

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**  
**Université Mouloud MAMMARI, Tizi-Ouzou**



**Faculté de Génie Electrique et d'Informatique**  
**Département d'Automatique**

**Mémoire de Fin d'Etudes**

En vue de l'obtention du diplôme

*D'Ingénieur d'Etat en Automatique*

***Thème***

**Etude de l'influence des méthodes de réduction  
sur l'observabilité des systèmes à paramètres  
distribués**

Proposé par : **A.MAIDI**

Présenté par :

Dirigé par : **A.MAID**

**M<sup>elle</sup>. BERROUANE Lynda**  
**M<sup>elle</sup>. SAI Karima**

Soutenu le : / / 2010

*Promotion 2010*

# Remerciements

*Nous remercions tout d'abord par excellence sa grandeur « le bon Dieu », qui nous a donné le courage et la patience tout au long de notre vie.*

*Nos premiers remerciements vont à notre promoteur M<sup>r</sup> A. MAIDI, qui a suivi et veillé sur le bon déroulement de ce travail avec ses conseils et ses remarques constitutives, et surtout pour sa compréhension et son encouragement. Ainsi que nos reconnaissances à M<sup>r</sup> : R.MANSOURI et M<sup>r</sup> S.GUERMAH pour leur assistance et la disponibilité qu'ils nous accordaient, ses remarques et leurs conseils avertis ce qui nous a permis de réaliser notre travail dans sa meilleure forme.*

*Nous remercions Le président du jury et les examinateurs d'avoir accepté de juger notre travail.*

*Tous nos infinis remerciements vont à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation durant notre cursus universitaire, pour le riche savoir qu'ils nous ont transmis avec rigueur et dévouement, à eux tous nous éprouvons.*

*Enfin, nous tenons à remercier également toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de notre travail.*

*Merci à tous*

## DEDICACES

*Je dédie ce modeste travail à :*

*Mes parents qui ont beaucoup sacrifié pour moi*

*A mon adorable petit frère MASSYL*

*Mes grands parents*

*Et surtout à la mémoire de mon très cher grand père paternel*

*Tous mes ami(e)s*

*Mon binôme SAI Karima et sa famille*

*Lynda BERROUANE*

# DEDICACES

*Je dédie ce modeste travail à :*

*Mes parents*

*Ma grande mère paternelle et mon grand père maternel*

*Mes frères et leurs femmes*

*Mes neveux MAYAS, TAHAR et ILAS*

*Tous mes cousins et cousines*

*Toute la famille SAI, FERGANI et SIDALI*

*Tous mes amis*

*Mon binôme BERROUANE Lynda et sa famille*

*La mémoire de mes chers cousins TAHAR et FATIHA*

*Je dédie particulièrement ce travail à la mémoire de ma grande mère*

*« FERGANI FEROUJJA » et grand père « SAI TAHAR » qui m'ont  
vraiment poussé et aidé de leurs conseils*

*Karima SAI*

# Sommaire

Introduction générale : ..... -1-

## Chapitre I : Observabilité des systèmes à paramètres distribués

1 – Introduction : ..... -3-

2 – Définition et classification des systèmes à paramètres distribués (répartis) : ..... -3-

3 – Définition d'un système à paramètres localisés : ..... -5-

4 – Description mathématique des systèmes à paramètres répartis : ..... -5-

4 – 1 – Equation d'état : ..... -5-

4 – 2 – Différents types de conditions aux limites : ..... -6-

4 – 2 – 1 – Conditions aux limites de Dirichlet : ..... -7-

4 – 2 – 2 – Conditions aux de Neumann : ..... -7-

4 – 2 – 3 – Conditions aux de Fourier : ..... -7-

4 – 2 – 3 – Conditions aux limites mixtes (mêlées) : ..... -8-

5 – Les commandes d'un système à paramètres distribués : ..... -8-

5 – 1 – Les commandes réparties : ..... -8-

5 – 2 – Observation par zone : ..... -9-

5 – 3 – Les commandes ponctuelles : ..... -9-

5 – 4 – Les commandes par balayages : ..... -9-

5 – 5 – Les commandes aux frontières ou (aux limites) : ..... -9-

6 – Les observations d'un système à paramètres distribués : ..... -9-

6 – 1 – Observations réparties : ..... -10-

|  |      |
|--|------|
| 6 – 2 – Observation ponctuelle : .....   | -10- |
| 6 – 3 – Observation par balayage : .....   | -10- |
| 6 – 4 – Observation par moyannage spatiale : .....                               | -10- |
| 7 – Observabilité des systèmes à paramètres distribués : .....                   | -11- |
| 7 – 1 – Définition de l’observabilité d’un système à paramètre localisés : ..... | -11- |
| 7 – 2 – Les critères et propriétés de l’observabilité : .....                    | -11- |
| 7 – 2 – 1 – Propriété 1 : .....  | -11- |
| 7 – 2 – 2 – Propriété 2 (Critère de KALMAN) : .....                              | -12- |
| 7 – 2 – 3 – Propriété 3 (Critère de Popov-Belevitch-Hautus) : .....              | -12- |
| 8 – Conclusion : .....   | -13- |

## **Chapitre II : Réduction des systèmes à paramètres distribués**

|  |      |
|--|------|
| 1 – Introduction : .....   | -14- |
| 2 – Définition de l’approximation : .....                                  | -14- |
| 3 – Définition de la discrétisation : .....                                | -14- |
| 4 – Définition de la réduction : .....                                     | -14- |
| 5 – Les méthodes de réduction des systèmes à paramètres distribués : ..... | -15- |
| 5 – 1 – Les méthodes d’approximation de la solution des EDP : .....        | -15- |
| 5 – 1 – 1 – Méthode de collocation par point : .....                       | -15- |
| 5 – 2 – Les méthodes d’approximation (discrétisation) des EDP : .....      | -16- |
| 5 – 2 – 1 – Méthode des éléments finis : .....                             | -16- |
| 5 – 2 – 2 – Méthode des volumes finis : .....                              | -17- |
| 5 – 2 – 3 – Méthode des différences finies : .....                         | -17- |
| 5 – 2 – 3 – 1 – Méthode des différences finies en arrière : .....          | -18- |

|   |      |
|---|------|
| 5 – 2 – 3 – 2 – Méthode des différences finies centrales : .....                | -19- |
| 6 – Exemple d’application de la méthode des différences finies : .....          | -20- |
| 6 – 1 – Application de la méthode des différences finies en arrière : .....     | -21- |
| 6 – 2 – Application de la méthode des différences finies centrales : .....      | -22- |
| 6 – 2 – 1 – Méthode de différences centrales avec conditions de Dirichlet : ... | -23- |
| 6 – 2 – 2 – Méthode de différences centrales avec conditions mixtes : .....     | -24- |
| 7 – Conclusion : .....  | -27- |

**Chapitre III : Simulation des systèmes à paramètres distribués  
et analyse de l’observabilité du modèle réduit**

|   |      |
|---|------|
| 1 – Introduction : .....  | -28- |
| 2 – Définition de la simulation : .....   | -28- |
| 3 – -exemple d’application.....   | -28- |
| 4 – Simulation du modèle obtenu par la méthode de différences finies en arrière : ..... | -29- |
| 4 – 1 – Résultats de simulation : .....   | -30- |
| 4 – 2 – Interprétation des résultats : .....  | -31- |
| 5 – Simulation du modèle approximé par la méthode de différences finies centrales : ... | -31- |
| 5 – 1 – Simulation avec les conditions aux limites de Dirichlet : .....                 | -31- |
| 5 – 1 – 1 – Résultats de simulation : .....   | -34- |
| 5 – 2 – Simulation avec les conditions aux limites mixtes : .....                       | -34- |
| 5 – 3 – Interprétation des résultats : .....  | -36- |
| 6 – Analyse de l’observabilité du système à paramètres distribués : .....               | -37- |
| 7 – Conclusion : .....  | -39- |



La meilleure façon de ne pas avancer c'est de suivre une  
idée fixe. ?

Jacques Prévert

# *Introduction Générale*

En dimension finie, c'est-à-dire dans le cas des systèmes à paramètres localisés, la question de l'observabilité se posait lorsqu'une ou plusieurs variables d'état ne peut pas être mesurée. Or, l'état d'un système à paramètres distribués est de dimension infinie et ne peut donc jamais être directement mesuré d'un point de vue physique. C'est pour quoi l'observabilité est une notion cruciale dans le cadre des systèmes à paramètres distribués.

De même qu'en dimension finie, il suffit de définir l'observabilité d'un système à paramètres répartis linéaire invariant comme la possibilité de déterminer l'état initial à partir de la connaissance de la sortie et la commande sur un intervalle de temps allant de l'instant initial à l'instant actuel.

Pour une étude possible de l'observabilité d'un système à paramètres distribués, l'approche conventionnelle consiste à approximer le système à paramètres distribués par un système à paramètres localisés.

Les techniques d'approximation possibles sont classées en deux grandes familles. Le principe des méthodes de la première famille, dites d'approximation d'équations, consiste à discrétiser les équations aux dérivées partielles (EDP) en utilisant les méthodes de différences finies, de volumes finis ou d'éléments finis. Ces derniers conduisent à des équations différentielles ordinaires (EDO) dans le cas d'une semi-discrétisation (décomposition du domaine de l'espace seulement) appelé aussi méthode des lignes, et à des équations algébriques dans le cas d'une discrétisation totale (décomposition des domaines d'espace et de temps). Les méthodes dites d'approximation de solutions, qui représentent la deuxième famille, consistent à approcher les solutions des EDP en utilisant les techniques des résidus pondérés (méthode de collocation, Galerkin) ou la méthode des fonctions propres pour les EDP linéaires.

Dans notre travail, on s'intéresse à l'analyse de l'observabilité d'un système à paramètres distribués en considérant un modèle approximé obtenu par la méthode des différences finies. L'objectif est de montrer l'influence du choix de nombre de points de discrétisation et le schéma de discrétisation (différence arrière ou centrale) sur l'observabilité du système, et sur la précision des résultats de simulation du comportement dynamique du système.

Le mémoire est organisé comme suit :

**Le chapitre 1** présente des notions générales relatives aux systèmes à paramètres distribués, et introduit la notion d'observabilité des systèmes dynamiques.

**Le chapitre 2** décrit les méthodes de réduction des systèmes à paramètres distribués, l'accent a été mis sur la méthode des différences finies.

**Le chapitre 3** est consacré à la simulation des systèmes à paramètres distribués en utilisant la méthode des lignes, et l'analyse de l'observabilité du modèle réduit.

Le mémoire se termine par une conclusion.

Chapitre

**1**

*Observabilité des  
systèmes à paramètres  
distribués*

## I.1 Introduction

La plupart des systèmes physiques sont des systèmes à paramètres distribués, ces derniers sont fréquemment rencontrés dans différents domaines, mais leur complexité a provoqué un grand intérêt de la part des scientifiques afin de simplifier les équations qui régissent ces systèmes. Un dilemme est apparu entre la complexité des systèmes et la précision de leurs modèles correspondants.

Ce chapitre fait l'objet d'un exposé dans lequel on s'intéresse à quelques notions de base sur les systèmes à paramètres distribués ainsi que leur classification et représentation mathématique, comme on a introduit des généralités sur l'observabilité et ses différents critères.

## I.2 Définition et classification des systèmes à paramètres répartis (ou distribués) [4]

Les systèmes à paramètres distribués sont des systèmes dont la dynamique est régit par une équation aux dérivées partielles, ou d'équation intégrale, ou intégro-différentielle linéaire, à coefficients constants ou variables. A chaque instant l'état du système est une fonction de variable d'espace  $x(z,t)$  qui appartient à un espace fonctionnel de dimension infinie.  $z$  est la variable décrivant l'espace d'évolution de la grandeur  $x$  et  $t$  la variable temps.

Les variables caractérisant les systèmes à paramètres distribués peuvent être des paramètres liés à la nature du procédé lui-même ou des paramètres influant sur le procédé comme la température.

Les équations aux dérivées partielles les plus largement utilisés sont celles de second ordre, qui peuvent s'écrire dans le cas linéaire sous la forme : [4]

$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + b \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial t} + c \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \dots = 0 \quad (1.1)$$

Ou bien

$$\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 x}{\partial z_i \partial z_j} = 0 \quad (1.2)$$

Pour classer les systèmes à paramètres distribués, on considère les coefficients de l'équation aux dérivées partielles et par analogie avec les coniques :

[4]

- si  $\Delta = b^2 - ac > 0$  Le système est hyperbolique.  
 si  $\Delta = b^2 - ac < 0$  Le système est elliptique.  
 si  $\Delta = b^2 - ac = 0$  Le système est parabolique.

Une autre méthode consiste à analyser les éléments de la matrice  $K = [a_{ij}]$  de l'équation (1.2). Ainsi,

Si la matrice  $K$  est symétrique (elle possède  $n$  valeurs propre de même signe) alors l'équation (1.2) est elliptique.

Si la matrice  $K$  est singulière (possède au moins une valeur propre nulle) donc l'équation (1.2) est parabolique.

Si la matrice  $K$  possède des valeurs propres de même signe sauf une qui est de signe opposé, alors l'équation (1.2) est hyperbolique.

En fin, si la matrice  $K$  est non-singulière et possède plus d'une valeur propre de même signe, l'équation (1.2) est dite ultra hyperbolique.

Dans le cas des équations aux dérivées partielles non linéaires, la classification est plus difficile à établir. Dans ce cas deux classes particulières ont été prises en compte :

- L'équation aux dérivées partielles est dite quasi-linéaire si ses dérivées d'ordre plus élevés forment une équation aux dérivées partielles linéaire dont les coefficients peuvent dépendre des dérivées d'ordre inférieur.

- l'équation aux dérivées partielles est semi-linéaire si ces coefficients dépendent seulement des variables d'espace et de temps, par conséquent, les notions des équations aux dérivées partielles (EDP) hyperbolique, parabolique et elliptique valent aussi dans le cas de semi-linéaire

### I.3 Définition d'un système à paramètres localisés

Un système à paramètres localisés est un système décrit mathématiquement par un ensemble d'équations différentielles ordinaires pouvant être linéaires ou non linéaires, à coefficients constants ou en fonction du temps, qui est régi par une dynamique représentée par un état  $x(t)$  à l'instant «  $t$  » qui appartient à un espace  $R^n$  de dimension finie.

Un système à paramètres localisés est décrit par des équations différentielles ordinaires de la forme suivante :

$$\alpha_1 \frac{\partial^n x}{\partial t^n} + \alpha_2 \frac{\partial^{n-1} x}{\partial t^{n-1}} + \alpha_3 \frac{\partial^{n-2} x}{\partial t^{n-2}} + \dots + \alpha_{n-1} \frac{\partial x}{\partial t} + \alpha_n x(t) = 0 \quad (1.3)$$

### I.4 Description mathématique d'un système à paramètres distribués [1]

La description mathématique d'un système à paramètres distribués comporte les éléments suivants :

#### I.4.1 Equation d'état

On considère la classe du système définie par l'équation d'état suivante :

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = Mx(z,t) + H(z)u(z,t) \quad (1.4)$$

Sur un domaine spatiale  $\Omega$  tel que :

$$z \in \Omega \subset R \quad (1.5)$$

Et un domaine temporel

$$t \in T \subset R \quad (1.6)$$

Avec la condition initiale

$$x(z, t_0) = x_0(z) \quad (1.7)$$

Et la condition aux limites établissant les relations entre l'état et la commande aux limites (si elle existe)

$$L(x(z', t) = U_L(z', t), z' \in F_r \Omega \quad (1.8)$$

( $F_r \Omega$  : Frontière de  $\Omega$ )

M, L et H sont des opérateurs matriciels différentiels ne comportant que des dérivées par rapport à z.

L'état x du système est représenté par la fonction vectorielle :

$$x(z, t) = \begin{bmatrix} x_1(z, t) \\ x_2(z, t) \\ \vdots \\ x_n(z, t) \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

#### I.4.2 Différents types de conditions aux limites

Les conditions aux limites sont les valeurs que prennent les solutions des équations aux dérivées ordinaires et des équations aux dérivées partielles sur une frontière.

Il existe un grand nombre de conditions aux limites possibles, en fonction de la formulation du problème, du nombre de variables mises en jeu, et (de manière plus importante) de la nature de l'équation.

### I.4.2.1 Conditions aux limites de Dirichlet

Une condition aux limites de Dirichlet est imposée à une équation différentielle ou à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs que la solution doit vérifier sur les frontières/limites du domaine.

Si on prend le cas d'une barre métallique pour les quelles les extrémités sont maintenues à des températures données qu'on note  $T_0(t)$ ,  $T_1(t)$ , on aura évidemment :

$$T(0, t) = T_0(t), T(L, t) = T_1(t) \quad (\text{I.10})$$

La condition aux limites de type Dirichlet est sans doute l'une des conditions aux limites les plus faciles à comprendre.

### I.4.2.2 Conditions aux limites de Neumann

Si le dispositif est tel que le flux de chaleur est donné au bord, c'est le gradient de la température qui est ainsi fixe et les conditions aux limites sont alors :

$$-C \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = g_0(t), C \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L} = g_1(t) \quad (\text{I.11})$$

### I.4.2.3 Conditions aux limites de Fourier

Si la donnée est la température extérieure  $T_{ex}(t)$ , on sait que le gradient de la température au bord (flux de chaleur) sera proportionnel à la différence  $T - T_{ex}$  est donc :

$$-C \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = -K(T - T_{ex}), -C \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L} = -K(T - T_{ex}) \quad (\text{I.12})$$

#### I.4.2.4 Conditions aux limites mixtes (mêlée)

Une condition aux limites mêlée ou mixte correspond à l'approchement de différentes conditions aux limites sur différentes parties du bord (ou frontière) du domaine dans lequel est posée une équation aux dérivées partielles ou une équation différentielle ordinaire

Elle est représentée par les équations suivantes :

$$T(0, t) = T_0 \quad (\text{I.13})$$

$$\left. \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} \right|_{z=L} = T_L \quad (\text{I.14})$$

Il est possible de considérer de nombreuses conditions mêlées en découpant le bord du domaine en autant de parties que nécessaire, et d'y imposer les conditions aux limites souhaitées.

### I.5 Les commandes d'un système à paramètres distribués [1]

On rappelle que les fonctions  $u(z, t)$  représentent la commande du système que l'on classe en plusieurs catégories :

#### I.5.1 Commandes réparties

Représentées par des fonctions définies sur  $\Omega \times T$  ; dans de nombreux cas,  $u(z, t)$  peut être décomposée suivant cette équation :

$$U(z, t) = q(z)u_e(t) \quad (\text{I.15})$$

$q(z)$  : représente la structure géométrique de l'ensemble des actionneurs,

$u_e(t)$  : est le signal d'entrée à la commande.

Cette fonction permet la simplification du calcul dans la transformation du modèle et la détermination de la commande.

### I.5.2 Commandes par zones

Représentées par un ensemble de fonctions définies sur un sous ensemble de  $\Omega$ . si la commande est appliquée sur r zones, on a dans certains cas

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^r q_i(z) u_{ei}(t) \quad (\text{I.16})$$

### .3 Commandes ponctuelles

C'est un cas particulier de la commande par zone qui se réduit dans ce cas à un simple point.

La fonction  $q_i(z)$  de l'équation (I.16) est remplacée par un pic de Dirac :

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^r u_{ei}(t) d(z - z_i) \quad (\text{I.17})$$

### I.5.4 Commandes par balayages

Dans ce cas des zones ou les points d'actions sont mobiles dans le domaine de  $\Omega$ .

### I.5.5 Les commandes aux frontières (ou aux limites)

Les limites sont définies sur  $F_r \Omega \times T$  ; elles peuvent être par zone, ponctuelle, fixe, ou à balayage

### I.6 Observations d'un système à paramètres distribués [1]

L'observation est représentée par  $y(z, t)$  et on retrouve plusieurs types :

### I.6.1 Observations réparties

Le vecteur de sortie peut être défini :

$$y(z, t) = c(z)x(z, t) \quad (\text{I.18})$$

$C(z)$  : caractérise la structure géométrique des systèmes d'observation (capteurs),

$x(z, t)$  : représente le vecteur d'état du système,

$Y(z, t)$  : représente le vecteur de sortie du système.

### I.6.2 Observation ponctuelle

Elle est définie en quelques points particuliers  $z_i$  de  $\Omega$ . Le vecteur de sortie sera représenté comme suit :

$$y(z, t) = \int_{\Omega} x(z, t) d(z - z_i) dz = x(z_i, t) \quad (\text{I.19})$$

### I.6.3 Observation par balayage

Les points d'observations se déplacent à l'intérieur du domaine spatial.

### I.6.4 Observation par moyennage spatiale

C'est le cas où un ensemble de capteurs fournissent un signal  $y(t)$  qui ne peut pas être assimilé à des points d'observation. En générale, il est donné par :

$$y(z, t) = \int_{\Omega} c(z)x(z, t) dz \quad (\text{I.20})$$

$C(z)$  : c'est la structure géométrique l'ensemble des capteurs.

## I.7 Observabilité des systèmes à paramètres distribués

L'observabilité est un critère très efficace pour l'étude du comportement et la dynamique d'un système.

L'analyse de l'observabilité est l'une des étapes principales pour concevoir des observateurs, et l'implémentation des lois de commande sous forme de retour d'état.

### I.7.1 Définition de l'observabilité d'un système à paramètres localisés (dimension finie)

Un système invariant de dimension finie est dit complètement observable si pour  $t > 0$ , et  $u(t)$  et  $y(t)$  sont connues sur l'intervalle  $[0, t]$  donc on peut déterminer la valeur unique de l'état initial  $x_0 = x(0)$ .

Avec

$u(t)$  est le signal de commande

$y(t)$  est le signal de sortie

L'observabilité est la capacité que l'on a de reconstruire complètement l'état initial du système à partir des mesures disponibles sur une période de temps quelconque, l'observabilité dépend d'une manière évidente des variables mesurées.

### I.7.2 Les critères et les propriétés d'observabilité

Il existe plusieurs critères et propriétés pour l'analyse de l'observabilité et les plus utilisées sont :

#### I.7.2.1 propriété 1

Supposons que  $U=0$ , le système est complètement observable si  $Y(t)=0$  pour tout  $t \geq 0$ , alors  $x_0 = x(0) = 0$ .

**I.7.2.2 propriété 2 (Critère de KALMAN)**

La représentation d'état d'un système monovariante est :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU, x_0 = x(0) \\ y(t) = CX + DU \end{cases} \quad (1.21)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : \text{Vecteur d'état du système}$$

$A$  : Matrice d'état du système de dimension  $(n \times n)$ .

$B$  : Matrice de commande de dimension  $(n \times 1)$

$C$  : Matrice d'observation de dimension  $(1 \times n)$

$D$  : Matrice de transmission directe

$x_0 = x(0)$  : est l'état initial du système.

$u(t)$  et  $y(t)$  sont respectivement l'entrée et la sortie du système.

Est complètement observable si le rang de la matrice d'observabilité  $O(A, C)$  est plein :

$$\text{rang } O(A, C) = \text{rang} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (1.22)$$

On peut bien généraliser cela pour le cas d'un système multivariable.

**I.7.2.3 Propriété 3 (Critère de Popov-Belevitch-Hautus)**

Le système est complètement observable si :

$$\forall s \in \sigma(A), \text{rang} \begin{bmatrix} C \\ sI - A \end{bmatrix} = \text{rang}(A) = n \quad (1.23)$$

$\sigma(A)$  : Spectre de la matrice A

## **I.8 Conclusion**

L'observabilité d'un système à paramètres distribués est une notion cruciale car d'un point de vue physique on ne peut jamais mesurer directement l'état d'un système à paramètres distribués.

De même qu'on dimension finie, on peut définir l'observabilité d'un système à paramètre distribués linéaire invariant comme la possibilité de reconstruire complètement l'état initial du système à partir des mesures disponibles sur une période de temps quelconque, l'observabilité dépend d'une manière évidente des variables mesurées, mais toujours la complexité du cadre de dimension infinie nous amène à choisir l'option d'approximation du système à paramètres distribués à l'aide des méthodes de discrétisation que nous verrons dans le chapitre suivant pour obtenir des systèmes à paramètres localisés (dimension finie) pour ensuite utiliser les différents critères d'observabilités des systèmes de dimension finie.

*Chapitre*

**2**

*Réduction des systèmes à  
paramètres distribués*

### II.1 Introduction

Afin de minimiser l'erreur entre la complexité et la précision engendrée par la modélisation mathématique d'un système à paramètres distribués et pouvoir étudier les différents critères qui servent à connaître et prévoir le comportement de ces derniers, plusieurs méthodes d'approximation et de réduction ont été utilisées comme la méthode des différences finies.

Dans ce chapitre on s'intéresse aux méthodes de discrétisation d'un système à paramètres distribués qui est décrit par une équation aux dérivées partielles de premier ordre hyperbolique en utilisant la méthode des différences finies.

### II.2 Définition de l'approximation

L'approximation est l'utilisation des différentes méthodes de calcul numérique pour approcher un modèle à paramètres distribués (dimension infinie) par un modèle à paramètres localisés (de dimension finie).

### II.3 Définition de la discrétisation

La discrétisation c'est partager un ou plusieurs domaines en parties bien égales et utiliser des méthodes de calcul et de subdivision afin de simplifier les équations complexes qui décrivent les dynamiques des systèmes.

### II.4 Définition de la réduction

La réduction c'est la diminution de la dimension du système, en utilisant des méthodes consacré à ce but de façon à rendre le système de dimension finie (système à paramètres localisés).

### II.5 Méthodes de réduction d'un système à paramètres distribués

Pour un objectif de simulation d'un système à paramètres distribués, nous pouvons utiliser l'une des méthodes d'approximation ou méthodes de discrétisation. Cependant, les techniques d'approximation possibles sont classées en deux grandes familles:

- 1) Le principe des méthodes de la première famille, dites d'approximation d'équations, consiste à discrétiser les équations aux dérivées partielles (EDP) en utilisant les méthodes de différences finies, de volume finis ou d'éléments finis.
- 2) Les méthodes dites d'approximation de solutions, qui représentent la deuxième famille, consistent à approcher les solutions des équations aux dérivées partielles (EDP) en utilisant les techniques des résidus pondérés (méthode de collocation, Galerkin ...) ou la méthode de fonctions propres dans le cas des équations aux dérivées partielles (EDP) linéaires.

#### II.5.1 Les méthodes d'approximation de la solution des équations aux dérivées partielles

On citera une des méthodes d'approximation de la solution qui est la méthode de collocation.

##### II.5.1.1 Méthode de collocation par point

La méthode de collocation est une méthode des résidus largement utilisée dans l'approximation des systèmes à paramètres distribués car elle permet la conservation de la nature des variables d'états pendant la transformation, la mise en œuvre de la méthode nécessite le choix de trois paramètres :

- 1) Les fonctions de base  $f_i(z)$
- 2) La position  $z_i$  des points de collocation
- 3) Le nombre  $n$  de points de collocation

La fonction  $f_i(z)$  a la plupart du temps la structure polynomiale obtenue à l'aide d'interpolation de LAGRANGE défini comme suit:

$$f_i(z) = \frac{P_{n+2}(z)}{(z - z_i)P'_{n+2}(z)} \quad (\text{II.1})$$

Avec

$$P_{n+2} = \prod_{i=0}^{n+1} (z - z_i) \quad (\text{II.2})$$

$p_{n+1}$ : La dérivée première de  $P_n(z)$  par rapport à  $z$

$Z_i$ : les abscisses des points d'interpolations et si ces derniers sont confondus avec les points de collocation alors la méthode est dite méthode de collocation orthogonale

On applique la méthode de collocation selon la formule suivante : [3]

$$\frac{\partial x(z_j, t)}{\partial z} = \sum b_i(i-1)z_j^{i-2} \quad (\text{II.3})$$

### II.5.2 Les méthodes d'approximation (discrétisation) des équations aux dérivées partielles

Ces méthodes sont utilisées pour la discrétisation de l'équation aux dérivées partielles, on en citera les méthodes les plus utilisées.

#### II.5.2.1 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis fait partie des outils mathématiques. Il s'agit de mettre en place, un algorithme discret mathématique permettant de rechercher une solution approchée d'une équation aux dérivées partielles sur un domaine compact avec des conditions aux limites (Dirichlet, Neumann, fourrier).

La méthode des éléments finis consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle (comme minimisation de l'énergie, en général) dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres.

### II.5.2.2 Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des approximations discrètes conservatives et donc particulièrement bien adaptée aux équations de la mécanique des fluides : équation de conservation de la masse, équation de conservation de la quantité de mouvement et équation de conservation de l'énergie.

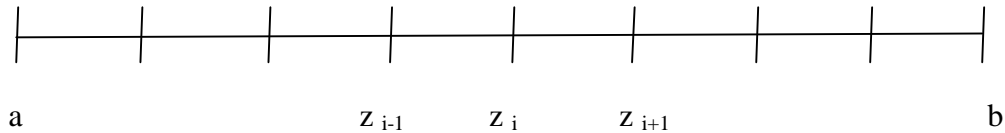
Sa mise en œuvre est simple si les volumes élémentaires sont des rectangles (ou des Parallélépipèdes rectangles en dimension 3). Cependant la méthode des volumes finis permet d'utiliser des volumes élémentaires de forme quelconque, donc de traiter des géométries complexes, ce qui est un avantage sur les autres méthodes.

Il existe une grande variété de méthodes selon le choix de la géométrie des volumes élémentaires et des formules de calcul des flux. Par contre, on dispose de peu de résultats théoriques de convergence.

### II.5.2.3 Méthode des différences finies

Toutes les méthodes numériques présupposent la discrétisation du domaine géométrique afin de passer d'un problème continu à une infinité d'inconnues à un problème discret ne comptant qu'un nombre fini d'inconnues.

Dans le cas des différences finies en dimension un, on discrétise l'intervalle continu  $[a, b]$  en un nombre fini de points  $z_i$ .



**Figure(II.1)** : discrétisation en différence finie d'un segment  $[a, b]$ .

On remplace ainsi le problème continu par celui de la recherche de valeurs approchées  $x_i$  des solutions exactes  $x(z_i)$  aux points  $z_i$  de la discrétisation.

Mais on ne peut plus, dans ce cas, conserver les opérateurs de dérivation qui s'appliquent à des fonctions continues. On les remplace par des analogues discrets, les différences divisées ou différences finies.

Le type de conditions aux limites conditionne le nombre d'inconnues du problème discret. Dans le cas de conditions de Dirichlet, la solution est fixée, et donc en ces points, les valeurs sont connues. Dans tous les autres cas de conditions aux limites, la valeur de la solution reste inconnue et fait donc partie du vecteur inconnu.

Il existe deux classes de formules simples d'approximation des dérivés par des différences divisées ou différences finies qui sont :

### II.5.2.3.1 Méthode des différences finies en arrière

La méthode des différences finies en arrière prend les différences divisées qui se suit de la plus grande à la plus petite, utilisée pour discrétiser le domaine spatial (semi-discrétisation) afin d'obtenir des équations différentielles ordinaires (représentation d'état), qui ont la forme suivante en utilisant les différences divisées d'ordre 1 :

**a) La première dérivée (dérivée de premier ordre)**

$$x'(t_i) = \frac{dx}{dt}(t_i) = \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{h} \quad (\text{II.4})$$

$h = t_i - t_{i-1} = \Delta t$  : le pas de discrétisation

**b) La deuxième dérivée (la dérivée du second ordre)**

$$x''(t_i) = \frac{d^2x}{dt^2}(t_i) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt}(t_i) \right) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{\Delta t} \right] = \frac{x(t_i) - 2x(t_{i-1}) + x(t_{i-2}))}{(\Delta t)^2} \quad (\text{II.5})$$

**c) Pour la troisième dérivée (la dérivée d'ordre 3)**

$$x'''(t_i) = \frac{x(t_i) - 3x(t_{i-1}) + 3x(t_{i-2}) - x(t_{i-3}))}{(\Delta t)^3} \quad (\text{II.6})$$

**d) La quatrième dérivée (la dérivée d'ordre 4)**

$$x^{(4)}(t_i) = \frac{x(t_i) - 4x(t_{i-1}) + 6x(t_{i-2}) - 4x(t_{i-3}) + x(t_{i-4}))}{(\Delta t)^4} \quad (\text{II.7})$$

En utilisant la même manière et le même chemin de calcul on peut calculer les dérivées d'ordre supérieur.

**II.5.2.3.2 Méthode des différences finies centrales**

La méthode des différences centrales est une méthode de semi-discrétisation utilisée pour l'approximation des systèmes à paramètres distribués, elle est utilisée de manière à prendre la dérivée de l'équation au point  $z_i$  qui est le centre des deux points  $z_{i-1}$  et  $z_{i+1}$ .

Les dérivées ordinaires prendront les structures suivantes en utilisant toujours les différences divisées d'ordre 1 :

**a) La première dérivée (la dérivée de l'ordre 1)**

$$x'(t_i) = \frac{dx}{dt}(t_i) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_{i-1}))}{2\Delta t} \quad (\text{II.8})$$

**b) la deuxième dérivée (la dérivée d'ordre 2)**

$$x''(t_i) = \frac{d^2x}{dt^2}(t_i) = \frac{d}{dt} \left( \frac{x(t_{i+1}) - x(t_{i-1}))}{2\Delta t} \right) = \frac{x(t_{i+2}) - 2x(t_i) + x(t_{i-2}))}{4(\Delta t)^2} \quad (\text{II.9})$$

**c) La troisième dérivée (la dérivée d'ordre 3)**

$$x'''(t_i) = \frac{x(t_{i+3}) - 3x(t_{i+1}) + 3x(t_{i-1}) - x(t_{i-3}))}{(2\Delta t)^3} \quad (\text{II.10})$$

De la même manière on calcul les autres dérivées d'ordre plus supérieure

### II.6 Exemple d'application de la méthode des différences finies

A titre d'exemple d'une semi-discrétisation par la méthode des différences finies on prend l'équation aux dérivées partielles hyperbolique de premier ordre définie comme suit : [3]

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial x(z,t)}{\partial z} + \beta x(z,t) \quad (\text{II.11})$$

Avec les conditions aux limites de Dirichlet suivantes

$$x(0, t) = 1 \tag{II.12}$$

$$x(L, t) = 0 \tag{II.13}$$

Et la condition initiale commune pour les deux méthodes

$$x(z, 0) = 1 \tag{II.14}$$

### II.6.1 Application de la méthode des différences finies en arrière [3]

Décomposons le domaine d'espace en n intervalles égaux correspondant à un pas de discrétisation  $\Delta z=L/n$  avec L est la longueur de la barre métallique. Un schéma de discrétisation avec la méthode des différences finies en arrière de la dérivée première est défini comme suit :

$$\frac{\partial x(z_i, t)}{\partial z} = \frac{x(z_i, t) - x(z_{i-1}, t)}{\Delta z} \tag{II.15}$$

En remplace l'équation(II.15) dans (II.11) et on obtient l'équation différentielle suivante:

$$\frac{\partial x(z_i, t)}{\partial t} = \left( \frac{\alpha}{\Delta z} + \beta \right) x(z_i, t) - \frac{\alpha}{\Delta z} x(z_{i-1}, t) \tag{II.16}$$

Avec  $i=1, 2, 3 \dots n$

Pour  $i=1$

$$\frac{\partial x(z_1, t)}{\partial t} = \left( \frac{\alpha}{\Delta z} + \beta \right) x(z_1, t) - \frac{\alpha}{\Delta z} x(z_0, t)$$

avec  $x(z_0, t)=x(0, t)=1$

Pour  $i=2$

$$\frac{\partial x(z_2, t)}{\partial t} = \left(\frac{\alpha}{\Delta z} + \beta\right) x(z_2, t) - \frac{\alpha}{\Delta z} x(z_1, t)$$

Pour  $i=n$

$$\frac{\partial x(z_n, t)}{\partial t} = \left(\frac{\alpha}{\Delta z} + \beta\right) x(z_n, t) - \frac{\alpha}{\Delta z} x(z_{n-1}, t)$$

Et on obtient la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\alpha}{\Delta z} + \beta\right) & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ -\frac{\alpha}{\Delta z} & \left(\frac{\alpha}{\Delta z} + \beta\right) & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & -\frac{\alpha}{\Delta z} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & -\frac{\alpha}{\Delta z} & \left(\frac{\alpha}{\Delta z} + \beta\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \frac{\alpha}{\Delta z} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

$$y(t) = [0 \quad \dots \quad \dots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Avec  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  vecteur d'état de dimension égal au nombre de points de discrétisation

### II.6.2 Application de la méthode des différences finies centrales [3]

En appliquant la méthode des différences finies centrales, on utilise deux conditions aux limites

**II.6.2.1 La méthode des différences finies centrales avec les conditions de Dirichlet**

On décompose le domaine d'espace en n intervalles égaux correspondant à un pas de discrétisation  $\Delta z=L/n$ . Un schéma classique de discrétisation de la dérivée première de x qui prend la forme suivante:

$$\frac{\partial x(z_i,t)}{\partial z} = \frac{x(z_{i+1},t)-x(z_{i-1},t)}{2\Delta z} \tag{II.18}$$

Avec les conditions aux limites de Dirichlet suivantes

$$x(0, t) = 1 \tag{II.19}$$

$$x(L, t) = 0 \tag{II.20}$$

On remplace (II.18) dans ((II.11) et on obtient l'équation différentielle suivante

$$\frac{\partial x(z_i,t)}{\partial t} = -\frac{\alpha}{2\Delta z}x(z_{i-1}, t) + \beta x(z_i, t) + \frac{\alpha}{2\Delta z}x(z_{i+1}, t) \tag{II.21}$$

Avec  $i=1,2, 3,\dots, (n-1)$

Pour  $i=1$

$$\frac{\partial x(z_1,t)}{\partial t} = -\frac{\alpha}{2\Delta z}x(z_0, t) + \beta x(z_1, t) + \frac{\alpha}{2\Delta z}x(z_2, t)$$

Avec  $x(z_0,t)=x(0,t)=1$

Pour  $i=2$

$$\frac{\partial x(z_2,t)}{\partial t} = -\frac{\alpha}{2\Delta z}x(z_1, t) + \beta x(z_2, t) + \frac{\alpha}{2\Delta z}x(z_3, t)$$

Pour  $i = (n-1)$

$$\frac{\partial x(z_{n-1}, t)}{\partial t} = -\frac{\alpha}{2\Delta z} x(z_{n-2}, t) + \beta x(z_{n-1}, t) + \frac{\alpha}{2\Delta z} x(z_n, t)$$

Et on obtient la forme matricielle suivante :

Avec

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & -\frac{\alpha}{2\Delta z} & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \beta & \frac{\alpha}{2\Delta z} & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \beta & -\frac{\alpha}{2\Delta z} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -\frac{\alpha}{2\Delta z} & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -\frac{\alpha}{2\Delta z} & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{2\Delta z} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (I.22)$$

Dans ce cas la matrice A est de structure tri diagonal

### II.6.2.2 La méthode des différences finies centrales avec les conditions mixtes

Dans la méthode des différences finies centrales avec les conditions aux limites de Dirichlet on a abouti à une matrice A de dimension (n-1). Afin de pouvoir aller jusqu'à la dimension n on a utilisé les conditions aux limites mixtes suivante

Celle de Neumann :

$$\left. \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right|_{z=L} = 0 \quad (II.23)$$

Avec

$$\left. \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right|_{z=L} = \frac{x_{n-1} - 4x_n + 3x_{n+1}}{2\Delta z} = 0 \quad (II.24)$$

Celle de Dirichlet :

$$x(0, t) = 1 \tag{II.25}$$

On a précédemment

$$\frac{\partial x(z_i, t)}{\partial t} = \left( \frac{\alpha}{\Delta z} + \beta \right) x(z_i, t) - \frac{\alpha}{\Delta z} x(z_{i-1}, t) \tag{II.26}$$

Avec  $i=1, 2, 3, \dots, (n-1)$

Pour  $i=1$

$$\frac{\partial x(z_1, t)}{\partial t} = -\frac{\alpha}{2\Delta z} x(z_0, t) + \beta x(z_1, t) + \frac{\alpha}{2\Delta z} x(z_2, t)$$

Avec  $x(z_0, t) = x(0, t) = 1$

Pour  $i=2$

$$\frac{\partial x(z_2, t)}{\partial t} = -\frac{\alpha}{2\Delta z} x(z_1, t) + \beta x(z_2, t) + \frac{\alpha}{2\Delta z} x(z_3, t)$$

.

Pour  $i=(n-1)$

$$\frac{\partial x(z_{n-1}, t)}{\partial t} = -\frac{\alpha}{2\Delta z} x(z_{n-2}, t) + \beta x(z_{n-1}, t) + \frac{\alpha}{2\Delta z} x(z_n, t)$$

Pour  $i=n$

$$\frac{\partial x(z_n, t)}{\partial t} = -\frac{\alpha}{2\Delta z} x(z_{n-1}, t) + \beta x(z_n, t) + \frac{\alpha}{2\Delta z} x(z_{n+1}, t)$$

Avec la valeur de  $x_{n+1}$  obtenu par la condition aux limites de Neumann

$$x_{n+1} = \frac{4x_n - x_{n-1}}{3}$$

Donc

$$\frac{\partial x(z_n, t)}{\partial t} = -\frac{4\alpha}{6\Delta z}x(z_{n-1}, t) + \left(\beta + \frac{4\alpha}{6\beta}\right)x(z_n, t)$$

Et on obtient la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & \frac{\alpha}{2\Delta z} & 0 & \dots & \dots \\ -\frac{\alpha}{2\Delta z} & \beta & \frac{\alpha}{2\Delta z} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & -\frac{2\alpha}{3\Delta z} & \left(\beta + \frac{2\alpha}{3\Delta z}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \frac{\alpha}{2\Delta z} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

Avec

$$A = \begin{bmatrix} \beta & \frac{\alpha}{2\Delta z} & 0 & \dots & \dots \\ -\frac{\alpha}{2\Delta z} & \beta & \frac{\alpha}{2\Delta z} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & -\frac{2\alpha}{3\Delta z} & \left(\beta + \frac{2\alpha}{3\Delta z}\right) \end{bmatrix} : \text{matrice d'état}$$

$$B = -\frac{\alpha}{2\Delta z} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} : \text{Matrice de commande}$$

### II.7 Conclusion

Les systèmes à paramètres distribués sont des systèmes de dimension infinie donc ils ne sont pas physiquement mesurable, ce qui engendre des problèmes dans la conception d'un estimateur d'état et de la qualité de l'information contenue dans les mesures en ligne, qui peut être déterminé en analysant entre autres les propriétés de l'observabilité.

C'est ce qui nous a conduit à utiliser certaines méthodes de transformation de modèle à paramètres répartis conduisant à un modèle à paramètres localisés, ce dernier pour des fins d'analyse de l'observabilité et la précision qui s'étudiera dans le chapitre suivant.

Chapitre

3

*Simulation des systèmes à  
paramètres distribués et  
analyse de l'observabilité  
du modèle réduit*

## III.1 Introduction

Afin d'étudier le comportement d'un système physique, il faut passer par la simulation, cette dernière s'applique soit en utilisant les schémas blocs avec SIMULINK de MATLAB, pour les systèmes simple, soit en utilisant les modèles obtenus par approximation des systèmes complexes avec les méthodes de discrétisations pour analyser leurs comportements dynamique.

Pour les systèmes à paramètres distribués, l'analyse des propriétés fondamentales (commandabilité, observabilité et stabilité) en utilisant des modèles approximatifs peuvent être masquées. L'objectif de ce chapitre s'inscrit dans cette optique et s'intéresse particulièrement à l'analyse de l'observabilité des systèmes à paramètres distribués.

Ainsi, on va étudier le comportement des systèmes à paramètres distribués décrits par des équations aux dérivées partielles discrétisées par la méthode des différences finies (pour les rapprocher d'un modèle régi par des équations différentielles ordinaires). On s'intéresse à l'influence du nombre de points de discrétisation sur le comportement dynamique du système prédit par le modèle obtenu par approximation et sur l'observabilité du système.

## III.2 Définition de la simulation

La simulation c'est de prédire les aspects comportementaux d'un système en créant son modèle approximatif (mathématique). Pour une simulation au sens large, ceci peut se faire par la modélisation physique, c'est-à-dire utiliser un autre phénomène physique suivant des lois ayant les mêmes équations (exemple : simuler les phénomènes thermiques par des circuits électriques).

Dans une simulation numérique, on utilise un programme spécifique ou éventuellement un progiciel plus général. Des exemples typiques sont les simulateurs de vol d'avions ou la simulation du fonctionnement des circuits électroniques. Il existe un grand nombre de langages de programmation spécialisés dans la simulation comme Simula, SIMULINK.

### III.3 Exemple de simulation

Comme exemple de simulation on a considéré la cas d'un réacteur à écoulement piston qui une enceinte ou récipient apte a la réalisation des réactions chimiques le but rechercher est l'homogénéité de la masse réactionnelle de point de vue température et mélange réactif.

Dans notre cas le réacteur est isotherme donc la température est constante tout au long du réacteur alors on a étudié l'évolution de la concentration du mélange réactif dans le réacteur

L'évolution du la concentration du mélange réactif est modélisé par l'équation suivante :

$$\frac{\partial C_A(z,t)}{\partial t} = -0.04 \frac{\partial C_A(z,t)}{\partial z} - C_A(z,t) \quad (\text{III.1})$$

### III. 4 Simulation du modèle obtenu par la méthode des différences finies en arrière

Le modèle étudié dans le chapitre suivant a été discrétisé en utilisant la méthode des différences finies. Rappelons que dans le cas des différences finies en arrière le modèle approximé est le suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\alpha}{\Delta z} + \beta\right) & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ -\frac{\alpha}{\Delta z} & \left(\frac{\alpha}{\Delta z} + \beta\right) & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & -\frac{\alpha}{\Delta z} & \left(\frac{\alpha}{\Delta z} + \beta\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \frac{\alpha}{\Delta z} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.2})$$

$$y = [0 \quad 0 \quad \dots \quad \dots \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Avec

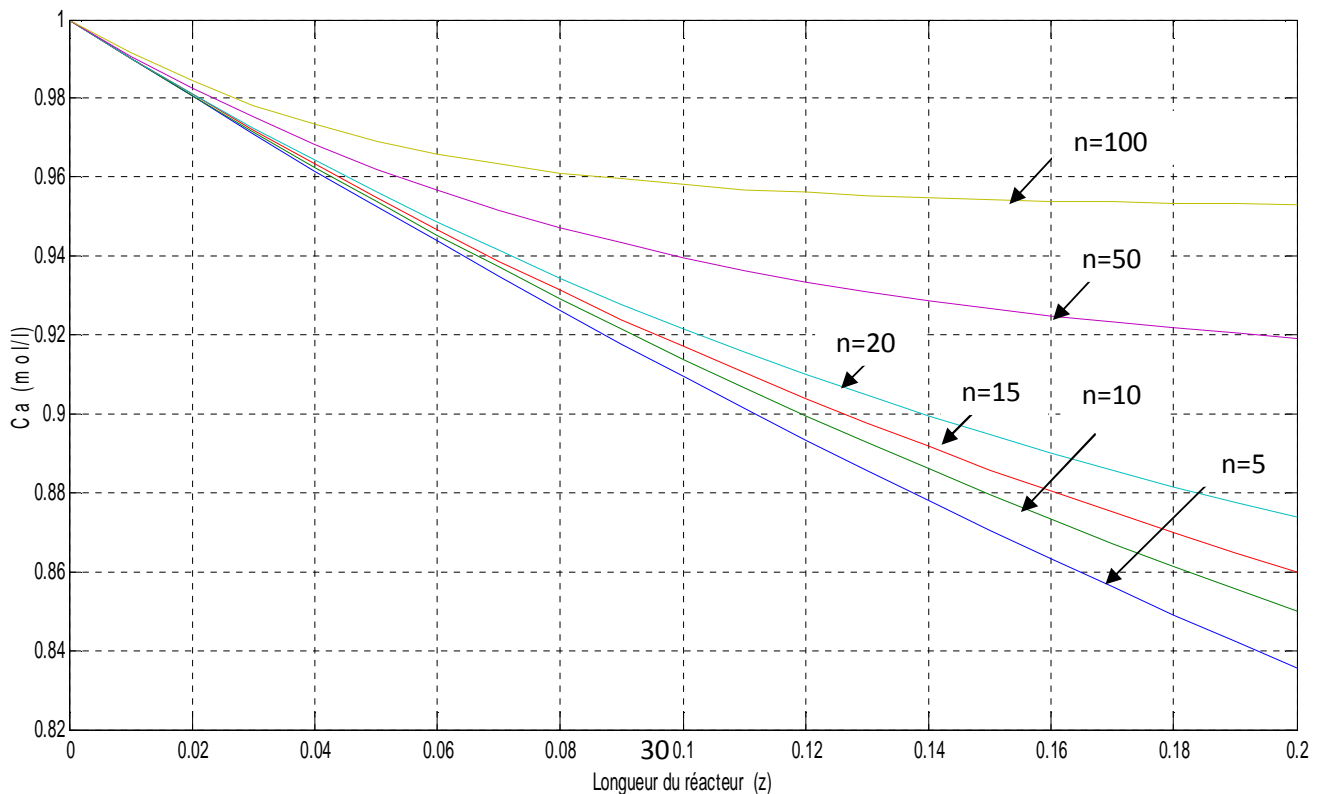
$$A = \begin{bmatrix} \left(\frac{\alpha}{\Delta z} + \beta\right) & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ -\frac{\alpha}{\Delta z} & \left(\frac{\alpha}{\Delta z} + \beta\right) & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & -\frac{\alpha}{\Delta z} & \left(\frac{\alpha}{\Delta z} + \beta\right) \end{bmatrix} : \text{matrice d'état}$$

$$B = -\frac{\alpha}{\Delta z} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} : \text{matrice de commande}$$

$$C = [0 \quad 0 \quad \dots \quad \dots \quad 1] : \text{matrice de sortie}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : \text{vecteur d'état}$$

Y(t) : la sortie



**Figure III.1** : simulation du modèle obtenu avec la méthode des différences finies arrière

#### III.4.1 Résultats de simulation

Pour étudier l'influence de points de discrétisation sur le comportement dynamique du système, on considère plusieurs valeurs pour le point de discrétisation. Ce nombre de points de discrétisation fixe la dimension du vecteur d'état du modèle approximé. Les résultats obtenus sont donnés par la figure III.1. Dans cette dernière, on a représenté le profil de la variable d'état (concentration) le long de réacteur. Notons que pratiquement, le résultat obtenu par  $N=100$  est le plus proche de la solution réelle. Ainsi, on constate que l'augmentation du nombre de points de discrétisation, permet d'avoir une solution qui se rapproche de la solution réelle. Mais on a constaté aussi, qu'une grande valeur de  $N$  peut introduire une instabilité ou une diffusion numérique, due aux problèmes numériques. Ceci dit la méthode d'approximation doit être choisie convenablement.

D'après les courbes obtenues, on remarque que tant le nombre de discrétisation augmente la valeur finale augmente jusqu'à presque atteindre la valeur 1. Ce qui implique que tant que le nombre de discrétisation est grand le système devient plus précis.

#### III.5 Simulation du modèle approximé par la méthode des différences finies centrales

Pour cette étude, on considère deux types de conditions aux limites.

##### III.5.1 Simulation avec des conditions aux limites de Dirichlet

Le modèle approximé par la méthode des différences finies centrales avec les conditions aux limites de Dirichlet s'écrit sous forme de représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & \frac{\alpha}{2\Delta z} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\alpha}{2\Delta z} & \beta & \frac{\alpha}{2\Delta z} & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -\frac{\alpha}{2\Delta z} & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} - \frac{\alpha}{2\Delta z} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad [ ]y$$

(III.3)

$$y = [0 \quad 0 \quad \dots \quad \dots \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Avec

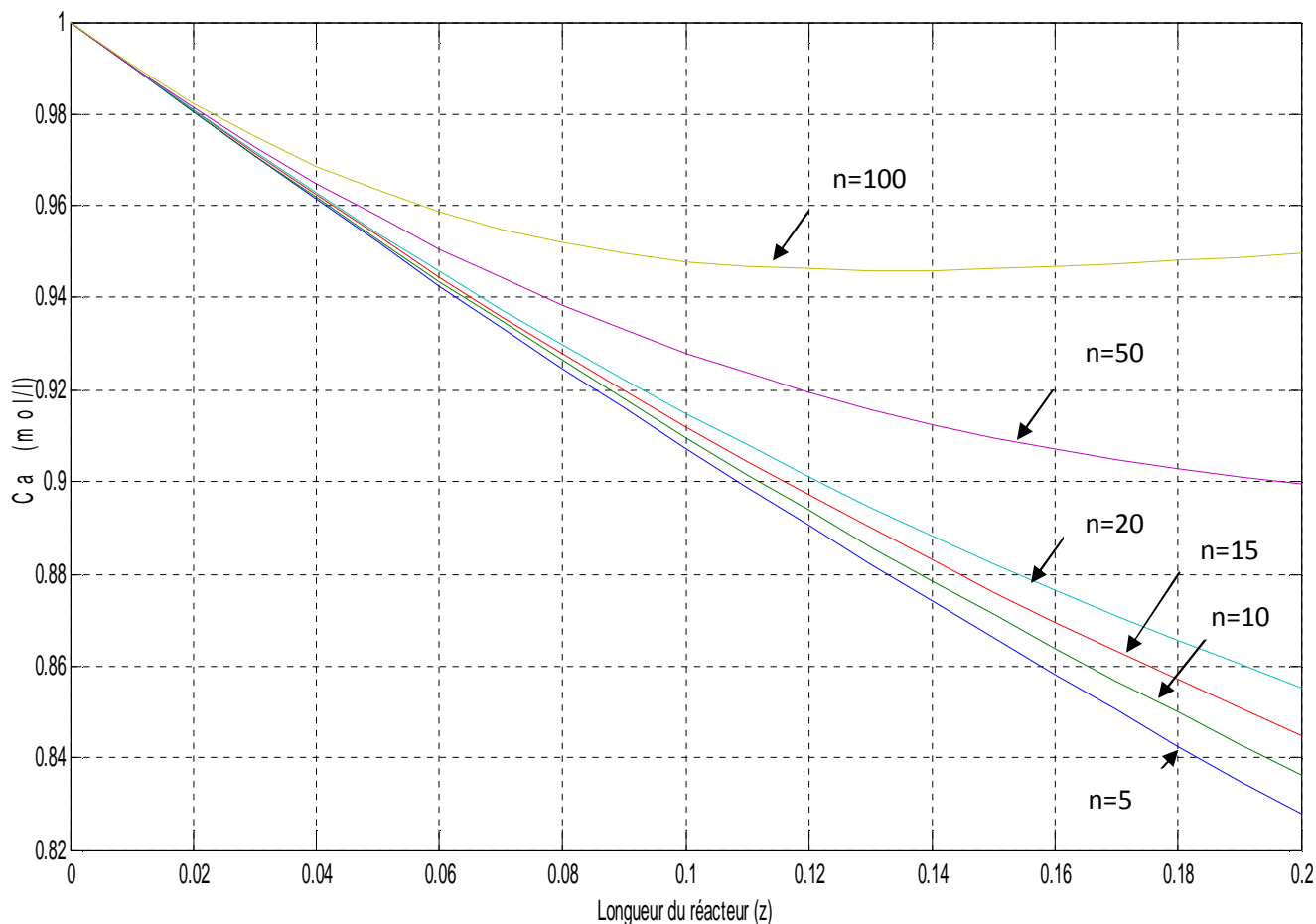
$$A = \begin{bmatrix} \beta & \frac{\alpha}{2\Delta z} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\alpha}{2\Delta z} & \beta & \frac{\alpha}{2\Delta z} & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -\frac{\alpha}{2\Delta z} & \beta \end{bmatrix} : \text{matrice d'état}$$

$$B = \frac{\alpha}{2\Delta z} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} : \text{matrice de commande}$$

$C = [0 \quad 0 \quad \dots \quad \dots \quad 1]$  : matrice de sortie

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : \text{vecteur d'état}$$

De même pour étudier l'influence du nombre de points de discrétisation sur le comportement dynamique prédit par le modèle approximé, on effectue le même test que celui effectué précédemment. Ainsi, on considère plusieurs valeurs pour le nombre de points de discrétisation et on s'intéresse au profil dans le réacteur à l'instant final.



**Figure III.2** Simulation du modèle obtenue par la méthode des différences finies centrales avec des conditions aux limites de type Dirichlet

### III.5.1.1 Résultats de simulation

Les résultats de simulation obtenus sont donnés par la Figure III.2. Les mêmes remarques peuvent être faites pour ce cas. L'augmentation du nombre de points de discrétisation améliore la qualité des résultats de simulation obtenus, c'est-à-dire le modèle prédit fidèlement le comportement dynamique du système. De même l'augmentation du nombre de points de discrétisation peut détériorer les résultats. Ceci est dû à des problèmes d'ordre numérique comme a été déjà souligné. Ces problèmes peuvent être raffinés en considérant des schémas de discrétisation plus précis.

### III.5.2 Simulation avec des conditions aux limites mixtes

La représentation d'état obtenue par discrétisation du système à paramètres distribués avec la méthode des différences finies centrales en considérant des conditions aux limites mixtes est :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & \frac{\alpha}{2\Delta z} & 0 & \dots & \dots \\ -\frac{\alpha}{2\Delta z} & \beta & \frac{\alpha}{2\Delta z} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & -\frac{4\alpha}{6\Delta z} & (\beta + \frac{4\alpha}{6\Delta z}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \frac{\alpha}{2\Delta z} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.4})$$

$$y = [0 \quad 0 \quad \dots \quad \dots \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Avec

$$A = \begin{bmatrix} \beta & \frac{\alpha}{2\Delta z} & 0 & \dots & \dots \\ -\frac{\alpha}{2\Delta z} & \beta & \frac{\alpha}{2\Delta z} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & -\frac{4\alpha}{6\Delta z} & (\beta + \frac{4\alpha}{6\Delta z}) \end{bmatrix} : \text{matrice d'état}$$

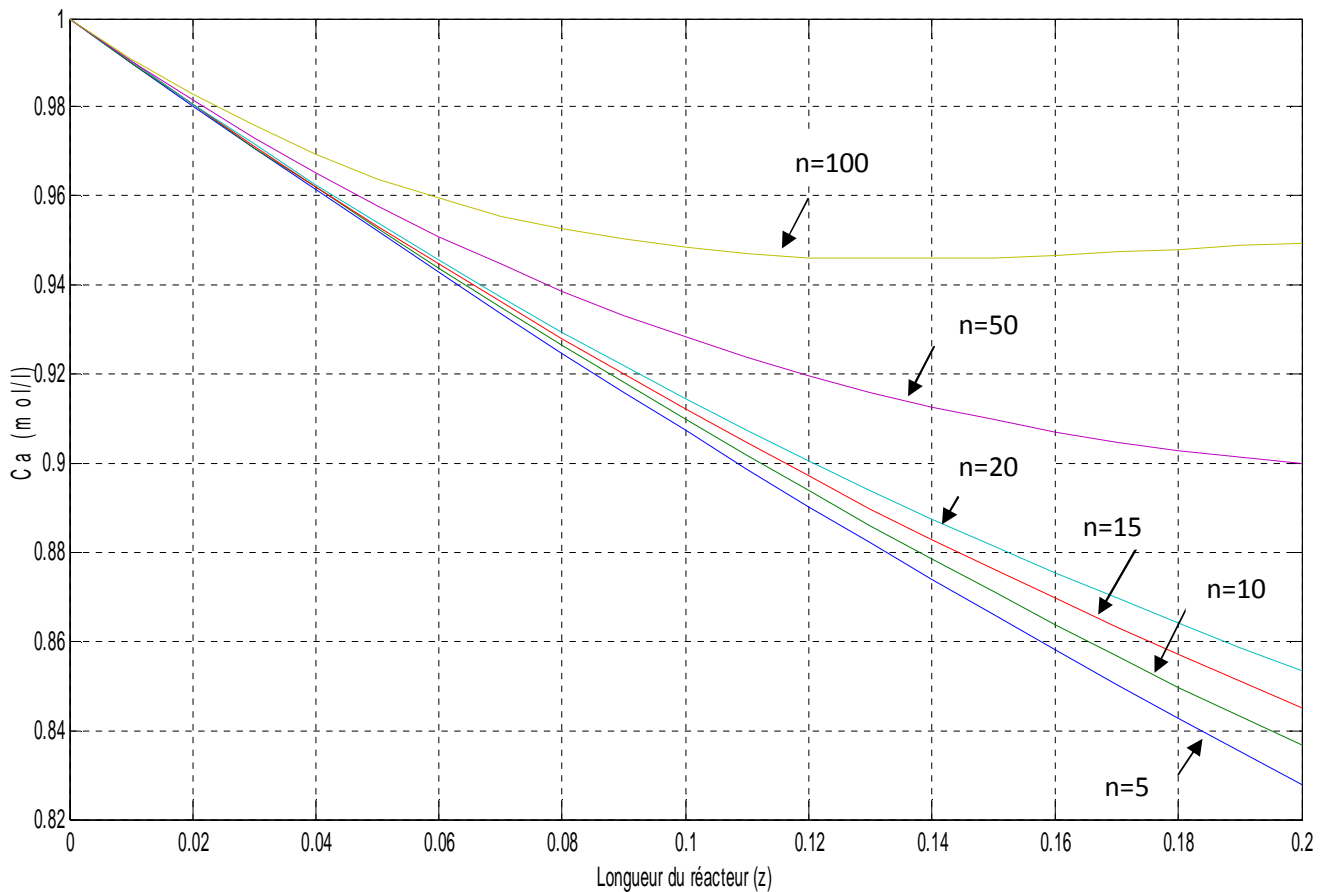
$$B = -\frac{\alpha}{2\Delta z} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} : \text{matrice de commande}$$

$$C = [0 \quad 0 \quad \dots \quad \dots \quad 1] : \text{matrice de sortie}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : \text{vecteur d'état}$$

Y(t) : la sorti

Le même test de simulation a été considéré et les résultats de simulation sont donnés par la Figure III.3. Les résultats obtenus nous permettent de faire le même constat comme précédemment à savoir l'augmentation du nombre de points de discrétisation va dans le sens d'améliorer la qualité de la prédiction donné par le modèle approximé.



**Figure III.3 :** Simulation du modèle obtenu par la méthode des différences finies centrales avec les conditions aux limites mixtes.

### III.5.3 Interprétation des résultats

On voit bien qu'en utilisant les différences finies centrales sous les conditions aux limites de Dirichlet ou mixtes les résultats ne changent pas.

Même résultats trouvés avec la méthode des différences finies en arrière, c'est-à-dire tant que le nombre de discrétisation augmente, on obtient un résultat plus précis.

Par contre, on comparant les deux méthodes on constate qu'avec les différents points de discrétisation, la méthode des différences en arrière nous donne des résultats plus précis que la méthode des différences finies centrales.

### III.6 Analyse de l'observabilité du système à paramètres distribués

Pour analyser l'observabilité du système à paramètres distribués, on utilise le modèle approximé. Ainsi, comme le modèle approximé est donné sous forme d'une représentation linéaire, pour analyser l'observabilité, on utilise le critère basé sur le rang de la matrice d'observabilité. Notons le système étudié dans ce mémoire est de nature observable.

Rappelons que le nombre de points de discrétisation fixe la dimension du vecteur d'état du modèle approximé. Par conséquent, si le système est observable, alors le rang de la matrice d'observabilité doit être égal au nombre de points de discrétisation considéré. Dans le cas contraire le système est inobservable.

Pour analyser l'influence du nombre de points de discrétisation sur l'observabilité du système, on considère plusieurs valeurs pour le nombre de points de discrétisation et pour chaque nombre on calcule la matrice d'observabilité correspondante et son rang.

De même on considère les trois modèles approximés obtenus par l'utilisation des trois méthodes de discrétisation basées sur les différences finies. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau III.1.

| Méthodes<br>N <sup>bre</sup> discrétisation | Différences en<br>arrière<br>(Dirichlet) | Différences<br>centrales<br>(Dirichlet) | Différences<br>Centrales<br>(Mixtes) |
|---|--|---|--------------------------------------|
| 5   | Observable                               | Observable                              | Observable                           |
| 10  | Observable                               | Observable                              | Observable                           |
| 15  | Observable                               | Observable                              | Observable                           |
| 20  | Non observable                           | Observable                              | Observable                           |
| 50  | Non observable                           | Non observable                          | Non observable                       |
| 100   | Non observable                           | Non observable                          | Non observable                       |

**Tableau (III.1) :** Résumé sur l'observabilité des modèles obtenus de la discrétisation

D'après les résultats obtenus, on constate que le modèle approximé obtenu avec la méthode des différences finies en arrière est observable pour des valeurs inférieures ou égales à 15. Par contre avec la méthode des différences finies centrales, le modèle est observable pour des valeurs inférieures ou égales à 21.

D'après ces résultats, on constate que l'observabilité du système dépend du nombre de points de discrétisation considéré. Ainsi, l'augmentation du nombre de points de discrétisation influe sur l'observabilité du système, c'est-à-dire tant que ce nombre augmente la conclusion faite sur l'observabilité est erronée. Par conséquent, la discrétisation peut masquer les propriétés fondamentales d'un système à paramètres distribués. Une augmentation du nombre de points de discrétisation améliore la qualité de la prédiction mais fait perdre des informations pertinentes sur le système.

### III.7 Conclusion

L'utilisation des différentes méthodes de discrétisation a des effets sur la prédiction du comportement dynamique du système à paramètres distribués. Le choix de la méthode de discrétisation peut non seulement influencer la précision de la prédiction du modèle mais elle peut aussi avoir un impact direct sur l'observabilité du système.

En plus du choix de la méthode de discrétisation, il y a le nombre de points de discrétisation dont son choix mérite une très grande attention. Ainsi, pour l'objectif de simulation ce nombre doit être important pour une très bonne prédiction, mais l'objectif d'analyse d'observabilité, ce nombre doit être choisi avec prudence.

# *Conclusion Générale*

Dans ce travail, on a étudié l'influence des méthodes de réduction sur l'observabilité des systèmes à paramètres distribués. Comme exemple d'application, on considéré un réacteur à écoulement piston isotherme modélisé par une équation aux dérivées partielles hyperbolique. L'objectif est de montrer l'influence du nombre de points de discrétisation et le schéma de discrétisation sur l'observabilité du système, et sur la précision de simulation du comportement dynamique.

Tout abord on a défini le concept des systèmes à paramètres distribués, puis on a utilisé la méthode des différences finies pour réduire le système de dimension infinie à système de dimension finie en utilisant la méthode des lignes basée la méthode des différences finies. Pour étudier l'observabilité du système réduit, on s'intéresse au calcul du rang de la matrice de l'observabilité en faisant varier le nombre de points de discrétisation, et le schéma de discrétisation, et on a effectué une simulation des systèmes réduit pour différents point de discrétisation et terminer par une comparaison et une conclusion sur l'influence de nombres de point de discrétisation sur l'observabilité et la précision du système.

A la lumière des résultats obtenus par simulation, on peut confirmer que les méthodes de réduction des systèmes à paramètres distribués influent remarquablement sur l'observabilité et les résultats de simulation du comportement dynamique.

Dans ce mémoire ont a étudié l'observabilité d'un système à paramètres distribués en considérant un modèle approximé par la méthode des différences finies qui fait partie de la famille des méthodes d'approximation d'équations. Ainsi, l'idée développée dans ce mémoire peut être étendue à l'étude de l'observabilité en utilisant des méthodes d'approximation des solutions.

## Table des indices

---

### *Les indices*

$M, L, H$  : Opérateurs matriciels différentiels ne comportant que des dérivées par rapport à  $z$ .

$R$  : Ensembles des nombres réels

$T$  : Sous ensemble de l'ensemble réels qui représente le domaine temporel.

$x_0(z)$  : Condition initial de l'équation (1.4).

$\Omega$  : Sous ensemble de l'ensemble réel qui représente le domaine spatial.

$F_r\Omega$  : l'ensemble des frontières de  $\Omega$ .

$L(x(z', t))$  : Les conditions aux limites de l'équation aux dérivées partielles.

$X(z, t)$ : Le vecteur d'état du système.

$T_0(t), T_l(t)$  : Les conditions aux limites de Dirichlet.

$g_0(t), g_l(t)$  : Les conditions aux limites de Neumann.

$U(z, t)$ : La commande du système.

$Y(z, t)$  : la sortie du système.

$C(z)$  : c'est la structure géométrique l'ensemble des capteurs.

$\delta(z - z_i)$  : Le pic de Dirac.

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  : Vecteur d'état du système.

$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}$  : Première dérivée du vecteur de l'état du système.

$A$  : Matrice d'état du système.

$B$ : Matrice de commande.

$C$  : Matrice d'observation.

$O(A, C)$  : La matrice d'observabilité d'après KALMAN.

$\sigma(A)$  : Spectre de la matrice  $A$ .

$p_{n+1}$ : La dérivée première de  $P_n(z)$  par rapport à  $z$ .

$p_{n+1}$ : La dérivée première de  $P_n(z)$  par rapport à  $z$ .

$f_i(z)$  : Les fonctions de base.

$a, b$  : Les frontières ou les limites de domaine discrétisé.

$\Delta t = h$  : Le pas de discrétisation.

## Table des indices

---

$x'(t_i)$  : La première dérivée par rapport au temps.

$x''(t_i)$  : La deuxième dérivée par rapport au temps.

$x'''(t_i)$  : La troisième dérivée par rapport au temps.

$x^{(4)}(t_i)$  : Les quatrièmes dérivées par rapport au temps.

$\alpha, \beta$  : Les coefficients de l'équation aux dérivées partielles.

$x(0, t), x(L, t)$  : La condition aux limites.

$x(z, 0)$  : La condition initiale.

$n$  : Le nombre de points de discrétisation.

SPR : Système à paramètres répartis

SPD : système à paramètres distribués

EDP : Les équations aux dérivées partielles

EDO : Les équations différentielles ordinaires

- [1] **A.RACHID**. *Système régulation*, Masson, Paris, 1997, page317.
- [2] **J.P.BABARY** et **W.PELCZEEWSKI**. *Commande optimale des systèmes continus Déterministes*, Masson, Paris ,1985.
- [3] **ABHY SINGH** et **JUERGEN HAHN** .*effect of finite-dimensional approximation on observability analysis of distributed parameter models*. « 8<sup>th</sup> International IFAC Symposium on Dynamics and Control of Process Systems », **Vol.3**, 2007, Mexique.
- [4] *Etude de l'observabilité de systèmes de Sturm-Liouville : application aux réacteurs biochimiques à paramètres répartis*, Université catholique de Louvain, Faculté des Sciences Appliquées. Décembre 2003