34}$$

K étant une constante matérielle assimilable au module de compressibilité si $G''(J) = 1$.

- 1) Dans le cas incompressible, et dans le cadre d'une formulation par élément finis, le paramètre K joue le rôle d'un coefficient de pénalité ;

¹ $\dot{\psi}_{vol}$ désigne la différentiation de $\psi_{vol}(J)$ par rapport à J

47 | **CHAPITRE II**
Modélisation du comportement des élastomères

2) Dans le cas compressible, ce même coefficient traduit une propriété matérielle; la compressibilité hydrostatique.

Pour être admissible, la fonction doit être strictement convexe et atteint son unique minimum en $J=1$. On trouve de nombreuses formes de la fonction $G(J)$ dans la littérature, le tableau II.3 en présente quelques unes.

| modèle | $G(J)$ | $G'(J)$ | $G''(J)$ | Référence |
|--------|--|---|--|------------------------|
| 1 | $\frac{1}{2}(J-1)^2$ | $J-1$ | 1 | |
| 2 | $\frac{1}{4}\left((J-1)^2 + (\ln J)^2\right)$ | $\frac{1}{2}\left(J-1 + \frac{1}{J} \ln J\right)$ | $\frac{1}{2J^2}(1+J^2 - \ln J)$ | SIMO & TAYLOR (1982) |
| 3 | $\frac{1}{2}(\ln J)^2$ | $\frac{1}{J} \ln J$ | $\frac{1}{J^2}(1 - \ln J)$ | SIMO & AL. (1985) |
| 4 | $\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{J^\beta} - 1 + \beta \ln J\right)$ | $\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{J} - \frac{1}{J^{1+\beta}}\right)$ | $\frac{1}{\beta} \frac{1}{J^{2+\beta}}(1 + \beta - J^\beta)$ | OGDEN (1972) |
| 5 | $\frac{1}{4}(J^2 - 1 - 2 \ln J)$ | $\frac{1}{2}\left(J - \frac{1}{J}\right)$ | $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{J^2}\right)$ | SIMO & TAYLOR (1991) |
| 6 | $J - \ln J - 1$ | $1 - \frac{1}{J}$ | $\frac{1}{J^2}$ | MIEHE [1994] |
| 7 | $J^\beta(\beta \ln J - 1) + 1$ | $\beta^2 \frac{1}{J^{1-\beta}} \ln J$ | $\beta^2 J^{\beta-2}(1 + (\beta-1) \ln J)$ | HARTMANN (2002) |
| 8 | $J \ln J - J + 1$ | $\ln J$ | $\frac{1}{J}$ | LIU & AL. (1994) |
| 9 | $\frac{1}{32}\left(J^2 - \frac{1}{J^2}\right)^2$ | $\frac{1}{8}\left(J^3 - \frac{1}{J^5}\right)$ | $\frac{1}{8}\left(5\frac{1}{J^6} + 3J^2\right)$ | ANSYS (2000) |
| 10 | $\frac{J}{\beta}\left(1 - \frac{J^{-\beta}}{1-\beta}\right) + \frac{1}{\beta-1}$ | $\frac{1}{\beta}\left(1 - J^{-\beta}\right)$ | $J^{-1+\beta}$ | MURNAGHAN (1951) |
| 11 | $\frac{1}{50}(J^5 + J^{-5} - 2)$ | $\frac{1}{10}(J^4 - J^{-6})$ | $\frac{1}{10}(4J^3 + 6J^{-7})$ | HARTMANN & NEFF [2003] |
| 12 | $\frac{9}{2}(J^{1/3} - 1)^2$ | $3(J^{-1/3} - J^{-2/3})$ | $2J^{-5/3} - J^{-4/3}$ | MARC (2003) |

Tableau II.3 : Quelques fonctions d'incompressibilité. [Lej06]

II.6.3 Modèles microphysiques

On regroupe sous l'appellation « microphysique » les modèles prenant en compte la *microstructure* du matériau. Il existe un certain nombre d'outils permettant d'intégrer cette microstructure. Les premiers utilisés proviennent de la physique statistique. On considère que le matériau est formé par un assemblage *amorphe*² de chaînes de polymères qui compose la *gomme*, si bien que la plupart des modèles dérivés de cette approche sont regroupés sous l'appellation « modèles statistiques ».

² à l'état naturel seulement

II.6.3.1 Le modèle de néo-Hooke

Il est considéré comme le premier modèle statistique hyperélastique. Il correspond au modèle de Mooney-Rivlin à un seul terme. Le matériau est constitué d'un réseau de longues chaînes flexibles orientées aléatoirement et jointes chimiquement en certains points de jonction. L'entropie d'une chaîne est évaluée par la relation suivante :

$$s = k \ln \Omega \quad \text{II.35}$$

où k est la constante de Boltzmann et Ω le nombre d'états quantiques de la chaîne, dépendant de sa conformation.

La loi de Boltzmann relie l'entropie d'une chaîne avec la distribution de probabilité $p(r)$ qui représente l'ensemble des configurations possibles de la chaîne (autrement appelée *conformation* de la chaîne) :

$$\eta_{chaîne} = k \ln(p(r)) = C - \frac{3k}{2nl^2} r^2 \quad \text{II.36}$$

Avec C est une constante.

En considérant que la loi de comportement dérive de la variation d'entropie entre l'état non déformé et l'état déformé. La fonction d'énergie s'écrit alors:

$$W = \frac{1}{2} nkT(I_1 - 3) \quad \text{II.37}$$

II.6.3.2 Le Modèle tube

Ce modèle est établi par Heinrich et al. Ils supposent que les chaînes se déforment en restant confinées dans un tube formé par le réseau avoisinant. Ils arrivent à exprimer l'énergie de déformation par :

$$W = G_c I_1 + \frac{2G_e}{-\beta} I_1^{-\beta} \quad \text{II.38}$$

Avec $I_1(\beta)$ représente le première invariant du tenseur de déformation généralisé $\bar{e}(\beta)$, il est défini par :

$$e_{ij}(\beta) = \frac{B_{ij}^{\beta} - \delta_{ij}}{\beta} \quad \text{II.39}$$

$B_{ij} = F_{ij}F_{ji}$: Tenseur des dilatations de Cauchy-green gauche.

Pour pouvoir programmer ce modèle dans Fortran, il faut arriver à exprimer l'énergie de déformation W en fonction des deux invariants de tenseur de dilatation I_1 et I_2 . C'est à-dire :

$$W = (I_1, I_2)$$

II.6.3.3 Le modèle tube étendu

Ce modèle est issu de la limite du modèle tube aux déformations moyennes, il fait intervenir seulement les contraintes d'entrelacement au détriment de l'élasticité des chaînes, et en particulier de leur limite d'extensibilité.

Kalisk et Heinrich introduisent un paramètre d'inextensibilité δ des chaînes, ils aboutissent à une forme d'énergie libre ou la partie $W_c = G_c I$ (2) est remplacée par :

$$W_c = \frac{G_c}{2} \left[\frac{(1-\delta^2)(I_1-3)}{1-\delta^2(I_1-3)} \right] + \ln(1 - \delta^2(I_1 - 3)) \quad \text{II.40}$$

Par contre la partie W_e reste inchangée :

$$W_e = \frac{2G_e}{-\beta} I (-\beta) \quad \text{II.41}$$

Donc la forme de W est :

$$W = \frac{G_c}{2} \left[\frac{(1-\delta^2)(I_1-3)}{1-\delta^2(I_1-3)} \right] + \ln(1 - \delta^2(I_1 - 3)) + \frac{2G_e}{-\beta} I (-\beta) \quad \text{II.42}$$

Avec : β vérifie $0 < \beta < 1$

Les modèles statistiques ont l'avantage d'être fondés sur une description microscopique du matériau. Cette description repose sur un grand nombre d'hypothèses simplificatrices, mais décrit pourtant relativement bien la composante élastique du comportement des élastomères chargés ou non. La plupart des caoutchoucs industriels contiennent des charges en proportion importante. Ils ont donc un comportement composite *a priori* plus complexe que celui décrit par les modèles statistiques. En fait, l'ajout de charges a pour principales conséquences d'augmenter la composante dissipative du comportement et de rigidifier le matériau. Il ne modifie donc pas beaucoup la forme du comportement à première charge, ce qui justifie l'utilisation de ce type de modèle même pour des élastomères fortement chargés. La plupart des modèles conduisent à des formes d'énergie dont l'expression n'est pas analytique, ce qui complique leur implantation dans les codes de calcul. Ils sont donc peu utilisés dans l'industrie.

II.7 Modélisation de l'effet Mullins

Comme pour les modèles hyperélastiques, les modèles qui représentent l'accommodation due à l'effet Mullins peuvent être classés en deux catégories : ceux qui sont fondés sur une description physique de l'endommagement et ceux qui sont fondés sur la mécanique de l'endommagement mais qui ne cherchent pas à expliquer les mécanismes de cet endommagement.

II.7.1 Les modèles macroscopiques

Sur la base des modèles phénoménologiques de comportement, deux types d'endommagement sont décrits : le premier, basé sur la théorie de l'endommagement continu, le deuxième, basé sur la théorie du pseudo-élastique.

1) Modèles basés sur la théorie de l'endommagement continu

● *Modèle d'endommagement isotrope de type Simo*

Il se base sur l'hypothèse suivante : l'endommagement par effet Mullins est entièrement défini par le maximum de la déformation atteint par le matériau au cours du temps .

Simo [Sim87, Sim98] définit d'abord une déformation équivalente de la forme :

$$\lambda(t) = \sqrt{2\psi_0(\mathbf{E}(t))} \quad \text{II.43}$$

et son maximum :

$$\alpha = \max_{\tau \in [0,t]} \sqrt{2\psi_0(\mathbf{E}(\tau))} \quad \text{II.44}$$

Il décrit l'évolution de l'endommagement comme étant dépendant d'une fonction $\bar{h}(\lambda(t))$ caractéristique du processus d'endommagement .

$$\dot{d} = \begin{cases} \bar{h}(\lambda(t))\dot{\lambda} & \text{si } f(\lambda(t)) = 0 \text{ et } \mathbf{N} : \mathbf{E} > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

\mathbf{E} est la déformation de Green Lagrange et $\mathbf{N} = \frac{\partial f}{\partial \lambda(t)} \frac{\partial \lambda(t)}{\partial \mathbf{E}}$ et, ici, la normale à la surface seuil.

Le modèle est défini par la description de \bar{h} choisi de la forme suivante :

$$\bar{h}(\lambda(t)) = -\frac{dg(\lambda(t))}{d\lambda(t)} \text{ avec } g(x) = b + (1-b)\frac{1-e^{-x/a}}{x/a}, b \in [0,1], a \in [0, \infty[$$

Avec a et b des paramètres caractéristique du matériau.

● **Modèle d'endommagement isotrope de type Miehe**

Miehe [Mie95, MK00] décompose l'endommagement en deux parties :

- Un endommagement discontinu qui apparait lors de la première décharge et qui évolue uniquement quand le seuil d'énergie ou déformation est dépassé.
- Un endommagement continu qui apparait même lorsque se maximum n'est pas atteint.

Ce modèle requiert donc la définition de deux variables d'endommagement, \tilde{d}_α et \tilde{d}_β , telles que $d = \tilde{d}_\alpha(\alpha) + \tilde{d}_\beta(\beta)$ qui dépendent, chacune, de la force thermodynamique associée à la variable d'endommagement.

$$\alpha = \max_{\tau \in [0,t]}(\lambda(\tau)) \quad \text{et} \quad \dot{\alpha} = \begin{cases} \dot{\psi}_0 = \boldsymbol{\sigma}_0 : \mathbf{D} & \text{pour } f = \lambda(t) - \alpha = 0 \text{ et } \dot{\psi}_0 > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\beta = \int_0^t |\dot{\alpha}(\tau)| d\tau \quad \text{et} \quad \dot{\beta} = |\dot{\lambda}(t)| = |\dot{\psi}_0| = \text{signe}[\dot{\psi}_0] \boldsymbol{\sigma}_0 : \mathbf{D}$$

Où $\boldsymbol{\sigma}_0$ est la contrainte effective non endommagée telle que $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{B} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}}$

Ainsi, en développant ce modèle, ils obtiennent des fonctions d'endommagement de la forme :

$$\begin{cases} \tilde{D}_\alpha(\chi) = D_\alpha^\infty \left| 1 - \exp\left(-\frac{\chi}{\eta_\alpha}\right) \right| \\ \tilde{D}_\beta(\beta) = D_\beta^\infty \left| 1 - \exp\left(-\frac{\beta}{\eta_\beta}\right) \right| \end{cases}$$

Ce modèle décrit l'effet Mullins de façon plus précise que le modèle de SIMO [Sim87] puisqu'il tient compte en plus de la déformation maximale, d'une accumulation d'endommagement dans le matériau.

2) Modèles basés sur la théorie de la pseudo-élasticité

● **Modèle d'Ogden et Roxburgh**

Ogden et Roxburgh [OR99a, OR99b], ont appliqué la théorie de pseudo-élasticité, dans le cas de matériaux incompressibles, pour modéliser le comportement de l'effet Mullins, dans le cas d'un essai de traction simple. Pour ce faire, une variable d'endommagement est intégrée dans l'énergie élastique, qui devient, alors, une énergie pseudo élastique : $W(\lambda_1, \lambda_2, \eta)$ ou les λ_i représentent les dilatations

principales et η la variable dite « additionnelle », représentant l'état d'endommagement. L'endommagement étant supposé isotrope, η est une variable scalaire. Ils supposent, pour décrire η , que cet endommagement ne dissipe pas d'énergie :

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} = 0$$

Pendant un processus de déformation quelconque, η prend deux états : il est soit inactif $\eta = 1$, soit actif $0 < \eta < 1$ et dans ce cas η dépend de la déformation.

Ogden et Roxburgh [OR99b] optent pour un modèle découplé de l'énergie de déformation tel que :

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \eta) = \eta \tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2) + W_0(\eta) \text{ avec } W_0(1) = 0$$

Cette écriture permet :

- Quant $\eta = 1$, de décrire la montée en charge, uniquement à partir de l'énergie de déformation d'un matériau non endommagé $\tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2)$.
- Quant $\eta = 0$, de déterminer la déformation résiduelle. $W_0(0)$ est l'énergie résiduelle (non recouvrable) qui peut-être interprétée comme étant l'énergie nécessaire à un endommagement du matériau.

La forme de η , en accord avec le modèle phénoménologique développé, dépendante d'une énergie de déformation maximale. Ce modèle étant basé sur une approche énergétique, il est valable dans le cas d'essais plus complexes tridimensionnels. Mais il reste discutable, notamment, vis-à-vis de l'hypothèse de non dissipation lors de la décharge.

● *Modèle de Dorphmann et Ogden*

Dorphmann et Ogden [DO04] ont améliorés le modèle d'Ogden et Roxburgh, en introduisant de l'anisotropie par le biais de deux variables additionnelles η_1 et η_2 .

η_1 permet de décrire l'adoucissement de la repense, avec $0 < \eta_1 < 1$, et η_2 tient compte de l'accumulation de déformation résiduelle, avec $0 < \eta_2 < 1$.

Le matériau testé en traction simple est toujours incompressible et initialement isotrope. L'énergie de déformation pseudo élastique utilisée est de la forme suivante :

$$\tilde{W}(\lambda, \eta_1, \eta_2) = \eta_1 \tilde{W}_0(\lambda) + (1 - \eta_2) \tilde{N} \lambda + \eta_1(\eta_1) + \eta_2(\eta_2)$$

En suivant une démarche similaire à celle de OGDEN et ROXBURGH [OR99a], ils arrivent à des formes spécifiques des variables η_1 et η_2 , qui prennent la valeur unité durant la première montée en

charge, puis qui décroissent, lors de la première décharge, de façon monotone et dépendante de λ , jusqu'à une valeur η_{1min} pour η_1 et 0 pour η_2 .

$$\eta_1 = 1 - \frac{1}{r} \tanh \left[\frac{W_m - \tilde{W}_0(\lambda)}{\mu m} \right]$$

$$\eta_2 = \tanh \left[\left(\frac{\tilde{W}_0(\lambda)}{W_m} \right)^{\alpha(W_m)} \right] / \tanh(1)$$

Où W_m et $\tilde{W}_0(\lambda)$ sont respectivement la valeur de l'énergie pour la déformation maximale et la fonction d'énergie de déformation non endommagée (lors de la première montée en charge), r , m et μ sont des paramètres matériaux.

La fonction $N(\lambda)$ est intégrée au modèle pour décrire le caractère anisotrope de la repense, une fois l'endommagement apparu. Cet endommagement entraîne des déformations résiduelles qui induisent, à leur tour, l'apparition de direction privilégiées dans le matériau et donc d'anisotropie induite.

Ces modèles, basés sur la théorie de la pseudo-élasticité, couplés à des lois de comportement et à des lois complémentaires découlant de la mécanique des milieux continus ont donné de bonnes similitudes vis-à-vis d'essais expérimentaux.

II.7.2 Les modèles micro-physiquement motivés :

Deux types de modèles, basés sur deux descriptions différentes de l'effet Mullins, existent dans la littérature :

● Modèles de type Govindjee et Simo

Govindjee et Simo [GS91, GS92], font l'hypothèse d'avoir deux sortes de chaînes macroscopiques au sein d'un élastomère chargé : les chaînes « p-p » qui relient deux particules entre-elles et les autres dites « c-c ». Les chaînes « p-p » s'étirent jusqu'à rupture, et se libèrent. Pour l'étudier ils prennent un volume élémentaire représentatif d'un matériau chargé, dans lequel ils supposent que les inclusions sont rigides, et ont établie une expression de l'énergie globale en fonction de la fraction volumique de charge v_p , des dilatations principales λ_i et d'un maximum de déformation sur l'histoire du matériau, μ_{max} , de la forme suivante :

$$\psi(\lambda_i) = (1 - v_p) \left[\psi_{cc}(\lambda_i^{\frac{m}{X}}) + \psi_{pp}(\lambda_i^{\frac{m}{X}}, \mu_{max}) \right]$$

Où $\bar{\lambda}_X^m$ est la moyenne volumique standard sur la matrice.

L'endommagement dû à l'effet Mullins est uniquement pris en compte dans l'énergie de déformation des chaînes « p-p ». Le modèle se trouve ainsi décrit de la façon suivante :

$$W_{pp}(\lambda_A^m, \mu_{max}) = \frac{N_{pp}}{3} \int_{A=1}^3 \int_{\bar{\lambda}_X} P(n, R) w(n, \lambda_A^m R) dR dn$$

Où N_{pp} représente le nombre de chaînes « p-p » par unité de volume de la matrice, $P(n, R)$ est la probabilité de trouver, dans un volume élémentaire, une chaîne constituée de n monomères de longueur R et $A_x = \{(n, R) | na > \mu_{max} R\}$ pour a la longueur de Kuhn statistique d'une unité de monomères .

L'endommagement apparaît pour μ (maximum de la déformation actuelle) et μ_{max} remplissant les conditions de Kuhn -Tucker. Les comparaisons entre simulation et expériences ont donné de bonnes concordances pour un nombre réduit de cycles (2 cycles) sur des essais uniaxiaux.

Goktepe et Miehe [GM05] ont étendu le modèle de Govindjee et Simo [GS91, GS92] à un modèle d'endommagement anisotrope par homogénéisation numérique sur des microsphères unités. Ils définissent un ensemble de variables d'endommagement macroscopiques anisotropes,

$\mathbf{D} := \{d(\vec{r}, t)\}$, $d(\vec{r}, t)$ est l'endommagement d'une chaîne,

$$\dot{D} = \begin{cases} \dot{\varphi}(\lambda) & \text{pour } \varphi = \varphi(\lambda, d) \text{ et } \dot{\varphi} > 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Avec :

$$\varphi(\lambda) = \lambda_r^{pp} \mathcal{L}^{-1}(\lambda_r^{pp}) + \ln \left(\frac{\mathcal{L}^{-1}(\lambda_r^{pp})}{\sinh(\mathcal{L}^{-1}(\lambda_r^{pp}))} \right) \quad \text{ou} \quad \lambda_r^{pp} = \frac{\lambda}{\sqrt{N^{pp}}}$$

L'énergie libre macroscopique des chaînes p-p : ψ^{pp} , dépend de l'énergie libre normalisée $\varphi(\lambda)$ et l'endommagement $d(\vec{r}, t)$, de la façon suivante :

$$\psi^{pp}(\varphi(\lambda), d) = kTN^{pp} \int_0^{\varphi(\lambda)} \xi(\tilde{\varphi}(\lambda), d) d\tilde{\varphi}(\lambda) + \psi_a^{pp}(d)$$

Avec :

$$\xi(\varphi, d) = c_1(d)[\varphi - c_2(d)]^2 + c_3(d)$$

Ce modèle permet alors de refléter à la fois le comportement anisotrope de l'effet Mullins et la déformation résiduelle en tant qu'effet Mullins induit de l'anisotropie. Il faut noter cependant que ces modèles nécessitent la connaissance de grandeurs microscopiques, comme la fraction volumique de charge, quelques fois difficile à obtenir.

II.8 Conclusion

Ce chapitre propose un aperçu bibliographique de la modélisation des comportements hyperélastiques, après avoir présenté le problème mécanique, la formulation tensorielle de la loi de comportement et son intégration dans le code de calcul par élément finis Abaqus. Différentes approches rencontrées dans la littérature sont présentées. Quelques modèles phénoménologiques et microphysiques sont détaillés pour des comportements incompressibles et compressibles.

Les modèles physiques sont assez efficaces et leurs paramètres matériau sont à la fois peu nombreux et reliés à des paramètres physiques comme le nombre de segments par chaîne ou la température. Mais malheureusement ils sont peu utilisés à cause de leurs expressions non analytiques qui compliquent leur introduction dans les codes de calcul.

Les modèles phénoménologiques sont suffisamment souples pour convenir à un grand nombre de matériaux. En contre partie, l'identification de leurs paramètres est particulièrement peu fiable, ce qui peut donner lieu à des erreurs dans certains cas de sollicitations multiaxiales.

Chapitre III

INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

III.1 Objectifs de l'étude

Comme abordé dans le chapitre précédent, la modélisation du comportement mécanique des élastomères passe par le choix d'une loi de comportement permettant de reproduire qualitativement et quantitativement la réponse mécanique du matériau. De ce choix dépend la pertinence des simulations qui pourront être faites. S'il existait un modèle parfait capable de se comporter comme le matériau réel après une phase d'identification des paramètres caractéristiques, ce choix n'aurait pas de raison d'être. Malheureusement, le comportement complexe des élastomères est difficile à modéliser et une multitude de modèles a vu le jour depuis plus d'un demi-siècle, chacun possédant des qualités et des défauts. Il est difficile pour un ingénieur de trancher parmi les différents modèles existants, d'autant que ces modèles ne sont que très rarement comparés les uns avec les autres et souvent présentés par leur auteurs sous leur meilleur jour.

Le but de cette étude est de qualifier l'aptitude de ces modèles à reproduire les essais expérimentaux suivant différents modes de déformation. Cette étude permettra aussi d'établir une comparaison entre ces modèles et de faire un classement en fonction de leur domaine de validité et du nombre de coefficients intervenant dans leur formulation. Pour cela nous avons opté pour des modèles différents; les modèles purement phénoménologiques où les données expérimentales sont reproduite d'une manière purement mathématique sans chercher à donner un sens physique aux constantes matérielles. Cette approche revient à considérer le matériau comme une boîte noire et à rechercher la fonction W reproduisant son comportement macroscopique. Ce type d'approche peut être décomposé en deux sous-types. Le premier type consiste à trouver une forme mathématique générale (décomposition en séries mathématiques fonctions de I_1 et I_2 ou en λ_i), reproduisant au mieux les expériences. Parmi ces modèles nous avons choisi d'étudier le modèle de Biderman et le modèle de Haïnes-Wilson. Le second type consiste à rechercher directement les formes mathématiques des fonctions $\frac{\partial W}{\partial I_1}$ et $\frac{\partial W}{\partial I_2}$ à partir d'expériences contrôlant plus ou moins indépendamment les paramètres I_1 et I_2 . Nous avons opté pour les modèles de Hart-Smith et de Gent. Deux modèles physiques sont étudiés : le modèle tube et le modèle tube étendu. Les expressions de ces derniers sont établies en s'intéressant au réseau de chaînes polymériques tout en intégrant des considérations physiques traitées de manière statistique. L'avantage de cette approche est de fournir des modèles dont les constantes matérielles ont un sens physique.

III.2 Les résultats expérimentaux de la bibliographie

Une fois le choix de modèle fait, nous les avons implémentés dans Abaqus. Ces lois de comportement sont codées dans Abaqus standard sous forme de programmes Fortran. Deux possibilités sont offertes dans Abaqus :

- Un programme dont lequel les contraintes et la matrice tangente sont calculées.
- Un programme dévolu aux lois de comportement hyperélastiques sous formalisme en invariants de C.

Afin de tester la pertinence des prédictions numérique des modèles retenus dans cette étude nous avons souvent recouru à des comparaisons avec les résultats expérimentaux. Dans le cas des élastomères, les travaux de Treloar [Tre44] très utilisés et même considéré comme des travaux de références sont exploités afin de valider notre démarche. Ces travaux concernent l'étude d'un caoutchouc à 8% de soufre vulcanisé pendant 3 heures. Celui-ci présente l'avantage d'être fortement élastique sans présenter de cristallisation jusqu'à 400% d'extension. Il est donc très bien adapté pour être modélisé par un modèle hyperélastique. Treloar a effectué sur ce matériau des essais d'extension simple, d'extension equibiaxial, de compression, de glissement pur et a également combiné un essai de traction avec un essai de glissement pur. Nous nous limiterons dans cette étude à des essais de traction uniaxiale et equibiaxial. En fait les résultats de Treloar ne seront utilisés que pour valider l'implémentation des modèles. Des résultats de calcul de structures seront ensuite exploités pour tester l'aptitude des modèles choisis.

III.3 Les essais de Treloar (1944)

Treloar utilise une éprouvette de longueur utile égale à 10 mm, de largeur 3 mm et d'épaisseur 0,8 mm. Cette éprouvette est pré-étirée à 400% avant d'effectuer les mesures afin d'éliminer l'effet Mullins.

- *L'extension simple*

La figure ci-dessous représente l'évolution de la contrainte nominale dans la direction d'extension en fonction de la dilatation λ .

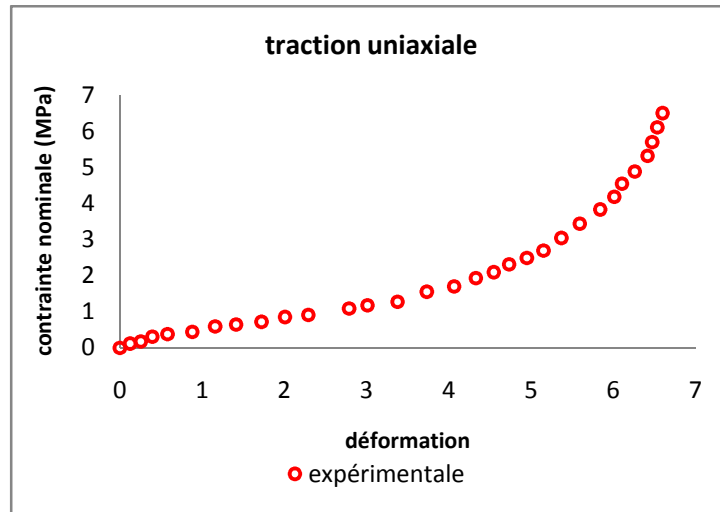


Figure III.1 : L'évolution de la contrainte nominale en fonction de la déformation lors d'un essai de traction uniaxiale dans le modèle de Treloar.

- *L'extension equibiaxial*

Pour ce type de déformation, Treloar utilise le soufflage d'une membrane circulaire de 25 mm de diamètre. Il mesure alors l'extension de la membrane entre deux marques tracées sur un cercle initialement de 4 mm de diamètre centré au pôle, le rayon de courbure au pôle r , et la pression P insufflée dans la bulle. Il utilise alors la relation ci-dessous pour tracer la courbe donnant contrainte nominale en fonction de λ .

$$\pi = \frac{F}{h_0 l_0} = \frac{\lambda T}{h_0} = \frac{\lambda P r}{2 h_0}$$

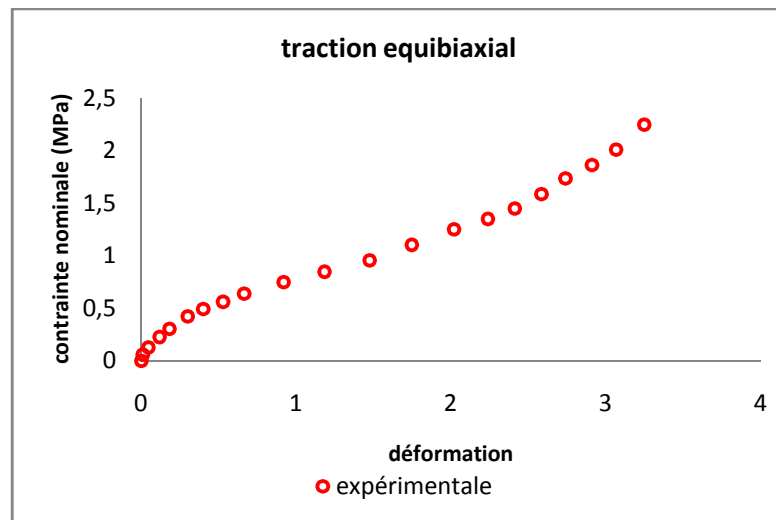


Figure III.2 : L'évolution de la contrainte nominale en fonction de la déformation lors d'un essai de traction uniaxiale dans le modèle de Treloar.

III.4 Représentation des modèles

Nous rappelons dans le tableau ci dessous les densités d'énergie des modèles utilisés dans cette étude.

| Les modèles | Origine | énergie |
|---------------|------------------|---|
| Biderman | Phénoménologique | $W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + C_{01}(I_2 - 3)$ |
| Haines-Wilson | Phénoménologique | $W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{02}(I_2 - 3)^2 + C_{01}(I_2 - 3)$ |
| Hart-Smith | Phénoménologique | $W = G \left[\exp K_1(I_1 - 3)^2 dI_1 + K_2 \ln \left(\frac{I_2}{3} \right) \right]$ |
| Gent | Phénoménologique | $W = -\frac{E}{6}(I_m - 3) \ln \left[1 - \frac{I_1 - 3}{I_m - 3} \right]$ |
| Tube | Microphysique | $W = G_c I^*(2) + \frac{2G_e}{-\beta} I^*(-\beta)$ |
| Tube étendu | Microphysique | $W = \frac{G_c}{2} \left \frac{(1 - \delta^2)(I_1 - 3)}{1 - \delta^2(I_1 - 3)} \right + \ln(1 - \delta^2(I_1 - 3)) + \frac{2G_e}{-\beta} I^*(-\beta)$ |

Tableau III.1 : densités d'énergie étudiées.

III.5 Résultats numériques

Nous utilisons la subroutine utilisateur d'Abaqus pour implémenter ces modèles. Pour cela nous calculons les dérivées partielles de l'énergie de déformation par rapport aux invariants dans chacun des six cas du tableau III.1.

Les résultats des modèles sont comparés aux résultats de Treloar, déjà donnés.

1) Prédiction du modèle de Biderman

Pour pouvoir définir le domaine d'utilisation du modèle de Biderman, nous l'utilisons sans tenir compte du changement de volume puis nous comparons les résultats obtenus aux résultats de Treloar. L'évolution de la contrainte nominale en fonction de la déformation, pour des valeurs de $C_{10} = 0.23$ MPa, $C_{01} = 0.008$ MPa, $C_{20} = -0.004$ MPa, $C_{30} = 0.00007$ MPa, est donnée sur la figure III.3 et cela dans les cas d'un essai de traction uniaxiale et equibiaxial.

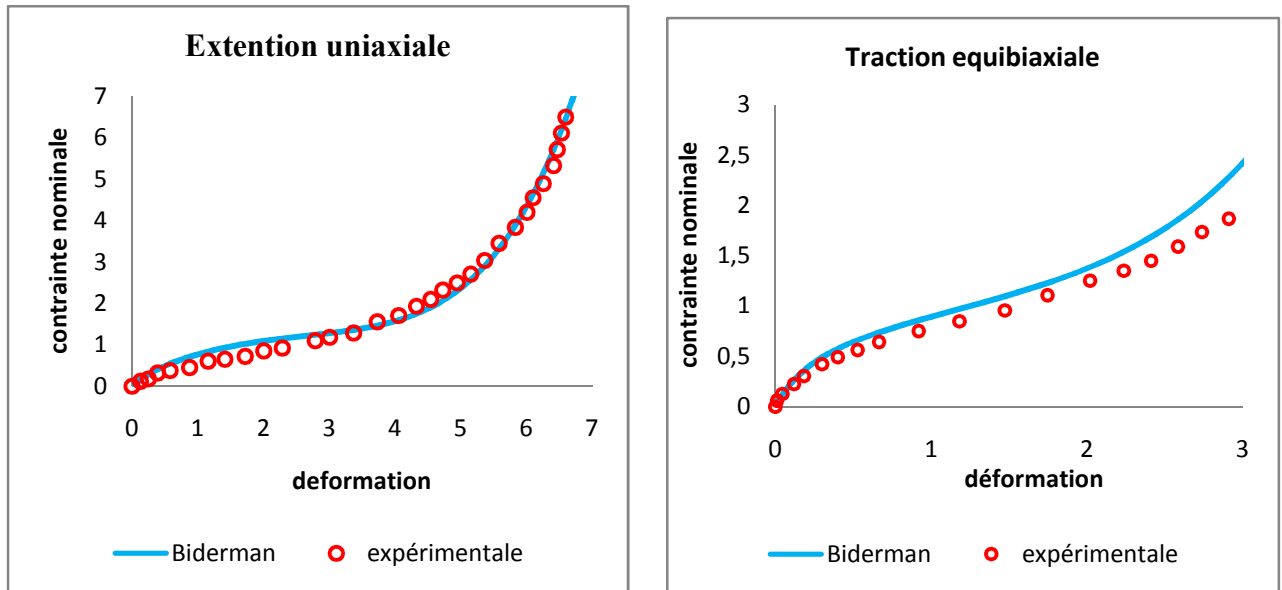


Figure III.3 : comparaison des prédictions numérique du modèle de Bidermann avec les résultats expérimentaux de Treloar.

Il apparait clairement que le modèle de Biderman reproduit correctement le comportement des élastomères. Dans le cas de la traction biaxiale ; un faible décalage apparait pour une déformation de 200%.

- **Prise en compte la compressibilité:**

Cependant, comme nous l'avons signalé au chapitre I, les élastomères ne sont pas complètement incompressibles. La prise en compte de cette déformation volumique nous a poussés à ajouter une fonction volumique à la densité d'énergie.

L'énergie de densité de déformation est alors décomposée en deux parties, W_{incomp} associé à l'énergie de déformation incompressible et W_{comp} associé à l'énergie de déformation compressible ou au changement de volume spécifique :

$$W = W_{incomp} + W_{comp}$$

Pour notre part, nous supposons une décomposition additive du potentiel hyperélastique en deux parties, une déviatorique et l'autre volumique :

$$W = W_d(I_1, I_2) + W_v(J)$$

Avec

$$W_d = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{20}(\bar{I}_1 - 3)^2 + C_{30}(\bar{I}_1 - 3)^3 + C_{01}(\bar{I}_2 - 3)$$

Et

$$W_v = \frac{k}{2}(J - 1)^2$$

Pour mettre en évidence ce phénomène de changement de volume nous avons fait varier la constante de compressibilité dans le modèle phénoménologique de Biderman puis nous comparons les résultats obtenus aux résultats incompressibles. Ces résultats sont représentés sur la figure ci dessous:

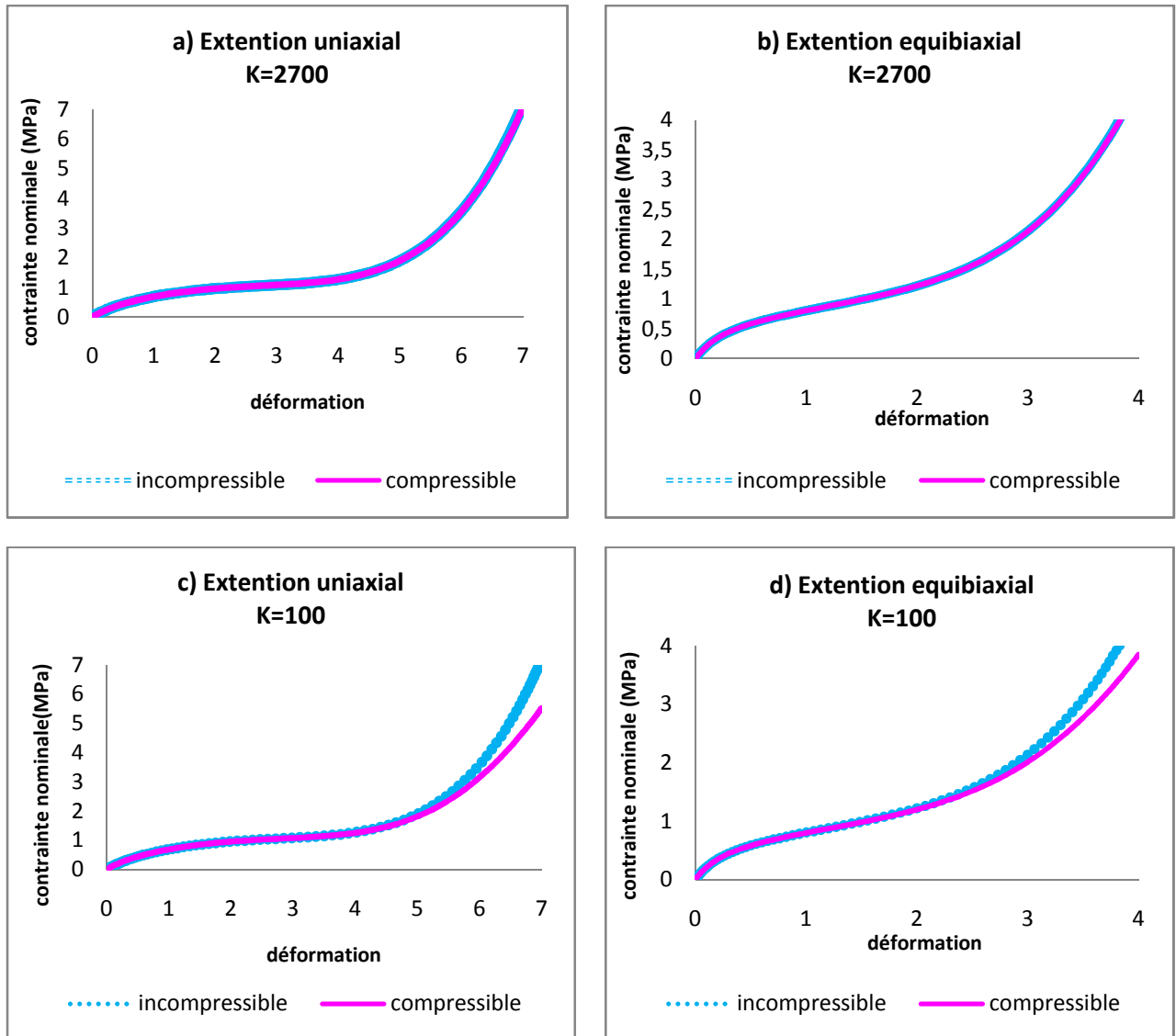


Figure III.4 : *Influence du facteur de compressibilité sur le comportement des élastomères en traction uniaxiale et en traction equibiaxiale.*

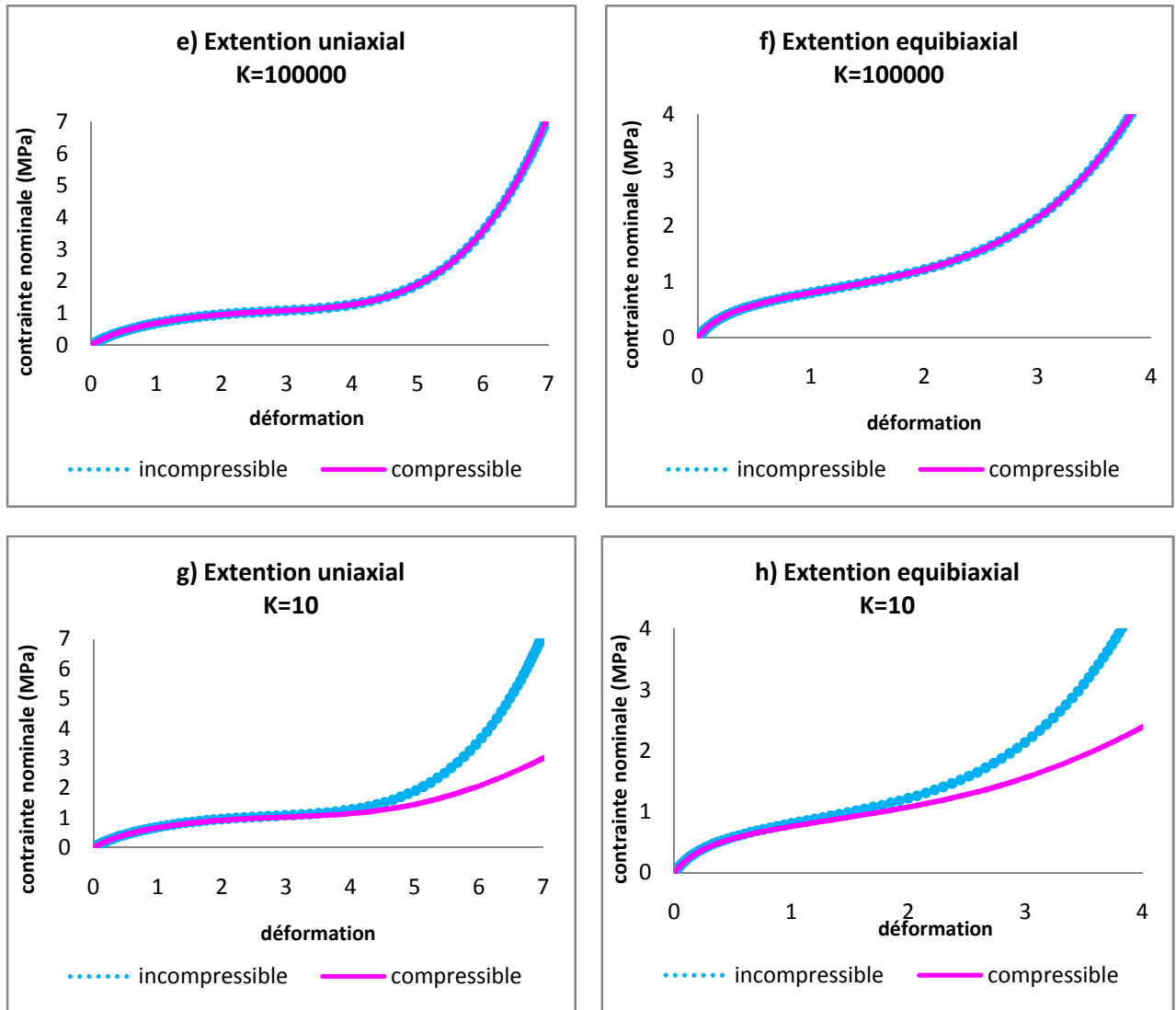


Figure III.4 : Influence du facteur de compressibilité sur le comportement des élastomères en traction uniaxiale et en traction equibiaxiale. (Suite)

Comme prévu, On constate que quand le facteur de compressibilité augmente, le comportement des élastomères est incompressible. Par contre, quand ce dernier diminue, le matériau devient compressible et on observe clairement que pour le même taux de déformation la contrainte de Piola kirchoff (PK1) diminue.

Pour conclure, on dira que plus le facteur de compressibilité K augmente plus le matériau est peu compressible, et si $K = \infty$ le matériau est dit incompressible.

- **Prise en compte de l'effet Mullins**

L'effet Mullins est pris en compte en utilisant le modèle proposé par Ogden et Roxburgh.

L'évolution de la contrainte nominale en fonction de la déformation, pour des valeurs de $C_{10} = 0.23$ MPa, $C_{01} = 0.008$ MPa, $C_{20} = -0.004$ MPa, $C_{30} = 0.00007$ MPa, est donnée sur la figure III.5.

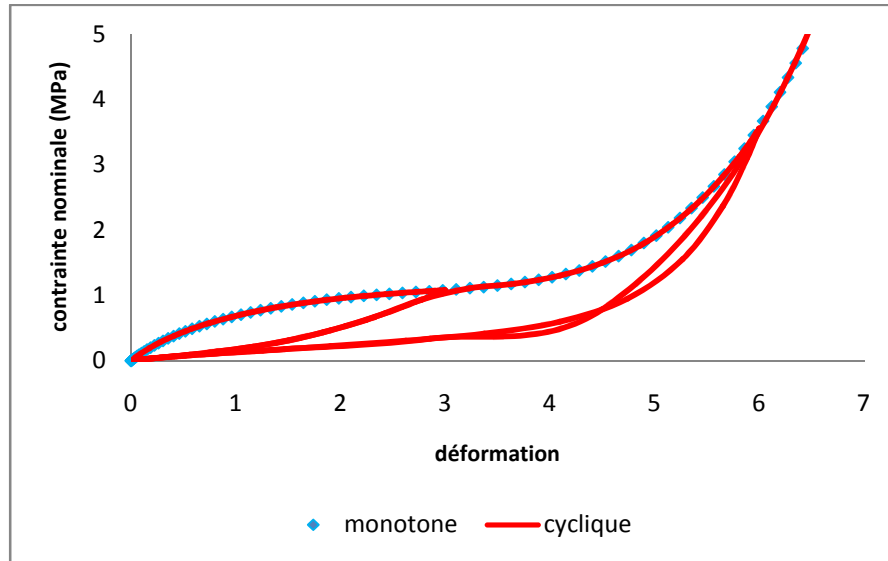


Figure III.5 : Représentation de l'effet Mullins.

On observe que le chemin suivi par la réponse du matériau dépend du niveau maximum de déformation subi par le matériau au cours des précédents chargements. On déformant le matériau à un niveau supérieur au niveau maximum atteint précédemment au cours de sa vie, la courbe de réponse rejoint la courbe de première charge et tout se passe comme si l'histoire du matériau était effacée. L'éprouvette est alors moins rigide jusqu'à ce que la déformation approche la déformation maximale précédente.

D'un point de vue microstructural, l'effet Mullins est attribué à la rupture progressive des nœuds du réseau macromoléculaire du caoutchouc, ce qui affaiblit la réponse mécanique aux grandes déformations et dissipe de l'énergie.

2) Le modèle de Haines-Wilson

Pour pouvoir définir le domaine d'utilisation du modèle de Haines-Wilson et le valider, nous comparons ces résultats obtenus aux résultats expérimentaux et cela en considérant le matériau incompressible. L'évolution de la contrainte nominale en fonction de la déformation, pour des valeurs de $C_{10} = 0.173$ MPa, $C_{01} = 6.68 \cdot 10^{-3}$ MPa, $C_{11} = -1.18 \cdot 10^{-4}$ MPa, $C_{20} = -1.19 \cdot 10^{-3}$ MPa,

$C_{02} = 0.23 \cdot 10^{-5}$ MPa, $C_{30} = 3.85 \cdot 10^{-5}$ MPa, est donnée sur la figure III.6, dans les cas d'un essai de traction uniaxiale et equibiaxial.

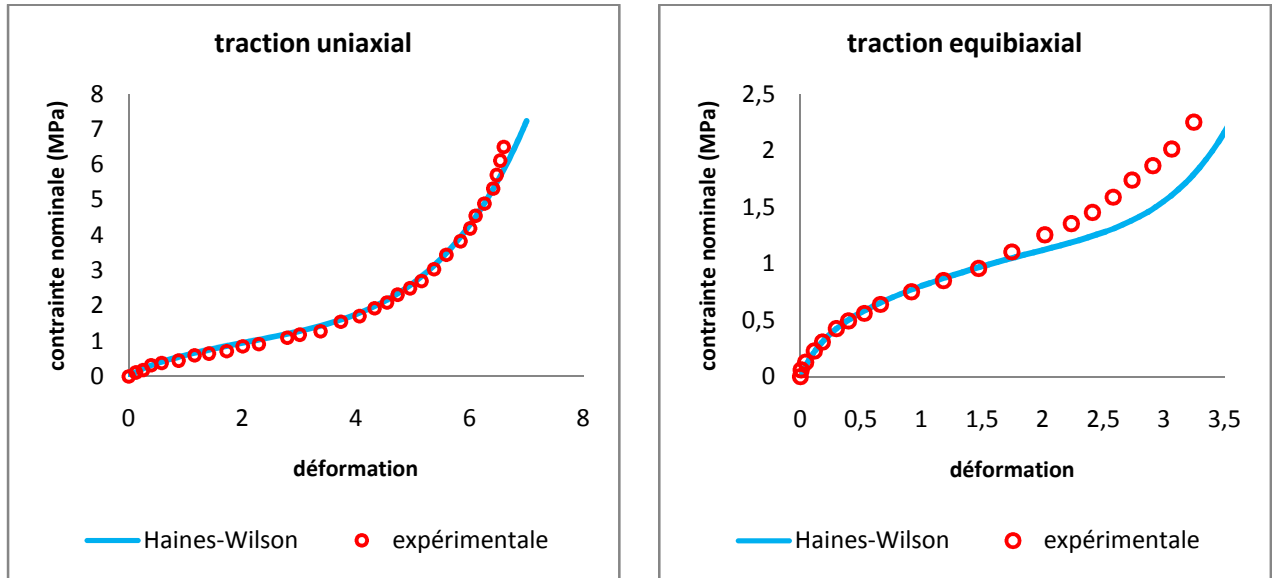


Figure III.6 : *comparaison des prédictions numériques du modèle de Haines-Wilson avec les résultats expérimentaux de Treloar.*

Le modèle Haines-Wilson reproduit parfaitement le comportement des élastomères en déformations modérées, cependant il prédit que partiellement le raidissement final en extension equibiaxial.

3) Le Modèle de Harth-Smith

Pour pouvoir définir le domaine d'utilisation du modèle de Harth-Smith, nous choisissons la formulation sans changement de volume puis nous comparons ces prédictions numériques obtenues aux résultats de l'expérience. L'évolution de la contrainte nominale en fonction de la déformation dans les cas d'un essai de traction uniaxiale et equibiaxial, est donnée sur la figure III.7.

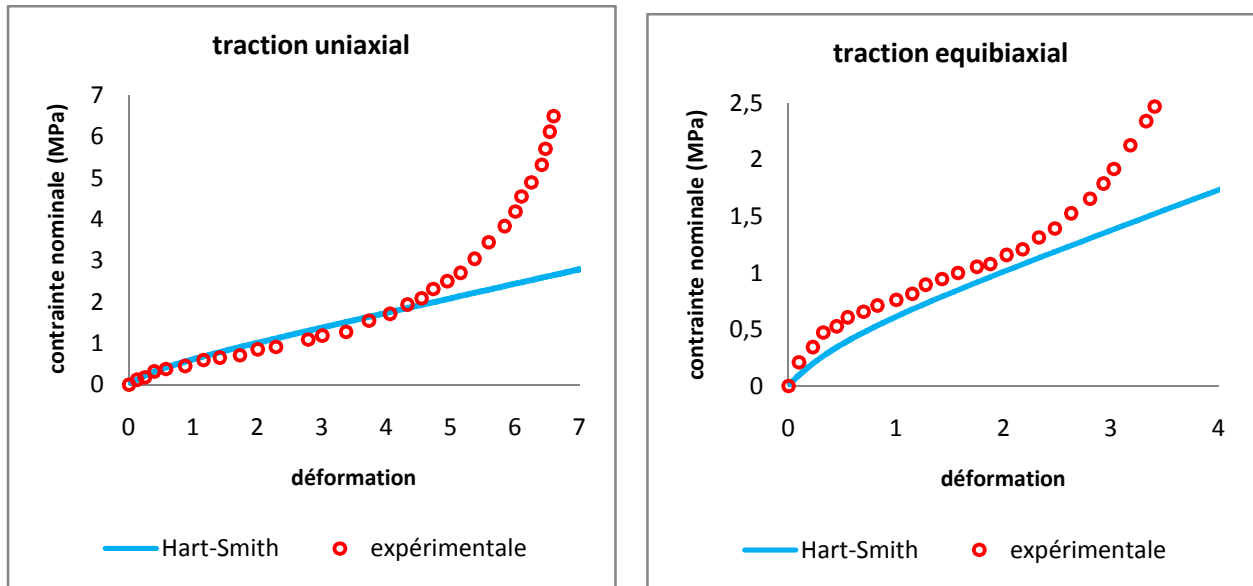


Figure III.7: comparaison des prédictions numérique du modèle de Harth-Smith de paramètres $G = 0.175 \text{ MPa}$, $k1 = 2.86 \cdot 10^{-4}$, $k2 = 0.311$, avec les résultats expérimentaux de Treloar.

On voit que ce modèle offre de bons résultats aux petites déformations contrairement aux grandes déformations. On notera cependant que ce modèle ne permet pas de prendre en compte le raidissement final de la courbe de traction, et n'est applicable que dans une plage de déformation allant de 0 à 400% environ.

4) Le Modèle de Gent

Pour pouvoir définir le domaine d'utilisation du modèle Gent nous l'utilisons sans tenir compte du changement de volume puis nous comparons les résultats obtenus aux résultats de Treloar. L'évolution de la contrainte nominale en fonction de la déformation, pour des valeurs de $E = 0.978 \text{ MPa}$, $I_m = 96.4$, est donnée sur la figure III.8 et cela dans les cas d'un essai de traction uniaxiale et equibiaxiale.

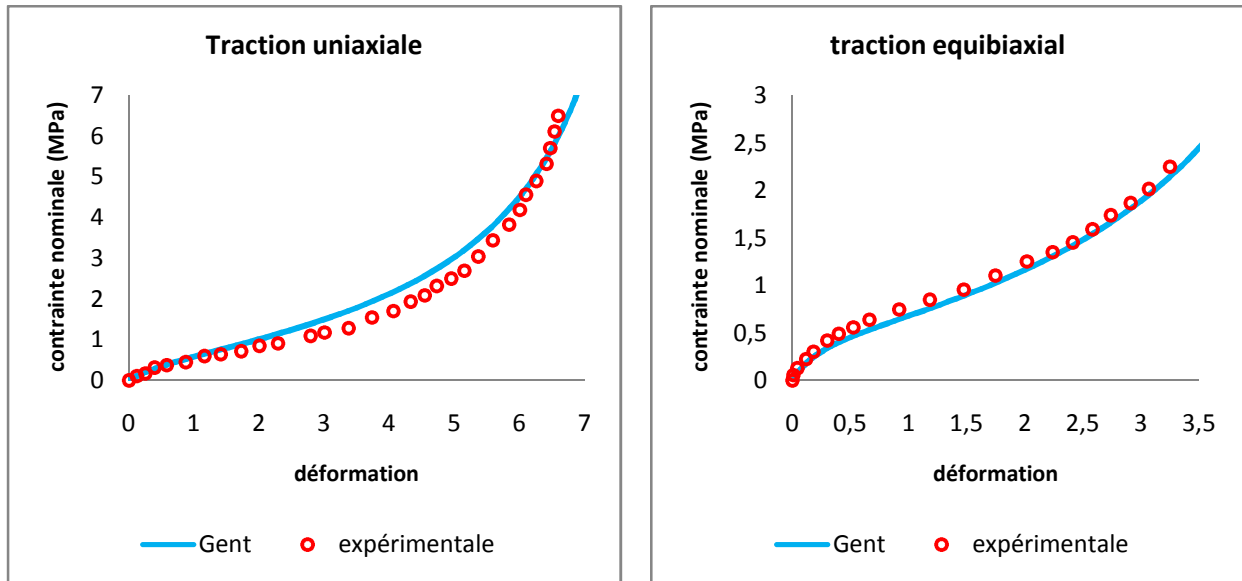


Figure III.8: comparaison des prédictions numériques du modèle de Gent avec les résultats expérimentaux de Treloar.

Les prédictions numérique obtenue par le modèle de Gent reproduisent finement le comportement des élastomères en tout types déformations. Cependant, le raidissement final apparait nettement dans les résultats ce qui confère au modèle un domaine d'utilisation plus large.

5) Le Modèle tube

Pour pouvoir définir le domaine d'emploi du modèle tube nous l'utilisons dans le cas incompressible puis nous comparons les résultats obtenus aux résultats de Treloar. L'évolution de la contrainte nominale en fonction de la déformation, pour des valeurs de $G_c = 0.35$ MPa, $G_e = 0.230$ MPa, $\beta = 3.4$, est donnée sur la figure III.9 et cela dans les cas d'un essai de traction uniaxiale et equibiaxial.

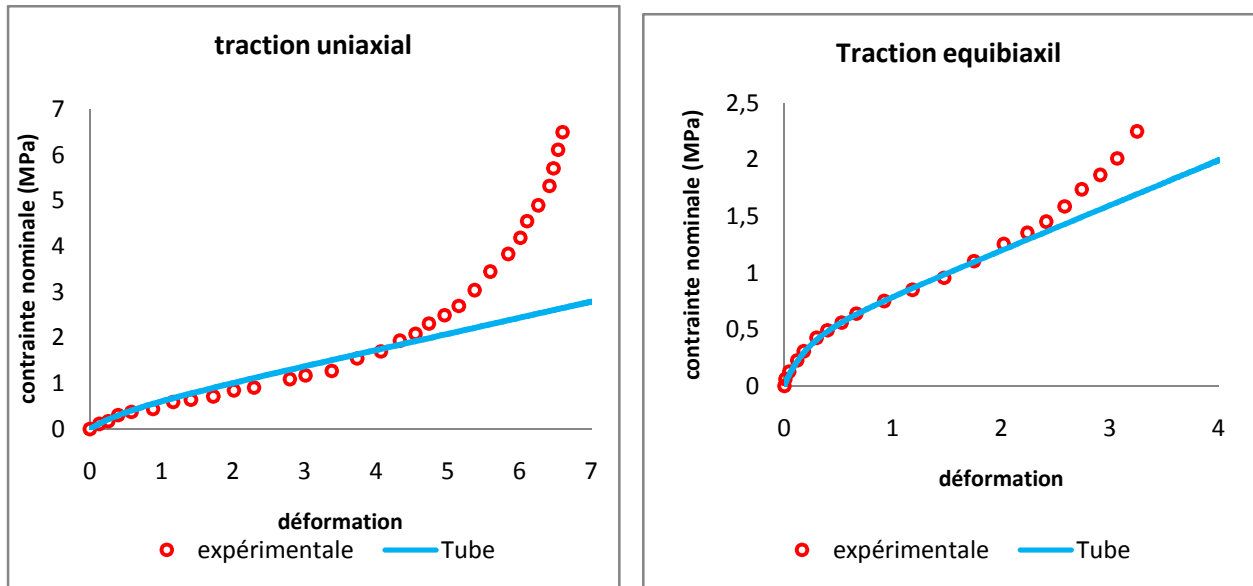


Figure III.9 : *comparaison prédictions numérique du modèle de tube avec les résultats expérimentaux de Treloar.*

Il est clair que le modèle Tube reproduit correctement le comportement des élastomères en petites et moyennes déformations, cependant il ne permet pas de reproduire fidèlement le raidissement final. On notera cependant que ce modèle n'est applicable que dans une plage de déformation allant de 0 à 400% environ.

6) Le modèle tube étendu

Les prédictions numérique du modèle tube étendu sont comparées au résultats expérimentales et cela tout on négligeant le changement de volume. La figure III.9 donne l'évolution de la contrainte nominale en fonction de la déformation, pour des valeurs de $G_c = 0.25$ MPa; $G_e = 0.12$ MPa, $\beta = 0.178$, $\delta = 0.1$, dans les cas d'un essai de traction uniaxiale et equibiaxial.

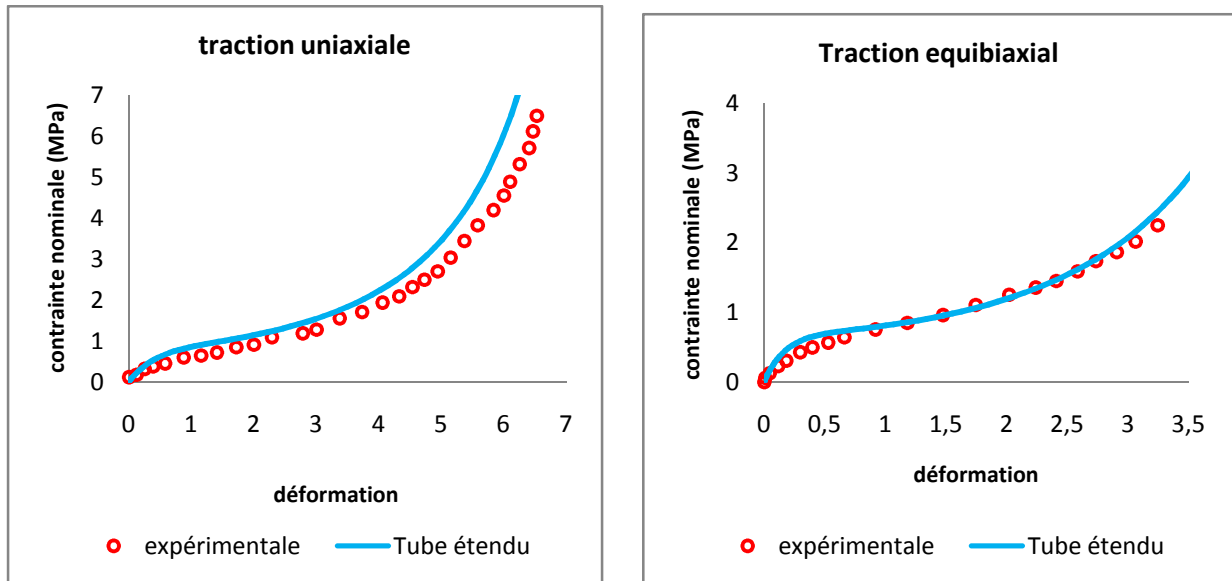


Figure III.10: comparaison des prédictions numériques du modèle de tube étendu avec les résultats expérimentaux de Treloar.

Le modèle Tube étendu reproduit parfaitement le comportement des élastomères en déformations modérées, on obtient même le raidissement final en large déformation malgré le léger décalage observé à 500% de déformation.

III.6 Conclusion sur ces modèles de comportement

Nous pouvons constater que parmi les modèles étudiés dans ce mémoire, le modèle permettant de reproduire les essais dans le domaine de déformations le plus large est le modèle de Gent. En effet, ce modèle phénoménologique décrit correctement l'ensemble des modes de déformation considérés dans cette étude.

Néanmoins, les travaux réalisés sur des bases statistiques de réseau de chaînes permettent de cerner de mieux en mieux les phénomènes pouvant entrer en jeu au cours de la déformation du réseau moléculaire. D'autre part, le modèle tube d'Heinrich met en évidence la nécessité de prendre en compte les contraintes de réseau dues à l'enchevêtrement des chaînes prédominantes en petites déformations et dans le domaine des déformations modérées.

III.7 Extension du modèle Tube étendu au vieillissement

Le vieillissement accéléré des élastomères se manifeste par une perte de masse. De nombreux modèles ont été proposés dans la littérature pour décrire physiquement l'évolution de l'endommagement et ses effets sur le comportement mécanique. Dans ce travail, la modélisation du

vieillessement est introduite en prenant en considération le changement de masse sur les propriétés matériaux.

La variable de dégradation "D" est définie comme le rapport de la perte de masse initiale :

$$D = \frac{\Delta m}{m_0} = 1 - \frac{m}{m_0}$$

Dans le cas du modèle tube étendu, nous prenons en compte le vieillissement des élastomères en introduisant l'effet de la perte de masse sur les propriétés mécaniques du matériau :

$$G_c = G_c^0 \exp(1 - D)^\alpha$$

$$G_e = G_e^0 \exp(1 - D)^\lambda$$

G_c, G_e : Paramètres matériau correspondants à l'état vieilli. G_c^0, G_e^0 : correspondent à l'état vierge (non vieilli).

III.7.1 application du modèle vieilli

Le modèle tube étendu décrit dans le paragraphe précédent est appliqué pour la simulation d'un essai de traction suivant la norme ASTM D412, ses prédictions sont comparées aux résultats expérimentaux réalisés par MOSTAFA et al. [MABS09] Nous décrivons dans ce qui suit la démarche suivie.

a) Les résultats de MOSTAFA

Dans cette partie, le matériau utilisé est le caoutchouc nitrile (acrylonitrile butadiène, NBR). Il est considéré actuellement comme le matériau le plus adéquat pour les applications d'étanchéité. Il constitue, pour cette raison, le sujet de nombreuses études de la part des laboratoires de recherche de nombreux secteurs industriels: automobile, transport de gaz, aérospatial...

La figure III.11 et III.12 représentent l'évolution de la contrainte nominale dans la direction d'extension en fonction de la déformation, et cela pour le caoutchouc nitrile chargé respectivement à 20% et à 70% de noir de carbone.

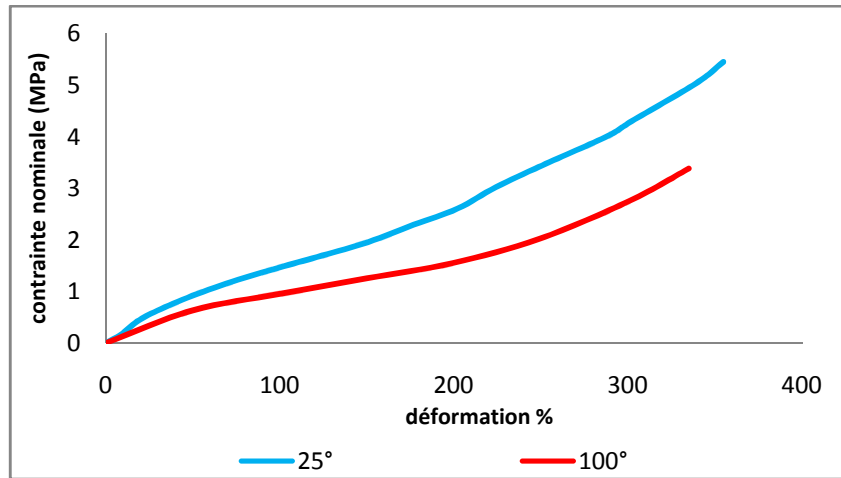


Figure III.11 : l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation du NBR vulcanisé chargé avec 20% de noir de carbone.

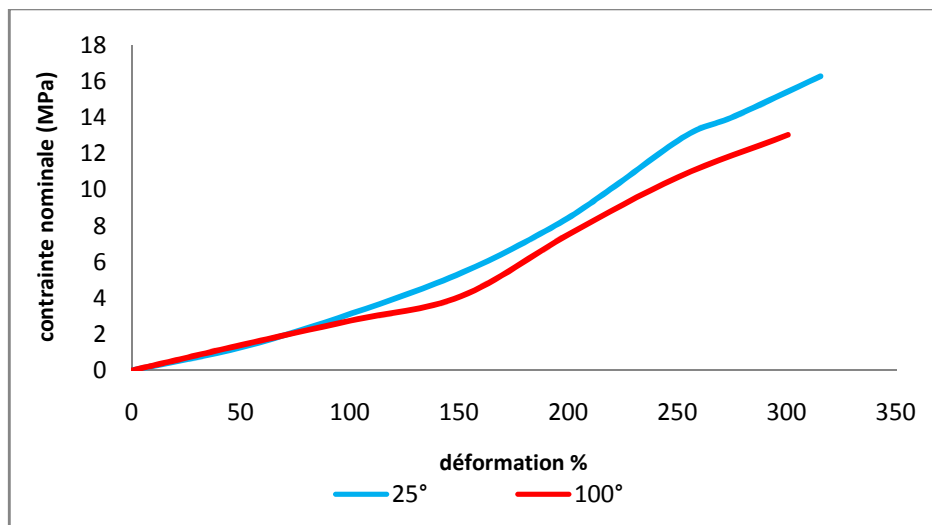


Figure III.12 : l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation du NBR vulcanisé chargé avec 70% de noir de carbone.

b) Condition aux limites

Les conditions aux limites sont représentées sur la figure III.13. L'éprouvette est fixée sur inférieure tandis que la face supérieure subit un déplacement imposé.

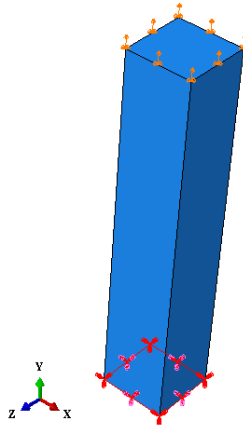


Figure III.13 : les conditions aux limites de simulation.

c) Type de maillage

L'éprouvette est maillée avec des éléments cubiques en formulation hybride (C3D8H). La figure III.14 représente ce maillage.

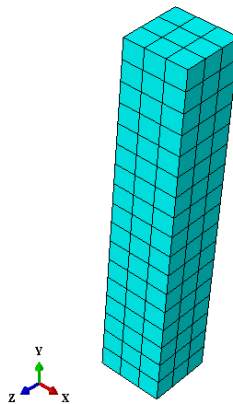


Figure III.14 : le maillage de la structure (C3D8H).

d) Identification des paramètres du modèle tube étendu

Afin de pouvoir appliquer le modèle Tube étendu au Nitrile-butadiène (NBR) renforcé avec du noir de carbone avec des taux de 20% et à 70%, une procédure d'identification s'impose. Cette dernière est réalisée en comparant les résultats du matériau non vieilli avec les prédictions du modèle.

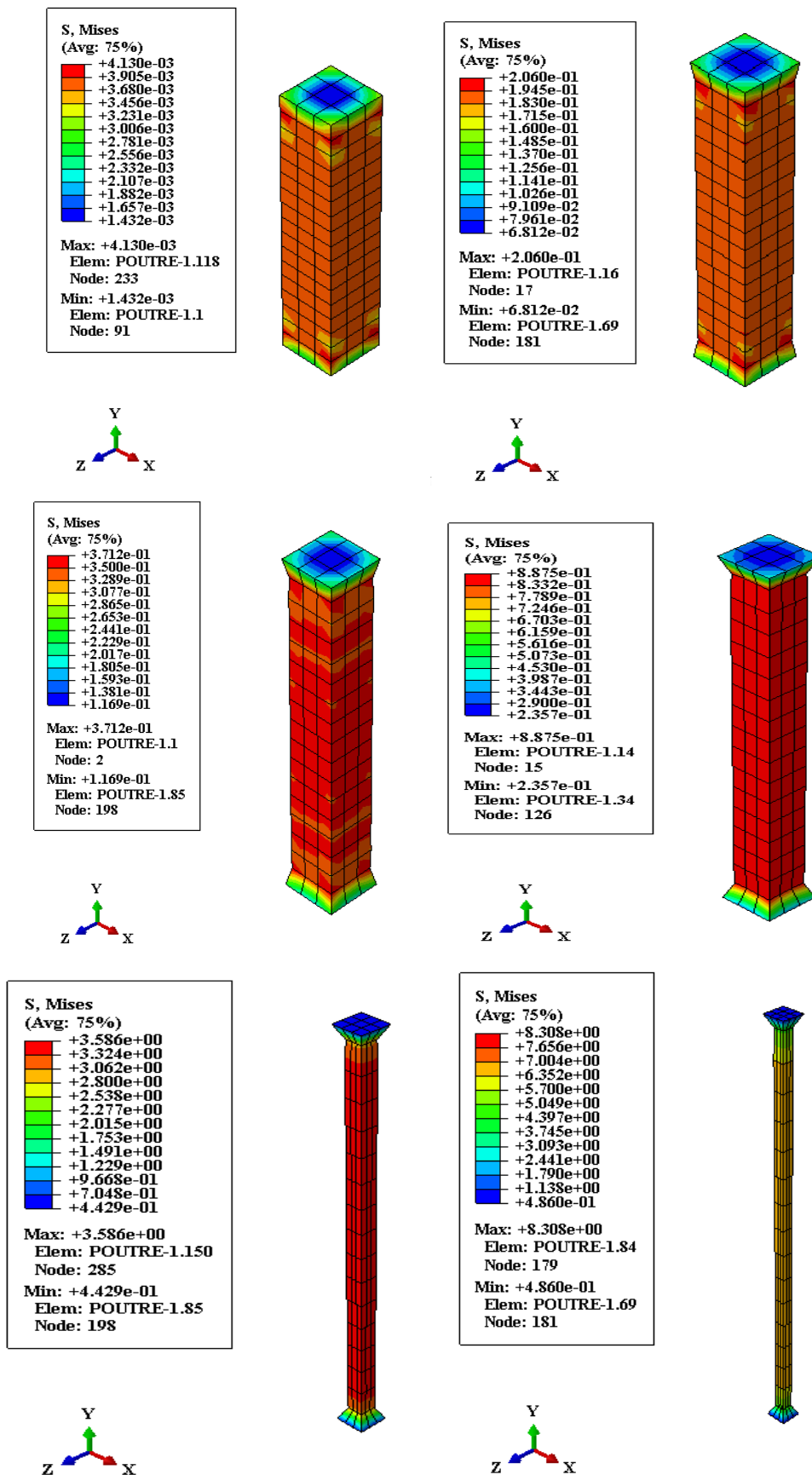


Figure III.15 : les résultats numériques obtenu avec le modèle tube étendu non vieilli.

La figure III.16 représente l'évolution de la contrainte nominale en fonction de la déformation, et cela dans le cas d'un essai de traction uniaxiale.

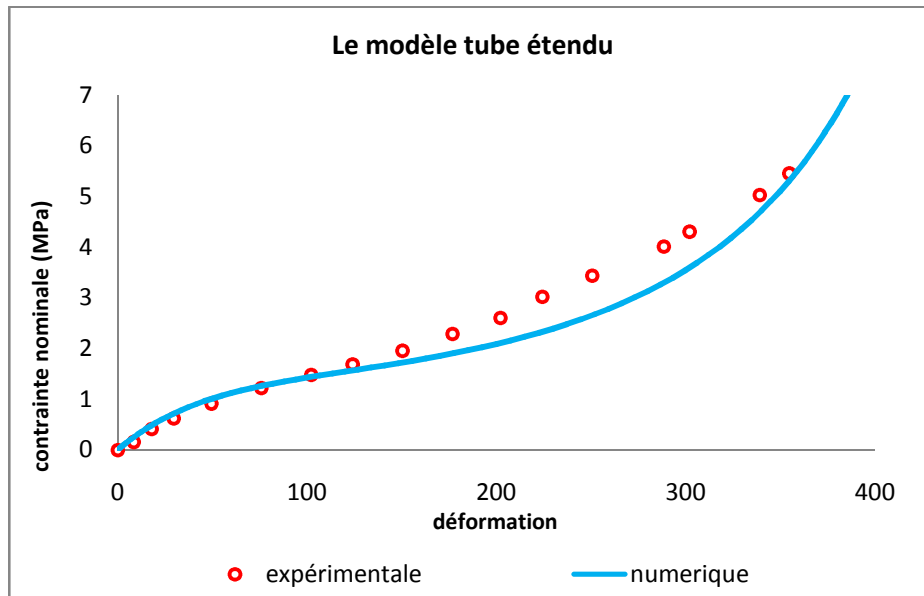


Figure III.16: NBR non vieilli à 20% de CB.

Les paramètres optimaux obtenus résumés dans le tableau suivants : Après identification nous avons abouti aux paramètres suivants :

| Gc (MPa) | Ge (MPa) | β | δ |
|----------|----------|---------|----------|
| 0.4 | 0.2 | 0.175 | 0.15 |

Le modèle identifié est appliqué Pour étudier l'influence du vieillissement thermique accéléré sur le comportement du NBR. La pertinence du modèle est vérifiée en comparant aux résultats expérimentaux. La figure III.17 représente l'évolution de la contrainte nominale en fonction de la déformation.

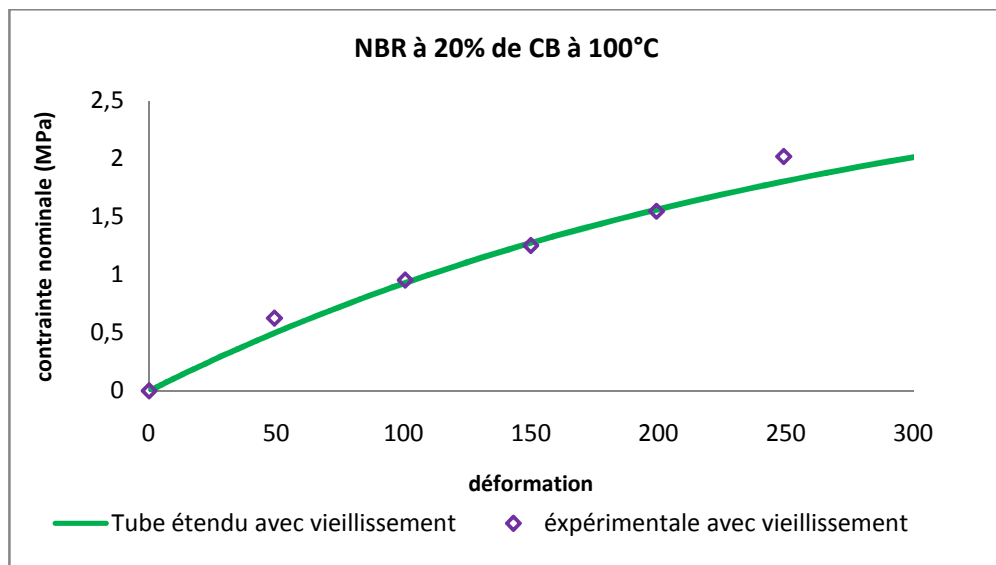


Figure III.17 : Comparaison des résultats expérimentaux du modèle vieilli.

La figure III.18 englobe tous les résultats précédents pour le cas vieilli et vieilli :

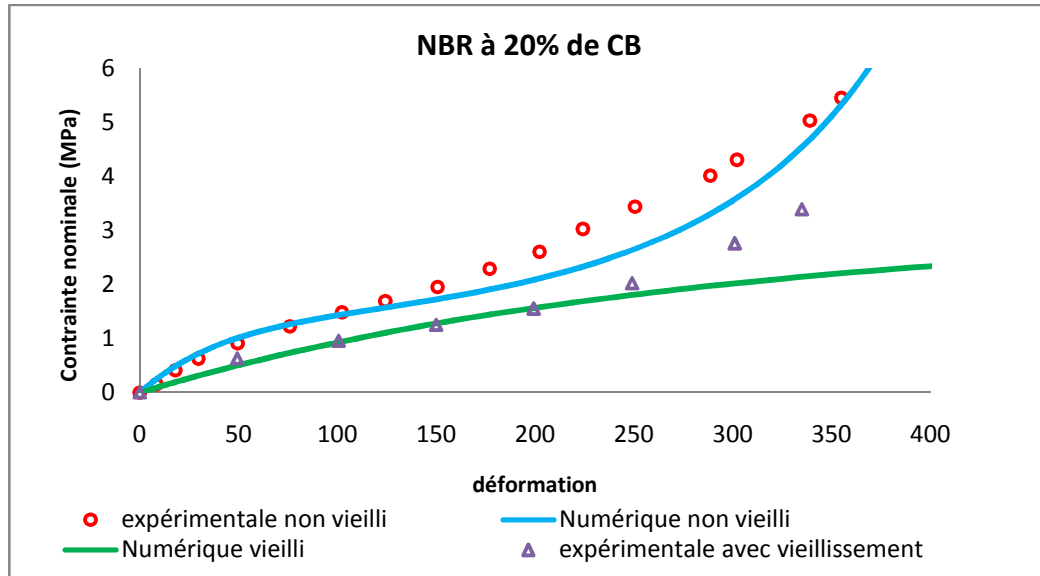


Figure III.18 : L'influence du vieillissement sur le comportement du NBR à 20% de noir de carbone.

- *NBR renforcé à 70% de noir de carbone (CB)*

L'évolution de la contrainte nominale en fonction de la déformation est représentée sur la figure suivante :

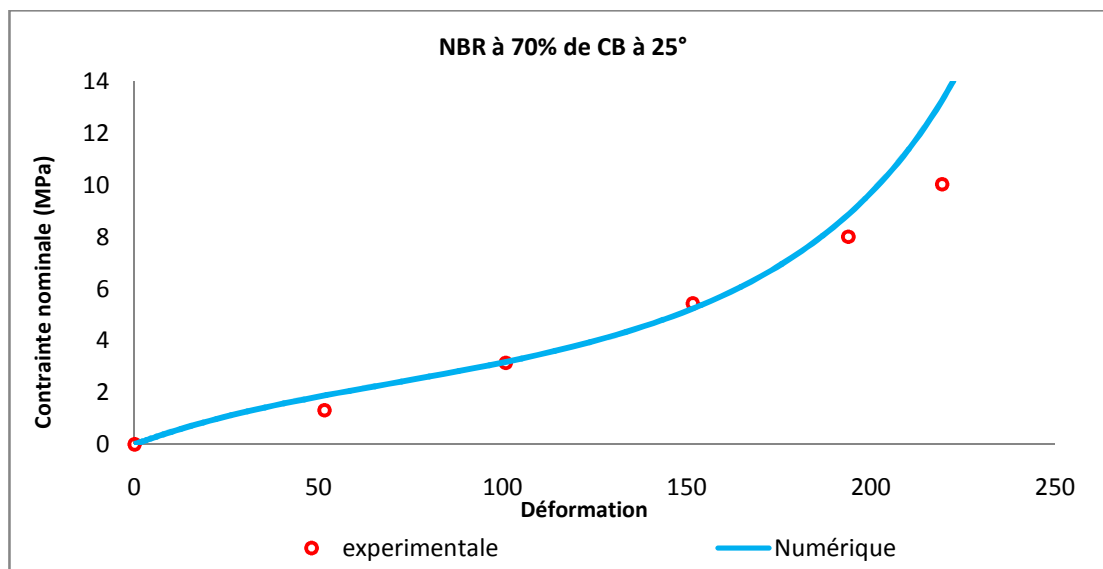


Figure III.19: *NBR non vieilli renforcé à 70% de CB.*

Dans le cas du NBR chargé à 70% de noir de carbone, nous avons obtenu les paramètres qui sont résumés sur le tableau ci-dessous :

| G_c (MPa) | G_e (MPa) | β | δ |
|-------------|-------------|---------|----------|
| 1.2 | 0.25 | 0.2 | 0.25 |

La pertinence du modèle est vérifiée en comparant aux résultats expérimentaux. La figure III.20 représente l'évolution de la contrainte nominale en fonction de la déformation.

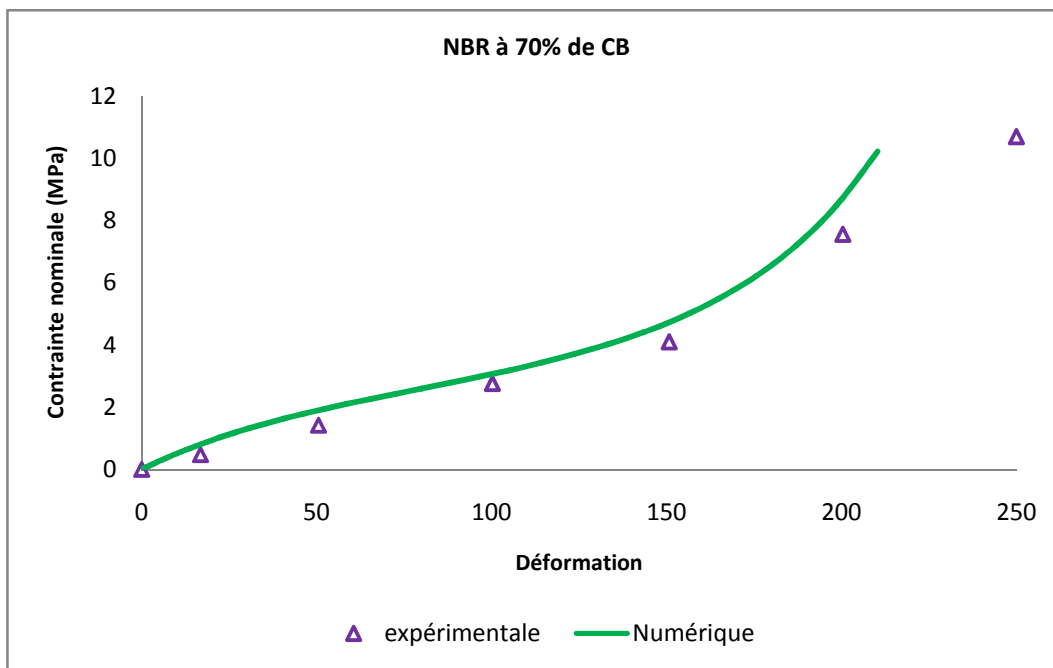


Figure III.20 : comparaison des résultats expérimentaux du modèle tube étendu pour le vieilli.

La figure III.21 englobe tous les résultats précédents pour le cas vieilli et non vieilli :

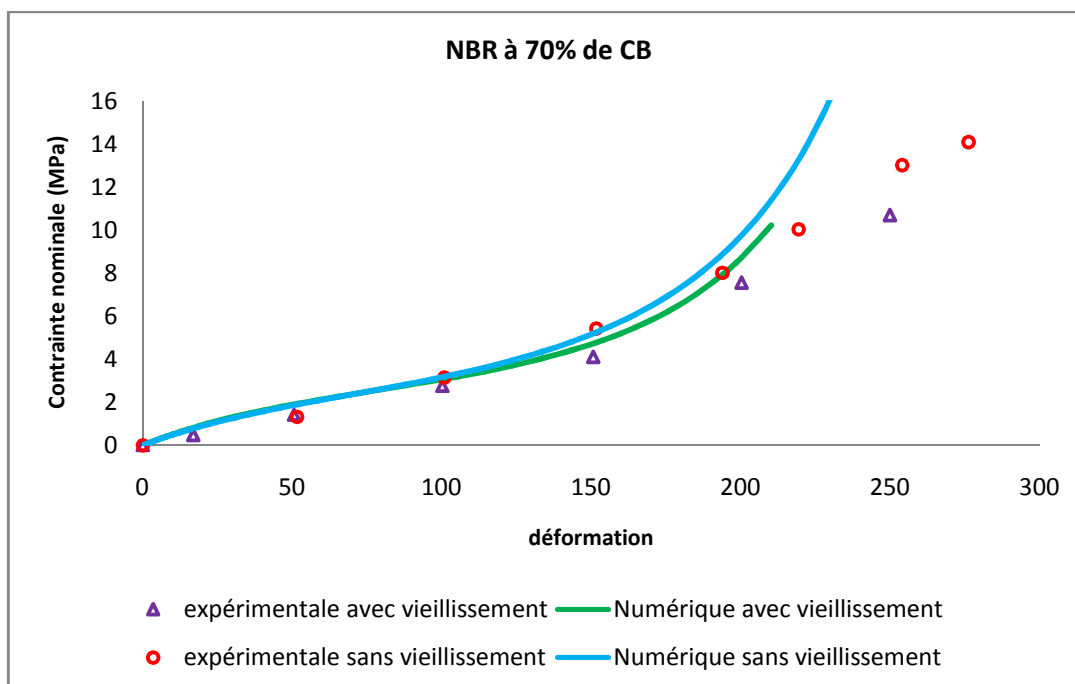


Figure III.21 : l'influence du vieillissement sur le comportement du NBR à 70% de noir de carbone.

La figure III.22 représente l'évolution de la contrainte nominale en fonction de déformation pour le matériau NBR vieilli, renforcé à 20% et 70% de noir de carbone.

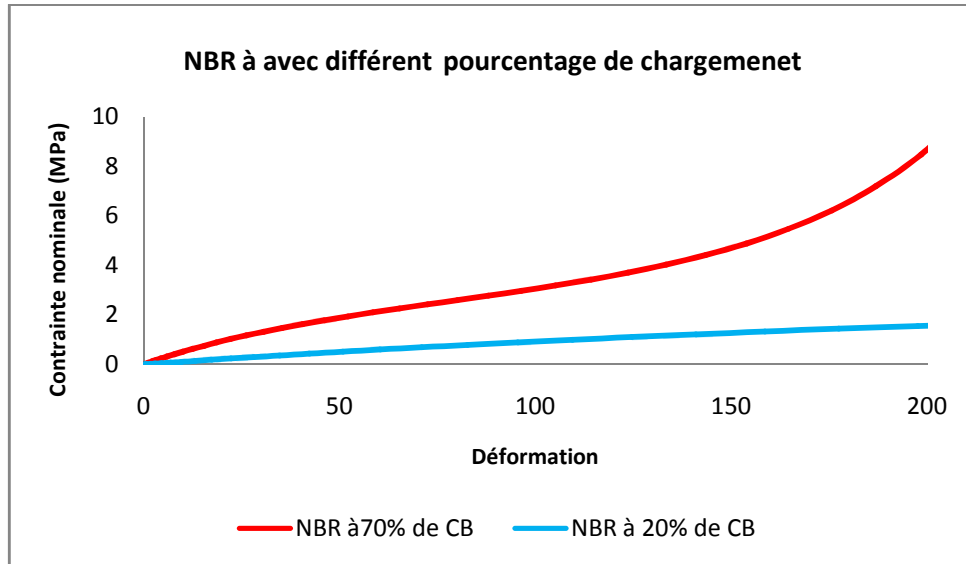


Figure III.22 : influence du vieillissement sur les élastomères chargés.

Dans l'état de grandes déformations, l'augmentation du module élastique avec la fraction volumique de charge est beaucoup plus importante que dans le domaine de faibles déformations.

III.7 Introduction de l'effet thermique :

Pour mettre en évidence les effets thermiques dans le comportement hyperélastiques des élastomères nous proposons de développer un modèle thermo-hyperélastique permettant de prendre en compte les effets de la température dans le comportement hyperélastiques des élastomères.

Le modèle choisie est celui de Gent, l'expression de son énergie de déformation s'écrit sous la forme suivante :

$$W = -\frac{E}{6}(I_m - 3)\ln\left[1 - \frac{I_1 - 3}{I_m - 3}\right]$$

Pour prendre en compte l'effet de la température dans le modèle, nous avons adopté pour les deux nouveaux paramètres E et I_m qui s'écrivent comme suit :

$$E = E_0[1 - \alpha(T - T_0)^a]$$

$$I_m = I_{m_0}[1 - \alpha(T - T_0)^b]$$

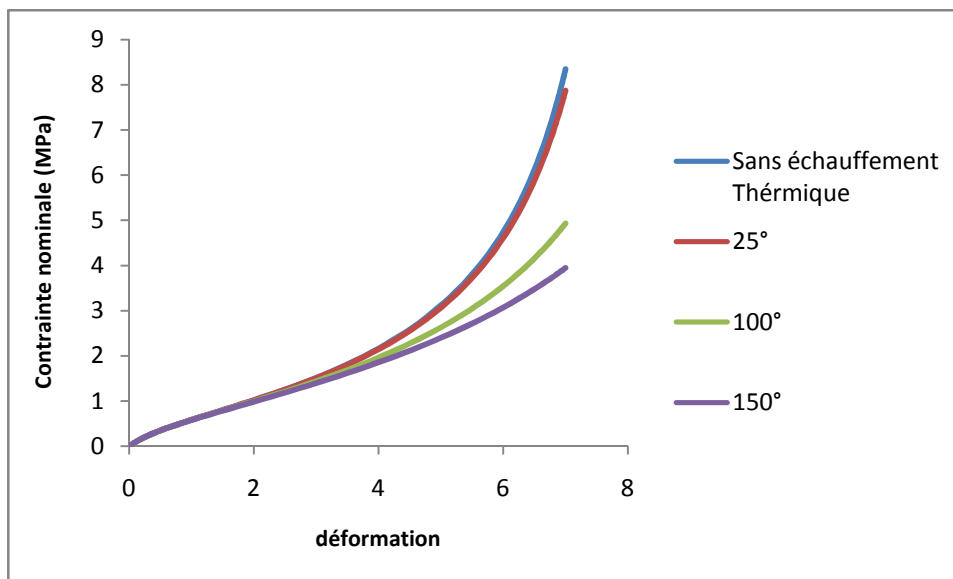


Figure III.23: *effet de la température sur le comportement des élastomères en traction uniaxiale.*

Comme le montre la figure ci-dessus, le modèle de Gent doté des effets de la température qui a subi un adoucissement thermique, se situe sur la courbe numérique du modèle de Gent sans effet de température, cela prouve que les élastomères sous sollicitation mécanique avec élevant de la température présente des déformations importante et cela même pour des petites sollicitations.

Conclusion générale

Conclusions et perspectives

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre général de l'étude des matériaux élastomères. Nous nous sommes intéressés aux modèles de comportement hyperélastiques obtenus à partir de différentes approches. La comparaison des prédictions numériques de ces modèles nous ont permis d'établir le domaine d'application de chacune de ces modèles. Le nombre de coefficients nécessaire pour l'identification de ces lois a aussi été un paramètre important dans notre choix. En effet, il a été clairement démontré qu'il existe plusieurs jeux de coefficients vérifiant les résultats expérimentaux dans le cas d'un chargement particulier. Comme conclusion de cette étude nous pouvons conclure que le modèle de Biderman décrit correctement la réponse dans le cas de petites déformations alors qu'en grandes déformation un léger décalage est observé. Cependant, le nombre de coefficients (5) nécessaire pour l'identification est trop grand ce qui limite l'intervalle de son utilisation. En effet, le comportement n'est pas stable pour toutes les valeurs possibles que peuvent prendre ses paramètres. Le modèle proposé par Haines-Wilson reproduit parfaitement le comportement des élastomères en déformations modérées, néanmoins il prédit que partiellement le raidissement final en extension equibiaxial. Le modèle de Hart-Smith offre de bons résultats aux petites déformations contrairement aux grandes déformations. Toutefois, il ne permet pas de prendre en compte le raidissement final de la courbe de traction, et n'est applicable que dans une plage de déformation allant de 0 à 400% environ. Les prédictions numériques obtenues par le modèle de Gent reproduisent parfaitement le comportement des élastomères en tous types déformations. Cependant, le raidissement final apparait nettement dans les résultats ce qui confère au modèle un domaine d'utilisation plus large. Les deux paramètres matériaux de ce modèle possédant un sens physique, leurs détermination est plus facile. Le modèle Tube abouti aux mêmes résultats que celui de Hart-Smith, car il définit timidement le raidissement final ce qui limite le domaine de son utilisation. Améliorant les résultats du modèle précédent (tube), le modèle Tube étendu approche mieux les résultats expérimentaux dans des domaines de chargements plus larges.

La présente étude est complétée par deux propositions d'extensions afin de prendre en compte le vieillissement accéléré et l'échauffement thermique. Dans le cas du vieillissement, l'extension consiste à inclure l'effet de la perte de masse dans les coefficients matériau. Les comparaisons avec les résultats expérimentaux ont été concluantes. L'échauffement thermique est introduit dans le modèle Gent en décrivant l'adoucissement de la contrainte lorsque la température évolue ainsi que l'augmentation de l'élongation à la rupture à des températures élevées.

Les résultats présentés dans ce mémoire permettent d'envisager des extensions et des améliorations à nos travaux :

- La comparaison des prédictions numériques des modèles avec les résultats expérimentaux nous a permis d'établir l'influence des paramètres matériaux et de confirmer l'interprétation physique de certains paramètres apparaissant dans l'expression des modèles phénoménologiques. Une procédure d'identification couplant les résultats expérimentaux obtenus pour plusieurs modes de déformation (cisaillement pur, glissement, extension biaxiale...) améliorerait la précision des paramètres du modèle.

- Ces lois de comportement sont implémentées dans ABAQUS sous la forme d'un programme Fortran qui suppose l'isotropie. Malheureusement cette hypothèse peut entraîner des erreurs de modélisation non négligeables pour certains matériaux hyperélastiques. Par conséquent il est indispensable d'utiliser des lois incorporant l'anisotropie.

- Les modèles hyperélastiques présentés dans ce manuscrit ne rendent pas compte de la sensibilité des matériaux à la vitesse de chargement, d'un caractère dissipatif ou d'un éventuel décalage de la réponse par rapport à la sollicitation. Ces phénomènes relèvent du caractère viscoélastique des élastomères. En effet, pour améliorer ces résultats, nous devons inclure les effets dissipatifs des élastomères.

- Une démarche d'identification par approche inverse traitant les résultats expérimentaux de plusieurs chargements simples en même temps est indispensable. Une voie intéressante à exploiter serait de coupler la perturbation de certains paramètres aux résultats de structures complètes lors de l'identification.

Bibliographie

Références bibliographiques

- [Ben06] Amine BENNANI. Elaboration, comportement et durée de vie en fatigue du caoutchouc naturel renforcé de silice, Thèse, Ecole des Mines de Paris (2006).
- [Bou07] Vanessa BOUCHART. *Etude expérimentale et modélisation micromécanique du comportement d'endommagement des élastomères*, Thèse, Université des sciences et Technologies de Lille (2007).
- [Bou06] Adnane BOUKAMEL. Modélisations mécaniques et numériques des matériaux et structures en élastomères, Thèse, Université de la méditerranée (AIX-MARSEILLE II) (2006).
- [Cab11] Rodica CABORGAN. Contribution à l'analyse expérimentale du comportement thermomécanique du caoutchouc naturel, Thèse, Université Montpellier 2 – Sciences et Techniques du Languedoc – (2011).
- [DO04] A. DORFMANN & R.W. OGDEN. *A constitutive model for Mullins effect with permanent set in particle-reinforced rubber*. International Journal of Solids Structures, vol. 41:p. 1855-1878, 2004.
- [Fer11] Rabah FERHOUM. Etude expérimentale et modélisation numérique du comportement mécanique du PEHD à l'état vierge et après vieillissement thermique, Université Mouloud Mammeri de TIZI-OUZOU (2011).
- [Kos] Matthieu KOSCHER. Etude de l'extrusion monovis de mélanges d'élastomères approche expérimentale et simulation numérique, Thèse, L'école nationale supérieure des mines de paris (2003).
- [GS91] S. Govindjee et J. Simo. A micro-mechanically based continuum damage model for carbon black-filled rubbers incorporating mullin's effect. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(1) :87–112, 1991.
- [GS92] S. Govindjee et J. Simo. Mullin's effect and the strain amplitude dependence of the storage modulus. *International Journal of Solids and Structures*, 29(14/15): 1737– 1751, 1992.
- [GM05] S. GOKTEPE et C. MIEHE. A micro-macro approach to rubber-like materials. Part III: The micro-sphere model of anisotropic mullin-type damage. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53:p. 2259-2283, 2005.
- [Gra08] Julie Grandcoin. Contribution à la modélisation du comportement dissipatif des élastomères chargés : D'une modélisation micro-physiquement motivée vers la caractérisation de la fatigue, Thèse, Université de la méditerranée (AIX-MARSEILLE II) (2008).
- [GHW93] J.N. GORCE, J.W. HELLGETH, and T.C. WARD. Mechanical hysteresis of a polyether polyurethane thermoplastic elastomer. *Polymer Engineering and Science*, vol. 33, No. 18, pages 1170–1176, September 1993.

[MABS09] A. Mostafa *, A. Abouel-Kasem, M.R. Bayoumi, M.G. El-Sebaie, “The influence of CB loading on thermal aging resistance of SBR and NBR rubber compounds under different aging temperature”, journal of Materials and Design, Vol. 30, pp. 791–795, 2009.

[Mar04] Gilles MARCKMANN. Contribution a l'étude des élastomères et des membranes soufflées, Thèse, Ecole Centrale de Nantes et l'Université de Nantes (2004).

[Mor00] Cécile MOREAU. Etude expérimentale et numérique de l'hyperélasticité avec prise en compte de la compressibilité, Thèse, Université de Bretagne Sud (2000).

[Lej06] Stéphane LEJEUNES. “Modélisation de structures lamifiées élastomère - métal à l'aide d'une méthode de réduction de modèles”. Thèse, université de la méditerranée (Aix-Marseille II), 2006.

[Rao10] Ida RAOULT. Structures élastomères sous chargement cyclique ; Comportement - Fatigue - Durée de vie, Thèse, L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (2010).

[BL99] F. Bollaert- A.Lemasçon, « Analyse de défaillance pièces plastiques, élastomères ou composites ; Guide pratique », CETIM, (1999).

[Gac07] GACEM Hatem. Comportement visco-hyperélastique des élastomères - Viscoélasticité non linéaire, Application aux Multicouches -, Thèse, L'Université PARIS VI (2007).

[Ver95] VERDU, J. "*Elasticité caoutchoutique*". In: *Introduction à la mécanique des polymères*. C. G'Sell et J. M. Haudin. Vandoeuvre-lès-Nancy: Institut national Polytechnique de Lorraine, (1995), pp. 191.

[Aba00] Abaqus standard, version 6.1: Theory manual et Standard user's manual, 2000.

[Sim87] J. SIMO. *On a fully three dimensional finite-strain viscoelastic damage model: formulation computational aspects*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 60:p. 153-173, 1987.

[Sim98] J. SIMO. *Numerical analysis and simulation of plasticity*. Handbook of Numerical Analysis, vol. 8:p. 183-499, 1998.

[Mie95] C. MIEHE. *Discontinuous and continuous damage evolution in Ogden-type large-strain elastic materials*. European Journal of Mechanics, vol. 14(5):p. 697-720, 1995.

[MK00] C. MIEHE et J. KECK. *Superimposed finite elastic-viscoelastic-plastoelastic stress response with damage in filled rubbery polymers. experiments, modeling and algorithmic implementation*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 48:p. 323-365, 2000.

[OR99a] R.W. OGDEN et D.G. ROXBURGH. *An energy-based model of the Mullins effect in filled rubber*. Proc. R. Soc. London, vol. 455:p. 2861-2877, 1999a.

[OR99b] R.W. OGDEN et D.G. ROXBURGH. *An energy-based model of the Mullins effect*. Proceedings of ECCMR, pages p. 23-28, 1999b.

[TRE44] Treloar L. R. G., "Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation", *Trans. Faraday Soc.*, Vol. 40, pp. 59{70, 1944. 14, 64, 69, 76, 119, 122, 153, 154, 155, 156, 157, 159, 173

Cette annexe a pour but de rappeler un certain nombre de notions de la Mécanique des Milieux continus en précisant les notations adoptées dans ce mémoire de magistère. Les matériaux étudiés étant très souples et très déformables, nous aborderons ces notions directement dans le contexte des grandes transformations. Par la suite nous citerons les différents principes que doit satisfaire une loi de comportement.

A.1 cinématique des milieux continus

Soit un milieu continu Ω et un point M de ce milieu. On notera respectivement Ω_0 et M_0 la configuration de référence et la position de ce point à cet instant. Lors d'une transformation, le système matériel passe de sa configuration initiale à la configuration actuelle.

$$x(X, t) = X + \mathbf{u}(X, t) \quad \text{A.1}$$

\mathbf{u} est le vecteur déplacement.

- *Tenseurs des déformations*

Les notations précédemment introduites permettent de définir la notion de déformation.

\mathbf{F} est le tenseur gradient de la déformation au point M_0 , il n'est ni lagrangien ni eulérien. Il traduit la déformation de la structure qui, soumise à une sollicitation donnée, est passée d'un état initial Ω_0 à un état déformé Ω . Le tenseur gradient de la transformation \mathbf{F} est donné par :

$$\mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x}{\partial X} \quad \text{A.2}$$

Le jacobien de la transformé (le volume total d'échange) s'écrit :

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \det(\mathbf{F}) = \frac{\rho_0}{\rho} \quad \text{A.3}$$

Lorsqu'il n'est pas possible de prendre en compte l'incompressibilité dans la cinématique de déformation, la déformation s'écrit :

$$\bar{\mathbf{F}} \stackrel{\text{def}}{=} J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F} \quad \text{A.4}$$

Enfin, à partir de ce tenseur gradient de la transformation, on introduit classiquement des tenseurs dérivés qui sont utilisés pour formuler les lois de comportement, comme par exemple : le tenseur symétrique des dilatations ou de Cauchy-Green droit \mathbf{C} , dans la configuration de référence, défini par :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^t \mathbf{F} \quad \text{A.5}$$

Où \mathbf{F}^t est la transposée de \mathbf{F} ou encore dans la configuration déformée le tenseur de Cauchy-Green gauche \mathbf{B} , défini par :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^t \quad \text{A.6}$$

$$\bar{\mathbf{B}} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{F}}^t \quad \text{A.7}$$

• **Les invariants**

Lors de la diagonalisation de la matrice $[\mathbf{C}]$ représentant le tenseur de dilatation C , l'écriture du polynôme caractéristique fait apparaître trois invariants, notés I_1 , I_2 et I_3 . Ils sont bien sûr indépendants de la base dans laquelle le tenseur est exprimé :

$$\begin{aligned} I_1 &= tr(\mathbf{C}) \\ \left. \begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} [(tr(\mathbf{C}))^2 - tr(\mathbf{C}^2)] \\ I_3 &= \det \mathbf{C} \end{aligned} \right\} \quad \text{A.8} \end{aligned}$$

Soient λ_i des extensions principales. La matrice $[\mathbf{C}]$ du tenseur de Cauchy-Green s'écrit :

$$[\mathbf{C}] = \begin{vmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} \quad \text{A.9}$$

Les invariants de \mathbf{C} sont alors :

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \\ I_3 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = J^2 \end{aligned} \quad \text{A.10}$$

$\sqrt{I_1}$ correspond donc à la longueur de la diagonale du parallélépipède, $2I_2$ correspond à la somme des carrés des aires des faces et $\sqrt{I_3}$ correspond au volume du parallélépipède.

Le premier et le second invariants de déformation sont :

$$\bar{I}_1 \stackrel{\text{def}}{=} tr(\bar{\mathbf{B}}) = J^{-\frac{2}{3}} I_1 \quad \text{A.11}$$

$$\bar{I}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (\bar{I}_1^2 - tr(\bar{\mathbf{B}}^2)) = J^{-\frac{4}{3}} I_2 \quad \text{A.12}$$

A.2. Loi de comportement - Principes généraux

D'une façon générale, une loi de comportement est une fonctionnelle de réponse du matériau permettant de définir un lien entre l'état de contrainte et l'histoire des transformations de ce matériau. Néanmoins, il existe un certain nombre de principes généraux que doit respecter cette loi de comportement, indépendamment du matériau étudié.

a) le principe d'objectivité ou d'indifférence matérielle: la loi de comportement doit être invariante par tout changement de référentiel, Autrement dit, si l'on change la position ou l'orientation d'un milieu après l'avoir déformé, l'énergie interne doit demeurer inchangée. Dans le cadre de l'hyperélasticité, l'objectivité consiste donc à s'assurer que tout mouvement de corps rigide superposé à une déformation donnée ne change pas la valeur de ψ .

En utilisant le second principe thermodynamique dans différentes configurations, on peut obtenir les relations de comportement d'un milieu hyperélastique suivant que l'on ait choisi une description Eulérienne, Lagrangienne ou mixte :

$$\text{Configuration Eulérienne : } \left(\sigma - 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} \right) : \mathbf{D} = 0 \quad \mathbf{D} \quad \text{A.13}$$

$$\text{Configuration mixte : } \left(\Pi - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \right) : \dot{\mathbf{F}} = 0 \quad \dot{\mathbf{F}} \quad \text{A.14}$$

$$\text{Configuration Lagrangienne : } \left(S - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \right) : \dot{\mathbf{E}} = 0 \quad \dot{\mathbf{E}} \quad \text{A.15}$$

b) Conditions aux limites : Conventionnellement, on postule l'existence d'un *minimum global* pour l'énergie, lorsque le milieu n'est soumis à aucune déformation. On appelle ce postulat la condition de *normalisation*:

$$\psi(\mathbf{F} = \mathbf{I}) = 0 \quad \text{A.16}$$

On peut également choisir de définir une énergie n'induisant pas un état de contrainte particulier à l'état naturel (non déformé). On doit donc avoir :

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\mathbf{F}=\mathbf{I}} = 0; \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \right|_{\mathbf{C}=\mathbf{I}} = 0; \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} = 0 \quad \text{A.17}$$

De plus, il faut fournir une énergie infinie pour réduire à zéro ou étirer à l'infini un volume de matière (ou du moins largement plus grande que pour tout autre processus). Ces conditions reviennent à imposer la coercivité de la densité d'énergie libre :

$$\left. \begin{aligned} \psi(\mathbf{F}) & \quad +\infty \text{ Si } \lambda_i \rightarrow +\infty \\ \psi(\mathbf{F}) & \quad +\infty \text{ Si } \det \mathbf{F} \rightarrow +\infty \\ \psi(\mathbf{F}) & \quad +\infty \text{ Si } \det \mathbf{F} \rightarrow 0^+ \end{aligned} \right\} \quad \text{A.18}$$

Où λ_i sont les dilatations principales de \mathbf{U} (Tenseur droit de déformation pure, provient de la décomposition polaire de \mathbf{F} , tels que : $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$. On a également $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$).

Sous l'hypothèse de l'état local, la loi de comportement est construite de manière phénoménologique en partant de l'inégalité de **Clausius-Duhem** que l'on obtient à partir du premier et second principe de la thermodynamique. En introduisant l'énergie libre spécifique de HELMHOLTZ ψ , l'inégalité de Clausius- Duhem traduit la positivité de la dissipation (ϕ_0 ou ϕ) et s'écrit selon le mode de description :

$$\text{Description eulérienne: } \phi = \sigma \mathbf{D} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \frac{1}{T} \vec{q} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_x T \geq 0$$

$$\text{Description lagrangienne: } \phi_0 = \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \rho_0(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \frac{1}{T} \vec{Q} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_x T \geq 0 \quad \text{A.19}$$

$$\text{Description mixte: } \phi_0 = \Pi \cdot \dot{\mathbf{F}} - \rho_0(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \frac{1}{T} \vec{Q} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_x T \geq 0$$

c) Symétries Matérielles

🚩 Isotropie

L'isotropie est une caractéristique que possèdent certains matériaux et qui est bien distincte du principe d'objectivité. Un matériau est dit *isotrope* si sa réponse est indépendante (ou faiblement dépendante) de la direction de sollicitation. Cette propriété se traduit par :

$$\psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{F}\mathbf{Q}^T) \quad \mathbf{F} \in M_3^+, \mathbf{Q} \text{ Orth} \quad \text{A.20}$$

En utilisant l'hypothèse d'isotropie, on peut remarquer que :

$$\psi(\mathbf{C}) = \psi(\mathbf{Q}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{Q}^T) = \psi(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T) \quad \text{A.21}$$

La fonction $\psi(\mathbf{C})$ est donc invariante par rotation. De plus, si l'on fait le choix particulier $\mathbf{Q} = \mathbf{R}$, l'équation (II.20) nous donne :

$$\psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{V}\mathbf{R}\mathbf{R}^T) = \psi(\mathbf{V}) = \psi(\mathbf{B}) \quad \text{A.22}$$

On a ici utilisé le fait que le tenseur de Cauchy-Green Gauche est relié au tenseur gauche de dilatation par la relation : $\mathbf{B} = \mathbf{V}^2$, $\psi(\mathbf{V})$ et $\psi(\mathbf{B})$ sont donc des formes isotropes de l'énergie libre.

Lorsque le matériau possède des propriétés d'isotropie, la densité d'énergie de déformation s'écrit, en fonction des invariants des tenseurs de Cauchy-Green \mathbf{C} et \mathbf{B} notés I_i , ($i = 1, 2, 3$), soit :

$$\psi = \psi(I_1, I_2, I_3) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} I_1 = \text{tr}(\mathbf{X}) \\ I_2 = \frac{1}{2}((\text{tr}(\mathbf{X}))^2 - \text{tr}(\mathbf{X}^2)) \\ I_3 = \det(\mathbf{X}) \end{cases} \quad (\mathbf{X} = \mathbf{C}, \mathbf{B}) \quad \text{A.23}$$

De manière générale si l'on définit une énergie, isotrope, en fonction des invariants d'un tenseur \mathbf{X} , la variation de $\psi(\mathbf{X})$ par rapport à \mathbf{X} s'écrit :

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{A.24}$$

avec, dans le cas où $\mathbf{X} = \mathbf{B}$ ou $\mathbf{X} = \mathbf{C}$:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I}; \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{X}} = I_1 \mathbf{I} - \mathbf{X}; \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{X}} = I_1 \mathbf{X}^{-1} \quad \text{A.25}$$

et dans le cas $\mathbf{X} = \mathbf{F}$:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{X}} = 2\mathbf{F}; \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{X}} = 2\mathbf{F}(I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C}); \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{X}} = I_1 \mathbf{F}^{-T} \quad \text{A.26}$$

Un matériau est dit hyperélastique si la relation contraintes-déformations dérive d'une densité d'énergie de déformation qui est égale à l'énergie libre spécifique d'Helmholtz du milieu. En considérant cette densité d'énergie de déformation par unité de volume dans la configuration initiale:

$$W = \rho_0 \psi \quad \text{A.27}$$

La loi de comportement d'un matériau isotrope hyperélastique s'écrit, en posant $W_i = \frac{\partial W}{\partial I_i}$ et en tenant compte de l'équation de Cayley-Hamilton :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{2}{J} [(W_2 I_2 + W_3 I_3) \mathbf{I} + W_1 \mathbf{B} - W_2 I_3 \mathbf{B}^{-1}] \\ S = 2[(W_1 + W_2 I_1) \mathbf{I} - W_2 \mathbf{C} + W_3 I_3 \mathbf{C}^{-1}] \\ \Pi = 2[(W_1 + W_2 I_1) \mathbf{F} - W_2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T + W_3 I_3 \mathbf{F}^{-T}] \end{cases} \quad \text{A.28}$$