



# MÉMOIRE DE MASTER

Filière : Mathématiques  
Spécialité : Recherche Opérationnelle

Présenté par :

AOURCHID AMINE ET BOUCHAREB AMINE

## RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL AVEC LA MÉTHODE DES ITÉRATIONS VARIATIONNELLES

Soutenue le 06 juillet 2023 devant le jury :

Pr.	AIDENE. M	UMMTO	Président du jury
Pr.	MERAKEB. A	UMMTO	Examineur
Dr.	TERKMANI. R	UMMTO	Encadreur

Année Universitaire : 2022/2023

## *Dédicaces & Remerciements*

# Remerciements

Ce mémoire est le fruit des efforts fournis et des sacrifices consentis par plusieurs personnes que nous ne pourrions oublier de remercier.

Nous tenons tout d'abord à remercier ♡ALLAH♡, le tout puissant de nous avoir donné la santé, la volonté, le courage et la patience pour mener à terme notre formation et pourvoir réaliser ce travail de recherche.

En guise de reconnaissance, nous remercions particulièrement nos chers parents, c'est grâce à votre encouragements, votre bienveillance et votre présence à nos côtés

Nous remercions aussi nos chères frères et soeurs ainsi que tous les membres de notre familles et amies.

Nous tenons à exprimer notre gratitude envers Mme TERKMANI Rima, Maître de Conférences Classe B pour son encadrement de qualité, sa motivation professionnelle, ses conseils et critiques constructives, ses corrections et sa patience ainsi que pour le temps qu'elle a consacré à la réalisation de ce travail.

Nous avons l'honneur et la chance d'avoir bénéficié des connaissances et compétences de tous les enseignants de la faculté des sciences département Mathématique qui ont déployé leurs efforts afin d'assurer une formation aussi complète et riche en savoir, tous nos respects pour eux.

Nous remercions vivement Mr AIDENE Mohamed, Professeur à l'université de Tizi Ouzou, pour l'honneur qu'il nous a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire. Et Mr MERAKAB Abdelkader, Professeur à l'université de Tizi Ouzou, pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Nous souhaitons remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de notre parcours universitaire.

# Dédicaces

Je dédie ce modeste travail A celle qu'aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime et le respect que j'ai toujours eu pour elle, ma Chère maman ♡NORA♡.

Celle qui n'a cessé de m'encourager et me motiver, elle est ma source de courage, le guide de ma vie, elle répand la lumière sur mon chemin et me projette vers le haut.

Les mots sont insuffisants pour exprimer ce qu'elle mérite, tant de sacrifices, depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte pour mon éducation et mon bien être.

Ma maman chérie, je ne peux que te remercier et te dédier ce travail qui est le fruit de tes efforts.

A celui qui a veillé des nuits pour ma réussite, tant scolaire que personnelle, sa priorité n'est autre que de me voir accomplir mon parcours universitaire de la meilleure des manières.

Celui qui n'a cessé de me forger de courage et de valeurs précieuses, de motivations et d'énergie positive. Rien ne vaut les efforts fournis tout au long de sa vie et aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, le dévouement et le respect que j'ai pour lui.

Aujourd'hui, je ne peux que t'exprimer ma gratitude et ma reconnaissance envers tout ce que tu as fait pour moi .Mon cher père ♡LOUNES♡ .

A mon cher petit frère ♡AMAR RAYANE♡ ainsi qu'à mes deux chères sœurs ♡BESMA♡ et ♡IMANE♡ qui m'ont toujours encouragé et apporté de la joie.

A toute ma famille.

A mon binôme BOUCHAREB AMINE.

A ma promotrice Dr. TERKMANI .R

**A. AOURCHID**

# Dédicaces

À la fin de mon mémoire Je dédie ce modeste travail :

À mes très chers ♡Parents♡. Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour leurs sacrifices, qu'ils ont consenti pour mon instruction et mon bien être. Puisse Dieu, le très haut, leurs accorder santé, bonheur et longue vie.

À mes frères ♡Hocine♡, ♡Salem♡ et ♡Rafik♡, pour leurs encouragements, à qui je souhaite le bonheur, la santé et la prospérité.

À mes sœurs ♡Syria♡ et ♡Amel♡, qui ont toujours été là pour moi. Leurs soutiens inconditionnels et leurs encouragements ont été d'une grande aide, merci d'avoir partagé avec moi les hauts et les bas de la vie et d'avoir toujours cru en moi. Je vous aime plus que les mots ne peuvent l'exprimer.

À mes belles-sœurs bien-aimées ♡Zahia♡, ♡Hassiba♡, ♡Nabila♡, vous êtes bien plus que des membres de ma famille, vous êtes des amies précieuses. Votre soutien, votre gentillesse et votre présence réconfortante ont enrichi ma vie de manière inestimable.

À mes adorables ♡neveux♡ et ♡nices♡, vous êtes ma plus grande source de bonheur et d'inspiration. Votre joie de vivre et votre curiosité sans limites illuminent mes journées. Ce mémoire est dédié à vous, car vous représentez l'avenir et la raison pour laquelle je m'efforce de toujours donner le meilleur de moi-même.

À toute ma merveilleuse ♡famille♡ votre présence a été ma plus grande motivation tout au long de ce parcours. Je vous dédie ce mémoire avec toute ma gratitude et mon amour.

À mon très chère ami et binôme ♡Amine♡, avec lequel j'ai pris beaucoup de plaisir à travailler. Nous avons formé une belle équipe, je le remercie ainsi que toute sa famille pour tout ce qu'ils m'ont apporté au cours de ces quarts années partagées.

À ma promotrice Mme Terkmani Rima, dont la sagesse, l'expertise et l'encouragement sans faille ont été une source d'inspiration constante tout au long de ce mémoire.

À mon très chère meilleur ami ♡Faycal♡, je le remercie pour sa présence, son écoute, sa confiance en moi et son soutien durant mon chemin des études supérieurs.

**A. BOUCHARÉB**

## Résumé

Le principe du minimum de Pontryagin est une extension des méthodes classiques variationnelles utilisé pour la résolution du problème de contrôle optimal. Cependant les équations de Hamilton avec les conditions aux limites résultantes en appliquant le principe du minimum de Pontryagin sont généralement difficiles voire impossible à résoudre analytiquement principalement lorsque ces équations sont fortement non linéaires. Pour parrainer cette difficulté, on propose une méthode itérative robuste appelée méthode des itérations variationnelles.

**Mots clés :** Contrôle optimal, Principe du minimum de Pontryagin, équations d'Hamilton-Pontryagin, équations différentielles, méthode des itérations variationnelles.

## Abstract

The Pontryagin's minimum principle is an extension of classical variational methods used for solving the optimal control problem. However, the Hamiltonian equations resulting with boundary conditions when applying the Pontryagin's minimum principle are generally difficult or even impossible to solve analytically, especially when these equations are highly nonlinear. To address this difficulty, a robust iterative method called the variational iteration method is proposed.

**Keywords :** Optimal control, Pontryagin's minimum principle, Hamilton-Pontryagin equations, differential equations, variational iteration method.

# TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	vi
TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES FIGURES	viii
LISTE DES TABLEAUX	ix
NOTATIONS	1
INTRODUCTION	4
1 CONTRÔLE OPTIMAL DES SYSTÈMES CONTINUS	6
1.1 INTRODUCTION	6
1.2 FORMULATION DU PROBLÈME	6
1.2.1 Modèle mathématique	6
1.2.2 Conditions terminales	7
1.2.3 Contraintes physiques	7
1.2.4 Critères de performance	8
1.3 CONTRÔLABILITÉ DES SYSTÈMES DYNAMIQUES	10
1.3.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires non autonomes	11
1.3.2 Contrôlabilité des systèmes non linéaires	12
1.4 EXISTENCE DE TRAJECTOIRE OPTIMALE	13
1.5 MÉTHODES DE RÉOLUTION DU PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL	14
1.5.1 Méthodes directes	14
1.5.2 Méthodes indirectes	14
1.6 COMPARAISON ENTRE LES MÉTHODES DIRECTES ET INDIRECTES	25
1.7 CONCLUSION	26
2 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	27
2.1 INTRODUCTION	27
2.2 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES (EDOs)	27
2.2.1 Équation différentielle linéaire	27
2.2.2 Équation différentielle non linéaire	29
2.3 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET PROBLÈME DE CAUCHY	29
2.3.1 Théorème de Cauchy-Lipchitz	30
2.4 MÉTHODES DE RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	30
2.4.1 Méthodes analytiques	30
2.4.2 Méthodes numériques	41
2.4.3 Méthode des itérations variationnelles	47

2.5	CONCLUSION . . . . .	53
3	APPLICATION DE LA MÉTHODE DE VIM AUX PROBLÈMES DE CONTRÔLE OPTIMAL . . . . .	55
3.1	INTRODUCTION . . . . .	55
3.1.1	Algorithme de résolution d'un problème de contrôle optimal par la méthode des itérations variationnelles . . . . .	55
3.2	EXEMPLES D'APPLICATION . . . . .	56
3.2.1	Problème 1 : Cas de solution analytique exacte . . . . .	56
3.2.2	Problème 2 : Cas d'approximation d'une solution analytique . . . . .	63
3.2.3	Problème 3 : Problème de navigation . . . . .	69
3.3	CONCLUSION . . . . .	77
	CONCLUSION . . . . .	79
	BIBLIOGRAPHIE . . . . .	81

## LISTE DES FIGURES

1.1	Contrôlabilité des systèmes dynamiques . . . . .	10
1.2	Temps final fixe et état final du système fixe . . . . .	18
1.3	Temps final libre et état final du système fixe . . . . .	19
1.4	Temps final fixe et état final du système libre . . . . .	19
1.5	Temps final libre et état final du système libre . . . . .	20
2.1	Graphes de la solution exacte et de la solution approchée obte- nue avec les méthodes numériques. . . . .	47
2.2	Graphes de la solution exacte et de la solution approchée obte- nue avec VIM . . . . .	51
2.3	Graphes de la solution exacte et de la solution approchée obte- nue avec VIM . . . . .	54
3.1	Problème 1 : Graphe de la solution exacte $x_1^*(t)$ et de la solution approchée $x_1^{(3)}(t)$ obtenue avec VIM. . . . .	61
3.2	Problème 1 : Graphe de la solution exacte $x_2^*(t)$ et de la solution approchée $x_2^{(3)}(t)$ obtenue avec VIM. . . . .	62
3.3	Problème 1 : Graphe de la solution exacte $u^*(t)$ et de la solution approchée $u^{(3)}(t)$ obtenue avec VIM . . . . .	62
3.4	Problème 1 : Évolution du critère $J$ . . . . .	62
3.5	Problème 2 : Trajectoire optimale de l'état $x_1(t)$ . . . . .	67
3.6	Problème 2 : Trajectoire optimale de l'état $x_2(t)$ . . . . .	67
3.7	Problème 2 : Trajectoire optimale du contrôle $u(t)$ . . . . .	68
3.8	Problème 2 : Évolution du critère $J$ . . . . .	68
3.9	Problème de Navigation . . . . .	69

3.10	Problème 3 : Graphe de la solution exacte $x_1(t)$ et de la solution approchée $x_1^{(2)}(t)$ obtenue avec VIM pour $V = 300$ et $w = 40$ . . .	74
3.11	Problème 3 : Graphe de la solution exacte $x_2(t)$ et de la solution approchée $x_2^{(2)}(t)$ obtenue avec VIM pour $V = 300$ et $w = 40$ . . .	74
3.12	Problème 3 : Graphe de la solution exacte $u(t)$ et de la solution approchée $u^{(2)}(t)$ obtenue avec VIM pour $V = 300$ et $w = 40$ . . .	74
3.13	Problème 3 : Graphe de la solution exacte $x_1(t)$ et de la solution approchée $x_1^{(2)}(t)$ obtenue avec VIM pour $V = 400$ et $w = 60$ . . .	75
3.14	Problème 3 : Graphe de la solution exacte $x_2(t)$ et de la solution approchée $x_2^{(2)}(t)$ obtenue avec VIM pour $V = 400$ et $w = 60$ . . .	75
3.15	Problème 3 : Graphe de la solution exacte $u(t)$ et de la solution approchée $u^{(2)}(t)$ obtenue avec VIM pour $V = 400$ et $w = 60$ . . .	75
3.16	Problème 3 : Graphe de la solution exacte $x_1(t)$ et de la solution approchée $x_1^{(2)}(t)$ obtenue avec VIM pour $V = 600$ et $w = 100$ . . .	76
3.17	Problème 3 : Graphe de la solution exacte $x_2(t)$ et de la solution approchée $x_2^{(2)}(t)$ obtenue avec VIM pour $V = 600$ et $w = 100$ . . .	76
3.18	Problème 3 : Graphe de la solution exacte $u(t)$ et de la solution approchée $u^{(2)}(t)$ obtenue avec VIM pour $V = 600$ et $w = 100$ . . .	76

## LISTE DES TABLEAUX

3.1	Problème 3 : Solution exacte pour différentes valeur de $V$ et $w$ . . .	77
3.2	Problème 3 : Solution approchée obtenue avec VIM pour différentes valeur de $V$ et $w$ . . . . .	77

# NOTATIONS

$a$	Nombre réel
$A$	Matrice d'état
$b$	Nombre réel
$B$	Matrice de contrôle
$c$	Nombre réel
$C$	Matrice de Kalman
$C^1$	Ensemble des fonctions Continûment différentiables
$\mathcal{C}$	Fonction vectorielle (contrainte intégrale)
$M$	Matrice de contrôlabilité
$f$	Fonction vectorielle
$g$	Fonction scalaire
$H$	Fonction d'Hamilton (Hamiltonien)
$Id$	Matrice d'identité d'ordre $n$
$i$	Entier naturel
$I_v$	Intervalle de temps
$j$	Entier naturel
$J$	Critère de performances
$\tilde{J}$	Fonctionnelle
$J_a$	Fonctionnelle augmentée
$k$	Entier naturel
$\mathbb{K}$	Ensemble compact
$l$	Entier naturel
$L^2$	Espace des fonctions de carré intégrable
$\mathcal{L}$	Fonction de Lagrange
$\mathcal{L}$	Opérateur différentiel linéaire
$m$	Nombre de contrôle
$M$	Résolvante du système linéaire homogène
$\mathcal{N}$	Opérateur différentiel non linéaire
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$p$	Vecteur adjoint
$q$	Fonction vectorielle (contrainte instantanée)
$Q$	Matrice de pondération

$R$	Matrice de pondération
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^m$	Espace vectoriel de dimension $m$ construit sur le corps des réels
$\mathbb{R}^n$	Espace vectoriel de dimension $n$ construit sur le corps des réels
$\mathbb{R}^r$	Espace vectoriel de dimension $r$ construit sur le corps des réels
$\mathbb{R}^+$	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls
$t$	Temps
$t_0$	Instant initial
$t_1, t_2, t_3$	Temps
$t_f$	Instant final
$u$	Vecteur de contrôle
$\mathcal{U}$	Ensemble des contrôles admissibles
$v$	Fonction scalaire
$\tilde{V}$	Ensemble des vecteurs
$x$	Vecteur d'état
$x_0$	Etat initial
$x_f$	Etat final
$x^d$	Etat désiré
$\tilde{x}$	Variation restreinte
$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ou $x'$	dérivée temporelle
$(x_e, u_e)$	point d'équilibre
$(\tilde{x}, \tilde{u})$	trajectoire de contrôle

### Symboles et lettres grecques

$\alpha$	Nombre réel
$\beta$	Nombre réel positif
$\lambda, \lambda_x, \lambda_p$	Vecteurs des multiplicateurs de Lagrange
$\epsilon$	Nombre positif (tolérance)
$\tau$	Temps
$\psi$	Fonction scalaire
$\phi$	Fonction vectorielle
$\varphi$	Fonction vectorielle
$\Delta t$	Pas de discrétisation
$\delta$	Première variation d'une fonction
$\frac{\partial J}{\partial x}$ ou $J_x$	dérivée partielle du premier ordre par rapport à $x$
$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \ddot{g}$ ou $g''$	dérivée partielle du second d'ordre par rapport $x$
$ \cdot $	Valeur absolue
$\  \cdot \ $	Norme
*	Grandeur Optimale
$(\cdot)^T$	Transposée
$(\cdot)^{-1}$	Opérateur inverse
$\text{rang}(\cdot)$	Rang d'une matrice

**Abréviations**

CO	Contrôle optimal
EDO	Equation différentielle ordinaire
HJB	Hamilton-Jacobi-Bellman
min	minimum
max	maximum
PMP	Principe du minimum de Pontryagin
VIM	Méthode des itérations variationnelles

# Introduction générale

Les problèmes de contrôle optimal jouent un rôle important dans une grande gamme de domaines d'application, notamment l'ingénierie, l'économie et la finance. Les ingénieurs doivent s'assurer des spécifications quantitatives et qualitatives des produits et de la performance économique tout en respectant les réglementations en matière de santé, de sécurité et d'environnement. La tâche d'un système de contrôle est d'assurer la stabilité du processus, de minimiser l'influence des perturbations et des perturbations et d'optimiser les performances globales. Ces objectifs sont atteints en maintenant certaines variables (température, pression, concentration, position, vitesse, qualité, ...) proches de leurs valeurs souhaitées ou en utilisant des points de consigne qui peuvent être fixes ou temporels.

L'objectif principal du contrôle optimal est de déterminer les signaux de contrôle qui amènera un processus à satisfaire certaines contraintes physiques et en même temps optimiser (maximiser ou minimiser) un critère de performance choisi (indice de performance ou fonction de coût). Donc nous sommes intéressés à trouver le contrôle optimal qui conduira le système de l'état initial à l'état final avec certaines contraintes sur les contrôles et les états et en même temps en optimisant l'indice de performance.

Un système de contrôle du point de vue mathématique est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. Pour le modéliser, des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, des différences finies, des dérivées partielles, stochastiques, etc peuvent être employés. Pour cette raison les théories du contrôle sont des fonctions ou des paramètres, habituellement soumis à des contraintes.

Il existe deux méthodes générales pour résoudre les problèmes de contrôle optimal. Ces méthodes sont qualifiées de méthodes directes et indirectes. Une méthode indirecte transforme le problème sous une autre forme avant de le résoudre et peut être regroupée en deux catégories : la méthode de programmation dynamique de Bellman et le principe du minimum de Pontryagin. Bellman a été le pionnier des travaux de programmation dynamique qui ont conduit à des conditions suffisantes pour l'optimalité en utilisant les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). En fait, une condition nécessaire pour une solution optimale des problèmes de contrôle optimal est l'équation HJB. C'est une équation aux dérivées partielles du second ordre qui est utilisée pour trouver une loi de rétroaction optimale non linéaire. Le principe du minimum de Pontryagin est utilisé pour trouver les conditions nécessaires à l'existence d'un optimum. Cela convertit le problème de contrôle optimal d'origine en un problème de valeur aux limites, qui peut être résolu en utilisant des techniques bien connues pour les équations différentielles, analytiquement ou numériquement.

ment. Comme les solutions analytiques des problèmes de contrôle optimal ne sont pas toujours disponibles, trouver une solution numérique pour résoudre les problèmes de contrôle optimal est au moins la façon la plus logique de les traiter et a fourni un domaine attractif pour les chercheurs en sciences mathématiques.

Ces dernières années, des méthodes semi-analytiques pour la résolution des équations différentielles ont été développées dans la littérature [Ramos \[2008\]](#). Parmi ces méthodes, on peut citer la méthode des itérations variationnelles (VIM) [He \[2006\]](#). Cette méthode traite une très grande variété d'équations : linéaires, non linéaires, homogènes et non homogènes. Elle permet de déterminer la solution exacte, sinon cette méthode donne une solution approchée avec une très grande précision dans le cas où la solution exacte n'existe pas. Dans ce mémoire, la méthode de VIM est adoptée pour la résolution des conditions d'optimalité d'un problème de contrôle optimal en utilisant le principe du minimum de Pontryagin.

Ainsi, le travail réalisé est réparti en trois chapitres :

Le premier chapitre de ce manuscrit présente quelques notions de base d'un problème de contrôle optimal, la contrôlabilité des systèmes linéaires et non linéaires ainsi les méthodes de résolution.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de quelques méthodes (analytiques et numériques) pour la résolution des équations différentielles ordinaires ainsi que le principe de la méthode des itérations variationnelles pour la résolution des (EDOs) non linéaires.

Dans le troisième chapitre, on présente une application de la méthode des itérations variationnelles pour la résolution des problèmes de contrôle optimal.

Enfin, on termine ce travail par une conclusion générale et quelques perspectives.

# CONTRÔLE OPTIMAL DES SYSTÈMES CONTINUS



## 1.1 INTRODUCTION

Le contrôle optimal est un domaine de recherche en ingénierie et en mathématiques qui s'intéresse à la conception de contrôleurs pour les systèmes dynamiques en vue de les optimiser. Le problème de contrôle optimal peut être formulé mathématiquement comme un problème d'optimisation sous contraintes, où l'objectif est d'optimiser une fonction de coût tout en satisfaisant des contraintes sur l'état et le contrôle du système.

Autrement dit mathématiquement, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé contrôle pour le modéliser on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelle, dérivées partielle... etc. Pour cette raison la théorie du contrôle est l'interconnexion de nombreux domaines mathématiques [Constantini \[2013\]](#)

Ce chapitre est consacré aux notions de base de la théorie de contrôle optimal et la contrôlabilité des systèmes linéaires et non linéaires en utilisant les différentes méthodes de résolution des problèmes de contrôle optimal.

## 1.2 FORMULATION DU PROBLÈME

Les étapes principales pour la formulation d'un problème de contrôle optimal sont la modélisation du système à contrôler, la spécification du critère à optimiser et les contraintes physiques à satisfaire, i.e. la trajectoire, les conditions initiales et finales du problème.

### 1.2.1 Modèle mathématique

Un modèle mathématique en contrôle optimal est une représentation mathématique d'un système dynamique qui permet de décrire son comportement et de concevoir des stratégies de contrôle pour optimiser son fonctionnement. Ce modèle est généralement formulé sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles ordinaires ou partielles, qui décrivent l'évolution de l'état du système en fonction du temps et du contrôle appliqué, Notre discussion se

limitera aux systèmes décrits par des équations différentielles ordinaires définies par sa représentation d'état.

La dynamique du système est représentée par une équation différentielle ordinaire ou partielle, telle que :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (1.1)$$

où :

$x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état qui caractérise l'état du système à l'instant  $t$ .

$u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur du contrôle qui agit sur l'évolution du processus.

$t \in \mathbb{R}^+$  est la variable du temps,

$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+$  est une fonction vectorielle qui décrit la dynamique du système.

### 1.2.2 Conditions terminales

Les conditions terminales (initiales et finales) représentent réellement des contraintes définies aux bornes de l'horizon de contrôle.

Ces conditions peuvent être exprimées sous la forme suivante :

$$x(t_0) = x_0 \quad (\text{l'état du système à l'instant } t = t_0)$$

$$x(t_f) = x_f \quad (\text{l'état du système à l'instant } t = t_f)$$

avec  $x_0, x_f$  sont respectivement les conditions initiale et finale ( $x_f$  peut être fixée ou non) et  $t_0; t_f$  sont respectivement les instants initial et final ( $t_f$  peut être fixé ou non). Les conditions terminales sont importantes car elles permettent de spécifier les objectifs de contrôle pour le système à un temps donné.

### 1.2.3 Contraintes physiques

Les contraintes physiques sont des limites imposées par la nature du système et qui doivent être prises en compte dans un problème de contrôle optimal, on distingue deux types :

#### -Contraintes instantanées

C'est des limites imposées sur les états et les contrôles. Ces contraintes sont exprimées sous la forme suivants :

$$q(x(t); u(t); t) \leq 0; \quad t \in [t_0; t_f]; q \in \mathbb{R}^{n_q} \quad (1.2)$$

### -Contraintes intégrales

Les contraintes intégrales sont des limites imposées sur des quantités limitées sur tout l'intervalle de temps de la trajectoire du système. Ces contraintes sont exprimés sous la forme :

$$\int_{t_0}^{t_f} \mathcal{C}(x(t), u(t), t) dt \leq 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f]; \mathcal{C} \in \mathbb{R}^{n_c} \quad (1.3)$$

avec :  $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+$  et  $\mathcal{C} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+$  sont des fonctions vectorielles supposées continues et différentiables.  $n_q$  est le nombre de contraintes instantanées et  $n_c$  est le nombre de contraintes intégrales.

#### 1.2.4 Critères de performance

En contrôle optimal, le critère de performance est la fonction mathématique qui permet d'évaluer la qualité de la solution du problème de contrôle optimal. Cette fonction définit ce qui doit être optimisé ou minimisé pour atteindre les objectifs du système, en générale le critère est donné par la formule suivante [Kirk \[1970\]](#) :

$$J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \psi(x(t), u(t), t) dt \quad (1.4)$$

où  $S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$  et  $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+$  sont des fonctions scalaires avec  $S(x(t_f), t_f)$  appelée partie terminale.

On peut distinguer trois types de problèmes :

##### a) Problème de Mayer :

$$J = S(x(t_f), t_f) \quad (1.5)$$

##### b) Problème de Lagrange :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \Psi(x(t), u(t), t) dt \quad (1.6)$$

**c) Problème de Bolza :**

Appelé aussi problème Mayer-Lagrange ,il s'agit en fait de la combinaison des deux problème précédents ,donné par la formule suivante : m :

$$J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \Psi(x(t), u(t), t) dt \quad (1.7)$$

la sélection du critère est très importante, il doit être choisi avec rigueur et reflété de manière approprier les objectifs à optimiser et les critères les plus important sont :

**a) Contrôle à temps minimal :** il s'agit de minimiser la durée de la trajectoire du système. Ce critère est donné par :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt, \quad \Psi(x(t), u(t), t) = 1 \quad (1.8)$$

**b) Contrôle à énergie minimale :** il s'agit de minimiser la quantité d'énergie consommée par le système. Ce critère est donnée par :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u(t)^T R u(t) dt \quad \text{avec} \quad R = R^T > 0 \quad (1.9)$$

où  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est une matrice de pondération.

**c) Poursuite :** il s'agit de minimiser l'écart entre la trajectoire du système  $x(t)$  et une trajectoire de référence prédéfinie, L'expression de ce critère est donnée par :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (x(t) - x^d(t))^T Q (x(t) - x^d(t)) dt \quad \text{avec} \quad Q = Q^T \geq 0 \quad (1.10)$$

**d) Régulation :** Il s'agit de maintenir l'état  $x(t)$  du système très proche de zéro, c'est-à-dire dans ce cas  $x^d(t) = 0$ . Il représente un cas particulier de la poursuite.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} x(t)^T Q x(t) dt \quad \text{avec} \quad Q = Q^T \geq 0 \quad (1.11)$$

**e) Poursuite et contrôle à énergie minimale :** La combinaison du critère (1.10) avec le critère (1.9) nous permet de réaliser une poursuite de trajectoire désirée tout en minimisant l'énergie. Cet objectif est exprimé comme suit :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (x(t) - x^d(t))^T Q (x(t) - x^d(t)) + u(t)^T R u(t) dt \quad (1.12)$$

En résumé, la formulation du problème de contrôle optimal est donnée par l'expression suivante :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \psi(x(t), u(t), t) dt \quad (1.13)$$

sujet à :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (1.14)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (1.15)$$

$$x(t_f) = x_f \quad (1.16)$$

$$q(x(t), u(t), t) \leq 0 \quad (1.17)$$

$$\int_{t_0}^{t_f} C(x(t), u(t), t) dt \leq 0 \quad (1.18)$$

Une fois la modélisation mathématique du problème de contrôle optimal est établie, on doit étudier la contrôlabilité (étude de l'existence d'un contrôle qui permet d'effectuer le transfert de l'état du système, de l'état initial  $x_0$  vers l'état final  $x_f$  de sorte à respecter les objectifs visés).

### 1.3 CONTRÔLABILITÉ DES SYSTÈMES DYNAMIQUES

La contrôlabilité des systèmes dynamiques est un concept clé de la théorie du contrôle, qui étudie la manière de modifier le comportement d'un système dynamique en modifiant l'entrée (commande) appliquée au système. En d'autres termes, la contrôlabilité est la capacité à conduire le système d'un état initial à un état final souhaité en appliquant des commandes adéquates, (voir la Figure 1.1)

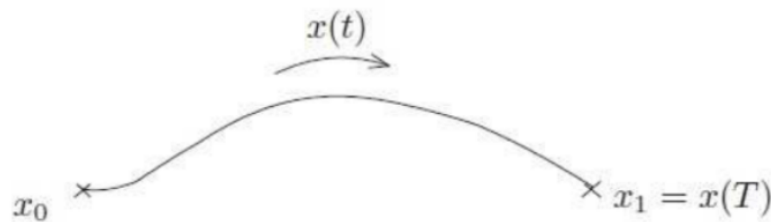


FIGURE 1.1 – Contrôlabilité des systèmes dynamiques

Plus formellement, la contrôlabilité d'un système dynamique est définie comme la propriété selon laquelle, pour tout état final souhaité du système, il existe une commande (ou une combinaison de commandes) qui peut amener le système de son état initial à l'état final en un temps fini.

(La contrôlabilité est souvent étudiée en relation avec l'observabilité, qui est la capacité à estimer l'état du système à partir des observations de ses sorties. En effet, la contrôlabilité et l'observabilité sont souvent considérées

comme les deux propriétés fondamentales pour la conception de systèmes de commande. Les systèmes dynamiques contrôlables sont utilisés dans de nombreuses applications pratiques, telles que la robotique, l'automatisation industrielle, le contrôle de processus, le contrôle de vol, etc. Les techniques de contrôle optimal et de commande adaptative sont souvent utilisées pour concevoir des lois de commande efficaces pour ces systèmes)

**Définition 1.1.** Le système est dit contrôlable en temps  $t_f$  si pour  $x_0, x_f \in \mathbb{R}$ , il existe un contrôle  $U$  tel que la trajectoire associée relie  $x_0$  à  $x_f$  en temps  $t_f$

### 1.3.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires non autonomes

Considérons le système dynamique linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & t \in I_v = [t_0, t_f] \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.19)$$

On suppose que :

- $A$  et  $B$  sont deux applications localement intégrables sur  $[t_0, t_f]$  à valeur respectivement dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathbb{R}^{n \times m}$ .
- Le contrôle  $u$  est mesurable et localement bornée sur  $[t_0, t_f]$  à valeurs dans le sous-ensemble  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ .

La solution du système (1.19) en temps  $t$  est :

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_{t_0}^t M(t)M^{-1}(s)B(s)u(s) ds, \quad t \in I = [t_0, t_f] \quad (1.20)$$

où  $\dot{M}$  est la résolvante, et  $M(\cdot)$  est la résolvante du système linéaire homogène suivant :

$$\dot{x}(t) = A(t) x(t) \quad (1.21)$$

définie par :

$$\begin{cases} \dot{M}(t) = A(t)M(t) \\ M(0) = Id \end{cases} \quad (1.22)$$

où  $Id$  est la matrice identité.

**Théorème 1.1.** Kalman et Al [1960] un système linéaire non-autonome de  $\mathbb{R}^n$  est contrôlable en temps  $t_f$  si et seulement si la matrice :

$$D = \int_{t_0}^t M(t)^{-1} B(t) B(t)^{-1} (M(t)^{-1})^T dt \quad (1.23)$$

est inversible.

La matrice  $D$  est appelé matrice de contrôlabilité.

**Définition 1.2.** Le système (1.19) est dit autonome si les matrices  $A$  et  $B$  ne dépendent pas de  $t$  alors on dit que c'est un système invariant dans le temps.

### Contrôlabilité des systèmes linéaire autonome

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), & t \in I = [t_0, t_f], \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.24)$$

Le Théorème suivant donne la condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité du système (1.24) dans le cas ou il n'y a pas de contraintes sur le contrôle et l'état.

**Théorème 1.2.** Trélat [2005] Le système (1.24) est dit contrôlable en  $t$  quelconque si et seulement si la matrice suivante :

$$C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B) \quad (1.25)$$

est de rang égal à  $n$ .

### 1.3.2 Contrôlabilité des systèmes non linéaires

La contrôlabilité des systèmes non linéaires est étudiée en utilisant des concepts tels que l'observabilité, la linéarisation locale, la stabilité de la commande et la fonction de coût optimale. En général, il n'est pas possible de trouver une solution analytique exacte pour la contrôlabilité des systèmes non linéaires, mais des méthodes numériques peuvent être utilisées pour estimer la contrôlabilité et concevoir des lois de commande.

Pour les systèmes de contrôle non linéaires, il est impossible d'étudier la contrôlabilité globale; le problème est beaucoup plus compliqué du fait qu'on ne peut pas utiliser la caractérisation de Kalman. Dans ce cas, on s'intéresse à l'étude de la contrôlabilité locale du système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), & t \in [t_0, t_f] \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.26)$$

où la fonction  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{n+m+1}$

**Proposition 1.1.** Considérons le système (1.26) avec  $f(x_0, u_0) = 0$ . On note  $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0)$  et  $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)$ . Si  $\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$  alors le système (1.26) est localement contrôlable en  $x_0$ .

## 1.4 EXISTENCE DE TRAJECTOIRE OPTIMALE

L'existence d'une trajectoire optimale dépend de la formulation du problème de contrôle optimal et des conditions qui y sont associées.

Dans le cadre classique du contrôle optimal, le problème consiste à trouver une trajectoire optimale pour un système dynamique donné, sous des contraintes initiales et finales et des contraintes sur les entrées de commande. La fonction de coût à minimiser ou maximiser est souvent définie comme une intégrale pondérée du temps ou comme une fonction de coût terminale.

L'existence d'une trajectoire optimale dans ce contexte dépend de plusieurs facteurs, notamment la convexité de la fonction de coût et la régularité des contraintes. Si la fonction de coût est convexe et les contraintes sont régulières, alors il existe généralement une trajectoire optimale unique. Cependant, si la fonction de coût est non convexe ou si les contraintes sont irrégulières, il peut y avoir plusieurs trajectoires optimales ou aucune trajectoire optimale.

Il est important de noter que l'existence d'une trajectoire optimale ne garantit pas son unicité ou sa faisabilité. Des conditions supplémentaires peuvent être nécessaires pour garantir l'unicité et la faisabilité de la trajectoire optimale. La condition nécessaire d'optimalité des trajectoire est donnée par le Théorème suivant :

### Théorème 1.3. Trélat [2005]

Considérons le système de contrôle :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (1.27)$$

où  $f$  est de  $C^1$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^n$ , les contrôles  $u$  sont à valeurs dans un compact  $U \subset \mathbb{R}^m$ , et où éventuellement on a des contraintes sur l'état :

$$q_1(x) \leq 0, \dots, q_{n_q}(x) \leq 0 \quad (1.28)$$

où  $q_1, q_2, \dots, q_{n_q}$  sont des fonctions continues sur  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $M_0$  et  $M_1$  deux compacts de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $M_1$  est accessible à partir de  $M_0$ . Soit  $U$  l'ensemble des contrôles à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  joignant  $M_0$  à  $M_1$  soit  $\Psi$  une fonction de  $C^1$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+$  et  $S$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}^n$ . On considère le coût :

$$J(u) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \Psi(x(t), u(t), t) dt \quad (1.29)$$

où  $t_f \geq 0$  est tel que  $x(t_f) \in M_1$ , on suppose que :

Il existe un réel positif  $b$  tel que toute trajectoire associée à un contrôle  $u \in U$  est uniformément borné par  $b$  sur  $[t_0, t_f]$  i.e :

$$\exists b > 0 \text{ tel que } \forall u \in U, \forall t \in [t_0, t_f], \quad \|x(t)\| \leq 0 \quad (1.30)$$

Pour tout  $(t, x) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ , l'ensemble des vecteurs de vitesse augmentés :

$$\tilde{V}(t, x) = \{f(x, u, t) \mid u \in U\} \quad (1.31)$$

est convexe.

Alors il existe un contrôle optimal  $u$  sur  $[t_0, t_f]$  telle que la trajectoire associée joint  $M_0$  à  $M_1$  en temps  $t_f$  et en un coût minimal.

## 1.5 MÉTHODES DE RÉOLUTION DU PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL

En général, les problèmes de contrôle optimal n'ont pas toujours de solutions analytiques. Par conséquent, des méthodes numériques doivent être utilisées pour pouvoir résoudre les problèmes de contrôle optimal avec leurs forces et leurs faiblesses respectives. La méthode choisie dépend du problème envisagé. En effet Il existe deux types de méthodes pour la résolution d'un problème en contrôle optimal : les méthodes directes et indirectes .

### 1.5.1 Méthodes directes

Les méthodes directes consistent à convertir le problème de contrôle optimal en un problème de programmation non linéaire en effectuant une discrétisation totale du problème. Ensuite, la commande est déterminée en résolvant le problème d'optimisation obtenu par des techniques d'optimisation classiques déterministes ou stochastiques . Dans ce cas, les variables d'optimisation représentent les commandes à appliquer aux différents instants d'échantillonnage. Le principe général consiste à discrétiser le modèle d'état en utilisant, par exemple la méthode d'Euler, puis de remplacer les solutions (variables d'état en fonctions des commandes) dans le critère et les contraintes, ainsi le problème de contrôle optimal prend la forme d'un problème d'optimisation statique [Betts \[2009\]](#).

### 1.5.2 Méthodes indirectes

Les méthodes indirectes sont basées sur deux grandes formulations, la première étant la programmation dynamique, la deuxième étant la formulation variationnelle qui est basée sur la méthode du multiplicateur de Lagrange et le principe du minimum de Pontryagin. L'approche indirecte consiste à dériver les conditions nécessaires d'optimalité du problème de contrôle qui sont données par un ensemble d'équations différentielles telles que les équations d'Euler-Lagrange les équations de Hamilton-Pontryagin et l'équation d'Hamilton Jacobi-Bellman . Le principe de chaque approche est d'écrit dans ce qui suit [Naidu \[2003\]](#) :

a) Equation d'Euler-Lagrange :

Elle consiste à formuler le problème sous forme d'équation d'Euler-Lagrange. Cette équation est une condition nécessaire pour qu'une trajectoire soit optimale, et elle est déduite en minimisant une fonctionnelle de coût sous des contraintes dynamiques, appelée aussi calcul variationnelle (calcul des variations)

**a.1) Méthode de substitution directe**

Considérons le problème de contrôle optimale suivant :

$$\min_{u(t)} = \int_{t_0}^{t_f} \Psi(x(t), u(t), t) dt \tag{1.32}$$

Sous les contraintes :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \tag{1.33}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.34}$$

$$x(t_f) = x_f \tag{1.35}$$

Où  $x \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur d'état.  $u \in \mathbb{R}^m$  est un vecteur de contrôle et  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+$  est une fonction différentiable par rapport à ces arguments : Dans l'équation (1.33) nous supposons  $u(t)$  peut être exprimée en fonction de  $x(t), \dot{x}(t)$ , c'est à dire :

$$u(t) = \phi(x(t), \dot{x}(t), t) \tag{1.36}$$

En remplaçant cette expression dans (1.32) le problème de la détermination du contrôle optimal est réduit à la solution du problème variationnel suivant :

$$\min_{x(t)} \tilde{J} = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt \tag{1.37}$$

Avec :

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.38}$$

$$x(t_f) = x_f \tag{1.39}$$

avec  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$  est une fonction continue supposée être continuellement différentiable par rapport à ses arguments.

La condition nécessaire pour l'unique solution du problème (1.37) est qu'elle satisfait l'équation d'Euler-Lagrange [Naidu \[2003\]](#) :

$$\frac{\partial g(x(t), \dot{x}(t), t)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g(x(t), \dot{x}(t), t)}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad (1.40)$$

avec les conditions aux limites (1.38) et (1.39).

L'équation d'Euler, nous permet d'avoir qu'une condition de stationnarité, c'était que à la fin de 18<sup>me</sup> siècle Legendre a réussi l'obtention de la condition d'optimalité de second ordre, en étudiant la seconde variationnelle. Elle a pour but de déterminer la nature de l'optimum (maximum, minimum).

La condition nécessaire d'optimalité est Sage et WhiteIII [1977] :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \dot{x}^2} > 0 \text{ (minimisation) ou } \frac{\partial^2 g}{\partial \dot{x}^2} < 0 \text{ (maximisation)} \quad (1.41)$$

## a.2) Méthode des Multiplicateurs de Lagrange

Pour dériver les conditions nécessaires d'optimalité du problème de contrôle optimal (1.32)-(1.35), on forme d'abord la fonctionnelle augmentée suivante :

$$\begin{aligned} J_a &= \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), u(t), t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left( \psi(x(t), u(t), t) + p^T(t)(\dot{x}(t) - f(x(t), u(t), t)) \right) dt \end{aligned} \quad (1.42)$$

avec  $\mathcal{L}$  est le lagrangien associé au problème (1.32)-(1.35) et  $p(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange et les conditions d'optimalité dans ce cas là sont données par Corriou [2012], Naidu [2003] :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} \right) = 0 \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}} \right) = 0 \quad (1.45)$$

**b) Principe du Minimum :**

Le principe du minimum est utilisé dans la théorie du contrôle optimal pour trouver la commande optimale permettant d'amener un système dynamique d'un état à un autre, en présence de contraintes portant sur l'état ou les commandes d'entrée. Le contrôle optimal a été formulé par le mathématicien soviétique Lev Semenovich Pontryagin en 1956, qui généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations, et développe par la suite par ses élèves et collaborateurs (Pontryagin 1961).

Le principe du maximum de Pontryagin est un principe qui donne une condition nécessaire d'optimalité pour les systèmes décrits par des équations différentielles ordinaires, il a été établi à l'origine pour calculer la trajectoire en temps minimal pour l'envoi d'une fusée sur la lune [Trélat \[2008\]](#).

On considère le problème de contrôle optimal (1.32)-(1.35) et on applique la méthode de Lagrange. Par conséquent, le problème de contrôle optimal est réduit à résoudre le problème suivant :

$$\hat{J}_\alpha = \int_{t_0}^{t_f} \Psi(x(t), u(t), t) + p(t)^T [f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)] dt \quad (1.46)$$

On définit la fonction d'Hamilton (Appelé aussi Hamiltonien) comme suit :

$$H(x(t), p(t), u(t), t) = \Psi(x(t), u(t), t) + p(t)^T f(x(t), u(t), t) \quad (1.47)$$

Ainsi le problème à résoudre (1.46) prend la forme suivante :

$$\hat{J}_\alpha = \int_{t_0}^{t_f} [H(x(t), p(t), u(t), t) - p(t)^T \dot{x}(t)] dt \quad (1.48)$$

Les conditions d'optimalité ci-dessous sont obtenues en mettant  $\delta \hat{J}_\alpha = 0$  [Naidu \[2003\]](#), [Trélat \[2005\]](#) :

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H(x(t), p(t), u(t), t)}{\partial p(t)} \quad (1.49)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H(x(t), p(t), u(t), t)}{\partial x(t)} \quad (1.50)$$

$$\frac{\partial H(x(t), p(t), u(t), t)}{\partial u(t)} = 0 \quad (1.51)$$

Selon le principe du minimum de Pontryagin, si  $u^*(t)$  est une solution du problème de contrôle optimal (1.32)-(1.35), alors

$$u^*(t) = \arg \min_{u(t)} H(x(t), p(t), u(t), t) \quad (1.52)$$

Par conséquent, en l'absence de contraintes, l'expression de la loi de contrôle optimal  $u^*(t)$  est obtenu en résolvant l'équation algébrique (1.51) par

rapport à la variable de contrôle  $u(t)$ . Par conséquent, la loi de contrôle optimale  $u^*(t)$  sera en fonction de l'état  $x(t)$  et du vecteur adjoint  $p(t)$ , c'est-à-dire :

$$u^*(t) = \varphi(x(t), p(t), t) \quad (1.53)$$

qui vérifie la condition suivante

$$\frac{\partial^2 H(x(t), p(t), u(t), t)}{\partial u^2(t)} > 0 \quad (\text{Pour un minimum}) \quad (1.54)$$

où :

$$\frac{\partial^2 H(x(t), p(t), u(t), t)}{\partial u^2(t)} < 0 \quad (\text{Pour un maximum}) \quad (1.55)$$

Cette condition représente la condition suffisante d'optimalité.

**Remarque 1.1.** Pour la recherche du minimum de l'Hamiltonien lorsque le contrôle est borné, il convient d'explorer la frontière du domaine  $U$ .

L'équation (1.49) représente l'état du système tandis que l'équation (1.50) est appelée équation co-état ou adjointe,  $p$  étant le vecteur co-état ou adjoint. Elles constituent un problème de valeur limite à deux points avec (1.34) et la condition aux limites générale de transversalité lorsque  $t_f$  et  $x(t_f)$  sont libres est donnée par [Naidu \[2003\]](#) :

$$\left( H(t_f) + \frac{\partial S}{\partial t_f} \right) \delta t_f + \left( \frac{\partial S}{\partial x(t_f)} - p(t_f) \right)^T \delta x_f = 0 \quad (1.56)$$

**1<sup>er</sup> cas : Temps final fixe et état final du système fixe :** Puisque  $t_f$  et  $x(t_f)$  sont fixes (Figure 1.2),  $\delta t_f$  et  $\delta x_f$  sont nuls dans la condition aux limites générale (1.56) et il n'y a pas de condition aux limites supplémentaire à utiliser autre que celles données dans la formulation du problème.

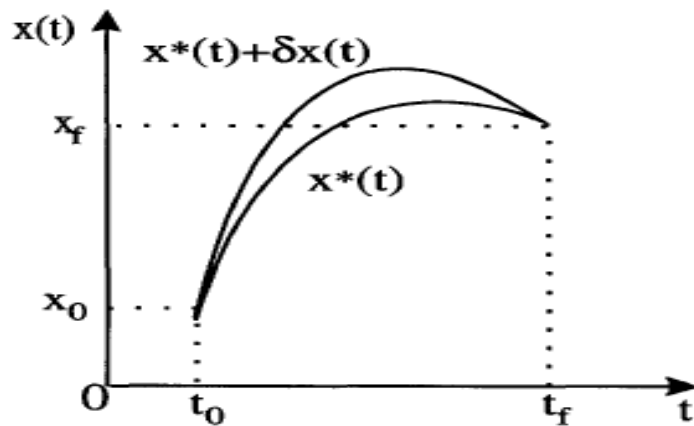


FIGURE 1.2 – Temps final fixe et état final du système fixe .

2<sup>ème</sup> cas : Temps final libre et état final du système fixe : Puisque  $t_f$  est libre,  $\delta t_f$  est arbitraire, et puisque  $x(t_f)$  est fixe,  $\delta x_f = 0$  comme le montre la Figure 1.3. Ceci donne

$$\left( H(t_f) + \frac{\partial S}{\partial t_f} \right) = 0. \quad (1.57)$$

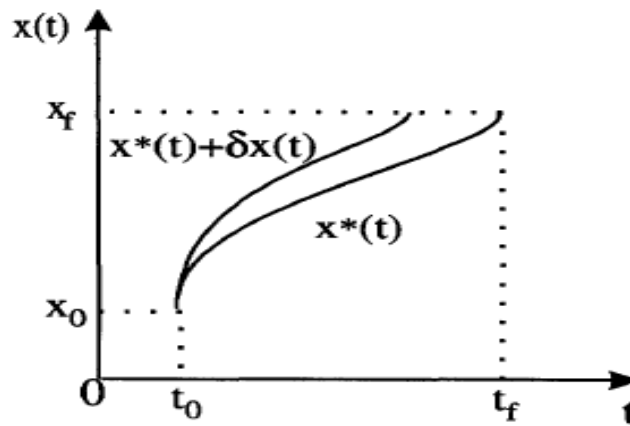


FIGURE 1.3 – Temps final libre et état final du système fixe .

3<sup>ème</sup> cas : Temps final fixe et état final du système libre : Dans ce cas,  $t_f$  est fixe et  $x(t_f)$  est libre (voir Figure 1.4). Alors  $\delta t_f = 0$  et  $\delta x_f = 0$  est arbitraire, ce qui donne :

$$\left( \frac{\partial S}{\partial x(t_f)} - p(t_f) \right) = 0 \Rightarrow p(t_f) = \frac{\partial S}{\partial x(t_f)}. \quad (1.58)$$

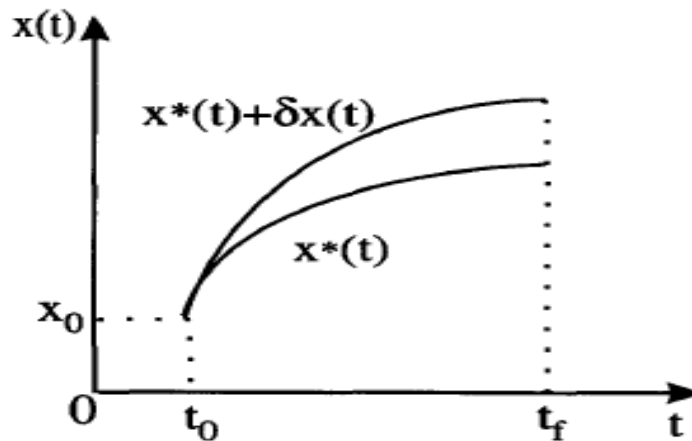


FIGURE 1.4 – Temps final fixe et état final du système libre .

4<sup>ème</sup> cas : Temps final libre et état final du système libre : Dans ce cas, la conditions aux limites (1.56) devient :

$$\left( H(t_f) + \frac{\partial S}{\partial t_f} \right) = 0 \quad (1.59)$$

$$\left( \frac{\partial S}{\partial x(t_f)} - p(t_f) \right) = 0 \quad (1.60)$$

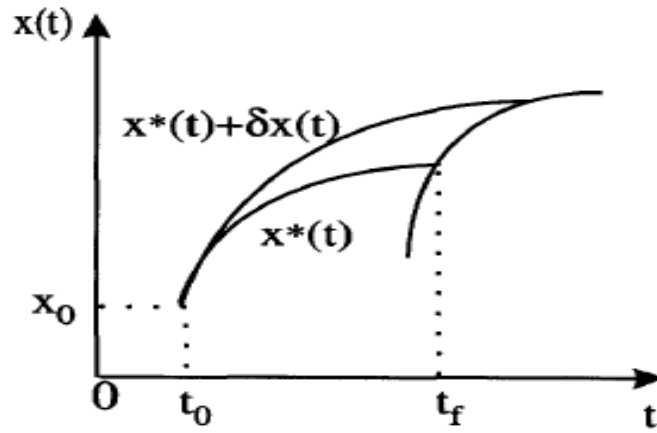


FIGURE 1.5 – Temps final libre et état final du système libre .

**Exemple 1.1.** On considère le problème de contrôle optimal suivant :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} u^2(t) dt \quad (1.61)$$

sujet à :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (1.62)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t) \quad (1.63)$$

$$x(0) = [1, 2]^T; \quad x(2) = [1, 0]^T. \quad (1.64)$$

En appliquant le principe du minimum au problème (1.61)-(1.64) :

**L'Hamiltonien dans ce cas est :**

$$\begin{aligned} H(x(t), p(t), u(t), t) &= \frac{1}{2} u^2(t) + p_1(t) \dot{x}_1(t) + p_2(t) \dot{x}_2(t) \\ &= \frac{1}{2} u^2(t) + p_1(t) x_2(t) + p_2(t) u(t) \end{aligned}$$

La commande optimale s'obtient comme suit :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

$$\implies u(t) + p_2(t) = 0$$

$$\implies u^*(t) = -p_2(t)$$

En remplaçant l'équation de la commande optimale  $u^*(t)$  dans l'équation d'Hamilton, on aura

$$\begin{aligned} H^* = H(x(t), p(t), u^*(t), t) &= \frac{1}{2}(-p_2(t))^2 + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)(-p_2(t)) \\ &= \frac{-1}{2}(p_2(t))^2 + p_1(t)x_2(t) \end{aligned}$$

**Les équations d'Hamilton sont donc données par :**

$$\dot{x}_1(t) = \frac{\partial H^*}{\partial p_1(t)} = x_2(t) \quad (1.65)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{\partial H^*}{\partial p_2(t)} = -p_2(t) \quad (1.66)$$

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x_1(t)} = 0 \quad (1.67)$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x_2(t)} = -p_1(t) \quad (1.68)$$

Résolution des équations d'Hamilton (1.65)-(1.68) :

$$(1.65) \implies p_1(t) = C_1$$

$$(1.68) \implies p_2(t) = -C_1 t + C_2$$

$$(1.66) \implies x_2(t) = \frac{C_1}{2} t^2 - C_2 t + C_3$$

$$(1.65) \implies x_1(t) = \frac{C_1}{6} t^3 - \frac{C_2}{2} t^2 + C_3 t + C_4$$

En imposant les conditions initiales, il vient

Pour  $t = 0$  :

$$x_1(0) = 1 \implies C_4 = 1$$

$$x_2(0) = 2 \implies C_3 = 2$$

En imposant maintenant les conditions finales, il vient

Pour  $t = 2$  :

$$x_1(2) = 1 \implies \frac{4}{3}C_1 - 2C_2 = -4$$

$$x_2(2) = 0 \implies 2C_1 - 2C_2 = -2$$

La résolution de ce système d'équation conduit à la solution suivante :  
 $C_1 = 3$  et  $C_2 = 4$

Par conséquent, nous avons les états, co-états et contrôle optimaux suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^*(t) = \frac{1}{2}t^3 - 2t^2 + 3t + 1 \\ x_2^*(t) = \frac{3}{2}t^2 - 4t + 2 \\ p_1^*(t) = 3 \\ p_2^*(t) = -3t + 4 \\ u^*(t) = 3t - 4. \end{array} \right.$$

**Exemple 1.2.** Considérons le même Exemple 1.1 avec des conditions aux limites modifiées comme suit

$$x(0) = [1, 2]^T; \quad x_1(2) = 0; \quad x_2(2) \text{ libre.} \quad (1.69)$$

En suivant les mêmes étapes de résolution que l'Exemple 1.1 on obtient les mêmes états, co-états et contrôle optimaux, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^*(t) = \frac{C_1}{6}t^3 - \frac{C_2}{2}t^2 + C_3t + C_4 \\ x_2^*(t) = \frac{C_1}{2}t^2 - C_2t + C_3 \\ p_1^*(t) = C_1 \\ p_2^*(t) = -C_1t + C_2 \\ u^*(t) = -p_2^*(t) = C_1t - C_2. \end{array} \right.$$

En imposant les conditions initiales, il vient :

Pour  $t = 0$  :

$$x_1(0) = 1 \implies C_4 = 1$$

$$x_2(0) = 2 \implies C_3 = 2$$

En imposant maintenant les conditions finales, il vient

Pour  $t = 2$  :

$$x_1(2) = 0 \implies \frac{4}{3}C_1 - 2C_2 = -5$$

$$x_2(2) \text{ est libre} \implies p_2(t_f) = \frac{\partial S}{\partial x_2(t_f)} = 0$$

$$\implies p_2(2) = 0 \implies 2C_1 - C_2 = 0.$$

La résolution de ce système d'équation conduit à la solution suivante :

$$C_1 = \frac{15}{8} \text{ et } C_2 = \frac{15}{4}.$$

Finalement, les états, co-états et contrôle optimaux sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^*(t) = \frac{5}{16}t^3 - \frac{15}{8}t^2 + 2t + 1 \\ x_2^*(t) = \frac{15}{16}t^2 - \frac{15}{4}t + 2 \\ p_1^*(t) = \frac{15}{8} \\ p_2^*(t) = -\frac{15}{8}t + \frac{15}{4} \\ u^*(t) = \frac{15}{8}t - \frac{15}{4}. \end{array} \right.$$

**Exemple 1.3.** Considérons le même Exemple 1.1 avec des conditions aux limites modifiées suivantes

$$x(0) = [1, 2]^T; \quad x_1(t_f) = 3 \text{ et } x_2(t_f) \text{ libre.} \quad (1.70)$$

En appliquant le principe du minimum et en suivant les mêmes étapes précédentes, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^*(t) = \frac{C_1}{6}t^3 - \frac{C_2}{2}t^2 + C_3t + C_4 \\ x_2^*(t) = \frac{C_1}{2}t^2 - C_2t + C_3 \\ p_1^*(t) = C_1 \\ p_2^*(t) = -C_1t + C_2 \\ u^*(t) = -p_2^*(t) = C_1t - C_2. \end{array} \right.$$

En imposant les conditions initiales, il vient :

Pour  $t = 0$  :

$$x_1(0) = 1 \implies C_4 = 1$$

$$x_2(0) = 2 \implies C_3 = 2$$

En imposant les conditions finales, il vient :

- $x_1(t_f) = 3$ ,  $t_f$  est libre et  $x_f$  est fixe dans ce cas là, on aura

$$\left( H(t_f) + \frac{\partial S}{\partial t_f} \right) = 0 \implies p_1(t_f)x_2(t_f) - 0.5p_2^2(t_f) = 0 \quad (1.71)$$

- $x_2(t_f)$  est libre, dans ce cas là, on aura

$$p_2(t_f) = \frac{\partial S}{\partial x_2(t_f)} = 0 \quad (1.72)$$

En utilisant les conditions (1.71)-(1.72) avec  $x_1(t_f) = 3$ , ceci donne

$$t_f = 3, \quad C_1 = \frac{4}{9} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{4}{3}$$

Par conséquent, les états, co-états et contrôle optimaux sont obtenus comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^*(t) = \frac{2}{27}t^3 - \frac{2}{3}t^2 + 2t + 1 \\ x_2^*(t) = \frac{4}{18}t^2 - \frac{4}{3}t + 2 \\ p_1^*(t) = \frac{4}{9} \\ p_2^*(t) = -\frac{4}{9}t + \frac{4}{3} \\ u^*(t) = \frac{4}{9}t - \frac{4}{3}. \end{array} \right.$$

### c) Programmation dynamique :

La méthode de programmation dynamique est une méthode de résolution de problèmes d'optimisation en utilisant des méthodes de récursions et de sous-problèmes. Elle a été développée dans les années 1950 par Richard Bellman.

Elle permet de résoudre les problèmes de contrôle optimal en divisant le problème en sous-problèmes plus simples, puis en résolvant chaque sous-problème de manière récursive. Les sous-problèmes sont ensuite combinés pour obtenir la solution optimale du problème initial.

En contrôle optimal, la programmation dynamique est souvent utilisée pour résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) [Bellman \[1957\]](#). L'équation HJB est une équation aux dérivées partielles non-linéaire qui décrit la

valeur optimale d'un problème de contrôle optimal. La solution de l'équation HJB est la fonction valeur qui décrit la valeur optimale de l'état actuel et de l'action à prendre pour atteindre un état final souhaité.

La méthode de programmation dynamique permet de résoudre l'équation HJB de manière récursive, en commençant par l'état final et en remontant jusqu'à l'état initial. À chaque étape, on calcule la valeur optimale pour chaque état et chaque action possible. En combinant les solutions obtenues pour chaque étape, on obtient finalement la solution optimale du problème de contrôle optimal.

L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman en temps continu est donné comme suit :

$$\begin{cases} J_t^*(x(t), t) + H(x(t), u(x(t), J_x^*, t), J_x^*, t) = 0 \\ J_t^*(x(t_f), t_f) = S(x(t_f), t_f), \end{cases} \quad (1.73)$$

avec

$$J_t^*(x(t), t) = \min_u \left\{ \int_t^{t_f} \Psi(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + S(x(t_f), t_f) \right\}, \tau \in [t, t_f] \quad (1.74)$$

et

$$H(x(t), u(x(t), J_x^*, t), J_x^*, t) = \min_{u(t)} H(x(t), u(t), J_x^*, t) \quad (1.75)$$

où

$$H(x(t), u(t), J_x^*, t) = \Psi(x(t), u(t), t) + J_t^*(x(t), t)(f(x(t), u(t), t)) \quad (1.76)$$

## 1.6 COMPARAISON ENTRE LES MÉTHODES DIRECTES ET INDIRECTES

Les méthodes indirectes sont basées sur la résolution de l'équation de Pontryagin. Cette approche consiste à trouver une solution linéaire aux conditions du premier ordre du problème de contrôle optimal. Les conditions du premier ordre sont un ensemble d'équations différentielles appelées équations de Pontryagin, qui décrivent les trajectoires optimales du système et les contrôles optimaux correspondants. Une fois les équations de Pontryagin résolues, la solution du problème de contrôle optimal peut être obtenue en utilisant une méthode numérique pour résoudre les équations différentielles. Les méthodes indirectes ont l'avantage de produire une solution linéaire explicite qui peut être utilisée pour déduire des informations sur les trajectoires optimales du système et les contrôles optimaux correspondants par contre elles peuvent être difficiles à mettre en œuvre pour les problèmes complexes avec des contraintes multiples et/ou non-linéaires de plus ces méthodes sont parfois sensibles aux approximations numériques, ce qui peut entraîner des erreurs de précision.

Les méthodes directes sont basées sur la discrétisation du temps et de l'espace d'état. Cette approche consiste à discrétiser le temps et l'espace d'état

du problème de contrôle optimal et à convertir le problème de contrôle optimal continu en un problème d'optimisation non linéaire avec des contraintes non linéaires. La solution du problème d'optimisation non linéaire peut être obtenue en utilisant des algorithmes d'optimisation numérique tels que la méthode de Newton-Raphson, la méthode du gradient conjugué ou la méthode des régions de confiance. Les méthodes directes ont l'avantage d'être plus simples à mettre en œuvre pour les problèmes complexes avec des contraintes multiples et/ou non-linéaires, elles permettent une plus grande flexibilité dans la formulation du problème de contrôle optimal en permettant l'inclusion de termes de coûts non-linéaires et de contraintes non-linéaires.

Mais elles peuvent avoir une précision limitée en raison de la discrétisation de l'espace d'état et du temps et elles peuvent être plus lentes que les méthodes indirectes pour les problèmes de petite dimension.

En résumé, les méthodes indirectes sont avantageuses pour les problèmes de petite dimension où une solution analytique explicite est souhaitée, tandis que les méthodes directes sont plus adaptées aux problèmes complexes avec des contraintes multiples et/ou non-linéaires. Le choix de la méthode dépend du problème spécifique à résoudre et des compromis entre précision, vitesse et complexité de mise en œuvre.

## 1.7 CONCLUSION

Les méthodes de résolution du problème de contrôle optimal peuvent être classées en deux catégories : les méthodes directes et les méthodes indirectes. Les méthodes directes consistent à discrétiser l'espace d'état et à transformer le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation numérique avec des contraintes non-linéaires, tandis que les méthodes indirectes sont basées sur la résolution des conditions d'optimalités donnée sous forme d'équation différentielle souvent à deux valeurs limites. Ces conditions d'optimalités peuvent être résolus analytiquement dans le cas où le système dynamique régit par des équations différentielles linéaires.

Dans le cas contraire c'est à dire en présence des non-linéarités des méthodes numériques sont requises pour chercher la solution. Dans le chapitre suivant, nous allons présenter quelques méthodes pour la résolution des équations différentielles et on va présenter la méthode d'itération variationnelle permettant de résoudre itérativement une équation différentielle. Cette méthode sera exploitée par la suite pour l'identification des variables adjointes.

# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

# 2

## 2.1 INTRODUCTION

Les équations différentielles est l'un des concepts mathématiques universellement utilisé dans différents domaines et autres sciences. Elles décrivent l'évolution de nombreux phénomènes. On les retrouve aussi bien en biologie, en chimie qu'en économie. Newton disait "Traiter mathématiquement un problème physique revient à trouver l'équation différentielle qui le décrit".

La résolution des équations différentielles ordinaires analytiquement, peut se faire seulement dans certains cas. Dans le cas où elles sont fortement non linéaires, divers méthodes peuvent être employées.

Le but de ce chapitre est de présenter la méthode des itérations variationnelles ainsi que son utilisation pour la résolution des équations différentielles ordinaires.

## 2.2 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES (EDOs)

Une équation différentielle est un type d'équation un peu particulier, dans la mesure où l'inconnue est une fonction dérivable (Au moins une fois), on parle d'équation différentielle, si les dérivées de la fonction inconnue apparaissent aussi dans l'équation.

**Définition 2.1.** On appelle équation différentielle du  $n^{\text{ème}}$  ordre, une relation de la forme  $F(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}) = 0$ , entre une variable réelle  $t$ , une fonction inconnue  $y$  (à valeurs réelles ou complexes) de la variable  $t$  et des dérivées successives  $\dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)}$  de cette fonction.

### 2.2.1 Équation différentielle linéaire

**Définition 2.2.** L'équation différentielle sous sa forme explicite (normalisée) est donnée par :

$$y^{(n)} = F(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.1)$$

Si  $F$  est linéaire par rapport à  $(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$  l'équation est dite homogène à coefficients constants si  $F$  ne dépend pas de  $t$ . Si  $F$  est de la forme

$F(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) = g(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) + b(t)$  avec  $G$  linéaire par rapport à  $(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$  l'équation est dite linéaire avec second membre.

**a) Équation différentielle linéaire de premier ordre :**

**Définition 2.3. :**

Soit une fonction définie sur l'intervalle  $\mathbb{I}$  de  $\mathbb{R}$ , continue.

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre homogène une équation de la forme :

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t) \quad \forall t \in \mathbb{I} \quad (2.2)$$

Où  $y$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{I}$ . On peut aussi écrire, pour alléger les notations :

$$\dot{y}(t) = a(t)y \quad \forall t \in \mathbb{I} \quad (2.3)$$

**• Équation différentielle du premier ordre avec second membre :**

**Définition 2.4. :**

Soit  $a$  et  $b$  deux fonctions définies sur un intervalle  $\mathbb{I}$  de  $\mathbb{R}$ , à valeur dans  $\mathbb{R}$ , continue.

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre une équation de la forme :

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t) + b(t) \quad \forall t \in \mathbb{I} \quad (2.4)$$

Que l'on peut aussi écrire, pour alléger les notions :

$$\dot{y}(t) = a(t)y + b(t) \quad \forall t \in \mathbb{I} \quad (2.5)$$

**b) Equation différentielle linéaire de deuxième ordre :**

**i) A coefficient constants :**

**Définition 2.5. :**

On appelle équation différentielle complète de second ordre à coefficient constants toute équation de la forme :

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = h(t) \quad a, b \text{ et } c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad (2.6)$$

Où  $y$  est la fonction inconnue de la variable indépendante  $t$ .

Si  $h(t) = 0$  on dit que l'équation :

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0 \quad (2.7)$$

Est sans second membre ou homogène.

**ii) A coefficient non constants :****Définition 2.6. :**

Soient  $a, b$  et  $c$  trois fonctions définies sur un intervalle  $\mathbb{I}$  dans  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  continue,  $h$  une fonction définie et continue sur un intervalle  $\mathbb{I}$  de  $\mathbb{R}$ , à valeur dans  $\mathbb{R}$ .

L'équation :

$$a(t)\ddot{y} + b(t)\dot{y} + c(t)y = h(t) \quad (2.8)$$

Est une équation différentielle du second ordre à coefficient non constants.

L'équation homogène associée à 1.19 est :

$$a(t)\ddot{y} + b(t)\dot{y} + c(t)y = 0 \quad (2.9)$$

**2.2.2 Equation différentielle non linéaire :**

Une équation différentielle ordinaire (EDO) non linéaire est une équation qui relie une fonction inconnue à ses dérivées apparaissent dans des termes non linéaires. En d'autres termes, une EDO non linéaire est une équation différentielle où la fonction inconnue et/ou ses dérivées sont multipliées, élevées à une puissance ou apparaissent dans une fonction non linéaire, telle que la fonction sinus ou exponentielle [Ramis et al. \[1993\]](#).

C'est important de noter que la résolution d'une EDO non linéaire peut-être très difficile, voire impossible dans certains cas, et que dans la plupart des cas, on doit recourir à des techniques numériques pour obtenir une solution approchée.

**2.3 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET PROBLÈME DE CAUCHY :**

On s'intéresse aux équations différentielles du premier ordre sous la forme :

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) \quad (2.10)$$

Avec  $f : \mathbb{I} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{I}$  intervalle  $\in \mathbb{R}$ ) une fonction continue si  $n > 1$ , il s'agit en pratique d'un système différentielle.

Le problème avec condition initiale est appelé problème de Cauchy définie comme suit :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)); \\ y(t_0) = y_0 \quad t_0 \in \mathbb{I}; \quad y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.11)$$

### 2.3.1 Théorème de Cauchy-Lipchitz :

**Théorème 2.1.** [Demailly \[1989\]](#) Considérons le problème de Cauchy suivant (2.11). Si  $f$  est continue sur  $\mathbb{I} \times \mathbb{R}^n$  vérifiant une condition Lipchitz (Fonction lipchitzienne) par rapport à la deuxième variable  $y$ , ie :

$$\exists M > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall t \in \mathbb{I}, \quad \forall y_1, y_2$$

On ait :

$$|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| < M|y_1(t) - y_2(t)|$$

Alors le problème (2.11) admet une solution unique  $y$  pour toute valeur initiale  $y_0$ .

## 2.4 MÉTHODES DE RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES :

Dans ce titre, nous allons explorer les différentes méthodes de résolution des EDOs, notamment les méthodes analytiques et numériques ainsi que la méthode des itérations variationnelles.

### 2.4.1 Méthodes analytiques

Les méthodes analytiques consistent à trouver une solution exacte de l'EDO en utilisant des techniques mathématiques telles que l'intégration, la séparation des variables et les transformations de variables.

#### a) Equation à variables séparées [Gilormini et Hirsch \[1980\]](#) :

Soit l'équation :

$$\dot{y} = h(t)g(y)$$

**Résolution :**

On sépare les variables :  $\frac{dy}{g(y)} = h(t)dt$ , en intégrant cette équation, on obtient :

$$G(y) = H(t) + C,$$

Où  $G$  et  $H$  sont respectivement les primitives de  $\frac{1}{g}$  et  $h$ . Puisque  $G'(x) = \frac{1}{g(x)} \neq 0$ , alors  $G'$  garde le même signe,  $G$  est donc monotone et continue, par conséquent elle est inversible. On a les solutions générales suivantes de l'équation (2.1).

$$y = G^{-1}(H(t)) + C = G^{-1}\left(\int_{t_0}^t f(s)ds\right), \quad H(t_0) = C.$$

**Exemple 2.1.** Soit (E)  $ty\dot{y} = (1 - t^2)$ , pour  $t \neq 0$  elle se met sous la forme  $y\dot{y} = \frac{1-t^2}{t}$ , alors :

$$\begin{aligned}
 ydy &= \frac{1-t^2}{t} dt \\
 \Rightarrow \int ydy &= \frac{1-t^2}{t} dt \\
 \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 &= \ln|t| - \frac{1}{2}t^2 + C, C \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Il vient que la solution générale de l'équation (E) est :

$$y = \pm \sqrt{2\ln|t| - t^2 + C}, \quad \forall t \in \mathbb{I}$$

Où  $\mathbb{I}$  est un intervalle ne contenant pas 0 et dépend de la constante C.

**b) Equation différentielle linéaire du premier ordre :**

**i) Equation du premier ordre homogène :**

**Théorème 2.2. Constantini [2013]**

Soit  $\mathbb{I}$  un intervalle. Soit  $a$  une fonction continue sur  $\mathbb{I}$  et à valeur dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , soit l'équation différentielle :

$$(E_0) : \dot{y} + a(t)y = 0 \tag{2.12}$$

$$(E_0) \Leftrightarrow \dot{y} = -a(t) \times y(t) \tag{2.13}$$

$$(E_0) \Leftrightarrow \frac{\dot{y}}{y(t)} = -a(t) \tag{2.14}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -a(t) dt \tag{2.15}$$

$$\ln|y| = C \times e^{\int -a(t) dt} \tag{2.16}$$

$$y(t) = C \times e^{-A(t)} \tag{2.17}$$

L'ensemble des solutions de  $(E_0)$  sur  $\mathbb{I}$  est :

$$y(t) = C \times e^{-A(t)}, t \in \mathbb{I}, C \in \mathbb{R} \tag{2.18}$$

Où  $A$  est une primitive de  $a$  sur  $\mathbb{I}$  et  $C$  une constante (réelle ou complexe selon le cas).

**Exemple 2.2.** Soit à résoudre l'équation  $(E) : \dot{y} = \frac{1}{(1+t^2)y}$  sur  $\mathbb{R}$

D'après le Théorème, les solutions de cette équation dont les fonctions  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$y(t) = C \times e^{\arctan(t)}, C \in \mathbb{R}$$

• **Cas particulier du théorème :**

Dans le cas où la fonction  $a$  est une constante, que nous allons encore noter  $a$ , les solutions  $y$  sur  $\mathbb{I}$  de l'équation différentielle  $\dot{y} + ay = 0$  s'écrivent plus simplement, pour tout  $t$  de  $\mathbb{I}$  :

$$y(t) = \dot{C} \times e^{at}, \text{ avec } \dot{C} \in \mathbb{R} \quad (2.19)$$

**Exemple 2.3.** Soit l'équation  $\dot{y} + y = 0$

Les solutions de cette équation sont exprimées avec la fonction  $y$  telle que :

$$y(t) = C \times e^{(-t)}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

ii) **Équation du premier ordre avec second membre (non homogène) :**

**Théorème 2.3.** Constantini [2013] Soit  $\mathbb{I}$  un intervalle.

Soit  $a$  et  $b$  des fonctions continues sur  $\mathbb{I}$  et à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$

Soit  $(E)$  l'équation différentielle :

$$(E) : \dot{y} + a(t)y = b(t) \quad (2.20)$$

L'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{I}$  est :

$$y(t) = \left[ \int b(t) \times e^{A(t)} dx + C \right] \times e^{-A(t)}, t \in \mathbb{I} \quad (2.21)$$

Où  $A$  est une primitive de  $a$  sur  $\mathbb{I}$  et  $C \in \mathbb{R}$ .

**Exemple 2.4.** Résoudre l'équation  $(E) : \dot{y} - \frac{1}{t}y = -1$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$   
Par utilisation du Théorème, on obtient :

$$y(t) = \left( \int -e^{(-\ln(t))} dt + C \right) \times e^{(\ln(t))}$$

$$y(t) = \left( \int (-1/t) dt + C \right) \times t$$

$$y(t) = t(C - \ln(t)) \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

• **Cas particulier du théorème (2.3) :**

Dans le cas où les fonctions  $a$  et  $b$  sont des constantes, que nous allons noter encore  $a$  et  $b$ , les solutions de l'équation différentielle  $\dot{y} + ay = b$  s'écrivent pour tout  $t$  dans  $\mathbb{I}$  :

$$y(t) = \left( \int b \times e^{at} dt + C \right) \times e^{-at} = \begin{cases} \left( \frac{b}{a} e^{at} + C \right) e^{-at}, & a \neq 0 \\ bt + C, & a = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

**c) Equation différentielle linéaire du second ordre**

**i) A coefficient constants :**

Soient  $a, b, c$  des réels dans  $\mathbb{R}$ , et  $h$  une fonction définie dans  $\mathbb{R}$  :

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = h(t) \quad (2.23)$$

(2.23) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec second membre à coefficients constants, sa résolution se fait en deux étapes :

**• Résolution de l'équation homogène associée :**

Soit  $a\dot{y} + b\dot{y} + cy = 0$  est l'équation homogène associée à l'équation (2.23).

**Définition 2.7.** (Équation caractéristique) :

L'équation du second degré  $aX^2 + bX + c = 0$  est appelée équation caractéristique associée à  $(E_0)$  :  $a\dot{y} + b\dot{y} + cy = 0$ .

**Théorème 2.4.** (Résolution, dans  $\mathbb{R}$ , de  $a\dot{y} + b\dot{y} + cy = 0$ ) : [Constantini \[2013\]](#)

Soient  $a, b$  et  $c$  trois nombres réels avec  $a \neq 0$ .  
Soit  $(E_0)$  l'équation différentielle  $a\dot{y} + b\dot{y} + cy = 0$ .  
Soit  $\Delta$  le discriminant de son équation caractéristique  $aX^2 + bX + c = 0$ .

1. Si  $\Delta > 0$  alors l'équation caractéristique admet deux racines réelles  $r_1$  et  $r_2$ , les solutions de  $(E_0)$  sur  $\mathbb{R}$  sont alors les fonctions de la forme :

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \text{ où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

2. Si  $\Delta = 0$  alors l'équation caractéristique admet une unique racine  $r_0$ , les solutions de  $(E_0)$  sur  $\mathbb{R}$  sont alors les fonctions de la forme :

$$y(t) = (C_1 t + C_2) e^{r_0 t} \text{ où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

3. Si  $\Delta < 0$  alors l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées  $r_1 = \alpha + i\beta$  et  $r_2 = \alpha - i\beta$  (avec  $\beta \neq 0$ ), les solutions de  $(E_0)$  sur  $\mathbb{R}$  sont alors les fonctions de la forme :

$$y(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)) \text{ où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

**Exemple 2.5. :**

1.  $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$

L'équation caractéristique s'écrit  $r^2 - 3r + 2r = 0$  admet comme racine  $r_1 = 1$  et  $r_2 = 2$  ( $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$ ). L'équation différentielle admet donc comme

solutions linéairement indépendantes  $y_1 = e^t$  et  $y_2 = e^{2t}$  et sa solution générale est :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^t + c_2 e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

• **Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre :**

Pour avoir une solution particulière de l'équation avec second membre on peut dans tous les cas utiliser la méthode de variations des constantes présentées pour des équations à coefficients non constants qu'on va traiter prochainement. Dans certains cas où  $h(t)$  a une forme particulière, on peut rendre les calculs plus rapides en cherchant une solution particulière selon la forme de  $h(t)$ .

On peut distinguer deux cas particuliers importants :

**Proposition 2.1.** (Cas d'un second membre polynomial) : [Constantini \[2013\]](#)

1.  $h(t) = e^{\alpha t} P_n(t)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $P_n$  polynôme de degré  $n$ .

On cherche une solution particulière  $y_p$  sous forme :

- $y_p = Q_n(t)e^{\alpha t}$  Si  $\alpha$  n'est pas racine de l'équation caractéristique.
- $y_p = tQ_n(t)e^{\alpha t}$  Si  $\alpha$  est racine simple de l'équation caractéristique.
- $y_p = t^2Q_n(t)e^{\alpha t}$  Si  $\alpha$  est racine double de l'équation caractéristique.

**Proposition 2.2.** (Cas d'un second membre de la forme) : [Constantini \[2013\]](#)

$h(t) = e^{at}(P_n(t)\cos\beta t + Q_m(t)\sin\beta t)$  :

2.  $h(t) = e^{at}(P_n(t)\cos\beta t + Q_m(t)\sin\beta t)$  où  $P_n$  et  $Q_m$  polynômes de degré respectivement  $n$  et  $m$ .

On cherche  $y_p$  sous forme :

- $y_p = e^{at}(R_k(t)\cos\beta t + T_k(t)\sin\beta t)$ , si  $\alpha + i\beta$  n'est pas racine de  $(ec)$  ;
- $y_p = te^{at}(R_k(t)\cos\beta t + T_k(t)\sin\beta t)$ , si  $\alpha + i\beta$  est racine de  $(ec)$  ;

où  $R_k$  et  $T_k$  polynômes de degrés  $k = \max(m, n)$ .

**Principe de superposition : Demailly [1989]**

Si  $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$ , une solution particulière est donnée par  $y_p = y_{p1} + y_{p2}$  où  $y_{pi}$  est la solution particulière à :

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = h_i(t), \quad i = \overline{1, 2}$$

La solution de l'équation est donnée par :

$$y(t) = y_0 + y_p$$

Avec :  $y_0$  est la solution de l'équation homogène associée,  $Y_p$  est la solution particulière.

**Exemple 2.6.** Résoudre  $\ddot{y} - 5\dot{y} + 6y = 3e^{4t}$

L'équation sans second membre  $a$  pour équation caractéristique  $r^2 - 5r + 6 = 0$  dont les racines sont  $r_1 = 2$  et  $r_2 = 3$ . La solution générale de l'équation homogène associée est donc :

$$y_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}.$$

Le second membre étant une fonction exponentielle multipliée par un polynôme de degré 0. Comme 4 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherchera une solution particulière sous forme  $y_p = K_1 \times e^{4t}$   
D'où :

$$y_p = 4K_1 e^{4t}, \quad \ddot{y}_p = 16e^{4t}$$

et donc :

$$16K_1 e^{4t} - 20K_1 e^{4t} + 6K_1 e^{4t} = 3e^{4t}$$

$$\implies K_1 = \frac{3}{2}$$

La solution générale de l'équation avec second membre est donc :

$$y = y_h + y_p$$

$$= c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + \frac{3}{2} e^{4t}.$$

## ii) A coefficient non constants

Soit l'équation différentielle linéaire de second ordre suivante :

$$a(t)\ddot{y} + b(t)\dot{y} + c(t)y = h(t) \dots \quad (E) \quad t \in \mathbb{I}, \quad \mathbb{I} \in \mathbb{R} \quad (2.24)$$

avec  $a, b, c$  et  $h$  sont des fonctions continues.

L'équation

$$a(t)\ddot{y} + b(t)\dot{y} + c(t)y = 0 \dots \quad (E_0) \quad (2.25)$$

est l'équation homogène associée.

L'idée pour résoudre l'équation (E) est d'abord trouver l'ensemble des solutions de l'équation homogène ( $E_0$ ) associée, puis par la méthode de variations des constantes on obtient une solution particulière pour l'équation (E).

Ce qui fait la solution générale de l'équation (E) est donnée par :

$$y = y_h + y_p$$

Avec,  $y_h$  l'ensemble de solution d'équation  $E_0$ ,  $y_p$  la solution particulière de (E).

**Résolution de l'équation homogène : Dellacherie et Mayer [1979]**

Soit  $y_n$  une solution de  $(E_0)$ . Posons  $y = y_1 z$  et cherchons  $z$  vérifiant  $(E_0)$   
On a alors :

$$\dot{y} = \dot{y}_1 z + y_1 \dot{z} \quad (2.26)$$

Par conséquent

$$\ddot{y} = \ddot{y}_1 z + \dot{y}_1 \dot{z} + \dot{y}_1 \dot{z} + y_1 \ddot{z} \quad (2.27)$$

Ce qui donne

$$\ddot{y} = \ddot{y}_1 z + 2\dot{y}_1 \dot{z} + y_1 \ddot{z} \quad (2.28)$$

On remplace dans (2.26) et (2.28) dans  $(E_0)$ , ce qui donne

$$a(t)(\dot{y}_1 z + 2\dot{y}_1 \dot{z} + y_1 \ddot{z}) + b(t)(y_1 z + y_1 \dot{z}) + c(t)y_1 z = 0 \quad (2.29)$$

Ou encore

$$a(t)y_1 \ddot{z} + (2a(t)\dot{y}_1 + b(t)y_1)\dot{z} + (a(t)y_1 \dot{y}_1 + b(t)y_1 \dot{y}_1 + c(t)y_1)z = 0 \quad (2.30)$$

On a

$$a(t)\dot{y}_1 + b(t)y_1 + c(t)y_1 = 0, \quad (\text{car } y_1 \text{ solution de } E_0) \quad (2.31)$$

Ce qui nous donne enfin l'équation :

$$a(t)y_1 \ddot{z} + (2a(t)\dot{y}_1 + b(t)y_1)\dot{z} = 0 \cdots (E_z) \quad (2.32)$$

Qui se ramène au premier ordre en posant  $Z = \dot{z}$

$$A(t)\dot{Z} + B(t)Z = 0 \quad (2.33)$$

avec

$$A(t) = a(t)y_1 \quad (2.34)$$

et

$$B(t) = 2a(t)\dot{y}_1 + b(t)y_1 \quad (2.35)$$

On a donc  $Z = \dot{z} = C_1 e^{g(t)}$  où  $g(t)$  est primitive de  $-\frac{B(t)}{A(t)}$  et  $C_1$  une constante arbitraire.

Finalement la solution générale de  $(E_0)$  est :

$$y = y_1 z = y_1 (C_1 F(t) + C_2) = C_1 y_1 F(t) + C_2 y_1 \quad (2.36)$$

**Remarque 2.1. Gilormini et Hirsch [1980]**

La démarche de la démonstration peut être utilisée pour résoudre une équation différentielle de second ordre homogène en connaissant une solution particulière que l'on note  $y_1$ .

**Remarque 2.2.** Gilormini et Hirsch [1980]

Si on connaît deux solutions particulières  $y_1, y_2$  indépendantes, alors la solution générale de  $(E_0)$  est  $y = c_1y_1 + c_2y_2$ ,  $c_1$  et  $c_2$  étant deux constantes arbitraires.

**Exemple 2.7.** Soit l'équation :

$$(t + 1)\ddot{y} - (2t)\dot{y} + (t - 2)y = 0 \quad (2.37)$$

Avec  $y_1 = e^t$  est une solution particulière de (2.37).  
Posons

$$y = y_1z = e^tz \quad (2.38)$$

alors

$$\dot{y} = e^tz + e^t\dot{z} = e^t(z + \dot{z}) \quad (2.39)$$

et donc

$$\ddot{y} = e^t(z + \dot{z}) + e^t(\dot{z} + \ddot{z}) = e^t(z + 2\dot{z} + \ddot{z}) \quad (2.40)$$

En remplaçant les équations (2.38), (2.39) et (2.40) dans (2.37) on aura

$$(t + 1)e^t(z + 2\dot{z} + \ddot{z}) - (2t - 1)e^t(z + \dot{z}) + (t - 2)e^tz = 0 \quad (2.41)$$

et donc

$$(t + 1)e^t\ddot{z} + (2(t + 1)e^t - (2t - 1)e^t)\dot{z} + ((t + 1)e^t - (2t - 1)e^t + (t - 2)e^t)z = 0 \quad (2.42)$$

or  $e^t$  est une solution de (2.37) donc

$$(t + 1)e^t\ddot{z} + ze^t\dot{z} = 0 \quad (2.43)$$

En simplifiant (2.43) par  $e^t$  on obtient

$$(t + 1)\ddot{z} = -3\dot{z} \quad (2.44)$$

On pose  $\dot{z} = Z$  on aura

$$(t + 1)\dot{Z} = -3Z \quad (2.45)$$

qui est une équation différentielle du premier ordre ayant pour solution :

$$Z = \lambda e^{\int \frac{-3}{t+1} dt} \quad (2.46)$$

$$= \lambda e^{-3\ln|t+1|} \quad (2.47)$$

$$= \lambda e^{\ln|t+1|^{-3}} \quad (2.48)$$

$$= \frac{\lambda}{(t + 1)^3}; \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.49)$$

d'où

$$z = \int Z dt \quad (2.50)$$

$$= \int \frac{\lambda}{(t+1)^3} dt \quad (2.51)$$

$$= \int \lambda(t+1)^{-3} dt \quad (2.52)$$

$$= \frac{-\lambda}{2}(t+1)^{-2} + \alpha \quad (2.53)$$

$$= \frac{-\lambda}{2(t+1)^2} + \alpha \quad (2.54)$$

$$= \frac{\beta}{(t+1)^2} + \alpha \quad (2.55)$$

Par conséquent

$$y = \frac{\beta}{(t+1)^2} e^t + \alpha e^t, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (2.56)$$

**Remarque 2.3.**  $y_1 = e^t$  et  $y_2 = \frac{e^t}{(t+1)^2}$  sont les deux solutions de base de l'espace des solutions de l'équation (2.37).

### Résolution de l'équation avec second membre : [Demailly \[1989\]](#)

On considère l'équation différentielle avec second membre suivante :

$$a(t)\ddot{y} + b(t)\dot{y} + c(t)y = h(t) \quad (2.57)$$

#### Définition 2.8. :

Soient deux fonctions dérivables  $t \mapsto y_1(t)$ , et  $t \mapsto y_2(t)$  sur un intervalle  $I$ . Le Wronskien de ces deux fonctions est défini par :

$$W(y_1(t), y_2(t)) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) \end{vmatrix} = y_1 \dot{y}_2 - \dot{y}_1 y_2$$

Les deux fonctions dérivables  $t \mapsto y_1(t)$  et  $t \mapsto y_2(t)$  sont linéairement indépendantes si et seulement si  $W(y_1, y_2)$  n'est pas identiquement nul.

#### • Recherche d'une solution particulière avec la méthode de variation des constantes :

Supposons que la solution générale de l'équation associée est connue :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad (2.58)$$

$c_1, c_2$  sont constantes arbitraires.

On cherchera alors une solution particulière de l'équation non homogène par la méthode de variation des constantes comme pour les équations linéaires non homogène du premier ordre, on considérera  $c_1$  et  $c_2$  comme des fonctions de la variable  $t$ . Cherchons donc la solution sous la forme :

$$y = c_1(t)y_1 + c_2(t)y_2 \quad (2.59)$$

Ceci implique

$$\dot{y} = \dot{c}_1 y_1 + c_1 \dot{y}_1 + \dot{c}_2 y_2 + c_2 \dot{y}_2 \quad (2.60)$$

et

$$\ddot{y} = \dot{c}_1 \dot{y}_1 + \dot{c}_1 y_1 + c_1 \ddot{y}_1 + \dot{c}_1 \dot{y}_1 + \dot{c}_2 y_2 + \dot{c}_2 \dot{y}_2 + c_2 \ddot{y}_2 \quad (2.61)$$

$$= \ddot{c}_1 y_1 + 2\dot{c}_1 \dot{y}_1 + c_1 \ddot{y}_1 + \ddot{c}_2 y_2 + 2\dot{c}_2 \dot{y}_2 + c_2 \ddot{y}_2 \quad (2.62)$$

En remplaçant (2.60) et (2.62) dans (2.57) et en simplifiant, tel que :

$$a(t)c_1 \ddot{y}_1 + b(t)c_1 \dot{y}_1 + c(t)c_1 y_1 = 0 \quad (\text{car } y_1 \text{ solution de (1.15)}) \quad (2.63)$$

Et

$$a(t)c_2 \ddot{y}_2 + b(t)c_2 \dot{y}_2 + c(t)c_2 y_2 = 0 \quad (\text{car } y_2 \text{ solution de (1.15)}) \quad (2.64)$$

On obtient

$$2a(t)(\dot{c}_1 \dot{y}_1 + \dot{c}_2 \dot{y}_2) + a(t)(\ddot{c}_1 y_1 + \ddot{c}_2 y_2) + b(t)(\dot{c}_1 y_1 + \dot{c}_2 y_2) = h(t) \quad (2.65)$$

En imposant la condition supplémentaire

$$\dot{c}_1 y_1 + \dot{c}_2 y_2 = 0 \quad (2.66)$$

(On verra plus loin l'explication de cette condition). On aura :

$$(\dot{c}_1 y_1 + \dot{c}_2 y_2)' = \dot{c}_1 \dot{y}_1 + \ddot{c}_1 y_1 + \dot{c}_2 \dot{y}_2 + \ddot{c}_2 y_2 = 0 \quad (2.67)$$

Donc

$$\ddot{c}_1 y_1 + \ddot{c}_2 y_2 = -\dot{c}_1 \dot{y}_1 - \dot{c}_2 \dot{y}_2 \quad (2.68)$$

On obtient alors (en remplaçant dans (2.65))

$$a(t)(\dot{c}_1 \dot{y}_1 + \dot{c}_2 \dot{y}_2) = h(t) \quad (2.69)$$

Et donc les dérivées  $\dot{c}_1$  et  $\dot{c}_2$  doivent vérifier le système :

$$\begin{cases} \dot{c}_1 y_1 + \dot{c}_2 y_2 = 0 \\ \dot{c}_1 \dot{y}_1 + \dot{c}_2 \dot{y}_2 = \frac{h(t)}{a(t)} \end{cases} \quad (2.70)$$

Qui est un système algébrique de Cramer. En le résolvant on obtient  $\dot{c}_1$  et  $\dot{c}_2$ , par intégration on obtient  $c_1(t)$  et  $c_2(t)$  et ainsi la solution de l'équation avec second membre (2.57).

**Exemple 2.8.** On considère l'équation :

$$(t + 1)\ddot{y} - \dot{y} + ty = h(t) \quad (2.71)$$

Où  $h$  désigne une fonction continue donnée sur un intervalle ne contenant pas le point  $t = -1$ .

Soient

$$y_1(t) = e^t \text{ et } y_2(t) = (2t + 3)e^{-t}$$

deux solutions de l'équation suivante :

$$(t + 1)\ddot{y} - \dot{y} + ty = 0 \quad (2.72)$$

La solution générale de l'équation homogène est donc

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 (2t + 3)e^{-t}$$

On cherchera une solution particulière sous forme

$$y_p(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)(2t + 3)e^{-t}$$

Où  $\dot{c}_1(t)$  et  $\dot{c}_2(t)$  vérifient le système :

$$\begin{cases} \dot{c}_1 y_1 + \dot{c}_2 y_2 = 0 \\ \dot{c}_1 y_1 + \dot{c}_2 y_2 = \frac{h(t)}{t+1} \end{cases} \quad (2.73)$$

En remplaçant  $y_1$  et  $y_2$  par leurs valeurs dans (2.73) on aura

$$\begin{cases} \dot{c}_1 e^t + \dot{c}_2 (2t + 3)e^{-t} = 0 \\ \dot{c}_1 e^t - \dot{c}_2 (2t + 1)e^{-t} = \frac{h(t)}{t+1} \end{cases} \quad (2.74)$$

(2.74) est un système de Cramer (car son déterminant est égal au Wronskien de  $y_1(t), y_2(t) \neq 0$ )

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} e^t & (2t + 3)e^{-t} \\ e^t & -(2t + 1)e^{-t} \end{vmatrix} = -(2t + 1) - (2t + 3) \\ &= -4t - 4 = -4(t + 1) \neq 0; \quad \forall t \neq -1 \end{aligned}$$

Donc

$$\dot{c}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & (2t + 3)e^{-t} \\ \frac{h(t)}{t+1} & -(2t + 1)e^{-t} \end{vmatrix}}{-4(t + 1)} = \frac{-(2t + 3)e^{-t} h(t)}{-4(t + 1)(t + 1)} \quad (2.75)$$

$$= \frac{(2t + 3)e^{-t}}{4(t + 1)^2} \times h(t) \quad (2.76)$$

et

$$\dot{c}_2 = \frac{\begin{vmatrix} e^t & 0 \\ e^t & \frac{h(t)}{t+1} \end{vmatrix}}{-4(t + 1)} = \frac{-e^t}{4(t + 1)^2} \times h(t). \quad (2.77)$$

Par exemple  $h(t) = (t + 1)^2$ , on obtient sur chacun des intervalles  $t > -1$  et  $t < -1$  :

$$\dot{c}_1(t) = \frac{1}{4}(2t + 3)e^{-t} \quad (2.78)$$

$$\implies c_1(t) = \frac{1}{4} \int (2t + 3)e^{-t} dt \quad (2.79)$$

$$= -\frac{1}{2}te^{-t} - \frac{5}{4}e^{-t} \quad (2.80)$$

Et

$$\dot{c}_2(t) = -\frac{1}{4}e^t \quad (2.81)$$

$$\implies c_2(t) = \int -\frac{1}{4}e^t dt \quad (2.82)$$

$$= -\frac{1}{4}e^t \quad (2.83)$$

Et donc

$$y_p(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)(2t + 3)e^{-t} \quad (2.84)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{4}\right) - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} \quad (2.85)$$

$$= -t - 2 \quad (2.86)$$

Et la solution générale de l'équation (2.71) avec second membre est :

$$y(t) = y_h + y_p \quad (2.87)$$

$$= c_1e^t + c_2(2t + 3)e^{-t} + (-t - 2) \quad (2.88)$$

## 2.4.2 Méthodes numériques

Il n'est pas toujours facile d'obtenir la solution exacte de ces équations différentielles ordinaires, autrement dit, la résolution de ces équations différentielles n'est pas toujours possible analytiquement ; on fait alors appel dans ce cas à des méthodes numériques qui permettent d'obtenir des solutions approchées. On est donc amené à déterminer une majoration d'erreur entre la solution approchée et la solution exacte.

### a) Méthode d'Euler : [Stout \[2007\]](#)

La méthode de Leonard Euler (1707-1783) est une procédure numérique pour résoudre par approximation les équations différentielles du premier ordre avec une condition initiale. C'est la plus simple des méthodes mais la moins utilisée en raison de sa faible précision.

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} ; t \in [t_0, t_f] \quad (2.89)$$

Commençons par subdiviser l'intervalle  $[t_0, t_f]$  en  $n$  sous intervalle de même

longueur  $\Delta t$  et appelons  $t_i$  les points de subdivision. Nous avons donc :

$$\Delta t = \frac{t_f - t_0}{n} \text{ et } t_i = t_0 + i\Delta t \text{ pour } i = \overline{0, n}$$

**i) Euler explicite :**

La formule d'Euler explicite est donnée comme suit :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \Delta t f(t_i, y_i); & i = \overline{0, n-1} \\ t_{i+1} = t_i + \Delta t \end{cases} \quad (2.90)$$

**Exemple 2.9.** Approcher la solution du problème de Cauchy suivant en utilisant la méthode d'Euler explicite

$$\begin{cases} \dot{y} = y + t \\ y(0) = 1; t \in [0, 1] \end{cases} \quad (2.91)$$

la solution exacte du problème (2.91) est donnée par :

$$y(t) = 2e^t - t - 1$$

Pour  $\Delta t = 0.1$  :

$$\Delta t = \frac{1 - 0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\implies n = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{0.1} = 10 \quad (2.92)$$

$$n = \overline{0.10} \quad (2.93)$$

On a :

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t \times f(t_i, y_i) \text{ avec } f(t_i, y_i) = y_i + t_i \quad (2.94)$$

$$\implies y_{i+1} = y_i + \Delta t \times (y_i + t_i) \quad (2.95)$$

$$\implies y_{i+1} = (1 + \Delta t) \times y_i + \Delta t \times t_i \quad (2.96)$$

Pour  $n = 0$  :

$$y_1 = (1 + \Delta t) \times y_0 + \Delta t \times t_0 \quad (2.97)$$

$$= (1 + 0.1) \times 1 + 0.1 \times 0 \quad (2.98)$$

$$= 1.1 \quad (2.99)$$

Pour  $n = 1$  :

$$y_2 = (1 + \Delta t) \times y_1 + \Delta t \times t_1 \quad (2.100)$$

$$= (1 + 0.1) \times 1.1 + 0.1 \times 0.1 \quad (2.101)$$

$$= 1.22 \quad (2.102)$$

Pour  $n = 2$  :

$$y_3 = (1 + \Delta t) \times y_2 + \Delta t \times t_2 \quad (2.103)$$

$$= (1 + 0.1) \times 1.22 + 0.1 \times 0.2 \quad (2.104)$$

$$= 1.36 \quad (2.105)$$

La solution exacte de ce problème est :  $y(t) = 2e^t - t - 1$  ainsi

$$y(t_0) = y(0) = 2e^0 - 0 - 1 = 1 \quad (2.106)$$

$$y(t_1) = y(0,1) = 2e^{0,1} - 0,1 - 1 = 1.1106 \quad (2.107)$$

$$y(t_2) = y(1) = 2e^{0,2} - 0,2 - 1 = 1.2428 \quad (2.108)$$

### ii) Euler implicite :

On considère toujours le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} ; t \in [t_0, t_f] \quad (2.109)$$

On a

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, y(s)) ds \quad (2.110)$$

En approchant l'intégrale par la méthode de quadrature des rectangles à droite, on obtient  $y(t_{i+1}) = y(t_i) + \Delta t f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))$ . On a donc définie un autre type de schéma d'Euler par la résolution numérique, ce dernier est connu sous la nom de la méthode d'Euler implicite :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \Delta t f(t_{i+1}, y_{i+1}) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.111)$$

### Exemple 2.10. (On reprend le même exemple précédent)

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{y} = y + t \\ y(0) = 1 \end{cases} ; \Delta t = 0.1, \quad t \in [0, 1]$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t (y_{i+1} + t_{i+1}) \quad (2.112)$$

$$= y_i + \Delta t y_{i+1} + \Delta t t_{i+1} \quad (2.113)$$

$$\implies (1 - \Delta t)y_{i+1} = \Delta t t_{i+1} + y_i \quad (2.114)$$

$$\implies y_{i+1} = \frac{1}{1 - \Delta t} y_i + \frac{\Delta t}{1 - \Delta t} t_{i+1} \quad (2.115)$$

Pour  $n = 0$  :

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{1-0,1}y_0 + \frac{0,1}{1-0,1}t_1 \\ &= 1,11 \times 1 + 0,11 \times 0,1 \\ &= 1,12 \end{aligned}$$

Pour  $n = 1$  :

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{1}{1-0,1}y_1 + \frac{0,1}{1-0,1}t_2 \\ &= 1,11 \times 1,12 + 0,11 \times 0,2 \\ &= 1,26 \end{aligned}$$

Pour  $n = 3$  :

$$\begin{aligned} y_3 &= \frac{1}{1-0,1}y_2 + \frac{0,1}{1-0,1}t_3 \\ &= 1,11 \times 1,26 + 0,11 \times 0,3 \\ &= 1,43 \end{aligned}$$

**Remarque 2.4.** On remarque que la méthode d'Euler explicite est plus précise que la méthode d'Euler implicite.

### b) Méthodes de Runge-Kutta :[Stout \[2007\]](#)

La méthode Runge-Kutta tire les avantages des méthodes Taylor (D'où la méthode d'Euler) tout en gardant une simplicité d'exécution de la méthode d'Euler. En pratique, Runge Kutta remplace l'évaluation analytique des ordres  $y^{(n)}$ ,  $n > 1$  par des dérivées numériques obtenues en évaluant la fonction  $f(t, y(t))$  à différents endroits afin d'obtenir presque les mêmes résultats que ceux obtenus avec la méthode de Taylor.

Carl Runge (1856-1927) et Martin Kutta (1867-1944) ont proposé en 1895 de résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.116)$$

En utilisant un schéma numérique de la forme :

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + \Delta t \\ y_{i+1} = y_i + \Delta t \phi(t_i, y_i, \Delta t) \end{cases} \quad (2.117)$$

Où la fonction d'incrément  $\phi$  est l'approximation de  $f(t, y)$  sur l'intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ .

Supposons un entier  $r$ , une matrice  $A$  carrée d'ordre  $r$  dont les éléments triangulaires supérieurs sont nuls y compris la diagonale, et un vecteur  $b = (b_1, b_2, \dots, b_r)$ .

L'algorithme de Runge-Kutta est le suivant :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \Delta t(b_1 k_1 + \dots + b_r k_r) \\ t_{i+1} = t_i + \Delta t \\ k_j = f(t_i + c_j \Delta t, y_i + \Delta t(a_{j1} k_1 + \dots + a_{jr} k_r)) \end{cases} \quad (2.118)$$

Le vecteur  $b$  vérifie  $b_1 + \dots + b_r = 1$ . Les coefficients  $c_j$  sont les sommes des éléments de la ligne  $j$  de la matrice  $A$ .

• **Runge Kutta de second ordre**

Le schéma itératif de cette méthode est donné par :

$$\begin{cases} k_1 = \Delta t f(t_i, y(t_i)) \\ k_2 = \Delta t f(t_i + \frac{1}{2} \Delta t, y(t_i) + \frac{1}{2} k_1) \\ y(t_{i+1}) = y(t_i) + k_2; \quad t_{i+1} = t_i + \Delta t; \quad i = \overline{0; n-1} \end{cases} \quad (2.119)$$

• **Runge Kutta d'ordre 03**

La formule de cette méthode est donnée comme suit :

$$\begin{cases} k_1 = \Delta t f(t_i, y(t_i)) \\ k_2 = \Delta t f(t_i + \frac{1}{2} \Delta t, y(t_i) + \frac{1}{2} k_1) \\ k_3 = \Delta t f(t_i + \Delta t, y(t_i) + 2k_2 + k_1) \\ y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3); \quad t_{i+1} = t_i + \Delta t; \quad i = \overline{0; n-1} \end{cases} \quad (2.120)$$

• **Runge Kutta d'ordre 04**

La formule de Runge-Kutta d'ordre 4 est la plus utilisée, elle a une forme assez symétrique :

$$\begin{cases} k_1 = \Delta t f(t_i, y(t_i)) \\ k_2 = \Delta t f(t_i + \frac{1}{2} \Delta t, y(t_i) + \frac{1}{2} k_1) \\ k_3 = \Delta t f(t_i + \frac{1}{2} \Delta t, y(t_i) + \frac{1}{2} k_2) \\ k_4 = \Delta t f(t_i + \Delta t, y(t_i) + k_3) \\ y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4); \quad t_{i+1} = t_i + \Delta t; \quad i = \overline{0; n-1} \end{cases} \quad (2.121)$$

**Remarque 2.5.** La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est fréquemment utilisée car elle nous permet d'obtenir des résultats d'une grande précision. En fait plus l'ordre d'une méthode est élevé, plus elle devient plus précise.

**Exemple 2.11.** Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{y} = t + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

Utilisons la méthode de RK-4 avec  $\Delta t = 0.1$  pour approcher la solution  $y(0, 1)$

On a  $f(t_i, y_i) = y_i + t_i$ ;  $y_0 = 1$ ;  $t_0 = 0$

$$k_1 = \Delta t(t_0 + y_0) = 0.1 \times 1 = 0.1$$

$$k_2 = \Delta t\left(t_0 + \frac{0.1}{2} + y_0 + \frac{0.1}{2}\right) = 0.11$$

$$k_3 = \Delta t\left(t_0 + \frac{0.1}{2} + y_0 + \frac{0.11}{2}\right) = 0.11$$

$$k_4 = \Delta t(t_0 + y_0 + k_3) = 0.1 \times (1 + 0.11) = 0.11$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[0.1 + 2 \times 0.11 + 2 \times 0.11 + 0.11] = 1.0733$$

$$y(0.1) = 2e^{(0.1)} - 0.1 - 1 = 1,1106 \quad \text{et l'erreur } |y(t_1) - y_1| = 0.0376$$

L'implémentation de ces méthodes numériques sous Matlab pour l'Exemple 2.9 nous donne la Figure 2.1 suivante :

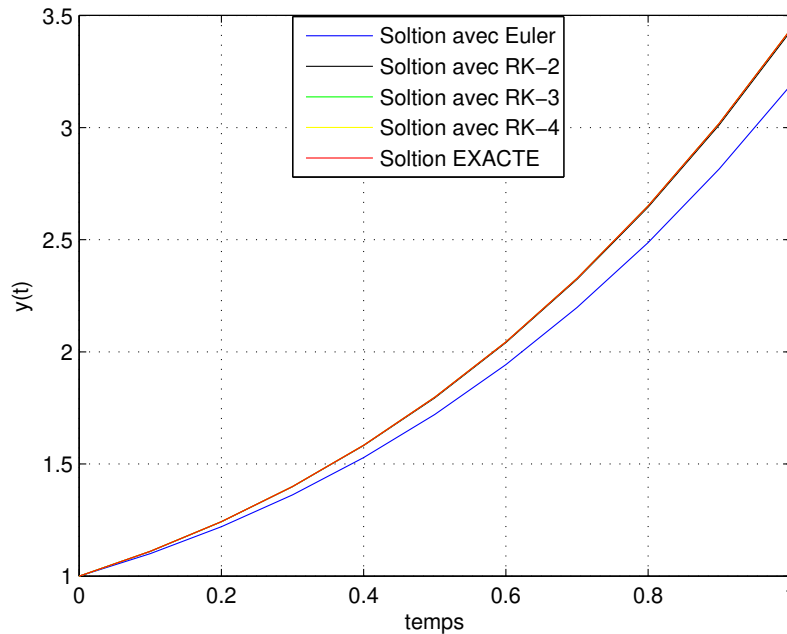


FIGURE 2.1 – Graphes de la solution exacte et de la solution approchée obtenue avec les méthodes numériques.

### 2.4.3 Méthode des itérations variationnelles :

La méthode des itérations variationnelles (VIM) introduite par le mathématicien chinois Ji Huan He, en 1997, a été démontrée par plusieurs chercheurs qu'elle est fiable et efficace à des fins analytiques et numériques. Des études de comparaison rapportées dans la littérature révèlent la supériorité de la méthode des itérations variationnelles et sa simplicité. Ceci est justifié par le nombre important des applications de cette méthode dans différents domaines.

#### a) Résolution des EDOs par VIM :

Considérons l'équation différentielle écrite sous la forme canonique

$$Ly(t) + Ny(t) = h(t) \quad (2.122)$$

Où  $L$  et  $N$  sont respectivement l'opérateur linéaire et non linéaire, et  $h(t)$  est une fonction analytique donnée qui représente le terme de la non homogénéité.

Pour obtenir la solution de l'équation (2.122), on construit une fonctionnelle de correction de la forme He [2006] :

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau)(Ly_n(\tau) + N\tilde{y}_n(\tau) - h(\tau))d\tau \quad (2.123)$$

Où  $\lambda$  est un multiplicateur de Lagrange, qui peut être identifié par la théorie du calcul des variations Inokuti et al. [1978],  $\tilde{y}_n$  est considéré comme la variation restreinte qui signifie que  $\delta\tilde{y}_n = 0$ .

L'étape principale de la méthode des itérations variationnelles est d'abord la détermination du multiplicateur de langage  $\lambda$  de façon optimale par une

intégration par parties comme suit :

- Si  $L = \frac{d}{dt}(\cdot)$

En mettant la fonctionnelle de correction stationnaire par rapport à  $y_n$  et posant  $\delta\tilde{y}_n(0) = 0$ , on aura :

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau)(\dot{y}_n(\tau) + N\tilde{y}_n(\tau) - h(\tau))d\tau = 0 \quad (2.124)$$

$$= \delta y_n(t) + \lambda(t)\delta y_n(t) - \int_0^t \dot{\lambda}(\tau)\delta y_n(\tau)d\tau = 0 \quad (2.125)$$

Alors, de l'équation (2.125), on déduit les conditions de stationnarité suivantes :

$$\begin{cases} \delta y_n(\tau) : \dot{\lambda}(\tau) = 0, \\ \delta y_n(t) : 1 + \lambda(t) = 0, \end{cases} \quad (2.126)$$

Ce qui donne  $\lambda = -1$ .

Si  $L = \frac{d^2}{dt^2}(\cdot)$ , on aura :

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau)\ddot{y}_n(\tau)d\tau \quad (2.127)$$

$$= \delta y_n(t) + \lambda(t)\delta y_n(t) - \dot{\lambda}(t)\delta y_n(t) + \int_0^t \ddot{\lambda}(\tau)\delta y_n(\tau)d\tau = 0 \quad (2.128)$$

Et les conditions de stationnarité sont données par :

$$\begin{cases} \delta y_n(\tau) : \ddot{\lambda}(\tau) = 0, \\ \delta y_n(t) : 1 - \dot{\lambda}(t) = 0, \\ \delta y_n'(t) : \lambda(t) = 0 \end{cases} \quad (2.129)$$

Ce qui donne  $\lambda(\tau) = \tau - t$ .

- De manière générale, si  $L = \frac{d^m}{dt^m}(\cdot)$  on obtient :

$$\lambda(\tau) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(\tau - t)^{m-1}, m \geq 1 \quad (2.130)$$

Une fois le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  est identifié, alors en choisissant une approximation initiale arbitraire  $y_0(t)$  de la solution du problème, les autres approximations successives  $y_{n+1}(t)$ .  $n \geq 0$  sont aisément obtenues en utilisant la fonctionnelle de correction. Par conséquent, la solution exacte est donnée par :

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) \quad (2.131)$$

Cette limite peut être calculée pour une équation simple pour laquelle une solution exacte existe. En pratique, une solution approchée  $y_N(t)$  est l'approximation pour laquelle la condition suivante

$$\|y_N(t) - y_{N-1}(t)\|_{L^2[t_0, t_f]} \leq \varepsilon \quad (2.132)$$

est vérifiée pour une certaine tolérance désirée  $\varepsilon$ .

Il convient de noter que l'existence de la limite (2.131) ou de la solution approchée  $y_n(t)$ , vérifiant la condition (2.132), implique que la séquence (2.123) converge vers la solution exacte. La convergence du VIM a été examinée dans la littérature pour différentes fonctionnelles de correction [Odibat \[2010\]](#), [Tatari et Dehghan \[2007\]](#). Tatari et Dehghan [Tatari et Dehghan \[2007\]](#) ont étudié la convergence du VIM, c'est-à-dire de la fonctionnelle de correction (2.123).

Les auteurs ont proposé d'écrire la séquence (2.123) sous la forme suivante :

$$y_{n+1}(t) = \mathbf{A}y_n(t) \quad (2.133)$$

et ils ont montré que les approximations successives résultantes  $y_{n+1}(t)$  convergent vers la solution exacte  $y(t)$  si l'hypothèse suivante est vérifiée.

**Hypothèse.** L'opérateur  $\mathbf{A}$  est contractant.

**Remarque 2.6.**  $L^2[t_0, t_f]$  est l'espace des fonctions carrées intégrables sur  $[t_0, t_f]$ .

**b) Application de la méthode des itérations variationnelles pour la résolution des EDOs :**

**Exemple 2.12.** Soit l'EDO linéaire du premier ordre suivante :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = y(t) + t \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (2.134)$$

Cette équation a pour solution analytique :

$$y(t) = 2e^t - t - 1$$

La fonctionnelle de correction de l'équation différentielle (2.134) est :

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau)(\dot{y}_n(\tau) - y_n(\tau) - \tau)d\tau \quad (2.135)$$

Détermination du multiplicateur de Lagrange  $\lambda(\tau)$  d'une manière optimale : La condition de stationnarité par rapport à  $y_n$  exige que :

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau)(\dot{y}_n(\tau) - y_n(\tau) - \tau)d\tau = 0$$

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau)(\delta \dot{y}_n(\tau) - \delta y_n(\tau) - \delta(\tau))d\tau = 0$$

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau)\delta \dot{y}_n(\tau)d\tau - \int_0^t \lambda(\tau)\delta y_n(\tau)d\tau = 0$$

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + [\lambda(\tau)\delta y_n(\tau)]_0^t - \int_0^t \lambda(\tau)\delta \dot{y}_n(\tau)d\tau - \int_0^t \lambda(\tau)\delta y_n(\tau)d\tau = 0$$

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \lambda(t)\delta y_n(t) - \int_0^t \dot{\lambda}(\tau)\delta y_n(\tau)d\tau - \int_0^t \lambda(\tau)\delta y_n(\tau)d\tau = 0$$

On obtient les conditions de stationnarité suivantes :

$$\delta y_n(t) : 1 + \lambda(t) = 0$$

$$\delta y_n(t) : \dot{\lambda}(\tau) + \lambda(\tau) = 0$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} 1 + \lambda(t) = 0 \\ \dot{\lambda}(\tau) + \lambda(\tau) = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système nous donne  $\lambda(\tau) = -e^{(t-\tau)}$ .

En introduisant la valeur  $\lambda(\tau)$  dans la fonctionnelle de correction (2.135), on obtient la formule itérative suivante :

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) - \int_0^t e^{(t-\tau)}(\dot{y}_n(\tau) - y_n(\tau) - \tau)d\tau$$

On choisissant  $y_0(t) = 1$  comme solution initiale, les approximations successives de la solution sont obtenues comme suit :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_0(t) - \int_0^t e^{(t-\tau)}(\dot{y}_0(\tau) - y_0(\tau) - \tau)d\tau \\ &= 2e^t - t - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= y_1(t) - \int_0^t e^{(t-\tau)}(\dot{y}_1(\tau) - y_1(\tau) - \tau)d\tau \\ &= 2e^t - t - 1 \end{aligned}$$

⋮

$$y_n(t) = 2e^t - t - 1$$

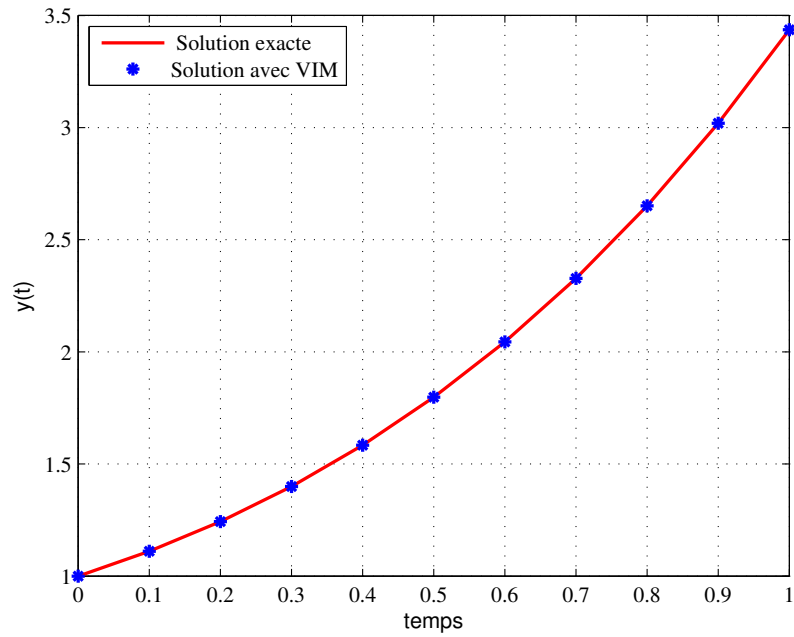


FIGURE 2.2 – Graphes de la solution exacte et de la solution approchée obtenue avec VIM

Par conséquent la solution est donnée comme suit :

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = 2e^t - t - 1.$$

La Figure 2.2 illustre la comparaison entre la solution exacte (analytique) et celle obtenue avec VIM sous MATLAB.

**Exemple 2.13.** Soit l'EDO du premier ordre non linéaire suivante :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) + y^2(t) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (2.136)$$

La solution analytique de cette équation est  $y(t) = \tanh(t)$ .

La fonctionnelle de correction de l'équation différentielle (2.136) est :

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau)(y_n(\tau) + \tilde{y}_n^2(\tau) - 1)d\tau \quad (2.137)$$

Où  $\tilde{y}$  est une variable restreinte avec  $\delta\tilde{y} = 0$ .

Détermination du multiplicateur de Lagrange  $\lambda(\tau)$  d'une manière optimale :

La condition de stationnarité par rapport à  $y_n$  exige que

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau)(\dot{y}_n(\tau) - 1)d\tau = 0$$

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau)\delta\dot{y}_n(\tau)d\tau = 0$$

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + [\lambda(\tau)\delta y_n(\tau)]_0^t - \int_0^t \lambda(\tau)\delta\dot{y}_n(\tau)d\tau = 0$$

Après intégration par partie on obtient :

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \lambda(t)\delta y_n(t) - \int_0^t \dot{\lambda}(\tau)\delta y_n(\tau)d\tau = 0$$

Et les conditions de stationnarité sont donc :

$$\delta y^{(n)}(t) : 1 + \lambda(t) = 0$$

$$\delta y^{(n)}(t) : \dot{\lambda}(\tau) = 0$$

c'est à dire

$$\begin{cases} 1 + \lambda(\tau) = 0 \\ \dot{\lambda}(\tau) = 0 \end{cases}$$

La résolution de ces conditions donne :

$$\lambda(\tau) = -1$$

En introduisant la valeur de  $\lambda(\tau)$  dans la fonctionnelle de correction (2.137), on obtient la formule itérative suivante :

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) - \int_0^t (y_n(\tau) + y_n^2(\tau) - 1) d\tau$$

En prenant comme solution de départ

$$y_0(t) = y(0) = 0,$$

les approximations successives de la solution son obtenues comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(t) = 0 - \int_0^t (y_0(\tau) + y_0^2(\tau) - 1) d\tau \\ \quad = t \\ y_2(t) = t - \int_0^t (y_1(\tau) + y_1^2(\tau) - 1) d\tau \\ \quad = t - \frac{1}{3}t^3 \\ y_3(t) = t - \frac{1}{3}t^3 - \int_0^t (y_2(\tau) + y_2^2(\tau) - 1) d\tau \\ \quad = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{1}{63}t^7 \\ y_4(t) = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{1}{63}t^7 - \int_0^t (y_3(\tau) + y_3^2(\tau) - 1) d\tau \\ \quad = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 + \dots \\ \vdots \\ y_n(t) = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 + \frac{62}{2835}t^9 + \dots \end{array} \right. \quad (2.138)$$

Par conséquent la solution exacte est

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = \tanh t$$

La Figure 2.3 illustre la comparaison entre la solution exacte (analytique) et celle obtenue avec VIM sous MATLAB.

## 2.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, on a présenté des généralités sur les équations différentielles ordinaires (EDOs). Nous avons exposé par la suite le principe de la méthode des itérations variationnelles, utilisée pour la résolution de ces équations en utilisant des formules itératives.

Cette méthode permet de déterminer la solution de manière itérative en utilisant la fonctionnelle de correction après avoir déterminé le multiplicateur de Lagrange et en choisissant une solution initiale.

Des exemples d'application ont été employés pour démontrer l'efficacité et la convergence de la méthode des itérations variationnelles vers les solutions analytiques de divers types d'équations différentielles ordinaires.

Dans le chapitre suivant, la méthode de VIM sera exploitée pour la résolution des équation d'Hamilton-Pontryagin pour un problème de contrôle optimal.

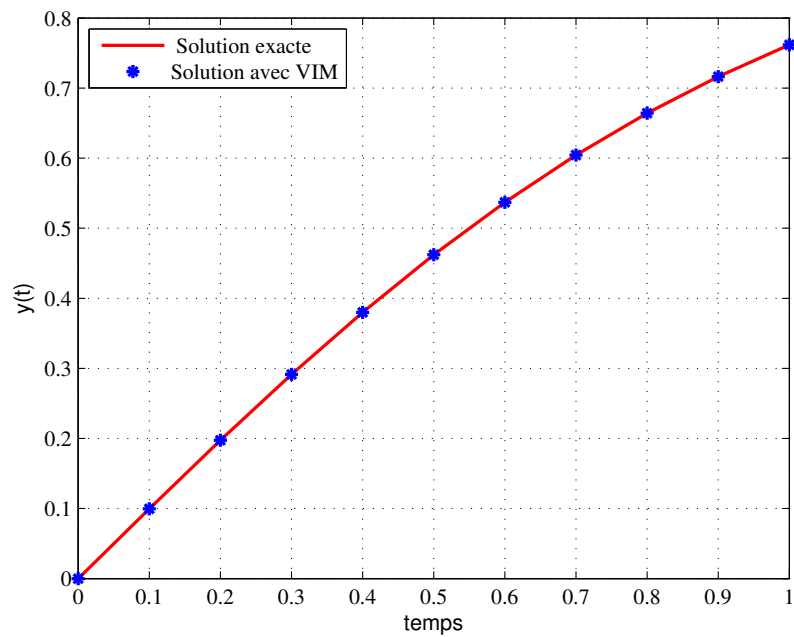


FIGURE 2.3 – Graphes de la solution exacte et de la solution approchée obtenue avec VIM

# APPLICATION DE LA MÉTHODE DE VIM AUX PROBLÈMES DE CONTRÔLE OPTIMAL

# 3

## 3.1 INTRODUCTION

Ces dernières années, la méthode des itérations variationnelles (VIM) a été appliquée à de nombreux problèmes de contrôle optimal [Akkouche et al. \[2014\]](#), [Terkmani et al. \[2020\]](#), [Berkani et al. \[2012\]](#), [Maidi et Courriou \[2013\]](#). Cette méthode a été exploitée pour la résolution d'un problème de contrôle optimal sans passer par une étape de linéarisation ou de discrétisation des EDOs.

Dans ce chapitre, on propose d'appliquer la méthode des itérations variationnelles pour résoudre trois problèmes de contrôle optimal linéaire et non linéaire, avec conditions initiales et finales fixes ou libres et le temps final fixe ou libre.

### 3.1.1 Algorithme de résolution d'un problème de contrôle optimal par la méthode des itérations variationnelles

Les différentes étapes pour la résolution d'un problème de contrôle optimal par la méthode des itérations variationnelles en utilisant le principe du minimum sont résumées comme suit [Maidi et Courriou \[2013\]](#) :

1. Définir l'Hamiltonien  $H(x(t), p(t), u(t), t)$ ,
2. Déterminer l'expression de la loi du contrôle optimal  $u^*(t)$ ,
3. Définir  $H^*(x(t), p(t), u^*(t), t)$  et les équations d'Hamiltonien en substituant la loi du contrôle optimal  $u^*(t)$  obtenue,
4. Définir les fonctionnelles de correction associées,
5. Identifier les vecteurs du multiplicateur de Lagrange  $\lambda_x(\tau)$  et  $\lambda_p(\tau)$ ,
6. Poser  $n = 0, x^0(t) = x(0)$  et  $p^0(t) = \theta$  avec  $\theta$  est un vecteur de constante inconnue à déterminer par un schéma itératif,
7. Calculer  $x^{(n+1)}(t)$  et  $p^{(n+1)}(t)$  ; Les intégrales peuvent être évaluées soit analytiquement ou numériquement en fonction de la complexité des équations de Hamilton – Pontriaguine,

8. Déterminer  $\theta = p^{(n)}(0)$  en imposant les conditions aux limites selon la nature de l'état final, qui peut être fixe ou libre. Si il n'y a pas de solution pour  $\theta$  passez à l'étape 7, sinon passez à l'étape 9,
9. Évaluer le critère de performance  $J^n$ , pour toutes les solutions possibles, et garder la solution qui donne la valeur minimal pour  $J$ ,
10. Si  $\|J^{(n)} - J^{(n-1)}\| \geq \varepsilon$  (Avec un entier  $\varepsilon$  donné); Poser  $n = n + 1$ , et aller à la 8ème étape, sinon aller à la 11ème,
11. Poser  $n = n^*$ ; En déduire le contrôle optimal  $u^*(t)$ .

### 3.2 EXEMPLES D'APPLICATION

#### 3.2.1 Problème 1 : Cas de solution analytique exacte

Considérons un problème de contrôle optimal suivant [Maidi et Courriou \[2013\]](#) :

$$\min_{u(t)} J = \frac{1}{2} \int_0^2 [x_1(t) + u(t)]^2 dt \quad (3.1)$$

Sujet à :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (3.2)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + u(t) \quad (3.3)$$

$$x(0) = [0, 0]^T; \quad x(2) = [2, 1]^T \quad (3.4)$$

**Résolution avec le PMP :**

Selon le principe du minimum de Pontrygin, l'hamiltonien du problème (3.1)-(3.4) est donné par :

$$H(x(t), p(t), u(t), t) = \frac{1}{2}(x_1(t) + u(t))^2 + p_1(t)\dot{x}_1(t) + p_2(t)\dot{x}_2(t)$$

$\implies$

$$H(x(t), p(t), u(t), t) = \frac{1}{2}(x_1(t) + u(t))^2 + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)(x_1(t) + u(t))$$

Le contrôle optimal :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

$$\implies x_1(t) + u(t) + p_2(t) = 0$$

$$\implies u^*(t) = -(x_1(t) + p_2(t)).$$

On remplace maintenant  $u^*(t)$  dans l'équation Hamiltonien, il vient :

$$\begin{aligned} H^* &= H(x(t), p(t), u^*(t), t) \\ &= \frac{1}{2}(x_1(t) + (-(x_1(t) + p_2(t))))^2 + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)(x_1(t) + (-(x_1(t) + p_2(t)))) \\ &= -\frac{1}{2}(p_2(t))^2 + p_1(t)x_2(t) \end{aligned}$$

Les équations d'Hamilton-Pontryagin dans ce cas là sont données par :

$$\dot{x}_1(t) = \frac{\partial H^*}{\partial p_1(t)} = x_2(t) \quad (3.5)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{\partial H^*}{\partial p_2(t)} = -p_2(t) \quad (3.6)$$

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x_1(t)} = 0 \quad (3.7)$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x_2(t)} = -p_1(t) \quad (3.8)$$

Résolution des équations (3.5)-(3.8) analytiquement :

$$(3.7) \implies p_1(t) = c_1.$$

$$(3.8) \implies p_2(t) = -c_1 t + c_2.$$

$$(3.6) \implies x_2(t) = \frac{c_1}{2} t^2 - c_2 t + c_3$$

$$(3.5) \implies x_1(t) = \frac{c_1}{6} t^3 - \frac{c_2}{2} t^2 + c_3 t + c_4$$

En imposant les conditions initiales, il vient

Pour  $t = 0$  :

$$x_1(0) = 0 \implies c_4 = 0$$

$$x_2(0) = 0 \implies c_3 = 0$$

En imposant maintenant les conditions finales, il vient

Pour  $t = 2$  :

$$x_1(2) = 2 \implies \frac{4}{3} c_1 - 2c_2 = 2$$

$$x_2(2) = 1 \implies 2c_1 - 2c_2 = 1$$

La résolution de ce système d'équation conduit à la solution suivante :

$$c_1 = -\frac{3}{2} \text{ et } c_2 = -2$$

Par conséquent,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^*(t) = -\frac{1}{4}t^3 + t^2 \\ x_2^*(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 2t \\ p_1^*(t) = -\frac{3}{2} \\ p_2^*(t) = \frac{3}{2}t - 2 \\ u^*(t) = \frac{1}{4}t^3 - t^2 - \frac{3}{2}t + 2. \end{array} \right.$$

et la valeur du critère est :

$$J^* = \frac{1}{2} \int_0^2 (x_1(t) + u(t))^2 dt = 1.$$

### Résolution avec la méthode de VIM

Les fonctionnelles de corrections des équations d'Hamilton-Pontryagin (3.5)-(3.8) sont :

$$\begin{aligned} - & x_1^{(n+1)}(t) = x_1^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_{x_1}(\tau) [\dot{x}_1^{(n)}(\tau) - x_2^{(n)}(\tau)] d\tau \\ - & x_2^{(n+1)}(t) = x_2^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_{x_2}(\tau) [\dot{x}_2^{(n)}(\tau) + p_2^{(n)}(\tau)] d\tau \\ - & p_1^{(n+1)}(t) = p_1^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_{p_1}(\tau) [\dot{p}_1^{(n)}(\tau)] d\tau \\ - & p_2^{(n+1)}(t) = p_2^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_{p_2}(\tau) [\dot{p}_2^{(n)}(\tau) + p_1^{(n)}(\tau)] d\tau \end{aligned}$$

Détermination des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_{x_i}$  et  $\lambda_{p_i}$ ,  $i = 1, 2$  :

La variations des équations précédentes nous donne :

$$\begin{aligned} \cdot & \delta x_1^{(n+1)}(t) = \delta x_1^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda_{x_1}(\tau) [\dot{x}_1^{(n)}(\tau) - x_2^{(n)}(\tau)] d\tau = 0 \\ \cdot & \delta x_2^{(n+1)}(t) = \delta x_2^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda_{x_2}(\tau) [\dot{x}_2^{(n)}(\tau) + p_2^{(n)}(\tau)] d\tau = 0 \\ \cdot & \delta p_1^{(n+1)}(t) = \delta p_1^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda_{p_1}(\tau) [\dot{p}_1^{(n)}(\tau)] d\tau = 0 \\ \cdot & \delta p_2^{(n+1)}(t) = \delta p_2^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda_{p_2}(\tau) [\dot{p}_2^{(n)}(\tau) + p_1^{(n)}(\tau)] d\tau = 0 \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\cdot \delta x_1^{(n+1)}(t) = \delta x_1^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_{x_1}(\tau) [\delta \dot{x}_1^{(n)}(\tau)] d\tau = 0$$

$$\begin{aligned} \cdot \quad \delta x_2^{(n+1)}(t) &= \delta x_2^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_{x_2}(\tau) \left[ \delta \dot{x}_2^{(n)}(\tau) \right] d\tau = 0 \\ \cdot \quad \delta p_1^{(n+1)}(t) &= \delta p_1^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_{p_1}(\tau) \left[ \delta \dot{p}_1^{(n)}(\tau) \right] d\tau = 0 \\ \cdot \quad \delta p_2^{(n+1)}(t) &= \delta p_2^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_{p_2}(\tau) \left[ \delta \dot{p}_2^{(n)}(\tau) \right] d\tau = 0 \end{aligned}$$

Par intégration par partie, nous obtenons :

$$\delta x_1^{(n+1)}(t) = \delta x_1^{(n)}(t) + \lambda_{x_1}(t) \delta x_1^{(n)}(t) - \int_0^t \dot{\lambda}_{x_1}(\tau) \delta x_1^{(n)}(\tau) d\tau = 0$$

$$\delta x_2^{(n+1)}(t) = \delta x_2^{(n)}(t) + \lambda_{x_2}(t) \delta x_2^{(n)}(t) - \int_0^t \dot{\lambda}_{x_2}(\tau) \delta x_2^{(n)}(\tau) d\tau = 0$$

$$\delta p_1^{(n+1)}(t) = \delta p_1^{(n)}(t) + \lambda_{p_1}(t) \delta p_1^{(n)}(t) - \int_0^t \dot{\lambda}_{p_1}(\tau) \delta p_1^{(n)}(\tau) d\tau = 0$$

$$\delta p_2^{(n+1)}(t) = \delta p_2^{(n)}(t) + \lambda_{p_2}(t) \delta p_2^{(n)}(t) - \int_0^t \dot{\lambda}_{p_2}(\tau) \delta p_2^{(n)}(\tau) d\tau = 0$$

les conditions de stationnarités sont donc :

$$\begin{cases} 1 + \lambda_{x_i}(t) = 0 \\ \dot{\lambda}_{x_i}(\tau) = 0, \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \lambda_{p_i}(t) = 0 \\ \dot{\lambda}_{p_i}(\tau) = 0, \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

La résolution de ces conditions donne :

$$\lambda_{x_i}(\tau) = -1$$

$$\lambda_{p_i}(\tau) = -1.$$

En remplaçant ces dernières valeurs dans les fonctionnelles de correction, on obtient les équations suivantes :

$$- \quad x_1^{(n+1)}(t) = x_1^{(n)}(t) - \int_0^t \left[ \dot{x}_1^{(n)}(\tau) - x_2^{(n)}(\tau) \right] d\tau$$

$$- \quad x_2^{(n+1)}(t) = x_2^{(n)}(t) - \int_0^t \left[ \dot{x}_2^{(n)}(\tau) + p_2^{(n)}(\tau) \right] d\tau$$

$$- \quad p_1^{(n+1)}(t) = p_1^{(n)}(t) - \int_0^t \left[ \dot{p}_1^{(n)}(\tau) \right] d\tau$$

$$- \quad p_2^{(n+1)}(t) = p_2^{(n)}(t) - \int_0^t \left[ \dot{p}_2^{(n)}(\tau) + p_1^{(n)}(\tau) \right] d\tau$$

Avec :

$$x^{(0)}(t) = x(0) = [0, 0]^T$$

$$x^{(n)}(t_f) = x(t_f) = [2, 1]^T$$

$$p^0(t) = \theta = [\theta_1, \theta_2]^T \quad \text{inconnu.}$$

Les formules itératives nous donne :  
pour  $n = 0$  :

$$x_1^{(1)}(t) = 0$$

$$x_2^{(1)}(t) = -\theta_2 t$$

$$p_1^{(1)}(t) = \theta_1$$

$$p_2^{(1)}(t) = -\theta_1 t + \theta_2$$

Les solutions  $x_1^{(1)}(t)$  et  $x_2^{(1)}(t)$  ne satisfont pas la condition finale  $x(t_f)$  ; ce qui nécessite une nouvelle itération.

pour  $n = 1$  :

$$x_1^{(2)}(t) = -\frac{\theta_2}{2} t^2$$

$$x_2^{(2)}(t) = \frac{\theta_1}{2} t^2 - \theta_2 t$$

$$p_1^{(2)}(t) = p_1^{(1)}(t) = \theta_1$$

$$p_2^{(2)}(t) = p_2^{(1)}(t) = -\theta_1 t + \theta_2$$

En imposant la condition finale, il vient

$$x_1^{(2)}(2) = -2\theta_2 = 2$$

$$x_2^{(2)}(2) = -2\theta_2 + 2\theta_1 = 1$$

Ce qui donne :

$$\theta_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \theta_2 = -1$$

Donc :

$$x_1^{(2)}(t) = \frac{t^2}{2}$$

$$u^2(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + 1$$

$$J^{(2)} = \frac{1}{2} \int_0^2 (x_1^{(2)} + u^2(t))^2 dt = 0.3333.$$

Pour  $n = 3$  et  $n = 4$  :

$$x_1^{(4)}(t) = x_1^{(3)}(t) = \frac{\theta_1}{6}t^3 - \frac{\theta_2}{2}t^2$$

$$x_2^{(4)}(t) = x_2^{(3)}(t) = \frac{\theta_1}{2}t^2 - \theta_2 t$$

$$p_1^{(4)}(t) = p_1^{(3)}(t) = \theta_1$$

$$p_2^{(4)}(t) = p_2^{(3)}(t) = -\theta_1 t + \theta_2$$

En imposant la conditions final  $x^{(3)}(t_f)$ , il vient :

$$x_1^{(3)}(2) = -2\theta_2 + \frac{4}{3}\theta_1 = 2$$

$$x_2^{(3)}(2) = -2\theta_2 + 2\theta_1 = 1$$

Ce qui donne :

$$\theta_1 = \frac{-3}{2} \quad , \quad \theta_2 = -2$$

Et :

$$x_1^{(4)} = x_1^{(3)}(t) = -\frac{t^3}{4} + t^2$$

$$u^{(4)}(t) = u^{(3)}(t) = \frac{t^3}{4} - t^2 - \frac{3t}{2} + 2$$

$$J^{(4)} = J^{(3)} = \frac{1}{2} \int_0^2 (x_1^{(3)}(t) + u^{(3)}(t))^2 dt = 1$$

Les résultats précédents montrent qu'à partir de  $n = n^* = 3$ , le critère de performance reste constant, et la méthode des itérations variationnelles converge vers la solution exacte  $x^* = x^{(3)}$ . Ainsi, la commande optimale est  $u^*(t) = u^3(t)$ . La valeur optimale du critère  $J^* = J^{(3)} = 1$ , de plus l'état initial du vecteur adjoint  $p^{(3)}(0) = \theta = [-\frac{3}{2}, -2]^T$ .

Les résultats de simulation pour cette exemple sont représentés par les Figures (3.1)-(3.4).

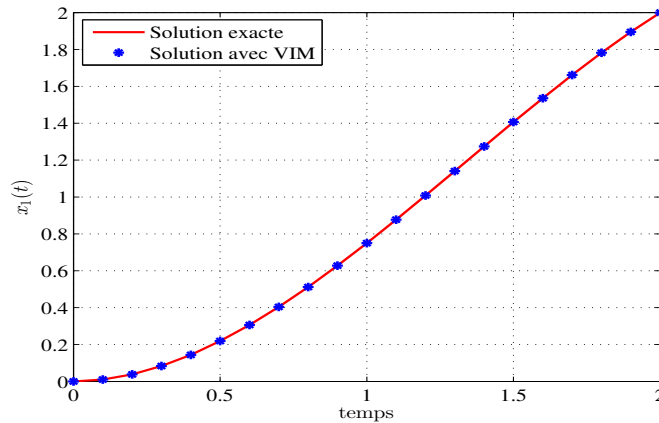


FIGURE 3.1 – Problème 1 : Graphe de la solution exacte  $x_1^*(t)$  et de la solution approchée  $x_1^{(3)}(t)$  obtenue avec VIM.

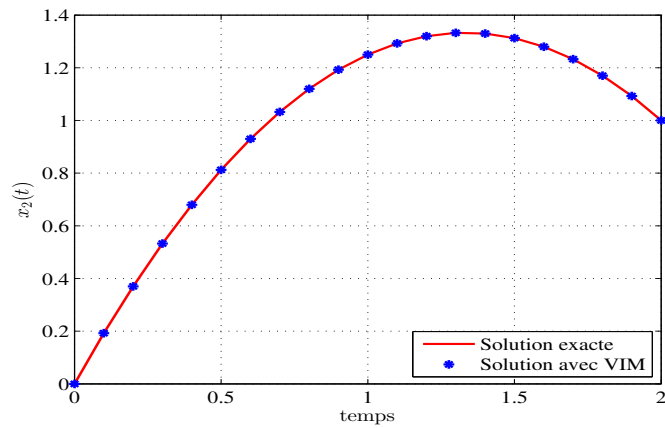


FIGURE 3.2 – Problème 1 : Graphe de la solution exacte  $x_2^*(t)$  et de la solution approchée  $x_2^{(3)}(t)$  obtenue avec VIM.

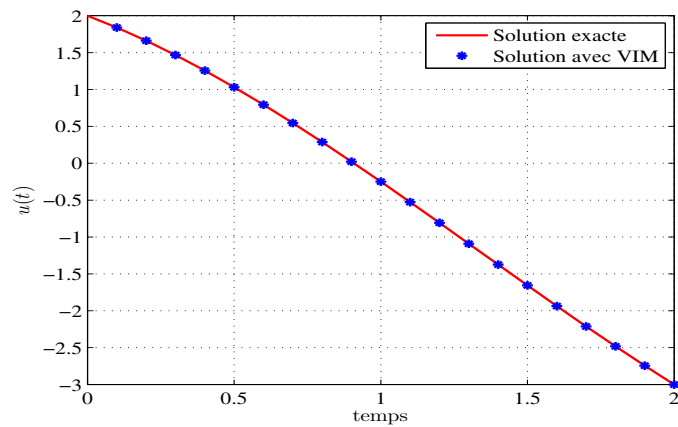


FIGURE 3.3 – Problème 1 : Graphe de la solution exacte  $u^*(t)$  et de la solution approchée  $u^{(3)}(t)$  obtenue avec VIM.

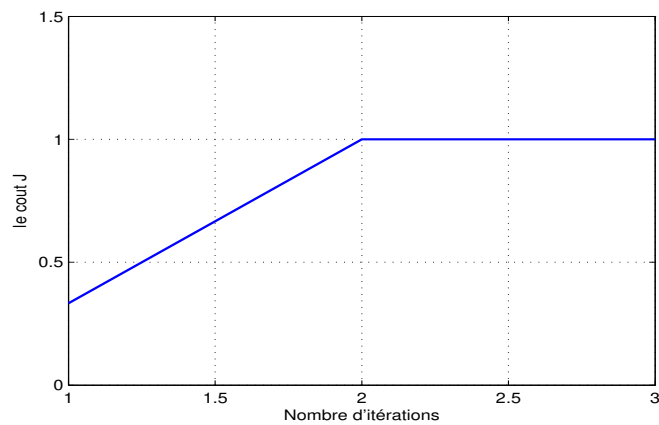


FIGURE 3.4 – Problème 1 : Évolution du critère J.

### 3.2.2 Problème 2 : Cas d'approximation d'une solution analytique

Considérons le problème de contrôle optimal suivant [Maidi et Courriou \[2013\]](#) :

$$\min_{u(t)} J = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [4x_2^2(t) + u^2(t)] dt \quad (3.9)$$

Sujet à :

$$\dot{x}_1(t) = u(t) \quad (3.10)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) \quad (3.11)$$

$$x(0) = [2, 1]^T \quad (3.12)$$

Selon le principe du minimum de Pontryagin, l'Hamiltonien du problème (3.9)-(3.12) est donné par :

$$H(x(t), p(t), u(t), t) = \frac{1}{2} [4x_2^2(t) + u^2(t)] + p_1(t) \cdot \dot{x}_1(t) + p_2(t) \cdot \dot{x}_2(t)$$

$$H(x(t), p(t), u(t), t) = \frac{1}{2} [4x_2^2(t) + u^2(t)] + p_1(t) \cdot u(t) + p_2(t) \cdot x_1(t)$$

Le contrôle optimal :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

$$\implies u(t) + p_1(t) = 0$$

$$\implies u^*(t) = -p_1(t).$$

On remplace maintenant  $u^*(t)$  dans l'équation Hamilton-Pontryagin, il vient :

$$\begin{aligned} H^* &= H(x(t), p(t), u^*(t), t) \\ &= \frac{1}{2} [4x_2^2(t) + (-p_1(t))^2] + p_1(t) \times (-p_1(t)) + p_2(t) x_1(t) \\ &= \frac{1}{2} [4x_2^2(t) + p_1^2(t)] - p_1^2(t) + p_2(t) x_1(t) \end{aligned}$$

Les équations d'Hamiltonien dans ce cas là sont données par :

$$\dot{x}_1(t) = \frac{\partial H^*}{\partial p_1(t)} = -p_1(t) \quad (3.13)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{\partial H^*}{\partial p_2(t)} = x_1(t) \quad (3.14)$$

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x_1(t)} = -p_2(t) \quad (3.15)$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x_2(t)} = -4x_2(t) \quad (3.16)$$

La résolution des équations (3.13)-(3.16) analytiquement est très difficile, dans ce cas là, la méthode de VIM est employée pour approcher la solution analytique comme suit.

**Résolution avec la méthode VIM :**

Les fonctionnelles de correction des équations d'Hamilton-Pontryagin (3.13)-(3.16) sont données par :

$$\begin{aligned} - x_1^{(n+1)}(t) &= x_1^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_{x_1}(\tau) [\dot{x}_1^{(n)}(\tau) + p_1^{(n)}(\tau)] d\tau \\ - x_2^{(n+1)}(t) &= x_2^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_{x_2}(\tau) [\dot{x}_2^{(n)}(\tau) - x_1^{(n)}(\tau)] d\tau \\ - p_1^{(n+1)}(t) &= p_1^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_{p_1}(\tau) [\dot{p}_1^{(n)}(\tau) + p_2^{(n)}(\tau)] d\tau \\ - p_2^{(n+1)}(t) &= p_2^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_{p_2}(\tau) [\dot{p}_2^{(n)}(\tau) + 4x_2^{(n)}(\tau)] d\tau \end{aligned}$$

Détermination des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_{x_i}$  et  $\lambda_{p_i}$ ,  $i = 1, 2$  :

La variations des équations précédentes nous donne :

$$\begin{aligned} \delta x_1^{(n+1)}(t) &= \delta x_1^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda_{x_1}(\tau) [\dot{x}_1^{(n)}(\tau) + p_1^{(n)}(\tau)] d\tau = 0 \\ \delta x_2^{(n+1)}(t) &= \delta x_2^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda_{x_2}(\tau) [\dot{x}_2^{(n)}(\tau) - x_1^{(n)}(\tau)] d\tau = 0 \\ \delta p_1^{(n+1)}(t) &= \delta p_1^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda_{p_1}(\tau) [\dot{p}_1^{(n)}(\tau) + p_2^{(n)}(\tau)] d\tau = 0 \\ \delta p_2^{(n+1)}(t) &= \delta p_2^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda_{p_2}(\tau) [\dot{p}_2^{(n)}(\tau) + 4x_2^{(n)}(\tau)] d\tau = 0 \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} \delta x_1^{(n+1)}(t) &= \delta x_1^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_{x_1}(\tau) [\delta \dot{x}_1^{(n)}(\tau)] d\tau = 0 \\ \delta x_2^{(n+1)}(t) &= \delta x_2^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_{x_2}(\tau) [\delta \dot{x}_2^{(n)}(\tau)] d\tau = 0 \\ \delta p_1^{(n+1)}(t) &= \delta p_1^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_{p_1}(\tau) [\delta \dot{p}_1^{(n)}(\tau)] d\tau = 0 \\ \delta p_2^{(n+1)}(t) &= \delta p_2^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_{p_2}(\tau) [\delta \dot{p}_2^{(n)}(\tau)] d\tau = 0 \end{aligned}$$

Par intégration par partie, nous obtenons :

$$\delta x_1^{(n+1)}(t) = \delta x_1^{(n)}(t) + \lambda_{x_1}(t)\delta x_1^{(n)}(t) - \int_0^t \dot{\lambda}_{x_1}(\tau)\delta x_1^{(n)}(\tau)d\tau = 0$$

$$\delta x_2^{(n+1)}(t) = \delta x_2^{(n)}(t) + \lambda_{x_2}(t)\delta x_2^{(n)}(t) - \int_0^t \dot{\lambda}_{x_2}(\tau)\delta x_2^{(n)}(\tau)d\tau = 0$$

$$\delta p_1^{(n+1)}(t) = \delta p_1^{(n)}(t) + \lambda_{p_1}(t)\delta p_1^{(n)}(t) - \int_0^t \dot{\lambda}_{p_1}(\tau)\delta p_1^{(n)}(\tau)d\tau = 0$$

$$\delta p_2^{(n+1)}(t) = \delta p_2^{(n)}(t) + \lambda_{p_2}(t)\delta p_2^{(n)}(t) - \int_0^t \dot{\lambda}_{p_2}(\tau)\delta p_2^{(n)}(\tau)d\tau = 0$$

les conditions de stationnarités sont donc :

$$\begin{cases} 1 + \lambda_{x_i}(t) = 0 \\ \dot{\lambda}_{x_i}(\tau) = 0, \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \lambda_{p_i}(t) = 0 \\ \dot{\lambda}_{p_i}(\tau) = 0, \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

La résolution de ces conditions donne :

$$\lambda_{x_i}(\tau) = -1$$

$$\lambda_{p_i}(\tau) = -1.$$

En remplaçant ces dernières valeurs dans les fonctionnelles de correction, on obtient les équations suivantes :

$$- x_1^{(n+1)}(t) = x_1^{(n)}(t) - \int_0^t [\dot{x}_1^{(n)}(\tau) + p_1^{(n)}(\tau)] d\tau$$

$$- x_2^{(n+1)}(t) = x_2^{(n)}(t) - \int_0^t [\dot{x}_2^{(n)}(\tau) - x_1^{(n)}(\tau)] d\tau$$

$$- p_1^{(n+1)}(t) = p_1^{(n)}(t) - \int_0^t [\dot{p}_1^{(n)}(\tau) + \dot{p}_2^{(n)}(\tau)] d\tau$$

$$- p_2^{(n+1)}(t) = p_2^{(n)}(t) - \int_0^t [\dot{p}_2^{(n)}(\tau) + 4x_2^{(n)}(\tau)] d\tau$$

Avec :

$$x^{(0)}(t) = x(0) = [2, 1]^T$$

$$p^{(0)}(t) = \theta = [\theta_1, \theta_2]^T \quad \text{inconnu.}$$

Pour  $n = 1$  on a :

$$\dot{x}_1(t) = 2 - \theta_1 t$$

$$\dot{x}_2(t) = 2t + 1$$

$$\dot{p}_1(t) = \theta_1 - \theta_2 t$$

$$\dot{p}_2(t) = \theta_2 - 4t$$

Puisque  $x(t_f)$  est libre donc :

$$p(t_f) = \frac{\partial S}{\partial x(t_f)} = 0$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} p_1(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ p_2(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \theta_1 - \theta_2 \frac{\pi}{2} = 0 \\ \theta_2 - 4 \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système nous donne :

$$\theta_1 = (\pi)^2 \quad \text{et} \quad \theta_2 = 2\pi.$$

Alors :

$$x_2^{(1)}(t) = 2t + 1$$

$$u^1(t) = 6.2831t - 9.8696$$

$$J^{(1)} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [4[x_2^{(1)}(t)]^2 + [u^{(1)}]^2] dt = 48.8482.$$

En considérant une tolérance  $\epsilon = 10^{-6}$ , la convergence est atteinte après 14 itérations ( $n = n^* = 14$ ) comme le montre les Figures .

Les trajectoires d'état optimales approchées sont :

$$x_1^*(t) \approx x_1^{(14)}(t) \approx -5.6686 + 7.6686 t - 2 t^2 - 1.3333 t^3 + 0.94490 t^4 - 0.25562 t^5 + 0.02222 t^6 + 0.00635 t^7 - 0.00225 t^8 + 0.00034 t^9 - 0.18 \cdot 10^{-4} t^{10} - 0.32067 \cdot 10^{-5} t^{11} + 0.75750 t^{12} + 0.78816 \cdot 10^{-7} t^{13} + 0.29365 \cdot 10^{-8} t^{14}.$$

$$x_2^*(t) \approx x_2^{(14)}(t) \approx 1 + 2t - 2.8347 t^2 + 1.2781 t^3 - 1.16667 t^4 - 0,0666 t^4 - 0.0666 t^5 + 0,31497 t^6 - 0.60862 \cdot 10^{-2} t^7 + 0.39683 \cdot 10^{-3} t^8 + 0.88183 \cdot 10^{-4} t^9 - 0.24997 \cdot 10^{-4} t^{10} + 0.30738 \cdot 10^{-5} t^{11} - 0.13361 \cdot 10^{-6} t^{12} - 0.20556 \cdot 10^{-7} t^{13} + 0.41619 \cdot 10^{-8} t^{14}.$$

Le contrôle optimal approché obtenu est :

$$u^* \approx u^{14}(t) \approx -5.6694 + 7.6686t - 2t^2 - 1.3333t^3 + 0.9449 t^4 - 0.25562 t^5 + 0.02222 t^6 + 0.00635 t^7 - 0.00225 t^8 + 0.00034 t^9 - 0.18 \cdot 10^{-4} t^{10} - 0.32067 \cdot 10^{-5} t^{11} + 0.7575 t^{12} - 0.78816 \cdot 10^{-7} t^{13} + 0.29365 \cdot 10^{-8} t^{14}.$$

La valeur optimale du critère est :

$$J^* \approx J^{(14)} = 9.50291412.$$

La valeur de l'état initial du vecteur adjoint :

$$p^{(14)}(0) = [\theta_1, \theta_2]^T = [5.6694, 7.6686]^T.$$

Les résultats de simulation pour cet exemple sont illustrés par les Figures 3.5-3.8.

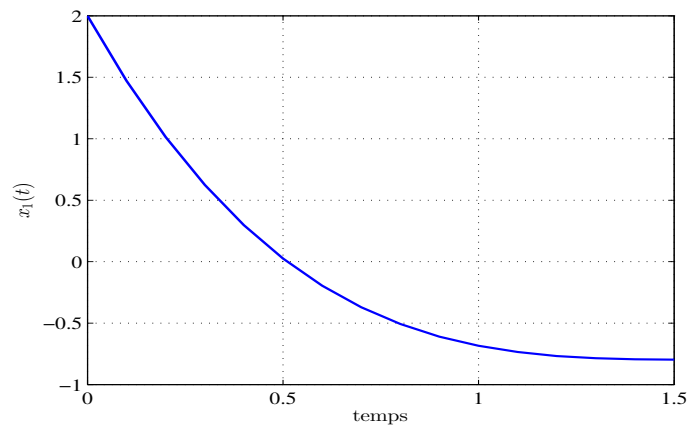


FIGURE 3.5 – Problème 2 : Trajectoire optimale de l'état  $x_1(t)$ .

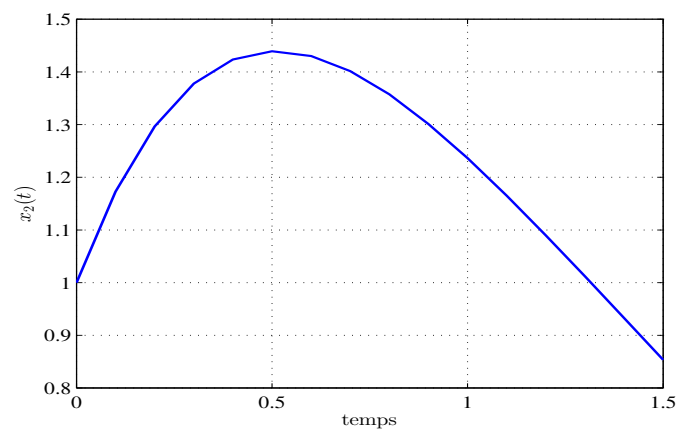


FIGURE 3.6 – Problème 2 : Trajectoire optimale de l'état  $x_2(t)$ .

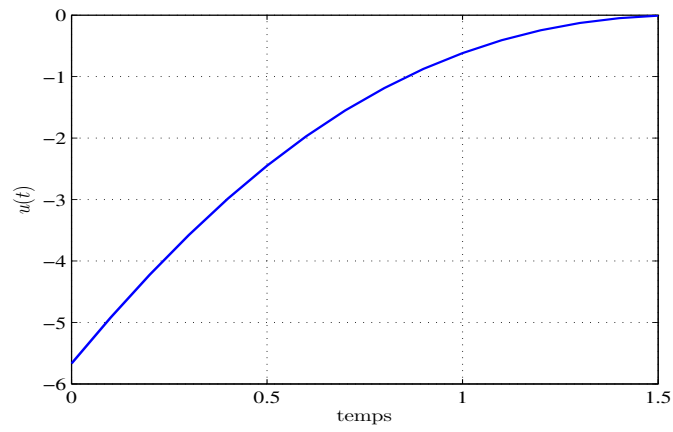


FIGURE 3.7 – Problème 2 : Trajectoire optimale du contrôle  $u(t)$ .

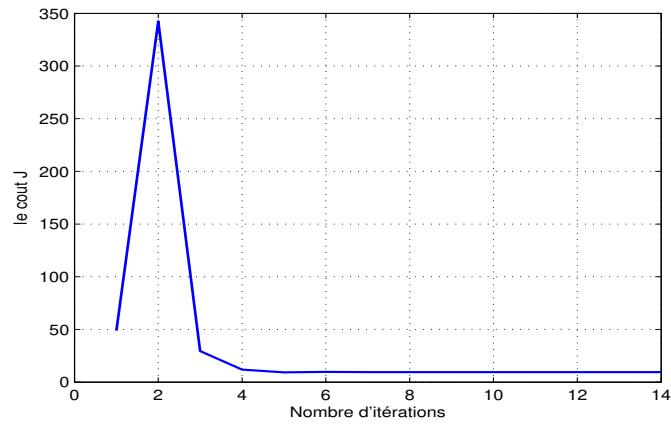


FIGURE 3.8 – Problème 2 : Évolution du critère  $J$ .

### 3.2.3 Problème 3 : Problème de navigation

Considérons le problème de piloter un avion avec un vent de travers à une vitesse constante d'un point à un autre en un temps minimum [Louadj et al. \[2018\]](#) :

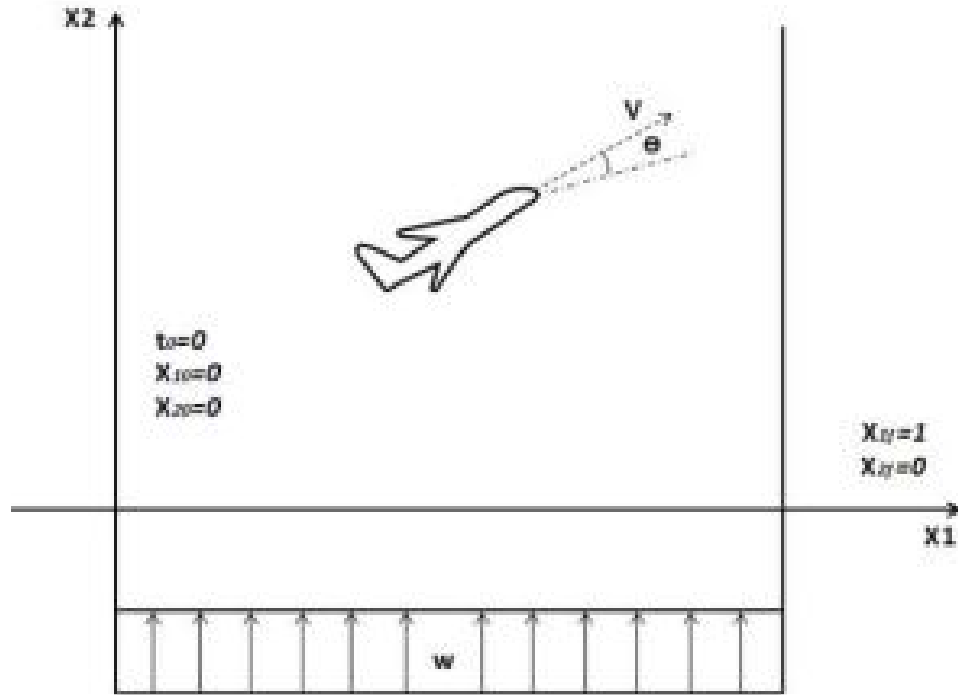


FIGURE 3.9 – Problème de Navigation

Le problème de contrôle optimal s'énonce comme suit : Trouvez le contrôle  $\theta$  qui minimise le temps final

$$\min_{\theta} J = t_f \quad (3.17)$$

Sujet à :

$$\dot{x}_1(t) = V \cos \theta \quad (3.18)$$

$$\dot{x}_2(t) = V \sin \theta + w \quad (3.19)$$

Tel que :

- $x_1$  et  $x_2$  sont les coordonnées cartésiennes.
- $V$  est la vitesse constante de l'avion par rapport l'axe.
- $\theta$  représente l'orientation contrôlable du vecteur de vitesse de l'avion par rapport au sol.

—  $w$  c'est la vitesse de l'avion par rapport au sol.

On peut écrire le problème (3.17)-(3.19) comme suit :

$$\min_{u(t)} J = \int_0^{t_f} dt \quad (3.20)$$

Sujet à :

$$\dot{x}_1(t) = V \cos u(t) \quad (3.21)$$

$$\dot{x}_2(t) = V \sin u(t) + w \quad (3.22)$$

$$x(0) = [0, 0]^T, \quad x(t_f) = [1, 0]^T \quad (3.23)$$

**Résolution avec la méthode de VIM :**

Selon le principe du minimum de Pontrygin, l'Hamiltonien du problème (3.20)-(3.23) est donné par

$$\begin{aligned} H(x(t) + p(t), u(t)(t), t) &= 1 + p_1(t)\dot{x}_1(t) + p_2(t)\dot{x}_2(t) \\ &= 1 + p_1(t)V \cos u(t) + p_2(t)(V \sin u(t) + w) \\ &= 1 + p_1(t)V \cos u(t) + p_2(t)V \sin u(t) + p_2(t)w \end{aligned}$$

Les équations d'Hamilton-Pontryagin dans ce cas là sont données par :

$$\dot{x}_1(t) = \frac{\partial H}{\partial p_1(t)} = V \cos u(t) \quad (3.24)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{\partial H}{\partial p_2(t)} = V \sin u(t) + w \quad (3.25)$$

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1(t)} = 0 \quad (3.26)$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2(t)} = 0 \quad (3.27)$$

Le contrôle optimal :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= 0 \\ \implies -p_1(t)V \sin u(t) + p_2(t)V \cos u(t) &= 0 \\ \implies -p_1(t)V \sin u(t) &= -p_2(t)V \cos u(t) \end{aligned}$$

Avec  $V$  une constante non nulle.

$$\begin{aligned} \implies -p_1(t) \sin u(t) &= -p_2(t) \cos u(t) \\ \implies \frac{\sin u(t)}{\cos u(t)} &= \frac{p_2(t)}{p_1(t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \tan u(t) &= \frac{p_2(t)}{p_1(t)} \\ \implies u^*(t) &= \arctan \frac{p_2(t)}{p_1(t)} \end{aligned}$$

On remplace maintenant  $u^*(t)$  dans les équations (3.24)-(3.27), il vient :

$$\dot{x}_1(t) = V \cos \left( \arctan \frac{p_2(t)}{p_1(t)} \right) \quad (3.28)$$

$$\dot{x}_2(t) = V \sin \left( \arctan \frac{p_2(t)}{p_1(t)} \right) + w \quad (3.29)$$

$$\dot{p}_1(t) = 0 \quad (3.30)$$

$$\dot{p}_2(t) = 0 \quad (3.31)$$

Les fonctionnelles de correction des équations (3.28)-(3.31) sont données par :

$$x_1^{(n+1)}(t) = x_1^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_{x_1}(\tau) \left[ \dot{x}_1^{(n)}(\tau) - V \cos \left( \arctan \frac{p_2(\tau)}{p_1(\tau)} \right) \right] d\tau$$

$$x_2^{(n+1)}(t) = x_2^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_{x_2}(\tau) \left[ \dot{x}_2^{(n)}(\tau) - V \sin \left( \arctan \frac{p_2(\tau)}{p_1(\tau)} \right) - w \right] d\tau$$

$$p_1^{(n+1)}(t) = p_1^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_{p_1}(\tau) [\dot{p}_1^n(\tau)] d\tau$$

$$p_2^{(n+1)}(t) = p_2^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_{p_2}(\tau) [\dot{p}_2^n(\tau)] d\tau$$

Détermination des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_{x_i}$  et  $\lambda_{p_i}$ ,  $i = 1, 2$  :

La variations des équations précédentes nous donne :

$$\delta x_1^{(n+1)}(t) = \delta x_1^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda_{x_1}(\tau) \left[ \dot{x}_1^{(n)}(\tau) - V \cos \left( \arctan \frac{p_2(\tau)}{p_1(\tau)} \right) \right] d\tau = 0$$

$$\delta x_2^{(n+1)}(t) = \delta x_2^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda_{x_2}(\tau) \left[ \dot{x}_2^{(n)}(\tau) - V \sin \left( \arctan \frac{p_2(\tau)}{p_1(\tau)} \right) - w \right] d\tau = 0$$

$$\delta p_1^{(n+1)}(t) = \delta p_1^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda_{p_1}(\tau) [\dot{p}_1^n(\tau)] d\tau = 0$$

$$\delta p_2^{(n+1)}(t) = \delta p_2^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda_{p_2}(\tau) [\dot{p}_2^n(\tau)] d\tau = 0$$

C'est-à-dire

$$\delta x_1^{(n+1)}(t) = \delta x_1^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_{x_1}(\tau) \delta \dot{x}_1^{(n)}(\tau) d\tau = 0$$

$$\delta x_2^{(n+1)}(t) = \delta x_2^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_{x_2}(\tau) \delta \dot{x}_2^{(n)}(\tau) d\tau = 0$$

$$\delta p_1^{(n+1)}(t) = \delta p_1^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_{p_1}(\tau) \delta \dot{p}_1^{(n)}(\tau) d\tau = 0$$

$$\delta p_2^{(n+1)}(t) = \delta p_2^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_{p_2}(\tau) \delta \dot{p}_2^{(n)}(\tau) d\tau = 0$$

En utilisant l'intégration par partie on obtient :

$$\delta x_1^{(n+1)}(t) = \delta x_1^{(n)}(t) + \lambda_{x_1}(t) \delta x_1^{(n)}(t) - \int_0^t \dot{\lambda}_{x_1}(\tau) \delta x_1^{(n)}(\tau) d\tau = 0$$

$$\delta x_2^{(n+1)}(t) = \delta x_2^{(n)}(t) + \lambda_{x_2}(t) \delta x_2^{(n)}(t) - \int_0^t \dot{\lambda}_{x_2}(\tau) \delta x_2^{(n)}(\tau) d\tau = 0$$

$$\delta p_1^{(n+1)}(t) = \delta p_1^{(n)}(t) + \lambda_{p_1}(t) \delta p_1^{(n)}(t) - \int_0^t \dot{\lambda}_{p_1}(\tau) \delta p_1^{(n)}(\tau) d\tau = 0$$

$$\delta p_2^{(n+1)}(t) = \delta p_2^{(n)}(t) + \lambda_{p_2}(t) \delta p_2^{(n)}(t) - \int_0^t \dot{\lambda}_{p_2}(\tau) \delta p_2^{(n)}(\tau) d\tau = 0$$

les conditions de stationnarités sont donc :

$$\begin{cases} 1 + \lambda_{x_i}(t) = 0 \\ \dot{\lambda}_{x_i}(\tau) = 0, \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \lambda_{p_i}(t) = 0 \\ \dot{\lambda}_{p_i}(\tau) = 0, \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

La résolution de ces conditions donne :

$$\lambda_{x_i}(\tau) = -1$$

$$\lambda_{p_i}(\tau) = -1.$$

En remplaçant ces dernières valeurs dans les fonctionnelles de correction, on obtient les équations suivantes :

$$x_1^{(n+1)}(t) = x_1^{(n)}(t) - \int_0^t \left[ \dot{x}_1^{(n)}(\tau) - V \cos \left( \arctan \frac{p_2(\tau)}{p_1(\tau)} \right) \right] d\tau$$

$$x_2^{(n+1)}(t) = x_2^{(n)}(t) - \int_0^t \left[ \dot{x}_2^{(n)}(\tau) - V \sin \left( \arctan \frac{p_2(\tau)}{p_1(\tau)} \right) - w \right] d\tau$$

$$p_1^{(n+1)}(t) = p_1^{(n)}(t) - \int_0^t \dot{p}_1^n(\tau) d\tau$$

$$p_2^{(n+1)}(t) = p_2^{(n)}(t) - \int_0^t \dot{p}_2^n(\tau) d\tau$$

avec

$$x^{(0)}(t) = x(0) = [0, 0]^T$$

$$x^{(0)}(t_f) = x(t_f) = [1, 0]^T$$

$$p^{(0)}(t) = \theta = [\theta_1, \theta_2]^T (\text{inconnu}).$$

On a :  $t_f$  est libre  $\implies H(t_f) = 0$

$$\implies 1 + p_1(t_f)V \cos \left( \arctan \frac{p_2(t_f)}{p_1(t_f)} \right) + p_2(t_f)V \sin \left( \arctan \frac{p_2(t_f)}{p_1(t_f)} \right) + p_2(t_f)w = 0$$

La solution analytique du problème (3.20)-(3.23) est donnée par [Louadj et al. \[2018\]](#) :

$$\theta = -\arcsin \left( \frac{w}{V} \right) \quad (3.32)$$

$$t_f = \frac{1}{\sqrt{V^2 - w^2}} \quad (3.33)$$

$$x_1(t) = \sqrt{V^2 - w^2} t \quad (3.34)$$

$$x_2(t) = (V \sin \theta + w)t \quad (3.35)$$

$$p_1(t) = -\frac{1}{\sqrt{V^2 - w^2}} \quad (3.36)$$

$$p_2(t) = \frac{w}{V^2 - w^2} \quad (3.37)$$

Pour différentes valeurs de  $V$  et  $w$ , nous obtenons les Figures 3.10-3.18 qui montrent l'état et le contrôle.

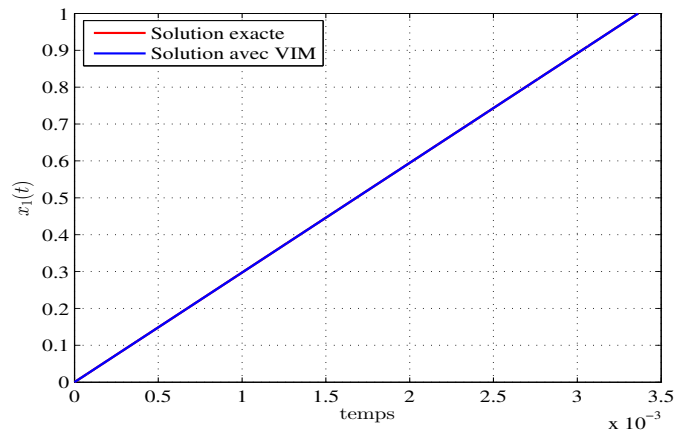


FIGURE 3.10 – Problème 3 : Graphe de la solution exacte  $x_1(t)$  et de la solution approchée  $x_1^{(2)}(t)$  obtenue avec VIM pour  $V = 300$  et  $w = 40$ .

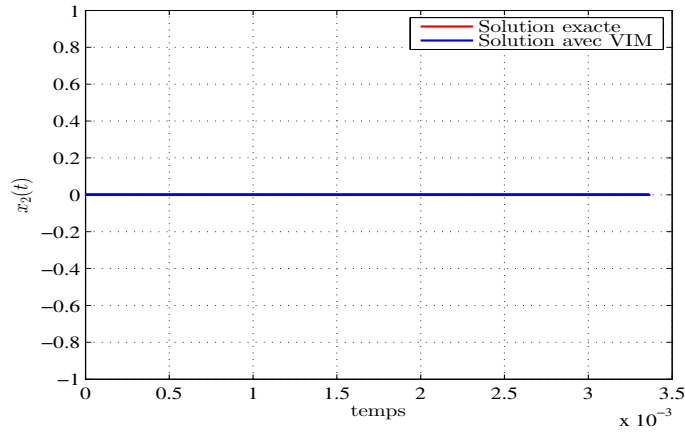


FIGURE 3.11 – Problème 3 : Graphe de la solution exacte  $x_2(t)$  et de la solution approchée  $x_2^{(2)}(t)$  obtenue avec VIM pour  $V = 300$  et  $w = 40$ .

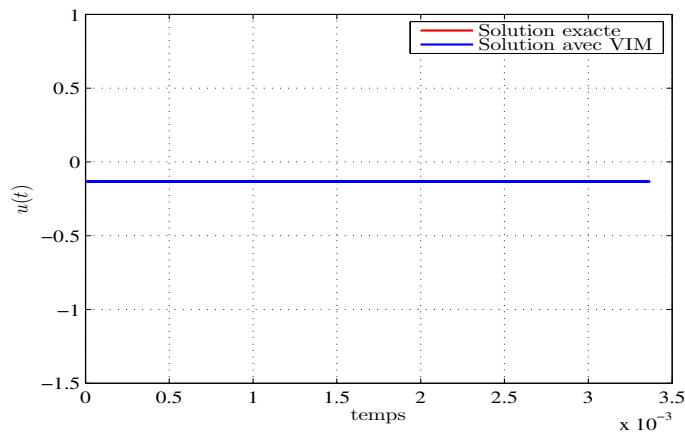


FIGURE 3.12 – Problème 3 : Graphe de la solution exacte  $u(t)$  et de la solution approchée  $u^{(2)}(t)$  obtenue avec VIM pour  $V = 300$  et  $w = 40$ .

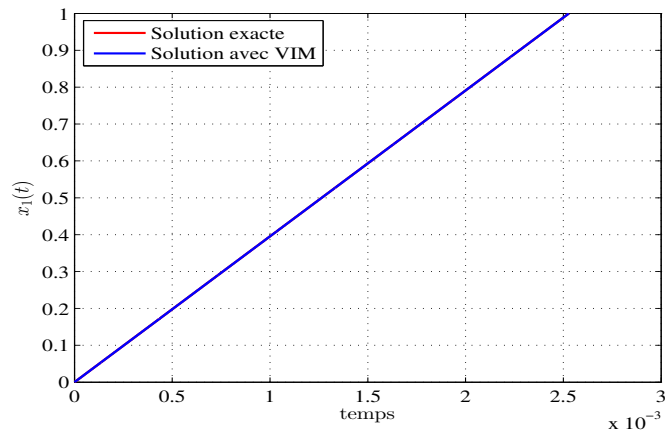


FIGURE 3.13 – Problème 3 : Graphe de la solution exacte  $x_1(t)$  et de la solution approchée  $x_1^{(2)}(t)$  obtenue avec VIM pour  $V = 400$  et  $w = 60$ .

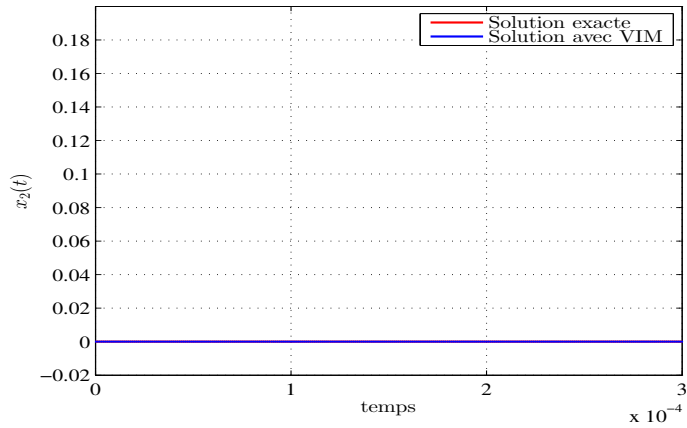


FIGURE 3.14 – Problème 3 : Graphe de la solution exacte  $x_2(t)$  et de la solution approchée  $x_2^{(2)}(t)$  obtenue avec VIM pour  $V = 400$  et  $w = 60$ .

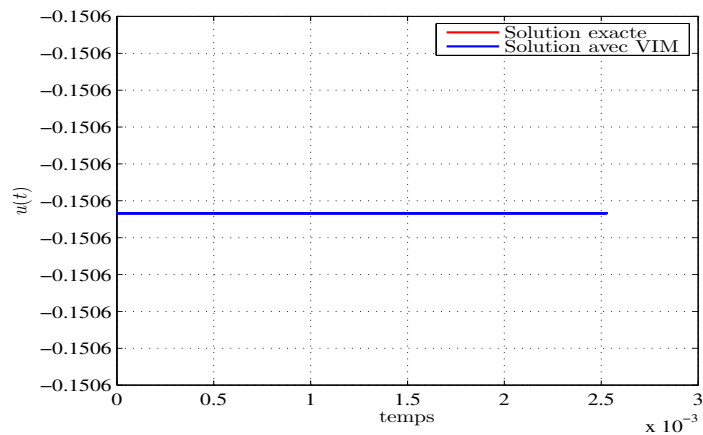


FIGURE 3.15 – Problème 3 : Graphe de la solution exacte  $u(t)$  et de la solution approchée  $u^{(2)}(t)$  obtenue avec VIM pour  $V = 400$  et  $w = 60$ .

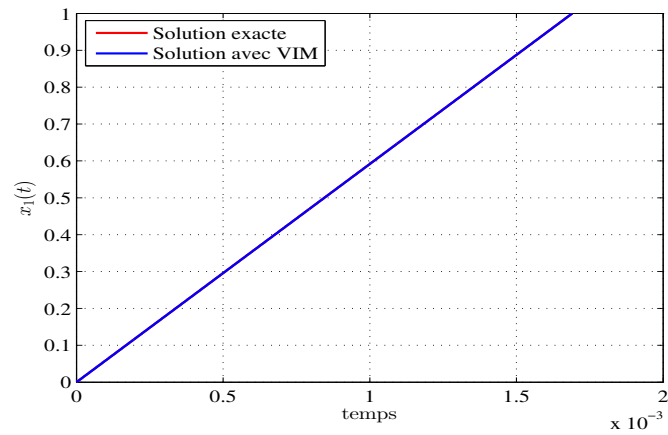


FIGURE 3.16 – Problème 3 : Graphe de la solution exacte  $x_1(t)$  et de la solution approchée  $x_1^{(2)}(t)$  obtenue avec VIM pour  $V = 600$  et  $w = 100$ .

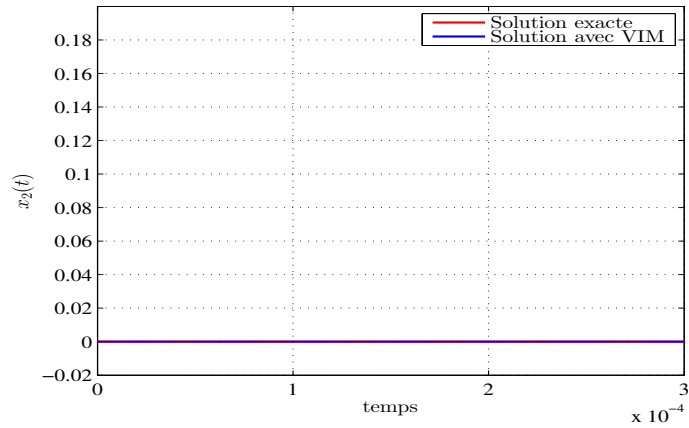


FIGURE 3.17 – Problème 3 : Graphe de la solution exacte  $x_2(t)$  et de la solution approchée  $x_2^{(2)}(t)$  obtenue avec VIM pour  $V = 600$  et  $w = 100$ .

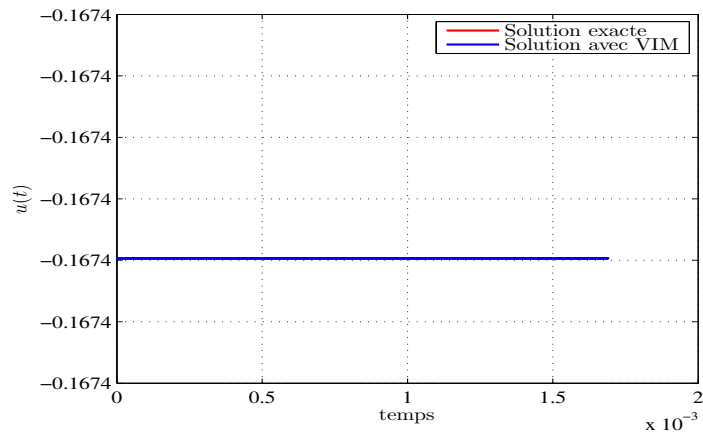


FIGURE 3.18 – Problème 3 : Graphe de la solution exacte  $u(t)$  et de la solution approchée  $u^{(2)}(t)$  obtenue avec VIM pour  $V = 600$  et  $w = 100$ .

V(Km/h)	w(Km/h)	$t_f(mn)$	$\theta(radians)$
300	40	0.204	-0.1337
350	50	0.1740	-0.1433
400	60	0.1517	-0.1506
450	70	0.1350	-0.1562
500	80	0.1216	-0.1607
600	100	0.1014	-0.1674
700	120	0.0870	-0.1723
800	140	0.0752	-0.1759
900	170	0.0679	-0.19

TABLE 3.1 – Problème 3 : Solution exacte pour différentes valeur de V et w.

V(Km/h)	w(Km/h)	$t_f(mn)$	$\theta(radians)$	Itérations
300	40	0.204	-0.1337	2
350	50	0.1732	-0.1433	2
400	60	0.1517	-0.1506	2
450	70	0.1350	-0.1562	2
500	80	0.1216	-0.1607	2
600	100	0.1014	-0.1674	2
700	120	0.0870	-0.1723	2
800	140	0.0762	-0.1759	2
900	170	0.0679	-0.1900	2

TABLE 3.2 – Problème 3 : Solution approchée obtenue avec VIM pour différentes valeur de V et w.

On en déduit que la solution exacte et la solution approchée obtenue avec la méthode de VIM sont similaires (voir Tableaux 3.1 et 3.2). La solution obtenue avec cette méthode est de grande précision comparativement à la solution obtenue avec la méthode de tir dans Louadj et al. [2018]. On remarque que lorsque la vitesse du vent augmente, le temps d’atterrissage diminue. De plus, il convient de noter que le vent est un facteur important qui réduit la durée d’atterrissage. En effet, pendant le vol, l’avion doit naviguer dans une voie aérienne.

### 3.3 CONCLUSION

Dans ce chapitre on a utilisé la méthode des itérations variationnelles pour la résolution d’un problème de contrôle optimal. L’idée consiste à employer la méthode de VIM pour l’identification des variables adjointes qui apparaissent dans les conditions d’optimalité obtenues par le principe du minimum.

Les problèmes de contrôle optimal pour lesquels la solution analytique des équations d’Hamilton est difficile à déterminer ou n’existent pas peuvent être traités à l’aide de cette méthode, et des solutions approchées peuvent être obtenues avec une grande précision et cela a été démontré par les exemples d’application. En effet, la méthode des itérations variationnelles soit converge vers la

solution exacte (Problème 1 et 3) soit assure une solution analytique approchée (Problème 2).

# CONCLUSION

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la commande optimale des systèmes dynamiques.

L'objectif de ce travail est de synthétiser une loi de contrôle optimale en utilisant l'équation d'Hamilton-Pontryagin. Les équations de Hamilton-Pontryagin sont généralement difficiles à résoudre analytiquement en particulier lorsqu'elles sont fortement non linéaire, donc on fait appel à une méthode itérative qui est la méthode des itérations variationnelles, cette méthode permet d'avoir une solution approchée qui converge vers la solution exacte des équations de Hamilton-Pontryagin.

Dans le premier chapitre on a présenté les généralités sur le contrôle optimal, en mettant en évidence les modèles mathématiques utilisés, la notion de contrôlabilité des systèmes et le principe des méthodes de résolution directe et indirectes. Le principe du minimum de Pontryagin représente un outil mathématiques très efficace pour résoudre les problèmes de contrôle optimal (optimisation dynamique) sur un horizon fini. En utilisant cet approche, des conditions d'optimalités exprimées par des équations différentielles peuvent être facilement obtenues pour le problème de contrôle optimal.

Le deuxième chapitre s'est concentré sur les méthodes de résolution des équations différentielles ordinaires, en abordant à la fois les méthodes analytiques et numériques ainsi que la méthode des itérations variationnelles qui est une méthode semi-analytique qui permet de résoudre des EDOs de manière très efficace. Le principe de cette méthode consiste à utiliser une formule de correction (schéma itératif) pour déterminer la solution en partant d'une solution initiale.

Enfin, le dernier chapitre a illustré l'application des concepts étudiés précédemment à travers des exemples d'application. Le problème de navigation a été modélisé en un problème de contrôle optimal et résolu en utilisant la méthode de VIM. Cette méthode été mise en avant comme une approche prometteuse pour résoudre les problèmes de contrôle optimal sans discrétisation ou linéarisation des condition d'optimalité résultantes en utilisant le principe du minimum de Pontryagin. Cette application a permis de mettre en évidence l'efficacité de cette méthode dans la résolution pratique des problèmes de contrôle optimal.

En somme, ce mémoire a permis de développer une compréhension approfondie du contrôle optimal, des méthodes de résolution des équations différentielles ordinaires, ainsi que de la méthode des itérations variationnelles. Il a également démontré l'applicabilité de cette méthode à travers un exemple concret. Ces résultats ouvrent la voie à de nouvelles perspectives de recherche

dans le domaine du contrôle optimal, en particulier en ce qui concerne l'utilisation de la méthode des itérations variationnelles pour résoudre des problèmes plus complexes et variés.

# BIBLIOGRAPHIE

- A. Akkouche. *Contrôle Optimale Des Systèmes Décrits Par Des Equations Aux Dérivées Partielles Basé sur La Méthode D'Itération Variationnelle*. PhD thesis, 2015.
- A. Akkouche, A. Maldi, et M. Aidene. Optimal control of partial differential equation based on the variational iteration method. *Computers and Mathematics with Applications*, 68(5) : 622-631, 2014.
- R. Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.
- S. Berkani, F. Manseur, et A. Maldi. Optimal control based on the variational iteration method. *Computers and Mathematics with Applications*, 64(4) : 604-610, 2012.
- J. T. Betts. *Methods for optimal control and estimation using nonlinear programming*. 2009.
- J.T. Betts. Survey of numerical methods for trajectory optimization. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 21(2) :193-207, 1998.
- G. Constantini. *Analyse*. PhD thesis, 2013.
- J.-P. Corriou. *Commande des Procédés*. Lavoisier, Paris, 2012.
- C. David et S. Mustapha. *Mathématiques 2ème Edition*. 2017.
- C. Dellacherie et P. A. Mayer. *Equation Différentiels*. 1979.
- J. P. Demailly. *Analyse Numérique Des EDOs, 2ème Edition*. 1989.
- L. Elsgolts. *Differential Equations and Calculus of Variations*. Mir Publishers, Moscow, Russia, 1970.
- C. Gilormini et G. Hirsch. *Equation Différentiels*. 1980.
- J. H. He. Variational iteration method-some recent results and new interpretations. *Applied Mathematics and Computation* 207 (2007) 3-17, 2006.
- M. Inokuti, H. Sekine, et T. Mura. *General use of the lagrange multiplier in non-linear mathematical physics*. S. Nemat-Nasser (Ed.), Variational Method in the Mechanics of solids, Pergamon Press, New York 156-162, 1978.
- Kalman et Al. *The birth of modern system theory*. 1960.
- D.E. Kirk. *Optimal Contrôl Theory. An Introduction*. Prentice - Hall. New Jersey, 1970.

- J. Lefrere. *Résolution Numériques Des Equations Différentielles Ordinaires(EDO)*. 2020.
- K. Louadj. *Optimisation de problèmes de contrôle et ses Applications*. PhD thesis, 2012.
- K. Louadj, P. Spitéri, F. Demin., M. Aidene, A. Nemra, et Messine. Frédéric application optimal control for a problem aircraft flight. *Journal of engineering science and technology review - JESTR*, 11 (1). 156-164. ISSN 1791-2377, 2018.
- A. Maida et J. P. Courriou. Open-loop optimal controller design using variational iteration method. *Applied Mathematics and Computation*, 2013.
- D.S. Naidu. *Optimal Control Systems*. CRC Press, Boca Raton, Florida, 2003.
- Z.M. Odibat. A study on the convergence of variational iteration method. *Mathematical and Computer Modelling*, 51 : 1181-1192, 2010.
- L.S. Pontryagin, V.G. Boltlyanskii, R.V. Gamkrelidze, et E.F. Mishchenko. *the mathematical theory of optimal processes*. Pergamon Press, New york, 1964.
- E. Ramis, C. Deschamps, et J. Odoux. *cours de mathématiques spéciales : 4 SERIES, équations différentielles et intégrales multiples, 3ème édition,MASSON*. 1993.
- J. I. Ramos. On the variational iteration method and other iterative techniques for nonlinear differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 199(1) :39–69, 2008.
- A.P. Sage et C.C. WhiteIII. *Optimum Systems Control*. Second Edition. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.
- R.W. H. Sargent. Optimal control. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 124(1-2) :361-371, 2000.
- B. Stout. *Méthodes numériques de résolution d'équations différentielles*. Université de Provence Institut Fresnel, Case 161 Faculté de St Jérôme Marseille, France, 2007.
- M. Tatari et M. Dehghan. On the convergence of he's variational iteration method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207(1) : 121-128, 2007.
- R. Terkmani. *Contribution à La Commande Prédictive Des Systèmes Dynamiques*. PhD thesis, 2021.
- R. Terkmani, A. Maida, S. Guermah, et M. Aidene. Receding horizon control based on the variational iteration method. *Int. J. Systems, Control and Communications*, 11, No. 3, 2020.
- S. Titouche. *Résolution D'un Problème De Contrôle Optimale Avec Contraintes Sur L'état*. PhD thesis, 2015.
- E. Trélat. *Contrôle Optimal : Théorie et Applications*. *Mathématiques Concrettes Vuiber*. France, 2005.
- E. Trélat. *Contrôle Optimal Théorie And Applications*. 2007.
- E. Trélat. *Théorie De Contrôle Optimale et Application En Aéronautique*. Université D'Orléans, 2008.