REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE et POPULAIRE.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.
UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI de TIZI-OUZOU
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

**THESE de DOCTORAT**
en
Mathématiques

Option
**Analyse : Equations aux Dérivées Partielles**

Thème

# MODELISATION DES PHENOMENES DE CONVECTION DE L'ATMOSPHERE

Présentée par
**Lynda TALEB**

Devant le jury

| | | | |
|---|---|---|---|
| M.Ouibrahim Ahmed | Professeur | UMMTO | Président |
| M.Benabidallah Rachid | Maître de Conférences | UMMTO | Rapporteur |
| M.Fujita-Yashima Hisao | Professeur | Université de Turin | Co-Rapporteur |
| M.Aibeche Aissa | Professeur | Université de Setif | Examinateur |
| M.Mokrane Abdelhafid | Professeur | ENS Kouba | Examinateur |

Soutenue le 06/06/2013

*A mes parents,*

*A mon mari,*

*A mon fils Enzo.*

# *Remerciements*

*Cette thèse est l'aboutissement de plusieurs années de travail enrichi d'une expérience professionnelle mais aussi personnelle qui n'aurait pas été réalisée sans le savoir et le soutien de nombreuses personnes. Je tiens ainsi à remercier en quelques lignes tous ceux qui, de près ou de loin ont contribué à ce travail, en espérant n'oublier personne.*
*Mes vifs remerciements, empreints d'une reconnaissance ineffable, vont tout d'abord à mon directeur de thèse Monsieur Rachid Benabidallah maître de conférences à l'UMMTO, ainsi qu'à mon co-directeur de thèse Monsieur Hisao Fujita Yashima, Professeur à l'université de Turin et à l'université de Guelma pour leurs investissements dans ce travail, leurs enseignements, leurs conseils avisés, nos discussions enrichissantes, leur disponibilité et leur écoute au cours de ces années. Qu'ils soient assurés de ma profonde gratitude.*
*Mes remerciements vont aussi à Monsieur Ahmed Ouibrahim, Professeur à l'UMMTO, de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse, aini qu'aux membres du jury Messieurs Aissa Aïbeche, Professeur à l'université de Setif, et*
*Abdelhafid Mokrane, Professeur à l'ENS Kouba, de m'avoir fait l'honneur d'accepter de juger ce travail.*
*Je ne peux taire plus longtemps la gratitude particulière que j'ai envers quelques êtres chers, je pense à ma famille qui m'a toujours aidée et soutenue dans mes choix, notamment mes parents, pour leur réconfort, leur amour, et pour m'avoir offert la possibilité d'arriver jusqu'ici et tellement plus encore ; mon mari pour toute son affection et tout ce que nous partageons, dans les doutes comme dans les joies, et sa présence de tous les instants ; et enfin, mon fils Enzo pour tout ce qu'il m'apporte chaque jour*
*Je conclurai par un petit mot pour mes amis : ceux qui réalisent aussi une thèse et qui, connaissant cette réalité, ont pu me soutenir.*

*Louanges à Allah pour son assistance* $\cdots$

# Table des matières

# Introduction générale

# Introduction générale

Le mouvement d'un gaz visqueux comme l'air de l'atmosphère terrestre peut être décrit par un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires. En effet, si on désigne par $\varrho$ la densité de l'air supposé sec, $v = (v_1, v_2, v_3)$ sa vitesse, $p$ sa pression et par $T$ sa température, le mouvement de l'atmosphère peut être raisonnablement décrit par le système (voir par exemple [9]) d'équations aux dérivées partielles non linéaires suivant

$$\varrho\partial_t v_j + \varrho v \cdot \nabla v_j + \partial_{x_j} p = \tag{0.1}$$

$$\nabla \cdot (\eta(\nabla v_j + \partial_{x_j} v)) - \frac{2}{3}\partial_{x_j}(\eta\nabla \cdot v) + \partial_{x_j}(\zeta\nabla \cdot v) - \varrho\partial_{x_j}\Phi, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho v) = 0 \tag{0.2}$$

$$\varrho C_V(\partial_t T + v \cdot \nabla T) + p\nabla \cdot v = \tag{0.3}$$

$$\nabla \cdot (\kappa\nabla T) + \eta \sum_{j,k=1}^{3} (\partial_{x_k} v_j + \partial_{x_j} v_k - \frac{2}{3}\delta_{jk}\nabla \cdot v)\partial_{x_k} v_j + \zeta(\nabla \cdot v)^2,$$

où $\eta$ et $\zeta$ sont les coefficients de viscosité d'écoulement et volumique de l'air, $\Phi$ est le géopotentiel, $C_V$ est la chaleur spécifique de l'air, $\kappa$ est la thermoconductibilité de l'air et $R$ est la constante universelle des gaz. Enfin la pression $p = p(\varrho, T)$ dans le cas d'un gaz idéal est de la forme

$$p = R\varrho T. \tag{0.4}$$

La quantité de mouvement et la loi de conservation de masse s'expriment par les équations (0.1) et (0.2), tandis que le bilan d'énergie, exprimé en fonction de la température, est décrit par l'équation (0.3).

Dans cette forme assez générale, on trouve de grandes difficultés à analyser un tel système et les résultats connus ne nous donnent pas de déscription satisfaisante. Toutefois, dans les applications aux phénomènes atmosphèriques, la distribution de la pression, de la densité et de la température reste généralement assez proche de celle de l'état hydrostatique qui joue un rôle essentiel dans le problème de stabitilité et d'instabilité de l'atmosphère. En particulier, le phénomène qui est communément appelé *convection* est causé par une distribution proche de l'état hydrostatique. A ce titre, la première partie de cette thèse constitue une contribution à la modélisation mathématique de la convection atmosphérique. Plus précisement, on s'est intéressé au mouvement stationnaire d'un gaz visqueux compressible et calorifère, soumis à la gravitation, enfermé entre deux plans horizontaux en présence d'une distribution non-homogène de la température. Un tel mouvement stationnaire est régi par le système d'équations suivant

$$\varrho(v\cdot\nabla)v-\eta\Delta v-\lambda\nabla(\nabla\cdot v)=-R\nabla(\varrho T)-g\varrho\vec{e}_3, \tag{0.5}$$

$$\nabla\cdot(\varrho v)=0, \tag{0.6}$$

$$C_V\varrho v\cdot\nabla T-\kappa\Delta T+R\varrho T\nabla\cdot v= \eta\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot v\right)\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\zeta(\nabla\cdot v)^2 \tag{0.7}$$

Ce système où, $\lambda=\frac{1}{3}\eta+\zeta$, découle aisément du système (0.1)-(0.3) si les coefficients de viscosité $\eta$ et $\zeta$, la conductibilité thermique $\kappa$ et la chaleur spécifique $C_V$ sont constants.
Notons que même dans ce cas, si la température et la densité varie sensiblement, l'analyse mathématique du système d'équations (0.5)-(0.7) présente de sérieuses difficultés. Dans le but d'obtenir un premier résultat sur la convection, on a, dans un premier temps, considéré le cas d'un mouvement stationnaire périodique dans les directions horizontales. Le problème est ainsi ramené à l'existence d'un mouvement stationnaire dans le domaine $\Omega=\mathbb{T}\times]0,h[$, $\mathbb{T}$ étant le tore bidimensionnel. Quant aux conditions aux limites sur la vitesse et la température, elles seront opportunément définies. On verra dans le premier chapitre comment une distribution non-homogène de la température autour d'une donnée de température sur le fond (asimilé au niveau de la mer) assez grande peut engendrer un mouvement de convection stationnaire dans un état proche de l'état hydrostatique. Cet état hydrostatique est caractérisé par une distribution affine de la température qui décroit avec l'altitude. Ce résultat, mathématiquement traduit par un théorème d'existence d'une solution stationnaire, constitue le résultat principal de la première partie de cette thèse.

L'existence d'une telle solution sera obtenue à l'aide du théorème de Schauder comme point fixe d'un opportun opérateur non-linéaire qui sera défini par la résolution de notre système d'équations convenablement linéarisé. Signalons que, dans [20], les auteurs ont montré l'existence d'une solution stationnaire d'un système analogue avec, au lieu de (0.4) une pression de la forme

$$p = p(\varrho, T) = TG(\varrho) \tag{0.8}$$

où $G$ est une fonction strictement positive croissante, mais avec des données de la température sur la frontière voisine d'une constante. Dans notre cas les données de la température sur la frontière sont proches d'une distribution hydrostatique (pour les problèmes connexes, voir aussi [21]).

Ayant obtenu une solution stationnaire, il est naturel de se poser la question de sa stabilité. A ce propos, rappelons que dans [17], les auteurs ont montré la stabilité de l'état d'équilibre du système d'équations (0.1)-(0.3) dans un domaine borné avec une température au bord constante et une pression du type (0.8). Ce résultat s'étend facilement au cas où la température au bord ne varie pas sensiblement. Mais si celle-ci varie sensiblement, comme dans notre situation, la question de la stabilité présente de sérieuses difficultés mathématiques. On s'est alors intéressé dans la seconde partie de cette thèse, du point de vue stabilité, à l'étude d'un système d'équations dit système à transformation adiabatique. Ce système est assez proche dans sa structure du système d'un gaz visqueux barotropique connu comme équations de Navier-Stockes compressibles. Plus précisement, il s'agit du système d'équations d'un gaz visqueux

$$\varrho \partial_t v + \varrho (v \cdot \nabla) v - \eta \Delta v - \lambda \nabla (\nabla \cdot v) = -R \nabla p - \varrho \nabla \Phi, \tag{0.9}$$

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho v) = 0, \tag{0.10}$$

où la pression

$$p = R \varrho T \tag{0.11}$$

est liée à la transformation adiabatique décrite par l'équation

$$C_V \varrho \big[ \partial_t T + v \cdot \nabla T \big] + R \varrho T \, \nabla \cdot v = 0. \tag{0.12}$$

Le système d'équation (0.9)-(0.12) résulte du système complet (0.1)-(0.3) des équations du mouvement d'un gaz visqueux en négligeant la diffusion de la chaleur et l'augmentation de la température dûe à la friction interne du gaz. Pour la construction de ce système d'équations (0.9)-(0.12) et les relations de la transformation adiabatique, on peut consulter [14], [12].

Notons que l'équation (0.12) jointe à l'équation de continuité (0.10), nous montre que sur les trajectoires la quantité

$$q = \frac{T^{\frac{1}{\gamma}}}{\varrho^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}, \tag{0.13}$$

est invariante. En ce sens, on est dans une situation similaire au cas barotropique où (voir [7]) les auteurs ont montré l'existence d'une distribution de densité minimisant l'énergie potentielle dûe à la pression et la gravitation, en outre, celle-ci est asymptotiquement stable.

Analoguement au cas barotropique (voir [7]), dans la seconde partie de cette thèse, on discutera la question de l'existence d'un mimimun pour la fonctionelle d'énergie potentielle dûe à la gravitation et à la pression, et, dans le cas affirmatif, quel couple de distribution de densité et de température $(\varrho, T)$ le réalise dans une classe de couples admissibles. La question de stablilité au sens de Lyapounov sera également discutée à la fin du second chapitre. La classe de couples admissibles sera construite en exploitant les invariants du système d'équations à tansformation adiabatique. Seulement dans notre cas, contrairement au cas barotropique, la classe des miminisants admissibles n'est pas convexe. Il s'agira alors d'une optimisation non convexe. Ceci, comme on le verra au second chapitre, exigera un raisonnement très élaboré pour démontre l'existence d'un mimimun atteint par un état de repos caratérisé par un couple de distribution de densité et de température. Une caractérisation des distributions de température et de densité atmosphériques que les météorologues communément classifient *stables* ou *instables* sera donnée, en particulier pour la distribution "la plus stable".

# Préliminaires

# Préliminaires

## 0.1 Généralités de l'Atmosphère

L'atmosphère présente des caractéristiques physiques différentes, en particulier de la pression et de la température, mais aussi une composition chimique très complexe. Les différences des caracteristiques physiques observées ont conduit à la division conventionnelle de l'atmosphère : *troposphère, stratosphère, mesosphère* et *thermosphère*. La couche qui se trouve immédiatement au dessus de la surface terrestre est la *troposphère* ; elle est caractérisée par la décroissance presque linéaire de la température suivant la hauteur. Cette décroissance est expliquée par la présence du mouvement vertical de l'air (et donc le mélange de l'air entre les parties supérieure et inférieure de la troposphère) dans lequel la variation de la pression et de la température ne s'écarte pas beaucoup de celle de la transformation adiabatique. La *troposphère* peut être considérée comme le siège des phénomènes météorologiques.

## 0.2 État hydrostatique

Dans l'atmosphère réelle la diffusion de la chaleur et l'effet thermique de la friction interne sont relativement petits, de sorte que le déplacement vertical de l'air entraîne une variation de la pression et de la température de manière assez proche du processus adiabatique. Ce comportement de l'air engendre une distribution de la pression, de la température et de la densité assez proche de la distribution de l'état *hydrostatique*.

En effet, si on néglige la diffusion de la chaleur dûe à la friction interne, l'équation (0.3) se réduit à

$$\varrho C_V(\partial_t T + v \cdot \nabla T) + R\varrho T \nabla \cdot v = 0. \tag{0.14}$$

Si le mouvement de l'air vérifie cette équation, alors le rapport

$$q = \frac{T^{\frac{1}{\gamma}}}{\varrho^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}, \tag{0.15}$$

reste invariant le long de chaque trajectoire définie par le système d'équations différentielles

$$\frac{d}{dt}x(t,x_0) = v(t,x(t,x_0)), \quad x(t_0,x_0) = x_0.$$

Nous rappelons que $\gamma$ est l'exposant adiabatique, dont la valeur approximative est de $1,4$. Ainsi sur chaque trajectoire on a

$$T(t,x) = C\varrho^{\gamma-1} \tag{0.16}$$

où $C$ est une constante. Supposons maintenant que la valeur de la constante $C$ est identique dans une région $\Omega$. Alors dans cette même région, la pression $p$, qui satisfait à l'équation (0.4), est exprimée par

$$p = h\varrho^{\gamma}, \tag{0.17}$$

avec $h = CR$. Considérons à présent le géopotentiel $\Phi$ donné dans l'équation (0.1). Si on substitue dans celle-ci $v$ par $0$ et $p$ par la relation (0.17), on obtient l'équation

$$h\nabla\varrho^{\gamma} = -\varrho\nabla\Phi. \tag{0.18}$$

comme

$$\nabla\varrho^{\gamma} = \nabla\varrho^{(\gamma-1)\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\varrho\nabla\varrho^{\gamma-1},$$

de (0.18) on déduit que

$$\frac{h\gamma}{\gamma-1}\nabla\varrho^{\gamma-1} = -\nabla\Phi$$

ce qui implique que

$$\varrho^{\gamma-1} = \bar{\varrho}_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{h\gamma}(\Phi_0 - \Phi), \tag{0.19}$$

ou

$$\varrho = (\bar{\varrho}_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{h\gamma}(\Phi_0 - \Phi))^{\frac{1}{\gamma-1}}, \tag{0.20}$$

où $\Phi_0 = \Phi(x_0)$ et $\bar{\varrho}_0 = \bar{\varrho}(x_0)$ avec $x_0 \in \Omega$. Dans l'application de la relation (0.20) à l'atmosphère réelle, il est commode de considérer $\Phi_0$ comme étant la valeur de $\Phi$ au

niveau de la mer et $\bar{\varrho}_0$ celle de la densité au même niveau.
Il faut rappeler que du point de vue physique, les relations (0.19) et (0.20) sont valables uniquement si

$$\bar{\varrho}(x_0) > 0, \quad \bar{\varrho}_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{h\gamma}(\Phi_0 - \Phi) > 0.$$

La relation (0.20) signifie que, dans l'approximation "adiabatique", l'atmosphère "au repos" (c'est-à-dire lorsque $v \equiv 0$) aura la distribution de la densité $\varrho$ décrite dans (0.20). En outre, compte tenu de la relation $h = CR$, de (0.16) et de (0.19) on déduit que

$$T = C(\bar{\varrho}_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{h\gamma}(\Phi_0 - \Phi)) = T_0 + \frac{(\gamma-1)}{R\gamma}(\Phi_0 - \Phi) \tag{0.21}$$

où $T_0 = C\bar{\varrho}_0^{\gamma-1}$ est la température au niveau $\{x \in \Omega \mid \Phi(x) = \Phi_0\}$. D'autre part, de (0.17) et (0.20) on déduit que

$$p = h(\bar{\varrho}_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{h\gamma}(\Phi_0 - \Phi))^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = (p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{(\gamma-1)}{h^{\frac{1}{\gamma}}\gamma}(\Phi_0 - \Phi))^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \tag{0.22}$$

où $p_0 = h\bar{\varrho}_0^{\gamma}$ est la pression au niveau $\{x \in \Omega \mid \Phi(x) = \Phi_0\}$. Dans la région $\Omega$ un état hydrostatique est défini par la distribution de la densité $\varrho$, de la température $T$ donnée par (0.20) et (0.21) et de la pression $p$ donnée par (0.22). Notons que dans l'état hydrostatique, la température $T$ descend linéairement par rapport au géopotentiel $\Phi$, ce qui correspond au comportement de la température dans la troposphère.

Chapitre 1

# Mouvement de convection stationnaire

# Mouvement de convection stationnaire

## 1.1 Introduction

Il est bien conu que, dans les applications aux phénomènes atmosphèriques, la distribution de la pression, de la densité et de la température est généralement assez proche de celle de l'état hydrostatique qui joue un rôle essentiel pour le problème de stabitilité et d'instabilité de l'atmosphère. En particulier, le phénomène communément appelé *convection* est causé par une distribution proche de l'état hydrostatique. Le transfert de chaleur dans l'air se fait par un mouvement de convection qui se produit quand une couche d'air, en contact avec une surface chaude, chauffée par la conduction devient plus flottable. En effet, comme la température de l'air diminue avec l'altitude, la différence verticale de température crée un soulévement significatif de l'air qui entraîne avec lui de l'énergie. Comme la limite supérieure de l'atmosphère terrestre réelle ne peut être définie de manière nette et naturelle, pour analyser mathématiquement la convection de l'atmosphère, nous avons considéré le cas du mouvement sationnaire d'un gaz visqueux compressible et calorifère soumis à la gravitation enfermé entre deux plans horizontaux, plus précisément dans le domaine

$$\Omega_\infty = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x_3 < h\}.$$

Un tel mouvement est régi par le système d'équations suivant

$$\varrho(v \cdot \nabla)v - \eta\Delta v - \lambda\nabla(\nabla \cdot v) = -R\nabla(\varrho T) - g\varrho\vec{e}_3, \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot (\varrho v) = 0, \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} C_V\varrho v \cdot \nabla T - \kappa\Delta T + R\varrho T\nabla \cdot v = \\ = \eta \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla \cdot v\Big)\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \zeta(\nabla \cdot v)^2). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ce système où, $\lambda = \frac{1}{3}\eta + \zeta$, découle aisément du système (0.1)-(0.3) si les coéfficients de viscosité $\eta$ et $\zeta$, la conductibilité thermique $\kappa$ et la chaleur spécifique $C_V$ sont constants.
Si la distribution de la température et de la densité varie sensiblement, l'analyse mathématique du système d'équations (1.1)-(1.3) présente dans ce cas de sérieuses difficultés. Pour obtenir un premier résultat sur la convection, dans un premier temps, on s'est inéressé au cas du mouvement stationnaire périodique dans les directions horizontales. On supposera que toutes les fonctions, données ou inconnues, sont périodiques de periode $2\pi$ par rapport aux coordonnées $x_1$ et $x_2$, de sorte que, d'un point vue mathématique, notre domaine se réduit à un domaine relativement compact de $\mathbb{R}^3$

$$\Omega = \mathbb{T}\times ]0, h[$$

où $\mathbb{T}$ est le tore bidimensionnel. On désignera, là où il n'y a pas de risque d'équivoque, par $x'$ le point générique de $\mathbb{T}^2$, de sorte que $x = (x', x_3) \in \Omega$ si $0 < x_3 < h$.

Nous considérons donc dans le domaine $\Omega$ le système (1.1)-(1.3) avec les conditions aux limites

$$v\,|_{x_3=0} = 0, \quad v_3\,|_{x_3=h} = \frac{\partial v_i}{\partial x_3}\,|_{x_3=h} = 0 \quad (i = 1, 2), \tag{1.4}$$

$$T(x', 0) = T_0(x') = \bar{T}_0 + \varepsilon(x'), \qquad T(x', h) = \bar{T}_0 - \frac{gh}{R + C_V}, \tag{1.5}$$

où $\varepsilon(x')$ est une petite perturbation assez régulière définie sur $\mathbb{R}^2$. Notre domaine étant borné, le problème (1.1)-(1.5) doit être complété par la donnée de la masse totale finie

$$M_\varrho = \int_\Omega \varrho(x)dx. \tag{1.6}$$

Dans toute la suite de ce chapitre, nous supposerons que $\bar{T}_0$ et $M_\varrho$ sont assez grand et la perturbation $\varepsilon$ assez petite. Autrement dit

$$\bar{T}_0 \geq A_0, \quad M_\varrho \geq A_0 \quad \text{et} \quad \|\varepsilon\|_{H^3(\mathbb{T}^2)} \leq \varepsilon_0. \tag{1.7}$$

Sous l'hypothèse (1.7), on verra comment une distribution non-homogène de la température autour de $\bar{T}_0$ peut engendrer un mouvement de convection stationnaire dans un état proche de l'état hydrostatique relatif à $\bar{T}_0$. Ce résultat qui constitue la partie principale de ce chapitre sera traduit par un théorème d'existence d'une solution stationnaire du problème (1.1)-(1.6).

## 1.2 Résultat principal

On cherchera une solution $(v, T, \varrho)$ du problème (1.1)-(1.6) dans un voisinage de l'état hydrostatique $(0, \bar{T}_{hs}, \bar{\varrho}_{hs})$ ou, d'un point de vue technique, dans un état proche de celui-ci. Dans notre cas, l'état hydrostatique est caractérisé par la distribution de la densité $\bar{\varrho}_{hs}(x_3)$ et de la température $\bar{T}_{hs}(x_3)$ données par

$$\bar{\varrho}_{hs}(x_3) = \bar{\varrho}_{hs}(0)(1 - \frac{gx_3}{\bar{T}_0(R + C_V)})^{\frac{C_V}{R}}, \quad \bar{T}_{hs}(x_3) = \bar{T}_0 - \frac{gx_3}{(R + C_V)} \tag{1.8}$$

où $\bar{\varrho}_{hs}(0)$ est une constante d'intégration qui sera déterminée par la condition

$$\int_\Omega \bar{\varrho}_{hs}(x)dx = M_\varrho.$$

les relations (1.8) sont étroitement liées à la transformation adiabatique. En effet, si on introduit l'exposant de l'adiabatique

$$\gamma = \frac{R}{C_V} + 1 = \frac{C_P}{C_V}, \tag{1.9}$$

où $C_P$ est la capacité calorifique à pression constante, les fonctions $\bar{\varrho}(x_3)$ et $\bar{T}_{hs}(x_3)$ s'écrivent

$$\bar{\varrho}_{hs}(x_3) = \bar{\varrho}_{hs}(0)(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma R\bar{T}_0}gx_3)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad \bar{T}_{hs}(x_3) = \bar{T}_0 - \frac{\gamma - 1}{\gamma R}gx_3. \tag{1.10}$$

Notons que ces relations découlent facilement de (0.20) et (0.16) dans le cas particulier où $\Phi(x) = gx_3$. Il est bien connu que la valeur de $\gamma$ est $\frac{5}{3}$ pour les gaz monoatomiques, $\frac{7}{5}$ pour les gaz biatomiques, $\frac{4}{3}$ pour les gaz triatomiques. Pour les relations entre $R$, $C_P$, $C_V$ et $\gamma$ et la transformation adiabatique, voir par exemple [12]. On supposera que

$$1 < \gamma < 2.$$

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant.

**Théorème 1.2.1.** *Sous l'hypothèse (1.7), le problème (1.1)-(1.6) admet au moins une solution*

$$(v, T, \varrho) \in H^3(\Omega) \times H^2(\Omega) \times H^2(\Omega).$$

## 1.3 Préliminaires à la démonstration.

On cherchera une solution $(v, T, \varrho)$ du problème (1.1)-(1.6) dans un voisinage de $(0, \bar{T}, \bar{\varrho})$ où $\bar{T}$ et $\bar{\varrho}$ sont des fonctions de référence définies à leur tour dans un voisinage de $\bar{T}_{hs}$ et de $\bar{\varrho}_{hs}$. On commence par définir sur $\Omega$ les fonctions de référence $\bar{T}$ et $\bar{\varrho}$. On pose alors

$$\bar{T}(x', x_3) = \bar{T}_{hs}(x_3) + (1 - \frac{x_3}{h})\varepsilon(x'), \tag{1.11}$$

$$\bar{\varrho}(x', x_3) = C_{M_\varrho} \frac{(\bar{T}_{hs}(x_3))^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\bar{T}(x', x_3)}, \tag{1.12}$$

où

$$C_{M_\varrho} = M_\varrho \Big[ \int_\Omega \frac{(\bar{T}_{hs}(x_3))^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\bar{T}(x', x_3)} dx \Big]^{-1}. \tag{1.13}$$

Comme on peut le constater facilement par des caluls élémentaires, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(R\bar{\varrho}\bar{T}) = 0 \quad i = 1, 2, \quad -\frac{\partial}{\partial x_3}(R\bar{\varrho}\bar{T}) - \bar{\varrho}g = g\bar{\varrho}\frac{(1 - \frac{x_3}{h})\varepsilon(x')}{\bar{T}_{hs}(x_3)}, \tag{1.14}$$

$$C_V\bar{\varrho}\nabla\bar{T} - R\bar{T}\nabla\bar{\varrho} = (R + C_V)\bar{\varrho}\nabla((1 - \frac{x_3}{h})\varepsilon) + \vec{e}_3\frac{g\bar{\varrho}}{\bar{T}_{hs}}(1 - \frac{x_3}{h})\varepsilon. \tag{1.15}$$

Posons maintenant

$$\vartheta(x) = T(x) - \bar{T}(x), \quad \sigma(x) = \varrho(x) - \bar{\varrho}(x). \tag{1.16}$$

On remarque que, en vertu de (1.2) et de (1.15), on a

$$\begin{aligned} C_V\varrho v \cdot \nabla T + R\varrho T \cdot v &= v \cdot [C_V\varrho\nabla T - RT\nabla\varrho] \\ &= (R + C_V)\bar{\varrho}v \cdot \nabla((1 - \frac{x_3}{h})\varepsilon) + v_3\frac{g\bar{\varrho}}{\bar{T}_{hs}}(1 - \frac{x_3}{h})\varepsilon \\ &+ v \cdot (C_V[\sigma\nabla\bar{T} + \varrho\nabla\vartheta] - R[\vartheta\nabla\bar{\varrho} + \bar{T}\nabla\sigma + \vartheta\nabla\sigma]). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Compte tenu de (1.14) et de (1.17), le système d'équations (1.1)-(1.3) pour les inconnues $(v, T, \varrho)$ se transforme en le système d'équations pour les inconnues $(v, \vartheta, \sigma)$ suivant

$$-\eta\Delta v - \lambda\nabla(\nabla \cdot v) + R\nabla(\sigma\bar{T} + \bar{\varrho}\vartheta) + g\sigma\vec{e}_3 = F(v, \vartheta, \sigma), \tag{1.18}$$

$$\nabla \cdot (\sigma v) = -\nabla \cdot (\bar{\varrho}v), \tag{1.19}$$

$$-\kappa\Delta\vartheta = G(v, \vartheta, \sigma) \tag{1.20}$$

où

$$(1.21)\quad F(v,\vartheta,\sigma) = -(\bar\varrho+\sigma)(v\cdot\nabla)v - R\nabla(\sigma\vartheta) + g\frac{\bar\varrho}{\bar T_{hs}(x_3)}(1-\frac{x_3}{h})\varepsilon(x')\vec{e_3},$$

$$(1.22)\qquad G(v,\vartheta,\sigma) = \eta\sum_{i,j=1}^{3}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot v)\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\zeta(\nabla\cdot v)^2)$$
$$+\kappa\Delta((1-\frac{x_3}{h})\varepsilon) - v_3 g\frac{\bar\varrho}{\bar T_{hs}(x_3)}(1-\frac{x_3}{h})\varepsilon(x')$$
$$+ v\cdot(R[\vartheta\nabla\bar\varrho+\bar T\nabla\sigma+\vartheta\nabla\sigma] - C_V[\sigma\nabla\bar T+\bar\varrho\nabla\vartheta+\sigma\nabla\vartheta]).$$

D'autre part, il est clair que $\vartheta$ et $\sigma$ doivent satisfaire aux conditions

$$(1.23)\qquad \vartheta|_{x_3=0} = \vartheta|_{x_3=h} = 0,$$

$$(1.24)\qquad \int_\Omega \sigma(x)dx = 0$$

tandis que $v$ doit satisfaire à la condition (1.4). Ainsi, on est amené à chercher une solution

$$(v,T,\varrho) = (v,\bar T+\vartheta,\bar\varrho+\sigma)$$

où $(v,\vartheta,\sigma)$ est une solution du système d'équations (1.18)-(1.20) avec les conditions (1.4), (1.23) et (1.24).

En s'inspirant des techniques développées dans l'étude des équations d'un gaz visqueux, en particulier celles du travail [20], on montre l'existence d'une solution du problème (1.18)-(1.20), avec les conditions (1.4), (1.23) et (1.24) et donc du problème (1.1)-(1.6). Dans [20], les auteurs ont montré l'existence d'une solution stationnaire d'un système analogue à (1.18)-(1.20) avec, au lieu de (0.4), une pression $p = p(\varrho, T)$ assez générale, mais avec des données de la température sur la frontière proches d'une constante. Dans notre cas les données de la température sur la frontière sont proches d'une distribution hydrostatique (pour les problèmes connexes, voir aussi [21]). L'existence d'une solution stationnaire de notre problème sera obtenue comme point fixe d'un opportun opérateur non-linéaire $\mathcal{O}$ qui sera défini par la résolution d'un système d'équations linéaires.

## 1.4 Opérateur $\mathcal{O}$

Dans toute la suite, on notera $L^2$ et $H^m$ au lieu de $L^2(\Omega)$ et $H^m(\Omega)$ et $\|\cdot\|_{L^2}$ et $\|\cdot\|_{H^m}$ au lieu de $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$. Pour définir l'opérateur $\mathcal{O}$ on commence par introduire l' espace fonctionnel

$$X = \{u = (v, \vartheta, \sigma) \in H^3 \times H^2 \times H^2 : u \text{ satisfait } (1.4), (1.23), (1.24)\}. \tag{1.25}$$

On munira l'espace $X$ de la norme naturelle de $H^3 \times H^2 \times H^2$ ou d'une norme équivalente à celle-ci et on notera $\|\cdot\|_X$ sa norme. En outre, on désignera par $X_0$ l'espace $X$ muni de la norme de $H^2 \times H^1 \times H^1$ et par $\|\cdot\|_{X_0}$ sa norme. Notons que tout borné de $X$ est relativement compact dans $X_0$.

Soit maintenant $u' = (v', \vartheta', \sigma') \in X$ donné et $k$ un nombre positif. On considére alors dans $\Omega$ le système linéaire suivant

$$-\kappa\Delta\vartheta = G' \tag{1.26}$$

$$-\mu\Delta v - \lambda\nabla\nabla\cdot v = -R\nabla(\bar{T}\sigma') - R\nabla(\bar{\varrho}\vartheta) - g\sigma'\vec{e_3} + F', \tag{1.27}$$

$$k(\sigma - \sigma') + \nabla\cdot(\sigma v) = -\nabla\cdot(\bar{\varrho}v), \tag{1.28}$$

avec les conditions aux limites (1.4), (1.23) et la condition (1.24). Quant à $F'$ et $G'$ ils sont définis (voir (1.21) et (1.22)) par

$$F' = F(u'), \quad G' = G(u'), \quad u' = (v', \vartheta', \sigma') \in X. \tag{1.29}$$

On a alors

**Lemme 1.4.1.** *Soit $u' = (v', \vartheta', \sigma') \in X$. Si le nombre positif $k$ est suffisamment grand, alors le système d'équations (1.26)-(1.28) avec les conditions aux limites (1.4), (1.23) et (1.24) admet une et une seule solution $u = (v, \vartheta, \sigma) \in X$.*

**Démonstration.** L'existence et l'unicité de la solution $(v, \vartheta) \in H^3 \times H^2$ du système d'équations (1.26)-(1.27) avec les conditions aux limites (1.4) et (1.23) résulte de la théorie classique des systèmes elliptiques. En outre, on a

$$\|\vartheta\|_{H^2}^2 \le \|G'\|_{L^2}^2, \tag{1.30}$$

$$\|v\|_{H^3}^2 \le c_\Omega(\|\sigma'\|_{H^2}^2 + \|\vartheta\|_{H^2}^2 + \|F'\|_{H^1}). \tag{1.31}$$

Quant à la solution $\sigma$ dans $H^2$ de l'équation (1.28) et son estimation

$$k\,\|\sigma\|_{H^2}^2 \le c_\Omega\,\|v\|_{H^3}\,\|\sigma\|_{H^2}^2 + c_\Omega(\|\sigma'\|_{H^2}^2 + \|v\|_{H^3}^2), \tag{1.32}$$

on consultera par exemple [1]. $\square$

Grâce au lemme 1.4.1, on peut donc définir univoquement l'opérateur non linéaire

$$\mathcal{O} : X \to X, \quad \mathcal{O}(u') = u \tag{1.33}$$

où $u = (v, \vartheta, \sigma)$ est l'unique solution du système déquations linéaires (1.26)-(1.28) garantie par le lemme 1.4.1. Comme on l'a déjà noté, l'existence d'une solution dans $X$ du sytème (1.18)-(1.20), avec les conditions (1.4), (1.23) et (1.24) sera obtenue à l'aide du théorème de Schauder comme point fixe de l'opérateur $\mathcal{O}$. On commence alors par montrer la continuité de $\mathcal{O}$. En effet, on a le

**Lemme 1.4.2.** *l'opérateur non linéaire $\mathcal{O}$ est continue de $X_0$ dans lui même.*

**Démonstration.** Notons d'abord que $\mathcal{O}$ transforment les bornés de $X$ en des bornés de $X$. En effet, compte tenu des expressions (1.29) (voir aussi (1.21) et (1.22)) de $F'$ et $G'$, il n'est pas difficile de voir que, pour tout $u' = (v', \vartheta', \sigma') \in X$,

$$\|F'\|_{H^1} \leq c_1 \|v'\|^2_{H^2} (1 + \|\sigma'\|_{H^2}) + c_1 \|\sigma'\|_{H^2} \|\vartheta'\|_{H^2} + c_1 \|\delta\|_{H^1(\mathbb{T}^2)}, \tag{1.34}$$

$$\begin{aligned} \|G'\|_{L^2} \leq\ & c_2(\|v'\|^2_{H^2} + \|\vartheta'\|^2_{H^2} + \|\sigma'\|^2_{H^2(\Omega)}) \\ & + c_2 \|\vartheta'\|_{H^2} \|v'\|_{H^2} \|\sigma'\|_{H^2} + c_2(1 + \|v'\|_{H^2}) \|\delta\|_{H^2(\mathbb{T}^2)} \end{aligned} \tag{1.35}$$

avec deux constantes positives $c_1$ et $c_2$. Soit alors un borné $B'$ de $X$. Compte tenu des inégalités (1.30)- (1.32), (1.34) et (1.35), Si $k$ est assez grand, on voit facilement que $\mathcal{O}(B')$ demeure dans un borné de $X$.

Ceci étant, soit $B'$ un borné de $X$, et soit pour $u'_i = (v'_i, \vartheta'_i, \sigma'_i) \in B'$ $(i = 1, 2)$. Donc $\mathcal{O}(u'_i) = u_i = (v_i, \vartheta_i, \sigma_i)$ appartient à un borné $B$ de $X$. On pose

$$u' = u'_1 - u'_2 = (v', \vartheta', \sigma'), \quad u = \mathcal{O}(u'_1) - \mathcal{O}(u'_2) = u_1 - u_2 = (v, \vartheta, \sigma). \tag{1.36}$$

Compte tenu de la définition (voir (1.33)) de l'opérateur $\mathcal{O}$, on a

$$-\kappa\Delta\vartheta = G(u'_1) - G(u'_2) \tag{1.37}$$

$$-\mu\Delta v - \lambda\nabla\nabla \cdot v = -R\nabla(\bar{T}\sigma') - R\nabla(\bar{\varrho}\vartheta) - g\sigma'\vec{e_3} + F(u'_1) - F(u'_2), \tag{1.38}$$

$$k(\sigma - \sigma') + \nabla \cdot (\sigma v) = -\nabla \cdot (\sigma_2 v) - \nabla \cdot (\bar{\varrho} v). \tag{1.39}$$

Si on rappelle (voir (1.29), (1.21) et (1.22)) les définitions de $F'$ et $G'$, il est facile de voir que

$$\|G(u'_1) - G(u'_2)\|_{H^{-1}} + \|F(U'_1) - F(U'_2)\|_{L^2} \leq c'(\|v'\|^2_{H^2} + \|\vartheta'\|^2_{H^1} + \|\sigma'\|^2_{H^1})$$

avec une constante positive $c' = c(B')$. Si on estime maintenant les seconds membres des deux premières équations elliptiques dans $H^{-1}$ et $L^2$ respectivement, compte tenu de cette inégalité, on obtient

$$\|\vartheta\|^2_{H^1} + \|v\|^2_{H^2} \leq c'(\|v'\|^2_{H^2} + \|\vartheta'\|^2_{H^1} + \|\sigma'\|^2_{H^1}). \tag{1.40}$$

Quant à l'estimation dans $H^1$ de la solution $\sigma$, on commence par multiplier l'équation (1.39) par $\sigma$ et on intégre sur $\Omega$. Compte tenu de la relation

$$\int_\Omega \nabla \cdot (\sigma v)\sigma = \frac{1}{2}\int_\Omega |\sigma|^2 \nabla \cdot v dx \leq c_\Omega \|v\|_{H^3} \|\sigma\|^2_{L^2},$$

on obtient facilement

$$k\|\sigma\|^2_{L^2} \leq c_\Omega \|v\|_{H^3} \|\sigma\|^2_{L^2} + k\|\sigma'\|^2_{L^2} + c_\Omega \|v\|^2_{H^1}(1 + \|\sigma_2\|^2_{H^1}). \tag{1.41}$$

Par ailleurs, grâce à la relation

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla\nabla \cdot (\sigma v)\nabla\sigma = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\sigma|^2 \nabla \cdot v dx &+ \int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla\sigma)\nabla\sigma dx \\ + \int_\Omega \sigma(\nabla(\nabla \cdot v))\nabla\sigma dx,&\end{aligned}$$

si on applique à (1.39) l'opérateur gradient et on la multiplie par $\nabla\sigma$, en intégrant sur $\Omega$, on obtient

$$k\|\nabla\sigma\|^2_{L^2} \leq c_\Omega \|v\|_{H^3} \|\nabla\sigma\|^2_{L^2} + k\|\sigma'\|^2_{H^1} + c_\Omega(\|\sigma_2\|^2_{H^2} + 1)\|v\|^2_{H^2}. \tag{1.42}$$

Compte tenu du fait que les solutions $(v_i, \vartheta_i, \sigma_i)$ $(i = 1, 2)$ demeurent dans un borné de $X$, si $k$ est assez grand, des deux dernières inégalités jointes à (1.40), on tire facilement

$$\|\sigma\|^2_{H^1} \leq c'(\|v'\|^2_{H^2} + \|\vartheta'\|^2_{H^1} + \|\sigma'\|^2_{H^1}). \tag{1.43}$$

Donc, de (1.40) et (1.43), il s'ensuit que

$$\|v\|^2_{H^2} + \|\vartheta\|^2_{H^1} + \|\sigma\|^2_{H^1} \leq c'(\|v'\|^2_{H^2} + \|\vartheta'\|^2_{H^1} + \|\sigma'\|^2_{H^1}),$$

et, si on rappelle la définition (1.33) de $\mathcal{O}$ (voir aussi (1.36)), de l'inégalité précédente, il vient

$$\|\mathcal{O}(u'_1) - \mathcal{O}(u'_2)\|_{X_0} \leq c\|u'_1 - u'_2\|_{X_0}, \tag{1.44}$$

ce qui traduit la continuité de l'opérateur $\mathcal{O}$. $\square$

**Remarque 1.4.1.** *Compte tenu du lemme 1.4.2 et du fait que tout borné de $X$ est relativement compact dans $X_0$, pour démontrer que $\mathcal{O}$ possède un point fixe, il* *nous reste seulement, selon le théorème de Schauder, à montrer que $\mathcal{O}$ envoie un convexe fermé borné $B$ de $X$ dans lui même. Pour cela, on aura besoin d'estimations adéquates de la solution $(v, \vartheta, \sigma)$. Nous en déduirons de ces estimations qu'il existe en effet un fermé borné convexe $B$ de $X$ tel que $\mathcal{O}(B) \subset B$. Ainsi $\mathcal{O}$ possède un point fixe $u = (v, \vartheta, \sigma) \in B$ qui, selon la définition (voir (1.33)) de l'opérateur $\mathcal{O}$, est solution du système d'équations (1.18)- (1.20) avec les conditions (1.4), (1.23) et la condition (1.24). Donc (voir (1.16)), $(v, T, \varrho) = (v, \bar{T} + \vartheta, \bar{T} + \sigma)$ est solution du problème (1.1-(1.6).*

Le point crucial est d'obtenir ce type d'estimations sur $(v, \vartheta, \sigma)$ qui nous permettront d'avoir en effet $\mathcal{O}(B) \subset B$. On commencera ici par donner l'estimation de $\vartheta$, en renvoyant à la section suivante les estimations de $v$ et de $\sigma$ lesquelles nécessistent un traitement plus élaboré. On a alors

**Lemme 1.4.3.** *Soit $u' = (v', \vartheta', \sigma') \in X$. Alors la solution de l'équation (1.26) $\vartheta \in H^2(\Omega)$ avec la condition (1.23) satisfait l'inégalité*

$$\begin{aligned} \|\vartheta\|_{H^2} &\leq c_1(\|v'\|_{H^2}^2 + \|\vartheta'\|_{H^2}^2 + \|\sigma'\|_{H^2}^2) \\ &+ c_1 \|\vartheta'\|_{H^2} \|v'\|_{H^2} \|\sigma'\|_{H^2} + c_1(1 + \|v'\|_{H^2}) \|\delta\|_{H^2(\mathbb{T}^2)} \end{aligned} \tag{1.45}$$

*avec une constante positive $c_1$.*

**Démonstration.** Ce lemme résulte directement de l'inégalité (1.35) et de la théorie classique des équations du type elliptique (voir par exemple [13], [19]). □

## 1.5 Estimations de la solution v, $\sigma$ des équations linéarisées.

Ce paragraphe est consacré aux estimations des solutions $v$ et $\sigma$ des équations 1.27 et 1.28. Ces estimations obtenues dans les lemmes 1.5.1-1.5.9 et qui sont essentielles pour la démonstration de notre résultat, seront obtenues en s'inspirant des idées developpées dans [10] et [20]. Nous rappelons ici que les lemmes 1.5.1-1.5.9 qui suivent seront démontrés sous l'hypothèse (1.7). Quant au nombre positif $k$ qui figure dans l'equation (1.28) il peut, comme dans le lemme 1.4.1, être choisi arbitrairement grand. Il nous conviendra de poser

$$k = \frac{\bar{\kappa} k_1}{2}, \quad k_1 = \frac{R}{\eta + \lambda} \bar{M} \big(\bar{T}_0 - \frac{\gamma - 1}{\gamma R} g h\big)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}. \tag{1.46}$$

où $\bar{\kappa}$ est un nombre opportunément arbitraire, vérifiant en particulier

$$\bar{\kappa} \geq 16\Big(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma R \bar{T}_0} gh\Big)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \tag{1.47}$$

Dans les énoncés des lemmes (1.5.1)-(1.5.9) on désignera par $C'_k$ $(k = 1, \cdots 9)$ les constantes qui dépendent de $\Omega$ mais ni de $\bar{T}_0$ ni $M_\varrho$ (pourvu que celles -ci soient plus grande qu'une certaine constante) et par $\tilde{C}_k$ $(k = 1, \cdots 9)$ les constantes qui dépendent de $\Omega$, de $\bar{T}_0$ et de $M_\varrho$. Par ailleurs, dans la démonstration de chaque lemme, s'il n'y a pas lieu de les préciser, on désignera par $C_\Omega$ les constantes qui ne dépendent ni de $\bar{T}_0$ ni $M_\varrho$ et par $\tilde{C}(\bar{\varrho})$ celles qui dépendent de $\bar{T}_0$ et/ou $M_\varrho$. Finalement pour simplifier la notation on notera $\|\cdot\|_{L^2}$ et $\|\cdot\|_{H^m}$ $(m = 1, 2, 3)$ au lieu de $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$.

**Lemme 1.5.1.** *Soient $u' = (v', \vartheta', \sigma') \in X$ donné et $u = (v, \vartheta, \sigma) \in X$ la solution du système d'équations (1.26)-(1.28) garantie par le lemme 1.4.1. Alors on a*

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{R} \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{R} \|\nabla \cdot v\|_{L^2}^2 + k \left\| \left(\bar{T}\bar{\varrho}^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \sigma \right\|_{L^2}^2 &\leq k \left\| \left(\bar{T}\bar{\varrho}^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \sigma' \right\|_{L^2}^2 \\ - C'_1 \bar{T}_0^2 \|\sigma'\|_{L^2}^2 + C'_1 (\|F'\|_{L^2}^2 &+ \|v\|_{H^3} \|\sigma\|_{L^2}^2) + \tilde{C}(\bar{\varrho}) \|\vartheta\|_{H^1}^2 \end{aligned} \tag{1.48}$$

*avec $k$ satisfaisant à (1.46).*

**Démonstration.** Notons d'abord que

$$\begin{aligned} &- \int_\Omega [v \nabla(\bar{T}\sigma') + \frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}} \sigma \nabla \cdot (\bar{\varrho} v)] dx \\ = &- \int_\Omega \frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}} (\sigma - \sigma') \nabla \cdot (\bar{\varrho} v) dx - \int_\Omega \bar{T} (\nabla \log \bar{\varrho} \cdot v) \sigma' dx. \end{aligned}$$

Si on multiplie maintenant l'équation (1.27) par $R^{-1} v$ et l'équation (1.28) par $\bar{T}\bar{\varrho}^{-1}\sigma$ et on les intégre sur $\Omega$, on obtient compte tenu de la relation ci-dessus

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{R} \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{R} \|\nabla \cdot v\|_{L^2}^2 + \frac{k}{2} \left\| \left(\bar{T}\bar{\varrho}^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} (\sigma - \sigma') \right\|_{L^2}^2 \\ + \frac{k}{2} \left\| \left(\bar{T}\bar{\varrho}^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \sigma \right\|_{L^2}^2 = \frac{k}{2} \left\| \left(\bar{T}\bar{\varrho}^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \sigma' \right\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{4} I_i. \end{aligned} \tag{1.49}$$

où

$$I_1 = -\int_\Omega \frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}(\sigma - \sigma')\nabla\cdot(\bar{\varrho}v)dx,$$
$$I_2 = -\frac{g}{R}\int_\Omega (\overrightarrow{e_3}\cdot v)\sigma' dx - \int_\Omega \bar{T}(\nabla \log\bar{\varrho}\cdot v)\sigma' dx$$
$$I_3 = \frac{1}{R}\int_\Omega F'\cdot v dx + \int_\Omega \bar{\varrho}\vartheta\nabla\cdot v dx, \quad I_4 = -\int_\Omega \frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}\sigma\nabla(v\sigma)dx.$$

En rappelant les expressions de $\bar{T}$ et de $\bar{\varrho}$, grâce à (1.7), on peut facilement voir que $\|\nabla \log\bar{\varrho}\|_{L^\infty}$ est assez petite de sorte que

$$\|v\cdot\nabla\log\bar{\varrho}\|_{L^2}^2 \le \|v\|_{L^2}^2\,, \tag{1.50}$$

donc, compte tenu de (1.46) et de (1.47), on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &\le \frac{k}{2}\left\|(\frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}})^{\frac{1}{2}}(\sigma-\sigma')\right\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\bar{\kappa}k_1}\left\|\bar{T}\bar{\varrho}\right\|_{L^\infty}(\|\nabla\cdot v\|_{L^2}^2 + \|v\cdot\nabla\log\bar{\varrho})\|_{L^2}^2) \\ &\le \frac{k}{2}\left\|(\frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}})^{\frac{1}{2}}(\sigma-\sigma')\right\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{8R}\|\nabla\cdot v\|_{L^2}^2 + \frac{\eta}{8R}\|\nabla v\|_{L^2}^2\,, \end{aligned}$$

$$I_2 \le \frac{\eta}{16R}\|\nabla v\|_{L^2}^2 + C_\Omega\|\sigma'\|_{L^2}^2\,,$$
$$I_3 \le C_\Omega\|F'\|_{L^2}^2 + \tilde{C}(\varrho)\|\vartheta\|_{H^1}^2 + \frac{\lambda}{8R}\|\nabla\cdot v\|_{L^2}^2 + \frac{\eta}{16R}\|\nabla v\|_{L^2}^2\,.$$

Quant au terme $I_3$, on a

$$I_3 = -\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}|\sigma|^2(\nabla\cdot v)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\sigma|^2 v\cdot\nabla\big(\frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}\big)dx \le C_\Omega\|v\|_{H^3}\|\sigma\|_{L^2}^2\,.$$

En adjoignant ces estimations des termes $I_i$ $(i = 1,2,3)$ à (1.49), on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{3\eta}{4R}\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{3\lambda}{4R}\|\nabla\cdot v\|_{L^2}^2 + k\left\|(\frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}})^{\frac{1}{2}}(\sigma-\sigma')\right\|_{L^2}^2 \\ &+ k\left\|(\frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}})^{\frac{1}{2}}\sigma\right\|_{L^2}^2 \le k\left\|(\frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}})^{\frac{1}{2}}\sigma'\right\|_{L^2}^2 + C_\Omega(\|F'\|_{L^2}^2 + \|v\|_{H^3}\|\sigma\|_{L^2}^2) \\ &\tilde{C}(\varrho)\|\vartheta\|_{H^1}^2 + C_\Omega\|\sigma'\|_{L^2}^2\,. \end{aligned} \tag{1.51}$$

Ceci étant, on considére maintenant le problème auxiliaire qui consiste à trouver un $\varphi \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\nabla \cdot \varphi = \sigma' \quad \text{dans } \Omega, \quad \varphi(\cdot, 0) = \varphi(\cdot, h) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{T} \tag{1.52}$$

avec $\sigma'$ vérifiant la condition (1.24). Il existe (Voir [8]) au moins une solution $\varphi \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\|\varphi\|_{H^1} \leq c_\Omega \|\sigma'\|_{L^2}\,. \tag{1.53}$$

En multipliant l'équation (1.27) par $\varphi$ et en l'intégrant sur $\Omega$, on obtient

$$\left\|\sqrt{\bar{T}}\sigma'\right\|_{L^2}^2 = -\frac{g}{R}\int_\Omega \sigma'\overrightarrow{e_3} \cdot \varphi dx$$
$$+ \frac{1}{R}\int_\Omega [\eta\nabla v \cdot \nabla\varphi + \lambda(\nabla \cdot v)(\nabla \cdot \varphi) + \nabla(\bar{\varrho}\vartheta) \cdot \varphi - F' \cdot \varphi]dx.$$

Compte tenu de (1.7) et (1.52), on peut voir aisément que

$$\bar{T}_0^2 \|\sigma'\|_{L^2}^2 \leq C_\Omega(\eta \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \lambda \|\nabla \cdot v\|_{L^2}^2 + \|F'\|_{L^2}^2) + \tilde{C}(\bar{\varrho}) \|\vartheta\|_{H^1}^2\,.$$

Si on multiplie maintenant par $(4RC_\Omega)^{-1}$ l'inégalité ci-dessus et on l'adjoint à (1.51), on obtient le lemme 1.5.1. $\square$

**Lemme 1.5.2.** *Sous les mêmes hypothèses que le lemme 1.5.1, on a pour tout* $i = 1, 2$

$$\frac{\eta}{R}\|\nabla\partial_{x_i}v\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{R}\|\nabla \cdot \partial_{x_i}v\|_{L^2}^2 + k\left\|(\frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}})^{\frac{1}{2}}\partial_{x_i}\sigma\right\|_{L^2}^2 \leq k\left\|(\frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}})^{\frac{1}{2}}\partial_{x_i}\sigma'\right\|_{L^2}^2$$
$$+ C_2'\|\sigma'\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_2\|\vartheta\|_{H^1}^2 + C_2'(\|F'\|_{L^2}^2 + \|v\|_{H^3}\|\sigma\|_{H^1}^2). \tag{1.54}$$

**Démonstration.** On applique l'opérateur différentiel $\partial_{x_i}$ $(i = 1, 2)$ aux équations (1.27) et (1.28), on les multiplie par $R^{-1}\partial_{x_i}v$ et $\bar{T}\bar{\varrho}^{-1}\partial_{x_i}\sigma$ respectivement et on les intégre sur $\Omega$. Puisque $\partial_{x_i}v$ satisfait aux conditions aux limites (1.4), en les intégrant par parties et en utilisant la relation

$$-\int_\Omega \left[(\partial_{x_i}v)\nabla \cdot (\partial_{x_i}(\bar{T}\sigma')) + \frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}\partial_{x_i}\nabla \cdot (\bar{\varrho}v)\partial_{x_i}\sigma\right]dx =$$
$$\int_\Omega \left[(\partial_{x_i}\nabla \cdot v)\partial_{x_i}(\bar{T}\sigma') - \frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}\partial_{x_i}\nabla \cdot (\bar{\varrho}v)\partial_{x_i}\sigma\right]dx =$$
$$-\int_\Omega \frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}(\partial_{x_i}\nabla \cdot (\bar{\varrho}v))(\partial_{x_i}\sigma - \partial_{x_i}\sigma')dx$$
$$+\int_\Omega(\partial_{x_i}\bar{T})\sigma'\partial_{x_i}\nabla \cdot vdx - \int_\Omega \bar{T}\left[(\partial_{x_i}\log\bar{\varrho})\nabla \cdot v + \frac{1}{\bar{\varrho}}\partial_{x_i}(v \cdot \nabla\bar{\varrho})\right]\partial_{x_i}\sigma'dx,$$

on obtient

$$
\frac{\eta}{R}\left\|\nabla \partial_{x_i} v\right\|_{L^2}^2+\frac{\lambda}{R}\left\|\nabla \cdot \partial_{x_i} v\right\|_{L^2}^2+\frac{k}{2}\left\|\left(\frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}\right)^{\frac{1}{2}} \partial_{x_i} \sigma\right\|_{L^2}^2 \tag{1.55}
$$

$$
+\frac{k}{2}\left\|\left(\frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\partial_{x_i} \sigma-\partial_{x_i} \sigma'\right)\right\|_{L^2}^2=\frac{k}{2}\left\|\left(\frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}\right)^{\frac{1}{2}} \partial_{x_i} \sigma'\right\|_{L^2}^2+\sum_{i=1}^5 I_i .
$$

où

$$
\begin{gathered}
I_1=-\int_{\Omega} \frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}\left(\partial_{x_i} \sigma-\partial_{x_i} \sigma'\right) \partial_{x_i} \nabla \cdot(\bar{\varrho} v) d x, \\
I_2=\int_{\Omega}\left(\left(\partial_{x_i} \nabla \cdot v\right) \partial_{x_i}(\bar{\varrho} \vartheta)-R^{-1} F' \cdot \partial_{x_i} \partial_{x_i} v\right) d x, \\
I_3=-\int_{\Omega} \sigma'\left[\partial_{x_i}\left[\bar{T}\left(\partial_{x_i} \log \bar{\varrho}\right) \nabla \cdot v+\bar{\varrho}^{-1} \partial_{x_i}(v \cdot \nabla \bar{\varrho})\right]+\left(\partial_{x_i} \bar{T}\right) \partial_{x_i} \nabla \cdot v\right] d x, \\
I_4=\frac{g}{R} \int_{\Omega} \sigma' \partial_{x_i} \partial_{x_i} v_3 d x \\
I_5=-\int_{\Omega} \frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}\left(\partial_{x_i} \sigma\right) \partial_{x_i} \nabla \cdot(\sigma v) d x .
\end{gathered}
$$

Compte tenu des expressions de $\bar{T}$ et de $\bar{\varrho}$, grâce à (1.7), d'une manière analogue à la démonstration du lemme 1.5.1 (particuliérement pour le terme $I_1$), on a

$$
\begin{gathered}
I_1 \leq \frac{k}{2}\left\|\left(\frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\partial_{x_i} \sigma-\partial_{x_i} \sigma'\right)\right\|_{L^2}^2+\frac{\lambda}{2 R}\left\|\nabla \cdot\left(\partial_{x_i} v\right)\right\|_{L^2}^2+\frac{\eta}{6 R}\left\|\nabla \partial_{x_i} v\right\|_{L^2}^2, \\
I_2 \leq \frac{\eta}{6 R}\left\|\nabla \partial_{x_i} v\right\|_{L^2}^2+C_{\Omega}\left\|F'\right\|_{L^2}^2+\tilde{C}(\varrho)\|\vartheta\|_{H^1}^2, \\
I_3+I_4 \leq \frac{\eta}{6 R}\left\|\nabla \partial_{x_i} v\right\|_{L^2}^2+C_{\Omega}\left\|\sigma'\right\|_{L^2}^2 .
\end{gathered}
$$

Quant au terme $I_5$, on a

$$
\begin{aligned}
I_5=&-\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}\left|\partial_{x_i} \sigma\right|^2(\nabla \cdot v) d x+\frac{1}{2} \int_{\Omega}\left|\partial_{x_i} \sigma\right|^2\left(v \cdot \nabla\left(\bar{T} \bar{\varrho}^{-1}\right)\right) d x \\
&-\int_{\Omega} \bar{T} \bar{\varrho}^{-1}\left(\partial_{x_i} \sigma\right) \nabla \cdot\left(\sigma \partial_{x_i} v\right) d x \leq C_{\Omega}\|v\|_{H^3}\|\sigma\|_{H^1}^2 .
\end{aligned} \tag{1.56}
$$

Si on tient maintenant compte de ces estimations, de (1.55) découle le lemme 1.5.2. □

**Lemme 1.5.3.** *Avec les mêmes hypothèses du lemme 1.5.1, on a*

$$
\begin{aligned}
(1.57)\qquad & (\bar{k}+1)C_0\bar{T}_0^2\left\|\partial_{x_3}\sigma\right\|_{L^2}^2 - C_3'\sum_{i=1}^{2}\left\|\nabla\partial_{x_i}v\right\|_{L^2}^2 - C_3'\bar{T}_0^{-2}\left\|v\right\|_{H^1}^2\big) \\
& \leq\ (\bar{k}-1)C_0\bar{T}_0^2\left\|\partial_{x_3}\sigma'\right\|_{L^2}^2 + C_3'\left\|\nabla\sigma'\right\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_3(\left\|F'\right\|_{L^2}^2 + \left\|\vartheta\right\|_{H^1}^2) \\
& \qquad + C_3'\left\|v\right\|_{H^3}\left\|\sigma\right\|_{H^1}^2,
\end{aligned}
$$

*où*

$$
C_0 = \frac{R}{\eta+\lambda}\Big(1-\frac{\gamma-1}{\gamma R\bar{T}_0}gh\Big)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \tag{1.58}
$$

**Démonstration.** A l'aide de l'identité

$$
\Delta v_3 = \partial_{x_3}\nabla\cdot v + \partial_{x_1}(\partial_{x_1}v_3 - \partial_{x_3}v_1) + \partial_{x_2}(\partial_{x_2}v_3 - \partial_{x_3}v_2),
$$

de l'équation (1.27) on tire

$$
\begin{aligned}
\partial_{x_3}\nabla\cdot v = & -\frac{\eta}{\eta+\lambda}(\partial_{x_1}(\partial_{x_1}v_3 - \partial_{x_3}v_1) + \partial_{x_2}(\partial_{x_2}v_3 - \partial_{x_3}v_2)) \\
& + \frac{1}{\eta+\lambda}(R\partial_{x_3}(\bar{\varrho}\vartheta) + R\bar{T}\partial_{x_3}\sigma' + (R\partial_{x_3}\bar{T}+g)\sigma' - F_3').
\end{aligned} \tag{1.59}
$$

Ceci étant, on applique l'opérateur différentiel $\partial_{x_3}$ à l'équation (1.28) et on y substitue l'expression ci-dessus de $\partial_{x_3}\nabla\cdot v$. Si on multiplie l'équation obtenue par $\partial_{x_3}\sigma$, on obtient en intégrant sur $\Omega$

$$
\int_\Omega k\big[(\partial_{x_3}\sigma - \partial_{x_3}\sigma')\partial_{x_3}\sigma + \frac{R}{\eta+\lambda}\bar{\varrho}\bar{T}(\partial_{x_3}\sigma)(\partial_{x_3}\sigma')\big]dx = \sum_{i=1}^{5} I_i, \tag{1.60}
$$

où

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\eta+\lambda}\int_\Omega \bar{\varrho}(R\sigma'\partial_{x_3}\bar{T} + g\sigma')\partial_{x_3}\sigma dx \\
I_2 &= \frac{1}{\eta+\lambda}\int_\Omega \bar{\varrho}(F_3' - R\partial_{x_3}(\bar{\varrho}\vartheta))\partial_{x_3}\sigma dx \\
I_3 &= \frac{\eta}{\eta+\lambda}\int_\Omega \bar{\varrho}(\partial_{x_3}\sigma)(\partial_{x_1}(\partial_{x_1}v_3 - \partial_{x_3}v_1) + \partial_{x_2}(\partial_{x_2}v_3 - \partial_{x_3}v_2))dx \\
I_4 &= -\int_\Omega (\partial_{x_3}(v\cdot\nabla\bar{\varrho}) + (\partial_{x_3}\bar{\varrho})\nabla\cdot v)\partial_{x_3}\sigma dx \\
I_5 &= -\int_\Omega (\partial_{x_3}\sigma)\nabla\cdot(\partial_{x_3}(v\sigma))dx.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'identité

$$(a-b)a+\beta ab=\frac{1+\beta}{2}a^2+\frac{1-\beta}{2}(a-b)^2-\frac{1-\beta}{2}b^2$$

et en tenant compte des expressions (1.11) et (1.12) de $\bar{\varrho}$, $\bar{T}$, si $\bar{T}_0$ est assez grand, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_\Omega k\big[(\partial_{x_3}\sigma-\partial_{x_3}\sigma')\partial_{x_3}\sigma+\frac{R}{\eta+\lambda}\bar{\varrho}\bar{T}(\partial_{x_3}\sigma)(\partial_{x_3}\sigma')\big]dx\\ &\geq\frac{k+k_1}{2}\left\|\partial_{x_3}\sigma\right\|_{L^2}^2-\frac{k-k_1}{2}\left\|\partial_{x_3}\sigma'\right\|_{L^2}^2+\frac{k-k_1'}{2}\left\|\partial_{x_3}\sigma-\partial_{x_3}\sigma'\right\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

où $k_1$ est le nombre donné dans (1.46) et

$$k_1'=\frac{R}{\eta+\lambda}C_{M_\varrho}\bar{T}_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

En outre, des expressions (1.12) et (1.11) (voir aussi (1.10)) de $\bar{\varrho}$ et de $\bar{T}$, on peut voir que

$$I_1\leq\frac{k-k_1'}{6}\left\|\partial_{x_3}\sigma-\partial_{x_3}\sigma'\right\|_{L^2}^2+\frac{k_1}{12}\left\|\partial_{x_3}\sigma'\right\|_{L^2}^2+C_\Omega C_{M_\varrho}\bar{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\left\|\nabla\sigma'\right\|_{L^2}^2,$$

$$I_2\leq\tilde{C}(\bar{\varrho})(\left\|F'\right\|_{L^2}^2+\left\|\vartheta\right\|_{H^1}^2)+\frac{k_1}{4}\left\|\partial_{x_3}\sigma\right\|_{L^2}^2,$$

$$I_3\leq\frac{k-k_1'}{6}\left\|\partial_{x_3}\sigma-\partial_{x_3}\sigma'\right\|_{L^2}^2+\frac{k_1}{12}\left\|\partial_{x_3}\sigma'\right\|_{L^2}^2+C_\Omega C_{M_\varrho}\bar{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\sum_{i=1}^2\left\|\nabla\partial_{x_i}v\right\|_{L^2}^2,$$

$$I_4\leq\frac{k-k_1'}{6}\left\|\partial_{x_3}\sigma-\partial_{x_3}\sigma'\right\|_{L^2}^2+\frac{k_1}{12}\left\|\partial_{x_3}\sigma'\right\|_{L^2}^2+C_\Omega C_{M_\varrho}\bar{T}_0^{\frac{4-3\gamma}{\gamma-1}}\left\|v\right\|_{L^2}^2.$$

Quant au dernier terme $I_5$, on a

$$\begin{aligned}I_5&=-\frac{1}{2}\int_\Omega\frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}|\partial_{x_3}\sigma|^2(\nabla\cdot v)dx-\int_\Omega(\partial_{x_3}\sigma)(\nabla\sigma\cdot v)+\int_\Omega(\partial_{x_3}\sigma)(\nabla\cdot(\partial_{x_3}v))\sigma\\&\leq C_\Omega\left\|v\right\|_{H^3}\left\|\sigma\right\|_{H^1}^2\end{aligned}$$

Si on adjoint ces estimations à (1.60), on obtient

$$\begin{aligned}\big(k+\frac{k_1}{2}\big)\left\|\partial_{x_3}\sigma\right\|_{L^2}^2&\leq\big(k-\frac{k_1}{2}\big)\left\|\partial_{x_3}\sigma'\right\|_{L^2}^2+C_\Omega C_{M_\varrho}T_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\left\|\nabla\sigma'\right\|_{L^2}^2\\&+C_{M_\varrho}C_\Omega\bar{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\sum_{i=1}^2\left\|\nabla\partial_{x_i}v\right\|_{L^2}^2+C_\Omega C_{M_\varrho}\bar{T}_0^{\frac{4-3\gamma}{\gamma-1}}\left\|v\right\|_{L^2}^2\\&+\tilde{C}(\bar{\varrho})\left\|F'\right\|_{L^2}^2+\tilde{C}(\bar{\varrho})\left\|\vartheta\right\|_{H^1}^2+C_\Omega\left\|v\right\|_{H^3}\left\|\sigma\right\|_{H^1}^2.\end{aligned}$$

En multipiliant maintenant les deux membres de cette inégalité par

$$\left(C_{M_\varrho}\bar{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\right)^{-1} = \bar{T}_0^2\left(C_{M_\varrho}T_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right)^{-1}$$

et tenant compte de (1.46), on obtient (1.57). □

**Lemme 1.5.4.** *On a, sous les hypothèses du lemme 1.5.1*

$$(1.61)\qquad \|v\|_{H^2}^2 - C_4'\sum_{i=1}^{2}\|\nabla\partial_{x_i}v\|_{L^2}^2 \le$$
$$-C_4'(\bar{T}_0^2-1)\,\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2 + C_4'(\bar{T}_0^2\,\|\partial_{x_3}\sigma'\|_{L^2}^2 + \|F'\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_4\,\|\vartheta\|_{H^1}^2\,.$$

**Démonstration.** On réécrit l'équation (1.27) comme un problème de Stokes dans $\Omega$ avec les conditions aux limites (1.4)

$$(1.62)\qquad \begin{aligned}\mu\Delta v + R\nabla(\bar{T}\sigma') &= -\lambda\nabla\nabla\cdot v - R\nabla(\bar{\varrho}\vartheta) - g\sigma'\vec{e_3} + F'\\ \nabla\cdot v &= \nabla\cdot v.\end{aligned}$$

Des estimations classiques (voir [8] et [18]) du problème de Stokes, on a

$$(1.63)\quad \|v\|_{H^2}^2 + \left\|\nabla(\bar{T}\sigma')\right\|_{L^2}^2 \le \tilde{C}(\bar{\varrho})\,\|\vartheta\|_{H^1}^2 + C_\Omega(\|\nabla\cdot v\|_{H^1}^2 + \|F'\|_{L^2}^2) + \|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2).$$

En outre, à l'aide de (1.59), on peut voir facilement que

$$\|\partial_{x_3}\nabla\cdot v\|_{L^2}^2 \le C_\Omega\,\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2$$
$$+\,C_\Omega\Big(\sum_{i=1}^{2}\|\nabla\partial_{x_i}v\|_{L^2}^2 + \bar{T}_0^2\,\|\partial_{x_3}\sigma'\|_{L^2}^2 + \ \|F'\|_{L^2}^2 + \|\vartheta\|_{H^1}^2\Big),$$
$$\left\|\nabla(\bar{T}\sigma')\right\|_{L^2}^2 \ge C_\Omega(\bar{T}_0^2-1)\,\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2\,.$$

Compte tenu de ces inégalités, de (1.63) en découle facilement (1.61). □

**Lemme 1.5.5.** *Soient $i,j=1,2$. Sous les mêmes hypothèses que le lemme 1.5.1 on a*

$$(1.64)\ \frac{\eta}{R}\left\|\nabla\partial_{x_i}\partial_{x_j}v\right\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{R}\left\|\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot v\right\|_{L^2}^2 + k\left\|\Big(\frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma\right\|_{L^2}^2 - C_5'\,\|v\|_{H^2}^2$$
$$\le k\left\|\Big(\frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma'\right\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_5\,\|\vartheta\|_{H^2}^2 + C_5'(\|F'\|_{H^1}^2 + \|v\|_{H^3}\,\|\sigma\|_{H^2}^2 + \|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2).$$

**Démonstration.** On applique l'opérateur différentiel $\partial_{x_i}\partial_{x_j}$ $(i,j=1,2)$ aux équations (1.27) et (1.28) et on les multiplie par par $R^{-1}\partial_{x_i}\partial_{x_j}v$ et $\bar{T}\bar{\varrho}^{-1}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma$ respectivement. En les intégrant par parties, compte tenu du fait que $\partial_{x_i}\partial_{x_j}v$ vérifie les conditions aux limites (1.4), on obtient

$$\begin{aligned}(1.65)\qquad &\frac{\eta}{R}\left\|\nabla\partial_{x_i}\partial_{x_j}v\right\|_{L^2}^2+\frac{\lambda}{R}\left\|\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot v\right\|_{L^2}^2+\frac{k}{2}\left\|\left(\frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}\right)^{\frac{1}{2}}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma\right\|_{L^2}^2\\ &+\frac{k}{2}\left\|\left(\frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}\right)^{\frac{1}{2}}(\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma-\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma')\right\|_{L^2}^2=\frac{k}{2}\left\|\left(\frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}\right)^{\frac{1}{2}}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma'\right\|_{L^2}^2+\sum_{i=1}^{4}I_i.\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}I_1&=-\int_\Omega\frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}(\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma-\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma')\partial_{x_j}\partial_{x_i}\nabla\cdot(\bar{\varrho}v)dx,\\ I_2&=-\int_\Omega[(\partial_{x_i}\bar{T})\partial_{x_j}\sigma'+(\partial_{x_j}\bar{T})\partial_{x_i}\sigma'+\sigma'\partial_{x_j}\partial_{x_i}\bar{T}]\partial_{x_j}\partial_{x_i}\nabla\cdot vdx,\\ I_3&=-\int_\Omega\partial_{x_i}\big[\bar{T}\bar{\varrho}^{-1}\big[\partial_{x_i}\partial_{x_j}(v\cdot\nabla\bar{\varrho})+(\partial_{x_i}\partial_{x_j}\bar{\varrho})\nabla\cdot v\big]\big]\partial_{x_j}\sigma'dx,\\ I_4&=-\int_\Omega\partial_{x_i}\big[\bar{T}\bar{\varrho}^{-1}\big[(\partial_{x_i}\bar{\varrho})\partial_{x_j}\nabla\cdot v+\ (\partial_{x_j}\bar{\varrho})\partial_{x_i}\nabla\cdot v\big]\big]\partial_{x_j}\sigma'dx,\\ I_5&=-\frac{g}{R}\int_\Omega(\partial_{x_i}\sigma')\partial_{x_i}^2\partial_{x_j}v_{3,n}dx,\\ I_6&=\int_\Omega\big[(\partial_{x_j}\partial_{x_i}\nabla\cdot v)\partial_{x_i}\partial_{x_j}(\bar{\varrho}\vartheta)-R^{-1}(\partial_{x_i}^2\partial_{x_j}v)\cdot\partial_{x_j}F'\big]dx\\ I_7&=-\int_\Omega\frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}(\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot(v\sigma)dx.\end{aligned}$$

Compte tenu des expressions de $\bar{\varrho}$, $\bar{T}$ et de la relation

$$\frac{1}{2k}C_{M_\varrho}\bar{T}_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\leq\frac{\eta+\lambda}{8R}$$

dûe à (1.46) et (1.47), on peut estimer le terme $I_1$ de sorte que

$$I_1\leq\frac{k}{2}\left\|\left(\frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}\right)^{\frac{1}{2}}(\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma-\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma')\right\|_{L^2}^2+\frac{\eta+\lambda}{16R}\left\|\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot v\right\|_{L^2}^2+C_\Omega\left\|v\right\|_{H^2}^2.$$

En outre, on a évidemment

$$\begin{aligned}I_2+I_3+I_4+I_5&\leq\frac{\eta}{6R}\left\|\nabla\partial_{x_i}\partial_{x_j}v\right\|_{L^2}^2+C_\Omega\left\|\nabla\sigma'\right\|_{L^2}^2\\ I_6&\leq C_\Omega\left\|F'\right\|_{H^1}^2+\tilde{C}(\bar{\varrho})\left\|\vartheta\right\|_{H^2}^2+\frac{\eta}{6R}\left\|\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla v\right\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Quant au terme $I_7$ d'une manière analogue à (1.56), on peut l'estimer de sorte que

$$I_7 \leq C_\Omega \|v\|_{H^3} \|\sigma\|_{H^2}^2 .$$

Si on adjoint les estimations ci-dessus des termes $I_i$ $(i = 1, \cdots, 7)$ à (1.65), on obtient (1.64). $\square$

**Lemme 1.5.6.** *Soit $i = 1, 2$. Sous les hypothèses du lemme 1.5.1 on a*

$$(1.66) \qquad (\bar{k}+1)C_0\bar{T}_0^2 \|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma\|_{L^2}^2 - C_6' \sum_{i,j=1}^{2} \left\|\nabla\partial_{x_i}\partial_{x_j}v\right\|_{L^2}^2 - C_6'\bar{T}_0^{-2}\|v\|_{H^2}^2$$
$$\leq (\bar{k}-1)C_0\bar{T}_0^2 \|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma'\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_6(\|F'\|_{H^1}^2 + \|\vartheta\|_{H^2}^2) + C_6'\|v\|_{H^3}\|\sigma\|_{H^2}^2 + C_6'\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2$$

*où $C_0$ est donnée par (1.58)*

**Démonstration.** On applique l'opérateur différentiel $\partial_{x_3}\partial_{x_i}$ $(i = 1, 2)$ à l'équation (1.28) et on y substitue l'expression (1.59) de $\partial_{x_3}\nabla \cdot v$. En multipliant l'équation obtenue par $\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma$, il vient après intégration par parties sur $\Omega$

$$(1.67) \qquad \int_\Omega k\big[(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma - \partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma')\partial_{x_i}\partial_{x_3}\sigma + \frac{R}{\eta+\lambda}\bar{\varrho}\bar{T}(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma)(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma')\big]dx = \sum_{i=1}^{5} I_i,$$

où

$$I_1 = -\frac{1}{\eta+\lambda}\int_\Omega \big(R\partial_{x_i}(\bar{\varrho}\sigma'\partial_{x_3}\bar{T}) + R\partial_{x_3}\sigma'\partial_{x_i}(\bar{\varrho}\bar{T}) + g\partial_{x_i}(\bar{\varrho}\sigma')\big)\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma dx,$$
$$I_2 = \frac{1}{\eta+\lambda}\int_\Omega \big(\partial_{x_i}(\bar{\varrho}F'_{3,n} - R\bar{\varrho}\partial_{x_3}(\bar{\varrho}\vartheta))\big)\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma dx,$$
$$I_3 = \frac{\eta}{\eta+\lambda}\int_\Omega (\partial_{x_i}\partial_{x_3}\sigma)\partial_{x_i}(\bar{\varrho}(\partial_{x_1}(\partial_{x_1}v_{3,n} - \partial_{x_3}v_{1,n}) + \partial_{x_2}(\partial_{x_2}v_{3,n} - \partial_{x_3}v_{2,n})))dx$$
$$I_4 = \int_\Omega (\partial_{x_i}\partial_{x_3}(v\cdot\nabla\bar{\varrho}) + \partial_{x_i}((\partial_{x_3}\bar{\varrho})\nabla\cdot v))\partial_{x_i}\partial_{x_3}\sigma dx$$
$$I_5 = -\int_\Omega (\partial_{x_i}\partial_{x_3}\sigma)\nabla\cdot(\partial_{x_i}\partial_{x_3}(v\sigma)dx.$$

Tout comme dans la démonstration du lemme 1.5.3, en utilisant l'inégalité

$$\int_\Omega k\big[(\partial_{x_i}\partial_{x_3}\sigma - \partial_{x_i}\partial_{x_3}\sigma')\partial_{x_3}\sigma + \frac{R}{\eta+\lambda}\bar{\varrho}\bar{T}(\partial_{x_i}\partial_{x_3}\sigma)(\partial_{x_i}\partial_{x_3}\sigma')\big]dx \geq$$
$$\frac{k+k_1}{2}\left\|\partial_{x_i}\partial_{x_3}\sigma\right\|_{L^2}^2 - \frac{k-k_1}{2}\left\|\partial_{x_i}\partial_{x_3}\sigma'\right\|_{L^2}^2 + \frac{k-k_1'}{2}\left\|\partial_{x_i}\partial_{x_3}\sigma - \partial_{x_i}\partial_{x_3}\sigma'\right\|_{L^2}^2,$$

et en estimant les termes $I_i$ $(i = 1,\cdots,5)$, on déduit de (1.73) que

$$\begin{aligned}
&\big(k+\frac{k_1}{2}\big)\left\|\partial_{x_i}\partial_{x_3}\sigma\right\|_{L^2}^2 \leq \big(k-\frac{k_1}{2}\big)\left\|\partial_{x_i}\partial_{x_3}\sigma'\right\|_{L^2}^2 \\
&C_\Omega\big(C_{M_\varrho}\bar{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\left\|\nabla\partial_{x_i}\partial_{x_j}v\right\|_{L^2}^2 + C_{M_\varrho}\bar{T}_0^{\frac{4-3\gamma}{\gamma-1}}\left\|v\right\|_{H^2}^2 + C_{M_\varrho}\bar{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\left\|\nabla\sigma'\right\|_{L^2}^2\big) \\
&+\tilde{C}(\bar{\varrho})(\left\|F'\right\|_{H^1}^2 + \left\|\vartheta\right\|_{H^2}^2) + C_\Omega\left\|v\right\|_{H^3}\left\|\sigma\right\|_{H^2}^2.
\end{aligned}$$

En multipiliant maintenant les deux membres de cette inégalité par

$$\big(C_{M_\varrho}\bar{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\big)^{-1} = \bar{T}_0^2\big(C_{M_\varrho}T_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\big)^{-1}$$

et tenant compte de (1.46), on obtient (1.66). □

**Lemme 1.5.7.** *Sous les hypothèses du lemme 1.5.1, on a pour tout* $(i = 1, 2)$

$$\begin{aligned}
(1.68)\qquad &\left\|\partial_{x_i}v\right\|_{H^2}^2 - C_7'\sum_{j=1}^{2}\left\|\nabla\partial_{x_i}\partial_{x_j}v\right\|_{L^2}^2 - C_7'\left\|v\right\|_{H^2}^2 \\
&\leq\ -C_7'\bar{T}_0^2\left\|\nabla(\partial_{x_i}\sigma')\right\|_{L^2}^2 + C_7'\bar{T}_0^2\left\|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma'\right\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_7\left\|\vartheta\right\|_{H^2}^2 \\
&\quad + C_7'(\left\|F'\right\|_{H^1}^2 + \left\|\nabla\sigma'\right\|_{L^2}^2).
\end{aligned}$$

**Démonstration.** On applique à l'équation (1.27) l'opérateur différentiel $\partial_{x_i}$ $(i = 1, 2)$ et on réécrit l'équation obtenue comme un problème de Stokes dans $\Omega$

$$\begin{gathered}
\mu\Delta(\partial_{x_i}v) + R\nabla(\partial_{x_i}(\bar{T}\sigma')) = -\lambda\partial_{x_i}\nabla\nabla\cdot v - R\nabla\partial_{x_i}(\bar{\varrho}\vartheta) - g\partial_{x_i}\sigma'\vec{e_3} + \partial_{x_i}F' \\
\nabla\cdot\partial_{x_i}v = \nabla\cdot\partial_{x_i}v, \\
\partial_{x_i}v|_{x_3=0} = 0,\ \partial_{x_i}v_3|_{x_3=h} = \partial_{x_i}\partial_{x_3}v_i|_{x_3=h} = 0\ \ (i = 1, 2).
\end{gathered}$$

Avec les mêmes arguments de la démonstration du lemme 1.5.4, on a .

$$\begin{aligned}
(1.69)\qquad &\left\|\partial_{x_i}v\right\|_{H^2}^2 + R^2\left\|\nabla\partial_{x_i}(\bar{T}\sigma')\right\|_{L^2}^2 \leq \\
&\leq C_\Omega(\left\|\nabla\cdot\partial_{x_i}v\right\|_{H^1}^2 + \left\|F'\right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\|\nabla\sigma'\right\|_{L^2}^2) + \tilde{C}(\bar{\varrho})\left\|\vartheta\right\|_{H^2}^2.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, notons que

$$(1.70)\qquad \|\partial_{x_i}\nabla\cdot v\|_{H^1}^2 \leq C_\Omega(\sum_{i=1}^{2}\left\|\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot v\right\|_{L^2}^2 + \|\partial_{x_i}\partial_{x_3}\nabla\cdot v\|_{L^2}^2 + \|v\|_{H^2}^2),$$

et, en appliquant l'opérateur $\partial_{x_i}$ $(i=1,2)$ à (1.59), il vient

$$(1.71)\qquad \|\partial_{x_i}\partial_{x_3}\nabla\cdot v\|_{L^2}^2 \leq \tilde{C}(\bar{\varrho})\,\|\vartheta\|_{H^2}^2$$

$$+ C_\Omega\big(\sum_{j=1}^{2}\left\|\nabla\partial_{x_i}\partial_{x_j}v\right\|_{L^2}^2 + \bar{T}_0^2\,\|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma'\|_{L^2}^2 + \|F'\|_{H^1}^2 + \|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2\big).$$

Si on substitue (1.70) et (1.71) dans (1.69), compte tenu de l'inégalité évidente

$$\left\|\nabla\partial_{x_i}(\bar{T}\sigma')\right\|_{L^2}^2 \geq C_\Omega(\bar{T}_0^2\,\|\nabla\partial_{x_i}\sigma'\|_{L^2}^2 - \|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2),$$

on obtient (1.68). □

**Lemme 1.5.8.** *Sous les hypothèses du lemme 1.5.1 on a*

$$(1.72)\qquad (\bar{k}+1)C_0\bar{T}_0^2\,\|\Delta\sigma\|_{L^2}^2 - C_8'\bar{T}_0^{-2}\,\|v\|_{H^2}^2 \leq (\bar{k}-1)C_0\bar{T}_0^2\,\|\Delta\sigma'\|_{L^2}^2$$
$$+ \tilde{C}_8(\|F'\|_{H^1}^2 + \|\vartheta\|_{H^2}^2) + C_8'(\|v\|_{H^3}\,\|\sigma\|_{H^2}^2 + \|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2).$$

**Démonstration.** On applique l'opérateur laplacien à l'équation (1.28) et on y substitue l'expression (1.59) de $\partial_{x_3}\nabla\cdot v$. En multipliant l'équation obtenue par $\Delta\sigma$, il vient après intégration par parties sur $\Omega$

$$(1.73)\qquad \int_\Omega k\big[(\Delta\sigma - \Delta\sigma')\Delta\sigma + \frac{R}{\eta+\lambda}\bar{\varrho}\bar{T}\Delta\sigma\Delta\sigma']dx = \sum_{i=1}^{5} I_i,$$

où

$$I_1 = -\frac{1}{\eta+\lambda}\int_\Omega(2R\bar{\varrho}\nabla\bar{T}\cdot\nabla\sigma' + R\bar{\varrho}\sigma'\Delta\bar{T} + g\bar{\varrho}\partial_{x_3}\sigma')\Delta\sigma dx,$$

$$I_2 = -\frac{1}{\eta+\lambda}\int_\Omega\bar{\varrho}(R\Delta(\bar{\varrho}\vartheta) - \nabla\cdot F')\Delta\sigma dx,$$

$$I_3 = \int_\Omega(\Delta(v\cdot\bar{\varrho}) + \Delta\bar{\varrho}\nabla\cdot v + 2(\nabla\bar{\varrho})\cdot\nabla\nabla\cdot v))\Delta\sigma dx,$$

$$I_4 = -\int_\Omega(\Delta\nabla\cdot(\sigma v))\Delta\sigma dx.$$

De manière analogue à la démonstration des lemmes 1.5.3 et 1.5.6, on a

$$\int_\Omega k\big[(\Delta\sigma-\Delta\sigma')\Delta\sigma+\frac{R}{\eta+\lambda}\bar\varrho\bar T(\Delta\sigma)(\Delta\sigma')\big]dx\geq$$
$$\geq\frac{k+k_1}{2}\left\|\Delta\sigma\right\|^2_{L^2}-\frac{k-k_1}{2}\left\|\Delta\sigma'\right\|^2_{L^2}+\frac{k-k_1'}{2}\left\|\Delta\sigma-\Delta\sigma'\right\|^2_{L^2}.$$

En outre, on peut vérifier sans peine que

$$I_1+\cdots+I_4\leq$$
$$\frac{k_1}{4}\left\|\Delta\sigma\right\|^2_{L^2}+C_\Omega\big(C_{M_\varrho}\bar T_0^{\frac{4-3\gamma}{\gamma-1}}\left\|v\right\|^2_{H^2}+C_{M_\varrho}T_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\left\|\nabla\sigma'\right\|^2_{L^2}\big)$$
$$+\tilde C(\bar\varrho)(\left\|F'\right\|^2_{H^1}+\left\|\vartheta\right\|^2_{L^2})+C_\Omega\left\|v\right\|_{H^3}\left\|\sigma\right\|^2_{H^2}.$$

Ainsi, pareillement à la démonstration des lemmes 1.5.3 et 1.5.6, on en déduit (1.72).

□

**Lemme 1.5.9.** *Sous les hypothèses du lemme 1.5.1 on a*

$$\left\|v\right\|^2_{H^3}-C_9'\big(\sum_{i=1}^2\left\|\partial_{x_i}v\right\|^2_{H^2}+\left\|v\right\|^2_{H^1}\big)\tag{1.74}$$
$$\leq\ -C_9'\bar T_0^2\left\|\nabla\sigma'\right\|^2_{H^1}+C_9'T_0^2\big(\left\|\Delta\sigma'\right\|^2_{L^2}+\sum_{i=1}^2\left\|\nabla\partial_{x_i}\sigma'\right\|^2_{L^2}\big)$$
$$+\ C_9'(\left\|F'\right\|^2_{H^1}+\left\|\nabla\sigma'\right\|^2_{L^2})+\tilde C_9\left\|\vartheta\right\|^2_{H^2}.$$

**Démonstration.** Comme dans le lemme 1.5.4, en vertu de la théorie bien connue des estimations du problème de Stokes (voir [8], [18]), on déduit de (1.62) avec les conditions aux limites (1.4)

$$\left\|v\right\|^2_{H^3}+R^2\left\|\nabla(\bar T\sigma')\right\|^2_{H^1}\tag{1.75}$$
$$\leq\tilde C(\bar\varrho)\left\|\vartheta\right\|^2_{H^2}+C_\Omega(\left\|\nabla\cdot v\right\|^2_{H^2}+\left\|\nabla\sigma'\right\|^2_{L^2}+\left\|F'\right\|^2_{H^1}).$$

Notons d'abord que

$$\left\|\nabla\cdot v\right\|^2_{H^2}\leq\left\|\partial_{x_3}\nabla\cdot v\right\|^2_{H^1}+\sum_{i=1}^2\left\|\partial_{x_i}v\right\|^2_{H^2}+\left\|v\right\|^2_{H^1}.$$

Par ailleurs, compte tenu de (1.59), on a

$$\|\partial_{x_3}\nabla\cdot v\|_{H^1}^2 \leq$$
$$+ C_\Omega\big(\sum_{i=1}^{2}\|\partial_{x_i}v\|_{H^2}^2 + \bar{T}_0^2\,\|\nabla\partial_{x_3}\sigma'\|_{L^2}^2 + \|F'\|_{L^2}^2 + \|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2) + \tilde{C}(\bar{\varrho})\,\|\vartheta\|_{H^2}^2).$$

Puisque

$$\left\|\nabla(\bar{T}\sigma')\right\|_{H^1}^2 \geq C_\Omega((\bar{T}_0^2\,\|\nabla\sigma'\|_{H^1}^2 - \|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2),$$
$$\|\nabla\partial_{x_3}\sigma'\|_{L^2}^2 \leq \|\Delta\sigma'\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{2}\|\nabla\partial_{x_i}\sigma'\|_{L^2}^2\,,$$

en adjoignant ces inégalités à (1.75), on obtient (1.74). □

# 1.6 Démonstration du théorème 1.2.1

Les lemmes 1.5.1-1.5.9 étant établis, on est maintenant en mesure de montrer que l'opérateur $\mathcal{O}$ envoie un convexe fermé borné $B$ de $X$ dans lui même. Compte tenu de la remarque 1.4.1, l'opérateur $\mathcal{O}$ possède, gâce au théorème de Schauder un point fixe $u = (v, \vartheta, \sigma)$. D'aprés la définition (1.33) de l'opérateur $\mathcal{O}$, ce point fixe est une solution du système d'équations (1.18)-(1.20) avec les conditions (1.4), (1.23) et (1.24). Si on pose

$$v = v, \quad T = \bar{T} + \vartheta, \quad \varrho = \bar{\varrho} + \sigma,$$

alors on peut facilement voir que $(v, T, \varrho)$ est une solution du problème (1.1)- (1.6). Pour conclure donc la démonstration du théorème 1.2.1, il nous reste seulement à montrer qu'il existe un borné fermé convexe $B$ de $X$ tel que $\mathcal{O}(B) \subseteq B$. En effet, on a le

**Lemme 1.6.1.** *Sous l'hypothèse (1.7), il existe une norme $|\cdot|_2$ équivalente à la norme de $H^2$ et un nombre positif $r$ tels que, si on pose*

$$B = \{u = (v, \vartheta, \sigma) \in X : \ \|u\|_X^2 = \|v\|_{H^3}^2 + \|\vartheta\|_{H^2}^2 + |\sigma|_2^2 \leq r^2\}, \tag{1.76}$$

*alors on ait $\mathcal{O}(B) \subseteq B$.*

**Démonstration**. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_8$ des nombres positifs arbitraires. On commence par poser

$$(1.77)\quad |\sigma|_2^2 = \nu_1 \|\Delta\sigma\|_{L^2}^2 + \nu_2 \sum_{i=1}^{2} \|\partial_{x_i}\partial_{x_3}\sigma\|_{L^2}^2 + \nu_3 \sum_{i,j=1}^{2} \left\| \left(\frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}\right)^{\frac{1}{2}} \partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma \right\|_{L^2}^2$$
$$+ \nu_4 \|\partial_{x_3}\sigma\|_{L^2}^2 + \nu_5 \sum_{i=1}^{2} \left\| \left(\frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}\right)^{\frac{1}{2}} \partial_{x_i}\sigma \right\|_{L^2}^2 + \nu_6 \left\| \left(\frac{\bar{T}}{\bar{\varrho}}\right)^{\frac{1}{2}} \sigma \right\|_{L^2}^2$$

avec

$$\nu_1 = C_0(\bar{\kappa}+1)\lambda_8 \bar{T}_0^2, \quad \nu_2 = C_0(\bar{\kappa}+1)\lambda_6 \bar{T}_0^2, \quad \nu_3 = k\lambda_5,$$
$$\nu_4 = C_0(\bar{\kappa}+1)\lambda_3 \bar{T}_0^2, \quad \nu_5 = k\lambda_2, \quad \nu_6 = k\lambda_1,$$

où $C_0$ est donné par (1.58). Il est clair que $|\sigma|_{2,\Omega}$ est équivalente à la norme usuelle de $H^2$. Si on multiplie maintenant les estimations obtenues dans les lemmes 1.5.1-1.5.9 par $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_9$ et on choisisit $\lambda_9 = 1$, en les adjoignant, on obtient

$$(1.78)\quad \|v\|_{H^3}^2 + |\sigma|_2^2 + \Lambda_1 \sum_{i=1}^{2} \|\partial_{x_i} v\|_{H^2}^2$$
$$+\Lambda_2 \sum_{i,j=1}^{2} \left\|\nabla\partial_{x_i}\partial_{x_j} v\right\|_{L^2}^2 + \Lambda_3 \|v\|_{H^2}^2 + \Lambda_4 \sum_{i=1}^{2} \|\nabla\partial_{x_i} v\|_{L^2}^2 + \Lambda_5 \|v\|_{H^1}^2$$
$$\leq N_{\sigma'} - C_9' \bar{T}_0^2 \|\nabla\sigma'\|_{H^1}^2 - \Lambda_6 \|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2 - \Lambda_7 \|\sigma'\|_{L^2}^2$$
$$-\Lambda_1 \bar{T}_0^2 \sum_{i=1}^{2} \|\nabla\partial_{x_i}\sigma'\|_{L^2}^2 + \tilde{C}(\|F'\|_{H^1}^2 + \|\vartheta\|_{H^2}^2 + \|v\|_{H^3} \|\sigma\|_{H^2}^2)$$

avec $\tilde{C}$ est une constante positive dépendant de $\bar{\varrho}$ et des $\lambda_i$. Quant aux $\Lambda_i$ ils sont définis par

$$(1.79)\quad \Lambda_1 = \lambda_7 - C_9', \quad \Lambda_2 = \frac{\eta}{R}\lambda_5 - C_6'\lambda_6 - C_7'\lambda_7,$$
$$\Lambda_3 = \lambda_4 - 4C_5'\lambda_5 - 2C_6' T_0^{-2}\lambda_6 - 2C_7'\lambda_7 - C_8' T_0^{-2}\lambda_8 - C_9'$$
$$\Lambda_4 = \frac{\eta}{R}\lambda_2 - C_3'\lambda_3 - C_4'\lambda_4, \quad \Lambda_5 = \frac{\eta}{R}\lambda_1 - C_3' T_0^{-2}\lambda_3$$
$$\Lambda_6 = C_4'\lambda_4 T_0^2 - C_9' - C_8'\lambda_8 - C_7'\lambda_7 - C_6'\lambda_6 - C_5'\lambda_5 - C_3'\lambda_3$$
$$\Lambda_7 = C_1'(\bar{T}_0^2 - 1)\lambda_1 - 2C_2'\lambda_2,$$

et

$$(1.80)\qquad N_{\sigma'} = (C_9' + (\bar\kappa - 1)C_0\lambda_8)\bar T_0^2 \left\|\Delta\sigma'\right\|_{L^2}^2$$
$$+ (C_7'\lambda_7 + C_0(\bar\kappa-1)\lambda_6)\bar T_0^2 \sum_{i=1}^{2} \|\partial_{x_i}\partial_{x_3}\sigma'\|_{L^2}^2 + k\lambda_5 \sum_{i,j=1}^{2} \left\|(\frac{\bar T}{\bar\varrho})^{\frac12}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma'\right\|_{L^2}^2$$
$$+ k\lambda_2 \sum_{i=1}^{2} \left\|(\frac{\bar T}{\bar\varrho})^{\frac12}\partial_{x_i}\sigma'\right\|_{L^2}^2 + (C_4'\lambda_4 + C_0(\bar\kappa-1)\lambda_3)\bar T_0^2 \left\|\partial_{x_3}\sigma'\right\|_{L^2}^2$$
$$+k\lambda_1 \left\|(\frac{\bar T}{\bar\varrho})^{\frac12}\sigma'\right\|_{L^2}^2 .$$

Ceci étant, si $\bar T_0$ est assez grand, on peut voir qu'il est possible de choisir $\lambda_1, \cdots, \lambda_8$ en sorte que (voir (1.77), (1.79) et (1.80))

$$(1.81)\qquad \Lambda_i > 0 \quad \forall\, i = 1, \cdots, 5, \quad \text{et} \quad N_{\sigma'} \le (1-\delta)|\sigma'|_2^2$$

avec $\delta \in ]0,1[$. On voit qu'un tel choix est possible, en effet, en se donnant $\lambda_8$, on peut grâce aux contraintes (1.81) déterminer de proche en proche $\lambda_7, \lambda_6, \cdots \lambda_1$. Les $\lambda_i$ $(i = 1, \cdots, 8)$ ainsi déterminés entraînent en particulier que $\Lambda_7 > 0$ et $\Lambda_6 > 0$ si $\bar T_0$ est assez grand. Si on rappelle maintenant l'inégalité (1.78), compte tenu de (1.81), on obtient

$$(1.82)\quad \|v\|_{H^3}^2 + \|\vartheta\|_{H^2}^2 + |\sigma|_2^2 \le (1-\delta)|\sigma'|_2^2 + \tilde C(\|F'\|_{H^1}^2 + \|\vartheta\|_{H^2}^2 + \|v\|_{H^3}\|\sigma\|_{H^2}^2).$$

Compte tenu de (1.30)- (1.32), (1.34) et (1.35), on peut voir facilement que, si $r$ et $\|\varepsilon\|_{H^2(\mathbb{T})}$ sont assez petits, alors il existe $\alpha \le \frac{\delta}{1-\delta}$ tel que

$$(1.83)\qquad \tilde C(\|F'\|_{H^1}^2 + \|\vartheta\|_{H^2}^2 + \|v\|_{H^3}\|\sigma\|_{H^2}^2) \le \alpha(1-\delta)r^2,$$

en sorte que, de (1.82) et (1.83), il vient

$$\|v\|_{H^3}^2 + \|\vartheta\|_{H^2}^2 + |\sigma|_2^2 \le (1-\delta)(1+\alpha)r^2 \le r^2,$$

c'est-à-dire que

$$(1.84)\qquad \|\mathcal{O}(u')\|_X^2 = \|v\|_{H^3}^2 + \|\vartheta\|_{H^2}^2 + |\sigma|_2^2 \le r^2,$$

ce qui signifie que $\mathcal{O}(B) \subseteq B$. Ainsi s'achève la démonstration du lemme 1.6.1, et, comme on l'a déjà noté, celle du théorème 1.2.1. $\square$

# Chapitre 2

# Sur le potentiel de pression-gravitation pour le mouvement d'un gaz à transformation adiabatique

# Sur le potentiel de pression-gravitation pour le mouvement d'un gaz à transformation adiabatique

## 2.1 Introduction

Dans la physique de l'atmosphère et de la météorologie, l'état hydrostatique joue, comme il est bien connu, le rôle fondamental pour le problème de stabitilité et d'instabilité de l'atmosphère (voir par exemple [19]). Or, la question de la stabilité de la distribution de la densité et de la température dans la structure de l'équation d'un gaz visqueux compressible et calorifère n'est, nous semble-t-il, pas encore bien élucidée. Toutefois, si la distribution de la température au bord est constante, dans [17], les auteurs ont établi la stabilité de la solution autour de l'état d'équlibre du même système d'équations dans un domaine borné. Ce résultat s'étend facilement au cas où la température au bord ne varie pas sensiblement. Mais, si la distribution de la température à l'état d'équilibre varie sensiblement, comme dans notre cas, la question de la stabilité autour de l'état d'équilibre présente de sérieuses difficultés. On s'est donc intéressé, du point de vue de la stabilité, à l'étude d'un système d'équations dit à transformation adiabatique assez proche du système des équations d'un gaz barotropique connu comme équations de Navier-Stokes compressibles. Avant d'introduire le système à transformation adiabatique, revenons sur l'étude faite (voir [7] et pour des probèmes connexes [24], [22], [15]) dans le cas des équations d'un gaz visqueux barotropique

$$\varrho\partial_t v + \varrho(v \cdot \nabla)v - \mu\Delta v - \lambda\nabla\nabla \cdot v + \nabla p = -\varrho\nabla\Phi,$$
$$\partial_t\varrho + \nabla \cdot (\varrho v) = 0,$$

dans un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^3$, où $\Phi$ est le potentiel gravitationnel. Quant à la pression, dans le cas barotropique, elle est donnée par la relation

$$p = h\varrho^{\gamma},$$

où $\gamma$ est l'exposant de l'adiabatique.

La fonctionnelle dite potentiel de pression-gravitation

$$\Psi_b(\varrho) = \int_\Omega [\frac{h}{\gamma - 1}\varrho^{\gamma} + \varrho\Phi]dx$$

joue le rôle de l'énérgie potentielle dûe à la gravitation et à la pression. En effet, si $(v, \varrho)$ est solution de ce système d'équations, l'énérgie totale est donnée par

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \varrho|v|^2 dx + \Psi_b(\varrho)$$

et vérifie l'égalité de l'énérgie

$$\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}\int_\Omega \varrho|v|^2 dx + \Psi_b(\varrho)] + \int_\Omega [\mu \sum_{j,k=1}^{3} |\partial_{x_j} v_k|^2 + \lambda(\nabla \cdot v)^2]dx = 0,$$

où $\mu$ et $\lambda$ sont les coefficients de viscosité. Il n'est pas difficile de constater que, étant donnée la masse totale du gaz, la distribution de densité au repos

$$\varrho_r(x) = (C - \Phi)^{\frac{1}{\gamma-1}}(\frac{\gamma - 1}{h\gamma})^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

où $C$ est une constante telle que

$$\inf_{x\in\Omega} \varrho_r(x) > 0,$$

réalise le minimum de la fonctionnelle $\Psi_b(\varrho)$. La fonctionnelle $\Psi_b(\varrho)$, ou son équivalent (commode)

$$\int_\Omega [h(\frac{1}{\gamma - 1}(\varrho^{\gamma} - \varrho) - \varrho + 1) + \varrho\Phi]dx$$

obtenu en lui adjoignant une constante, est un instrument utile pour l'étude de la stabilité de l'état d'équilibre (voir [7]).

Nous considérons alors, au lieu des équations d'un gaz visqueux barotropique, le système d'équations à transformation adiabatique

$$\varrho\partial_t v + \varrho(v\cdot\nabla)v - \mu\Delta v - \lambda\nabla(\nabla\cdot v) = -R\nabla p - \varrho\nabla\Phi, \tag{2.1}$$

$$\partial_t\varrho + \nabla\cdot(\varrho v) = 0, \tag{2.2}$$

$$C_V\varrho\big[\partial_t T + v\cdot\nabla T\big] + R\varrho T\,\nabla\cdot v = 0, \tag{2.3}$$

où

$$p = R\varrho T.$$

Comme on peut le constater, dans sa structure, ce système est analogue au système des équations d'un gaz barotropique. L'équation (2.3) décrit la transformation adiabatique qui, comme on le verra dans le lemme 2.2.1, se traduit par l'invariance du rapport

$$q = \frac{T^{\frac{1}{\gamma}}}{\varrho^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \tag{2.4}$$

le long des trajectoires définies par le système d'équations différentielles

$$\frac{d}{dt}x(x_0,t) = v(t,x(x_0,t)), \quad x(x_0,t_0) = t_0.$$

Le système (2.1)-(2.3) résulte du système complet des équations du mouvement d'un gaz visqueux (voir par exemple [12]) en négligeant la diffusion de la chaleur et l'augmentation de la température dûe à la friction interne du gaz. Les coefficients de viscosité $\mu$ et $\lambda$, comme requis par le principe de la thermodynamique, doivent vérifier la relation

$$\mu \geq 0, \qquad \lambda \geq \frac{1}{3}\mu; \tag{2.5}$$

on n'exclut pas le cas où $\mu = 0$ et $\lambda = 0$. En ce qui concerne l'exposant de l'adiabatique $\gamma$, nous rappelons que l'on a

$$\gamma = 1 + \frac{R}{C_V}. \tag{2.6}$$

Pour la construction de ce système d'équations (2.1)-(2.3) et les relations de la transformation adiabatique, on peut consulter [14] et [12].

Analoguement au cas barotropique, on dispose également ici d'une fonctionnelle de l'énergie potentielle, soit

$$\widetilde{\Psi}(\varrho, T) = \int_\Omega [C_V \varrho T + \varrho \Phi] dx. \tag{2.7}$$

Dans la suite, on s'intéressera à l'existence d'un couple défini par une distribution de la densité et de la température minimisant la fonctionnelle (2.7) dans une classe opportunément choisie. En effet, soient $m(\alpha)$ une fonction non-négative, non-décroissante et bornée et $M_+(\Omega)$ l'ensemble des fonctions strictement positives mesurables définies sur $\Omega$, c'est-à-dire

$$M_+(\Omega) = \{\, f : \Omega \to \mathbb{R},\ \text{mesurable} \,|\, f(x) > 0\ \forall x \in \Omega \,\}. \tag{2.8}$$

On pose alors

$$\mathcal{D}_{m(\cdot)} = \Big\{ (\varrho, T) \in (M_+(\Omega))^2 \ : \ \int_{\{T^{\frac{1}{\gamma}} \varrho^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} \leq \alpha\}} \varrho(x) dx = m(\alpha) \quad \forall \alpha \geq 0 \Big\}. \tag{2.9}$$

Nous commencerons par examiner en particulier les relations entre le système d'équations (2.1)-(2.3) et la fonctionnelle (2.7). Plus précisement, on verra (voir le lemme 2.2.4) que cette classe est invariante par rapport aux équations (2.2)-(2.3). Ensuite, on s'intéressera de plus près au problème de minimisation de la fonctionnelle (2.7) dans la classe non convexe (2.9). Il s'agira donc, contrairement au cas des équations d'un gaz visqueux barotropique, d'une optimisation non convexe. Ceci exigera, comme on le verra par la suite, un raisonnement très élaboré pour démontrer que l'existence d'un mimimum pour fonctionnelle $\widetilde{\Psi}$. Par ailleurs, dans le cas affirmatif, une caractérisation de la stabilité au sens d Lyapounov de ce mimimun sera donnée.

## 2.2 Propriétés élémentaires du système d'équations

Dans ce paragraphe nous nous rappelons des propriétés élémentaires du système d'équations (2.1)-(2.3). Même si elles sont des faits bien connus ou résultent immédiatement du système d'équations, elles sont importantes pour le raisonnement qui suivra.

Remarquons d'abord que le fait que l'équation (2.3) représente la transformation adiabatique se traduit par l'invariance du rapport

$$q(t, x) = \frac{T(t, x)^{\frac{1}{\gamma}}}{\varrho(t, x)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \tag{2.10}$$

le long de chaque trajectoire. Plus précisément, on a le lemme suivant.

**Lemme 2.2.1.** *Si $v$, $\varrho$ et $T$ vérifient les équations (2.2) et (2.3) dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et si, pour $t_0 \leq t \leq t_1$, la trajectoire*

$$\{\, x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = x(t, x_0),\ t_0 \leq t \leq t_1 \,\}, \quad x(t, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t', x(t', x_0))dt',$$

*reste dans le domaine $\Omega$, alors on a*

$$q(t, x(t, x_0)) = q(t_0, x_0) \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{2.11}$$

**Démonstration.** En effet, en écrivant (2.2) sous la forme

$$\varrho \nabla \cdot v = -\frac{\partial \varrho}{\partial t} - v \cdot \nabla \varrho$$

et en substituant cette expression dans (2.3), on a

$$C_V \varrho \Big[\frac{\partial}{\partial t} T + v \cdot \nabla T\Big] - RT \Big[\frac{\partial \varrho}{\partial t} + v \cdot \nabla \varrho\Big] = 0,$$

ou

$$C_V \Big[\frac{\partial}{\partial t} \log\, T + v \cdot \nabla \log\, T\Big] - R \Big[\frac{\partial}{\partial t} \log\, \varrho + v \cdot \nabla \log\, \varrho\Big] = 0.$$

Comme $\dfrac{C_V}{R} = \dfrac{1}{\gamma - 1}$ (voir (2.6)), il s'ensuit que

$$\frac{\partial}{\partial t} \log \frac{T^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\varrho} + v \cdot \nabla \log \frac{T^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\varrho} = 0,$$

ou, en désignant par $\dfrac{d}{dt}$ la dérivée totale,

$$\frac{d}{dt} \log \frac{T^{\frac{1}{\gamma}}}{\varrho^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = 0, \tag{2.12}$$

d'où résulte (2.11). $\square$

L'invariance de $q(t, x)$ le long de chaque trajectoire, jointe à la conservation de la masse, implique la conservation globale de la quantité $\varrho q$. Or, pour s'en assurer, il faut préciser les conditions aux limites pour le vecteur vitesse $v$. En effet, soit un domaine $\Omega$ vérifiant la condition suivante :

(2.13) $\quad \Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ muni de la frontière $\partial\Omega$ de classe $C^{0,1}$.

Comme condition aux limites, nous supposons en général que

$$v \cdot n = 0 \qquad \text{sur} \ \ \partial\Omega, \tag{2.14}$$

où $n$ est la normale extérieure à la frontière $\partial\Omega$, et, si $\mu > 0$, nous supposons que

$$v = 0 \qquad \text{sur} \ \ \partial\Omega. \tag{2.15}$$

Comme on le verra dans le paragraphe, cette condition aux limites servira à obtenir l'égalité de l'énergie.

Dans la suite on se limitera au cas où le domaine $\Omega$ vérifie la condition (2.13). Toutefois, comme on pourra le constater facilement, toutes les affirmations qui y seront exposer demeureront valides même si le domaine $\Omega$ est périodique dans une ou deux ou trois directions de l'espace $\mathbb{R}^3$ et de manière correspondante toutes les fonctions qui interviennent dans les équations sont périodiques, et, si sur la frontière $\partial\Omega$ la condition (2.14) (si $\mu = 0$) ou (2.15) (si $\mu > 0$) est vérifiée. On commence par Rappeler la conservation de la masse totale, que nous désignons par $M$. En effet, on a

**Lemme 2.2.2.** *Si $v$ et $\varrho$ vérifie dans $\Omega$ l'équation (2.2) et $v$ condition (2.15), alors, pour $t_0 \leq t \leq t_1$, on a*

$$M = \int_\Omega \varrho(t,x)dx = \int_\Omega \varrho(t_0,x)dx \qquad \forall t \in [t_0,t_1]. \tag{2.16}$$

**Démonstration.** Elle résulte immédiatement de l'intégration sur $\Omega$ de l'équation (2.2) et de la condition aux limites (2.15). □

**Lemme 2.2.3.** *On pose*

$$\chi(t,x) = (\varrho(t,x)T(t,x))^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{2.17}$$

*Si $\varrho$ et $T$ vérifient dans $\Omega$ les équations (2.2) et (2.3) et $v$ la condition (2.15), alors, pour $t_0 \leq t \leq t_1$, on a*

$$\int_\Omega \chi(t,x)dx = \int_\Omega \chi(t_0,x)dx \qquad \forall t \in [t_0,t_1]. \tag{2.18}$$

**Démonstration.** Comme $\varrho = \dfrac{\chi}{q}$ (voir (2.11) et (2.17)), de (2.2) il résulte

$$q\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\chi}{q}) + q\nabla \cdot (\frac{\chi}{q}v) = 0.$$

D'autre part, de (2.12) (voir aussi (2.11)) on déduit que

$$\frac{\chi}{q}\big(\frac{\partial}{\partial t}q + v\cdot\nabla q\big) = 0.$$

En adjoignant ces deux égalités, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\chi + \nabla\cdot(\chi v) = 0.$$

En intégrant cette équation sur $\Omega$, compte de (2.14), on obtient (2.18). □

Citons une autre conséquence immédiate du lemme 2.2.1.

**Lemme 2.2.4.** *On pose*

$$H_\alpha(t) = \{\, x\in\Omega \,|\, q(t,x) < \alpha\,\}, \qquad 0\le\alpha<\infty. \tag{2.19}$$

*Sous les mêmes hypothèses du lemme 2.2.3, pour tout* $\alpha\in[0,\infty[$, *on a*

$$\int_{H_\alpha(t)}\varrho(t,x)dx = \int_{H_\alpha(t_0)}\varrho(t_0,x)dx \qquad \forall t\in[t_0,t_1]. \tag{2.20}$$

**Démonstration.** Comme (2.15) implique que la trajectoire $x = x(t,x_0)$ qui part de $x_0\in\Omega$ ne sorte pas de $\Omega$, le lemme 2.2.4 résulte immédiatement du lemme 2.2.1. □

Le lemme précédent signifie que la classe $\mathcal{D}_{m(\cdot)}$ introduite dans (2.9) est invariante par rapport aux équations (2.1)-(2.3) avec la condition (2.15), en prouvant la relation

$$m(\alpha) = \int_{H_\alpha(t)}\varrho(t,x)dx. \tag{2.21}$$

## 2.3 Egalité de l'énergie

Maintenant nous allons démontrer l'égalité dite de l'énérgie pour le système d'équations (2.1)-(2.3) avec la condition (2.15) . Dans cette égalité on voit clairement le rôle joué par la fonctionnelle (voir (2.7)) $\tilde\Psi(\varrho,T)$.

**Lemme 2.3.1.** *Si* $(v,\varrho,T)$ *est solution du système d'équations (2.1)-(2.3) avec la condition (2.15), alors on a*

$$C_V\frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho T dx = R\int_\Omega v\cdot\nabla(\varrho T)dx. \tag{2.22}$$

**Démonstration.** Grâce à (2.2) et (2.6) l'équation (2.3) peut être écrite dans la forme

$$C_V \frac{\partial}{\partial t}(\varrho T) + (R + C_V)(\varrho T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \nabla \cdot ((\varrho T)^{\frac{1}{\gamma}} v) = 0.$$

On a donc, compte tenu de (2.15),

$$0 = \int_\Omega \Big[ C_V \frac{\partial}{\partial t}(\varrho T) + (R + C_V)(\varrho T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \nabla \cdot ((\varrho T)^{\frac{1}{\gamma}} v) \Big] dx =$$

$$= C_V \frac{d}{dt} \int_\Omega \varrho T dx - (R + C_V) \int_\Omega \frac{\gamma - 1}{\gamma} v \cdot \nabla(\varrho T)\big) dx.$$

Or, comme on a $\dfrac{\gamma - 1}{\gamma} = \dfrac{R}{R + C_V}$, on obtient (2.22). $\square$

**Proposition 2.3.1.** *Si $(v, \varrho, T)$ est solution du système d'équations (2.1)-(2.3) avec la condition (2.14) (si $\mu = 0$) ou la condition (2.15) (si $\mu > 0$), alors on a*

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|\sqrt{\varrho} v\|_{L^2}^2 + \tilde{\Psi}(\varrho, T)\Big) + F_{\mu,\lambda}(v) = 0, \tag{2.23}$$

*où $\tilde{\Psi}(\varrho, T)$ est la fonctionnelle définie dans (2.7), tandis que*

$$F_{\mu,\lambda}(v) = \int_\Omega \Big[ \mu \sum_{j,k=1}^{3} |\partial_{x_j} v_k|^2 + \lambda (\nabla \cdot v)^2 \Big] dx. \tag{2.24}$$

**Démonstration.** Notons d'abord que, si $v$ satisfait à (2.15) ou (2.14) selon que $\mu > 0$ ou bien $\mu = 0$ , alors on a

$$\int_\Omega (-\mu \Delta v - \lambda \nabla(\nabla \cdot v)) \cdot v dx = F_{\mu,\lambda}(v). \tag{2.25}$$

Par ailleurs, compte tenu de l'équation (2.2), on peut voir aisément que

$$-\int_\Omega \varrho v \cdot \nabla \Phi dx = \int_\Omega \Phi \nabla \cdot (\varrho v) dx = -\int_\Omega \Phi \frac{\partial \varrho}{\partial t} dx = -\frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho \Phi dx, \tag{2.26}$$

$$\int_\Omega \varrho v \cdot \frac{\partial v}{dt} dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho |v|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |v|^2 \frac{\partial \varrho}{\partial t} dx = \tag{2.27}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho |v|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |v|^2 \nabla \cdot (\varrho v) dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho |v|^2 dx - \int_\Omega \varrho v \cdot [(v \cdot \nabla) v] dx.$$

Si on multiplie maintenant l'équation (2.1) par $v$ et on l'intègre sur $\Omega$, compte tenu de (2.25)- (2.27) et de (2.7), on obtient (2.23). $\square$

Il est évident qu'en vertu de (2.5) on a

$$F_{\mu,\lambda}(v) \geq 0.$$

Or, il est utile de rappeler que, comme on le sait bien, dans le cas où $\mu > 0$ et $v$ satisfait à la condition (2.15), la fonctionnelle $F_{\mu,\lambda}(v)$ définit une norme équivalente à celle de $H_0^1(\Omega)$. C'est-à-dire, il y a une constante positive $k$ telle que

$$\frac{1}{k}\|u\|_{H^1} \leq \sqrt{F_{\mu,\lambda}(u)} \leq k\|u\|_{H^1} \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.28}$$

## 2.4 Minimisant de la fonctionnelle de l'énérgie potentielle.

Comme on le voit dans (2.23)-(2.25), si $\mu > 0$, alors la fonctionnelle $F_{\mu,\lambda}(v)$ représente la perte de l'énergie cinétique due à la viscosité. Donc se posent les questions s'il existe l'extrême inférieur fini $a_0$ de $\tilde{\Psi}(\varrho, T)$ dans une classe invariante par rapport à la dynamique définie par le système d'équations (2.1)-(2.3) avec (2.14) si $\mu = 0$ ou (2.15), si $\mu > 0$, de sorte que pour la solution $(v, \varrho, T)$ on ait toujours

$$\frac{1}{2}\|\sqrt{\varrho}v\|_{L^2}^2 + \tilde{\Psi}(\varrho, T) \geq a_0$$

et, dans le cas affirmatif, quelle distribution de densité et de température réalise le minimum de $\tilde{\Psi}(\varrho, T)$ dans la classe $\mathcal{D}_{m(\cdot)}$ de couples de fonctions admissibles $(\varrho, T)$.

Pour examiner ces questions, pour des raisons techniques, il nous convient de réécrire la fonctionnelle $\tilde{\Psi}(\varrho, T)$ dans la forme

$$\Psi(\chi, q) = \int_\Omega [C_V \chi^\gamma + \frac{\chi}{q}\Phi]dx, \tag{2.29}$$

où

$$\chi(x) = (\varrho(x)T(x))^{\frac{1}{\gamma}}, \qquad q(x) = \frac{T(x)^{\frac{1}{\gamma}}}{\varrho(x)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}. \tag{2.30}$$

On constate immédiatement que, si $(\chi, q)$ et $(\varrho, T)$ sont reliées par les relations (2.30), alors on a

$$\Psi(\chi, q) = \tilde{\Psi}(\varrho, T). \tag{2.31}$$

Considérons une distribution de densité $\varrho_0(x) > 0$ et une distribution de température $T_0(x) > 0$ dans $\Omega$, qui, jointes à un champs de vecteur $v_0(x)$ satisfaisant à (2.14) (si $\mu = 0$) ou (2.14) (si $\mu > 0$), peuvent être la donnée initiale pour le système d'équations (2.1)- (2.3). Conformément à (2.9), (2.20) et (2.21), on définit la fonction $m(\cdot)$ par la relation

$$m(\alpha) = \int_{\{q_0(x)\leq\alpha\}} \varrho_0(x)dx, \qquad q_0(x) = \frac{T_0(x)^{\frac{1}{\gamma}}}{\varrho_0(x)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}, \qquad 0 \leq \alpha < \infty. \tag{2.32}$$

On a évidemment

$$m(0) = 0\,, \qquad \lim_{\alpha\to\infty} m(\alpha) = M,$$

où $M$ est la masse totale du gaz dans $\Omega$ ($0 < M < \infty$). Or, pour simplifier l'exposition, nous supposons une condition plus restrictive

$$m(\alpha) = 0 \ \text{ si } \ 0 \leq \alpha < \alpha_0, \quad m(\alpha) = M \ \text{ si } \ \alpha \geq \alpha_1, \quad 0 < \alpha_0 \leq \alpha_1 < \infty, \tag{2.33}$$

ce qui implique que $\alpha_0 \leq q_0(x) \leq \alpha_1$ p. p..

Étant définie la fonction $m(\cdot)$, posons

$$\mathcal{A}_{m(\cdot)} = \big\{(\chi, q) \in (M_+(\Omega))^2 \mid \int_{\{q(x)\leq\alpha\}} \frac{\chi(x)}{q(x)}dx = m(\alpha) \quad \forall\alpha \geq 0\big\}, \tag{2.34}$$

où $M_+(\Omega)$ est la classe introduite dans (2.8). Il est clair que, étant donnée une fonction non-décroissante $m(\alpha)$ satisfaisant à la condition (2.33), on peut définir l'ensemble $\mathcal{A}_{m(\cdot)}$ par la relation (2.34) sans faire nécessairement référence à la donnée initiale $(\varrho_0, T_0)$. La référence à la donnée initiale sera utile pour obtenir des informations sur la solution du système d'équations (2.1)-(2.3).

**Remarque 2.4.1.** *Si $(v, \varrho, T)$ est solution du système d'équations (2.1)-(2.3) avec la condition aux limites (2.14) (si $\mu = 0$) ou (2.15) (si $\mu > 0$) et la condition initiale*

$$v\big|_{t=t_0} = v_0, \quad \varrho\big|_{t=t_0} = \varrho_0, \quad T\big|_{t=t_0} = T_0, \tag{2.35}$$

*et si la fonction $m(\cdot)$ est définie par (2.32) à partir de $\varrho_0$ et $T_0$, alors on a*

$$(\chi(t,\cdot), q(t,\cdot)) \in \mathcal{A}_{m(\cdot)} \qquad \forall t \geq t_0, \tag{2.36}$$

*où $\chi(t,x)$ et $q(t,x)$ sont les fonctions définies par (2.17) et (2.11) à partir de $\varrho(t,x)$ et $T(t,x)$, tandis que $\mathcal{A}_{m(\cdot)}$ est la classe définie par (2.34).*

**Démonstration.** Comme en vertu de (2.11) et (2.17),on

$$\varrho(x,t) = \frac{\chi}{q}(x,t)$$

du lemme 1.5.4 résulte immédiatement (2.36). $\square$

On remarque en outre que, si $(\chi, q) \in \mathcal{A}_{m(\cdot)}$, alors on a

$$\int_\Omega \chi(x)dx = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \alpha\, dm(\alpha), \tag{2.37}$$

où l'intégrale du second membre est à considérer comme intégrale de Stieljes. En effet, si $(\chi, q) \in \mathcal{A}_{m(\cdot)}$, alors compte tenu de la définition (2.32) de $m(\alpha)$ et de la condition (2.13), on a

$$\int_\Omega \chi(x)dx = \int_\Omega q(x)\frac{\chi(x)}{q(x)}dx = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \alpha\, dm(\alpha).$$

Pour déterminer le minimisant de la fonctionnelle $\Psi(\chi, q)$ dans la classe $\mathcal{A}_{m(\cdot)}$, il nous convient d'introduire la variable $\varphi$, qui correspond aux niveaux du potentiel gravitationnel $\Phi$. On pose

$$\Phi_0 = \inf_{x\in\Omega} \Phi(x), \qquad \Phi_1 = \sup_{x\in\Omega} \Phi(x), \tag{2.38}$$

$$\omega(\varphi) = \mathrm{mes}(\{x \in \Omega \,|\, \Phi(x) \leq \varphi\}). \tag{2.39}$$

Nous supposons que

$$\omega(\varphi) \in C^2([\Phi_0, \Phi_1]), \qquad \frac{d\omega(\varphi)}{d\varphi} > 0 \quad \forall\varphi \in [\Phi_0, \Phi_1],\ -\infty < \Phi_0 < \Phi_1 < \infty. \tag{2.40}$$

Pour simplifier la notation, nous posons

$$u(\varphi) = \frac{d\omega(\varphi)}{d\varphi}. \tag{2.41}$$

On définit

$$h(m') = \inf\{\, \alpha > 0 \,|\, m' < m(\alpha)\,\} \quad \text{pour } 0 < m' < M \tag{2.42}$$

(voir (2.32), (2.33)) ; s'il est nécessaire, on prolonge $h(m')$ à $m' = M$, en posant

$$h(M) = +\infty,$$

comme la défintion (2.42) et la relation (2.33) l'entraînent. Il est évident que $h(\cdot)$ sera la fonction inverse de $m(\cdot)$ là où $m(\alpha)$ est continue et strictement croissante. Étant définie la fonction $h(\cdot)$, on considère l'équation intégrale

$$\bar{m}_r(\varphi) = \int_{\Phi_0}^{\varphi} \frac{1}{h(\bar{m}_r(\varphi'))} \Big( \Big[ C - \frac{\gamma - 1}{R\gamma} \int_{\Phi_0}^{\varphi'} \frac{1}{h(\bar{m}_r(\varphi''))} d\varphi'' \Big]^+ \Big)^{\frac{1}{\gamma-1}} u(\varphi') d\varphi' \tag{2.43}$$

($[...]^+$ désigne la partie positive de $[...]$) pour la fonction inconnue $\bar{m}_r(\varphi)$ ($\Phi_0 \leq \varphi \leq \Phi_1$) avec la condition

$$\bar{m}_r(\Phi_1) = M. \tag{2.44}$$

**Lemme 2.4.1.** *Il existe une fonction $\bar{m}_r(\varphi)$ et une constante $C$ et seules qui vérifient (2.43) et (2.44). La fonction $\bar{m}_r(\varphi)$ est continue et non-décroissante.*

**Démonstration.** Comme le deuxième membre de (2.43) est donné par un opérateur intégral, même si non-linéaire, on voit aisément que, pour chaque $C > 0$ fixé, il existe une solution $\bar{m}_r(\varphi)$, qui est continue (et même lipschitzienne) et non-décroissante. S'il existait une autre solution $\bar{m}_r^*(\varphi)$ différente de $\bar{m}_r(\varphi)$, il existerait $\bar{\varphi}$ et $\bar{\varphi}_1$ tels que $\Phi_0 \leq \bar{\varphi} < \bar{\varphi}_1 \leq \Phi_1$ et

$$\bar{m}_r^*(\varphi) = \bar{m}_r(\varphi) \quad \text{pour} \quad \Phi_0 \leq \varphi \leq \bar{\varphi}, \qquad \bar{m}_r^*(\varphi) < \bar{m}_r(\varphi) \quad \text{pour} \quad \bar{\varphi} \leq \varphi \leq \bar{\varphi}_1$$

(pour la symétrie entre le rôle de $\bar{m}_r(\varphi)$ et celui de $\bar{m}_r^*(\varphi)$, il nous suffit de considérer le cas $\bar{m}_r^*(\varphi) < \bar{m}_r(\varphi)$ pour $\bar{\varphi} \leq \varphi \leq \bar{\varphi}_1$), alors en vertu de (2.43) on aurait $h(\bar{m}_r^*(\varphi)) \neq h(\bar{m}_r(\varphi))$ au moins pour $\bar{\varphi} < \varphi < \bar{\varphi}_2 \leq \bar{\varphi}_1$ avec $\bar{\varphi} < \bar{\varphi}_2$. Mais, comme $h(\cdot)$ est non-décroissante, on aurait

$$h(\bar{m}_r^*(\varphi)) < h(\bar{m}_r(\varphi)) \qquad \text{pour} \quad \bar{\varphi} < \varphi < \bar{\varphi}_2.$$

Alors, pour la propriété élémentaire de l'intégrale il existerait un point $\bar{\varphi}_3$ tel que $\bar{\varphi} < \bar{\varphi}_3 \leq \bar{\varphi}_2$ et

$$\frac{1}{h(\bar{m}_r(\varphi'))} \Big( \Big[ C - \frac{\gamma - 1}{R\gamma} \int_{\Phi_0}^{\varphi'} \frac{1}{h(\bar{m}_r(\varphi''))} d\varphi'' \Big]^+ \Big)^{\frac{1}{\gamma-1}} <$$

$$< \frac{1}{h(\bar{m}_r^*(\varphi'))}\Big(\Big[C - \frac{\gamma-1}{R\gamma}\int_{\Phi_0}^{\varphi'} \frac{1}{h(\bar{m}_r^*(\varphi''))} d\varphi''\Big]^+\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

pour $\bar{\varphi} < \varphi \leq \bar{\varphi}_3$, ce qui, compte tenu des relations (2.40) et (2.41), contredit l'hypothèse $\bar{m}_r^*(\varphi) < \bar{m}_r(\varphi)$ pour $\bar{\varphi} \leq \varphi \leq \bar{\varphi}_1$. Par conséquent, la solution $\bar{m}_r(\varphi)$ de (2.43) avec un $C > 0$ fixé est unique. Désignons-la par $\bar{m}_r(C, \varphi)$. Il est évident que, considérée comme fonction de $C$, $\bar{m}_r(C, \varphi)$ est continue et strictement croissante en $C > 0$, ce qui nous donne l'unique constante $C$ telle que

$$\bar{m}_r(C, \Phi_1) = M,$$

ce qui achève la démonstration du lemme. $\square$

On remarque que, si $M$ est suffisamment grand, alors on a $h(\bar{m}_r(\varphi)) < \infty$ pour tout $\varphi \in ]\Phi_0, \Phi_1[$ et $\bar{m}_r(\varphi)$ est strictement croissante en $\varphi$. Par contre, si $M$ n'est pas suffisamment grand, alors on peut trouver un $\varphi^* \in ]\Phi_0, \Phi_1[$ telle que la solution $\bar{m}_r(\varphi)$ de (2.43) et (2.44) prenne la valeur $\bar{m}_r(\varphi) = M$ pour $\varphi^* \leq \varphi \leq \Phi_1$ et donc $h(\bar{m}_r(\varphi)) = \infty$ pour $\varphi^* \leq \varphi \leq \Phi_1$. Dans ce cas, si on définit $\bar{q}_r(\varphi)$ et $\bar{\chi}_r(\varphi)$ de manière analogue à (2.44) , on aurait

$$\bar{\varrho}_r(\varphi) = \frac{\bar{\chi}_r(\varphi)}{\bar{q}_r(\varphi)} = 0 \qquad \text{pour} \;\; \varphi^* \leq \varphi \leq \Phi_1.$$

C'est une conséquence normale du modèle. En effet, si $\frac{\nabla\Phi}{M}$ est suffisamment grand et si, pour simplifier, on considère le cas où $q$ est constante dans $\Omega$, on retrouvera la situation bien connue d'un gaz barotropique avec $p = C\varrho^\gamma$, $\gamma > 1$, dont la densité d'équilibre s'annule dans la région où $\Phi$ est assez grand.

Pour la question sur la validité du modèle, le cas où $\frac{\nabla\Phi}{M}$ est assez grand et $\bar{\varrho}_r(\varphi) = 0$ pour $\varphi^* \leq \varphi \leq \Phi_1$ mériterait d'être examiné et approfondi. Mais cet approfondissement requerrait d'autres considérations de natures différentes. Pour cela dans le présent travail nous nous limitons au cas où $M$ est suffisamment grand de sorte que

$$h(\bar{m}_r(\varphi)) < \infty \text{ et } C - \frac{\gamma-1}{R\gamma}\int_{\Phi_0}^{\varphi} \frac{1}{h(\bar{m}_r(\varphi'))} d\varphi' > 0 \; \forall \varphi \in ]\Phi_0, \Phi_1[.$$

Cela étant, on pose

$$\bar{q}_r(\varphi) = h(\bar{m}_r(\varphi)), \quad \bar{\chi}_r(\varphi) = \big[C - \frac{\gamma-1}{R\gamma}\int_{\Phi_0}^{\varphi} \frac{1}{\bar{q}_r(\varphi')} d\varphi'\big]^{\frac{1}{\gamma-1}}, \tag{2.45}$$

où $\bar{m}_r(\varphi)$ est la solution du problème (2.43) et (2.44) avec un $M$ suffisament grand.

**Remarque 2.4.2.** *Soit* $(\bar{q}_r, \bar{\chi}_r)$ *le couple défini dans (2.45). Alors* $(\bar{q}_r \circ \Phi, \bar{\chi}_r \circ \Phi)$ *appartient à* $\mathcal{A}_{m(\cdot)}$.

**Démonstration.** Comme $h(\cdot)$ est la fonction inverse de $m(\alpha)$, on a

$$h(\bar{m}_r(\varphi)) \leq \alpha \iff \bar{m}_r(\varphi) \leq m(\alpha).$$

Posons

$$\varphi_\alpha = \sup\{\, \varphi \in [\Phi_0, \Phi_1] \,|\, \bar{m}_r(\varphi) \leq m(\alpha) \,\}.$$

Comme $\bar{m}_r(\varphi)$ est croissante et continue, en vertu de (2.39) et de (2.41) on a

$$m(\alpha) = \bar{m}_r(\varphi_\alpha) = \int_{\Phi_0}^{\varphi_\alpha} \frac{\bar{\chi}_r(\varphi)}{\bar{q}_r(\varphi)} u(\varphi) d\varphi = \int_{\{\bar{q}_r(\Phi(x)) \leq \alpha\}} \frac{\bar{\chi}_r(\Phi(x))}{\bar{q}_r(\Phi(x))} dx,$$

ce qui démontre que $(\bar{q}_r \circ \Phi, \bar{\chi}_r \circ \Phi)$ appartient à $\mathcal{A}_{m(\cdot)}$. $\square$

**Remarque 2.4.3.** *Le couple* $(\bar{q}_r, \bar{\chi}_r)$ *défini dans (2.45) satisfait à l'égalité*

$$R\nabla \bar{\chi}_r(\Phi(x))^\gamma = -\frac{\bar{\chi}_r(\Phi(x))}{\bar{q}_r(\Phi(x))} \nabla \Phi(x). \tag{2.46}$$

**Démonstration.** Il est aisé de voir que

$$R\frac{d}{d\varphi}(\bar{\chi}_r(\varphi)^\gamma) = -\frac{\bar{\chi}_r(\varphi)}{\bar{q}_r(\varphi)}. \tag{2.47}$$

En remarquant que

$$\nabla \bar{\chi}_r(\Phi(x))^\gamma = \nabla \Phi(x) \frac{d}{d\varphi} \bar{\chi}_r(\varphi)\big|_{\varphi = \Phi(x)},$$

on déduit de (2.47) l'égalité (2.46). $\square$

C'est-à-dire, le couple $(\bar{\chi}_r, \bar{q}_r)$ nous donne une solution de l'équation d'équilibre (mécanique)

$$R\nabla(\varrho T) = -\varrho \nabla \Phi.$$

En outre, le couple $(\bar{\chi}_r, \bar{q}_r)$ réalise le minimum de $\Psi(\chi, q)$ dans $\mathcal{A}_{m(\cdot)}$. Plus précisément, on a la proposition suivante.

**Proposition 2.4.1.** *Le couple* $(\bar{\chi}_r, \bar{q}_r)$ *défini dans (2.45) satisfait à*

$$\Psi(\bar{\chi}_r \circ \Phi, \bar{q}_r \circ \Phi) = \inf_{(\chi, q) \in \mathcal{A}_{m(\cdot)}} \Psi(\chi, q). \tag{2.48}$$

## 2.5 Réduction de la classe de possibles minimisants.

Comme nous l'avons dit plus haut, la difficulté majeure pour démontrer la proposition 2.4.1 demeure dans le fait que la classe de couples de fonctions admissibles $\mathcal{A}_{m(\cdot)}$ n'est pas convexe. Pour contourner cette difficulté, nous cherchons d'abord à réduire la classe de possibles minimisants de $\Psi(\chi, q)$.

**Lemme 2.5.1.** *Soit $(\chi, q) \in \mathcal{A}_{m(\cdot)}$. Alors il existe $(\chi_1, q_1) \in \mathcal{A}_{m(\cdot)}$ tel que*

$$\frac{\chi_1(x)}{q_1(x)} = \varrho_1(\Phi(x))$$

*avec une fonction non-croissante $\varrho_1(\cdot) : [\Phi_0, \Phi_1] \to \mathbb{R}_+$ et que*

$$\Psi(\chi, q) \geq \Psi(\chi_1, q_1).$$

**Démonstration.** Il est évident qu'on peut choisir $\chi_1(x)$ et $q_1(x)$ de telle sorte que

$$\text{mes}(\{x \in \Omega | (\chi_1(x), q_1(x)) \in B\}) = \text{mes}(\{x \in \Omega | (\chi(x), q(x)) \in B\}) \tag{2.49}$$

pour tout ensemble borélien $B$ de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et qu'il existe une fonction non-croissante $\varrho_1(\varphi)$ vérifiant

$$\varrho_1(\Phi(x)) = \frac{\chi_1(x)}{q_1(x)}.$$

La relation (2.49) implique que pour tout $\alpha$ on a

$$\int_{\{q_1(x) \leq \alpha\}} \frac{\chi_1(x)}{q_1(x)} dx = \int_{\{q(x) \leq \alpha\}} \frac{\chi(x)}{q(x)} dx = m(\alpha). \tag{2.50}$$

On a donc

$$(\chi_1, q_1) \in \mathcal{A}_{m(\cdot)}.$$

De (2.49) on déduit en outre que

$$\int_\Omega \chi_1^\gamma(x) dx = \int_\Omega \chi^\gamma(x) dx.$$

D'autre part, comme $\varrho_1(\varphi)$ est non-croissante et que $\chi_1(x)$ et $q_1(x)$ vérifient (2.49), on a évidemment

$$\int_\Omega \Phi(x) \frac{\chi(x)}{q(x)} dx \geq \int_\Omega \Phi(x) \frac{\chi_1(x)}{q_1(x)} dx = \int_{\Phi_0}^{\Phi_1} \varphi \varrho_1(\varphi) u(\varphi) d\varphi.$$

Donc, en rappelant la définition de $\Psi(\chi, q)$, on a

$$\Psi(\chi, q) \geq \Psi(\chi_1, q_1),$$

ce qui achève la démonstration du lemme. $\square$

On pose maintenant

$$\tilde{m}(\varphi) = \int_{\Phi_0}^{\varphi} \frac{\tilde{\chi}(\varphi')}{\tilde{q}(\varphi')} u(\varphi) d\varphi', \qquad \tilde{\chi},\ \tilde{q} \in M_+([\Phi_0, \Phi_1]), \tag{2.51}$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_1 = \{\, (\tilde{\chi}, \tilde{q}) \in M_+([\Phi_0, \Phi_1])^2 \,|\, \tilde{m}(\Phi_1) = M,\ \tilde{q}(\varphi) = h(\tilde{m}(\varphi)) \,\}, \tag{2.52}$$

où $h(\cdot)$ est la fonction définie dans (2.42), tandis que $M_+([\Phi_0, \Phi_1])$ est la classe définie de manière analogue à (2.8) en remplaçant $\Omega$ par $[\Phi_0, \Phi_1]$.

**Lemme 2.5.2.** *Si $(\tilde{\chi}, \tilde{q}) \in \tilde{\mathcal{A}}_1$, alors on a*

$$(\tilde{\chi} \circ \Phi, \tilde{q} \circ \Phi) \in \mathcal{A}_{m(\cdot)}.$$

**Démonstration.** Soit $(\tilde{\chi}, \tilde{q}) \in \tilde{\mathcal{A}}_1$. Comme $\tilde{m}(\varphi)$ est une fonction continue, pour tout $\alpha \in h([0, M])$ il existe un $\varphi_\alpha \in [\Phi_0, \Phi_1]$ tel que

$$\alpha = \tilde{q}(\varphi_\alpha) = h(\tilde{m}(\varphi_\alpha)).$$

On a donc

$$m(\alpha) = \tilde{m}(\varphi_\alpha) = \int_{\{\tilde{q}(\Phi(x)) \leq \alpha\}} \frac{\tilde{\chi}(\Phi(x))}{\tilde{q}(\Phi(x))} dx,$$

ce qui prouve que $(\tilde{\chi} \circ \Phi, \tilde{q} \circ \Phi) \in \mathcal{A}_{m(\cdot)}$. $\square$

**Lemme 2.5.3.** *Soit $(\chi, q)$ un élément de $\mathcal{A}_{m(\cdot)}$. Alors il existe $(\tilde{\chi}_1, \tilde{q}_1) \in \tilde{\mathcal{A}}_1$ tel que*

$$\Psi(\chi, q) \geq \Psi(\tilde{\chi}_1 \circ \Phi, \tilde{q}_1 \circ \Phi). \tag{2.53}$$

**Démonstration.** En vertu du lemme 2.5.1, il suffit de le démontrer pour

$$(\chi, q) \in \mathcal{A}_{m(\cdot)}$$

tel qu'il existe une fonction non-croissante $\tilde{\varrho}(\varphi)$ vérifiant la relation

$$\tilde{\varrho}(\Phi(x)) = \frac{\chi(x)}{q(x)}.$$

Comme $\tilde{\varrho}(\varphi)$ peut être considérée donnée, on peut définir

$$\tilde{q}_1(\varphi) = h(\int_{\Phi_0}^{\varphi} \tilde{\varrho}(\varphi')u(\varphi')d\varphi'), \qquad \tilde{\chi}_1(\varphi) = \tilde{q}_1(\varphi)\tilde{\varrho}(\varphi). \tag{2.54}$$

On a évidemment

$$\frac{\tilde{\chi}_1(\Phi(x))}{\tilde{q}_1(\Phi(x))} = \tilde{\varrho}(\Phi(x)) = \frac{\chi(x)}{q(x)}. \tag{2.55}$$

Donc on a

$$\tilde{m}(\Phi_1) = \int_\Omega \frac{\tilde{\chi}_1(\Phi(x))}{\tilde{q}_1(\Phi(x))}dx = \int_\Omega \frac{\chi(x)}{q(x)}dx = M.$$

En outre de (2.54) et de (2.55) résulte immédiatement que $\tilde{q}_1(\varphi) = h(\tilde{m}(\varphi))$. On a donc $(\tilde{\chi}_1, \tilde{q}_1) \in \tilde{\mathcal{A}}_1$.

En vertu du lemme 2.5.2, on a $(\tilde{\chi}_1 \circ \Phi, \tilde{q}_1 \circ \Phi) \in \mathcal{A}_{m(\cdot)}$. En outre, on a

$$\int_{\{q(x)\leq\alpha\}} \varrho(x)dx = \int_{\{\tilde{q}_1(\Phi(x))\leq\alpha\}} \varrho(x)dx, \qquad \forall\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]. \tag{2.56}$$

De (2.56) il résulte que, quelque soit la fonction mesurable $f(\cdot)$, on a

$$\int_\Omega f(q(x))\varrho(x)dx = \int_\Omega f(q_1(x))\varrho(x)dx$$

(pourvu que l'intégrale soit bien définie). En particulier, on a

$$\int_\Omega q(x)^\gamma \varrho(x)dx = \int_\Omega q_1(x)^\gamma \varrho(x)dx.$$

D'autre part, comme $\tilde{q}_1(\varphi)$ est non-décroissante tandis que $\tilde{\varrho}(\varphi)$ est non-croissante, on a

$$\int_{\{\Phi(x)\leq\varphi\}} (q(x)^\gamma - q_1(x)^\gamma)\varrho(x)dx \geq 0 \qquad \forall\varphi \in [\Phi_0, \Phi_1]. \tag{2.57}$$

Donc, compte tenu de (2.54) et (2.55), on a

$$\int_\Omega (\chi(x)^\gamma - \chi_1(x)^\gamma)dx = \int_\Omega \varrho(x)^{\gamma-1}(q(x)^\gamma - q_1(x)^\gamma)\varrho(x)dx =$$

$$= \int_{\Phi_0}^{\Phi_1} \tilde{\varrho}(\varphi)^{\gamma-1}\Big(\frac{d}{d\varphi}\int_{\{\Phi(x)\leq\varphi\}}(q(x')^\gamma - q_1(x')^\gamma)\varrho(x')dx'\Big)u(\varphi)d\varphi =$$
$$= -\int_{\Phi_0}^{\Phi_1}\Big[\int_{\{\Phi(x)\leq\varphi\}}(q(x')^\gamma - q_1(x')^\gamma)\varrho(x')dx'\Big]u(\varphi)d\tilde{\varrho}^{\gamma-1}(\varphi),$$

où par $d\tilde{\varrho}^{\gamma-1}(\varphi)$ on entend l'intégration de Stieltjes par rapport à la fonction $\tilde{\varrho}^{\gamma-1}(\varphi)$, qui est non-croissante. En rappelant (2.57), on en déduit que

$$\int_\Omega(\chi(x)^\gamma - \chi_1(x)^\gamma)dx \geq 0. \tag{2.58}$$

De (2.55) et de (2.58) résulte (2.53). □

**Lemme 2.5.4.** *Le couple $(\bar{\chi}_r, \bar{q}_r)$ défini dans (2.45) appartient à $\tilde{\mathcal{A}}_1$ et il est l'unique solution de l'équation*

$$R\frac{d}{d\varphi}\big(\tilde{\chi}(\varphi)^\gamma\big) = -\frac{\tilde{\chi}(\varphi)}{\tilde{q}(\varphi)}. \tag{2.59}$$

**Démonstration.** L'appartenance de $(\bar{\chi}_r, \bar{q}_r)$ à $\tilde{\mathcal{A}}_1$ est évidente.
Si $(\tilde{\chi}, \tilde{q}) \in \tilde{\mathcal{A}}_1$ vérifie (2.59), on a

$$\tilde{\chi}(\varphi)^{\gamma-1} = C - \frac{\gamma-1}{R\gamma}\int_{\Phi_0}^{\varphi}\frac{1}{\tilde{q}(\varphi)}d\varphi$$

avec une constante $C$. Or, comme $\tilde{q}(\varphi) = h(\tilde{m}(\varphi))$ (voir (2.52)), la fonction $\tilde{m}(\varphi)$ définie dans (2.51) doit satisfaire à l'équation intégrale (2.43) et à la condition (2.44). Le lemme résulte du lemme 2.4.1. □

## 2.6 Démonstration de la proposition 2.4.1.

On commence par établir les deux lemmes suivants qui seront importants dans la démonstration de la proposition 2.4.1.

En effet, soit $\tilde{m}(\varphi)$ la fonction définie dans (2.51) avec un $(\tilde{\chi}, \tilde{q}) \in \tilde{\mathcal{A}}_1$. Comme $\tilde{m}(\varphi)$ est évidemment continue et strictement croissante sur $[\Phi_0, \Phi_1]$, on peut définir son inverse

$$\tilde{\varphi}(\cdot) = \tilde{m}^{-1}(\cdot) \tag{2.60}$$

et $\tilde{\varphi}(\cdot)$ est elle aussi continue et strictement croissante sur $[0, M]$. On définit

$$G(\tilde{\chi}, \tilde{q})(m) = \frac{1}{\tilde{\chi}(\tilde{\varphi}(m))u(\tilde{\varphi}(m))}, \tag{2.61}$$

où $\tilde{\varphi}(m)$ est la fonction définie ci-dessus.

**Lemme 2.6.1.** *L'application* $G(\cdot, \cdot)$ *définie par* (2.61) *est une bijection de* $\tilde{\mathcal{A}}_1$ *sur*

$$\mathcal{G} = \Big\{\, g \in M_+([0, M]) \,\Big|\, \int_0^M h(m)g(m)dm = \Phi_1 - \Phi_0 \,\Big\}, \tag{2.62}$$

*où* $M_+([0, M])$ *est la classe définie de manière analogue à (2.8) en remplaçant* $\Omega$ *par* $[0, M]$.

**Démonstration.** Soit $(\tilde{\chi}, \tilde{q}) \in \tilde{\mathcal{A}}_1$. De (2.51) et (2.60) on déduit que

$$\frac{d\tilde{\varphi}(m)}{dm} = \Big(\frac{d\tilde{m}(\varphi)}{d\varphi}\Big|_{\varphi=\tilde{\varphi}(m)}\Big)^{-1} = \frac{\tilde{q}(\tilde{\varphi}(m))}{\tilde{\chi}(\tilde{\varphi}(m))u(\tilde{\varphi}(m))}. \tag{2.63}$$

D'autre part, comme $\tilde{q}(\varphi) = h(\tilde{m}(\varphi))$, on a $\tilde{q}(\tilde{\varphi}(m)) = h(m)$. Donc on a

$$\Phi_1 - \Phi_0 = \int_0^M \frac{d\tilde{\varphi}(m)}{dm}dm = \int_0^M \frac{h(m)}{\tilde{\chi}(\tilde{\varphi}(m))u(\tilde{\varphi}(m))}dm,$$

ou

$$\int_0^M G(\tilde{\chi}, \tilde{q})(m)h(m)dm = \Phi_1 - \Phi_0.$$

C'est-à-dire, on a

$$G(\tilde{\mathcal{A}}_1) \subset \mathcal{G}.$$

D'autre part, si $g \in \mathcal{G}$, alors nous définissons

$$\tilde{\varphi}(m) = \int_0^m g(m')h(m')dm', \tag{2.64}$$

ce qui nous permet de déterminer $\tilde{\chi}(\varphi)$ et $\tilde{q}(\varphi)$ par les relations

$$\tilde{\chi}(\tilde{\varphi}(m)) = \frac{1}{g(m)u(\tilde{\varphi}(m))}, \qquad \tilde{q}(\tilde{\varphi}(m)) = h(m). \tag{2.65}$$

On a

$$\int_{\Phi_0}^{\Phi_1} \frac{\tilde{\chi}(\varphi)}{\tilde{q}(\varphi)} u(\varphi) d\varphi = \int_0^M \frac{\tilde{\chi}(\tilde{\varphi}(m))}{\tilde{q}(\tilde{\varphi}(m))} u(\tilde{\varphi}(m)) \frac{d\tilde{\varphi}(m)}{dm} dm.$$

Mais (2.64) et (2.65) donnent immédiatement

$$\frac{\tilde{\chi}(\tilde{\varphi}(m))}{\tilde{q}(\tilde{\varphi}(m))} u(\tilde{\varphi}(m)) = \frac{1}{g(m)h(m)}, \qquad \frac{d\tilde{\varphi}(m)}{dm} = g(m)h(m).$$

Donc on a

$$\tilde{m}(\Phi_1) = \int_{\Phi_0}^{\Phi_1} \frac{\tilde{\chi}(\varphi)}{\tilde{q}(\varphi)} u(\varphi) d\varphi = M.$$

En outre, comme $\tilde{q}(\tilde{\varphi}(m)) = h(m)$, on a $\tilde{q}(\varphi) = h(\tilde{m}(\varphi))$, ce qui entraîne que $(\tilde{\chi}, \tilde{q})$ ainsi construit appartient à $\tilde{\mathcal{A}}_1$.

La construction de ce $(\tilde{\chi}, \tilde{q})$ nous montre que $G(\cdot,\cdot)$ est une bijection. Le lemme est démontré. $\square$

**Lemme 2.6.2.** *Soient $(\tilde{\chi}, \tilde{q}) \in \tilde{\mathcal{A}}_1$ et $g = G(\tilde{\chi}, \tilde{q}) \in \mathcal{G}$. On a alors*

$$\Psi(\tilde{\chi} \circ \Phi, \tilde{q} \circ \Phi) = \Psi_1(g), \tag{2.66}$$

*où*

$$\Psi_1(g) = M\Phi_1 + \int_0^M h(m) \Big( \frac{C_V}{(g(m)u(\tilde{\varphi}(m)))^{\gamma-1}} - mg(m) \Big) dm, \tag{2.67}$$

*$\tilde{\varphi}(m)$ étant la fonction définie dans (2.60).*

**Démonstration.** En vertu de (2.39), (2.41) et (2.63), on déduit de (2.29) que

$$\Psi(\chi, q) = \int_{\Phi_0}^{\Phi_1} \Big[ C_V \tilde{\chi}(\varphi)^\gamma + \frac{\tilde{\chi}(\varphi)}{\tilde{q}(\varphi)} \varphi \Big] u(\varphi) d\varphi =$$

$$= \int_0^M \Big[ C_V \tilde{q}(\tilde{\varphi}(m)) \tilde{\chi}(\tilde{\varphi}(m))^{\gamma-1} + \tilde{\varphi}(m) \Big] dm.$$

Or, encore en vertu de (2.63) on a

$$\int_0^M \tilde{\varphi}(m) dm = M\Phi_1 - \int_0^M m \frac{d\tilde{\varphi}(m)}{dm} dm$$

$$= M\Phi_1 - \int_0^M mh(m) \frac{1}{\tilde{\chi}(\tilde{\varphi}(m)) u(\tilde{\varphi}(m))} dm.$$

Donc en vertu de (2.61) et (2.67) on a (2.66). $\square$

Les lemmes 2.6.1 et 2.6.2 étant établis, on est maintenant en mesure de montrer la proposition 2.4.1.

**Démonstration de la proposition 2.4.1**. En vertu des lemmes 2.5.3, 2.6.1 et 2.6.2, pour démontrer que $(\bar{\chi}_r, \bar{q}_r)$ défini dans (2.45) satisfait à (2.48), il suffit de montrer que $\bar{g} = G(\bar{\chi}_r, \bar{q}_r)$ réalise le minimum de $\Psi_1(g)$ dans la classe $\mathcal{G}$ définie dans (2.62). On remarque que $\mathcal{G}$ est un ensemble convexe (pour les généralités de l'Analyse convexe et du Calcul des variations, on renvoie par exemple à [9]). Considérons la dérivée de Gâteaux de $\Psi_1(g)$ dans la direction d'une fonction $f$ telle que

$$\int_0^M h(m)f(m)dm = 0. \tag{2.68}$$

Comme on a vu dans la démonstration du lemme 2.6.1, dans l'expression de $\Psi_1(g)$, $\tilde{\varphi}(m)$ peut être considérée comme fonction définie dans (2.64). Compte tenu que $C_V(\gamma - 1) = R$, on a

$$\frac{\partial \Psi_1(g)}{\partial g}(f) = -\int_0^M h(m)\Big[\frac{R}{(g(m)u(\tilde{\varphi}(m))^{\gamma}}u(\tilde{\varphi}(m)) + m\Big]f(m)dm +$$

$$-\int_0^M \frac{Rh(m)}{(g(m)u(\tilde{\varphi}(m))^{\gamma}}g(m)A(f)(m)dm,$$

où

$$A(f)(m) = \frac{du(\varphi)}{d\varphi}\Big|_{\varphi=\tilde{\varphi}(m)} \int_0^m h(m')f(m')dm'.$$

Or, comme on a

$$h(m)g(m) = \frac{d\tilde{\varphi}(m)}{dm},$$

compte tenu de (2.68) on a

$$\int_0^M \frac{h(m)}{(g(m)u(\tilde{\varphi}(m))^{\gamma}}g(m)\frac{du(\varphi)}{d\varphi}\Big|_{\varphi=\tilde{\varphi}(m)} \int_0^m h(m')f(m')dm'\,dm =$$

$$= -\int_0^M \int_0^m \frac{1}{(g(m')u(\tilde{\varphi}(m'))^{\gamma}} \frac{du(\tilde{\varphi}(m'))}{dm'}dm'\,h(m)f(m)dm.$$

Donc pour que

$$\frac{\partial \Psi_1(g)}{\partial g}(f) = 0,$$

il faut que

$$(2.69) \qquad -\int_0^M h(m)\Big[R\Big(\frac{u(\tilde{\varphi}(m))}{(g(m)u(\tilde{\varphi}(m))^\gamma} - \int_0^m \frac{1}{(g(m')u(\tilde{\varphi}(m'))^\gamma}\frac{du(\tilde{\varphi}(m'))}{dm'}dm'\Big) + m\Big]f(m)dm = 0.$$

Pour que (2.69) soit vérifiée pour toutes les fonctions mesurables $f$ vérifiant (2.68), il faut que $g(m)$ vérifie l'égalité

$$(2.70) \qquad R\Big(\frac{u(\tilde{\varphi}(m))}{(g(m)u(\tilde{\varphi}(m)))^\gamma} - \int_0^m \frac{1}{(g(m')u(\tilde{\varphi}(m'))^\gamma}\frac{du(\tilde{\varphi}(m'))}{dm'}dm'\Big) = -m.$$

Maintenant en dérivant les deux membres de (2.70) par rapport à $\varphi$ (voir (2.60)), on obtient

$$Ru(\varphi)\frac{d}{d\varphi}\Big(\frac{1}{(g(\tilde{m}(\varphi))u(\varphi))^\gamma}\Big) + \frac{R}{(g(\tilde{m}(\varphi))u(\varphi))^\gamma}\frac{du(\varphi)}{d\varphi} - \frac{R}{(g(\tilde{m}(\varphi))u(\varphi))^\gamma}\frac{du(\varphi)}{d\varphi} = -\frac{d\tilde{m}(\varphi)}{d\varphi}.$$

Or, compte tenu des relations

$$\frac{1}{(g(\tilde{m}(\varphi))u(\varphi))^\gamma} = \tilde{\chi}(\varphi)^\gamma, \qquad \frac{d\tilde{m}(\varphi)}{d\varphi} = \frac{\tilde{\chi}(\varphi)}{\tilde{q}(\varphi)}u(\varphi),$$

on obtient

$$R\frac{d}{d\varphi}\big(\tilde{\chi}(\varphi)^\gamma\big)u(\varphi) = -\frac{\tilde{\chi}(\varphi)}{\tilde{q}(\varphi)}u(\varphi).$$

C'est-à-dire, $(\tilde{\chi}, \tilde{q})$ doit vérifier (2.63). Par conséquent, en vertu du lemme 2.5.4, $\bar{g} = G(\bar{\chi}_r, \bar{q}_r)$ est l'unique point stationnaire dans $\mathcal{G}$ de la fonctionnelle $\Psi_1(g)$. Pour conclure, considérons

$$f(m) = g(m) - \bar{g}_r(m)$$

où

$$\bar{g}_r(m) = \frac{1}{\bar{\chi}_r(\bar{\varphi}_r(m))u(\bar{\varphi}_r(m))}$$

avec la fonction inverse $\bar{\varphi}_r(m)$ de la fonction $\bar{m}_r(\varphi)$ définie dans le lemme 2.4.1. Comme $f(m)$ satisfait à (2.68), $\bar{g}_r + f \in \mathcal{G}$ et on voit facilement que, si $\|f\|_{L^1(0,M)}$ croît, alors $\Psi_1(g) = \Psi_1(\bar{g}_r + f)$ croît, ce qui achève la démonstration. $\square$

## 2.7 Conséquences de l'égalité de l'énergie pour l'état de repos.

La proposition 2.4.1 étant établie, on peut en tirer une conséquence de l'égalité de l'énergie, conséquence utile pour l'étude de la stabilité de l'état de repos.

**Proposition 2.7.1.** *Soit $\Omega$ un domaine comme dans (2.13). Soient $\varrho_0, T_0 \in M_+(\Omega)$ (voir (2.8)). On suppose que la fonction $m(\cdot)$ définie par (2.32) à partir de $\varrho_0$, $T_0$ vérifie la condition (2.33). Soit $(\bar{\chi}_r, \bar{q}_r)$ le couple défini par (2.45) à partir de $m(\alpha)$ (à l'aide de (2.42)-(2.44) et du lemme 2.4.1. On pose*

$$\bar{\varrho}_r = \frac{\bar{\chi}_r \circ \Phi}{\bar{q}_r \circ \Phi}, \qquad \bar{T}_r = (\bar{\chi}_r \circ \Phi)^{\gamma-1}(\bar{q}_r \circ \Phi). \tag{2.71}$$

*Si $(v, \varrho, T)$ est solution du système d'équations (2.1)-(2.3) pour $t \geq t_0$ avec la condition (2.14) (si $\mu = 0$) ou (2.15) (si $\mu > 0$) et avec la condition initiale $(v_0, \varrho_0, T_0)$ à l'instant $t = t_0$ ($\sqrt{\varrho_0}v_0 \in L^2(\Omega)$), alors on a, pour tout $t \geq t_0$*

$$\tilde{\Psi}(\bar{\varrho}_r, \bar{T}_r) \leq \tfrac{1}{2}\|\sqrt{\varrho(t,\cdot)}v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \tilde{\Psi}(\varrho(t,\cdot), T(t,\cdot)) \leq \tfrac{1}{2}\|\sqrt{\varrho_0}v_0\|_{L^2}^2 + \tilde{\Psi}(\varrho_0, T_0), \tag{2.72}$$

$$0 \leq \int_{t_0}^{t_1} F_{\mu,\lambda}(v(t,\cdot))dt \leq \frac{1}{2}\|\sqrt{\varrho_0}v_0\|_{L^2}^2 + \tilde{\Psi}(\varrho_0, T_0) - \tilde{\Psi}(\bar{\varrho}_r, \bar{T}_r) \quad \forall t_1 \geq t_0, \tag{2.73}$$

*où $F_{\mu,\lambda}(v)$ est la fonctionnelle définie dans (2.24).*

**Démonstration.** C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.3.1 et de la proposition 2.4.1. $\square$

Notons que dans le cas où $\mu = \lambda = 0$, (2.72) et (2.73) se réduisent à

$$\frac{1}{2}\|\sqrt{\varrho(t,\cdot)}v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \tilde{\Psi}(\varrho(t,\cdot), T(t,\cdot)) = \frac{1}{2}\|\sqrt{\varrho_0}v_0\|_{L^2}^2 + \tilde{\Psi}(\varrho_0, T_0) \quad \forall t \geq t_0,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} F_{\mu,\lambda}(v(t,\cdot))dt = 0 \quad \forall t_1 \geq t_0$$

(la condition (2.5) n'exclut pas le cas où $\mu = 0$, $\lambda > 0$). Il est bon de rappeler que de la remarque 2.4.3 il résulte que le couple $(\bar{\varrho}_r, \bar{T}_r)$ défini par (2.71) satisfait à l'équation

$$R\nabla(\varrho T) = -\varrho\nabla\Phi.$$

D'autre part, en vertu de la proposition 2.4.1, on a

$$\Psi(\chi, q) \geq \Psi(\bar{\chi}_r \circ \Phi, \bar{q}_r \circ \Phi) \qquad \forall (\chi, q) \in \mathcal{A}_{m(\cdot)},$$

où $m(\cdot)$ et $(\bar{\chi}_r, \bar{q}_r)$ sont comme ci-dessus.

**Remarque 2.7.1.** La proposition 2.7.1, jointe à ces relations, nous donne une caractérisation des distributions de température et de densité atmosphériques que les météorologues communément classifient *stables* ou *instables*, en particulier pour la distribution "la plus stable" $(\bar{\varrho}_r, \bar{T}_r)$. Pour rendre un peu plus intituive ces notions, examinons le cas particulier où les surfaces equiptentielles sont des plans horizontaux, c'est-à-dire $\Phi(x_1, x_2, x_3) = gx_3$, alors (voir (2.71) et (1.10), on a évidemment

$$\bar{\varrho}_r = \bar{\varrho}_{hs}, \quad \bar{T}_r = \bar{T}_{hs}.$$

Dans ce cas, notre résultat signifie que l'état de repos caractérisé par le couple $(\bar{\varrho}_{hs}, \bar{T}_{hs})$ est, en vertu de (2.72) stable au sens de Lyapouvov, Autrement dit, si la donnée initiale $(v_0, \varrho_0, T_0)$ est proche de l'état hydrostatique $(0, \bar{\varrho}_{hs}, \bar{T}_{hs})$, alors pour tout $t > 0$, la solution (faible si elle existe) $(v, \varrho, T)$ reste proche de cet état hydrostatique. Cet état est caractérisé par une température $\bar{T}_{hs}$ affine décroissante en fonction de l'altitude. Cet état est qualifié par les météorologues d'instable.

# Conclusion et perspectives

# Conclusion et perspectives

Le travail [4] qui constitue l'essentiel du premier chapitre de cette thèse est une tentative à la contribution de la modélisation mathématique de la convection stationnaire de l'atmosphère. Notre résultat (voir théorème 1.2.1) signifie physiquement que, si on se donne sur le fond assimilé au niveau de la mer, une distribution non-homogène de la température proche d'une constante assez grande, alors naturellement, on assiste à un soulévemnt de l'air dû à une décroissance affine verticale de la température, ce mouvement est commûnément appelé mouvement de convection. Ce phénomème est analysé dans le premier chapitre, en examinant le cas d'un mouvement stationnaire périodique enfermé entre deux plans horizontaux d'altitude $h > 0$ (limite supérieure de l'atmosphère assimilée à un toit dans notre modélisation, en réalité l'atmosphère se raréfie et donc sa limite ne peut être définie de manière nette et naturelle). Le cas non périodique présente de sérieuses difficulés mathématiques innérantes aux domaines non bornés, comme la compacité, et dans ce cas la non sommabilité de la densité, la masse totale du gaz est ici infinie. Ce travail (voir [2]) est en cours de réalisation. Par contre, la question de la stabilité asymptotique de la solution stationnaire où, dans un premier un temps, celle de l'état hydrostatique demeure ouverte dans les deux cas, périodique ou non. Dans [5], on a contourné cette difficulté, en étudiant la stabilité pour le système d'équations d'un gaz à transformation adiabatique proche du cas barotropique. Dans ce travail, on a montré l'existence d'un état de repos minimisant l'énergie potentielle qui est stable au sens de Lyapounov. Signalons que ce résultat est obtenu sous l'hypothèse de l'existence de la solution du système d'équations (2.1)- (2.3).

Dans [4], on a modélisé la convection de l'atmosphère en supposant que l'air qui y circule est sec, on a donc négligé l'effet thermique de la condensation de l'eau. Or, la convection de l'air dans l'atmosphère est souvent accompagnée naturellement par la condensation de la vapeur d'eau. Il est donc souhaitable de tenir compte dans la modélisation de la convection du phénomème de condensation de la vapeur d'eau. Pour les équations de la quantité de mouvement, du bilan de l'énergie et la conservation de la masse de l'air sec et de la vapeur d'eau, on consulte [11]. Pour décrire la convection de l'air tout en tenant compte de la condensation de la vapeur d'eau, dans un premier temps, on a examiné le cas unidimensionnel, autrement dit, le cas d'un mouvement vertical stationnaire avec condensation de l'eau. Ce travail (voir [25]) est en cours de réalisation.

# Bibliographie


[1] R. Beirão da Veiga. Boundary value problems for a class of first order partial differentail equations in sobolev spaces and applications to the euler flow. *Rend. Sem. Mat. Mat. Univ. Padova*, 97 :247–273, 1988.

[2] R. Benabidallah. On stationary convective motion of viscous and heat-conductive compressible fluid between the two parallele plane. *Manuscrit*, 2013.

[3] R. Benabidallah and M. Padula. Sulla stabilita' di un fluido politropico, visco, pesante in un contenitore limitato da pareti pefette conduttrici di calore. *Annli dell'universita' di Ferrara, sez. VII, Sc. Math.*, 45 :127–161, 1999.

[4] R. Benabidallah, L. Taleb, and H. Fujita Yashima. Existence d'une solution stationnaire d'un système d'équations d'un fluide visqueux compressible et calorifère modélisant l'atmosphère. *Bolletino U.M.I.*, 8 :10 :1101–1124, 2007.

[5] R. Benabidallah, L. Taleb, and H. Fujita Yashima. Sur le potentiel de pression-gravitation pour le mouvement d'un gaz à transformation adiabatique. *Rend. Istit. Mat. Univ Trieste*, XL :65–91, 2009.

[6] M E. Bogovskij. Solution de quelques problèmes d'analyse vectorielle connexes aux opérateurs div. et grad (en russe). *Trudy Sem. Sovoleva. (Akad. Nauk, Inst. Mat., Novossibirsk)*, 1 :5–40, 1980.

[7] S. Buccellatto and H. Fujita Yashima. Stabilité de l'état d'équilibre du système d'équations d'un gaz visqueux barotropique dans le modèle de l'atmosphère. *Ann. Univ. Ferrara*, 52 :1–17, 2006.

[8] L. Cattabriga. Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di stokes. *Rend. Se. Mat. Univ. Padova.*, 31 :308–340, 1961.

[9] I. Ekland and R. Temam. *Analyse convexe et problèmes variationnels.* Dunod (Paris), 1974.

[10] R. Farwig. Stationary solutions of compressible navier-stokes equations with slip boundary condition. *Commun. Part. Diff. Eq.*, 14 :1579–1606, 1989.

[11] H. Fujita Yashima. *Modélisation de la physique des fluides.* Université de Guelma, 2009.

[12] A K. Kikoïne and I K. Kikoïne. *Physique moléculaire.* (en russe). Nauka, 1976, traduction française, Mir 1979, 1976.

[13] O A. Ladyzhenskaya and N N. Ural'ceva. *Equations aux dérivées partielles de type elliptique.* Dunod,, 1968.

[14] L D. Landau and E M. Lifshitz. *Mécanique des fluides, (Physique théorique, Tome VI).* Editions Mir, 1989.

[15] P L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics, VOL II.* Oxford, 1998.

[16] G I. Martchouk, V P. Dymnikov, V B. Zalesnij, V N. Lykosov, and V Ya. Galii. *Modélisation mathématique des circulations générales de l'atmosphère et de l'océan (en russe).* Gidrometeoizdat, Leningrad, 1984.

[17] A. Matsumura and M. Padula. Stability of stationnary flow of compressible fluids subject to large external potential force. *SAACM, Vol 2*, n°2 :183–202, 1992.

[18] V G. Maz'ya, B A. Plamenevskij, and L I. Stupyalis. The three-dimensional problem of steady-state motion of a fluid with a free surface. *Original in Russian : Diff. Urav. I Prim. - Trudy Sem. Prots. Optimal. Upr., Inst. Fiz. Mat. Akad. Nauk Litov. SSR. English translation : Amer. Math. Soc. Transl.*, I 23,123 :171–268, 1979,1984.

[19] J. Necas. *Méthodes directes en théorie des équations elliptiques.* Masson, 1967.

[20] A. Novotný and M. Padula. Existence et unicité de la solution stationnaire des équations d'un fluides compressible visqueux et calorifère en présence d'une grande force extérieure potentielle et d'une petite non-potentielle. *Sibir. Mat. Zhurnal*, 34 :120–146, 1993.

[21] A. Novotnỳ and I. Straskraba. *Introduction to the mathematical theory of compressible flow.* Oxford Univ. Press, 2004.

[22] M. Padula. Stedy flows of barotropic viscous fluids. classical problems in mechanics. *Quaderno di Mat. II Univ. Napoli*, I :253–345, 1997.

[23] P X. Shen. *Physique de l'atmosphère (en Chinois).* Beijing Univ. Press, 2003.

[24] V A. Solonnikov. Sur la résolubilité du problème aux conditions initiales et aux limites pour leséquations du mouvement d'un fluide visqueux compressible. *Zap. nauch. semi. LOMI, Leningrad*, 56 :128–142, 1976.

[25] L. Taleb and H. Fujita Yashima. Equations du mouvement de l'air en une dimension avec la condensation de l'eau. *Manuscrit*, 2013.

[26] V A. Weigant(Vaigant) and A V. Kazhikhov. Sur l'existence de solutions globales des équations de navier-stokes d'un fluide compressible visqueux. *Sibir. Mat. Zhur.*, 36 :1283–1316, 1995.

[27] R KH. Zeytounian. *Modélisation asymptotique en mécanique des fluides newtoniens*. Springer, 1994.