

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la A Recherche Scientifique
UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
Département D'automatique

**Mémoire de Fin d'Etude
de MASTER ACADEMIQUE**
Spécialité : **automatique option commande des
Systèmes**

Présenté par
Mohand said DERRICHE
Mehenna DJEBRA

Mémoire dirigé par MAIDI AHMED

Thème
**Commande géométrique à la frontière
d'une équation de chaleur**

Mémoire soutenu publiquement le 06 juillet 2015 devant le jury composé de :

M Said DJENNOUNE

Grade, Lieu d'exercice, Président

M AHMED MAIDI

Grade, Lieu d'exercice, promoteur

M Amar SI AMMOUR

Grade, Lieu d'exercice, Examineur

M Mohand achour TOUAT

Grade, Lieu d'exercice, Examineur

*Ce mémoire à été réalisé au sein du Laboratoire de conception et de conduite des systèmes de production
(L2CSP)*

Remerciement

A travers ce modeste travail, nous tenons à remercier vivement notre promoteur Mr Ahmed MAIDI pour l'intéressante documentation qu'il a mise à notre disposition, pour ses conseils précieux et pour toutes les commodités et aisances qu'il nous a apportées durant notre étude et réalisation de ce projet.

Nos remerciements les plus vifs s'adressent aussi aux messieurs le président et les membres des jurys d'avoir accepté d'examiner et d'évaluer notre travail.

Nous exprimons également notre gratitude à tous les professeurs et enseignants qui nous ont guidés à travers notre parcours, sans omettre bien sûr de remercier profondément tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation du présent travail.

Et enfin, que nos chers parents et familles, et bien avant tout, trouvent ici l'expression de nos remerciements les plus sincères et les plus profonds en reconnaissance de leurs sacrifices, aides, soutien et encouragement afin de nous assurer cette formation dans les meilleures conditions.



Dédicaces



A ma chère et tendre mère

A celle qui a tout souffert, sans me faire souffrir, qu'elle trouve dans ce mémoire le témoignage de ma reconnaissance et de mon affection pour tous les sacrifices, l'extrême amour et la bonté qu'elle m'a offert pour me voir réussir.

A mon cher père

A l'homme que je dois ma réussite, mon bonheur, et tout le respect ;
Qu'il trouve ici l'expression de mon affection et une récompense des sacrifices consentis pour moi

A mes sœurs

Tafsut et assirem

A qui je souhaite toutes les réussites et le bien être.

A mes frères

Merzak et boudjmaa(djimmy)

En témoignage de mon profond amour et respect, aux quels je souhaite le succès et le bonheur.

Que dieu nous protègent et nous préserve le bonheur et la santé

A ma très chère dyna ramdane et toute sa famille.

Merci d'être la pour moi je ne peux que vous souhaitez que le meilleurs, une langue et heureuse vie dans la bonne santé j'espère.

A mes ami(e)s

En particulier (amokrane, azeddine, farid, les 2 mohammed, sadek, et yacine)

Qu'ils trouvent ici mes meilleurs vœux de bonheur

A tous ceux que j'aime, tous ceux qui m'aiment et tous ceux qui me sont chers

J'offre ce travail qui représente le fruit de leurs sacrifices, leurs aides et leur dévouement.

Mehenna



Dédicaces



A ma chère et tendre mère

A celle qui a tout souffert, sans me faire souffrir, qu'elle trouve dans ce mémoire le témoignage de ma reconnaissance et de mon affection pour tous les sacrifices, l'extrême amour et la bonté qu'elle m'a offert pour me voir réussir.

A mon cher père

A l'homme que je dois ma réussite, mon bonheur, et tout le respect ;
Qu'il trouve ici l'expression de mon affection et une récompense des sacrifices consentis pour moi

A mes sœurs

Ghania et sa famille et fatima

A qui je souhaite toutes les réussites et le bien être.

A mes frères

Kamel et sa famille , Youcef et sa famille, Menouar et Saleh

En témoignage de mon profond amour et respect, aux quels je souhaite le succès et le bonheur.

Que dieu nous protègent et nous préserve le bonheur et la santé

A ma très chère et toute sa famille.

Merci d'être la pour moi je ne peux que vous souhaitez que le meilleurs, une langue et heureuse vie dans la bonne santé j'espère.

A mes ami(e)s

Qu'ils trouvent ici mes meilleurs vœux de bonheur
A tous ceux que j'aime, tous ceux qui m'aiment et tous ceux qui me sont chers

J'offre ce travail qui représente le fruit de leurs sacrifices, leurs aides et leur dévouement.

Mohand said

Sommaire

Sommaire

Introduction générale.....	01
----------------------------	----

Chapitre 1 : Généralités sur les systèmes à paramètres distribués

1.1 Introduction	03
1.2 Définition	03
1.3 Formulation mathématique des systèmes a paramètre distribué.....	03
1.4 Les différents types de condition aux limites.....	04
1.4.1 condition de Dirichlet.....	04
1.4.2 condition de Neumann	04
1.4.3 condition de fourrier.....	04
1.5 Classification des systèmes a paramètre distribués.....	05
1.6 Types d'observations et de commande des systèmes a paramètres distribués	05
1.6.1 les commandes d'un système a paramètres distribués	05
1.6.1.1 commandes reparties (distribuées).....	05
1.6.1.2 commandes par zones.....	05
1.6.1.3 commande ponctuelle.....	05
1.6.1.4 commande par balayage	06
1.6.1.5 commande aux frontières(ou aux limites).....	06
1.6.2 observateurs des systèmes a paramètres distribués	06
1.6.2.1 observation repartie	06
1.6.2.2 observation ponctuelle.....	06
1.6.2.3 observation par balayage.....	06
1.6.2.4 observation par moyennage spatiale	06
1.7 actionneurs et capteurs des systèmes a paramètres distribué	07
1.7.1 actionneurs	07
1.7.2 capteurs.....	07
1.8 Exemple illustratifs sur des systèmes a paramètres distribué.....	07
1.8.1 Echangeur de chaleur	07
1.9 Conclusion	08

Sommaire

Chapitre 2 : modélisation de l'équation de chaleur

2.1 Introduction	09
2.2 Définition	09
2.3 Différents mécanisme de transfert thermique	09
2.3.1 Conduction	09
2.3.2 Convection	10
2.3.3 Rayonnement.....	11
2.4 Conduction thermique	12
2.4.1 Loi de fourrier	14
2.5 Modélisation de l'équation de chaleur	15
2.6 Description physique de l'équation de chaleur	18
2.7 Propriétés de l'équation de chaleur	19
2.7.1 Différent écriture de l'équation de chaleur 1D.....	19
2.7.2 Équation de chaleur stationnaire 1D	20
2.7.3 Diffusion de chaleur dans un solide, régime stationnaire	22
2.7.4 Equation de la place	22
2.8 Normalisation de l'équation de chaleur	22
2.9 Conclusion.....	23

Chapitre 3 : calcul d'une commande géométrique à la frontière d'une équation de chaleur

3.1 Introduction	24
3.2 Notion de l'indice caractéristique.....	24

Sommaire

3.2.1 Indice caractéristique pour les systèmes a paramètre localisé	24
3.2.2 Indice caractéristique pour les systèmes a paramètres reparties	25
3.3 Commande a la frontière de l'équation de chaleur appliquée à une barre métallique	25
3.3.1 Description des problèmes de commande	25
3.4 Transformation de la commande aux frontières en une commande ponctuelle	26
3.5 Commande ponctuelle avec une sortie auxiliaire	28
3.6 Stratégie de commande	29
3.6.1 Interprétation de la stratégie de commande.....	30
3.7 Problèmes de commande géométrique.....	30
3.7.1 Problèmes liés à la mesure	30
3.7.2 Problèmes liés à la commande	30
3.8 Avantages de la commande géométrique.....	31
3.9 Conclusion.....	31
Chapitre 4 : simulation de la commande géométrique a la frontière d'une équation de chaleur	
4.1 Introduction	32
4.2 Définition de la méthode des différences finies	32
4.3 Méthode d'approximation aux différences finies.....	32
4.3.1 Discrétisation totale.....	32
4.3.2 Semi-discrétisation	32
4.4 Méthodes des lignes	33
4.4.1 Origine et approche de la méthode des lignes.....	33

Sommaire

4.5 Propriétés et utilisation de la méthode des lignes	33
4.5.1 Propriétés	33
4.5.2 Utilisation de la méthode des lignes.....	34
4.6 Principe de la méthode des lignes	34
4.6.1 Application de la méthode des lignes pour la discrétisation de l'équation de chaleur.....	35
4.7 Partie pratique du travail	38
4.7.1 Simulation du modèle en boucle ouverte	38
4.7.2 Discrétisation de la loi de commande géométrique.....	40
4.7.3 Loi de commande géométrique discrétisé.....	41
4.7.4 Simulation de la commande	41
4.8 Conclusion	44
Conclusion générale	45

Liste des figures

Liste des figures

Figure 1.1 : Echangeur de chaleur coaxial.....	09
Figure 2.1 : conduction thermique dans un matériau.....	12
Figure 2.2 : Représentation d'un exemple de convention.....	13
Figure 2.3 : Représentation les rayons solaire.....	14
Figure 2.4 : Représente la conduction de la température.....	25
Figure 2.5 : La relation linéaire décrit par l'évaluation de la température.....	25
Figure 3.1 : Représente transformation d'une commande frontière au ponctuelle.....	30
Figure 3.2 : Représentation de système en boucle fermé.....	32
Figure 4.1 : évaluation de température en fonction de temps.....	47
Figure 4.2 : l'évaluation spatio-temporelle.....	48
Figure 4.3 : l'évaluation des températures dans différents points ponctuelles.....	49
Figure 4.4 : Représentation d'application de la méthode de discrétisation sur la barre	50
Figure 4.5 : évolution de la température moyenne.....	52
Figure 4.6 : évaluation de la température au milieu de la barre.....	53
Figure 4.7 : relation entre la sortie mesurée et la température moyenne.....	54

Liste des symboles

Listes des symboles

z, x, y : Variables d'espace.

t : Variable de temps

T : Variable température .

R : Ensemble des nombres réels

EDP :équation aux dérivées partielles

SPD :Système à paramètres distribués

SPL : Système à paramètres localisés

EDO :équation aux dérivées ordinaires

Ω :Domaine spatial admissible.

$T_0(z)$: Condition initiale.

$T_0(z)$ et $T_l(z)$: Condition aux limites .

A :Matrice d'évolution

B :Matrice de commande

C :Matrice du sortie

$u(z, t)$: Vecteur de commande d'un systèmes à paramètre distribués

∇ :Gradient

∇_0 et ∇_1 :Gradient aux bords

a_1, a_2, a_3 :Nombres réels.

$T(z, t)$: Vecteur d'état d'un système à paramètres distribués.

$q(z)$: Structure géométrique de l'ensemble des actionneurs

Liste des symboles

$C(z)$: structure géométrique De l'ensemble des capteurs

$u_e(t)$: Le signal d'entrée à la commande

$u_{ei}(t)$: L'ensemble des signaux d'entrée à la zone i.

δ : est l'équation de Dirac

$y(z, t)$: Sortie distribués.

Δz : Pas de discrétisation

N : Nombre de sections.

c_p : Est la capacité calorifique du fluide

$T|_z$: température au point z

$T|_{z+\Delta z}$: Température au point $Z + \Delta z$

$p(z)$: caractérise la structure géométriques du système d'observation

$x(z, t)$: L'état du système

L_i : lignes

D_i : zones

φ : flux thermique

$\vec{\varphi}$: flux thermique surfacique

s : surface

Q : puissance traversant la surface

λ : conductivité thermique

C : Diffusion de la chaleur.

q : flux

el : électrons

Liste des symboles

ph :phonons

Fe :fer

Cu :cuivre

Al :aluminium

Cg :chaleur spécifique

f :source thermique

n :normale

p_e :nombre de péchlet

L :la longueur

Δs :section

r :source du chaleur

α :diffusivité

ρ :densité

T_p :température partielle

q_p :flux partiel

$L_g h(x)$:dérivée du liée

U :domaine

yd :consigne

$yl2$:sortie à commander

σ :degré relatif

τ :constante du temps

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Introduction général

L'homme a de tout temps essayé de comprendre et de commander les phénomènes physique, et c'est dans le but de contrôler ces phénomènes et d'augmenté la production, fut créer l'automatique qui fait partie des sciences de l'ingénieur. L'automatique couvre un champ d'applications très vaste, l'intérêt accordé par la communauté scientifique vient du rôle que joue cette discipline dans le développement technologique. En effet c'est, en partie grâce aux résultats des chercheurs automaticiens que l'on a pu notamment poser les pieds sur la lune, améliorer la qualité de vie, construction de robot intelligent et bien d'autres choses.

L'automatique se base sur la compréhension fine des phénomènes physique en termes de modélisation, d'identification et de simulation en vue de trouver une commande qui satisfait le cahier de charges, ces principes nous permettent d'étudier des systèmes souvent difficiles voir impossibles à observer dans la nature et ceux pour divers raisons comme les difficultés de mesures

(Absence des captures, cout exorbitant et erreurs dus à ces capteurs) pour passer outre ces problèmes l'automatique nous permet de construire des modèles mathématique de ces systèmes qui reproduisent leurs comportement de façon très significative.

Parmi les nombreux systèmes qui existent, on s'intéresse aux systèmes à paramètre distribué, qui sont largement présent dans le domaine industriel.

Ces dernières indépendants et se caractérisent par la présence de plusieurs variables, souvent représentés par des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Dans ce mémoire on s'intéresse à la commande d'une barre métallique dont le modèle mathématique est une équation de chaleur.

L'objectif à atteindre est de synthétiser un retour d'état de dimension infinie appliquée à la frontière d'une barre métallique, et ceux en manipulant le flux pour assurer une température donnée a une position donnée.

Pour arriver au résultat désiré on doit transformer le modèle du système pour obtenir un modèle d'état à opérations bornés, cette méthode nous permet d'insérée une commande dans l'équation d'état, pour résoudre le problème de l'indice caractéristique infinie on doit insérer

Introduction général

une entrée auxiliaire ce qui nous donne un indice caractéristique fini, l'évaluation de la commande se fera par simulation.

Le mémoire est organisé comme suit :

Chapitre 1 : on y présente des généralités sur les systèmes à paramètre distribué ainsi que leurs classifications et un exemple illustratif

Chapitre 2 : dans ce chapitre on s'intéresse à la modélisation d'une équation de chaleurs on y aborde également les principes du transfert de chaleur

Chapitre 3 : ce chapitre est consacré au calcul d'une loi de commande géométrique à la frontière d'une équation de chaleur, la méthode consiste à transformer la commande à la frontière à une commande ponctuelle, et de chercher la relation entre la sortie mesurée et la sortie réelle afin d'imposer les consignes pour atteindre les performances désirées.

Chapitre 4 : ce chapitre est dédié à l'application de la commande aux frontières sur une équation de chaleur, et d'étudier les performances de la commande synthétisée à travers une série de tests de simulation.

CHAPITRE 1
GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES À
PARAMÈTRES DISTRIBUÉS

1.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif d'expliquer des notions sur les systèmes à paramètres distribués qu'on va utiliser dans notre travail l'importance de l'étude des systèmes à paramètres distribués dans le domaine de l'automatique et du contrôle.

On y présente des généralités sur les systèmes à paramètre distribué qui sont largement utilisés dans différents domaines.

1.2 Definition

Les systèmes à paramètres distribués sont des systèmes permettant la description de phénomènes spatio-temporels. Ces systèmes sont souvent représentés par des équations aux dérivées partielles, d'équation intégrales ou même intégréo-différentielles, ils peuvent être linéaires ou non linéaire, à paramètres constants ou variables complétés par la définition des conditions initiales et aux limites du domaine considéré.

1.3 Formulation mathématique des systèmes à paramètre distribué

Les systèmes à paramètre distribués sont souvent décrits par des équations aux dérivées partielles. Ces dernières sont des équations différentielles à deux variables, du temps et d'espace. Ces types de systèmes physiques est décrit par des EDP appelés SPD et sont de dimension infinie, par opposition aux SPL, décrit par des équations aux dérivées ordinaires (EDO) qui sont de dimension finie [2] :

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = M(x(z,t)) + H(z)u(z,t) \quad (1.1)$$

Avec $z \in \Omega$ et $t \in T \subset \mathbb{R}$

- Ω : domaine géométrique borné de \mathbb{R}^n , de frontière $Fr \Omega$.
- t : intervalle de temps $t \in]0, tf[$
- La condition initial :

$$x(z, t_0) = x_0$$

- La condition aux limites établissant les relations entre l'état et la commande aux limites (si elle existe)

$$L(x(z', t)) = u_l(z', t), \quad z' \in Fr\Omega$$

M , H et L sont des opérateurs matriciels différentiels ne comportant que des dérivées partielles par rapport à z .

L'état du système est représenté par la fonction vectorielle suivante

$$x(z, t) = \begin{bmatrix} x_1(z, t) \\ x_2(z, t) \\ \vdots \\ x_n(z, t) \end{bmatrix}$$

1.4 Différents types de condition aux limites [1]

1.4.1 Condition de Dirichlet

Cas d'une barre métallique dont la température des extrémités est maintenue à des températures données $T_0(t)$, $T_1(t)$ tel que T_0 et T_1 sont les températures aux limites :

- $T(0, t) = T_0(t)$
- $T(l, t) = T_1(t)$.

1.4.2 Condition de Neumann

Cas où le flux de chaleur aux bords du dispositif est donné, dans ce cas c'est le gradient de la température $\nabla(t)$ qui est ainsi fixé et les conditions aux limites seront comme suit :

$$-c \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \nabla_0(t) \text{ et } c \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=l} = \nabla_1(t) \quad (1.2)$$

1.4.3 Condition de fourrier

Dans le cas où la donnée qu'on possède est la température extérieure T_{ex} , le gradient de la température au bord (flux de chaleur) sera proportionnel à la différence $(T - T_{ex})$:

$$-c \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = -K(T - T_{ex}) \quad (1.3)$$

En $z=0$ et $z=l$ (aux frontières du domaine de variation)

Avec :

$K \in \mathcal{R}$: constante.

C : constante de conductivité (caractérise la diffusion de la chaleur).

1.5 Classification des systèmes à paramètres distribués

De nombreux phénomènes physiques et applications industrielles sont modélisés par des systèmes à paramètres distribués. Ces systèmes peuvent être classés en trois types. Cette classification est basé sur les équations différentielles aux dérivées partielles [3].

La classification est plus difficile pour les systèmes non linéaires.

Pour les systèmes d'ordre deux, dont la solution $T(z, t)$ fonction a deux variables indépendante t et z , qui sont les variables temporelles et spatiales, le modèle mathématique peut s'écrire comme suit :

$$a_1 \frac{\partial^2 T(z;t)}{\partial z^2} + 2a_2 \frac{\partial^2 T(z;t)}{\partial z \partial t} + a_3 \frac{\partial^2 T(z;t)}{\partial z \partial t^2} + [\dots] = 0 \quad (1.4)$$

Le terme entre crochet dépend de $T(z, t)$ et ces dérivées premières.

Les trois classes de système sont : hyperbolique, elliptique et parabolique le système est dit :

- ✓ Hyperbolique si $a_2^2 - a_1 a_3 > 0$.
- ✓ Elliptique si $a_2^2 - a_1 a_3 < 0$.
- ✓ Parabolique si $a_2^2 - a_1 a_3 = 0$

Dans le cas où les trois coefficients a_1 , a_2 et a_3 sont nuls, l'équation dépend alors seulement des dérivées première de $T(z, t)$, on dit alors que l'équation est hyperbolique et de première ordre.

1.6 Types d'observations et de commande des systèmes a parametre distribués

1.6.1 Commandes d'un systèmes à paramètres distribués [4]

La commande d'un système se traduit par la détermination d'une loi $u(z, t)$ assurant la réalisation d'un objectif désiré . On peut la classifiée en plusieurs cathégories.

6.1.1 Commandes réparties (distribuées)

Généralement représenté par des fonctions définies sur le domaine spatial $\Omega \times t$; dans plusieurs cas $u(z, t)$ peut être décrite comme suit :

$$u(z, t) = q(z)u_e(t) \quad (1.5)$$

$q(z)$: représente la strusture géométrique de l'ensemble des actionneurs.

$u_e(t)$: représente le signal d'entrée à la commande.

Cette description de $u(z, t)$ permet de simplifier les calculs dans la transformation du modèle et la détermination de la loi de commande.

1.6.1.2 Commandes par zones

Décrit par un ensemble de fonctions définies sur un sous ensemble de Ω . Si la commande est appliquée sur r zones . On peut trouvé la commande écrit comme suit.

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^r q_i(z)u_{ei}(t) \quad (1.6)$$

16.1.3 Commandes ponctuelles

C'est un cas particulier ou la commande s'applique à un simple point .

La fonction $q_i(z)$ de l'équation (1.6) est remplacée par un pic de Dirac :

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^r u_{ei}(t)\delta(z - z_i) \quad (1.7)$$

1.6.1.4 Commandes par balayages

Dans ce cas les zones ou les points d'actions sont mobiles dans le domaine Ω .

1.6.1.5 Commandes aux frontières(ou aux limites)

Sont des commandes appliquées aux extrémités de domaine $Fr\Omega \times tf$; qui peuvent être par zones ou ponctuelles , fixes ou à balayage.

1.6.2 Observations d'un système à paramètre distribué[2]

Il existe différents types d'observations pour les systèmes à paramètre distribués, le choix de l'observation se fait en fonction du procédé et des objectifs à atteindre. Parmi ces observations on a :

1.6.2.1 Observation répartie

Le vecteur de sortie noté $y(z,t)$, définie pour tout $t \in T$ et pour $z \in \Omega$ comme suit :

$$y(z, t) = p(z).x(z, t) \quad (1.8)$$

$p(z)$: caractérise la structure géométrique du système d'observation.

$x(z, t)$: représente le vecteur d'état du système.

1.6.2.2 Observation ponctuelle

C'est une observation en un point donné $z_i \in \Omega$, on définit la sortie sur chacun de ces point i , la sortie est sous forme :

$$x(z, t) = \int_{\Omega} x(z, t)\delta(z - z_i) dz = x(z_i, t) \quad (1.9)$$

1.6.2.3 Observation par balayage

Dans ce cas l'observation est obtenue en déplaçant les points d'observation à l'intérieur du domaine admissible.

1.6.2.4 Observation par moyennage spatiale

Dans ce cas l'observation est donnée comme suit

$$y(z, t) = \int_{\Omega} c(z).x(z, t)dz \quad (1.10)$$

$c(z)$: caractérise la structure géométrique de l'ensemble des capteurs, Les capteurs qui fournissent le signal de sortie ne peuvent être assimilés à des points d'observation.

1.7. Actionneurs et capteurs des systèmes à paramètres distribués [2]

Pour passer commander un système à paramètre distribuées et assurer un bon fonctionnement du système , il faut savoir à chaque instant l'état du système pour pouvoir agir en fonction de ces informations. La collecte de ces informations se fait par l'intermédiaire des capteurs, de même que les actionneurs nous permettent d'agir sur le système.

1.7.1 Actionneurs

Les échanges entre un système et l'environnement extérieur se font par l'intermédiaire des capteurs et des actionneurs, pour les actionneurs il existe différents types, le choix se fait en fonction des informations désirées, entre autre on a les actionneurs suivant :

- Ponctuel fixe : un bruleur dans un système de diffusion.
- Ponctuel mobile : c'est un actionneur ponctuel dont la position change avec le temps, exemple excité par un rayon laser de direction variable
- Actionneurs zone : par exemple un système de diffusion avec une zone de chauffe importante.
- Filament : four chauffé par une résistance électrique.

1.7.2 Capteurs

Un capteur est un dispositif transformant l'état d'une grandeur physique observée en une grandeur utilisable, de rôle passif ils permettent de recueillir des informations sur le système et son évolution. Il existe divers types de capteurs pour les systèmes à paramètre distribués :

- En un point $x_i^m \in \Omega$ ou $x_i^m \in \partial\Omega$, comme l'exemple d'une information donné par un thermocouple.
- Dans des zones $D_i \subset \Omega$ ou $D_i \subset \partial\Omega$, la lecture se fait directement sur une partie D_i du domaine Ω .
- Suivant des lignes $L_i \subset \Omega$ ou $L_i \subset \partial\Omega$, exemple d'un miroir pivotant.

8. Exemple illustratif sur des système à paramètre distribués

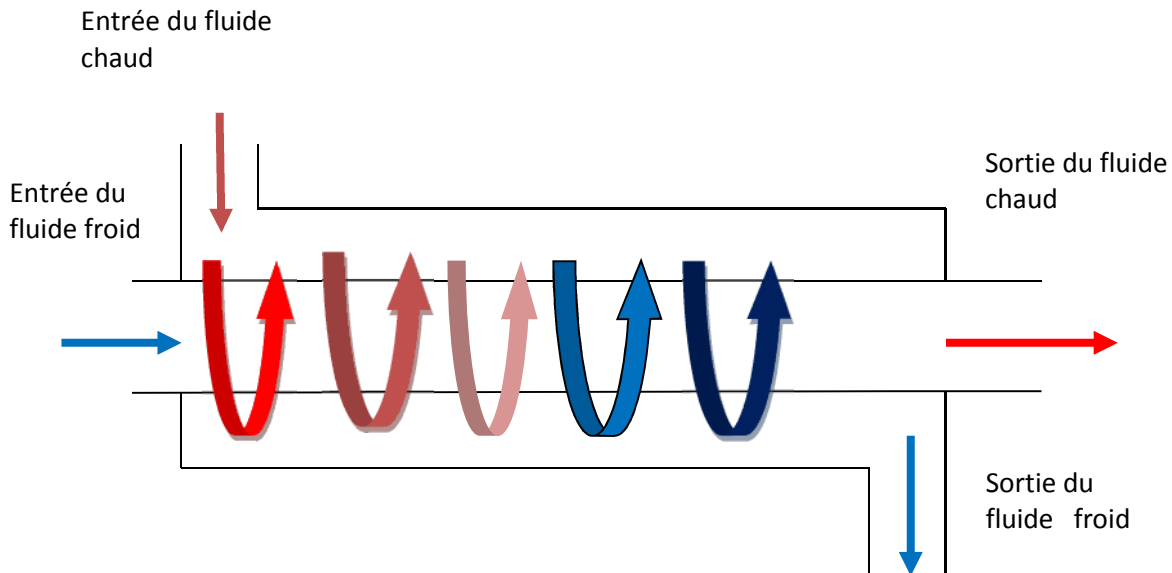
Différents domaines industrielles utilisent Les systèmes à paramètres distribués. Ces Systèmes sont classifiés selon trois types fondamentaux (paraboliques, hyperbolique et elliptique) l'exemple qui va suivre est un système hyperbolique il s'agit d'un échangeur thermique.

8.1 Echangeur de chaleur [5]

C'est un organe très répondeue dans l'industrie (chimique, pétrochimique, climatisation et chauffage etc. ...) il existe plusieurs types d'échangeurs de chaleur, on peut prendre par exemple un echangeur de chaleur coaxial.

Dans ce dérnier, les tubes sont le plus souvent cintrés, en général le fluide chaud ou le fluide froid s'écoule dans le tube intérieur en parellèle, les deux fluides chaud et froid entrent dans la meme

extrémité et vont dans le même sens, on parle également d'échangeur à co-courants, comme dans la Figure(I.1).



Figure(I.1) : Echangeur de chaleur coaxial

9. Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre les notions de base liées aux systèmes à paramètre distribué. Ces notions seront utilisées le long de notre travail. Les systèmes à paramètres distribués sont souvent décrits par des équations aux dérivées partielles dans un espace d'état de dimension infinie. On a vu aussi les différentes commandes et observations, ainsi que les actionneurs et capteurs adaptés pour ces systèmes.

Comme procédé le SPD parabolique, on peut citer l'exemple de l'équation de chaleur. Cette dernière fera l'objet de modélisation dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 2

MODÉLISATION DE L'ÉQUATION DE

CHALEUR

2.1 Introduction

La modélisation représente une part considérable du travail du mathématicien appliqués et nécessite une connaissance approfondie, non seulement des mathématiques appliquées mais aussi de la discipline scientifique à laquelle elles s'appliquent.

Ce chapitre porte essentiellement sur la modélisation d'un transfert de chaleur par conduction et l'étude des caractéristiques de l'équation de chaleur d'une dimension afin d'avoir un modèle simple à étudier.

2.2 Définition [6]

La chaleur est une forme dégradée de l'énergie. Cette notion est claire lorsqu'on considère le second principe de la thermodynamique qui stipule qu'une machine thermique cyclique ne peut pas transformer, une quantité de chaleur entièrement en travail mécanique. Du point de vue microscopique, dans un gaz parfait cette forme dégradée d'énergie est due aux mouvements de translation non déterministes des particules.

On peut étendre cette notion à tous les systèmes thermodynamiques à condition de considérer non seulement les mouvements de translation mais tous les degrés de libertés des particules ou des molécules qui composent le système.

2.3 Différents mécanismes de transfert thermique [7]

Il existe différents types de transfert de chaleur conduction, convection et rayonnement.

2.3.1 Conduction

La conduction représente le processus de propagation de la chaleur par le contact direct entre les particules du corps dont les différentes parties ne sont pas isothermes.

Dans les solides diélectriques, la conduction se fait par les ondes élastiques (les phonons) et dans les solides conducteurs électriques, par la diffusion des électrons ou porteurs de charge mobiles en parallèle avec les ondes élastiques. Dans les liquides en l'absence de convection, la conduction de la chaleur se fait également par l'intermédiaire des ondes élastiques.

Dans les gaz, en l'absence de convection, la conduction s'effectue par la diffusion moléculaire. Et la Figure (2.1) montre un exemple de conduction.



Figure(2.1) : conduction thermique dans un matériau

La direction du flux thermique est toujours du chaud vers le froid.

2.3.2 Convection

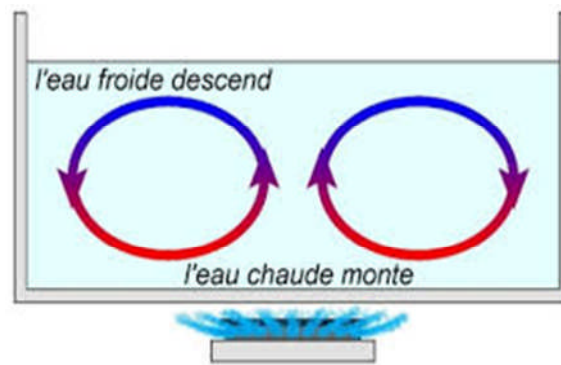
La convection se réfère aux transferts thermiques qui ont lieu dans les fluides en mouvement macroscopique. Le transfert thermique est déterminé par le mouvement des particules élémentaires du fluide, entre les zones ayant des températures différentes. Ce mouvement entraîne un mélange intense des particules fluides qui échangent de l'énergie sous forme de chaleur et de quantité de mouvement entre elles.

On distingue :

- la convection naturelle qui a comme origine le mouvement produit par les différences de densité entre les particules chaudes et celles qui sont froides dans un fluide situé dans un champ de pesanteur. En général le fluide chaud est moins dense et a tendance à s'élever dans le champ de pesanteur de la convection forcée pour laquelle le mouvement de fluide est causé par l'action des forces extérieures (pompes, ventilateurs).

La convection forcée est en général accompagnée par de la convection libre.

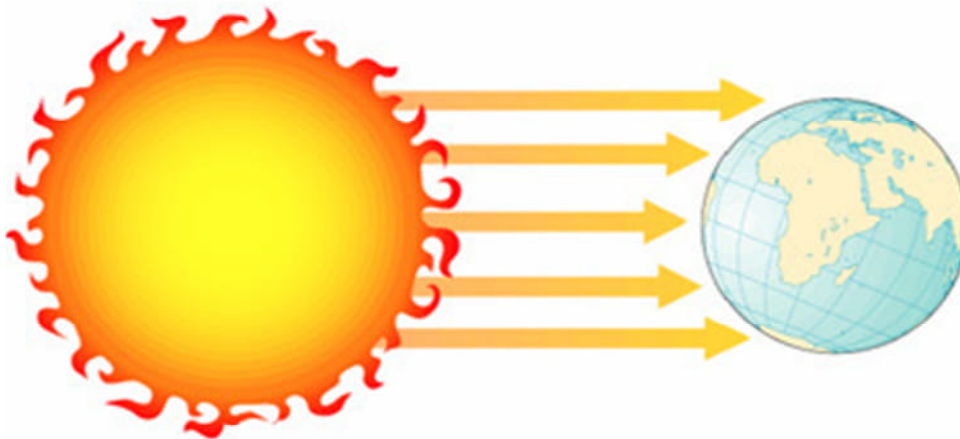
Dans tous les fluides visqueux, il existe une couche de fluide limite adhérente à la paroi et le transfert de chaleur à travers cette couche se fait par conduction.



Figure(2.2) : représentation d'un exemple de convection

2.3.3 Rayonnement[18]

Le rayonnement est une forme particulière de transfert thermique dans laquelle l'énergie est portée par des ondes électromagnétiques, ayant pour origine l'agitation intra atomique à la surface d'un corps. Le phénomène de rayonnement est créé par l'émission et l'absorption des ondes électromagnétiques et par la transformation de celles-ci en chaleur .C'est le seul mécanisme de transfert de chaleur qui ne nécessite pas de support.



Figure(2.3) : représentation les rayons solaire

On s'intéresse dans notre travail à la conduction thermique. On étudie le transfert thermique dans une barre métallique.

La chaleur est transmise à la barre en un endroit puis elle se propage à travers le corps. Si l'étude se fait sur une échelle plus grande, la variation de la température est en fonction de la position.

2.4. Conduction thermique [8]

- **Flux thermique** : Le flux thermique total représente la chaleur transférée à travers une Surface donnée par unité de temps :

$$\varphi = \frac{\delta\phi}{\delta t} \quad (2.1)$$

- **Flux thermique surfacique** : Le flux thermique surfacique représente le flux thermique total rapporté à l'unité de surface ou la chaleur transférée par unité de temps et par unité de surface :

$$\vec{\varphi} = \frac{\delta\phi}{\delta s} \vec{n} \quad (2.2)$$

Les unités sont des Watts et celles de $\vec{\varphi}$ des $W.m^{-2}$. On a les relations suivantes :

$$\phi = \int \vec{\varphi} \cdot d\vec{s} \quad (2.3)$$

Qui définit la puissance traversant la surface S et

$$Q = \int_0^t \phi(T) dT \quad (2.4)$$

La quantité de chaleur traversant la surface S pendant un temps t.

- **Mesures de la conductivité thermique**

Il existe plusieurs façons de mesurer la conductivité thermique. La plus simple consiste à envoyer une puissance thermique connue et à mesurer les températures à deux points séparés sur le matériau dans une géométrie contrôlée. Les mesures absolues et précises de la conductivité thermique sont très difficiles à faire. La source essentielle d'erreur provient du fait que les écarts de températures doivent être faibles pour supposer que la conductivité thermique est constante dans l'intervalle considéré.

- **Conductivité thermique des gaz**

La théorie cinétique des gaz permet de relier les propriétés thermo physique des gaz (conductivité thermique, viscosité, coefficient de diffusion) en fonction des paramètres intrinsèques du gaz (masse molaire, diamètre moléculaire).

- **Conductivité thermique des solides**

Le transfert thermique dans les solides est la combinaison du transfert dû aux électrons libres (où aux porteurs de charge libres) et aux vibrations du réseau cristallin. Ces deux phénomènes ont lieu en parallèle et donc les conductivités s'ajoutent :

$$\lambda = \lambda_{el} + \lambda_{ph} \quad (2.5)$$

Et l'unité de conductivité $\lambda(\text{W.m}^{-1}.\text{k}^{-1})$

Quelques exemples de la conductivité des matériaux Fe=73, Cu=380, Al=220.

- **Conductivité thermique des liquides**

Comme dans les solides, en l'absence de convection la conductivité thermique des liquides est assurée par les ondes acoustiques.

Exemple de conductivité des certain liquides : (eau=0.58), (l'huile=0.14)

Remarque 2.1

- *les métaux sont de bons conducteurs de chaleur, car ils ont une bonne conductivité thermique*
- $\lambda(T)$: *croît avec la température pour les gaz.*
- $\lambda(T)$: *décroit avec la température pour le cuivre, le zinc, les aciers doux, le plomb mais croît avec la température pour l'aluminium et les aciers inoxydables*
- $\lambda(T)$: *est quasi constant pour les huiles de moteur.*

4.1. Conduction stationnaire - Loi de Fourier [9]

- **Loi de Fourier**

Lorsqu'on écrit la loi de Fourier, on suppose implicitement que le champ de température $T(x, y, z, t)$ est connu partout dans le matériau.

Cela permet ensuite de déterminer le flux de chaleur en tout point en utilisant l'équation du flux surfacique qu'est proportionnel au gradient de la température :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \vec{\nabla} T \quad (2.6)$$

Où λ est la conductivité thermique. Si le matériau n'est pas isotrope λ est a priori un tenseur symétrique qui peut être diagonalisé en choisissant des axes convenables (cristallographiques)

- **Champ de température** : Le transfert de chaleur se produit dans un corps ou entre des corps de température différente. On suppose donc qu'on peut définir en chaque point d'un corps au moins une température qui dépend à priori du temps :

$$T(x, y, z, t)$$

- **Gradient de température** : Le gradient de température est un vecteur dont la direction, le sens et la norme sont déterminés par la manière dont la température varie dans le corps. Classiquement le gradient est perpendiculaire aux surfaces isothermes et dans le sens des températures croissantes.

$$\text{grad} \vec{T} = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \quad \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

- **Expression du flux d'énergie** : dépend du gradient de la température avec un coefficient proportionnel à la vitesse d'agitation et au libre parcours moyen.

L'expression du flux peut être écrite sous la forme suivante :

$$q = -k \frac{dT}{dz} \quad (2.7)$$

k : Le coefficient de conductivité thermique définit positif.

q : Est en fait un vecteur, la variation se fait que *sur* z , le flux est un vecteur dirigé par \vec{e}_z

$$\vec{q} = -k \left(\frac{dT}{dz} \right) \vec{e}_z \quad (2.8)$$

2.5 Modélisation de l'équation de la chaleur (équation de diffusion) [10]

Considérons un domaine Ω de l'espace à N dimension que l'on suppose occupé par un matériau homogène, isotrope et conducteur de la chaleur, on note z la variable d'espace

C'est –à –dire un point de Ω , et t la variable de temps :

Et les des grandeurs physiques utilisées sont définie comme suivant :

Variable inconnue : température $T(z, t)$

Variable de temps $t \in \mathcal{R}^+$, la variable d'espace $z \in \mathcal{R}^n$

Dérivée partielle $\frac{\partial T}{\partial t}$ (2.9)

Gradient en espace $\nabla_T = \left(\frac{\partial T}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial z_N} \right)^T$ (2.10)

Divergence d'un vecteur $q = (q_1, \dots, q_n)^T$ (2.11)

$$div q = \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial z_i} \quad (2.12)$$

Laplacien : $\Delta T = div(\nabla T) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 T}{\partial z_i^2}$ (2.13)

Les grandeurs physiques utilisées sont : la température T , le flux de chaleur q , une source thermique f , la chaleur spécifique $c > 0$ qui est une constante.

Dans un volume élémentaire noté V qui est indépendant du temps le bilan est donné par :

Variation en temps du quantité de chaleur = source+ pertes où entrées à travers les parois

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V cT dz \right) = \int_V f dz - \int_{\partial V} q \cdot nds \quad (2.14)$$

Si on utilise le théorème de Gauss, on obtient le résultat suivant :

$$\int_{\partial V} q \cdot \vec{n} ds = \int_{\partial V} \text{div} q dz \quad (2.15)$$

On permute la dérivée en temps et l'intégrale sur V comme le volume n'est pas précisé, on déduit.

$$c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div} q = f \quad (2.16)$$

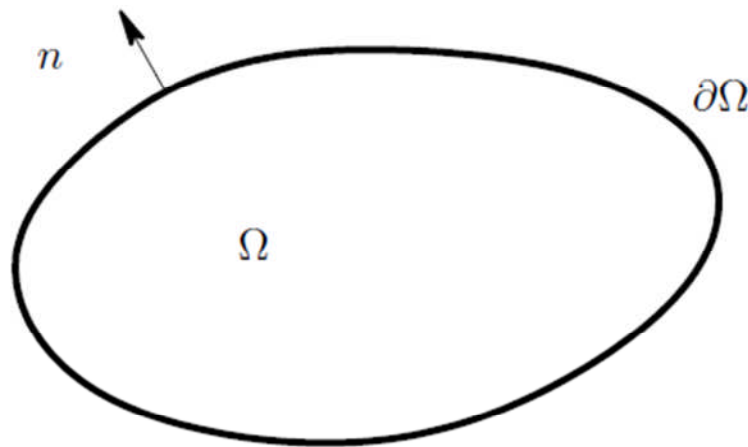


Figure (2.4) : vecteur normal unité orienté vers l'extérieur

Normale unité d'un ouvert : Normale d'unité : $\|n\| = 1$

La loi constitutive dite de fourrier nous permet d'avoir les résultats suivant

$$q(z, t) = cVT(z, t) - k\nabla T \quad (2.17)$$

On obtient une relation linéaire entre le flux à travers une surface et la convection suivant la vitesse, la diffusion suivant l'opposé du gradient thermique

Avec les conditions suivantes :

$$\text{Condition initial : } T(t = 0, z) = T_0(z) \quad (2.18)$$

Conditions aux limites :

- ✓ Dirichlet : $T = 0$ sur le bord (thermostat)
- ✓ Neumann : $q \cdot n = 0$ (adiabatique)

On trouve une équation aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} c \frac{\partial T}{\partial t} + cV \cdot \nabla T - k\Delta T = f & \text{dans } \Omega \times \mathcal{R}_*^+ \\ T = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathcal{R}_*^+ \\ T(z, t = 0) = T_0(z) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.19)$$

Avec $c, V, f(z, t), T_0(z)$ et Ω sont données et $T(z, t)$ inconnue.

Le modèle est issu d'une loi de conservation et d'une loi constitutive.

On remarque que le modèle se compose de deux parties : une qui dépend de la convection et l'autre de la diffusion, laquelle est mesurée par une grandeur sans dimension, définie par

$$P_e = \frac{cVL}{k} \quad (2.20)$$

Où :

P_e : Nombre de Péclet.

L : La longueur

Dans ce cas on obtient

$P_e \ll 1$, on aura l'équation de la chaleur.

$P_e \gg 1$, on aura l'équation d'advection.

On s'intéresse à l'équation de chaleur, dans ce cas :

Equation de chaleur (pour $P_e = 0$)

$$\begin{cases} c \frac{\partial T}{\partial t} - k\Delta T = f & \text{dans } \Omega \times \mathcal{R}_*^+ \\ T(z, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathcal{R}_*^+ \\ T(z, t = 0) = T_0(z) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.21)$$

Le problème (2.21) est donc constitué d'une équation aux dérivées partielles munie de conditions aux limites et d'une condition initiale, à cause de la présence de conditions aux limites, on dit que (2.21) est un problème aux limites, mais aussi que c'est un problème de Cauchy à cause de la donnée initiale en temps.

La solution de l'équation se résume donc à un problème de Cauchy :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(z, t) = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, t), \quad z \in R, t > 0 \quad (2.22)$$

Où $\alpha > 0$ est une constante donnée, θ est une fonction inconnue réelle de deux variables z et t . Ici $T = T(z, t)$ est la température dans un conducteur d'une dimension, la valeur de $T(z, t)$ dépend du temps t et de la position z . En général la valeur de $T(z, t)$ en $t = 0$ est donnée.

2.6. Description physique [9]

Considérons une barre de longueur illimitée, pour décrire l'équation de chaleur, on suppose que le conducteur a une petite section d'aire Δs .

$$\left[-k \left(\frac{dT}{dz} \right) (a, b) - \left(\frac{dT}{dz} \right) (a, b) \Delta s \Delta t \right] \quad (2.23)$$

Où k est une constante strictement positive dépendant du matériau, k est positive du fait que la chaleur circule du chaud vers le froid, on suppose que les variations de T et $\frac{dT}{dz}$ ne sont pas rapide, ainsi $k \frac{dT}{dz}$ est la quantité de chaleur par seconde et par unité d'espace circulant le long des z dans la direction négative.

On s'intéresse à la manière dont varie la température T aux différents points de la barre, l'équation des échanges de chaleur de l'intervalle $[a, b]$.

Si on prend la quantité $a - b$ est petite, elle est si petite que $\frac{dT}{dz}(z, t)$ est presque constante pour que $z \in [a, b]$.

L'augmentation de la température étant $\frac{dT}{dz} \Delta t$, la chaleur qui sort de la barre est approximativement constante. K_1 est une constante strictement positive, la chaleur spécifique

par unité de volume c_g est donnée par unité de masse donc si le matériau a la densité ρ alors $k_1 = \rho c_g$. On écrit ensuite que les deux termes sont égaux, on divise par $\Delta s \Delta t (b - a)$ et on fait tendre $b - a$ vers zéro d'où :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{k_1} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.24)$$

2.7 Propriétés de l'équation de chaleur [7] :

2.7.1 Différentes écritures de l'équation de la chaleur 1D

L'équation de la chaleur établie à partir des lois de conservation est :

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T(z, t) = - \frac{\partial}{\partial z} q(z, t) + f(z) \quad (2.25)$$

Compte tenu de la loi de Fourier :

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} T \right) + f \quad (2.26)$$

S'il n'y a pas de sources de chaleur $f = 0$:

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} T \right) \quad (2.27)$$

Bien souvent, le coefficient de conduction sera pris constant, mais il peut dépendre de la position (si on met des matériaux différents en contact), et il peut aussi dépendre de la température si on chauffe trop, ou si on veut résoudre (2.27) de manière très précise. Si on n'est pas dans ces cas, on écrira la forme simplifiée classique :

$$\rho c_p \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \quad (2.28)$$

On la note aussi parfois avec λ plutôt que k

$$\rho c_p \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \quad (2.29)$$

Enfin, on note aussi

$$\rho c_p \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2}; \text{ avec } \alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad (2.30)$$

Le coefficient α de « diffusivité » et les dimensions d'une longueur au carré divisé par un temps ($m^2 s^{-1}$). L'équation de la chaleur est une équation différentielle aux dérivées partielles.

Il y a deux variables z et t qui sont deux variables indépendantes. Pour résoudre cette équation, il faut des conditions aux limites, c'est-à-dire la valeur de la température aux bornes du domaine. Nous allons les exposer plus tard.

2.7.2. Equation de la chaleur stationnaire 1D

Rappelons l'équation de la chaleur que nous venons d'établir :

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} T \right) + r \quad (2.31)$$

Les deux variables z et t sont deux variables indépendantes. On appellera solution stationnaire, la solution obtenue pour un temps assez long. Pour la solution stationnaire, le temps n'est plus un paramètre la température ne varie plus avec le temps .

Ecrivons les équations stationnaires : il s'agit simplement de considérer que la température ne varie plus avec le temps c'est-à-dire : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. (2.32)

- L'équation stationnaire de la chaleur dans un milieu immobile linéaire homogène avec terme source est donc :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} T \right) + r = 0 \quad (2.33)$$

- L'équation stationnaire de la chaleur dans un milieu immobile linéaire homogène avec terme source et isotrope est donc :

$$k \frac{\partial^2}{\partial z^2} T + r = 0 \quad (2.34)$$

Dans les deux cas c'est une équation différentielle ordinaire. On a besoin de ses conditions aux limites pour la résoudre.

Conditions aux limites : il faut connaître la température aux bornes de l'objet chauffé C'est normal la température d'une barre métallique dépend bien de la température extérieure et de la température à l'intérieur de la barre métallique. On a les cas suivantes :

La température partielle est imposée :

$$T = T_p \quad (2.35)$$

Le flux partiel imposé :

$$-k \frac{\partial}{\partial z} T|_p = q_p \quad (2.36)$$

Remarquons qu'une paroi adiabatique (on dit aussi athermane) est telle que

$$-k \frac{\partial}{\partial z} T|_p = 0 \quad (2.37)$$

Sur un plan de symétrie, on a aussi

$$-k \frac{\partial}{\partial z} T = 0 \quad (2.38)$$

Il existe une autre possibilité liée au « facteur d'échange que nous verrons plus tard.

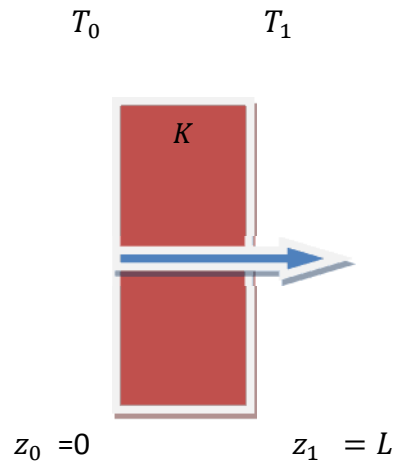
Nous allons examiner des exemples simples en dimension 1.

Remarque 2.2 :

On écrira la forme simplifiée classique lorsque k est constant :

$$\rho c_p \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} \quad (2.39)$$

Il faut donner des conditions aux limites à cette équation, pour l'instant nous n'avons présenté que des solutions stationnaires à température ou flux imposé, cela nous a permis d'introduire la résistance thermique



Figure(2.5) : la conduction de la température

Une barre infini, soumis à T_0 en $z_0 = 0$ et T_1 en $z_1 = L$

2.7.3. La diffusion de la chaleur dans un solide, régime stationnaire

elle se caractérise par l'absence d'une quelconque source de chaleur à l'intérieure du solide le flux de chaleur est indépendant du temps.

2.7.4 L'équation de Laplace :

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2.40)$$

Ce type de problème est étudié de façon mathématique, la solution dépend de la géométrie exacte et des conditions aux limites qui peuvent être du type :

- températures fixées aux limites.
- flux de chaleur fixés.
- un mélange des deux.

8. Normalisation de l'équation de chaleur 1D

Le flux thermique surfacique qui traverse le matériau est :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \vec{\nabla} T = -\lambda a = -\frac{\lambda}{e} (T_1 - T_2) \quad (2.41)$$

et le flux total est :

$$\phi = -\frac{\lambda S}{e}(T_1 - T_2) = -K(T_1 - T_2) = K\Delta T \quad (2.42)$$

Où K est la conductance thermique et $1/K$ la résistance thermique

D'où d'après les conditions aux limites :

$$T(0) = T_1$$

$$T(L) = T_2$$

On aura $T(z) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right)z$ (2.42)

Qu'est la fonction de chaleur normalisée

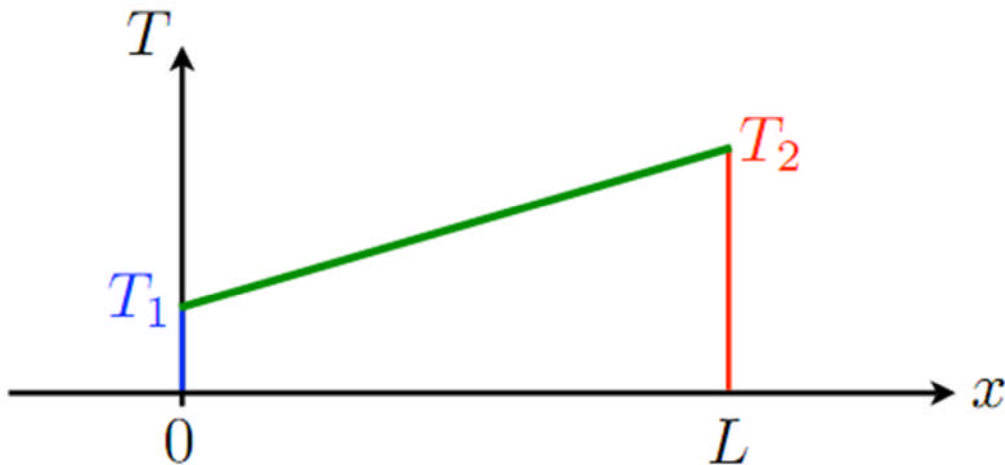


Figure (2.6) : la relation linéaire de la température

2.9. Conclusion

Nous avons vu que le phénomène de transfert de chaleur satisfait l'équation de la chaleur dans ces différentes formes. Après résolution de cette équation nous permet de mieux comprendre le concept de diffusion de chaleur dans des matériaux différents (solide, gaz, fluide). On a vu aussi dans ce chapitre les différentes caractéristiques de la diffusion de la chaleur ainsi que les modes de transfert.

La commande de la température dans un système est un vrai projet de recherche. Nous on va proposer dans le chapitre après une commande pour la température propage d'une barre métallique

CHAPITRE 3

CALCUL D'UNE COMMANDE GÉOMÉTRIQUE À LA FRONTIÈRE D'UNE ÉQUATION DE CHALEUR

Chapitre 3 Calcul d'une commande géométrique à la frontière d'une équation de chaleur

3.1 Introduction

Après avoir présenté et donné des généralités sur les systèmes à paramètres distribués et avoir fait la modélisation d'un exemple d'un système de type parabolique en qui est l'équation de chaleur.

On s'intéresse dans ce chapitre à la synthèse d'une loi de commande géométrique à la frontière d'une équation de chaleur, dans le but de mettre en évidence les performances (poursuite) de cette loi de commande et de donner une idée sur ces avantages.

3.2 Notion de l'indice caractéristique [13]

Dans ce paragraphe, on introduit la notion de l'indice caractéristique entre l'entrée u et la sortie y pour les systèmes décrits par l'équation (3.1)

3.2.1 Indice caractéristique pour les systèmes à paramètres localisés

Le modèle d'état d'un système à paramètres localisés décrit comme suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Le degré relatif du système non linéaire sur un domaine U est le plus petit entier r pour lequel $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$ pour tout x dans U .

$L_g h(x)$: Représente la dérivée de Lie de $h(x)$ par rapport $g(x)$ pour les systèmes linéaires devient $L_g L_f^{r-1} h(x) = CA^{r-1}B \neq 0$.

Considérons le système non linéaire mono-variable à paramètres localisés, décrits par l'équation (3.1). Ce type de système non linéaire est appelée système non linéaire **affiné** en entrée, cette classe modélise la majorité des systèmes physique : machine électrique, robots, processus chimique.

Dérivées de Lie : la dérivée de Lie de la fonction scalaire $h(x) \in \mathbb{R}^n - \mathbb{R}$, le long du champ de vecteur de $f(x)$, notée $L_f h(x)$ est donnée comme suit :

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} \cdot f(x) = \nabla h(x) \cdot f(x) \tag{3.2}$$

Dérivée de Lie de l'ordre supérieur :

$$\left\{ \begin{aligned} L_f^0 h(x) &= h(x) \\ L_f^r h(x) &= L_f \left(L_f^{r-1} h(x) \right) \neq 0, r = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \tag{3.3}$$

Remarque : les dérivées de Lie nous permet de faire la linéarisation entrée/sortie d'un système

Chapitre 3 Calcul d'une commande géométrique à la frontière d'une équation de chaleur

non linéaire. Pour que le système soit commandable l'entrée doit apparaitre au moins une fois dans la sortie. Pour calculer le degré relatif, on calcule la dérivée de la sortie comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= L_f \cdot h(x) \\ \ddot{y} &= \frac{d}{dt} (L_f h(x)) = \frac{\partial (L_f h(x))}{\partial t} = \frac{\partial (L_f h(x))}{\partial x} f(x) + \frac{\partial (L_f h(x))}{\partial x} g(x) \\ &= L_f^2 \cdot h(x) + L_g L_f \cdot h(x) \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.2.2 L'indice caractéristique pour les systèmes à paramètres répartis[12]

Considérons l'opérateur de différentiation de la sortie y du système de la relation (3.1)

Par rapport au temps :

$$y = ckx \quad (3.5)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} ckx = ck \frac{\partial x}{\partial t} \quad (3.6)$$

$$\frac{dy}{dt} = ck \left(A \frac{\partial}{\partial t} + B \right) + ckb(z)u \quad (3.7)$$

Maintenant si on a $ckwb(z) \neq 0$, alors l'indice caractéristique de y par rapport à l'entrée u , notée par r est égal à 1, si non r , est supérieur, la relation (3.7) devient comme suit

$$\frac{dy}{dt} = ck \left(A \frac{\partial}{\partial z} + B \right) \quad (3.8)$$

Donc, il faut appliquer une autre dérivation à l'équation (3.8), ce qui donne :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = ck \left(A \frac{\partial}{\partial z} + B \right)^2 x + ck \left(A \frac{\partial}{\partial t} + B \right) wb(z)u \quad (3.9)$$

De la même manière, si le scalaire $ck \left(A \frac{\partial}{\partial t} + B \right) wb(z) \neq 0$, alors l'indice caractéristique r est égal à 2, sinon il est d'ordre supérieur.

Où A, B : sont des matrice

3.3 Commande à la frontière de l'équation chaleur appliquée à une barre métallique

3.3.1 Description du problème de commande

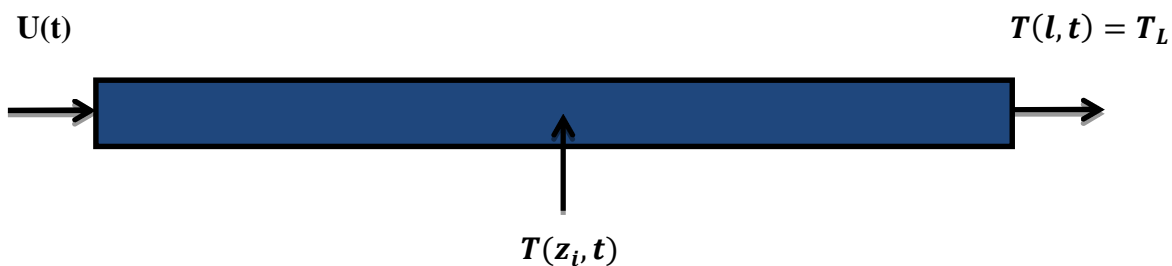


Figure (3.1) : Description de problème de commande

Chapitre 3 Calcul d'une commande géométrique à la frontière d'une équation de chaleur

Pour un système **EDP** parabolique en l'occurrence l'équation de chaleur qui modélise une barre métallique de **1D** de longueur **L** et de section **S** qui est soumise à une température $u(z, t)$ avec les conditions aux limites suivantes

$$\begin{aligned} T(l, t) &= 50 \\ T(0, t) &= 0 \end{aligned}$$

et la condition initiale $T(z, 0) = T_0$

La sortie manipulée est $y(z, t) = T(z, t)$, la sortie mesurée $y_m(z, t) = T(z_i, t)$

Avec l'expression de l'équation de chaleur sous la forme suivante:

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \quad (3.10)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} T(0, t) &= 0 \\ T(l, t) &= T_e \end{aligned}$$

En considérant la sortie :

$$y(t) = T(z_i, t) = \int_0^l \delta(z - z_i) T(z, t) dz \quad (3.11)$$

En dérivant la sortie par rapport au temps on aura

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \int_0^l \delta(z - z_i) \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} dz \\ &= \int_0^l \delta(z - z_i) \alpha \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} dz \end{aligned} \quad (3.12)$$

et si $z_i \neq z$

$$\begin{aligned} &= \alpha \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \Big|_{z=z_i} - \alpha \delta(z) u(t) \Big|_{z=z_i} \\ &= \alpha \frac{\partial^2 T(z_i, t)}{\partial z_i^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

On remarque que la sortie $y(t)$ ne dépend pas de $u(t)$ donc le degré relatif est infini :

$$L_g L_f^0 h(x) = 0 \quad (3.14)$$

Remarque

La commande par retour d'état qu'on a appliquée, ne permet pas de suivre le critère de performance (poursuite) imposé dans le cahier de charge. On a démontré que d'après la dérivation successive de la sortie $y(t)$ par rapport au temps que le degré relatif est infini ce qui

Chapitre 3 Calcul d'une commande géométrique à la frontière d'une équation de chaleur

signifié que l'entrée n'apparaît pas donc notre commande n'est pas optimal car la performance de suivi de la trajectoire de référence n'est pas assurée.

3.4 Transformation de la commande à la frontière en une commande ponctuelle

Vu que la commande à la frontière est difficile à appliquer, on propose de transformer, le problème de commande à la frontière en une commande ponctuelle exploitable par calcul de la commande utilisant la transformation de la place dans l'espace.

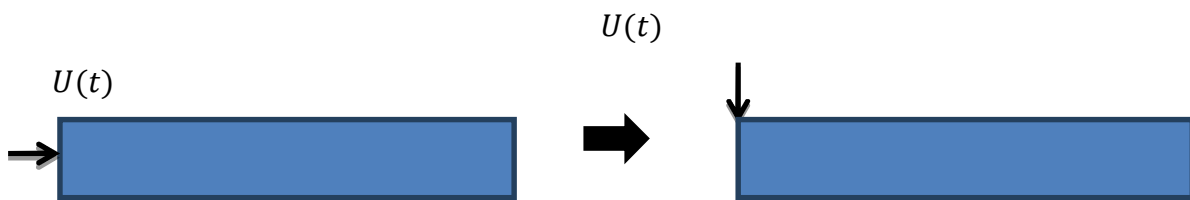


Figure (3.2) : Représente la transformation d'une commande au frontière en une commande ponctuelle

La transformation de Laplace de l'équation de chaleur nous donne :

$$\frac{dT(s,t)}{dt} = s^2 T(s,t) - sT(0,t) - \frac{dT(0,t)}{dz} \quad (3.15)$$

La transformation de Laplace des conditions aux limites nous donne :

$$\mathcal{L}(T(0,t)) = \frac{T(0,t)}{s} = \frac{u(t)}{s}$$

$$\mathcal{L}(T(l,t)) = \frac{T(l,t)}{s} = \frac{T_L}{s} \quad (3.16)$$

On $T(0,t) = u(t); \frac{dT(0,t)}{dz} = 0$

D'où :

$$\frac{d\bar{T}(s,t)}{dt} = s^2 \bar{T}(s,t) - su(t) \quad (3.17)$$

$$\mathcal{L}(\bar{T}(l,t)) = \frac{T(l,t)}{s} = \frac{T_L}{s}$$

Cette forme est équivalente à la commande ponctuelle :

Chapitre 3 Calcul d'une commande géométrique à la frontière d'une équation de chaleur

$$\frac{d\bar{T}(s,t)}{dt} s^2 \bar{T}(s,t) - sT(0,t) - \frac{dT(0,t)}{dz} - su(t) \quad (3.18)$$

Avec a

$$T(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dT(0,t)}{dz} = 0$$

et

$$\bar{T}(0,t) = \frac{T(0,t)}{s} = 0$$

$$\bar{T}(l,t) = \frac{T(l,t)}{s} = \frac{T_L}{s}$$

Après le calcul de la transformation inverse de Laplace, on aura :

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial T^2(z,t)}{\partial z^2} - \delta(z)u(t) \quad (3.19)$$

avec:

$$T(0,t) = 0$$

et

$$T(l,t) = T_L$$

3.5 Commande ponctuelle avec une Sortie auxiliaire [14]

Dans le cas la commande ponctuelle, la sortie du système est définie comme suit :

$$y(t) = T_c(z_i, t) \quad (3.21)$$

Considérons la sortie mesurée donnée par l'observation par moyennage spatial suivante :

$$y_m = T_c(z_i, t) = \int_0^l c(z)T(z_i, t)dz \quad (3.22)$$

On dérive la sortie mesurée par rapport au temps, on aura :

$$\begin{aligned} \frac{dy_m(t)}{dt} &= \int_0^l c(z) \frac{\partial T}{\partial t}(z_i, t) dz = \int_0^l c(z) \left(\alpha \frac{\partial^2 T(z_i, t)}{\partial z^2} - \alpha \delta(z)u(t) \right) dz \\ &= \underbrace{\int_0^l c(z) \left(\alpha \frac{\partial^2 T(z_i, t)}{\partial z^2} \right) dz}_{I_1} - \alpha \underbrace{\left(\int_0^l c(z) \delta(z) dz \right)}_{I_2} u(t) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Chapitre 3 Calcul d'une commande géométrique à la frontière d'une équation de chaleur

Donc l'équation est sous la forme suivante :

$$\frac{dy_m(t)}{dt} = I_1 + \alpha I_2 u(t) \quad (3.24)$$

La condition pour que le degré relatif est fini est :

$$I_2 = - \int_0^l c(z) \delta(z) dz \neq 0 \quad (3.25)$$

$$= - \int_0^l \dot{c}(z) \delta(z) dz \neq 0 \Rightarrow I_2 = -\dot{c}(z=0) \neq 0 \quad (3.26)$$

Donc la solution et de choisir :

$$c(z) = z$$

Après intégration par partie on trouve les résultats suivants :

$$I_2 = - \int_0^l z \delta(z) dz \Rightarrow \int_0^l z' \delta(z) dz = z' |_{z=0} = 1 \quad (3.27)$$

Si $I_2 \neq 0$, donc le degré relatif est fini $\sigma = 1$, le problème est résolu, dans la sortie $y_m(t)$ apparait une entrée $u(t)$.

D'après cette notion, on peut définir l'équation différentielle entrée/sortie du système en boucle fermée

$$\tau \frac{dy_m(t)}{dt} + y_m(t) = yd(t) \quad (3.28)$$

Où $v(t)$ est une entrée externe où de référence

Calcule du deuxième terme :

$$I_1 = \alpha \left[z \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} \right]_{z=0}^{z=l} - \alpha \int_0^L \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} dz \quad (3.29)$$

On remplace I_1 et I_2 dans (3.24)

Après on remplace (3.24) dans (3.28) on obtient :

$$\tau(I_1 + \alpha I_2 u(t)) + y_m(t) = yd(t) \quad (3.30)$$

Donc la loi de commande géométrique suivante :

$$u(t) = \frac{1}{\tau\alpha} \left[v(t) - y_m(t) - \tau(\alpha L \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} |_{z=L} - \alpha T_L) \right] \quad (3.31)$$

Où τ est le paramètre à ajuster,

$yd(t)$ Correspond à une entrée externe,

$y_m(t)$ La sortie mesurée,

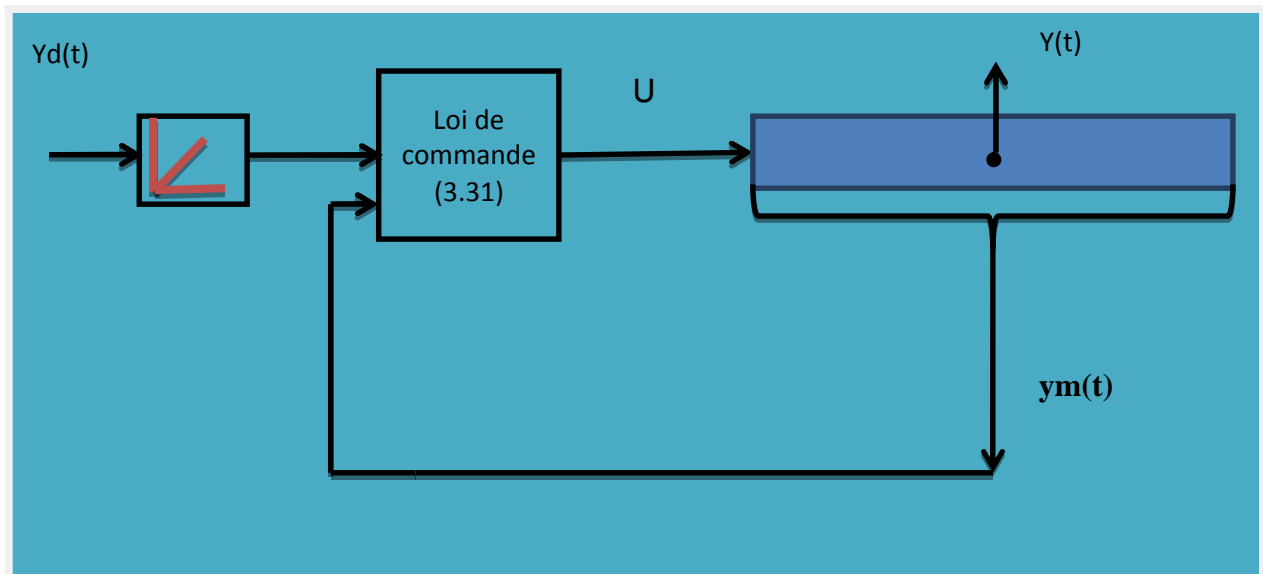
Remarque :

On peut faire une régulation pour la sortie auxiliaire avec un correcteur **PID**, on choisit ce régulateur car le paramètre à ajuster et la constante de temps pour avoir les performances désirées pour la sortie $y_m(t)$.

3.6 stratégies de commande

L'objectif est de commander la sortie définie comme suit $y(t) = T(z_i, t)$

Pour commander le système, on va proposer l'asservissement indiqué par la figure(3.3)



Figure(3.3) :Représentation de la stratégie de commande

3.6.1 Interprétation de la stratégie de commande

L'objectif est de commander la température $y(t) = T(z_i, t)$, donc on cherche la relation entre y et y_m à fin d'imposer des consignes pour y .

3.7 Les problèmes de la commande géométrique

3.7.1 Problèmes liés à la mesure : On sait que τ est le paramètre à ajuster par le régulateur afin d'assurer une entrée /sortie stable et d'obtenir des bonnes performances pour la sortie $y_m(t)$, si on visualise la température d'un point ponctuel située sur la barre on voit que l'évaluation des termes I_1 et $y_m(t)$ peut forcer le résultat de mesure à augmenté d'une façon indésirable ce qui va obliger le capteur à envoyer plusieurs informations de mesures imparfaites

Chapitre 3 Calcul d'une commande géométrique à la frontière d'une équation de chaleur

3.7.2 Problème liés à la commande

Les problèmes fréquents pour l'application des commandes sur les procédés industriels sont dus à la dynamique non linéaire produite par des organes de puissance où par des erreurs d'identification où des incertitudes des éléments non modélisés et la commande géométrique peut avoir des problèmes qui sont liés à l'estimation :

- ✓ de la géométrie du domaine Ω .
- ✓ Les propriétés thermo-physiques λ et α
- ✓ La condition initial
- ✓ Des conditions aux limites
- ✓ Le terme source $T(z, t)$
- ✓ Les problèmes liés aux méthodes de discrétisation du modèle

3.8 Les avantages de la commande géométrique

- ✓ permet de tirer profit de la théorie de commande de système à paramètre localisés
- ✓ la conception de la loi de commande est facile (calculé basé sur l'indice caractéristique)
- ✓ analyse de stabilité est simplifiée en utilisant la théorie de semi groupe et de Lyapounov

3.9 Conclusion

Ce chapitre a été consacré au calcul de la loi de commande qui nous permet de trouver une solution analytique au problème de la commande à la frontière, la solution trouvée est la transformation de la commande à la frontière en une commande ponctuelle à la frontière ce qui permet de synthétiser un retour d'état de degré fini pour un système à paramètre distribués, où la stratégie de commande est divisée en deux étapes essentielles, trouver la relation entre y_m et y après on impose les consignes pour y .

Les performances de cette commande seront évaluées par simulation dans le chapitre suivant

CHAPITRE 4

***SIMULATION DE LA COMMANDE
GÉOMÉTRIQUE À LA FRONTIÈRE D'UNE
ÉQUATION DE CHALEUR***

4.1 Introduction

Après avoir calculé la loi de la commande géométrique dans le chapitre précédent, et pour des raisons de la simulation, on va utiliser dans ce chapitre l'un des méthodes numérique dans le but d'évaluer les performances de la commande.

4.2 Définition de la méthode des différences finies [15]

L'approche des différences finies est basée sur l'utilisation des séries de Taylor pour obtenir des approximations par différence finies des dériver partielle spatiales.

Ces approximations sont représentées par des schémas différenciés qui peuvent être arrières, avant ou centrées selon la position des points utilisés pour réaliser l'approximation.

La méthode des lignes est devenue l'un des outils standard pour la résolution des problèmes pratiques.

4.3 Méthodes d'approximation aux différences finies

La méthode d'approximation aux différences finies utilise différentes approches pour la discrétisation des EDP et donc leur résolution. Elle s'agit de l'approximation du modèle initial se fait soit de manière totale ou bien partiel. Deux types de discrétisation existent :

- ✓ Discrétisation totale
- ✓ Semi-discrétisation

4.3.1 Discrétisation totale

La discrétisation est totale dans tous les domaines (spatiale et temporel). La solution obtenue est très précise et donc plus proche du système initial.

4.3.2 Semi-discrétisation

En parle la de la méthode des lignes. La discrétisation se fait seulement sur l'un des deux domaines (spatiale ou temporel). On obtient un système d'équations différentielles ordinaire, l'ordre du système augmente avec le nombre de points de discrétisation et devient donc plus proche du système initial. Cette méthode est moins précise que la première mais elle est plus pratique.

4.4 Méthode des lignes

C'est un cas spécial de la méthode des différences finie, elle est plus pertinente et donc plus exacte. Sa simplicité la rend également plus rapide en ce qui concerne le temps de calcul.

4.4.1 Origine et approche de la méthode des lignes [16]

La méthode des lignes se rapporte le plus souvent à la construction ou à l'analyse des méthodes numérique, pour des équations aux dérivées partielles. Son principe est basé sur la discrétisation des dérivées spatiales, et en laisse la variable du temps continue.

Le système devient donc un système aux dérivées ordinaires auxquels une méthode numérique pour des équations aux dérivées ordinaire peut être appliquée.

La méthode des différences finie est aussi utilisée pour la résolution numérique des équations différentielles, et des équations aux dérivées partielles, cette méthode consiste à remplacer les dérivées de l'équation par des approximations aux différences finies.

L'approximation de la solution est obtenue en un nombre de points fini du domaine Ω . Pour cela en fait un maillage uniforme Δz de l'espace Ω .

4.5 Propriétés et utilisation de la méthode des lignes [16]

4.5.1 Propriétés

On a choisi cette méthode pour ces propriétés suivantes

➤ **Efficacité de calcul**

Le caractère semi-analytique de la formulation mène à un algorithme simple et compacte, qui fournit des résultats exacte avec moins d'effort de calcul que d'autre technique.

➤ **Stabilité numérique**

En séparant la discrétisation du temps et de l'espace, il est facile de déterminer la stabilité et la convergence pour un large éventail de problèmes.

➤ **Effort de programmation réduit**

En se servant des solveurs de problèmes d'EDO de pointe, l'effort de programmation peut être considérablement réduit.

➤ **Temps de calcul réduit :**

Puisque seulement une petite quantité de lignes de discrétisation est nécessaire dans le calcul, ce n'est pas nécessaire de résoudre un grand système d'équation, par conséquent la durée de calcul est petite.

4.5.2 Utilisation de la méthode des lignes :

L'utilisation de la méthode des lignes doit satisfaire certaines conditions, on cite les suivantes [16] :

- Division du domaine des solutions en couche.
- Discrétisation de l'équation dans un sens du même rang.
- Transformation pour obtenir des équations ordinaires découplées.
- Transformation et introduction des conditions aux limites.
- Résolution des équations.

4.6 Principe de la méthode des lignes

Le principe de cette méthode est de remplacer les dérivées spatiales dans l'équation aux dérivées partielles par des approximations algébriques.

Le système passe donc d'un système aux dérivées partielles à un système avec seulement des dérivées temporelles c-à-d systèmes ODE, cette transformation est assez exacte donc elle garde les propriétés du système initial.

Une fois l'approximation faite, nous pouvons appliquer n'importe quel algorithme d'intégration numérique pour que les équations aux dérivées ordinaires, munis des conditions aux initiales calculent une solution numérique approximative pour l'EDP.

4.6.1 Application de la méthode des lignes pour la discrétisation de l'équation de chaleur

Considérons le problème monodimensionnel de la conduction de la chaleur dans une barre de longueur l . Le champ de température $T(z, t)$ vérifie l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} + f$$

Où α est la diffusivité thermique.

A cette EDP s'ajoute deux conditions aux limites aux extrémités de la barre $T(l, t) = T_l$ et $T(0, t) = 0$ ainsi qu'une condition initiale $T(z, 0) = T_z$.

L'intervalle $[0,1]$ est discrétisé en $N+1$ nœuds de coordonnées Z_i (i variant de 0 à N) régulièrement espacés. Notons Δz le pas d'espace. Le temps est discrétisé avec un pas constant Δt .

L'équation de chaleur est donnée comme suit

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \quad (4.1)$$

$z \in [0,1], f=0$.

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} T_0(t) = T(0, t) &= 25 \\ T_l(t) = T(l, t) &= 50 \end{aligned} \quad (4.2)$$

et les condition initiale suivante :

$$T(0) = T_0(t) = 0 \quad (4.3)$$

La résolution de cette équation doit satisfaire les conditions aux limites citées au-dessus. Ces conditions correspondent aux frontières de l'intervalle sur lequel l'équation différentielle doit être satisfaite.

Le domaine de l'espace doit être décomposé en N intervalles égaux correspondant au pas de discrétisation $\Delta z = \frac{1}{N}$.

❖ **Discrétisation de la première dérivée :**

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} = \frac{T_{i+1}(t) - T_{i-1}(t)}{2\Delta z} \quad (4.4)$$

❖ **Discrétisation de la deuxième dérivée**

$$\frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} = \frac{T_{i+1}(t) - 2T_i(t) + T_{i-1}(t)}{\Delta z^2} \quad (4.5)$$

D'où l'équation différentielle :

$$\dot{T}_i = \frac{1}{(\Delta z)^2} [T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}] \quad (4.6)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N - 1$$

On aura :

$$\dot{T}_1(t) = \frac{[T_2 - 2T_1 + T_0]}{(\Delta z)^2}$$

$$\dot{T}_2(t) = \frac{[T_3 - 2T_2 + T_1]}{(\Delta z)^2}$$

$$\dot{T}_3(t) = \frac{[T_4 - 2T_3 + T_2]}{(\Delta z)^2}$$

⋮

⋮

$$\dot{T}_{N-1}(t) = \frac{[T_N - 2T_{N-1} + T_{N-2}]}{(\Delta z)^2}$$

$$\dot{T}_N(t) = \frac{[T_{N+1} - 2T_N + T_{N-1}]}{(\Delta z)^2}$$

Cet ensemble d'équations peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{T}_{N-1} \\ \dot{T}_N \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta z^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} T + \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta z^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} T_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{1}{\Delta z^2} \end{bmatrix} T_l$$

On déduit les matrices A, B, E et C et D suivantes :

$$A = \frac{1}{\Delta z^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta z^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{1}{\Delta Z^2} \end{bmatrix}$$

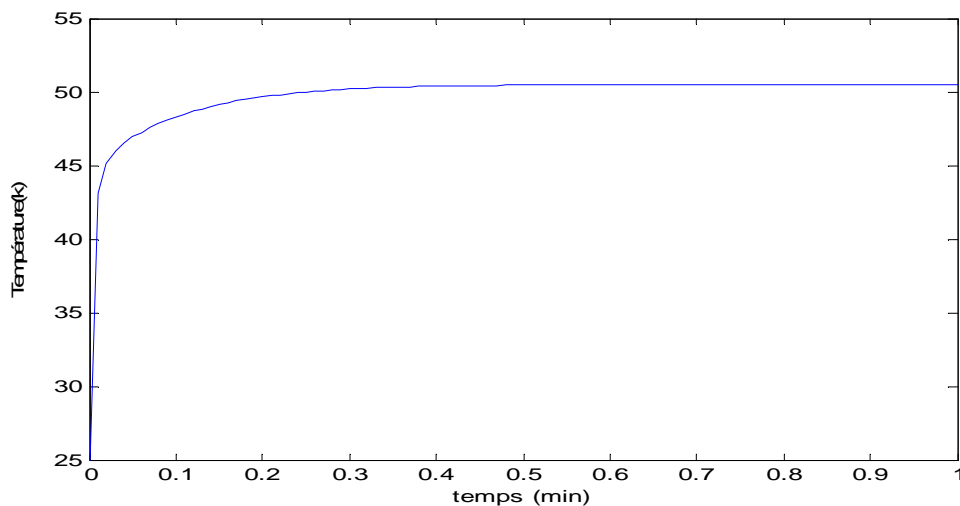
La matrice $C = \frac{1}{\Delta Z^2} [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$ et $D=0$

On remarque que la matrice dynamique est tri diagonale symétrique, la solution peut être calculée par une méthode d'intégration des équations aux dérivées ordinaires.

4.7 Partie pratique du travail

4.7.1 Simulation du modèle en boucle ouverte

La simulation numérique nous permet la simulation de modèle en boucle ouverte on utilisant le solveur ODE45 avec les conditions suivantes $u = 100^\circ C$ et $T_e = 50^\circ C$ cette simulation conduit aux résultats de l'évolution de la température en fonction du temps décrit dans la figure (4.1)



Figure(4.1) : l'évaluation de température en fonction du temps à la frontière

Remarque : d'après le résultat de simulation, on voit que la température évolue comme un système de premier ordre.

L'évolution spatio-temporelle de la température dans la barre est représentée sur la figure (4.2)

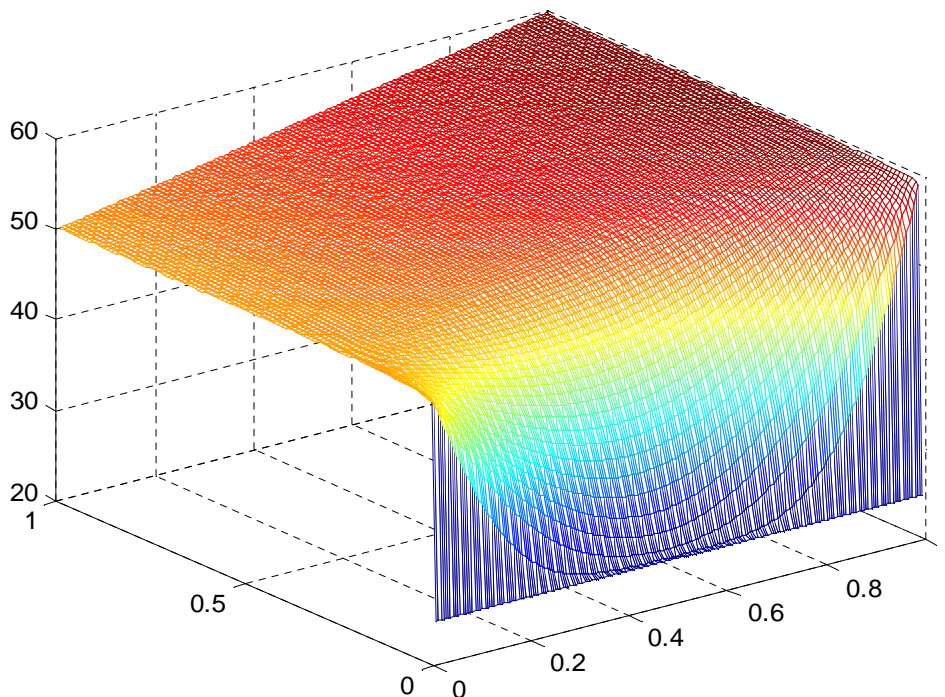


Figure (4.2) : l'évaluation spatio-temporelle

On remarque que la commande à la frontière appliquée sur le système engendre une variation de la température sur l'espace géométrique

On utilise donc le solveur ode 45 pour simuler un nombre de points de discrétisation $N=10$, on obtient la figure (4.3)

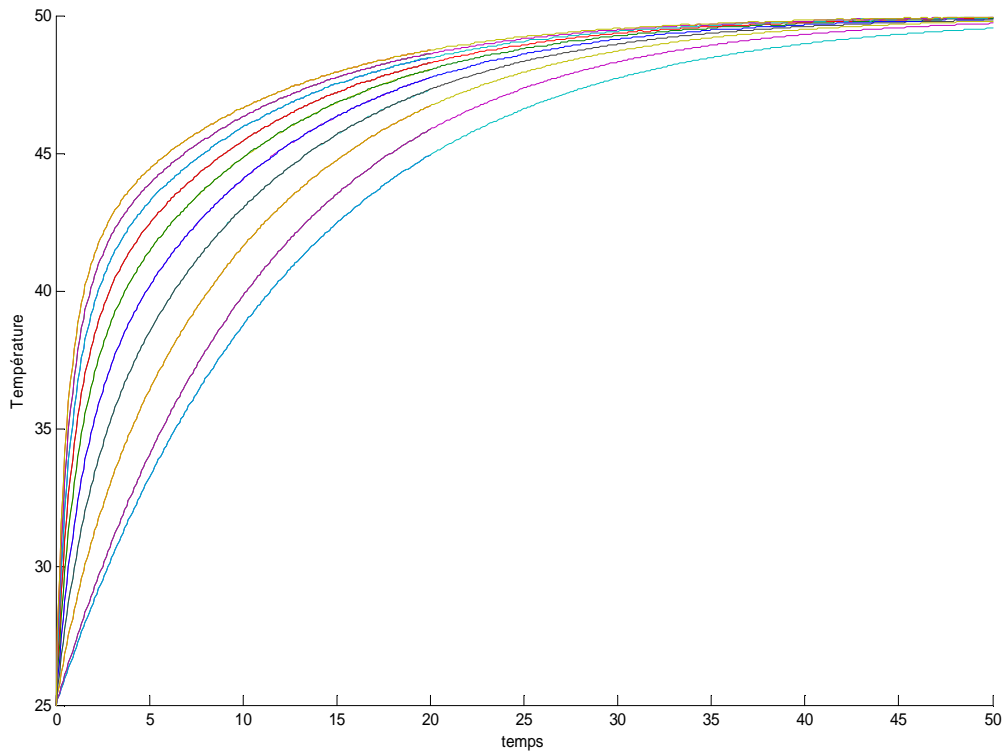


Figure (4.3) : l'évaluation des températures dans différents points ponctuelles

On constate que la température évolue avec une dynamique du premier ordre.

4.7.2. Discrétisation de la loi de commande géométrique

L'approximation des températures aux frontières sont indiquées par la figure (4.4)



Figure (4.4) : Représentation d'application de la méthode de discrétisation sur la barre

Les températures aux frontières peuvent être approximés comme suit

A $z=0$:

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2\Delta z} [-3T(z=0) + 4T(z=dz) - T(z=2dz)] \quad (4.5)$$

Et à $Z:l$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=l} = \frac{1}{2\Delta z} [3T_l - 4T(z-dz) + T(z-2dz)] \quad (4.6)$$

4.7.3 Loi de commande géométrique discrétisé :

$$u = \frac{1}{\alpha\tau} \left[yd - ym - \frac{\tau\alpha l}{2\Delta z} (3T_l - 4T(l-\Delta z) + T(l-2\Delta z)) + \alpha\tau T_l \right] \quad (4.7)$$

Où yd : est une entrée de référence

Et ym :est sortie mesurée

on utilisant un observateur au moyennage spatial $ym = \int_0^l T(z,t) dz = \Delta z \sum_0^{n+1} T(z_i,t)$
= $y(t)$

Et avec des conditions aux limite $T(0,t) = 0^\circ C$ et $T_l = 500^\circ C$

τ : Constante de temps de système

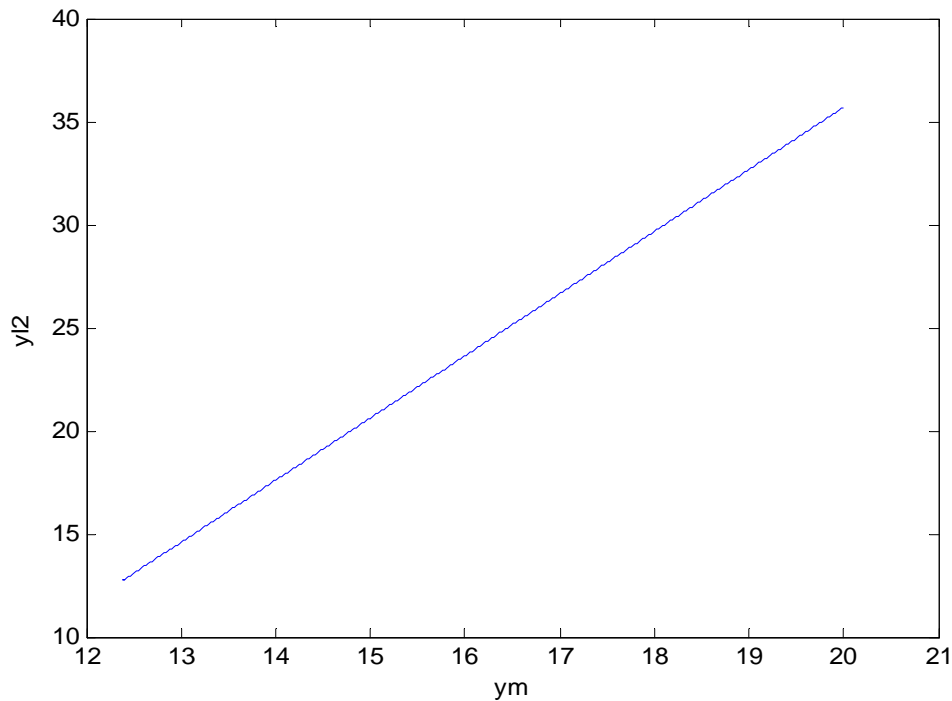
l : Longueur de la barre

α : Coefficient de la diffusivité de la chaleur

4.7.4 Simulation de la commande

On constate qu'il y a une relation linéaire entre la sortie $y(t)$ et la sortie mesurée $ym(t)$, et pour cela on introduit un correcteur qui nous permet de régler la consigne afin d'éliminé l'écart produit entre la sortie et la sortie mesurée.

Cette relation est représentée dans la figure (4.7)



Figure(4.5) : La relation entre la sortie mesurée et la température moyenne

La relation est sous la forme : $yd = f(yl2) = (yl2 + 24.6290)/3.014$

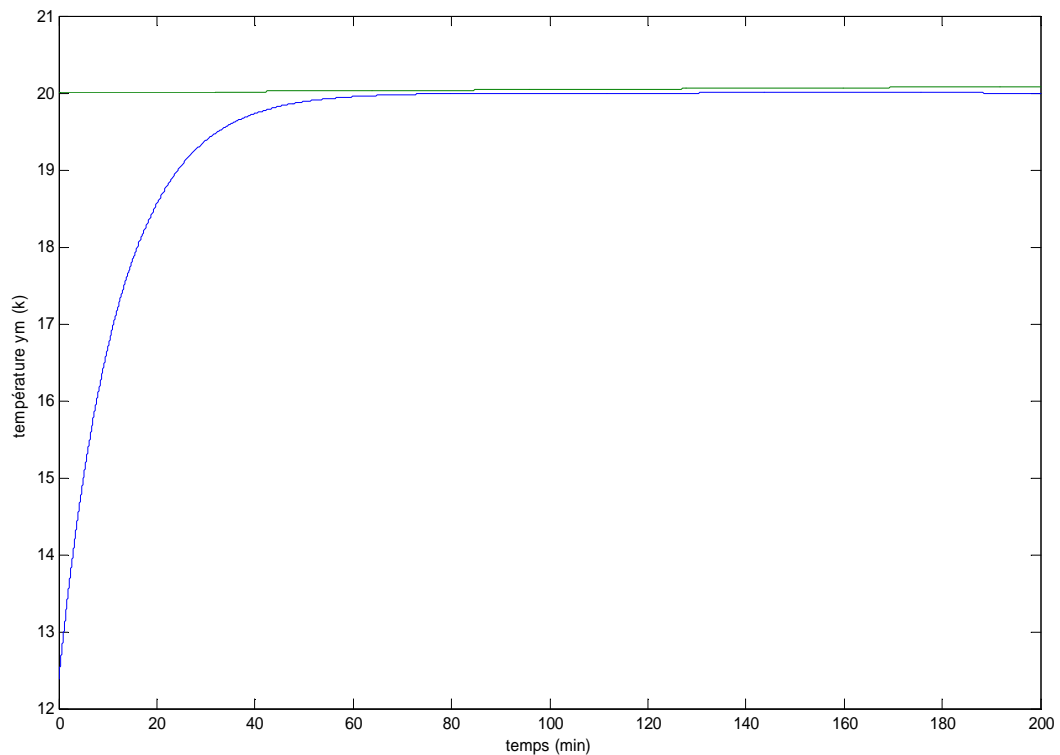
➤ **On applique la commande dans les conditions suivantes :**

$\alpha = 1$ et $l = 1 m$ Et on prend $\tau = 12s$

Pour le test de poursuite de consigne, on a considéré une consigne de référence $yd = 20^\circ C$ à $t = [0 \quad 200]$ (min) et à une perturbation qui soumise à l'extrémité de la barre avec

$$T_l = 50^\circ C$$

Les résultats de simulation sont illustrés par les figures représentées si dessous :

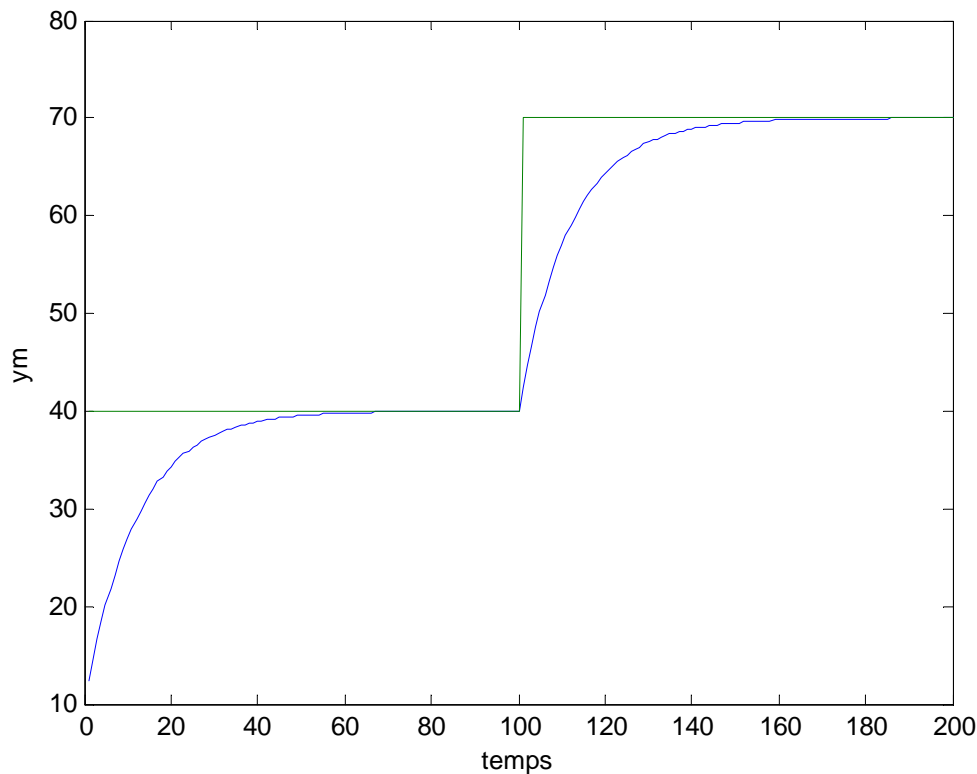


Figure(4.6) : évolution de la température mesurée

On déduit que la consigne est atteinte rapidement, que l'écart statique est très réduit et la commande nous permet de rejeter la perturbation sans problème.

➤ **Changement de consigne :**

On s'intéresse ici au comportement de la température mesurée, lorsqu'on fait un changement de consigne, on simule le système avec une consigne de $40\text{ }^{\circ}\text{C}$ et à l'instant $t=100\text{ s}$ on augmente la consigne jusqu'à $70\text{ }^{\circ}\text{C}$, et les résultats de simulation sont représentés par la figure (4.7).



Figure(4.7) : représentée la sortie mesurée on changement de consigne

On remarque que la température mesurée suit parfaitement les consignes exigées donc on constate que la robustesse de la commande est vérifiée.

4.8 Conclusion :

On a vu dans ce chapitre que la méthode des lignes est facile et efficace pour approximer un système de degré relatif infini à un modèle de degré relatif fini sans influencer sur les caractéristiques réelles du système. Pour le modèle on constate qu'un nombre important de points de discrétisation, augmente l'efficacité de la commande.

Les performances de la commande aux frontières, basée sur le contrôle géométrique, ont été évaluées, par simulation, la commande géométrique réagit convenablement pour assurer la poursuite de consigne.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Conclusion Générale

Conclusion Générale

Le travail réalisé dans ce mémoire s'inscrit, d'un point de vue théorique, dans le domaine du contrôle des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles (EDP). et notamment des systèmes (EDP) de type parabolique.

Après avoir donné une vision sur l'importance des systèmes à paramètre distribuée et défini leurs commandes, et leurs observateurs et leurs différentes classes, on s'est intéressé à une classe particulière à savoir les systèmes paraboliques de premier ordre. avant d'élaborer une loi de commande efficace pour cette classe.

La modélisation de ces systèmes nous donne des modèles d'états dont l'indice caractéristique est de dimension infini, par une transformation de Dirac on arrive à transformer le modèle de degré infini à un système de degré fini ce qui nous permet de calculer la loi de commande géométrique à la frontière. Cette loi consiste à imposer une dynamique entrée-sortie au système en boucle fermée.

Enfin pour des objectifs de simulation on a utilisé une approximation avec la méthode des lignes.

Les résultats de simulation montrent que la commande géométrique est très efficace pour contrôle des EDP parabolique, la synthèse et l'implémentation de commande est très facile et donne des résultats parfaites.

On note enfin que la description mathématique est d'une utilité nécessaire pour la recherche des commandes des systèmes complexes et comme perspective, on propose la construction d'observateur d'état initial à partir d'une mesure.

Annexes

Annexes

Rappel mathématique sur polynômes de l'interpolation du Lagrange :

L'approximation avec les polynômes de Lagrange se fait comme suit :

$$p(z) = \frac{(z - z_i)(z - z_{i+1})}{(z_i - z_{i-1})(z_i - z_{i+1})} T(z_{i-1}, t) + \frac{(z - z_{i-1})(z_i - z_{i+1})}{(z_i - z_{i-1})(z_i - z_{i+1})} T(z_i, t) \\ + \frac{(z_i - z_{i-1})(z - z_i)}{(z_{i+1} - z_{i-1})(z_{i+1} - z_i)} T(z_{i+1}, t)$$

$$T'(z_i, t) = p'(z)|_{z=z_i}$$

Les approximations des températures extrêmes sont :

$$\frac{\partial T}{\partial z}|_{z=0} = \frac{1}{2\Delta z} [-3T(z=0) + 4T(z=dz) - T(z=2dz)]$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}|_{z=l} = \frac{1}{2\Delta z} [3T(l) - 4T(z-dz) + T(z-2dz)]$$

Rappel mathématique sur les développements du Taylor :

Les développements du Taylor des températures sont :

$$T(z_i + 1) = T(z_i + \Delta z) = T(z_i) + \Delta z T'(z_i, t) + \frac{\Delta z^2}{2} T''(z_i, t) \\ T(z_i - 1) = T(z_i - \Delta z) = T(z_i) - \Delta z T'(z_i, t) + \frac{\Delta z^2}{2} T''(z_i, t)$$

D'où :

$$T(z_i - 1) + T(z_i + 1) = 2T(z_i) + \Delta z^2 T''(z_i, t)$$

On aura :

$$T''(z_i, t) = \frac{T(z_i + \Delta z) - 2T(z_i) + T(z_i - \Delta z)}{\Delta z^2}$$

Et :

$$T(z_i - 1) - T(z_i + 1) = 2\Delta z T'(z_i, t)$$

Donc on aura :

$$T'(z_i, t) = \frac{T(z_i - 1) - T(z_i + 1)}{2\Delta z}$$

Bibliographie

bibliographie

- [1] **J.P.BABRY ,W .PELCZEWSKI** ,« Commande optimal des systèmes continus déterministes »»,Edition Masson ,paris ,1985
- [2] **ABDELHAQ EL JAI , MARCEL AMOUROUX** ,« Automatique des systèmes distribués»»,Editions Hermès ,paris 1990.
- [3] **VINCENT GUINOT ,BERNARD CEPPELEARE**«Méthode numériques appliquées (Résolution numérique des équations différentielles de l'ingénieur»», polytech, Montpellier STE 2005/2006.
- [4] **A.RACHID** , «**système de régulation** »»,Edition masson,paris 1996
- [5] **TAOURIT FARIDA** «étude du comportement dynamique et thermique de deux écoulement du fluide dans un échangeur de chaleur(comparaison entre le cas simple et le cas avec ailettes)Master en génie Energétique, Université **Tlemcen,2013**
- [6]**Laurent Davoust** , [cours sur l'équation de chaleur](#),Ecole Nationale pour l'Energie, l'Eau et l'Environnement Grenoble,2008.
- [7]**P.-Y. Lagrée**, Cours Equation de la chaleur, Ecole Professionnel du Grenoble 2009/2010.
- [8] **J.F. Sacadura** "Initiation aux transferts thermiques", **Université Joseph Fourier**, 1993
- [9]**Marguerite GISCLONUMPA**, (cours équation de chaleur) Ecole Normale Supérieure de Lyon,1982.
- [10] **G-Allaire** «analyse numérique et optimisation»»paris, janvier 2005
- [11] **Eric Goncalv**« Résolution numérique des équations d'Euler 1D»». Ecole d'ingénieur Lyon 2015.
- [12] **MOUNIRA SILEM et SADIA BOUZAR**«commande géométrique à la frontière d'un échangeur de chaleur contre-courant» Master automatique, septembre 2014
- [13] **DJENOUNE SAID** « cours d'analyse des systèmes non linéaires» UMMTO ,TIZI OUZOU.
- [14] **AHMED MAIDI** «systèmes à paramétrés distribuées \geq 2008.
- [15]**RISSER Laurent** «Différences finies pour la résolution numérique des équations de la mécanique des fluides \geq 4 février 2006

Bibliographie

- [16] **W.E.SCHISSER**.*The Numérical method of lines* .Academic press,san Diego,1991
- [17] **CLERK KELIAN-DIENY GABRIEL** , transfert thermique ,Kelian –clerc.free.fr
- [18] <http://goodbye-kwh.com/transfert-de-chaleur-par-rayonnement,definition> partie-1/