

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI-OUZOU
Faculté du Génie de la Construction
Département de Génie Civil

MEMOIRE DE MASTER ACADEMIQUE

EN GENIE CIVIL

Option: Structures

Présenté par : Oubellil Kahina

THEME :

Réponse dynamique en régime forcé des câbles de suspension:
Développements et analyses sous charges réparties transversales



Devant les membres du jury composé:

Dahmani Lahlou
Sadaoui Arezki
Illouli Said
Lattari Kamel

Professeur
Professeur
Maitre de Conférence A
Maitre de Conférence A

U.M.M.Tizi-Ouzou
U.M.M.Tizi-Ouzou
U.M.M.Tizi-Ouzou
U. Bouira

Président
Rapporteur
Examineur
Invité

Soutenu, le

TABLE DES MATIERES

Chapitre 1 : Introduction

1-1 Etat de la question	1
1-2 Etat de la problématique et cadre de ce travail	5
1-4 Cheminement du travail suivi	6

Chapitre 2 : Réponse dynamique en régime forcé: développements théoriques de base sous l'action des charges réparties

2-1 Généralités	8
2-2 Développements théoriques	9
2-2-1 Forme géométrique initiale	9
2-2-2 Equations générales de mouvements d'un élément de câble	10
2-3 Mouvement transversal – cas particulier sous charges réparties	12
2-3-1 Quelques notions de rappel sur la méthode de séparation de variables	13
2-3-2 Transformation de l'équation de mouvement - expressions générales	14
2-3-3 Cas d'un système non amorti	15
2-4 Réponse sous charges réparties	16
2-4-1 Réponse à une charge échelon répartie d'amplitude constante, $F_z(x,t) = F_0$	17
2-4-2 Réponse à une charge répartie harmonique cosinusoidale de type $F_0 \cdot \cos(\Omega t)$	21
2-4-3 Réponse à une charge répartie harmonique sinusoïdale de type $F_0 \cdot \cos(\Omega t)$	24
2-5 Rapport d'amplitudes et spectre de réponse	28
2-5 Evaluation des pulsations propres	26

Chapitre 3: Expérimentations numériques et analyses

3-1 Généralités	32
3-2 Résultats numériques et validation	32
3-2-1 Sous l'action d'une charge échelon uniformément répartie d'amplitude, F_0	33

3-2-2 Réponse à une charge répartie harmonique cosinusoidale de type $F_0 \cdot \cos(\Omega t)$	36
3-2-3 Réponse à une charge répartie harmonique sinusoidale de type $F_0 \cdot \sin(\Omega t)$	38
3-3 Analyse paramétrique	40

Chapitre 4: Conclusions générales

4-1 Rétrospective	45
4-2 Organisation du travail	45
4-3 Résultats obtenus	46
4-4 Recommandations futures	47
Références	48

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1-1 Etat de la question

Les systèmes par câbles sont fortement employés dans la construction et constitue tant sur le plan architectural que technique une évolution conceptuelle importante dans l'art de construire. Leurs avantages permettant à la fois d'augmenter la portée et de réduire le poids propre, répondent d'une manière radicale au problème longtemps posé dans la réalisation des grandes portées. Les exemples pratiques sont très nombreux dans le domaine des constructions civiles et industrielles [1,2,3]. Songeons particulièrement aux ouvrages suivants :

- ponts suspendus (fig.1-1) ou haubanés (fig.1-2) indispensables pour franchir des vallées, des rivières ou des bras de mer d'une ampleur considérable.
- téléphériques fortement appréciés et notamment privilégiés ces derniers temps en Algérie comme mode de transport public aérien; c'est à l'image de celui actuellement en service depuis environ une année, dans la ville de Tizi-ouzou (fig.1-3), qui relie la gare modale de Bouhinoun à la cité administrative de la wilaya en passant par le stade du premier novembre. Ce mode de transport est généralement utilisé pour gravir un relief pentu et très accidenté ou franchir une dépression géographique (vallée, voie d'eau, montagne dans les stations de ski ou encore en milieu urbain pour la desserte d'un terrain communal au relief difficile) dans le but de se soustraire à des contraintes topographiques (fig. 1-4).
- passerelles piétonnières (fig. 1-5) qui sont des ouvrages très flexibles dont l'implantation est très intéressante dans des sites d'attraction.
- lignes aériennes de transport de l'énergie électrique (fig.1-6).



Figure 1-1 : Pont routier Pierre-Laporte, Québec city ; Longueur totale : 1041 m ; Portée principale: 668 m ; Hauteur totale: 116 m ; Année : 1966-1970

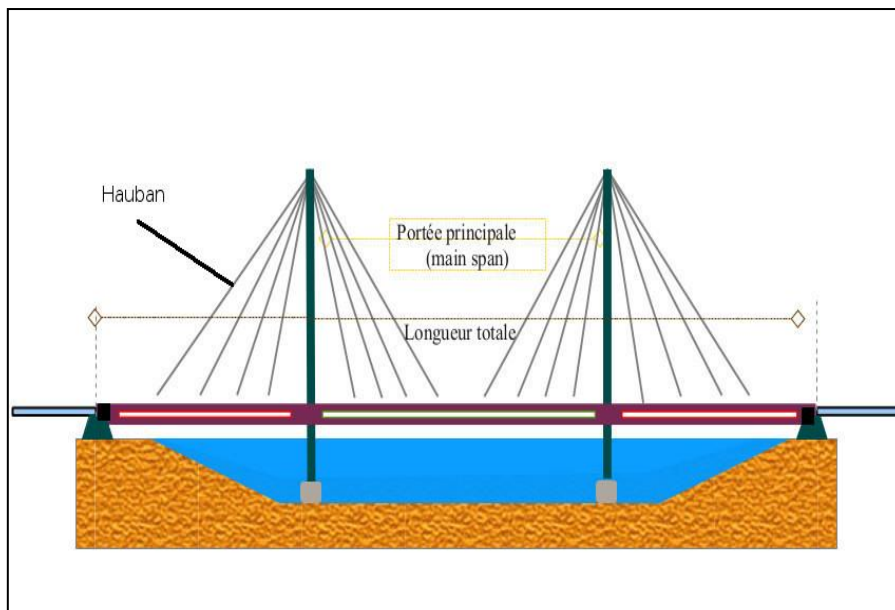


Figure 1-2: Pont type haubané comme celui de Sidi Merouane à Mila



Figure 1-3: Vue de télécabines surplombant le campus Hasnaoua



Figure 1-4 : Vue d'une télécabine entre Oued Koriche et Bouzaréah, Alger



Figure 1-5: Passerelle piétonnière suspendue rigidifiée par des câbles précontraints



Figure 1-6: Photo de ligne de transport d'énergie électrique

Les câbles les plus employés dans ce type d'ouvrages sont généralement des câbles de type toronné i.e constitués des fils d'acier enroulés hélicoïdalement autour d'un fil central appelé âme, en plusieurs couches de pas inversés (fig.1-7). Ils ont une très haute limite d'élasticité atteignant plusieurs fois celle de l'acier traditionnel de charpente métallique. Les torons dont sont ainsi formés les câbles peuvent contenir des centaines de fils et

atteindre des limites de rupture de plusieurs centaines de tonnes. Leur module d'élasticité intrinsèque est plus petit que celui du matériau en acier à cause de l'enroulement des fils en hélice ou une valeur de 170000MPa n'est pas rare. On parle ainsi de câbles à torons parallèles lorsque les câbles sont constitués d'un ensemble de torons alignés. Quand ils sont constitués d'un ensemble de torons enroulés autour d'une âme centrale métallique ou textile, on parle alors de cordages. Les cordages possèdent un module d'élasticité intrinsèque encore plus faible, qui peut être inférieur à 140000 MPa.

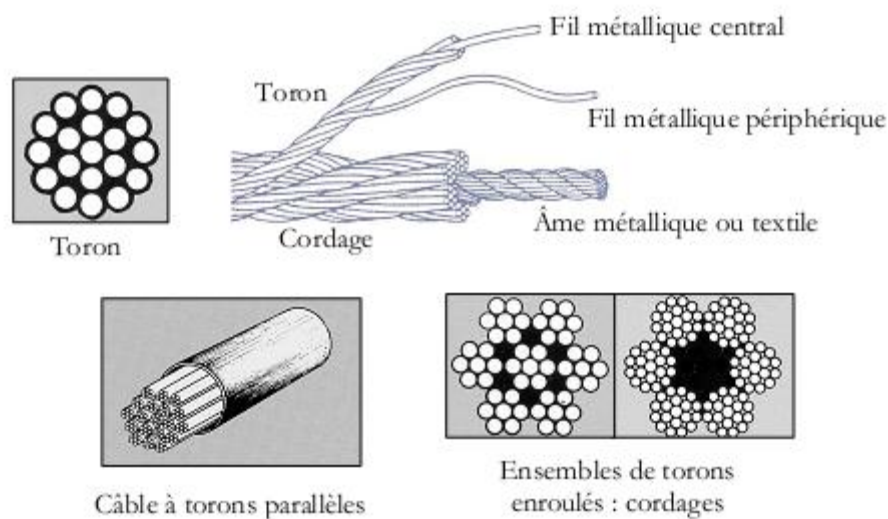


Figure 1-7: Câbles à torons parallèles et enroulés

1-2 Etat de la problématique et cadre de ce travail

La caractéristique essentielle des câbles suspendus est que ce sont des structures souples, dont l'analyse mécanique est fondamentalement non linéaire parce qu'ils sont susceptibles de subir des grands déplacements. Ils en subissent lors de la réalisation ou au cours de l'exécution de pose, quand on ajuste des flèches pour respecter des contraintes d'environnement. Par ailleurs, les systèmes à câbles qui sont réputés très légers employant comme principal élément le câble, l'équilibre des charges doit être réalisé uniquement par des efforts de traction pure, développés parallèlement à la fibre moyenne du câble. Cela signifie qu'aucune rigidité flexionnelle ou de compression n'est attribuée au système. De cette caractéristique découle la nécessité pratique de mise en tension préalable à toute utilisation, et dont l'effet joue un rôle extrêmement important dans la stabilité des structures correspondantes dont le poids propre demeure particulièrement faible. Cette pré-tension,

également appelée précontrainte, représente la charge qu'il est nécessaire d'intégrer initialement à une résille pour qu'en aucun cas de surcharge, l'un quelconque des éléments du système ou de la résille ne risque d'être virtuellement comprimé i.e tendu.

On ne peut cependant faire abstraction de la vulnérabilité de ce type de structures aux problèmes de stabilité liés principalement aux phénomènes de flottement et de résonance qui, à défaut de n'avoir pas reçu à priori une grande attention, risquent d'affecter à terme sérieusement la stabilité et la durabilité entière de la construction. En effet, à cause des effets dynamiques dus aux charges, les câbles peuvent être animés de mouvements de grandes amplitudes par exemple sous l'impulsion de la pression du vent, de la chute de manchons de givre ou, en cas d'incident dans les lignes de transport d'énergie électrique à cause des forces de Laplace importantes qui résultent des courants de court-circuit. Ces mouvements exercent sur les supports des câbles des efforts beaucoup plus élevés que les efforts statiques qu'il faut en tenir compte dans la conception des ouvrages. L'étude du comportement dynamique des câbles devient par conséquent importante à laquelle, en outre, il faut considérer la non linéarité géométrique qui joue un rôle significatif dans un système léger et aussi déformable qu'est le système à câble [1,2].

Le but principal de ce travail consiste de mettre au point une méthode de calcul analytique complète, simple et précise, capable d'analyser en régime forcé le comportement d'un câble suspendu à ses extrémités, de forme parabolique, soumis à l'action de charges dynamiques transversales de type réparties. Ce type de charges peut être occasionné dans la pratique par exemple par l'action d'une rafale de vent violente. A ceci va se greffer un autre objectif complémentaire qui consiste de mettre en évidence, à travers une analyse paramétrique appropriée, comme l'influence des fréquences de vibration du chargement appliqué sur la réponse de l'ouvrage. Notons que ce travail fait suite au travail déjà réalisé précédemment par Hacherouf Mohamed Cherif [4] consacré particulièrement à l'analyse dynamique des câbles de suspension en régime vibratoire libre c'est-à-dire en l'absence de toute force perturbatrice extérieure.

1-3 Cheminement du travail suivi

Le travail présenté dans ce mémoire sera organisé en quatre chapitres dont le présent premier chapitre en guise d'introduction sera consacré essentiellement à la nature de la

problématique et de la question des structures suspendues légères ainsi qu'à la description des objectifs fixés.

Le deuxième chapitre aura trait à la revue des fondements théoriques de base de calcul d'un câble de suspension sous l'action des charges dynamiques particulièrement réparties. La théorie linéaire en régime vibratoire forcé sera adoptée afin de dériver l'équation d'équilibre de mouvement transversal ou horizontal d'un élément différentiel de câble soumis à une excitation dynamique extérieure quelconque et préalablement à une précontrainte initiale de réglage due au poids propre de l'ouvrage. Les câbles sont principalement supposés ancrés solidement à des massifs d'ancrage et dont la géométrie est de la forme d'une parabole de deuxième degré.

L'avant dernier chapitre sera consacré à l'implémentation numérique et à l'analyse des résultats portant sur le câble principal du pont suspendu de Bosphore, en Turquie, lors de la phase de sa réalisation. Les charges sont horizontales ou transversales réparties uniformément le long du câble soit appliquées perpendiculairement au plan général du système. Pour jauger la fiabilité et la précision de la méthode analytique de calcul ainsi élaborées, les résultats obtenus seront discutés et comparés à ceux issus du logiciel ANSYS, code numérique internationalement reconnu, basé sur la méthode des éléments finis dont le principe consiste de traiter la structure comme telle par modèle discret. Nous allons particulièrement mettre en évidence le phénomène de résonance lorsque la fréquence du chargement harmonique considérée s'approche de la première fréquence propre de vibration du câble.

Nous terminerons en guise de dernier chapitre par une conclusion générale suivie par quelques recommandations pour l'amélioration et la poursuite éventuelle de ce travail.

CHAPITRE 2

REPONSE DYNAMIQUE EN REGIME FORCE: DEVELOPPEMENTS THEORIQUES DE BASE SOUS CHARGES REPARTIES

2-1 Généralités

Ce chapitre a pour but d'exposer les développements théoriques de base de la méthode de calcul permettant d'analyser la réponse dynamique, en régime forcé, d'un câble précontraint de suspension soumis à l'action de charges extérieures transversales ou horizontales de type localisées ou ponctuelles. L'équation différentielle de mouvement qui en résulte est obtenue en utilisant le principe fondamental de la dynamique (ou la deuxième loi de Newton ou d'Alembert) selon lequel la dérivée de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures qui s'exerce sur un corps solide. La dérivée de la quantité de mouvement (par rapport au temps) n'est rien d'autre que la force d'inertie qui est égale au produit de la masse du corps par son accélération, s'opposant toujours à la direction du mouvement.

Les hypothèses principales qui délimitent les conditions de validité de la méthode peuvent être énumérées comme suit:

- câble parfaitement flexible : cela revient à énoncer en langage structural que, tout au long d'un câble en équilibre, le moment fléchissant est nul;
- câbles relativement tendus (peu profonds) correspondant à un rapport flèche/travée de l'ordre de 1/10 ou moins de sorte que les chaînettes fortement aplaties sont assimilables, dans l'état initial, à des paraboles de 2^{ème} degré; il en découle que les efforts de tension engendrés dans le câble sont uniformes sur l'horizontale, au moment du réglage;
- variations de températures éventuelles uniformes et constantes partout dans la structure ;
- poussées additionnelles induits dans le câble sous l'effet des surcharges transversales appliquées sont négligeables.

2-2 Développements théoriques

Considérons un câble parabolique uniforme chargé seulement sous l'action de son propre poids w_0 . Sa position d'équilibre comme montré dans la figure 2-1 demeure dans son propre plan vertical (x-y) ; le câble étant supposé librement appuyé à ses extrémités et ne présentant pas de dénivellation d'appuis.

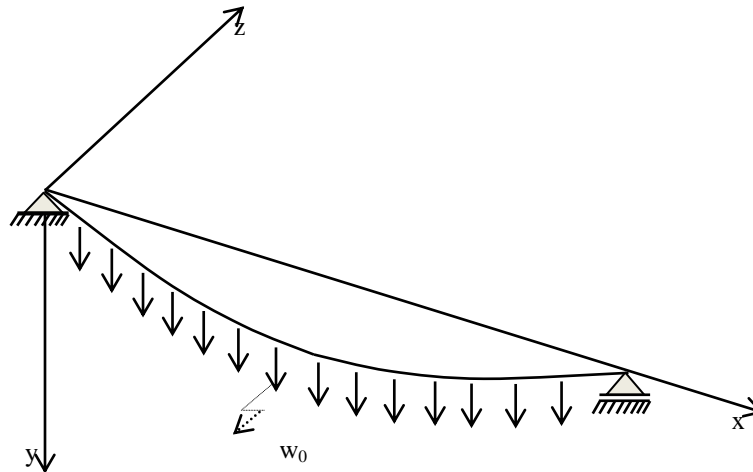


Figure 2-1: Position géométrique lors du réglage initial

2-2-1 Forme géométrique initiale

Le profil géométrique du câble lors du réglage initial est décrit par l'équation suivante [4] :

$$y = \frac{m_0 g \ell^2}{2H} \left\{ \frac{x}{\ell} - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right\} \quad (2-1)$$

où $m_0 = w_0/g$ est la masse par unité de longueur du câble et g représente l'accélération due à la pesanteur ($=9.81 \text{ m/s}^2$). Quant à la poussée H qui représente la force de précontrainte initiale de réglage engendrée dans le câble, est donnée par la formule :

$$H = \frac{w_0 \ell^2}{8f_0} \quad (2-2)$$

où f_0 étant la flèche du câble (à mi-travée, $x=\ell/2$).

2-2-2 Equations générales de mouvements d'un élément de câble

Soumettons maintenant le câble à des forces dynamiques arbitraires $F_x(x,t)$, $F_y(x,t)$ et $F_z(x,t)$ qui engendrent en chaque point $P(x,y,z)$ du câble respectivement des déplacements u , v et w selon les axes x , y et z ainsi schématisé dans la figure 2-2. Alors, les vibrations qui en résultent se décomposent généralement en trois composantes à savoir un mouvement longitudinal (u), un mouvement transversal vertical (v) et mouvement transversal horizontal (w).

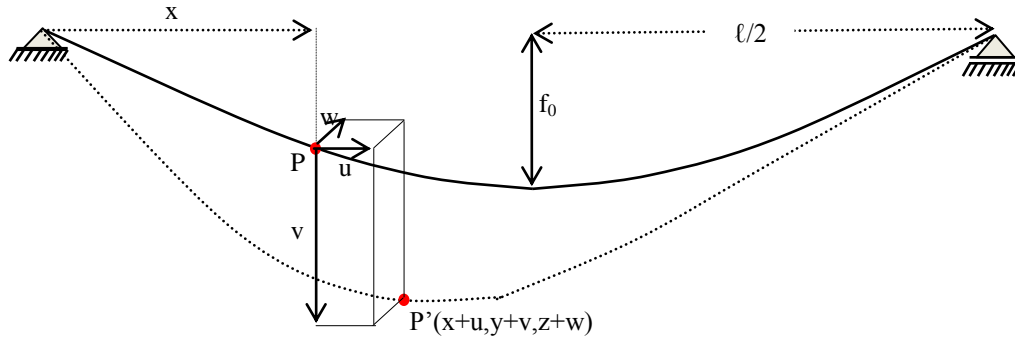


Figure 2-2 : Configuration du câble après déformation

En appliquant le principe fondamental de la dynamique ou la deuxième loi de Newton, l'équilibre dynamique d'un élément de câble permet d'écrire les conditions suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ (T + \tau) \left(\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial s} \right) \right\} + F_x(x,t) = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2-3a)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ (T + \tau) \left(\frac{dy}{ds} + \frac{\partial v}{\partial s} \right) \right\} + F_y(x,t) = m_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - m_0 g \quad (2-3b)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ (T + \tau) \frac{\partial w}{\partial s} \right\} + F_z(x,t) = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2-3c)$$

où τ est la tension supplémentaire engendrée par le mouvement du câble en passant du point $P(x,y,z)$ au point $P'(x+u,y+v,z+w)$. Les composantes du mouvement u , v et w ainsi que la

tension τ sont des fonctions dépendantes simultanément des coordonnées et du temps ; les forces $F_x(x,t)$, $F_y(x,t)$ et $F_z(x,t)$ étant exprimées par unité de longueur du câble.

Les équations (2-3) peuvent être simplifiées pour des problèmes manuels en développant chaque équation tenant compte des conditions liées à la position d'équilibre initiale et en négligeant les termes de second ordre. En plus, puisque l'analyse est valable uniquement pour des câbles avec un rapport flèche/travée de l'ordre de 1/8 ou moins, la composante longitudinale du mouvement de ces équations s'avère d'une moindre importance et peut donc être négligée. Par conséquent, les équations d'équilibre de mouvement d'un élément infinitésimal de câble de longueur dx se réduisent à :

$$H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + h \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + F_y(x,t) = m_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2-4a)$$

$$H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F_z(x,t) = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2-4b)$$

où h étant la composante additionnelle de la tension induite dans le câble et qui est une fonction dépendante du temps seul. Notons que le mouvement transversal horizontal est complètement découplé du mouvement dans le plan vu qu'il n'y a pas, au premier ordre, de force de tension additionnelle dans le câble [5]. Ce qui, selon Irvine [6], est en accord avec l'expérience où dans une chaînette ou une caténaire le seul mode de vibration facile à obtenir est le premier mode d'oscillation. Par suite, au premier ordre, une excitation dynamique ne possédant pas de composante dans le plan entrainera seulement un mouvement transversal horizontal, et vice versa.

Par ailleurs, vu les restrictions adoptées sur la géométrie du câble, c'est bien la composante verticale du mouvement qui est la plus déterminante quand le câble vibre dans le mode plan. L'amplitude qui correspond à la composante longitudinale est toujours substantiellement inférieure par rapport à celle du mouvement vertical. Dans beaucoup de situations pratiques, les composantes longitudinales modales sont d'une moindre importance et par conséquent, les composantes verticales modales peuvent être désignées comme modes plans. Cependant, dans ce qui suit à cause de la simplicité d'analyse que cela entraîne et qui est d'ailleurs l'objectif fixé dans ce travail, nous allons nous limiter seulement au mouvement

transversal horizontal c'est-à-dire au mouvement qui se produit dans le plan perpendiculaire au câble autrement dit dans le plan x-z.

2-3 Mouvement transversal horizontal – cas particulier sous charges réparties

Soit à résoudre l'équation différentielle du mouvement transversal d'un élément de câble (2-4b) que nous réécrivons sous la forme suivante pour un milieu général non conservatif ou en présence de l'amortissement éventuel:

$$m_0 \cdot \ddot{w} + c\dot{w} - H \cdot w'' = F_z(x, t) \quad (2-5)$$

où nous avons:

$w(x, t)$: déplacement transversal du câble suivant l'axe z ;

H : composante horizontale de la tension du câble ou poussée définie par l'équation (2-2) ;

m_0 : masse linéique du câble ($= w_0/g$);

c : constante d'amortissement éventuelle du câble;

$F_z(x, t)$: Force extérieure appliquée sur le câble dans la direction de l'axe z, pouvant être de nature dynamique.

Notons que l'équation (2-5) peut être directement obtenue en considérant respectivement l'équilibre vertical selon y (sous le poids propre linéique du câble; w_0) et l'équilibre transversal selon z (sous les charges réparties $F_z(x, t)$) comme indiqué dans les figures 2-3 et 2-4.

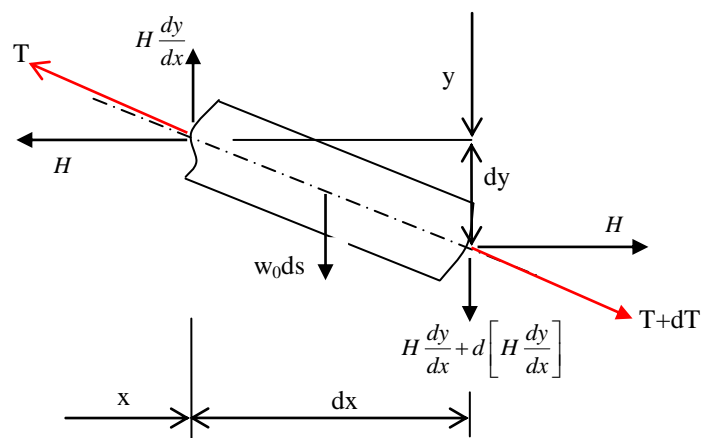


Figure 2-3 : Equilibre vertical, selon y

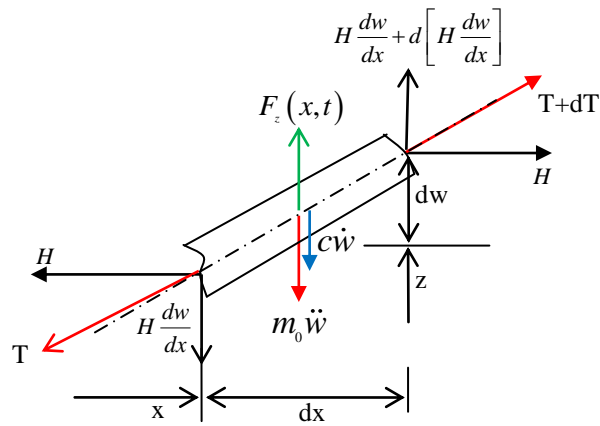


Figure 2-4 : Equilibre transversal, selon z

2-3-1 Quelques notions de rappel sur la méthode de séparation de variables

Afin de résoudre l'équation différentielle de mouvement (2-5) et par conséquent déterminer le déplacement transversal $w(x,t)$ en n'importe quel point du câble situé à une abscisse x , nous allons faire appel à la méthode de séparation des variables [7] nous permettant d'écrire:

$$w(x,t) = \tilde{w}(x) \cdot f(t) \quad (2-6)$$

où $\tilde{w}(x)$ représente une fonction de forme et elle ne dépend que de la variable spatiale (x) et $f(t)$ est une fonction temporelle dépendante que de la variable du temps (t).

Pour que la fonction de forme $\tilde{w}(x)$ soit la solution recherchée du problème, elle doit nécessairement vérifier les deux conditions aux limites du câble c'est-à-dire:

$$\tilde{w}(x=0) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{w}(x=l) = 0 \quad (2-7)$$

Par suite, la fonction trigonométrique suivante peut être ainsi la solution du problème puisqu'elle satisfait les conditions (2-7):

$$\tilde{w}(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad (2-8)$$

2-3-2 Transformation de l'équation de mouvement - expressions générales

Admettons qu'en un point quelconque du câble d'abscisse x , au temps t , le déplacement transversal $w(x,t)$ donné est formé par la somme de n contributions modales ; ce qui nous permet ainsi d'écrire l'expression suivante en utilisant la notion de la méthode de séparation de variables appliquée au niveau de chaque mode:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cdot \tilde{w}_n(x) \quad (2-9)$$

où $\tilde{w}_n(x)$ et $f_n(t)$ représentent respectivement la forme propre et l'amplitude dans un mode de vibration donné (n).

Choisissons une allure trigonométrique pour la fonction de la forme propre qui vérifie automatiquement les conditions aux limites du câble dans chaque mode de vibration. Celle-ci s'écrira par analogie à la relation (2-8) pour le mode n :

$$\tilde{w}_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad (2-10)$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation différentielle du mouvement (2-5) est de la forme suivante:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot f_n(t) \quad (2-11)$$

En substituant cette dernière relation dans l'équation (2-5), cela va nous permettre de transformer l'équation aux dérivées partielles en une équation différentielle ordinaire. Nous allons ainsi obtenir successivement:

$$\dot{w}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot \dot{f}_n(t)$$

$$\ddot{w}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot \ddot{f}_n(t)$$

$$w''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot f_n(t)$$

$$m_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot \ddot{f}_n(t) + H \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot f_n(t) + c \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot \dot{f}_n(t) = F_z(x, t)$$

En multipliant cette dernière par $\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ et en intégrant par rapport à x de 0 à ℓ , nous

obtenons :

$$m_0 \cdot \ddot{f}_n(t) + H \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 f_n(t) + c \dot{f}_n(t) = \frac{2}{\ell} Q_n(t) \quad (2-12)$$

où:

$$Q_n(t) = \int_0^{\ell} F_z(x, t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \quad (2-13)$$

NB: $\int_0^{\ell} \left(\sin \frac{n\pi x}{\ell}\right)^2 dx = \frac{\ell}{2}$. En effet, en sachant que $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ avec $\alpha = \frac{n\pi x}{\ell}$, cela

entraîne : $\left(\sin \frac{n\pi x}{\ell}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{\ell}\right)$ qui par suite son intégration conduit à

$$\int_0^{\ell} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{\ell}\right) dx = \frac{1}{2} \left\{ x \Big|_0^{\ell} - \left[\frac{\ell}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{\ell} \right]_0^{\ell} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \ell - \frac{\ell}{2n\pi} \cdot \sin 2n\pi \right\} ; \sin 2n\pi = 0, \text{ qqs } n.$$

2-3-3 Cas d'un système non amorti

Quand l'amortissement est nul ($c=0$), l'équation (2-12) devient :

$$m_0 \cdot \ddot{f}_n(t) + k_n \cdot f_n(t) = \frac{2}{\ell} Q_n(t) \quad (2-14)$$

où

$$k_n = m_0 \omega_n^2 \quad (2-15)$$

$$\omega_n = \frac{n \cdot \pi}{\ell} \sqrt{\frac{H}{m_0}} \quad (2-16)$$

Les paramètres ω_n et k_n désignent respectivement la pulsation et la force de rappel des câbles dans un mode vibration donné n .

Postulons maintenant que la solution générale de l'équation (2-14) correspondant à une excitation quelconque appliquée à un système non amorti est donnée par la somme de la solution homogène et de la solution particulière, soit:

$$f_n(t) = A_n \cos(\omega_n \cdot t) + B_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t) + \frac{2}{m_0 \cdot \ell \cdot \omega_n} \cdot \int_0^t Q_n(\tau) \cdot \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau \quad (2-17)$$

où les valeurs des coefficients A_n et B_n dépendent des conditions initiales. On obtient la solution complète de l'équation de mouvement transversal (2-5), dans un système non amorti, en substituant l'équation (2-17) dans la relation (2-10), nous conduisant à:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n \cdot t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{m_0 \cdot \ell \cdot \omega_n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot \int_0^t Q_n(\tau) \cdot \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau \quad (2-18)$$

Le dernier terme représente l'intégrale de Duhamel [8] et les coefficients A_n et B_n seront déterminés en utilisant les conditions initiales du câble.

2-4 Réponse sous charges réparties

Dans cette section, nous allons développer la réponse du câble en considérant plusieurs types de charges uniformément réparties usuelles à savoir i) une charge échelon ou d'amplitude constante, $F_z(x, t) = F_0$ ii) une charge cosinusoidale $F_z(x, t) = F_0 \cos \Omega t$ iii) d'une charge sinusoïdale $F_z(x, t) = F_0 \sin \Omega t$; le chargement harmonique étant d'une amplitude F_0 et de pulsation ou de fréquence angulaire Ω .

2-4-1 Réponse à une charge échelon répartie d'amplitude constante, $F_z(x,t) = F_0$

Une charge échelon est par définition une force constante qui varie brusquement de zéro à une valeur constante q comme schématisé sur la figure 2-5, s'écrivant :

$$F_z(x,t) = \begin{cases} q & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \quad (2-19)$$

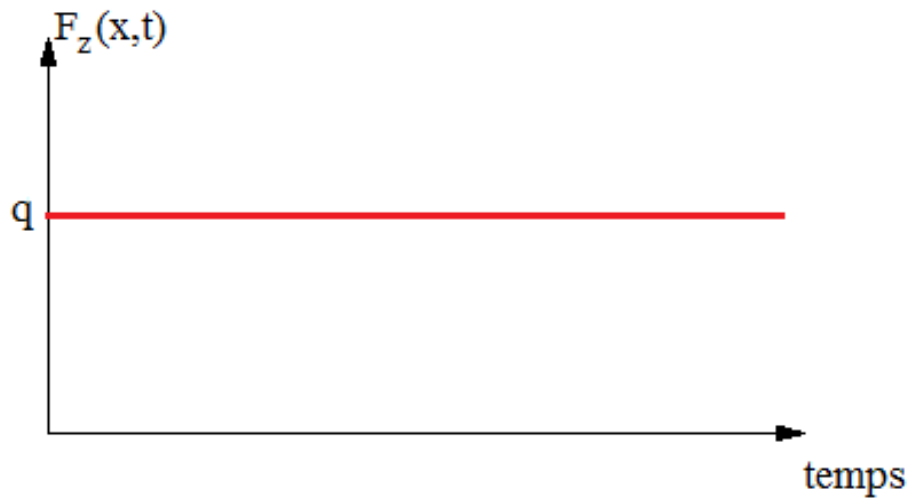


Figure 2-5 : Définition d'une charge échelon

Commençons tout d'abord par le calcul du terme de charge $Q_n(t)$ ainsi défini à l'équation (2-13):

$$Q_n(t) = \int_0^{\ell} F_z(x,t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx = q \int_0^{\ell} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx = \frac{2\ell q}{n\pi} \quad n=1,3,5,\dots \quad (2-20)$$

Évaluons ensuite l'intégrale de Duhamel définie à équation (2-18). Soit en tenant compte de cette dernière l'expression, nous aurons:

$$\begin{aligned} \int_0^t Q_n(\tau) \cdot \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau &= \frac{2\ell q}{n\pi} \int_0^t \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau \\ &= \frac{2\ell q}{n\pi\omega_n} (1 - \cos \omega_n t) \quad n=1,3,5,\dots \end{aligned} \quad (2-21)$$

En portant cette dernière expression dans la relation (2-18), nous obtenons:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n \cdot t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4q}{k_n \cdot n \cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot (1 - \cos \omega_n t) \quad n=1,3,5,\dots \quad (2-22)$$

Dans le cas d'un système initialement au repos, c'est-à-dire pour lequel $w(x,0) = \dot{w}(x,0) = 0$, on montre aisément que les coefficients A_n et B_n sont nuls. Dans ce cas, l'expression (2-22) devient :

$$w(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4q}{k_n \cdot n \cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot (1 - \cos \omega_n t) \quad n=1,3,5,\dots \quad (2-23)$$

NB: n pairs (=2,4,6,...) signifie qu'il n'y a aucune contribution au déplacement modal pseudo-statique (w_{nst}) autrement dit une charge symétrique n'excite pas un mode antisymétrique.

Notons qu'habituellement, on exprime la réponse dynamique totale du câble donnée par la relation (2-23) par la manière générale suivante:

$$w(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} f_n(t) \cdot \tilde{w}_n(x) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} w_{nst} \cdot K_m(t) \cdot \tilde{w}_n(x) \quad (2-24)$$

Les paramètres w_{nst} et $K_m(t)$ représentent respectivement le déplacement modal pseudo-statique et le facteur modal de réponse ou le facteur variant (selon la terminologie anglo-saxonne) que nous définissons comme suit :

$$w_{nst} = \frac{4q}{k_n \cdot n \cdot \pi} \quad (2-25)$$

$$K_m(t) = 1 - \cos \omega_n t \quad (2-26)$$

Le produit du déplacement modal pseudo-statique w_{nst} et le facteur modal de réponse $K_m(t)$ donne lieu à la réponse modale du câble, soit :

$$f_n(t) = w_{nst} \cdot K_m(t) \quad (2-27a)$$

dont le maximum est donné par la relation suivante:

$$\max f_n(t) = w_{nst} \cdot \max K_m(t) \quad (2-27b)$$

Exemple d'application:

Proposons de calculer explicitement à mi-travée du câble: 1) la réponse maximale w_{\max} 2) le déplacement statique w_{st} 3) déduire $w_{\max} = 2 \cdot w_{st}$.

1- Réponse maximale du câble à mi-travée

Particulièrement à $x=\ell/2$ (centre du câble), en tenant compte des relations (2-15) et (2-16), la relation (2-23) donne:

$$w\left(x = \frac{\ell}{2}, t\right) = \frac{4q\ell^2}{\pi^3 H} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \sin \frac{n\pi}{2} \cdot (1 - \cos \omega_n t) \quad n=1,3,5,\dots \quad (a)$$

Notons par $\beta^2 = \frac{H}{m}$. Les valeurs maximales que prend la fonction $w\left(x = \frac{\ell}{2}, t\right)$ vont se

produire à des instants successifs $t = \frac{\ell}{\beta} ; \frac{3\ell}{\beta} ; \frac{5\ell}{\beta} ; \dots$ Par suite, vu qu'en ces instants, la

fonction $(1 - \cos n\pi)$ prend toujours des valeurs égales à 2 (= $\max K_m$;

$0 \leq K_m(t) = (1 - \cos \omega_n t) \leq 2$, alors nous en tirons:

$$w_{\max} = \max\left(w\left(x = \frac{\ell}{2}, t\right)\right) = \frac{8q\ell^2}{\pi^3 H} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{q\ell^2}{4H} \quad (b)$$

$$\text{puisque } \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{\pi^3}{32}. \quad (c)$$

2- Déplacement statique $w_{st} = w_{st}(x=\ell/2)$

Déterminons le déplacement transversal maximal noté w_{st} du câble qu'engendrerait une charge uniformément répartie d'intensité q lorsque celle-ci est appliquée transversalement d'une manière statique i.e de la valeur 0 jusqu'à sa valeur finale q sans générer aucun effet dynamique notable. A cet effet, considérons l'équilibre transversal (selon z) de l'élément différentiel extrait du câble comme indiqué dans la figure 2-6.

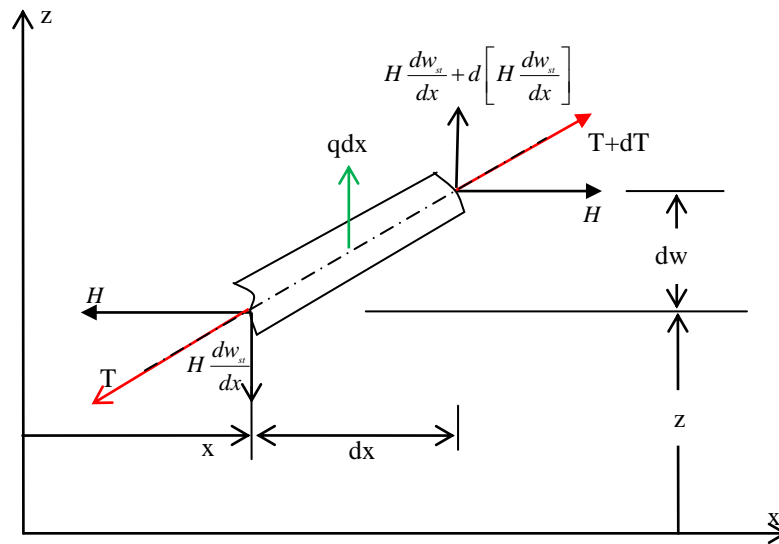


Figure 2-6 : Equilibre statique transversal d'un élément différentiel extrait du câble

$\sum F_z = 0 : d \left[H \frac{dw_{st}}{dx} \right] + qdx = 0$; sachant que $H = \text{cste}$ et $d[\dots] = \frac{\partial(\dots)}{\partial x} dx$, en utilisant la notion de la dérivée seconde, cela nous conduit à:

$$H \frac{\partial^2 w_{st}}{\partial x^2} = -q \quad (d)$$

Après intégration et en tenant compte des conditions aux limites du câble (libre aux appuis : $w=0$ à $x=0$ et $x=\ell$), la relation (d) donne l'expression suivante du déplacement transversal du câble sous l'action statique d'une charge uniformément répartie d'intensité q :

$$w_{st}(x) = -\frac{qx^2}{2H} + \frac{q\ell x}{2H} \quad (e)$$

où à $x=\ell/2$, nous obtenons pour la valeur maximale du déplacement statique transversal :

$$w_{st} = \frac{q\ell^2}{8H} \quad (f)$$

3- Comparaison de la réponse maximale w_{max} au déplacement statique w_{st}

En confrontant les deux relations (b) et (f), nous pouvons facilement en déduire:

$$w_{max} = 2 w_{st} \quad (g)$$

Par conséquent, la réponse dynamique à un échelon possède une maximale et elle est égale au double du gain statique. Nous concluons de ce fait qu'une charge uniformément répartie d'amplitude constante q , appliquée d'une manière brusque, va produire au milieu du câble un déplacement transversal maximal d'une valeur égale au double de celui que produirait la même charge ayant une même intensité q mais appliquée statiquement i.e appliquée très lentement afin de négliger tout effet d'accélération dynamique éventuel. Cette observation est également observée dans les systèmes élémentaires conservatifs ou non amortis, ce qui explique le facteur de sécurité égal à deux traditionnellement utilisé dans le dimensionnement des structures soumises à des charges dynamiques [8].

2-4-2 Réponse à une charge répartie harmonique cosinusoidale de type $F_0 \cdot \cos(\Omega t)$

Dans le cas d'une charge transversale uniformément répartie de forme harmonique pure, soit $F_z(x,t) = F_0 \cdot \cos(\Omega t)$, nous aurons d'abord pour le terme $Q_n(t)$ ainsi défini par l'équation (2-13):

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= \int_0^\ell F_z(x,t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx = F_0 \cdot \cos(\Omega t) \int_0^\ell \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \\ &= \frac{2\ell F_0}{n\pi} \cos(\Omega t) \quad n=1,3,5,\dots \end{aligned} \quad (2-28)$$

Evaluons maintenant l'intégrale de Duhamel définie à l'équation (2-18) en tenant compte de l'expression (2-28) ; nous aurons:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^t Q_n(\tau) \cdot \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau = \frac{2\ell F_0}{n\pi} \int_0^t \cos(\Omega t) \cdot \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau \\
&= \frac{2\ell F_0 \omega_n}{n\pi} \frac{\cos(\Omega t) - \cos(\omega_n t)}{\omega_n^2 - \Omega^2} \quad n=1,3,5,\dots \quad (2-29)
\end{aligned}$$

En substituant cette dernière expression dans l'équation la relation (2-18), nous trouverons:

$$\begin{aligned}
w(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin(\omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \\
&\quad + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4F_0}{mn\pi} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot \frac{\cos(\Omega t) - \cos(\omega_n t)}{\omega_n^2 - \Omega^2} \quad n=1,3,5, \dots \quad (2-30)
\end{aligned}$$

Dans le cas d'un système initialement au repos, c'est-à-dire pour lequel $w(x,0) = \dot{w}(x,0) = 0$, les coefficients A_n et B_n sont nuls. La réponse du câble donnée par l'expression (2-30) devient par conséquent :

$$w(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4F_0}{mn\pi} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot \frac{\cos(\Omega t) - \cos(\omega_n t)}{\omega_n^2 - \Omega^2} \quad n=1,3,5, \dots \quad (2-31)$$

Remarquons le pic de la réponse dynamique que présenterait le câble pour des fréquences de vibration proches. Dans le cas où $\Omega = \omega_n$ c'est-à-dire lorsque la fréquence du chargement harmonique appliquée est égale à la fréquence naturelle de vibration du câble, il se produit le phénomène de résonance. En effet, il est évident de constater que la réponse du câble en état de résonance tend bien vers l'infini.

Dans la pratique, il est souvent plus commode d'exprimer la réponse du câble en fonction du rapport des fréquences i.e le rapport de la fréquence du chargement harmonique appliqué et de la fréquence propre d'oscillation libre au mode n , soit :

$$\gamma_n = \frac{\Omega}{\omega_n} \quad (2-32)$$

De plus, si nous introduisons la force de rappel du câble soit $k_n = m_0 \omega_n^2$, la réponse totale donnée par la relation (2-31) devient alors :

$$w(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4F_0}{n\pi k_n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot \frac{1}{1-\gamma_n^2} \cdot \cos(\Omega t) - \cos(\omega_n t) \quad n=1,3,5, \dots \quad (2-33)$$

où nous avons :

- $\frac{4F_0}{n\pi k_n} = w_{nst}$ (équ. 2-25) représente le déplacement pseudo-statique dans le mode de vibration n; avec bien entendu ici $F_0=q$.

- $\frac{1}{1-\gamma_n^2}$ est le facteur d'amplification représentant l'effet d'amplification dynamique de la charge harmonique;

- $\cos \Omega t$ est la composante permanente de la réponse ayant la fréquence de la charge appliquée ; elle représente la réponse en oscillation permanente, directement liée à la charge appliquée ;

- $\cos \omega_n t$ est la composante de la réponse transitoire ayant la fréquence propre du câble; elle représente l'effet d'oscillations libres qui dépend des conditions initiales.

A travers cette relation, nous pressentons le pic de la réponse lorsque la valeur du rapport des fréquences γ_n tend vers 1 ou à travers la relation (2-31) lorsque la fréquence Ω du chargement harmonique s'approche de la fréquence propre de vibration ω_n , autrement dit, les déplacements dans le câble deviennent beaucoup dangereusement plus importants. En approchant encore davantage les deux fréquences, les déplacements seront encore plus grands qui théoriquement vont tendre vers l'infini. Dans ce cas, il se produira le phénomène dit de résonance [9].

Remarques:

- particulièrement, au centre de la travée soit à $x = \ell/2$, compte tenu des relations (2-15) et (2-16) la relation (2-33) conduirait à :

$$w\left(x = \frac{\ell}{2}, t\right) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4F_0 \ell^2}{n^3 \pi^3} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{1-\gamma_n^2} \cdot \cos(\Omega t) - \cos(\omega_n t) \quad n=1,3,5, \dots \quad (2-34)$$

- la réponse du câble donnée par la relation (2-33) peut se mettre sous la forme suivante par analogie à la relation (2-24):

$$w(x, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} w_{nst} \cdot K_m(t) \cdot \tilde{w}_n(x) \quad (2-35)$$

où le facteur modal de réponse ou le facteur variant $K_m(t)$ est donné par l'expression:

$$K_m(t) = \frac{1}{1-\gamma_n^2} \cdot \cos(\Omega t) - \cos(\omega_n t) \quad (2-36)$$

2-4-3 Réponse à une charge répartie harmonique sinusoïdale de type $F_0 \cdot \sin(\Omega t)$

Nous allons présenter ici la solution analytique de l'équation (2-13) sans passer toutefois par l'intégrale de Duhamel [6] pour des raisons de simplicité de l'intégration. Réécrivons l'équation sous la forme suivante avec $F_z(x, t) = F_0 \cdot \sin(\Omega t)$:

$$m_0 \cdot \ddot{f}_n(t) + k_n \cdot f_n(t) = P_n(t) \quad (2-37)$$

où nous avons:

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \frac{2}{\ell} \cdot Q_n(t) = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} F_z(x, t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx = \frac{2}{\ell} \cdot F_0 \cdot \sin(\Omega t) \int_0^{\ell} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \\ &= \frac{4F_0}{n\pi} \cdot \sin(\Omega t) \quad n=1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (2-38)$$

Postulons que la solution de l'équation (2-37) est la somme de la solution complémentaire $f_{n,H}(t)$ de l'équation homogène (avec $P_n(t) = 0$) et de la solution particulière $f_{n,P}(t)$ de l'équation non homogène (liée à la charge $P_n(t)$), soit:

$$f_n(t) = f_{n,H}(t) + f_{n,P}(t) \quad (2-39)$$

La solution complémentaire est donnée par la relation suivante:

$$f_{n,H}(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t) \quad (2-40)$$

On peut considérer que la réponse au chargement harmonique est également harmonique, en phase avec le chargement ; ainsi :

$$f_{n,P}(t) = C \sin(\Omega t) \quad (2-41)$$

Cherchons à trouver dans ce cas la constante d'intégration C de façon que l'équation (2-37) soit satisfaite quelque soit les valeurs de Ω et t. En dérivant deux fois l'expression (2-41), nous obtenons l'expression de l'accélération suivante:

$$\ddot{f}_{n,P}(t) = -C\Omega^2 \sin(\Omega t) \quad (2-42)$$

En remplaçant les équations (2-41) et (2-42) dans la relation (2-37), nous aboutissons à:

$$-m_0 \cdot C\Omega^2 \sin(\Omega t) + k_n \cdot C \sin(\Omega t) = \frac{4F_0}{n\pi} \cdot \sin(\Omega t) \quad (2-43)$$

Introduisons maintenant comme dans la section précédente la notion de la pulsation relative au mode n, soit :

$$\gamma_n = \frac{\Omega}{\omega_n} \quad (2-44)$$

On montre aisément que la constante C a pour valeur:

$$C = \frac{4F_0}{n\pi(k_n - m_0\Omega^2)} = \frac{4F_0}{n\pi k_n} \frac{1}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)} = \frac{4F_0}{n\pi k_n} \frac{1}{(1 - \gamma^2)} \quad (2-45)$$

expression dans laquelle on a tenu compte du fait que $k_n = m_0 \cdot \omega_n^2$. En substituant cette dernière dans la relation (2-41), la solution particulière devient:

$$f_{n,p}(t) = \frac{4F_0}{n\pi k_n} \frac{1}{(1 - \gamma_n^2)} \sin(\Omega t) \quad (2-46)$$

La solution générale de la relation (2-39) s'écrit alors :

$$f_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + \frac{4F_0}{n\pi k_n} \frac{1}{(1 - \gamma_n^2)} \sin(\Omega t) \quad (2-47)$$

En remplaçant finalement cette expression dans la relation (2-6) et en tenant compte de la relation (2-10), nous obtenons la forme générale suivante de la réponse du câble due à une excitation harmonique sinusoïdale appliquée à un câble non amorti:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \sin(\omega_n t) + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \frac{4F_0}{n\pi k_n} \frac{1}{(1 - \gamma_n^2)} \sin(\Omega t) \quad n=1, 3, 5, \dots \quad (2-48)$$

Dans le cas d'un système initialement au repos, c'est-à-dire pour lequel $w(x,0) = \dot{w}(x,0) = 0$, on montre aisément que les coefficients A_n et B_n ont pour valeur:

$$A_n = 0 \quad ; \quad B_n = \frac{4F_0}{n\pi k_n} \frac{1}{(1 - \gamma_n^2)} \gamma_n \quad (2-49)$$

La réponse du câble donnée par l'équation (2-48) devient finalement:

$$w(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4F_0}{n\pi k_n} \frac{1}{(1 - \gamma_n^2)} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot (\sin(\Omega t) - \gamma_n \sin(\omega_n t)) \quad n=1, 3, 5, \dots \quad (2-50)$$

Particulièrement, au centre de la travée soit à $x = \ell/2$, compte tenu des relations (2-15) et (2-16) la relation (2-50) conduirait à :

$$w\left(x = \frac{\ell}{2}, t\right) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4F_0}{n\pi k_n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{(1-\gamma_n^2)} \cdot (\sin(\Omega t) - \gamma_n \sin(\omega_n t)) \quad n=1,3,5, \dots \quad (2-51)$$

où nous avons :

- $\frac{4F_0}{n\pi k_n}$ représente le déplacement pseudo-statique dans le mode de vibration n ;
- $\frac{1}{1-\gamma_n^2}$ est le facteur d'amplification représentant l'effet d'amplification dynamique de la charge harmonique;
- $\sin \Omega t$ est la composante permanente de la réponse ayant la fréquence de la charge appliquée ; elle représente la réponse en oscillation permanente, directement liée à la charge appliquée ;
- $\gamma_n \sin \omega_n t$ est la composante de la réponse transitoire ayant la fréquence propre du câble; elle représente l'effet d'oscillations libres qui dépend des conditions initiales.

Nous pressentons comme dans la section précédente, le pic de la réponse lorsque la valeur du rapport des fréquences γ_n tend vers 1 i.e lorsque la fréquence Ω du chargement harmonique s'approche de la fréquence propre de vibration ω_n . En approchant encore davantage les deux fréquences, il se produira le phénomène de résonance. Notons en outre comme sous l'action de la charge cosinusoidale, la réponse du câble donnée par la relation (2-50) peut se mettre également sous la forme :

$$w(x, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} w_{nst} \cdot K_m(t) \cdot \tilde{w}_n(x) \quad (2-51)$$

où le facteur modal de réponse ou le facteur variant $K_m(t)$ est donné par l'expression:

$$K_m(t) = \frac{1}{(1-\gamma_n^2)} \cdot (\sin \Omega t - \gamma_n \sin \omega_n t) \quad (2-52)$$

2-5 Rapport d'amplitudes et spectre de réponse

Notons qu'en régime harmonique forcé, le facteur variant K_{tn} (équ. 2-36 ou 2-52) est fonction à la fois du temps t (par définition) et de la pulsation modale réduite γ_n , soit $K_{tn} = K_{tn}(t, \gamma_n)$. Étudié en fonction de la pulsation modale réduite γ_n , la valeur extrême $\max K_{tn}(\gamma_n)$ est appelée le rapport d'amplitude que nous désignons ci-après par A_n . Pour une valeur donnée de γ_n , il est possible de calculer $\max K_{tn}$, et, par balayage en fréquences d'obtenir un spectre modal de réponse.

Considérons en guise d'exemple l'expression (2-52) sous la charge sinusoïdale. Le facteur variant modal K_{tn} passe par un extrémum lorsque $d K_{tn}/dt = 0$, c'est-à-dire lorsque $\cos \Omega t - \cos \omega_n t = 0$, avec $\Omega \neq \omega_n$. Mais alors :

$$\sin \Omega t = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \Omega t} = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \omega_n t} = \pm \sin \omega_n t \text{ puisque } \cos^2 \omega_n t + \sin^2 \omega_n t = 1.$$

Il devient alors possible d'estimer une valeur maximale par excès de $\max K_{tn}$ en imaginant qu'à un certain instant, on observe que $\sin \omega_n t = -1$ et $\sin \Omega t = +1$ du fait que $(-1 \leq \sin \omega_n t \leq +1 ; -1 \leq \sin \Omega t \leq +1)$. La formule (2-52) donne alors :

$$A'_n = \max K_{tn} = \max \left[\frac{(1 + \gamma_n) \sin \Omega t}{1 - \gamma_n^2} \right] = \frac{1}{1 - \gamma_n^2} \quad \text{pour } \sin \Omega t = +1 \quad (2-53)$$

La valeur (2-53) suppose cependant qu'à la fois la vibration libre et la vibration forcée perdurent sans perte d'amplitudes respectives. En réalité, il y'a toujours un certain amortissement, même très faible, de sorte que la vibration libre due à la perturbation initiale, prend l'allure d'une transitoire réelle qui s'atténue au point de disparaître après quelques cycles de vibration, de sorte qu'en régime permanent, seule subsiste la composante à laquelle correspond le facteur variant permanent K_{tmp} :

$$K_{tmp} = \frac{\sin \Omega t}{1 - \gamma_n^2} \quad (2-54)$$

Par conséquent, le rapport d'amplitude vaut :

$$A_n = \max K_{mp} = \frac{1}{1 - \gamma_n^2} \quad (2-55)$$

Le spectre de réponse modal $A_n(\gamma_n)$ comporte donc deux branches distinctes séparées par l'asymptote $\gamma_n=1$ correspondante à la condition de résonance aigue. On note que, pour $\gamma_n > 1$, A_n est négatif, ce qui signifie que la fonction modale de déplacement, soit $w_n(x,t) = w_{nst} \cdot K_m(t) \cdot \tilde{w}_n(x)$, et la fonction de charge $F_z(x,t) = F_0 \cdot \sin \Omega t$ sont en opposition (phase π entre les deux paramètres. Afin de rendre la représentation du spectre de réponse plus concise, on a l'habitude de le tracer en considérant la valeur absolue $|A_n|$ comme schématisé dans la figure 2-7. On note que :

$$1- \gamma_n < 1 (\Omega < \omega_n) : A_n = \frac{1}{1 - \gamma_n^2}$$

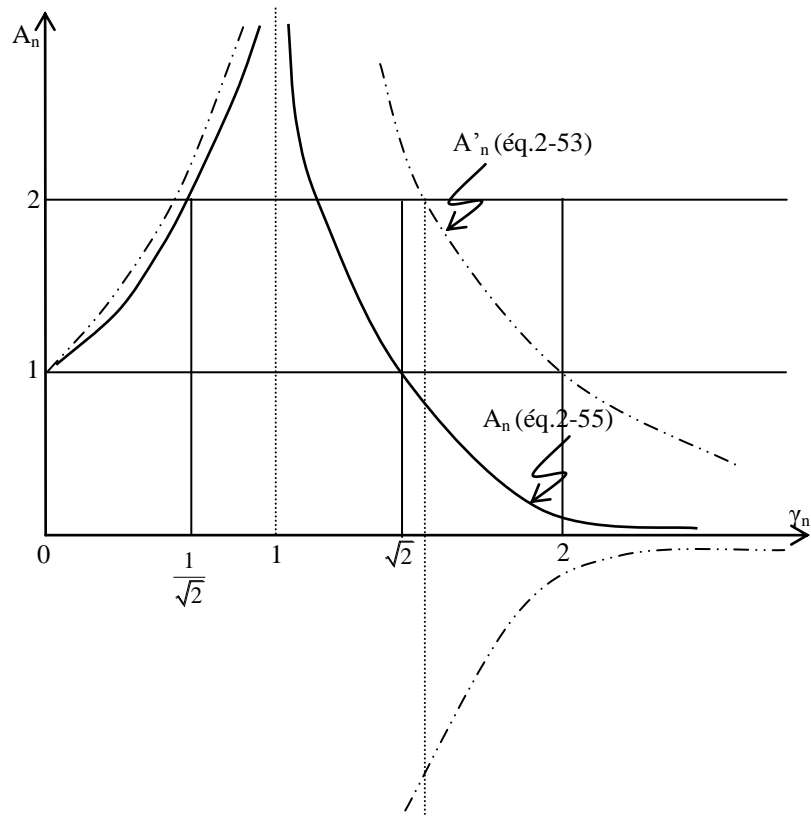
$$\gamma_n > 1 (\Omega > \omega_n) : A_n = \frac{1}{\gamma_n^2 - 1}$$

$$\gamma_n = 1 (\Omega = \omega_n) : A_n \rightarrow \infty \text{ pour } t \rightarrow \infty$$

$$\gamma_n = \sqrt{2} \approx 0.7 : A_n = 1$$

2- γ_n petit (fréquences basses) : élasticité
 contrôle (k_n) gain quasi-statique, peu d'effet
 d'inertie

γ_n grand (fréquences élevées) : inertie
 contrôle (m_0) amplitude très faible, va-et-vient
 rapide



$$A_n(\gamma_n) = \frac{1}{|1 - \gamma_n^2|}$$

$\gamma_{n < 1} : A_n \nearrow$ très rapidement $\nearrow \infty$
 $\gamma_{n = 1} : A_n \rightarrow \infty$ pour $t \rightarrow \infty$
 $\gamma_{n > 1} : A_n \searrow$ très rapidement $\searrow 0$

Figure 2-7 : Allure du spectre de réponse modal

2-6 Evaluation des pulsations propres

Soit sans le second membre, l'équation de mouvement (2-4b) qui devient:

$$H \frac{d^2 w}{dx^2} = m_0 \frac{d^2 w}{dt^2} \tag{2-56}$$

Admettons que la solution est de la forme $w(x,t) = \tilde{w}(x)e^{i\omega t}$. Sachant que $i^2 = -1$, l'équation peut se mettre sous la forme :

$$H \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} + m_0 \omega^2 \tilde{w} = 0 \quad (2-57)$$

où ω représente la fréquence circulaire naturelle de vibration. La solution générale de l'équation différentielle (2-56) est de la forme [4]:

$$\tilde{w} = A \sin \beta x + B \cos \beta x \quad \text{où} \quad \beta^2 = \frac{m_0 \omega^2}{H} ; A \text{ et } B \text{ étant des constantes.}$$

A l'aide des conditions de frontière soit $\tilde{w}(x=0) = 0 = \tilde{w}(x=\ell)$, le coefficient B étant alors égal à zéro, il est possible de trouver les fréquences naturelles de vibration données par :

$$\omega_n = \frac{n\pi}{\ell} \sqrt{\frac{H}{m_0}} \quad n=1,2,3 \dots \quad (2-58)$$

où $n=1,2,3 \dots$ signifie respectivement le premier, deuxième, troisième mode etc.. Les modes sont données par la relation :

$$\tilde{w}_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad n=1,2,3 \dots \quad (2-59)$$

La fréquence du premier mode transversal horizontal (i.e $n=1$) constitue la plus faible fréquence naturelle pour un quelconque câble ayant une forme parabolique.

CHAPITRE 3

EXPERIMENTATIONS NUMERIQUES ET ANALYSES

3-1 Généralités

Nous allons illustrer, dans le cadre de ce chapitre, la méthode analytique de calcul exposée au chapitre précédent, par des applications numériques portant sur l'analyse d'un câble de suspension d'une cabine téléphérique ou d'un câble d'un pont suspendu lors de la phase de réalisation dont les charges appliquées sont réparties et agissent perpendiculairement au plan général de l'ouvrage. Les résultats nous serviront principalement d'étalon de référence théorique et seront comparés à ceux obtenus par le code ANSYS [9].

3-2 Résultats numériques et validation

Afin de jauger la fiabilité et la précision de la méthode analytique de calcul, nous proposons d'analyser un exemple d'un câble d'une structure suspendue rapportée en détail dans la référence [4] dont les résultats nous serviront principalement d'étalon de référence théorique. L'exemple porte sur le câble principal du pont suspendu de Bosphore comme le montre la vue d'ensemble du pont lors de sa phase de la réalisation dans la figure 3-1. Les propriétés géométrique et mécanique du câble dans sa position libre suspendue sont: $\ell=915$ m ; $w_0 = 4.4$ kN/m ; $E_C = 180 \times 10^6$ kN/m² ; $S_C = 0.161$ m² ; f/ℓ (géométrie initiale) = 1/12.

Il s'agit d'analyser la réponse dynamique de l'ouvrage en envisageant trois types de charges réparties transversales à savoir i) une charge répartie d'amplitude constante ou échelon, $F_z(x,t) = F_0$ ii) une charge répartie harmonique cosinusoidale, $F_z(x,t) = F_0 \cdot \cos(\Omega t)$ iii) une charge répartie harmonique sinusoïdale, $F_z(x,t) = F_0 \cdot \sin(\Omega t)$. Les charges sont considérées dans chacun des cas appliquées uniformément sur toute la travée du câble. La première pulsation ou la pulsation fondamentale de l'ouvrage est donnée directement en appliquant la formule 2-52 pour $n=1$; Soit numériquement, il vient en considérant la relation 2-2 :

$$H = \frac{4.4x(915)^2}{8x76.25} = 6039 \text{ kN}; \quad f_0/\ell=76.25 \text{ m}; \quad m = w_0/g; \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2;$$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{915} \sqrt{\frac{6039x9.81}{4.4}} = 0.3984001184\dots \text{ rad/s.}$$



Figure 3-1 : Vue du pont de Bosphore en phase de réalisation

3-2-1 Sous l'action d'une charge échelon uniformément répartie d'amplitude, F_0

Les résultats des déplacements obtenus à l'aide de la relation (2-23) sont récapitulés dans le tableau 3-1 où nous calculons en fonction du temps les déplacements horizontaux à mi-travée ($x=\ell/2$) du câble; l'unité des déplacements est en m. Signalons que l'erreur relative (e), exprimée en pourcentage, est calculée en prenant comme référence la solution dérivée par la méthode analytique. Une valeur négative de l'erreur éventuelle signifie donc que la valeur calculée pour le modèle discrétisé par éléments finis (ANSYS) est inférieure à celle à laquelle on la compare.

Tableau 3-1 : Sous charge répartie constante, $F(x, t) = F_0 = q = 100 \text{ N/m}$

t (s)	n=1	n=3	n=5	$\sum_{n=1,2,3,4,5} w_{s,n}(x = \frac{L}{2}, t)$	ANSYS	erreur relative (%)
5	2.521	-0.003	0.027	2.55	2.45	4
10	2.980	-0.012	0.021	2.99	2.96	1
20	1.993	-0.088	0.022	1.93	1.85	4
30	0.327	-0.084	0.029	0.27	0.26	1
40	3.532	-0.118	0.020	3.43	3.40	1
50	0.931	-0.132	0.006	0.81	0.81	0
60	1.189	-0.123	0.000	1.07	1.14	7
70	3.446	-0.093	0.009	3.36	3.37	1

Aux figures 3-2 et 3-4, nous illustrons les résultats obtenus par le code ANSYS comparés à ceux du tableau 3-1 donnés par la méthode de calcul analytique. Le maillage utilisé par le code ANSYS est représenté dans la figure 3-3 où la valeur du pas de temps utilisé est de 0.05 s. A titre comparatif, les valeurs maximales des déplacements obtenus au centre et au quart de la travée sont rapportées dans le tableau 3-2.

Tableau 3-2 : Valeurs maximales sous la charge uniforme $q = 100 \text{ N/m}$

	Analytique (m)	ANSYS (m)	Erreur relative (%)
Déplacement maximal du nœud 21	3.47	3.43	1.3
Déplacement maximal du nœud 11	2.60	2.57	1.2

Nous remarquons une bonne concordance des résultats dont l'erreur relative maximale enregistrée à $t = 60 \text{ s}$ est de l'ordre ne dépassant pas 7 % ; ce qui démontre la fiabilité de la méthode de la méthode analytique de calcul ainsi proposée. Cette erreur bien qu'elle soit pratiquement insignifiante pourrait être attribuée non pas plutôt à la méthode analytique elle-même mais notamment au nombre insuffisant de termes ($n=5$) pris en compte dans la série trigonométrique lors de l'application la relation (2-23). Mentionnons en outre que les nœuds 21 et 22 dont font allusion les figures 3-2 et 3-4 correspondent respectivement au centre et au quart du câble.

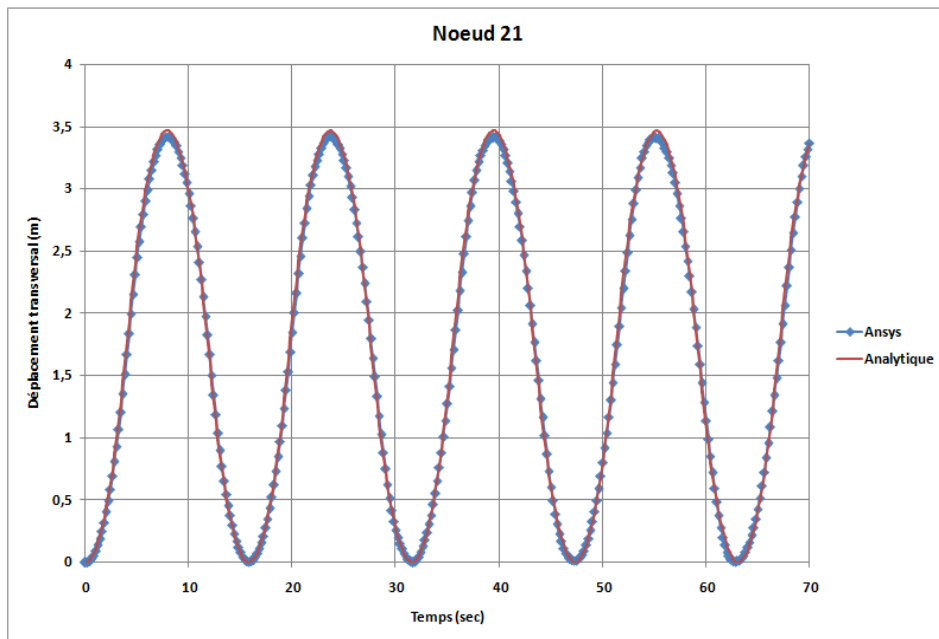


Figure 3-2: Evolution en fonction du temps du déplacement transversal au centre du câble sous l'action de la charge répartie constante, $q=100$ N/m

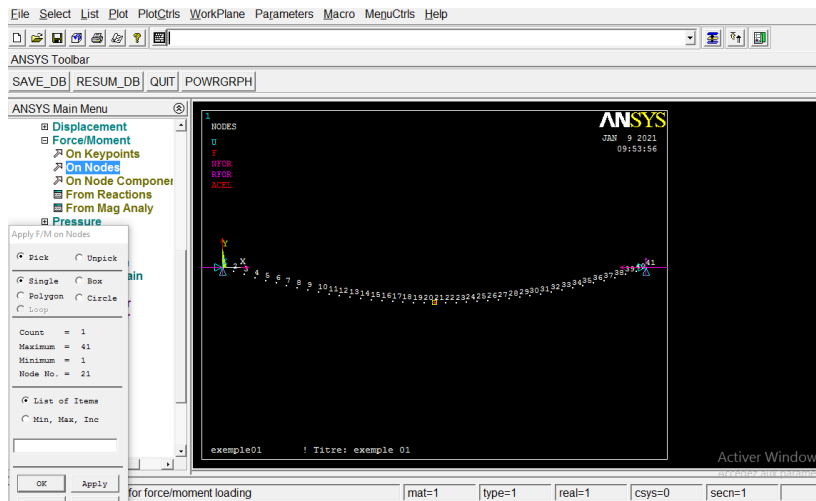


Figure 3-3 : Maillage utilisé lors de la simulation avec ANSYS

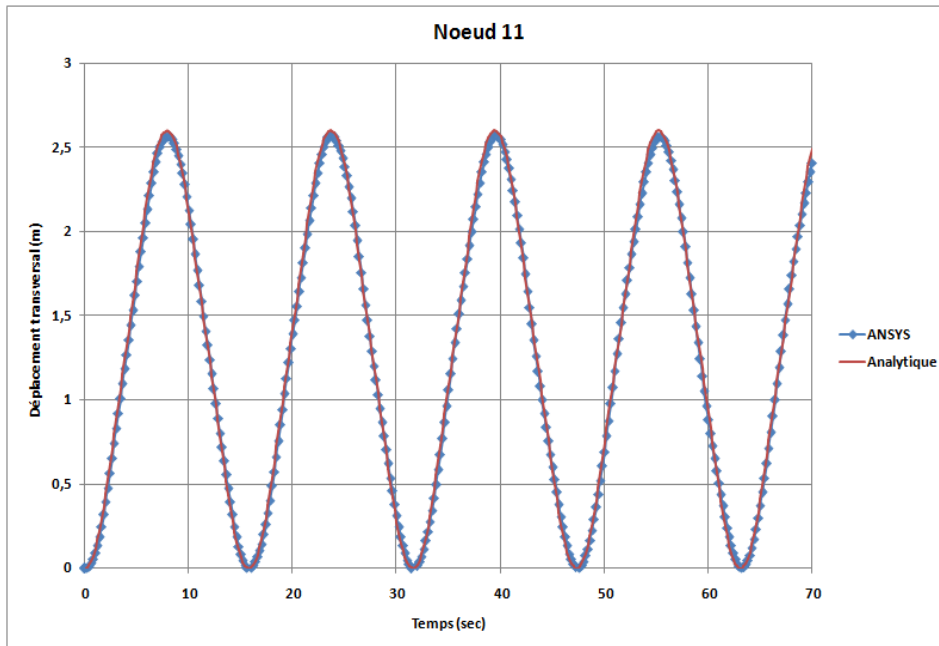


Figure 3-4: Evolution en fonction du temps du déplacement transversal au quart du câble sous l'action de la charge répartie constante, $q=100$ N/m

3-2-2 Réponse à une charge répartie harmonique cosinusoidale de type $F_0 \cdot \cos(\Omega t)$

Les résultats obtenus à $x = \ell/2$ et $x = \ell/4$ sont illustrés sur les figures 3-5 et 3-6 en considérant la relation (2-31 ou 2-33) avec une charge répartie cosinusoidale de la forme $F_0 \cdot \cos(\Omega t)$ appliquée uniformément le long du câble. L'amplitude maximale F_0 et la fréquence Ω ainsi que le pas de temps (Δt) utilisé dans la simulation avec ANSYS sont : $F_0 = 10$ N/m ; $\Omega = 0.2$ rad/s et $\Delta t = 0.05$ s. A titre comparatif, les valeurs maximale et minimale des déplacements obtenus au centre et au quart de la travée sont rapportées dans le tableau 3-3 où nous constatons une quasi-parfaite des résultats démontrant encore une fois la fiabilité de la méthode analytique sous l'action des charges harmoniques.

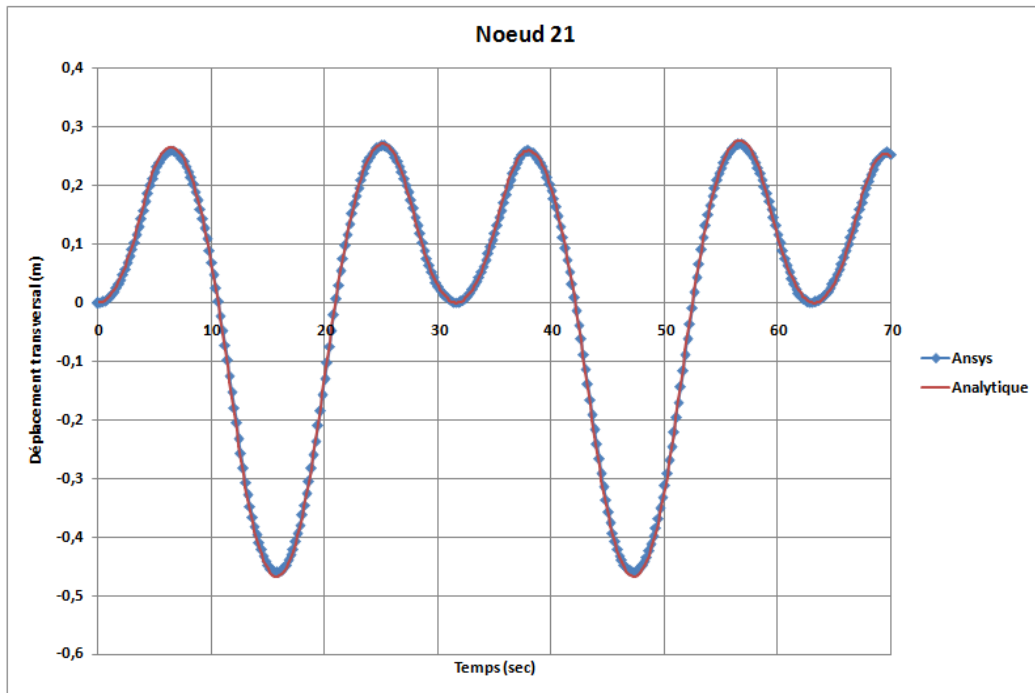


Figure 3-5: Evolution en fonction du temps du déplacement transversal au milieu du câble sous l'action de la charge répartie harmonique cosinusoidale

$$F_0 \cdot \cos(\Omega t), F_0 = 10 \text{ N/m} ; \Omega = 0.2 \text{ rad/s}$$

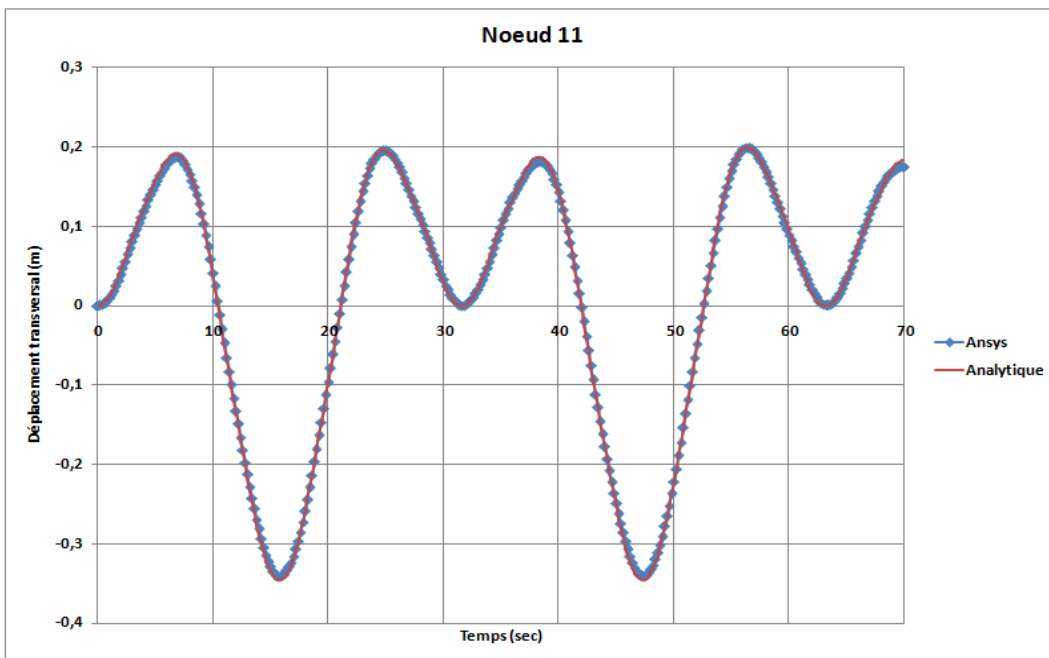


Figure 3-6: Evolution en fonction du temps du déplacement transversal au quart du câble sous l'action de la charge répartie harmonique cosinusoidale

$$F_0 \cdot \cos(\Omega t), F_0 = 10 \text{ N/m} ; \Omega = 0.2 \text{ rad/s}$$

Tableau 3-3: Valeurs extrémales des déplacements sous la charge cosinusoidale, $10 \cdot \cos(0.2t)$ N/m

		Analytique (m)	ANSYS (m)	Erreur relative (%)
Nœud 21	Maximal	0.2767	0.2713	1.94
	Minimal	-0.4674	-0.4606	1.43
Nœud 11	Maximal	0.2	0.1989	0.5
	Minimal	-0.3457	-0.3414	1.22

3-2-3 Réponse à une charge répartie harmonique sinusoidale de type $F_0 \cdot \sin(\Omega t)$

Par analogie à la charge répartie harmonique cosinusoidale, les résultats obtenus à $x = \ell/2$ et à $x = \ell/4$ du câble sont rapportés sur les figures 3-7 et 3-8 en considérant la relation (2-50) avec une charge répartie sinusoidale de la forme $F_0 \cdot \sin(\Omega t)$ appliquée d'une manière uniforme le long du câble. L'amplitude F_0 et la fréquence Ω ainsi que le pas de temps (Δt) utilisé dans la simulation sont : $F_0 = 10$ N/m ; $\Omega = 0.2$ rad/s et $\Delta t = 0.05$ s. A titre comparatif, les valeurs maximale et minimale des déplacements obtenus au centre et au quart de la travée sont rapportées dans le tableau 3-4 où nous constatons bonne concordance des résultats démontrant la fiabilité de la méthode analytique sous l'action des charges harmoniques sinusoidales.

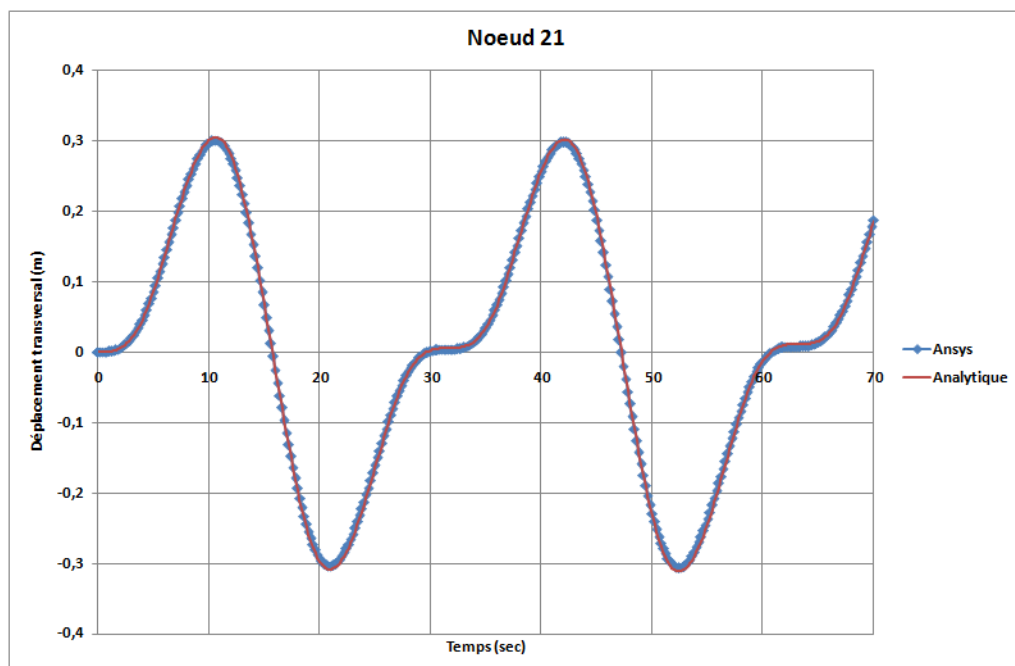


Figure 3-7: Evolution en fonction du temps du déplacement transversal au centre du câble sous l'action de la charge répartie harmonique sinusoidale $F_0 \cdot \sin(\Omega t)$, $F_0 = 10$ N/m ; $\Omega = 0.2$ rad/s

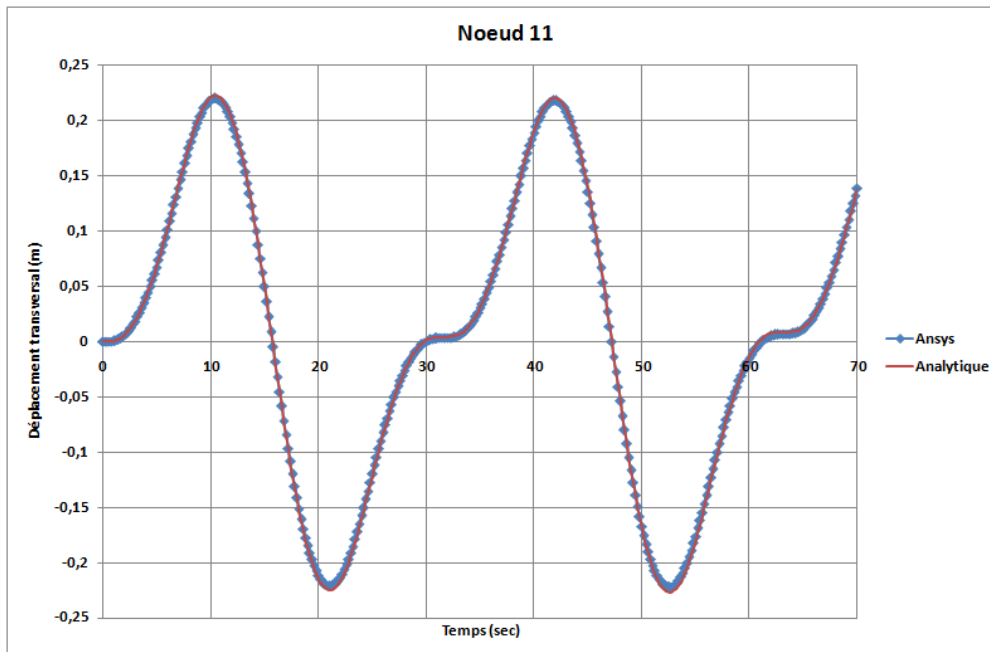


Figure 3-8: Evolution en fonction du temps du déplacement transversal au quart du câble sous l'action de la charge répartie harmonique sinusoïdale $F_0 \cdot \sin(\Omega t)$,
 $F_0 = 10 \text{ N/m}$; $\Omega = 0.2 \text{ rad/s}$

Tableau 3-4: Valeurs extrémales des déplacements sous la charge sinusoïdale, $10 \cdot \sin(0.2t) \text{ N/m}$

		Analytique (m)	ANSYS (m)	Erreur relative (%)
Nœud 21	Maximal	0.3053	0.3012	1.35
	Minimal	-0.3113	-0.3063	1.62
Nœud 11	Maximal	0.2226	0.2202	1.09
	Minimal	-0.2268	-0.2222	2.03

3-3 Analyse paramétrique

Il s'agit dans cette section de mettre en relief le phénomène de résonance du câble et du coup de tester d'une façon plus élargie la fiabilité de la méthode analytique de calcul en considérant la charge sinusoïdale $F_0 \sin \Omega t$ considérée auparavant. A cet effet, nous allons considérer trois niveaux différents de fréquence du chargement harmonique dont l'une est proche de la première fréquence propre de vibration donnée par la relation (2-16 ou 2-58) pour $n = 1$. Ces fréquences sont : $\Omega = 0.2 \text{ rad/s}$, $\Omega = 0.3984 \text{ rad/s}$ et $\Omega = 0.5 \text{ rad/s}$.

Les résultats obtenus par la relation (2-51) et par ANSYS pour chacune de ces fréquences sont représentés dans les figures 3-9 à 3-12 exprimés en termes de l'évolution en fonction du temps des déplacements transversaux au centre et au quart du câble. En premier lieu, nous constatons d'emblée une parfaite concordance des résultats analytiques à ceux issus par ANSYS ; les courbes étant pratiquement confondues. En second lieu, nous remarquons que la tangente des courbes est nulle à l'instant $t = 0$; ce qui montre que la vitesse de la composante transitoire de la réponse a pris la valeur nécessaire pour annuler celle de la composante permanente, et ainsi satisfaire aux conditions initiales du câble.

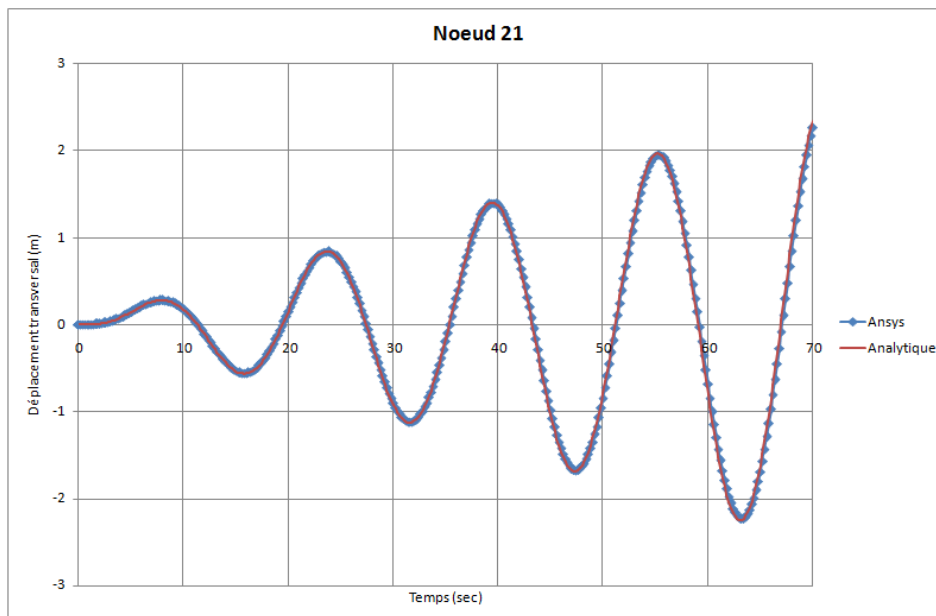


Figure 3-9: Evolution en fonction du temps du déplacement transversal au centre du câble sous l'action de la charge répartie harmonique sinusoïdale $F_0 \cdot \sin(\Omega t)$,
 $F_0 = 10 \text{ N/m}$; $\Omega = 0.3984 \text{ rad/s}$

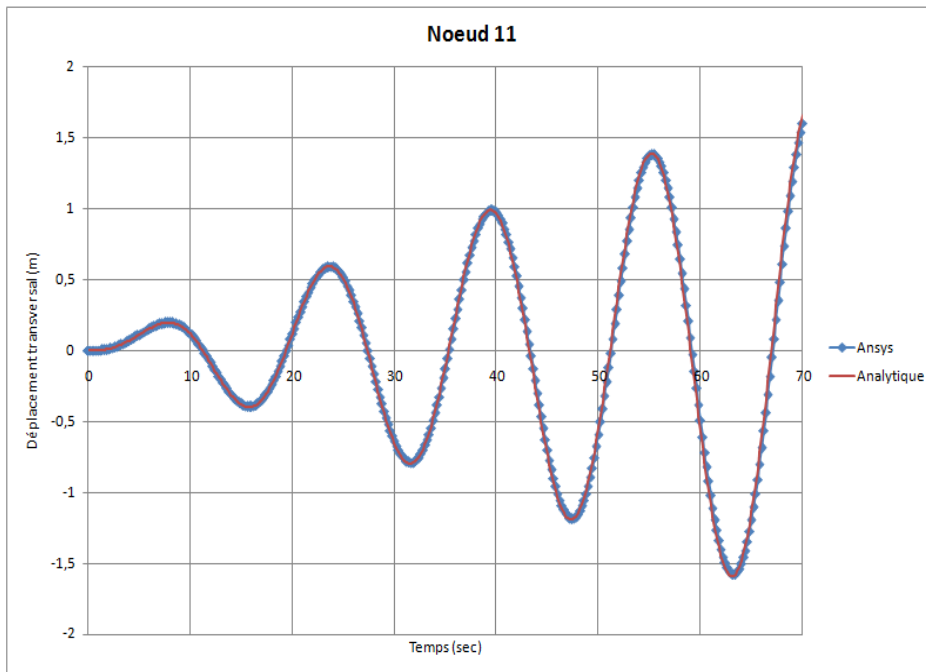


Figure 3-10: Evolution en fonction du temps du déplacement transversal au quart du câble sous l'action de la charge répartie harmonique sinusoïdale $F_0 \cdot \sin(\Omega t)$, $F_0 = 10 \text{ N/m}$; $\Omega = 0.3984 \text{ rad/s}$

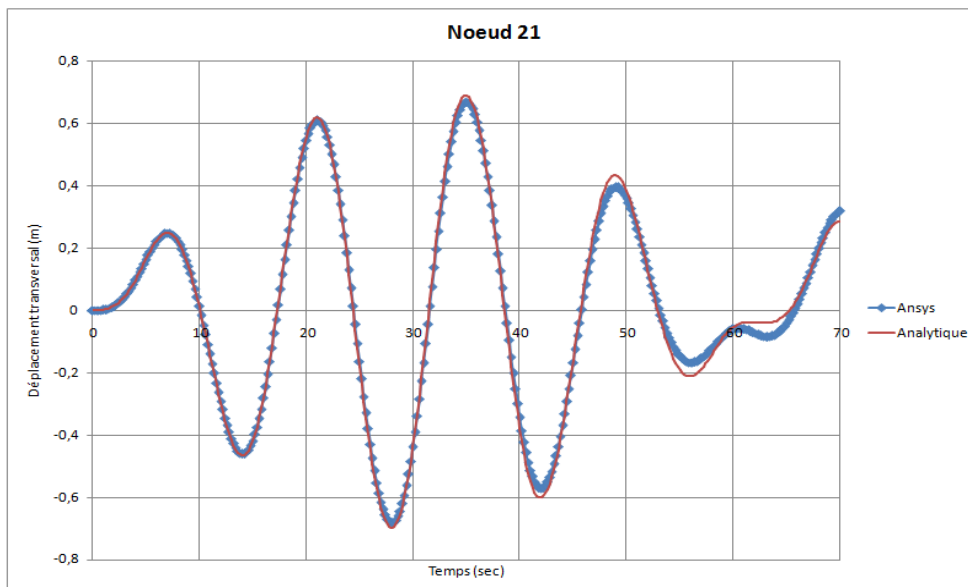


Figure 3-11: Evolution en fonction du temps du déplacement transversal au centre du câble sous l'action de la charge répartie harmonique sinusoïdale $F_0 \cdot \sin(\Omega t)$, $F_0 = 10 \text{ N/m}$; $\Omega = 0.5 \text{ rad/s}$

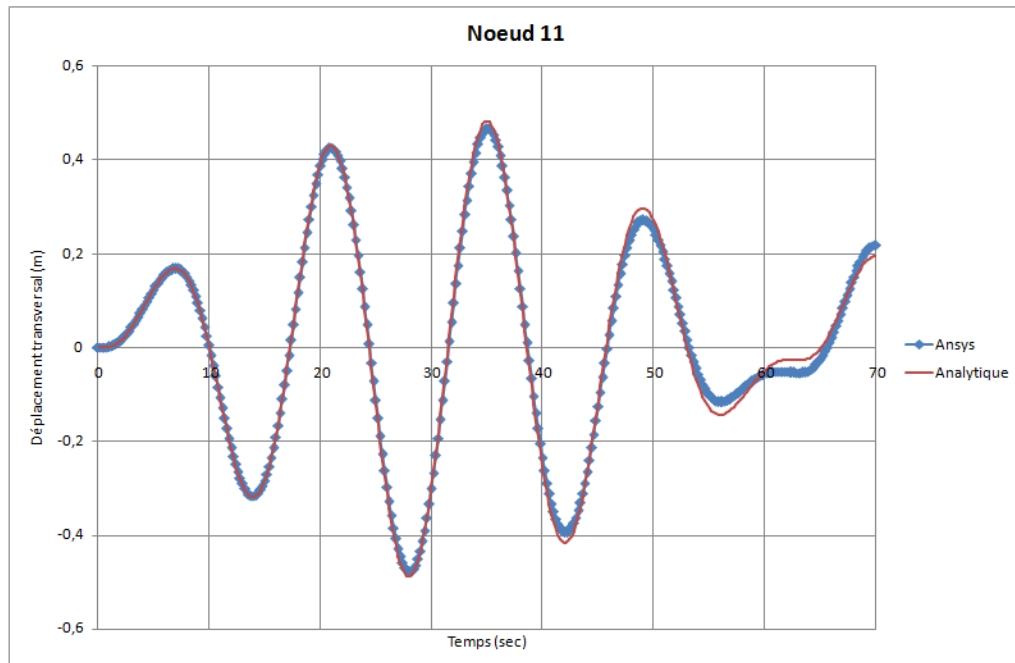


Figure 3-12: Evolution en fonction du temps du déplacement transversal au quart du câble sous l'action de la charge répartie harmonique sinusoïdale $F_0 \cdot \sin(\Omega t)$,
 $F_0 = 10 \text{ N/m}$; $\Omega = 0.5 \text{ rad/s}$

Au tableau 3-5 et à la figure 3-13, nous présentons les résultats des déplacements obtenus par la relation (2-41) pour chacune des fréquences considérées Ω du chargement harmonique sinusoïdal appliqué ; les déplacements transversaux étant calculés au centre du câble.

Nous constatons comme déjà pressenti le pic de la réponse i.e plus la valeur de la fréquence Ω du chargement harmonique appliqué s'approche de la de la première fréquence propre de vibration $\omega_1 = 0.39840011\dots$, les déplacements enregistrés dans le câble sont importantes. En approchant encore plus les deux fréquences, les déplacements seront encore plus grands qui théoriquement vont tendre vers l'infini. Dans ce cas, il se produit le phénomène de résonance. A titre d'illustration, au temps $t = 70 \text{ s}$, pour $\Omega = 0.5 \text{ rad/s}$, le déplacement $w(x=\ell/2,t) = 2.343 \text{ m}$ soit une augmentation de plus de 800 %.

Tableau 3-5 : Déplacements transversaux au centre du câble en fonction des fréquences du chargement harmonique sinusoïdal

Temps (s)	$\Omega = 0.2 \text{ rad/s}$	$\Omega = 0.3984 \text{ rad/s}$	$\Omega = 0.5 \text{ rad/s}$
10	0.301	0.173	0.011
20	-0.302	0.161	0.557
30	0.003	-0.924	-0.435
40	0.258	1.368	0.380
50	-0.230	-0.781	0.385
60	-0.012	-0.794	-0.052
70	0.187	2.343	0.286

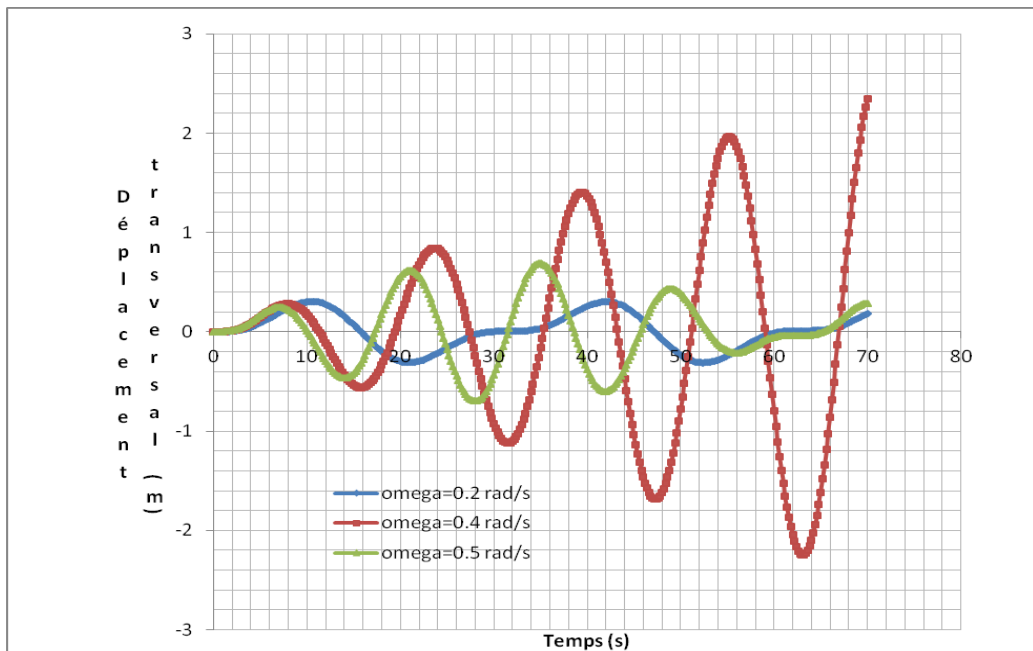


Figure 3-13: Evolution en fonction du temps du déplacement transversal au centre du câble sous l'action de la charge répartie harmonique sinusoïdale $F_0 \cdot \sin(\Omega t)$, pour diverses valeurs de Ω ; $F_0 = 10 \text{ N/m}$

CHAPITRE 4

CONCLUSIONS GENERALES

4-1 Rétrospective

Le but principal de ce travail consistait essentiellement de mettre au point une méthode de calcul simple, mais suffisamment précise et fiable, permettant d'aborder le calcul dynamique des câbles suspendus, ayant une forme parabolique, soumis à l'action des charges harmoniques transversales réparties le long du câble. Les charges peuvent être causées par exemple sous l'impulsion de la pression du vent, de la chute de manchons de givre ou en cas d'incident dans les lignes de transport d'énergie électrique à la suite des forces de Laplace résultantes des courants de court-circuit. De tels câbles peuvent supporter des cabines de transport publiques aériens comme dans le cas de téléphérique ou éventuellement un tablier léger supposé dépourvu d'aucune rigidité propre appréciable pouvant dans le cas pratique être l'exemple d'une passerelle piétonnière ou tout simplement dans le cas d'un pont suspendu en phase de réalisation.

Les fondements théoriques de la méthode de calcul ont été présentés d'une manière succincte où la théorie linéaire en régime vibratoire forcé a été développée. L'équation différentielle de mouvement qui en résulte est obtenue en utilisant la deuxième loi de Newton ou le principe fondamental de la dynamique qui selon lequel la dérivée de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur un élément de câble. La résolution de l'équation différentielle a été effectuée en utilisant la méthode de séparation de variables qui consiste d'écrire la réponse en un produit de fonctions spatiale et temporelles. En moyennant les conditions aux limites du câble, l'expression du déplacement transversal ou horizontal est finalement obtenue en développant l'intégrale de Duhamel selon la nature de la charge dynamique considérée.

Les hypothèses admises qui délimitent les conditions de validité de la méthode de calcul sont principalement les suivantes:

- Câble parfaitement flexible qui revient à énoncer en langage structural que, tout au long d'un câble en équilibre, le moment fléchissant est nul;
- Câbles relativement peu profonds correspondant à un rapport flèche/travée ne dépassant pas l'ordre de 1/10 afin d'assimiler les chaînettes fortement aplaties, dans l'état initial, à des paraboles de 2^{ème} degrés;
- Lors du réglage initial, le câble porteur reprend la totalité des charges uniformément réparties dues au poids propre de l'ouvrage y compris le poids des autres éléments accessoires, engendrant une force de pré-tension dans le câble.
- Surtensions ou poussées additionnelles induits dans le câble sous l'effet des surcharges transversales appliquées sont négligeables.

La méthode a été ensuite appliquée d'abord à différents aspects de l'analyse dynamique d'un câble soumis à l'action d'un chargement répartie transversalement, pouvant supporter un tablier de pont suspendu ou d'une cabine téléphérique. La réponse dynamique de l'ouvrage a été évaluée selon que la charge est d'amplitude constante ou harmonique. Les résultats sont confrontés avec succès à ceux issus du code ANSYS, fortement connu internationalement, qui est un code essentiellement numérique basé sur la méthode des éléments finis.

4-2 Organisation du travail

Le travail présenté dans ce mémoire a été organisé en 4 chapitres dont ce présent chapitre récapitule l'ensemble des tâches effectuées et les principaux résultats obtenus suivis par quelques recommandations pour l'amélioration et la poursuite de ce thème de travail.

Le premier chapitre en guise d'introduction a été consacré essentiellement à la nature de la problématique et à la question des structures suspendues ainsi qu'à la description des objectifs fixés.

Le deuxième chapitre a trait à la présentation des développements théoriques de base de la méthode de calcul permettant d'analyser la réponse dynamique, en régime forcé, d'un câble précontraint de suspension soumis à l'action de charges extérieures transversales ou horizontales de type réparties. L'équation différentielle de mouvement qui en résulte a été obtenue en exploitant le principe fondamental de la dynamique (ou la deuxième loi de Newton) selon lequel la dérivée de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures qui s'exerce sur un corps solide. Les câbles sont principalement supposés simplement appuyés à leurs extrémités et ancrés solidement à des massifs d'ancrage. En outre, la géométrie des câbles est admise de la forme d'une parabole de deuxième degré. La solution de l'équation différentielle résultante est formulée en considérant trois types de charges réparties à savoir une charge répartie d'amplitude constante, une charge répartie harmonique cosinusoidale et une charge répartie harmonique sinusoidale.

L'avant dernier chapitre a été consacré à l'implémentation numérique et à l'analyse des résultats portant sur les câbles principaux du pont suspendu de Bosphore, en Turquie, lors de la phase de sa réalisation. Les charges sont horizontales ou transversales de nature répartie, soit en d'autres termes appliquées perpendiculairement au plan général du système. En outre, afin de jauger la fiabilité et la précision de la méthode analytique de calcul ainsi établie, les résultats obtenus ont été discutés et comparés à ceux issus du code ANSYS, qui est un outil numérique basé sur la méthode des éléments finis.

4-3 Résultats obtenus

La méthode analytique de calcul ainsi établie, nous permet de procéder aisément à l'analyse du comportement dynamique, en vibration forcée, d'un câble suspendu librement appuyé à ses deux extrémités dont la configuration initiale est de la forme d'une parabole de deuxième degré. Son fondement théorique est simple. Appliquée à un système pouvant être le siège d'une cabine d'un téléphérique ou de pont suspendu lors de sa phase de réalisation, la méthode semble fiable et efficace. La comparaison des résultats obtenus révèle une bonne précision que l'on peut obtenir avec la modélisation numérique basée sur le principe de discrétisation par éléments finis où l'erreur n'excède guère en moyenne 7%. Cette erreur pourra être imputée non pas plutôt à la méthode analytique elle-même mais à d'autres facteurs liés au choix de certains paramètres utilisés dans les calculs à l'instar du nombre de termes pris en considération dans la série trigonométrique ou à la valeur du pas de temps

utilisé lors des simulations avec ANSYS. Par ailleurs, le phénomène de résonance du câble a été mis en évidence à travers une analyse paramétrique appropriée où nous constatons que le pic de la réponse se fait pressentir de plus en plus que la valeur de la fréquence du chargement harmonique appliqué s'approche de la de la première fréquence propre de vibration.

4-4 Recommandations futures

Ce qu'on pourrait enfin suggérer comme études futures pour l'amélioration de ce thème de travail sont les suivantes :

- Etendre et raffiner la méthode de calcul en régime dynamique forcé sous charges vibratoires horizontales en considérant les dénivellations d'appuis et généraliser la méthode à la présence de plusieurs appuis.

- Entreprendre une analyse paramétrique afin de montrer l'effet de certains paramètres sur la stabilité des cabines téléphériques comme sa cambrure, la pré-tension de réglage, l'intensité et la disposition des charges ainsi que ses pulsations propres.

Références

- [1] Juozpaitis A. and al., 2010. Non linear analysis of suspension bridges with flexible and rigid cables, *Journal of Civil Eng. and Mang.*, 16:1, pp.149-151.
- [2] Desai Y.M. and al., 1989. Geometric nonlinear static analysis of cable supported structures, *Computers & Structures*, V. 29, N° 6, pp. 1001, 1009.
- [3] Goremikins V. and al., 2013. Simplified method of determination of natural-vibration frequencies of prestressed suspension bridges, *Procedia Engineering*, 57, pp. 343-352.
- [4] Hacherouf Mohamed Cherif, Analyse statique et dynamique d'un câble de suspension d'une cabine téléphérique, Master académique, Option Structure, Département de Génie Civil, Université Mouloud Mammeri, Tizi-ouzou, Mémoire soutenu, le 10-07-2019.
- [5] - Illouli S., **Sadaoui A.** and Khennane A. Application of the theory statically indeterminate structures of infinite degree to a cable-truss footbridge under lateral forces, *Engineering Structures*, 188 (2019), Pages 665-676. <http://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.03.0063>.
- [6] Irvine, M., 1994. Studies in the statics and dynamics of simple cable systems, PhD Thesis, Dynamics laboratory, California institute of technology, DYNL-108.
- [7] Voltera E. and Zachmanoglu E.C. Dynamics of vibrations, Charles E. Merrill Books, Inc., Columbus, Ohio, 1965.
- [8] Clough R.W. and Penzien J. Dynamique des structures, Tome 1, Principes fondamentaux, Ed. Pluralis, 1980.
- [9] ANSYS® Academic Research, Release 15.0 <http://www.ansys.com/>.