

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou



Faculté de Génie Electrique et d'Informatique

Département d'Automatique

Mémoire de Fin d'Etudes de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : **Sciences et Technologie**

Filière : **Automatique**

Spécialité : **Automatique et Informatique Industrielle**

Présenté par

Mlle Lisa IDDIR

Mlle Wissam HAOUILI

(Thème proposé et dirigé par **M. Ahmed MAIDI**)

Thème

Modélisation et simulation d'un système respiratoire

Mémoire soutenu le 02 décembre 2021, devant le jury composé de :

M. Rabah MELLAH

Professeur, UMMTO, Président

M. Ahmed MAIDI

Professeur, UMMTO, Encadreur

M. Ahcene TRIKI

MCB, UMMTO, Examineur

Table des matières

1	Généralités sur la modélisation des systèmes dynamiques	6
1.1	Introduction	6
1.2	Qu'est-ce qu'un modèle	6
1.3	C'est quoi la modélisation	7
1.4	Modélisation d'un système	7
1.5	But de la modélisation	7
1.6	Forme générale du modèle	8
1.6.1	Degré de liberté d'un système	8
1.7	Types de modèle	9
1.7.1	Modèle de connaissance (boite blanche)	9
1.7.2	Modèle de comportement ou de représentation (boite noire)	10
1.7.3	Modèle mixte	10
1.8	Classification des modèles	11
1.8.1	Modèle linéaire et modèle non linéaire	11
1.8.1.1	Linéarité par apport à l'entrée (U)	11
1.8.1.2	Linéarité par apport aux paramètres (p)	11
1.8.2	Modèle à temps continue	12
1.8.3	Modèle à temps discret	13
1.9	Fonction de transfert	14
1.9.1	Fonction de transfert à partir de l'équation différentielle	14
1.9.2	Fonction de transfert à partir de la représentation d'état	15
1.10	Exemples illustratifs	15
1.11	Conclusion	18
2	Modèle du système respiratoire	19
2.1	Introduction	19
2.2	Définition du système respiratoire	19
2.3	Structure de système respiratoire	20
2.4	Description de l'appareil respiratoire	20
2.5	Échanges gazeux et le transport des gaz	21
2.5.1	Définition des phénomènes	22

2.5.1.1	Définition de la convection	22
2.5.1.2	Définition de la diffusion	22
2.6	Modèle du système respiratoire	23
2.6.1	Obtention du modèle	23
2.6.1.1	Modèle final	25
2.7	Problèmes mathématiques associés	25
2.8	Conclusion	26
3	Méthode des lignes	27
3.1	Introduction	27
3.2	Équations aux dérivées partielles (EDP)	27
3.2.1	Définition	27
3.2.2	Classification des EDPs	28
3.2.2.1	EDPs linéaires et non linéaires	28
3.2.2.2	EDPs homogènes et non homogènes	29
3.3	Conditions aux limites	29
3.3.1	Conditions aux limites de Dirichlet	30
3.3.2	Conditions aux limites de Neumann	30
3.3.3	Conditions aux limites de Fourier	30
3.4	Conditions initiales	31
3.5	Interpolation de Lagrange	31
3.6	Approximation des dérivées par l'interpolation de Lagrange	33
3.6.1	Approximation de la première dérivée	33
3.6.2	Approximation de la deuxième dérivée	35
3.7	Méthode des lignes (semi discrétisation)	37
3.7.1	Définition de la méthode des lignes	37
3.7.2	Base de la méthode des lignes	37
3.7.3	Propriétés et utilisation de la méthode des lignes	38
3.7.4	Application pour la résolution de l'équation de la chaleur	38
3.8	Conclusion	41
4	Simulation du système respiratoire	42
4.1	Introduction	42
4.2	Application de la méthode des lignes	42
4.3	Simulation du modèle discrétisé	49
4.4	Conclusion	52

Table des figures

1.1	Circuit électrique.	9
1.2	Exemple d'un système.	10
1.3	Circuit électrique.	11
1.4	Exemple d'un modèle.	11
1.5	Procédé et sa représentation sous forme de schéma bloc.	14
1.6	Système mécanique.	15
1.7	Système hydraulique.	17
2.1	Les volumes pulmonaires	21
2.2	Échange gazeux entre les espaces alvéolaires et capillaires[3].	22
2.3	Tube	23
3.1	Dérivée première de la fonction cosinus.	35
3.2	Dérivée seconde de la fonction cosinus.	37
3.3	Solution numérique de l'équation de chaleur	41
4.1	La pression d'O2 dans le tube	50
4.2	La pression de CO2 dans le tube	50
4.3	La pression de N2 dans le tube	51
4.4	La pression d'O2 dans le sang	51
4.5	La pression de CO2 dans le sang	52
4.6	La pression de N2 dans le sang	52

Introduction générale

L'homme a toujours essayé de comprendre et de commander les phénomènes physique. Dans ce but, il a crée l'automatique comme une partie des sciences de l'ingénieur. Cette discipline couvre un champ d'applications très vaste dans le développement technologique.

Elle se base sur l'étude et la maîtrise des systèmes de plus en plus complexes et souvent difficiles. Cette étude doit passée par trois étapes primordiales à savoir la modélisation, l'analyse et la simulation.

- La modélisation : c'est les étapes nécessaires à l'élaboration du modèle mathématique du système à commander.
- L'analyse : comprend l'étude des propriétés, telle que la stabilité, l'observabilité et la commandabilité du système.
- La simulation : consiste à reproduire le comportement du système réel sur un prototype à une échelle réduite. Ou bien sur un ordinateur par programmation du modèle mathématique en utilisant un logiciel de simulation.

Très souvent la plupart des systèmes étudiés sont des systèmes à paramètres distribués dits aussi systèmes à paramètres répartis. Ces systèmes particuliers sont définis dans un espace de dimension infinie et ils sont décrits par des équations aux dérivées partielles (EDP) qui modélisent un grand nombre de phénomènes.

Notre mémoire permet de donner une idée plus claire des possibilités de la modélisation dans le domaine biomédical en utilisant des équations aux dérivées partielles. On s'intéresse à modéliser un phénomène biologique qui est le système respiratoire. Le but est de présenter un modèle des échanges gazeux entre l'alvéole (élément unitaire des poumons) et le capillaire sanguin [4].

Pour la simulation de notre système, il existe plusieurs méthodes numériques. La méthode des lignes consiste à discrétiser le domaine spatial en un nombre fini de points pour se ramener à un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) [11]. Quand le nombre de point est petit, on risque de perdre la précision, et pour un nombre de point

grand on aura besoin d'une grande capacité de calcul. Le choix de nombre de point de discrétisation est très important afin de garantir une précision de la solution avec moins d'effort de calcul.

L'objectif de ce travail est l'étude de la méthode des lignes et son application sur des exemples physiques comme l'équation de la chaleur, et sur le modèle obtenu (modèle de système respiratoire).

Le mémoire est structuré de la façon suivante :

Dans le chapitre 1, on présente des généralités sur la modélisation qui se résument dans la définition, la classification et des exemples illustratifs.

Dans le chapitre 2, on s'intéresse à avoir une bonne connaissance du système respiratoire et nous attacherons à dégager des éléments et hypothèse pour construire son modèle mathématique.

Le chapitre 3 est consacré à l'interpolation polynomiale où on présente la méthode de Lagrange. Ensuite, on introduit des généralités sur les équations aux dérivées partielles (EDPs) et l'étude de la méthode de semi-discrétisation dite méthode des lignes.

Dans le chapitre 4, on simule le système respiratoire en utilisant la méthode des lignes.

Enfin, nous terminons notre mémoire par une conclusion générale récapitulant nos principaux résultats.

Chapitre 1

Généralités sur la modélisation des systèmes dynamiques

1.1 Introduction

La modélisation est l'ensemble de procédures permettant d'obtenir un modèle mathématique qui est un outil indispensable pour : concevoir, comprendre, prévoir, et commander un système donné.

Ce chapitre est consacré à des généralités sur la modélisation. On limite la présentation aux notions suivantes : système, modèle, types de modèle et la démarche d'obtention du modèle.

1.2 Qu'est-ce qu'un modèle

Par définition, un modèle est une représentation physique ou graphique mais le plus souvent mathématique des relations qui existent entre les différents éléments d'un système. Ainsi, la modélisation est la description du système ou du phénomène dans un langage compréhensible.

C'est aussi la description de la manière dont les éléments, intervenant dans un processus, s'organisent les uns par rapport aux autres et agissent les uns sur les autres. Elle est appliquée dans différents domaines tels que la conception et fabrication assistée par ordinateur (CFAO), comme par exemple en aéronautique, en construction navale, en sport, en habillement etc... Elle est appliquée aussi en simulation de la réalité virtuelle, en robotique, dans le monde du jeu etc...

Dans le domaine médical, la modélisation tient aussi une place très importante pour

modéliser des structures anatomiques, physiologiques etc ... Un système peut avoir plusieurs modèles plus ou moins fidèle ou complexe.

En effet lors de l'élaboration du modèle, on est tenu à trancher entre deux exigences contradictoires :

- Représentation de la réalité avec une grande précision : cette exigence mène à un modèle fidèle mais complexe.
- Ne plus compliquer la structure du modèle : cette exigence mène à un modèle simple mais moins fidèle (précis).

1.3 C'est quoi la modélisation

La modélisation consiste à mettre au point un ensemble d'équations ou de règles pour décrire un phénomène de façon reproductible et simulable. Le modèle issu de la modélisation sert à prédire le comportement d'un système en fonction de sollicitations connues.

Schématiquement le modèle est une boîte noire qui fournit des valeurs de sortie en fonction de valeurs d'entrée.

1.4 Modélisation d'un système

Modéliser un système consiste donc à identifier ses composants, leurs interactions, leurs règles d'évolution, afin de prévoir son comportement théorique. Il permet ainsi de créer une représentation structurée d'une réalité parfois complexe, adaptée au niveau de lecture de l'utilisateur, mais sans simplification.

Une méthode de modélisation repose sur une démarche (ou un processus opératoires : une méthode), un ou des langages (comme ensemble de constructions plus ou moins formelles permettant la représentation) et des outils logiciels supportant les modèles, les langages et la démarche. La modélisation peut générer un consensus sur les termes employés, lever des ambiguïtés, et améliorer la communication entre les acteurs du système et de sa modélisation.

1.5 But de la modélisation

Parmi les buts d'utilisation d'un modèle nous pouvons distinguer :

1. La simulation qui constitue un moyen de reconstruire ou de prédire le comportement d'un système soumis à différentes sollicitations.

2. L'optimisation d'un procédé par la détermination des points de fonctionnement optimaux de celui ci au sens d'un certain critère.
3. La conception de lois de commande.
4. La conception des capteurs logiciels (observateurs) : le modèle permet de concevoir, de construire et d'utiliser des logiciels supplétifs à des mesures manquants parce qu'ils sont chère, dangereux, destructives, rares, déferé, etc...
5. La détection et l'isolation des pannes : le modèle peut être utilisé pour détecter un comportement normal du procédé et d'évaluer les causes et les conséquences probables.

1.6 Forme générale du modèle

L'écriture des équations de bilan, éventuellement complétées par des équations d'équilibre, permet à un modèle non linéaire dont la forme générale est [1] :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, u, p, \theta) \\ y &= h(x, u, p, \theta) \end{aligned} \tag{1.1}$$

avec

- x : vecteur d'état,
- u : vecteur d'entrée,
- p : vecteur des perturbations,
- θ : vecteur des paramètres,
- y : vecteur de sortie.

1.6.1 Degré de liberté d'un système

On définit le nombre de degrés de liberté d'un système par :

$$N_d = N_v - N_e$$

avec

- N_v : nombre de variables inconnues,
- N_e : nombre d'équation indépendantes (différentielles et algébriques).

Pour que le modèle qu'on a défini admette une solution unique, ou en d'autres termes, pour qu'on puisse en simuler le comportement, ce nombre N doit être égal à zéro. Au contraire, si l'on souhaite commander le système, ce nombre de degré de liberté doit être supérieur à zéro : il correspond au nombre des entrées que l'on doit spécifier pour définir l'évolution du système dans le temps.

1.7 Types de modèle

Un modèle mathématique est dit paramétrique lorsque son expression analytique comporte un nombre fini de constantes non précises numériquement appelées paramètres.

Il est composé d'une structure M et paramètre P . On écrit $M(P)$.

Exemple

Fonction de transfert :

$$G(S) = \frac{B_m S^m + B_{m-1} S^{m-1} + B_{m-2} S^{m-2} + \dots + B_0}{A_n S^n + A_{n-1} S^{n-1} + A_{n-2} S^{n-2} + \dots + A_0} \quad (1.2)$$

Le vecteur de paramètres est :

$$P = [B_m, B_{m-1}, B_{m-2}, \dots, B_0, A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A_0] \quad (1.3)$$

On peut distinguer trois (3) types de modèles paramétriques [2] :

1.7.1 Modèle de connaissance (boite blanche)

Le modèle de connaissance est généralement élaboré à partir des principales lois de la physique.

Ces modèles se présentent sous forme d'équations différentielles dont les paramètres représentant des grandeurs physiques tel que (résistance, inductance...). Ces modèles sont riches de signification et contiennent toutes les informations utiles sur le système, pour cela il est toujours préférable d'établir un modèle de connaissance.

Exemple

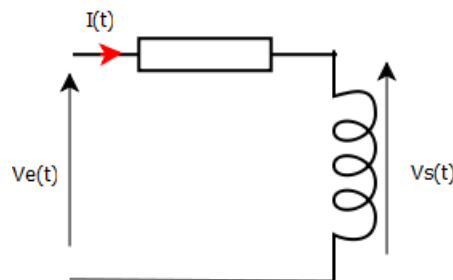


FIGURE 1.1 – Circuit électrique.

Le choix de l'entrée et de la sortie :

L'entrée est $V_e(t)$ et la sortie est $I(t)$

En appliquant la loi des mailles, on a :

$$\begin{aligned}Ve(t) &= RI(t) + Vs(t) \\Vs(t) &= L \frac{d}{dt} I(t) + 0\end{aligned}\tag{1.4}$$

A partir de (1.4), on obtient le modèle :

$$Ve(t) = RI(t) + L \frac{d}{dt} I(t)$$

Donc le modèle finale est :

$$\frac{d}{dt} I(t) - \frac{R}{L} I(t) = \frac{1}{L} Ve(t)$$

1.7.2 Modèle de comportement ou de représentation (boite noire)

Sont des modèles dont on ne connaît pas le physique du système. Il se présente sous la forme d'une relation dont les paramètres n'ont aucun lien physique avec le phénomène en question.

Exemple

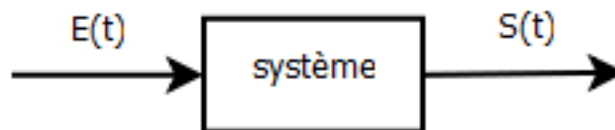


FIGURE 1.2 – Exemple d'un système.

Dans cette exemple, on connaît seulement la réponse de système c'est-à-dire l'évolution de la sortie en fonction de l'entrée.

Par exemple pour une réponse sinusoïdale amortie avec retard, le modèle est de la forme :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{1}{Wn^2} p^2 + \frac{2H}{Wn} p + 1} e^{-\tau p}$$

1.7.3 Modèle mixte

Dans certains cas, il n'est pas possible d'établir un modèle de connaissance complet pour cela on complète le modèle globale grâce à certaines lois de comportement expérimentalement.

Exemple

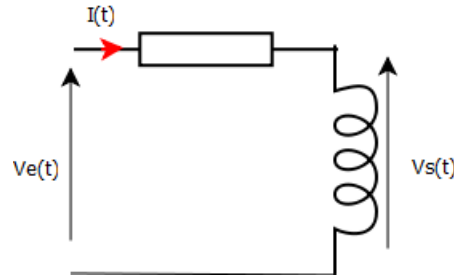


FIGURE 1.3 – Circuit électrique.

D'après la loi des maille, on a :

$$\begin{aligned} Ve(t) &= RI(t) + Vs(t) \\ Vs(t) &= L \frac{d}{dt} I(t) + 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Les paramètres (R, L) peuvent être déterminé en réalisant des expériences. Par exemple, pour déterminer R , on réalise l'expérience suivante, on trace $V(t)$ en fonction du courant $I(t)$, puis en utilisant la loi d'Ohm, on a $Ve(t) = RI(t)$ donc $R = \tan \alpha$.

1.8 Classification des modèles

1.8.1 Modèle linéaire et modèle non linéaire

Soit $Y_m(t, p, u)$ la sortie du modèle à l'instant (t) .

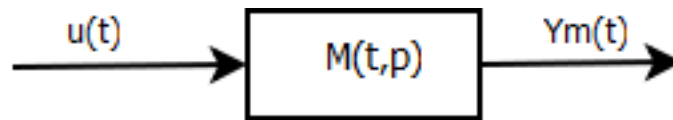


FIGURE 1.4 – Exemple d'un modèle.

On définit 2 types de linéarité :

1.8.1.1 Linéarité par apport à l'entrée (U)

Le modèle (M) qui génère $Y_m(t, p, u)$ est linéaire par apport à l'entrée (U) si et seulement si :

$$\forall (\lambda, \beta) \in \mathfrak{R} \text{ et } \forall t \in \mathfrak{R}^*$$

$$Y_m(t, p, (\lambda U_1 + \beta U_2)) = \lambda Y_m(t, p, U_1) + \beta Y_m(t, p, U_2)$$

1.8.1.2 Linéarité par apport aux paramètres (p)

Le modèle (M) qui génère $Y_m(t, p, u)$ est linéaire par apport aux paramètres (p) si et seulement si :

$$\forall(\lambda, \beta) \in \mathfrak{R} \forall(t) \in \mathfrak{R}$$

$$Y_m(t, (\lambda p_1 + \beta p_2), U) = \lambda Y_m(t, p_1, U) + \beta Y_m(t, p_2, U)$$

Exemple

Soit le modèle suivant :

$$Y(p) = \frac{K}{1 + \tau p} U(p)$$

— Étude de linéarité par apport à l'entrée (U) :

On pose

$$U = \lambda U_1 + \beta U_2$$

$$Y(p) = \frac{K}{1 + \tau p} (\lambda U_1 + \beta U_2) = \lambda \frac{K}{1 + \tau p} U_1 + \beta \frac{K}{1 + \tau p} U_2 = \lambda Y_1(p) + \beta Y_2(p)$$

Donc la structure est linéaire par apport à l'entrée U .

— Étude de linéarité par apport aux paramètres (K, τ) :

on pose

$$K = K_1 + K_2$$

$$Y(p) = \frac{K_1 + K_2}{1 + \tau p} U(p) = \frac{K_1}{1 + \tau p} U(p) + \frac{K_2}{1 + \tau p} U(p)$$

la structure est linéaire par apport au paramètre K .

1.8.2 Modèle à temps continue

Le modèle est dit en temps continue si l'information circule à tout instant de façon continue.

Il est représenté par l'équation différentielle suivante :

$$b_m \frac{d^m}{dt^m} Y(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} Y(t) + \dots + b_1 \frac{d}{dt} Y(t) + b_0 Y(t) = a_n \frac{d^n}{dt^n} U(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} U(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} U(t) + a_0 U(t)$$

— Modèle d'état (représentation d'état) :

L'équation différentielles d'ordre n peut être réécrit sous forme d'un système de n équations différentielles ordinaires du 1er ordre :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(x_1, x_2 \dots x_n, t, u) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2(x_1, x_2 \dots x_n, t, u) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= f_n(x_1, x_2 \dots x_n, t, u)\end{aligned}$$

Dans le cas des système linéaires à temps continue, les fonctions (f_1, f_2, f_n) sont linéaires et la représentation d'état peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= [A]x(t) + [B]u(t) \\ y(t) &= [C]x(t) + [D]u(t)\end{aligned}\tag{1.6}$$

avec

- $x(t)$: vecteur d'état,
- $y(t)$: vecteur de sortie,
- $[A]$: matrice d'état,
- $[B]$: matrice de commande,
- $[C]$: matrice de sortie,
- $[D]$: matrice de transmission.

1.8.3 Modèle à temps discret

Le modèle discret d'un système est un modèle qui permet de calculer la valeur de l'état de ce système à un instant t_2 à partir de la connaissance de son état à l'instant t_1 et de celle de l'évolution des entrées entre ces instants avec $t = kT$ où T est la période d'échantillonnage.

La forme générale d'un modèle discret est donc :

$$\begin{aligned}x(k+1) &= F(x(k), k, u(k)) \\ y(k) &= h(x(k), k, u(k))\end{aligned}\tag{1.7}$$

Si F et h sont linéaires, alors le modèle (1.7) peut être réécrit sous la forme matricielle :

$$\begin{aligned}x(k+1) &= [A]x(k) + [B]u(k) \\ y(k) &= [C]x(k) + [D]u(k)\end{aligned}\tag{1.8}$$

Les modèles sous forme discrète sont utiles dans nombreux cas, comme par exemple la conception d'estimateurs d'état, dans lesquels on utilise des mesures se faisant à intervalles réguliers.

1.9 Fonction de transfert

1.9.1 Fonction de transfert à partir de l'équation différentielle

C'est de calculer la transformé de Laplace de l'équation différentielle. Il faut d'abord préciser les conditions initiales : la valeur de $y(0)$ et de toutes ses dérivées est donnée tandis que celle de $u(0)$ et de toutes ses dérivées est fixée à une valeur nulle (pas d'action avant $t = 0$).

Ensuite, on utilise les propriétés suivantes :

$$L[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

qui est la transformé de Laplace de la fonction $f(t)$, et

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} & (b_m p^m + \dots + b_0) Y(p) - \\ & \left[p^{m-1} (b_m y(0)) + p^{m-2} (b_m \frac{dy}{dt}(0) + b_{m-1} y(0)) + \dots + p^0 (b_m \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} y(0) + \dots + b_1 y(0)) \right] \\ & = (a_n p^n + \dots + a_0) U(p) \end{aligned}$$

Le terme entre crochets correspond à la réponse libre du système, c'est-à-dire celle qui correspond à l'effet des conditions initiales. L'autre terme, en facteur de $U(p)$ correspond à la réponse forcée, c'est-à-dire celle qui est obtenue sous l'effet de l'entrée.

La réponse du système peut donc s'écrire :

$$Y(p) = \frac{a_n p^n + \dots + a_0}{b_m p^m + \dots + b_0} U(p) + \frac{P_{ci}(p)}{b_m p^m + \dots + b_0}$$

On définit la fonction de transfert en boucle ouverte en considérant le cas où toutes les conditions initiales sont nulles :

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{a_n p^n + \dots + a_0}{b_m p^m + \dots + b_0}$$

Le système considéré peut être représenté sous forme de schéma bloc :



FIGURE 1.5 – Procédé et sa représentation sous forme de schéma bloc.

1.9.2 Fonction de transfert à partir de la représentation d'état

On a la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= [A] x(t) + [B] U(t) \\ y(t) &= [C] x(t) + [D] U(t)\end{aligned}$$

Appliquant la transformée de la place :

$$\begin{aligned}pX(p) &= [A] x(p) + [B] U(p) \\ y(p) &= [C] x(p) + [D] U(p)\end{aligned}\tag{1.9}$$

Donc :

$$(pI - A)x(p) = BU(p)$$

$$(pI - A)^{-1}(pI - A)x(p) = (pI - A)^{-1}BU(p)$$

$$x(p) = (pI - A)^{-1}BU(p)\tag{1.10}$$

Remplaçant (1.10) dans (1.9), il vient :

$$y(p) = C(pI - A)^{-1}BU(p) + DU(p)$$

$$y(p) = [C(pI - A)^{-1}B + D] U(p)$$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = C(pI - A)^{-1}B + D$$

1.10 Exemples illustratifs

Exemple 1. Soit le système mécanique masse-ressort-amortisseur de la figure suivante :

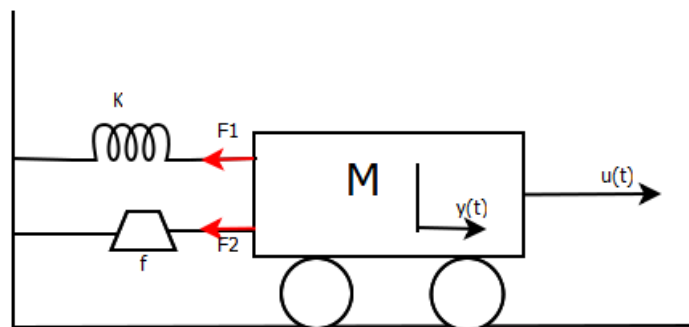


FIGURE 1.6 – Système mécanique.

La loi fondamentale de la dynamique est :

$u(t)$: entrée

$y(t)$: sortie

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}$$

$$u(t) - \vec{F}_1 - \vec{F}_2 = m \vec{a}$$

On remplace les forces F_1 et F_2 par :

$$F_1 = ky(t)$$

$$F_2 = f \frac{d}{dt} y(t)$$

Donc :

$$u(t) - ky(t) - f \frac{d}{dt} y(t) = m \frac{d^2}{dt^2} y(t)$$

Le modèle de deuxième ordre est :

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + \frac{f}{m} \frac{d}{dt} y(t) + \frac{k}{m} y(t) = \frac{1}{m} u(t)$$

La fonction de transfert $F(P)$ à partir de l'équation différentielle :

Utilisons la transformée de la place, on obtient :

$$P^2 y(p) + \frac{f}{m} P y(p) + \frac{k}{m} y(p) = \frac{1}{m} u(p)$$

$$F(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = y(p) \left[P^2 + \frac{f}{m} P + \frac{k}{m} \right] = \frac{1}{m} u(p)$$

$$F(p) = \frac{\frac{1}{m}}{P^2 + \frac{f}{m} P + \frac{k}{m}}$$

Exemple 2. On considère le système hydraulique suivant.

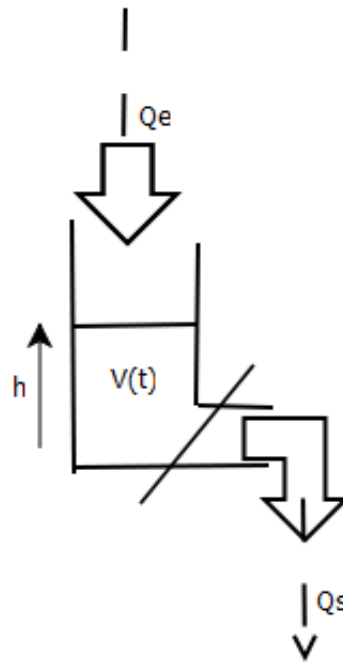


FIGURE 1.7 – Système hydraulique.

Les variables et les paramètres du système hydraulique sont :

Q_e : Le débit volumique d'alimentation,

Q_s : Le débit volumique de la sortie,

h : Le niveau de liquide de réservoir,

s : La surface de la base,

α : Vanne d'équilibrage.

On a :

Q_e : L'entrée,

h : La sortie.

Le bilan volumique est :

$$\frac{d}{dt}V(t) = Q_e(t) - Q_s(t) \quad (1.11)$$

$$V(t) = s \times h(t) \quad (1.12)$$

de (1.11) et (1.12), on a :

$$s \frac{d}{dt}h(t) = Q_e(t) - Q_s(t) \quad (1.13)$$

Selon Bernoulli Q_s est liée à h par la relation suivante :

$$Q_s(t) = \alpha \sqrt{h(t)} \quad (1.14)$$

On remplace (1.14) dans (1.13), on obtient :

$$s \frac{d}{dt} h(t) = Qe(t) - \alpha \sqrt{h(t)}$$

Le modèle du système hydraulique est :

$$\frac{d}{dt} h(t) = \frac{1}{s} Qe(t) - \frac{\alpha}{s} \sqrt{h(t)}.$$

1.11 Conclusion

Dans ce chapitre, des notions relatives à la modélisation sont présentées. Ces derniers se limitent à la notion de système, de modèle, des types de modèle. La procédure de modélisation a été aussi abordée.

Le chapitre suivant sera consacré sur l'étude de système respiratoire et son modèle mathématique.

Chapitre 2

Modèle du système respiratoire

2.1 Introduction

Ce chapitre va nous permettre de comprendre le phénomène de la respiration. Nous allons expliquer ce phénomène. On commence par la présentation des éléments et des hypothèses simplificatrices pour la construction du modèle.

Dans un premier temps, nous explorons globalement la physiologie respiratoire. Une analyse des composantes principales du système respiratoire nous fournit ensuite un découpage élémentaire. Nous voyons ensuite plus en détail les transformations physiques et les échanges gazeux qui se interviennent dans ce système. Nous nous attachons enfin à décrire les paramètres et les équations du modèle.

2.2 Définition du système respiratoire

Le système respiratoire est l'ensemble des organes qui permet de fournir de l'oxygène (O_2) au sang et d'expulser du corps des déchets gazeux, constitués principalement par le dioxyde de carbone (CO_2). C'est-à-dire tous les éléments du corps qui participent à l'échange gazeux entre l'environnement et l'organisme. La respiration dans le langage médical est appelée la ventilation pulmonaire, il s'agit du renouvellement de l'air contenu dans les poumons par l'action des muscles respiratoires.

La respiration a un rôle essentiel. Sa fonction principale est :

- d'apporter de l'oxygène (O_2) aux cellules de l'organisme,
- de débarrasser l'organisme des déchets (CO_2) (gaz carbonique en excès),
- de maintenir à un niveau normal les paramètres sanguins (mesure par les gazes du sang : paO_2 , $paCO_2$, SaO_2 et pH),
- d'assurer les demandes de l'organisme : en repos, en sommeil, en effort de la vie

courante, en marche, en montée d'escalier, en effort intense de type sportif.

Le transport de l'O₂ et du CO₂ dépendent de 4 processus distincts :

1. la ventilation pulmonaire (mouvement des gazes dans et hors des poumons),
2. la diffusion alvéole-capillaire,
3. le transport de l'O₂ et du CO₂ par le sang,
4. le passage des gaz des capillaires vers les tissus.

2.3 Structure de système respiratoire

Le système respiratoire a pour principale fonction les échanges gazeux permettant l'approvisionnement en oxygène et l'évacuation du bioxyde de carbone (CO₂). Ces gaz servent respectivement d'agent oxydant et de résidu de combustion, lors des réactions physiologiques.

Pour réaliser les échanges gazeux nécessaires à la survie, le système respiratoire doit contenir les éléments permettant :

- la captation des gaz (bouche et nez),
- la canalisation (voies aériennes),
- les échanges gazeux (alvéoles),
- les fonctions motrices (muscles),
- l'asservissement (systèmes central et périphérique).

Ce système est donc un ensemble de passages qui filtre l'air et qui le transporte à l'intérieur du poumon où les échanges gazeux vont s'opérer au niveau des sacs alvéolaires.

2.4 Description de l'appareil respiratoire

La fonction première du système respiratoire est de prendre l'oxygène et d'éliminer le dioxyde de carbone. L'oxygène inhalé pénètre dans les poumons et atteint les alvéoles. Les couches cellulaires des parois des alvéoles et des capillaires adjacents ne comptent qu'une seule cellule d'épaisseur et sont en contact très étroit. L'oxygène passe rapidement au travers de cette barrière séparant l'air et le sang et pénètre dans le sang capillaire. À l'inverse, le dioxyde de carbone passe du sang vers les alvéoles d'où il sera expiré.

Le sang oxygéné sort des poumons par les veines pulmonaires qui se jettent dans la partie gauche du cœur qui envoie ce sang oxygéné vers l'ensemble de l'organisme. Le sang appauvri en oxygène et riche en dioxyde de carbone revient vers la cavité droite du cœur à travers deux grosses veines : la veine cave supérieure et la veine cave inférieure. De là,

le sang est envoyé dans l'artère pulmonaire vers les poumons, où il se recharge en oxygène et libère le dioxyde de carbone.

Les volumes d'air présents dans l'appareil pulmonaire aux diverses étapes de la respiration et l'expiration sont illustrés à la figure 2.1

Pour que l'oxygène de l'air passe dans le sang circulant dans les poumons, trois processus sont nécessaires :

- la ventilation, la diffusion et la perfusion,
- la ventilation est le processus par lequel l'air est inspiré et expiré par les poumons,
- la diffusion est le transfert passif des gaz, qui ne nécessite aucun effort ou énergie de la part de l'organisme, entre les alvéoles et les capillaires dans les poumons,
- la perfusion est l'action par laquelle le système cardiovasculaire fait circuler le sang à travers les poumons.

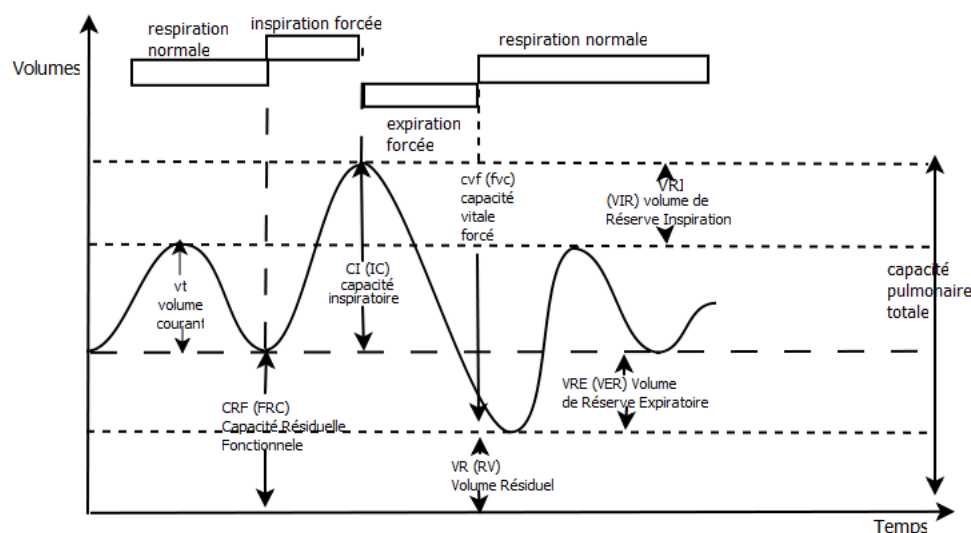


FIGURE 2.1 – Les volumes pulmonaires

2.5 Échanges gazeux et le transport des gaz

Les échanges gazeux entre les poumons et le sang, ainsi que les tissus et le sang sont des phénomènes passifs. Le gradient de pression, près de la membrane, entre les tissus (ou les poumons) et le sang dans les capillaires provoque un flux gazeux à travers la membrane. Lorsque le gaz passe à travers des poumons (les alvéoles) vers les capillaires, il se dissout dans le sang puis se combine avec l'hémoglobine comme illustré ci-dessous 2.2 Dans les cas inverses, il y a dissociation de l'hémoglobine et du gaz, qui se dissout et traversent la membrane.

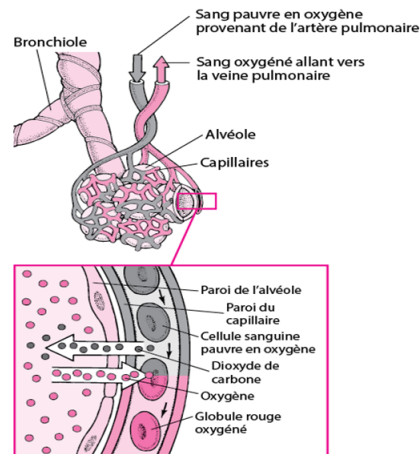


FIGURE 2.2 – Échange gazeux entre les espaces alvéolaires et capillaires[3].

Les phénomènes de diffusion, la convection expliquent le fonctionnement des échanges gazeux dans l'organisme [4]. Cependant, dans certaines situations on estime qu'il est possible que les échanges gazeux entre le sang et les tissus soient partiellement réalisés par perfusion [5].

2.5.1 Définition des phénomènes

On définira les phénomènes physiques qui conduisent au système respiratoire en l'occurrence la diffusion, la convection et la diffusion.

2.5.1.1 Définition de la convection

La convection est un mode de transfert d'énergie qui implique un déplacement de matière dans le milieu, par opposition à la conduction thermique ou diffusion de la matière. La matière est advectée (transportée-conduite, mais ces termes sont en fait impropres) par au moins un fluide. Dans notre système le transport des gaz (O₂ et CO₂) est par convection entre l'air ambiant et les alvéoles.

2.5.1.2 Définition de la diffusion

La diffusion désigne la tendance naturelle d'un système à rendre homogènes les concentrations des espèces chimiques en son sein. C'est un phénomène de transport irréversible qui se traduit par la migration d'espèces chimiques dans un milieu. Dans notre système, le phénomène de diffusion des gaz est entre les alvéoles et le sang contenu dans les capillaires pulmonaires.

2.6 Modèle du système respiratoire

Le fonctionnement du système respiratoire, tout comme l'ensemble des systèmes formant l'organisme, n'est pas très bien maîtrisé. Il est facile de trouver des indications qualitatives sur la physiologie et le fonctionnement des organes, mais très peu pour les décrire de façon analytique. Le modèle de ce système est compartiment qui n'est pas véritablement un modèle de connaissance car ils résultent d'une très grande schématisation des systèmes biologiques.

Pour élaborer le modèle du système respiratoire, on s'intéresse dans ce qui suit à l'étude des échanges gazeux entre l'alvéole (élément unitaire des poumons) et le capillaire sanguin.

2.6.1 Obtention du modèle

Le modèle retenu pour le système respiratoire est dérivée de celui présenté dans [4]. Trois gaz seront pris en considération : l'oxygène (O_2), le gaz carbonique (CO_2) et l'azote (N_2). Trois phénomènes physiques jouent un rôle important dans ce système : la diffusion, la convection et la diffusion dans le sang à travers la paroi alvéolaire.

Soient $y(x, t)$, $v(x, t)$, $s(x, t)$ les pressions partielles d' O_2 , de CO_2 et de N_2 dans le tube et $z(x, t)$, $w(x, t)$, $u(x, t)$ les pressions partielles des même gaz dans le sang. L'alvéole est schématisé par un tube de longueur L , rayon R et épaisseur e 2.3. Une couronne sanguine (de section $S1$) entoure cet alvéole.

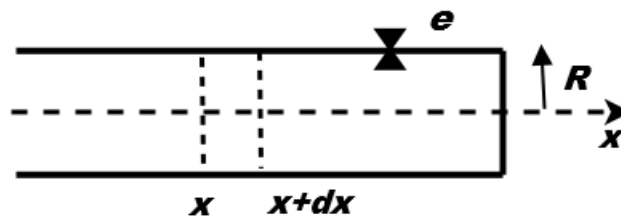


FIGURE 2.3 – Tube

Le tube est ouvert en $x = 0$, fermé en $x = L$. Les équations d'évolution du système seront obtenues en faisant un bilan de masse entre les sections d'abscisse x et $x + dx$, durant le temps dt . Établissons d'abord l'équation pour $y(x, t)$. La variation globale de quantité d'oxygène pendant le temps dt vaut :

$$Sdx.y(x, t + dt) - Sdx.y(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t} Sdx.dt$$

avec $S = \Pi.R^2$

Or, cette variation est la somme des variations élémentaires dues aux trois phénomènes pris en compte : diffusion, convection, diffusion à travers la paroi. La variation due à la diffusion longitudinale (nous négligeons la diffusion radiale car $R \leq L$ et la diffusion à travers la paroi est prépondérante) est égale à (loi de la diffusion)

$$dt(-K.S \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) + K.S \frac{\partial y}{\partial x}(x + dx, t)) = K.S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.dt$$

(\ll diffusion \gg en $x - \ll$ diffusion \gg en $x + dx =$ variation de quantité due à la diffusion).

K est un coefficient de diffusion connu, quand à la variation élémentaire de quantité d'oxygène due à la convection elle vaut, si $\gamma(x, t)$ désigne le débit de convection des trois gaz :

$$y(x, t) \cdot \gamma(x, t) dt - y(x + dx, t) \cdot \gamma(x + dx, t) dt = -\frac{\partial}{\partial x}(y\gamma) dx dt$$

(quantité entrant en $x -$ quantité sortant en $x + dx =$ variation).

La variation élémentaire due à la diffusion à travers la paroi est donnée par la loi de Fick. Elle est égale à : $-D_{O_2} \frac{2\pi R}{e}(y - z) dx dt$.

C'est la partie réaction de notre équation. En regroupant ces expressions et en faisant la simplification par $(dx dt)$ on obtient la première équation aux dérivées partielles du système :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = K \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x}(\gamma y) - D_{O_2} \frac{2}{Re}(y - z)$$

L'équation en z (dans le sang) s'obtient selon la même méthode. Les variations élémentaires correspondant à la diffusion s'obtiennent comme précédemment. Soit $Q(t)$ le débit sanguin (indépendant de x), la variation due à la convection vaut :

$$Q \cdot s_{O_2} z(x, t) - Q \cdot s_{O_2} z(x + dx, t) dt = -Q \cdot s_{O_2} \frac{\partial z}{\partial x} dx dt$$

où s_{O_2} désigne un coefficient de solubilité (connu). L'équation en z s'écrit :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = K_s \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{Q}{S_1} s_{O_2} \frac{\partial z}{\partial x} - D_{O_2} \frac{2\pi R}{e S_1} (z - y)$$

où K_s est un coefficient de diffusion dans le sang qui peut être négligé. Le même procédé donne les équations pour les autres gaz. Finalement, on obtient le système d'équation aux dérivées partielles.

2.6.1.1 Modèle final

Le même procédé donne les équations pour les autres gaz. On obtient le système d'équation aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial t} &= K \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{S} \frac{\partial y}{\partial x} - D \frac{2}{Re} (y - z) \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{S} \frac{\partial v}{\partial x} - D \frac{2}{Re} (v - w) \\
\frac{\partial s}{\partial t} &= K \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{S} \frac{\partial s}{\partial x} - D \frac{2}{Re} (s - u) \\
\frac{\partial z}{\partial t} &= -\frac{Q}{S_1} S_{O_2} \frac{\partial z}{\partial x} - D \frac{2\pi R}{e S_1} (z - y) \\
\frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{Q}{S_1} S_{CO_2} \frac{\partial w}{\partial x} - D \frac{2\pi R}{e S_1} (w - v) \\
\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{Q}{S_1} S_{N_2} \frac{\partial u}{\partial x} - D \frac{2\pi R}{e S_1} (u - s)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

avec :

- K : coefficient de diffusion,
- D : constante de Fick,
- R : rayon de tube,
- e : épaisseur de tube,
- γ : débit de convection des trois gaz,
- S : surface de tube,
- S_1 : section de couronne sanguin,
- Q : débit sanguin,
- $S_{O_2}, S_{CO_2}, S_{N_2}$: coefficients de solubilité.

On s'aperçoit que sans conditions supplémentaires, on ne pourra pas admettre de solution unique.

D'un point de vue biologique des conditions initiales $(y(x, 0)), (x(x, 0))$ ou des conditions aux limites $(y(0, t)), (z(0, t))$ pourront être fixées pour les différents gaz.

2.7 Problèmes mathématiques associés

La première difficulté concernant le modèle (2.1) est relative à l'existence et l'unicité de la solution. Dans ce qui suit, on suppose que le modèle est bien posé (admet une solution unique).

Les méthodes de résolution numérique (qui dans certains cas permettent de montrer l'existence et l'unicité de la solution) porteront beaucoup plus de satisfactions concrètes pour prouver l'intérêt du modèle. Ces méthodes de résolution sont toujours basées sur une discrétisation du système aux dérivées partielles qui le transformera soit en une suite de systèmes d'équations différentielles ordinaires, soit en une suite d'équation algébriques

(linéaires ou non). L'existence et l'unicité seront ramenées à l'étude des solutions de ces systèmes discrétisés.

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, après avoir présenté des généralités sur le système respiratoire et les différents phénomènes de la respiration, nous avons déterminé le modèle mathématique de ce système en utilisant les équations des bilans matières. Le modèle obtenu est formé de six équations aux dérivées partielles couplées. Chaque équation décrit l'évolution d'un gaz dans un compartiment.

Dans le chapitre suivant, on s'intéresse à la résolution des équations aux dérivées partielles par la méthode de ligne (semi-discrétisation).

Chapitre 3

Méthode des lignes

3.1 Introduction

De nombreux problèmes scientifiques et techniques nécessitent des calculs numériques, car la solution analytique n'est pas toujours évidente.

Ce chapitre est consacré à des généralités sur les équations aux dérivées partielles (EDPs) qui sont un outil primordial pour la modélisation. Pour obtenir la solution de ces équations, il existe plusieurs méthodes. Dans notre cas, on s'intéresse à la méthode de semi-discrétisation dite méthode des lignes.

Pour ce faire, d'abord, on s'adresse à la notion d'interpolation polynomiale qui sert à approximer des dérivées (dans notre cas la première et la deuxième dérivées). On termine notre chapitre par une application pour la résolution d'une EDP.

3.2 Équations aux dérivées partielles (EDP)

3.2.1 Définition

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une relation entre une fonction de plusieurs variables et ses dérivées. Elles sont utilisées dans la modélisation des phénomènes physiques comme les propagations des ondes, diffusion de chaleur, mécanique des fluides, électromagnétisme, etc...

Elle est de la forme : pour tout $x \in \Omega$ et ($m \geq 1$)

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right)(x) = 0 \quad (3.1)$$

où f est une fonction donnée définie sur Ω . L'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s'appelle le domaine de l'EDP.

L'ordre d'une EDP est le plus grand degré de dérivation qui apparaît dans l'équation (3.1) qui est m .

EDP d'ordre 1 [6] Une équation aux dérivées partielles (EDP) du premier ordre est de la forme :

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0$$

avec :

u : fonction à déterminer (solution),

x_1, \dots, x_n : variables indépendantes,

$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$: dérivées partielles.

La dimension d'une EDP est le nombre de variables indépendantes dont dépend la fonction inconnue u .

Dans le cas de deux variables x, y , on a :

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

Un exemple d'une EDP du premier ordre est :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Un autre exemple d'EDP du second ordre est :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

3.2.2 Classification des EDPs

Les équations aux dérivées partielles peuvent être classées comme équations linéaires, non linéaires, homogènes et non homogènes.

3.2.2.1 EDPs linéaires et non linéaires

Une équation aux dérivées partielles est dite linéaire si [7,8] :

1. La puissance des variables indépendantes et de chaque dérivée partielle de cette équation est égale à 1.
2. Les coefficients des variables indépendantes et de chaque dérivée partielle de cette équation sont constants.

Par exemple, l'équation suivante :

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + y \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0 \quad (3.2)$$

Pour l'équation (3.2), le degré des deux dérivées partielles est 1, et leurs coefficients sont respectivement la variable indépendante x et y , donc elle est linéaire.

Si une EDP ne vérifie pas les conditions citées précédemment, alors elle est non linéaire.

Par exemple :

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + u \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^3 = f(x, y) \quad (3.3)$$

Pour l'équation (3.3), le degré d'une dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial y}$ est 3 supérieur à 1, et le coefficient de la dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial y}$ est la variable dépendante u .

3.2.2.2 EDPs homogènes et non homogènes

Une EDP d'ordre quelconque linéaire ou non linéaire est homogène si tous les termes de l'équation contiennent la variable dépendante u ou sa dérivée. Sinon elle est non homogène [7].

Par exemple, considérons les équations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = y \quad (3.5)$$

L'équation (3.4) est homogène vu l'absence de variable indépendante t par contre l'équation (3.5) est non homogène car une variable indépendante y apparaît comme un terme de l'équation.

La résolution d'une EDP consiste à déterminer toutes les fonctions u définies sur tout en respectant certaines conditions (conditions aux limites et conditions initiales).

3.3 Conditions aux limites

En mathématiques, une condition aux limites est une contrainte sur les valeurs que prennent les solutions des équations aux dérivées ordinaires et des équations aux dérivées partielles sur une frontière.

Il existe un grand nombre de conditions aux limites possibles, en fonction de la formulation du problème, du nombre de variables mises en jeu, et (de manière plus importante)

de la nature de l'équation, parmi lesquelles on peut citer les plus rencontrées [9] :

- Condition aux limites de Dirichlet,
- Condition aux limites de Neumann,
- Condition aux limites de Fourier (ou robin),
- Condition aux limites de mixtes,
- Condition aux limites de Danckaerts.

Pour illustrer les conditions aux limites citées ci-dessus, on prend pour exemple une barre métallique, assimilée à un segment de droite de longueur L , et on néglige la variation de la température dans les autres dimensions de la barre.

3.3.1 Conditions aux limites de Dirichlet

Considérons les extrémités de la barre métallique fixées à des températures données $T_0(t), T_1(t)$.

$$T(0, t) = T_0$$

$$T(l, t) = T_1(t)$$

Les conditions aux limites de Dirichlet sont les conditions les plus faciles à comprendre.

3.3.2 Conditions aux limites de Neumann

Si le flux de chaleur est donné aux bords, alors dans ce cas c'est le gradient de la température qui sera fixé et on aura les conditions aux limites suivantes :

$$-c \frac{\partial x}{\partial z} \Big|_{z=0} = \varphi_0(t)$$

$$-c \frac{\partial x}{\partial z} \Big|_{z=l} = \varphi_1(t)$$

Les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann sont utilisées pour les équations différentielles partielles.

3.3.3 Conditions aux limites de Fourier

Si on dispose maintenant de la température extérieure $T_{ex}(t)$, alors le gradient de la température (flux de chaleur) sera proportionnel à la différence $(T - T_{ex})$ les conditions aux limites seront donc :

$$-c \frac{\partial x}{\partial z} \Big|_z = -k(T - T_{ex})$$

en $z = 0$ et $z = l$ avec :

- k : Constante $\in \mathbb{R}$,
- c : Caractérise la diffusion de la chaleur,
- z : La frontière du domaine de variation de T .

3.4 Conditions initiales

En physique ou en mathématique, les conditions initiales est l'espace d'état d'un système étudié à l'instant t initial à ($t = 0$), c'est-à-dire l'état de départ. C'est ce qui permet de déterminer les coefficients de la solution complète et si possible unique d'une équation différentielle.

3.5 Interpolation de Lagrange

L'interpolation de Lagrange est l'une des méthodes d'interpolations polynomiales les plus utilisées, qui permet d'approximer une fonction f connu et suffisamment régulier par un polynôme P_n plus simple, et qui impose que cette fonction coïncide avec le polynôme aux points x_i . Le grand avantage de cette interpolation est de rendre l'erreur d'approximation petite en augmentant le degré du polynôme [10].

Pour introduire cette méthode, on considère une fonction f continue et définie sur l'intervalle $[a, b]$ dans \mathbb{R} , et soient x_i , $i = 0, n + 1$ points distincts dans $[a, b]$, le polynôme de Lagrange d'ordre n est donnée par [11] :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (3.6)$$

Une fois on a construit les polynômes de Lagrange, la fonction d'interpolation vaut :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) \quad (3.7)$$

Les polynômes de Lagrange P_n satisfont l'égalité [10] :

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad (3.8)$$

car le polynôme de Lagrange a une la propriété intéressante suivante :

$$\begin{cases} L_i(x_j) = 0 & \text{si } i \neq j \\ L_i(x_j) = 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (3.9)$$

Exemple Soit la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

et soit les trois points suivants : $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

Donc :

$$f(x_1) = 0.5$$

$$f(x_2) = 1$$

$$f(x_3) = 0.5$$

$$P_2(x) = \sum_{i=1}^3 f(x_i) * L_i(x)$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{x^2 - x}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(0 + 1)(0 - 1)} = \frac{x^2 - 1}{-1} = -x^2 + 1$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x + 1)(x - 0)}{(1 + 1)(1 - 0)} = \frac{x^2 + x}{2}$$

Le polynôme approximant la fonction est donné comme suit :

$$P_2(x) = f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) = 0.5\left(\frac{x^2 - x}{2}\right) + 1(-x^2 + 1) + 0.5\left(\frac{x^2 + x}{2}\right)$$

$$P_2(x) = -0.5x^2 + 1$$

3.6 Approximation des dérivées par l'interpolation de Lagrange

3.6.1 Approximation de la première dérivée

Soient les points suivants $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ et posons

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x \quad (3.10)$$

avec $i = \overline{0, 2}$.

A partir de (3.8), on sait que

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \frac{dP_n(x_i)}{dx} \quad (3.11)$$

Le polynôme d'interpolation de Lagrange qui passe par ces trois points est donné comme suit :

$$P_n(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \quad (3.12)$$

En appliquant (3.10) et (3.11) sur (3.12), on détermine la dérivée première de f à chaque point :

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)}{2\Delta x}$$

$$\frac{df(x_1)}{dx} = \frac{-f(x_0) + f(x_2)}{2\Delta x}$$

$$\frac{df(x_2)}{dx} = \frac{f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)}{2\Delta x}$$

A partir de ces dérivées, on peut déduire les formes générales de la première dérivée comme suit :

Pour $i = 0$ (différence avant) :

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)}{2\Delta x}$$

Pour $1 \leq i \leq n-1$ (différence centrée) :

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \frac{-f(x_{i-1}) + f(x_{i+1})}{2\Delta x}$$

Pour $i = n$ (différence arrière) :

$$\frac{df(x_n)}{dx} = \frac{f(x_{n-2}) - 4f(x_{n-1}) + 3f(x_n)}{2\Delta x}$$

On peut représenter ces dérivées sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} f(\dot{x}_0) \\ f(\dot{x}_0) \\ f(\dot{x}_0) \\ \vdots \\ f(\dot{x}_{n-1}) \\ f(\dot{x}_n) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta x} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \cdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

En utilisant l'approximation numérique de la première dérivée (3.13) de la fonction $(\cos(x))$, par exemple) et en la comparant avec sa dérivée première analytique, on obtient la figure 3.1

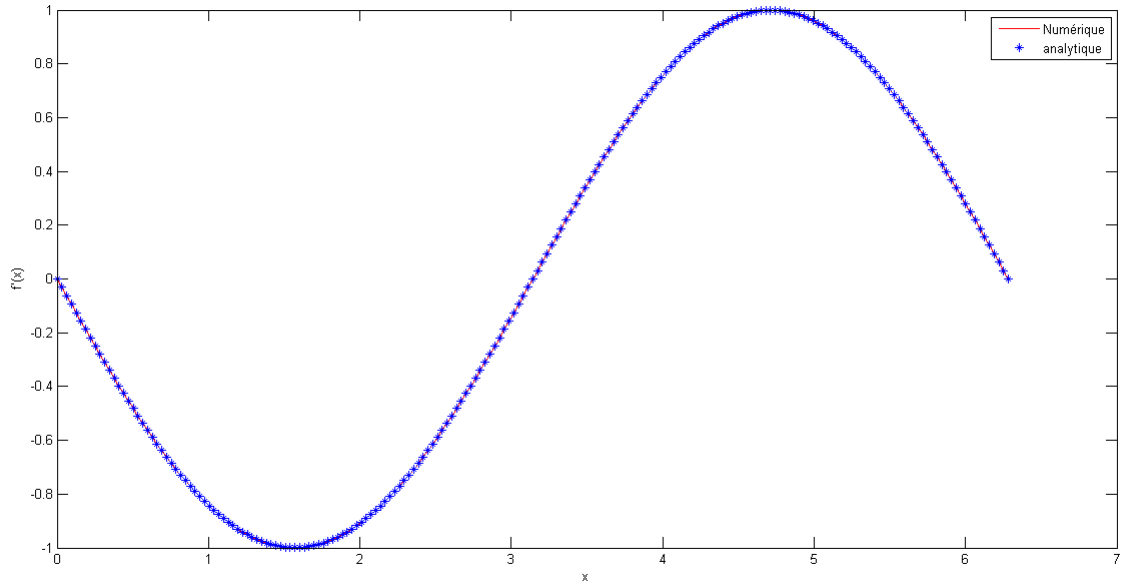


FIGURE 3.1 – Dérivée première de la fonction cosinus.

3.6.2 Approximation de la deuxième dérivée

Dans ce cas l'ordre est supérieur à 1, il faut prendre plus de trois points. Soient les points suivants $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $((x_3, f(x_3)))$ et posons toujours

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x \quad (3.14)$$

avec $i = \overline{0, 3}$.

A partir de (3.8) on sait que

$$\frac{d^2 f(x_i)}{d^2 x} = \frac{d^2 P_n(x_i)}{d^2 x} \quad (3.15)$$

Le polynôme d'interpolation de Lagrange qui passe par ces trois points est donné comme suit

$$P_n(x) = f(x_0) \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} + f(x_1) \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} +$$

$$f(x_2) \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + f(x_3) \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \quad (3.16)$$

En appliquant (3.14) et (3.15) sur (3.16), on détermine la dérivée première de f à

chaque point :

$$\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} = \frac{2f(x_0) - 5f(x_1) + 4f(x_2) - f(x_3)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{d^2 f(x_1)}{dx^2} = \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{d^2 f(x_2)}{dx^2} = \frac{f(x_1) - 2f(x_2) + f(x_3)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{d^2 f(x_3)}{dx^2} = \frac{-f(x_0) + 4f(x_1) - 5f(x_2) + 2f(x_3)}{\Delta x^2}$$

A partir de ces dérivées, on peut déduire les formes générales de la deuxième dérivée comme suit :

Pour $i = 0$ (différence avant) :

$$\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} = \frac{2f(x_0) - 5f(x_1) + 4f(x_2) - f(x_3)}{\Delta x^2}$$

Pour $1 \leq i \leq n - 1$ (différence centrée) :

$$\frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} = \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1}))}{\Delta x^2}$$

Pour $i = n$ (différence arrière) :

$$\frac{d^2 f(x_n)}{dx^2} = \frac{-f(x_{n-3}) + 4f(x_{n-2}) - 5f(x_{n-1}) + 2f(x_n)}{\Delta x^2}$$

La forme matricielle associée est :

$$\begin{bmatrix} f(\ddot{x}_0) \\ f(\ddot{x}_1) \\ f(\ddot{x}_2) \\ \dots \\ f(\ddot{x}_{n-1}) \\ f(\ddot{x}_n) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 & -1 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & -1 & 4 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

En utilisant l'approximation numérique de la deuxième dérivée (3.17) de la fonction $\cos(x)$ et en la comparant avec sa dérivée seconde analytique, on obtient la figure 3.2.

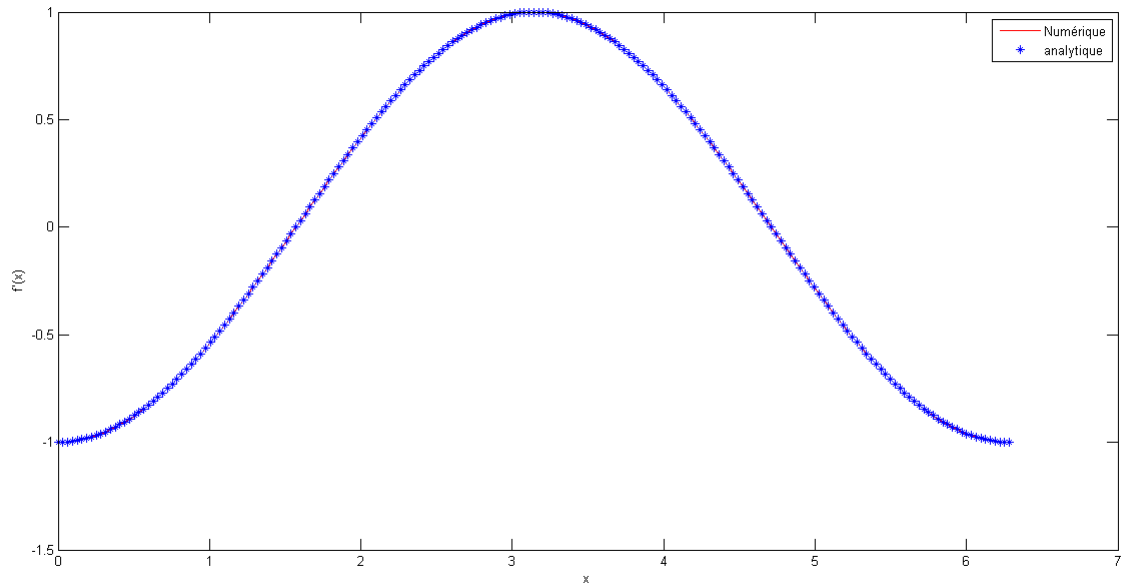


FIGURE 3.2 – Dérivée seconde de la fonction cosinus.

3.7 Méthode des lignes (semi discrétisation)

3.7.1 Définition de la méthode des lignes

La méthode des lignes dite aussi méthode de la semi-discrétisation qui est basée sur les différences finies est une technique numérique bien établie pour l'analyse des lignes de transmission, les structures de guides d'ondes, et les problèmes de diffusion. Pour cette approche l'un des domaines d'espace ou de temps est discrétisé. On obtient un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre d'autant plus élevé que la discrétisation est plus fine. Cette méthode elle est plus pertinente et donc plus exacte. Sa simplicité la rend également plus rapide en ce qui concerne le temps de calcul [12].

3.7.2 Base de la méthode des lignes

L'idée de base de la méthode des lignes est de remplacer les dérivées spatiales dans l'EDP par des approximations algébriques.

Dans ce cas les dérivées spatiales ne sont expressément plus indiquées en termes de variables spatiales indépendantes mais seulement en termes de variable temporelle. En d'autres termes, avec seulement une variable indépendante restante, nous avons un système d'équation aux dérivées ordinaires qui approchent ou approximent l'EDP initiale.

L'enjeu est alors de préparer le système rapprochant les équations aux dérivées partielles. Une fois que ceci est fait, nous pouvons appliquer n'importe quel algorithme d'intégration numérique pour calculer une solution numérique approximative pour l'EDP que les équations aux dérivées ordinaires munies des conditions initiales.

3.7.3 Propriétés et utilisation de la méthode des lignes

La méthode des lignes a les propriétés suivantes qui justifient son utilisation [13] :

— *Efficacité de calcul* :

Le caractère semi-analytique de la formulation mène à un algorithme simple et compact, qui fournit des solutions précises avec moins d'effort de calcul que d'autres techniques.

— *Stabilité numérique* :

En se servant des solveurs de problèmes d'EDO de pointe, l'effort de programmation peut être réduit.

— *Temps de calcul réduit* :

Puisque seulement une petite quantité de lignes de discrétisation est nécessaire pour le calcul, il n'y a aucune nécessité de résoudre un grand système d'équations ; par conséquent la durée de calcul est petite.

3.7.4 Application pour la résolution de l'équation de la chaleur

Considérons le problème monodimensionnel de l'évolution de la température dans une barre de longueur L . La température $T(x, t)$ vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.18)$$

avec α est le coefficient de diffusivité thermique.

Cas du problème de Neumann

Les conditions aux limites sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = z_0 \\ \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = z_L \end{array} \right.$$

et la condition initiale tel que

$$T(x, 0) = T^*(x)$$

En discrétisant l'équation (3.18) avec une différence centrée comme suit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$$

elle devient alors :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \dot{T}_i = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$$

Pour $i = 1$

$$\dot{T}_1 = \alpha \frac{T_2 - 2T_1 + T_0}{\Delta x^2} \quad (3.19)$$

Pour $i = 2, \dots, N - 1$

$$\dot{T}_i = \alpha \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (3.20)$$

Pour $i = N$

$$\dot{T}_N = \alpha \frac{T_{N+1} - 2T_N + T_{N-1}}{\Delta x^2} \quad (3.21)$$

Puisque les conditions aux limites sont imposées sur la dérivée de la température, donc T_0 et T_{N+1} sont inconnues. Pour cela, on va discrétiser les conditions aux limites de la manière suivante :

Pour $x = 0$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = z_0 \Rightarrow \frac{T_2 - T_0}{2\Delta x} = z_0$$

D'où

$$T_0 = T_2 - 2z_0\Delta x \quad (3.22)$$

Pour $x = L$

$$\frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = z_L \Rightarrow \frac{T_{N+1} - T_{N-1}}{2\Delta x} = z_L$$

D'où

$$T_{N+1} = 2z_L\Delta x + T_{N-1} \quad (3.23)$$

En remplaçant respectivement les équations (3.22) et (3.23) dans les formules (3.19), (3.20) et (3.21), on obtient :

Pour $i = 1$

$$\dot{T}_1 = \alpha \frac{2T_2 - 2T_1 - 2z_0\Delta x}{\Delta x^2}$$

Pour $i = 2, \dots, N - 1$

$$\dot{T}_i = \alpha \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$$

Pour $i = N$

$$\dot{T}_N = \alpha \frac{2T_{N-1} - 2T_N + 2z_L\Delta x}{\Delta x^2}$$

La forme matricielle de ce système d'équations est :

$$\dot{T} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-1} \\ T_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2z_0\Delta x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2z_L\Delta x \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Le système est sous la forme :

$$\dot{T} = AT + B$$

Pour un nombre de point de discrétisation $N = 100$, d'une longueur $L = 1$, d'un pas de discrétisation $\Delta x = \frac{L}{N-1}$, de conditions aux limites $z_0 = z_L = 0$, et d'un coefficient $d = 0.01$, la solution numérique de l'équation de la chaleur est donnée par la figure 3.3.

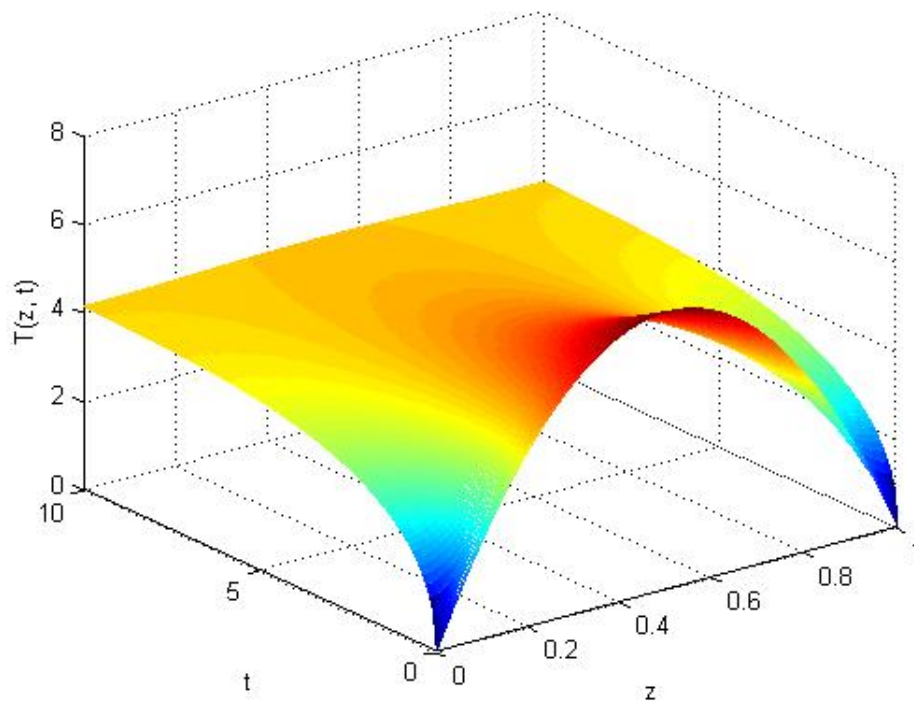


FIGURE 3.3 – Solution numérique de l'équation de chaleur

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté des généralités et des notions de base sur les EDPs et la méthode des lignes. Le principe de la méthode des lignes consiste à discrétiser les EDP qui représentent un système de dimension infinie (décomposition du domaine d'espace seulement). Cette semi-discrétisation conduit à des systèmes de dimension qui peut être élevée mais reste finie et facile à intégrer numériquement.

La discrétisation des systèmes par la méthode des lignes en utilisant les différences finies permet d'avoir une très bonne précision si le nombre de points de discrétisation est grand. Dans le chapitre suivant, on utilise la méthode des lignes pour la simulation du modèle du système respiratoire.

Chapitre 4

Simulation du système respiratoire

4.1 Introduction

Après avoir présenté globalement le modèle du système respiratoire, on s'intéresse dans ce chapitre à la simulation de son comportement en se basant sur la discrétisation et l'approximation numérique des dérivées partielles en utilisant la méthode des lignes. Le but est d'étudier les phénomènes de diffusion-convection-réaction, c'est-à-dire, les échanges gazeux (O_2 , CO_2 et N_2) entre l'alvéole et le capillaire sanguin.

4.2 Application de la méthode des lignes

Rappelons que le modèle du système respiratoire est donné par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial t} &= K \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{S} \frac{\partial y}{\partial x} - D \frac{2}{Re} (y - z) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{S} \frac{\partial v}{\partial x} - D \frac{2}{Re} (v - w) \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= K \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{S} \frac{\partial s}{\partial x} - D \frac{2}{Re} (s - u) \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= -\frac{Q}{S_1} S_{O_2} \frac{\partial z}{\partial x} - D \frac{2\pi R}{eS_1} (z - y) \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{Q}{S_1} S_{CO_2} \frac{\partial w}{\partial x} - D \frac{2\pi R}{eS_1} (w - v) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{Q}{S_1} S_{N_2} \frac{\partial u}{\partial x} - D \frac{2\pi R}{eS_1} (u - s)\end{aligned}\tag{4.1}$$

avec les conditions aux limites du type Dirichlet :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0(t) = y(0, t) = 0 \\ y_L(t) = y(L, t) = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} v_0(t) = v(0, t) = 0 \\ v_L(t) = v(L, t) = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} s_0(t) = s(0, t) = 0 \\ s_L(t) = s(L, t) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_0(t) = z(0, t) = 0 \\ z_L(t) = z(L, t) = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} w_0(t) = w(0, t) = 0 \\ w_L(t) = w(L, t) = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} u_0(t) = u(0, t) = 0 \\ u_L(t) = u(L, t) = 0 \end{array} \right\}$$

et les conditions initiales :

$$y(0) = y_0(t) = 0.01$$

$$v(0) = v_0(t) = 0.15$$

$$s(0) = s_0(t) = 0.02$$

$$z(0) = z_0(t) = 0.30$$

$$w(0) = w_0(t) = 0.35$$

$$u(0) = u_0(t) = 0.40$$

Décomposons le domaine spatial normalisé $[0, 1]$ en n intervalles égaux avec $n = 200$, correspondant à un pas de discrétisation $h = \frac{1}{n+1}$.

On discrétise le modèle (4.1) en utilisant les différences finies suivantes :

— Discrétisation de la première dérivée (différence centrée $1 \leq i \leq n-1$)

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \frac{-f(x_{i-1}) + f(x_{i+1})}{2h}$$

— Discrétisation de la deuxième dérivée (différence centrée $1 \leq i \leq n-1$)

$$\frac{d^2f(x_i)}{dx^2} = \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1}))}{h^2}$$

d'où les équations différentielles ordinaires suivantes :

— La pression partielle d'O₂ dans le tube

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \frac{K}{h^2}(y_2 - 2y_1 + y_0) - \frac{\gamma}{2hS}(y_2 - y_0) - \frac{2D}{Re}(y_1 - z_1) \\ \dot{y}_2 &= \frac{K}{h^2}(y_3 - 2y_2 + y_1) - \frac{\gamma}{2hS}(y_3 - y_1) - \frac{2D}{Re}(y_2 - z_2) \\ &\vdots \\ \dot{y}_{n-1} &= \frac{K}{h^2}(y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}) - \frac{\gamma}{2hS}(y_n - y_{n-2}) - \frac{2D}{Re}(y_{n-1} - z_{n-1}) \\ \dot{y}_n &= \frac{K}{h^2}(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) - \frac{\gamma}{2hS}(y_{n+1} - y_{n-1}) - \frac{2D}{Re}(y_n - z_n) \end{aligned}$$

posons $A = \frac{K}{h^2}$, $B = -\frac{\gamma}{2hS}$ et $C = -\frac{2D}{Re}$, les équations s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= (A - B)y_0 + (C - 2A)y_1 + (A + B)y_2 + (-C)z_1 \\
 \dot{y}_2 &= (A - B)y_1 + (C - 2A)y_2 + (A + B)y_3 + (-C)z_2 \\
 &\vdots \\
 \dot{y}_{n-1} &= (A - B)y_{n-2} + (C - 2A)y_{n-1} + (A + B)y_n + (-C)z_{n-1} \\
 \dot{y}_n &= (A - B)y_{n-1} + (C - 2A)y_n + (A + B)y_{n+1} + (-c)z_n
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

— La pression partielle de CO₂ dans le tube

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_1 &= \frac{K}{h^2}(v_2 - 2v_1 + v_0) - \frac{\gamma}{2hS}(v_2 - v_0) - \frac{2D}{Re}(v_1 - w_1) \\
 \dot{v}_2 &= \frac{K}{h^2}(v_3 - 2v_2 + v_1) - \frac{\gamma}{2hS}(v_3 - v_1) - \frac{2D}{Re}(v_2 - w_2) \\
 &\vdots \\
 \dot{v}_{n-1} &= \frac{K}{h^2}(v_n - 2v_{n-1} + v_{n-2}) - \frac{\gamma}{2hS}(v_n - v_{n-2}) - \frac{2D}{Re}(v_{n-1} - w_{n-1}) \\
 \dot{v}_n &= \frac{K}{h^2}(v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}) - \frac{\gamma}{2hS}(v_{n+1} - v_{n-1}) - \frac{2D}{Re}(v_n - w_n)
 \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_1 &= (A - B)v_0 + (C - 2A)v_1 + (A + B)v_2 + (-C)w_1 \\
 \dot{v}_2 &= (A - B)v_1 + (C - 2A)v_2 + (A + B)v_3 + (-C)w_2 \\
 &\vdots \\
 \dot{v}_{n-1} &= (A - B)v_{n-2} + (C - 2A)v_{n-1} + (A + B)v_n + (-C)w_{n-1} \\
 \dot{v}_n &= (A - B)v_{n-1} + (C - 2A)v_n + (A + B)v_{n+1} + (-c)w_n
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

— La pression partielle de N₂ dans le tube

$$\begin{aligned}
 \dot{s}_1 &= \frac{K}{h^2}(s_2 - 2s_1 + s_0) - \frac{\gamma}{2hS}(s_2 - s_0) - \frac{2D}{Re}(s_1 - u_1) \\
 \dot{s}_2 &= \frac{K}{h^2}(s_3 - 2s_2 + s_1) - \frac{\gamma}{2hS}(s_3 - s_1) - \frac{2D}{Re}(s_2 - u_2) \\
 &\vdots \\
 \dot{s}_{n-1} &= \frac{K}{h^2}(s_n - 2s_{n-1} + s_{n-2}) - \frac{\gamma}{2hS}(s_n - s_{n-2}) - \frac{2D}{Re}(s_{n-1} - u_{n-1}) \\
 \dot{s}_n &= \frac{K}{h^2}(s_{n+1} - 2s_n + s_{n-1}) - \frac{\gamma}{2hS}(s_{n+1} - s_{n-1}) - \frac{2D}{Re}(s_n - u_n)
 \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
 \dot{s}_1 &= (A - B)s_0 + (C - 2A)s_1 + (A + B)s_2 + (-C)u_1 \\
 \dot{s}_2 &= (A - B)s_1 + (C - 2A)s_2 + (A + B)s_3 + (-C)u_2 \\
 &\vdots \\
 \dot{s}_{n-1} &= (A - B)s_{n-2} + (C - 2A)s_{n-1} + (A + B)s_n + (-C)u_{n-1} \\
 \dot{s}_n &= (A - B)s_{n-1} + (C - 2A)s_n + (A + B)s_{n+1} + (-c)u_n
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

— La pression partielle d'O₂ dans le sang

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= -\frac{Q}{S_1} s_{o_2}(z_2 - z_0) - \frac{D_2 \Pi R}{e S_1}(z_1 - y_1) \\
\dot{z}_2 &= -\frac{Q}{S_1} s_{o_2}(z_3 - z_1) - \frac{D_2 \Pi R}{e S_1}(z_2 - y_2) \\
&\vdots \\
\dot{z}_{n-1} &= -\frac{Q}{S_1} s_{o_2}(z_n - z_{n-2}) - \frac{D_2 \Pi R}{e S_1}(z_{n-1} - y_{n-1}) \\
\dot{z}_n &= -\frac{Q}{S_1} s_{o_2}(z_{n+1} - z_{n-1}) - \frac{D_2 \Pi R}{e S_1}(z_n - y_n)
\end{aligned}$$

Posons $D = -\frac{Q}{S_1} s_{o_2}, E = -\frac{D_2 \Pi R}{e S_1}$, alors

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= (-D)z_0 + (E)z_1 + (D)z_2 + (-E)y_1 \\
\dot{z}_2 &= (-D)z_1 + (E)z_2 + (D)z_3 + (-E)y_2 \\
&\vdots \\
\dot{z}_{n-1} &= (-D)z_{n-2} + (E)z_{n-1} + (D)z_n + (-E)y_{n-1} \\
\dot{z}_n &= (-D)z_{n-1} + (E)z_n + (D)z_{n+1} + (-E)y_n
\end{aligned} \tag{4.5}$$

— La pression partielle de CO₂ dans le sang

$$\begin{aligned}
\dot{w}_1 &= -\frac{Q}{S_1} s_{co_2}(w_2 - w_0) - \frac{D_2 \Pi R}{e S_1}(w_1 - v_1) \\
\dot{w}_2 &= -\frac{Q}{S_1} s_{co_2}(w_3 - w_1) - \frac{D_2 \Pi R}{e S_1}(w_2 - v_2) \\
&\vdots \\
\dot{w}_{n-1} &= -\frac{Q}{S_1} s_{co_2}(w_n - w_{n-2}) - \frac{D_2 \Pi R}{e S_1}(w_{n-1} - v_{n-1}) \\
\dot{w}_n &= -\frac{Q}{S_1} s_{co_2}(w_{n+1} - w_{n-1}) - \frac{D_2 \Pi R}{e S_1}(w_n - v_n)
\end{aligned}$$

Posons $F = -\frac{Q}{S_1} s_{co_2}, E = -\frac{D_2 \Pi R}{e S_1}$, alors

$$\begin{aligned}
\dot{w}_1 &= (-F)w_0 + (E)w_1 + (F)w_2 + (-E)v_1 \\
\dot{w}_2 &= (-F)w_1 + (E)w_2 + (F)w_3 + (-E)v_2 \\
&\vdots \\
\dot{w}_{n-1} &= (-F)w_{n-2} + (E)w_{n-1} + (F)w_n + (-F)w_{n-1} \\
\dot{w}_n &= (-F)w_{n-1} + (E)w_n + (F)w_{n+1} + (-F)w_n
\end{aligned} \tag{4.6}$$

— La pression partielle de N₂ dans le sang

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= -\frac{Q}{S_1} s_{N_2}(u_2 - u_0) - \frac{D_2 \Pi R}{e S_1}(u_1 - s_1) \\
\dot{u}_2 &= -\frac{Q}{S_1} s_{N_2}(u_3 - u_1) - \frac{D_2 \Pi R}{e S_1}(u_2 - s_2) \\
&\vdots \\
\dot{u}_{n-1} &= -\frac{Q}{S_1} s_{N_2}(u_n - u_{n-2}) - \frac{D_2 \Pi R}{e S_1}(u_{n-1} - s_{n-1}) \\
\dot{u}_n &= -\frac{Q}{S_1} s_{N_2}(u_{n+1} - u_{n-1}) - \frac{D_2 \Pi R}{e S_1}(u_n - s_n)
\end{aligned}$$

Posons $G = -\frac{Q}{S_1} s_{N_2}, E = -\frac{D_2 \Pi R}{e S_1}$, alors

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= (-G)u_0 + (E)u_1 + (G)u_2 + (-E)s_1 \\
\dot{u}_2 &= (-G)u_1 + (E)u_2 + (G)u_3 + (-E)s_2 \\
&\vdots \\
\dot{u}_{n-1} &= (-G)u_{n-2} + (E)u_{n-1} + (G)u_n + (-E)s_{n-1} \\
\dot{u}_n &= (-G)u_{n-1} + (E)u_n + (G)u_{n+1} + (-E)s_n
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Les équations (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6) et (4.7) peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$a_{1,1} = \begin{bmatrix} (C-2A) & (A+B) & 0 & \cdots & 0 \\ (A-B) & (C-2A) & (A+B) & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & (A-B) & (C-2A) & (A+B) \\ 0 & \cdots & 0 & (A-B) & (C-2A) \end{bmatrix}$$

$a_{1,1}$ matrice de dimension $(n \times n)$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & a_{1,1} \end{bmatrix}$$

A_{11} matrice de dimension $(3n \times 3n)$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} -C & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -C & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -C \end{bmatrix}$$

A_{12} matrice de dimension $(3n \times 3n)$.

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -E & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -E \end{bmatrix}$$

A_{21} matrice de dimension $(3n \times 3n)$.

$$a_{2,1} = \begin{bmatrix} E & D & 0 & \cdots & 0 \\ -D & E & D & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -D & E & D \\ 0 & \cdots & 0 & -D & E \end{bmatrix}$$

$a_{2,1}$ matrice de dimension $(n \times n)$

$$a_{2,2} = \begin{bmatrix} E & F & 0 & \cdots & 0 \\ -F & E & F & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -F & E & F \\ 0 & \cdots & 0 & -F & E \end{bmatrix}$$

$a_{2,2}$ matrice de dimension $(n \times n)$

$$a_{2,3} = \begin{bmatrix} E & G & 0 & \cdots & 0 \\ -G & E & G & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -G & E & G \\ 0 & \cdots & 0 & -G & E \end{bmatrix}$$

$a_{2,3}$ matrice de dimension $(n \times n)$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} a_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{2,3} \end{bmatrix}$$

A_{22} matrice de dimension $(3n \times 3n)$.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

A matrice de dimension $(6n \times 6n)$

$$B_1 = \begin{bmatrix} (A-B)y_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (A+B)y_L \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} (A-B)v_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (A+B)v_L \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} (A-B)s_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (A+B)s_L \end{bmatrix}$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} (-D)z_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (D)z_L \end{bmatrix} \quad B_5 = \begin{bmatrix} (-F)w_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (F)w_L \end{bmatrix} \quad B_6 = \begin{bmatrix} (-G)u_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (G)u_L \end{bmatrix}$$

D'où

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{bmatrix}$$

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} \quad \dot{v} = \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \vdots \\ \dot{v}_{n-1} \\ \dot{v}_n \end{bmatrix} \quad \dot{s} = \begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \vdots \\ \dot{s}_{n-1} \\ \dot{s}_n \end{bmatrix}$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} \quad \dot{w} = \begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \vdots \\ \dot{w}_{n-1} \\ \dot{w}_n \end{bmatrix} \quad \dot{u} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_{n-1} \\ \dot{u}_n \end{bmatrix}$$

D'où

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{v} \\ \dot{s} \\ \dot{z} \\ \dot{w} \\ \dot{u} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix} \quad s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{n-1} \\ s_n \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \\ w_n \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}$$

D'où le vecteur d'état

$$X = \begin{bmatrix} y \\ v \\ s \\ z \\ w \\ u \end{bmatrix}$$

Le système est sous la forme suivante :

$$\dot{X} = AX + B$$

4.3 Simulation du modèle discrétisé

Pour la simulation des équations différentielles obtenues, on a utilisé la méthode des lignes en considérant un nombre de points de discrétisation $n = 200$. Les paramètres du systèmes sont résumés dans le Tableau suivant.

Paramètres	Valeurs
K	0.2
D	0.5
R	1.6 <i>cm</i>
e	0.5 <i>cm</i>
γ	0.22 <i>g/s</i>
S	0.9 <i>cm</i> ²
S_1	1.5 <i>cm</i>
Q	0.006 <i>g/s</i>
S_{O_2}	0.65 <i>ml</i>
S_{CO_2}	0.71 <i>ml</i>
S_{N_2}	0.29 <i>ml</i>

TABLE 4.1 – Les paramètres du systèmes discrétisé

Les résultats de simulation obtenus sont donnés par les figures suivantes.

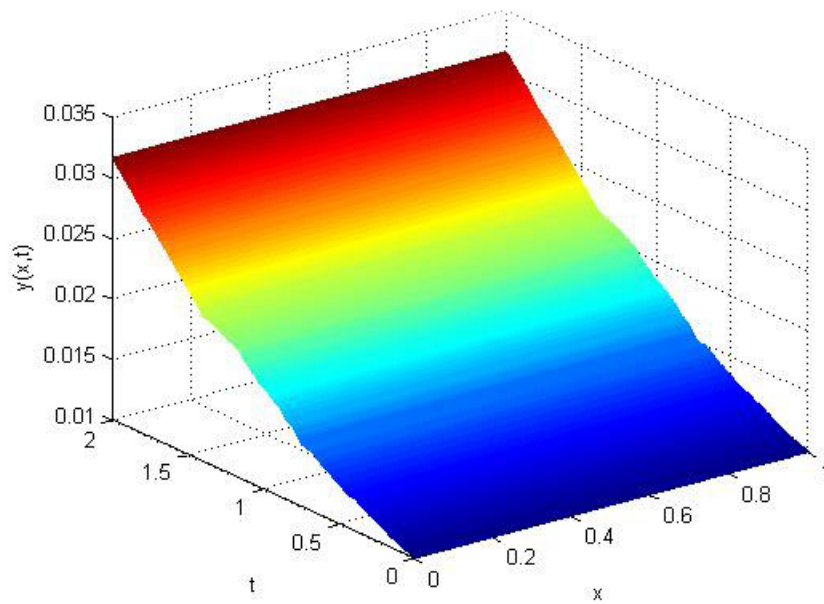


FIGURE 4.1 – La pression d'O₂ dans le tube

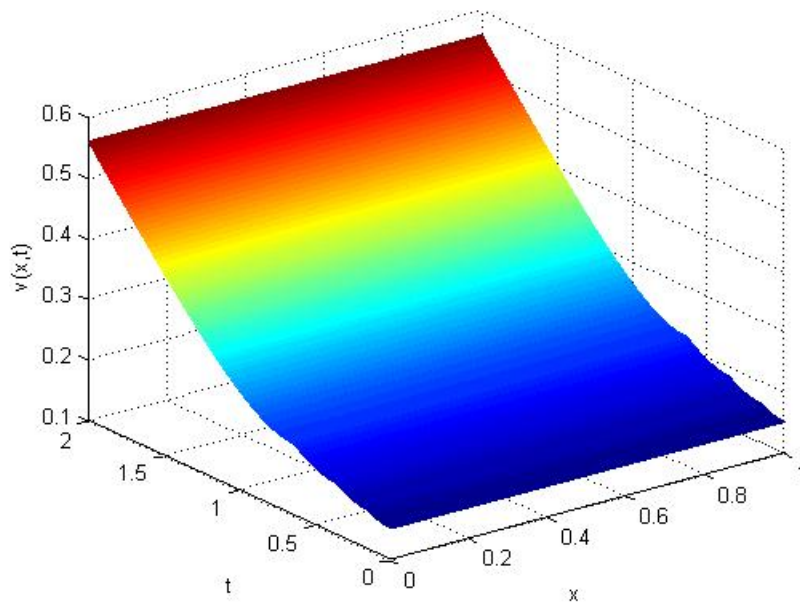


FIGURE 4.2 – La pression de CO₂ dans le tube

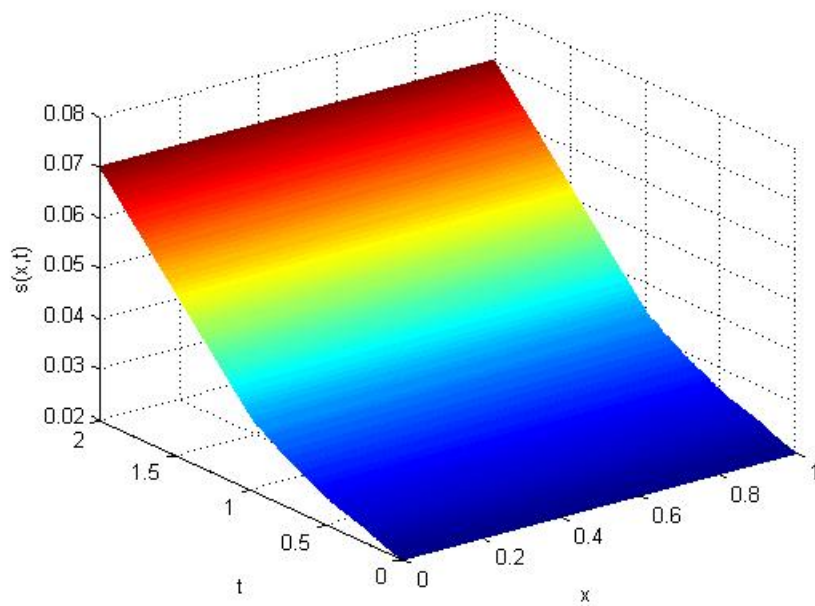


FIGURE 4.3 – La pression de N2 dans le tube

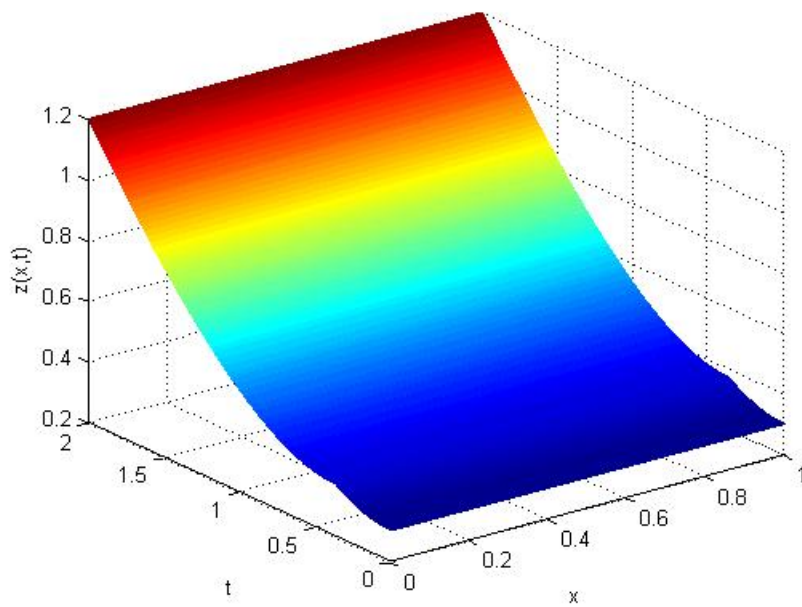


FIGURE 4.4 – La pression d'O2 dans le sang

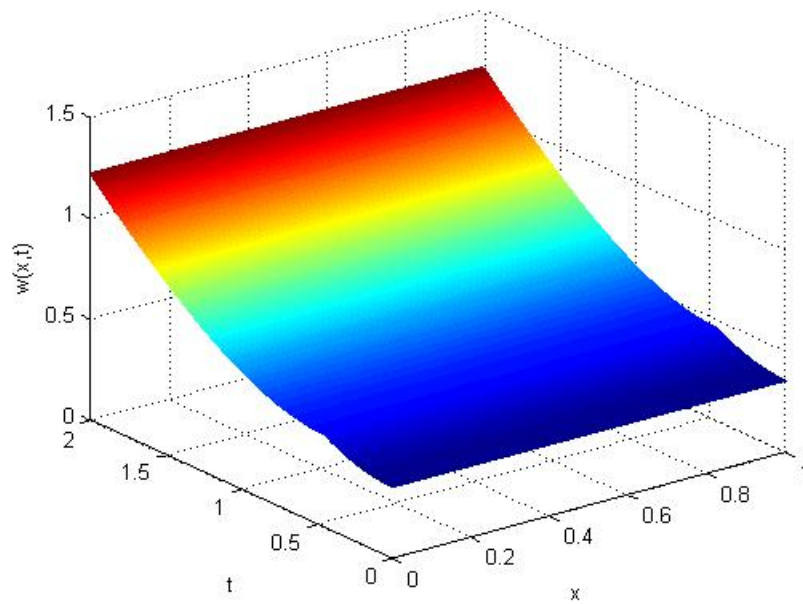


FIGURE 4.5 – La pression de CO2 dans le sang

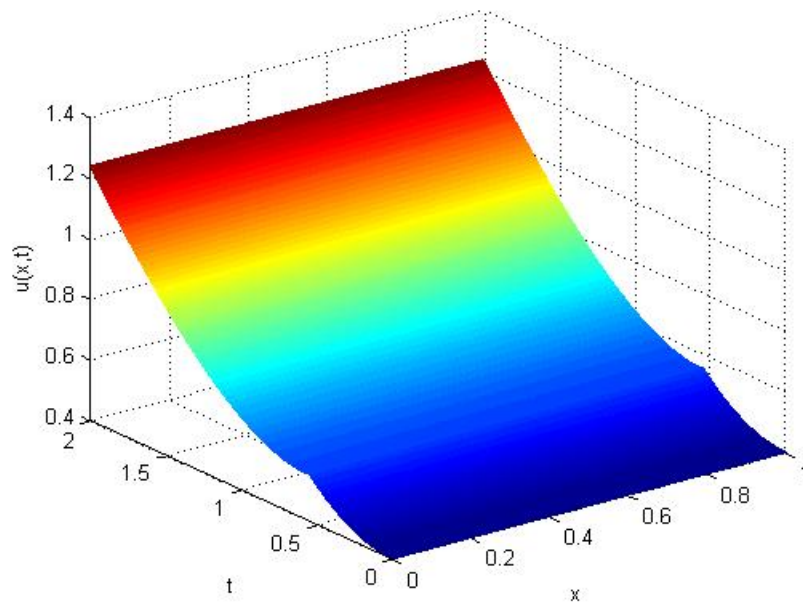


FIGURE 4.6 – La pression de N2 dans le sang

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé la méthode des lignes pour étudier l'évolution des échanges gazeux (O_2 , CO_2 et N_2) entre l'alvéole et le capillaire sanguin. Le modèle EDP a été discrétisé en utilisant les différences finies centrées. Les conditions aux limites

considérées sont du type Dirichlet. Pour la précision des résultats, nous avons utilisé pour un nombre de points de discrétisation égale à 200.

Les résultats obtenus par la simulation du système nous révèlent que la solution dépend du nombre de points de discrétisation (plus le nombre de points est important, plus la solution est précise), le pas de discrétisation et évidemment des conditions initiales et aux limites.

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire, nous a permis d'étudier d'un point de vue théorique et numérique le système respiratoire. Le modèle est décrit par six équations aux dérivées partielles (EDP) dont trois équations représentent la pression des trois gaz (O₂, CO₂ et N₂) dans le tube (alvéole) et les autres représentent la pression des mêmes gaz mais dans le sang. L'objectif consiste à appliquer la méthode des lignes pour simuler le comportement dynamique de ce système.

La méthode des lignes est un bon choix parmi les différentes méthodes numériques existantes. Cette méthode permet de résoudre des équations aux dérivées partielles adaptée généralement à tout type de système. C'est une méthode simple à mettre en œuvre. Elle est basée sur la discrétisation de l'espace.

Dans un premier temps, nous avons présenté brièvement des généralités et des notions relatives à la modélisation des systèmes. Puis, nous avons présenté le système de respiration et son modèle mathématique décrits par un ensemble de 6 EDPs. Ensuite, nous avons présenté la méthode des lignes utilisée pour la simulation (résolution) des EDPs. L'approximation des dérivées spatiales est réalisée par les différences finies développées en utilisant l'interpolation de Lagrange.

Les résultats de simulation ont montré que la précision de la solution dépend du choix du nombre de points de discrétisation et les schémas des différences finies utilisés. Ainsi pour un nombre de point petit, on perd la précision, et pour un nombre plus grand nous obtenons une solution plus précise. De plus, des schémas de différences centrées sont plus indiquées pour simuler les phénomènes diffusion-convection et réaction.

L'étude présentée montre clairement l'intérêt de l'utilisation des EDPs dans les systèmes biologiques. Aussi, leur résolution par la méthode des lignes. Il est vraiment intéressant d'appliquer cette technique pour l'étude de d'autres systèmes biologiques et en particulier ceux qui sont de nature non linéaire.

Bibliographie

- [1] J.-P. CORRIOU. Commande des procédés. Lavoisier, Paris, 1996.
- [2] A. AMOURA « Modélisation et identification des systèmes », cours 2 ème année licence Automatique, département automatique, Faculté de Génie Electrique et d'Informatique, Université Mouloud MAMMERI de Tizi -Ouzou, 2017-2018.
- [3] Échanges d'oxygène et de dioxyde de carbone - MSD Manuals <https://www.msmanuals.com> > accueil > échanges-d-oxygène.
- [4] Y. CHERRUALT. Biomathématiques, PRESS UNIVERSITAIRES DE FRANCE, Paris, 1983.
- [5] F. S. GRODINS et S. M. YAMSHIRO. Respiratory function of the lung and its control, Macmillan Publishing Co. Inc, New York, 1978.
- [6] P. G. CIARLET et J. L LIONS. Introduction à l'Analyse Numérique des équations aux dérivées partielles, Collection Mathématiques appliquées pour la Maitrise, Masson, Paris Milan, Barcelone Mexico, 1988.
- [7] W. ABDUL-MAJID. Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [8] C. DAVID et P. GOSSELET. Equations aux dérivées partielles : Cours et exercices corrigés. DUNOD, Paris, 2015.
- [9] E. GONCALV. Résolution numérique des équations d'Euler 1D. Ecole d'ingénieur Lyon 2015.
- [10] F. JEDRZEJEWSKI. Introduction aux méthodes numériques. Springer-verlag, Paris, 2006.
- [11] W. E. SCHIESSER. THE NUMERICAL METHOD OF LINES : Integration of Partial Différential. Academic press, San Diego, 1991.
- [12] R. SORRENTINO. Numerical methods for passive microwave and millimeter wave structure. IEEE Press, New York, 1989.

Résumé

Notre mémoire permet de donner une idée plus claire des possibilités de la modélisation dans le domaine biomédical en utilisant des équations aux dérivées partielles (EDP). On s'intéresse à modéliser et simuler un phénomène biologique qui est le système respiratoire. Le but est de présenter un modèle des échanges gazeux entre l'alvéole (élément unitaire des poumons) et le capillaire sanguin.

Il existe plusieurs méthodes numériques pour la simulation de notre système, une méthode est proposée <<la méthode des lignes>> qui consiste à discrétiser le domaine spatial en un nombre fini de points pour se ramener à un système d'équations différentielles ordinaires (EDO).

LES MOTS-CLES

Modélisation, système respiratoire, équations aux dérivées partielles (EDP), modéliser, simulation, méthode des lignes, discrétisation, équation de chaleur, interpolation de Lagrange.