

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMARI, TIZI-OUZOU  
FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

## THÈSE DE DOCTORAT L.M.D.

FILIÈRE : MATHÉMATIQUES  
SPÉCIALITÉ : ANALYSE MATHÉMATIQUE ET APPLICATIONS

Présentée par :  
**M. Djamel AIT-AKLI**

Sujet :

# Étude mathématique du système de Lamé et application à l'optimisation de structure d'un barrage hydraulique

Devant le jury d'examen composé de :

M. Mohamed Morsli ;	Professeur ;	U.M.M.T.O ;	Président
M. Abdelkader Merakeb ;	Maitre de conf. A ;	U.M.M.T.O ;	Directeur
M. Pierre Spitéri ;	Professeur émérite ;	I.N.P. Toulouse ;	Co-Directeur
M. Boubakeur Merouani ;	Professeur ;	U.F.A. Sétif-1 ;	Examineur
Mme. Fazia Khellas ;	Professeure ;	U.M.M.T.O ;	Examinatrice
Mme. Leila Rahmani ;	Professeure ;	U.M.M.T.O ;	Examinatrice

Soutenue le : 31/01/2021

## *Remerciements*

Avant tout, qu'il me soit permis de louer mon créateur, sa majesté Allah, qui m'a donné la force d'avancer durant toutes ces années. Ma vénération est réservée à son prophète à qui je dédie ce très modeste travail.

Je tiens à présent à exprimer mes sincères remerciements pour le directeur de ma thèse de doctorat, Monsieur Abdelkader Merakeb, Maître de conférence habilité au département de mathématiques de l'UMMTO, d'avoir veillé sur le bon déroulement du travail de thèse et ce jusqu'à la fin. Je le remercie de m'avoir soutenu durant les moments difficiles qui sont propres à l'activité de recherche ainsi que pour ses encouragements qu'il n'a cessé de manifester à la moindre avancée réalisée. Sa bonne humeur et son entière disponibilité ont fait que le travail se déroulait dans une ambiance sereine et productive. Grâce à lui, toutes les conditions pour l'aboutissement du travail étaient réunies. Enfin, ses qualités humaines et scientifiques, son intégrité et son professionnalisme me marqueront à vie.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur Pierre Spitéri, professeur à l'institut national polytechnique Français de Toulouse, d'avoir accepté de co-encadrer ma thèse, de m'avoir accueilli au sein du laboratoire IRIT à l'ENSEEIH et par ailleurs, de m'avoir aussi permis et aidé à effectuer un séjour de longue durée dans le cadre du programme Franco-Algérien de bourse Profas b+. J'ai pu profiter auprès de lui de sa longue expérience dans la recherche et de son grand savoir. Ses orientations, ses conseils et ses idées ont grandement contribué à l'achèvement de ce travail et ses remarques pertinentes m'ont permis d'être efficace. J'ai eu l'heureuse occasion d'apprécier en lui le scientifique et l'humain.

J'adresse mes remerciements à Monsieur Seddik Merakeb, maître de conférence à la faculté du Génie civil de l'UMMTO pour sa précieuse aide. Je le remercie de m'avoir transmis de la motivation et du goût pour un domaine qui m'était, jusque là, presque inconnu. Ses idées m'ont permis d'initier mes diverses réflexions de part et d'autres dans le présent travail. Nos nombreuses discussions à caractères scientifique et philosophique m'ont été très instructives.

Je remercie Monsieur Mohamed Morsli, professeur à l'UMMTO, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance.

J'exprime ma gratitude à Monsieur Boubakeur Merouani professeur de mathématiques à l'université de Sétif-1, de m'avoir orienté et indiqué des références et d'avoir bien voulu être membre examinateur.

Mes remerciements vont aussi à Madame Fazia Khellas professeure à l'UMMTO qui m'a soutenu à bien des égards en plus d'accepter d'examiner ma thèse. Mes respects et mes remerciement vont enfin à Madame Leila Rahmani professeure à l'UMMTO d'avoir accepter de faire partie du jury de soutenance.

Mes remerciements vont également au professeur Mohammed Boukra pour ses conseils et orientations.

Enfin, Je tiens à remercier mon confrère Ali Bouzekri pour ses suggestions pertinentes ainsi que pour les discussions intéressantes que j'ai eu le plaisir de partager avec lui.

Mes remerciements vont également à mes confrères Vincent Partimbene et Bruno Derias avec lesquels j'ai eu le plaisir de m'entretenir scientifiquement à maintes occasions durant mon séjour à l'ENSEEIH.

Mon ultime reconnaissance ira certainement vers mes chers parents pour leur soutien indéfectible ; sans eux je ne serai certes pas ici aujourd'hui.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Notions et outils d'analyse mathématique</b>	<b>10</b>
1.1 Généralités . . . . .	10
1.2 Analyse variationnelle du système de l'élasticité . . . . .	13
1.3 Classes de régularité du domaine géométrique . . . . .	18
1.4 Espaces de Sobolev d'ordres fractionnaires . . . . .	21
1.5 Théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle . . . . .	22
<b>2 Résultats de trace sur des ouverts non-Lipschitziens</b>	<b>25</b>
2.1 Trace sur un domaine d'extension pour $W^{1,p}(\Omega)$ . . . . .	26
2.1.1 Preuve du Théorème 2.1 . . . . .	30
2.2 Trace sur un domaine de Jordan . . . . .	34
2.2.1 Preuve du Théorème 2.2 . . . . .	43
2.3 Conclusion . . . . .	46
<b>3 Estimations explicites pour le problème de l'élasticité linéaire</b>	<b>48</b>
3.1 Introduction . . . . .	48
3.2 Problème faible pour $u_\epsilon$ et résultats d'approximation . . . . .	52
3.3 Lemmes auxiliaires . . . . .	55
3.3.1 Extension des fonctions $u_{2,i}$ . . . . .	69
3.3.2 Détermination explicite de la constante de l'inégalité de Poincaré . . . . .	70
3.3.3 Majoration explicite de la constante de l'inégalité de trace pour $u_{2,i}$ sur $\Gamma_i$ . . . . .	71
3.4 Preuve du théorème 3.1 . . . . .	73
3.5 Quelques clarifications . . . . .	76

---

<b>4</b>	<b>Étude d'un problème couplé et application à l'optimisation de structure</b>	<b>78</b>
4.1	Introduction et position du problème . . . . .	78
4.1.1	Partie fluide . . . . .	80
4.1.2	Partie structure . . . . .	82
4.1.3	Procédure de couplage . . . . .	84
4.2	Étude mathématique de la solution du problème couplé . . . . .	87
4.3	Aspects mécaniques . . . . .	102
4.3.1	Critères mécaniques . . . . .	102
4.3.2	Construction des surfaces . . . . .	106
4.4	Optimisation . . . . .	110
4.4.1	Présentation de la méthode de Hooke-Jeeves . . . . .	110
4.4.2	Présentation du problème de minimisation du volume de la structure	111
4.4.3	Pénalisation . . . . .	112
4.4.4	Fonction auxiliaire convexe et prolongement par continuité des fonc- tions . . . . .	116
4.4.5	Caractère global du minimum calculé par la méthode de Hooke-Jeeves	119
4.5	Conclusion . . . . .	124
	<b>Conclusion générale</b>	<b>125</b>
	<b>Annexe</b>	<b>129</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>133</b>

# Introduction

Il est un fait des plus surprenants, si ce n'est des plus extraordinaires, que génération après génération de scientifiques, on soit toujours témoin de la parfaite adéquation des mathématiques à l'explication des phénomènes naturels et du monde ainsi que de sa quasi-infaillibilité à supporter leurs compréhensions. Cela laisse indubitablement penser que les mathématiques ou, plus justement encore, le point de vue mathématique est profondément enraciné dans la conception rationnelle du monde d'où il tire sans s'épuiser sa source et qui, par ailleurs, renouvelle sans cesse un terrain dans lequel s'assouvit l'appétit industriel très caractéristique des temps modernes et des hommes qui servent plus ou moins fidèlement ces temps.

La matière traitée dans cette thèse est une opportunité pour toute personne investie dans l'analyse des équations aux dérivées partielles et ses ramifications (espaces de Sobolev et théorèmes généraux d'existence et d'unicité ainsi que les divers outils de l'analyse fonctionnelle), désireuse de découvrir un exemple d'application sur cette théorie. Le travail présenté dans cette thèse revêt le double aspect, théorique et numérique, qui à cette occasion sont nettement liés.

En effet, l'analyse numérique est un moteur et stimulateur de développements en analyse mathématique pure et appliquée, et ceci dans deux sens relativement complémentaires. D'un côté, les besoins et les situations ainsi que les questions pratiques très variées stimulent le développement de modèles analytiques de plus en plus rigoureux. D'un autre côté, les développements en analyse sont maintes fois dus à un besoin de justifications théoriques de ces méthodes numériques : les estimations d'erreurs d'approximation en sont des exemples très répandus. L'amélioration dans la précision peut se manifester par la recherche d'un ordre de plus en plus élevé du pas de discrétisation  $h$  en fonction duquel ces estimations s'expriment en général, ce qui implique une convergence plus efficace. Par ailleurs, tout ceci nous conduit à considérer un aspect, et dans lequel une partie du travail présenté dans cette thèse s'inscrit, qui est celui d'explicitement les constantes dans des estimations a

priori de solutions de problèmes différentiels elliptiques et à l'aide desquelles s'expriment les estimations d'erreur en question.

Un nombre considérable d'estimations d'erreurs d'approximation en éléments finis, des solutions des problèmes aux limites faisant intervenir des opérateurs aux dérivées partielles qui se résolvent dans le cadre d'espaces de Sobolev, ont la forme générale suivante

$$\|u - u_h\|_{W^{k,2}(\Omega)} \leq Ch^{\phi(k)} \|u\|_{W^{k+1,2}(\Omega)}. \quad (1)$$

La constante  $C$  dépend quasi-exclusivement des éléments finis et de la géométrie du maillage utilisé dans l'analyse par la méthode des éléments finis. On renvoie à ([60], [61]) pour un exemple de calcul explicite de ces constantes dans un cas particulier. Pour apprécier précisément la qualité de l'approximation fournie par (1), il est très souhaitable d'estimer  $\|u\|_{W^{k+1,2}(\Omega)}$  ou à en donner une majoration. Ce qui revient à établir des estimations a priori explicites relatives au problème considéré. On ne saurait, dans l'espace limité de cette thèse, traiter de manière exhaustive cette problématique qui exigerait la mise en place d'un farouche programme de recherche. Dans une partie du travail présenté dans cette thèse, notre intérêt se restreint plutôt à fournir une estimation a priori explicite de la solution du problème de Lamé sous forme d'une majoration, qui n'est pas optimale dans le sens qu'elle pourrait être sujette à une amélioration. L'étude s'est volontairement restreinte à un domaine convexe. Ce choix est tributaire de l'idée qui a permis d'établir les estimations a priori et qui consiste en la possibilité d'exprimer le domaine convexe polygonal comme intersection de demi-plans dont chacun d'eux contient intégralement le domaine  $\Omega$  en tant que sous ensemble, et dont le nombre est égal à celui des arêtes du polygone. On peut voir cette problématique sous un point de vue non moins intéressant : supposons qu'on ait une fonction et qu'on veuille estimer sa norme  $H^1$ , ce qui revient dans certaines situations, à estimer la norme  $L^2$  de son gradient. Alors pour ce faire, on étudie son image par un opérateur elliptique du second ordre, du moment qu'on recherche une norme  $L^2$  auquel on adjoint, éventuellement, un opérateur différentiel sur le bord. L'estimation  $H^1$  – recherchée peut s'obtenir en considérant la problématique sous le même point de vue que celui adopté au chapitre 3 de cette thèse.

Il va sans dire que les estimations explicites pour la solution de problèmes elliptiques en général, qu'ils soient linéaires ou non-linéaires, reposent essentiellement sur des constantes quasi-universelles pour lesquelles il est très souhaitable, dans le point de vue que nous adoptons, d'en donner des estimations explicites. Ces constantes apparaissent dans la plus part des cas et naturellement dans les théorèmes ou inégalités célèbres suivantes :

- Inégalité de Poincaré et ses généralisations (du type Wirtinger) i.e. des inégalités du type :

$$\|u\|_{L^p} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^p}.$$

- Inégalité de trace i.e. du type :

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C_t \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

- Inégalité de Korn du type :

$$\|\nabla u\|_{L^p} \leq C_k \|\varepsilon(u)\|_{L^p}.$$

Il y a aussi les constantes relatives à la propriété de continuité de certains autres opérateurs importants, notamment :

- Le théorème d'extension de Sobolev et qui concerne la constante de continuité de l'opérateur d'extension

$$\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^2)} \leq C_{ext} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

- La constante de continuité de l'injection des espace de Sobolev dans les espaces Höldériens ou espace de fonctions continues

$$\|u\|_{C^{0,\lambda}} \leq C_i \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Le caractère quasi-universel de ces constantes est dû au fait que ces dernières ne dépendent pas des fonctions  $u$  à estimer mais dépendent toutefois du domaine  $\Omega$ , ce qui justifie l'utilisation du préfixe "quasi". Ceci étant, des exceptions existent dans certaines situations particulières, cf. [8] en ce qui concerne l'opérateur de prolongement de Sobolev, dans quel cas la constante apparaissant dans l'estimation issue de la propriété de continuité de l'opérateur non seulement ne dépend pas de  $u$  mais aussi de  $\Omega$ , ceci nous réserve de certaines hypothèses particulières sur ce domaine.

La détermination des constantes dans les estimations vérifiées par les solutions d'équations elliptiques à déjà fait l'objet de nombreux travaux réalisés, cf. par exemple [18]. Ces travaux ont pour principal objet un opérateur elliptique du second ordre sous forme de divergence dont l'exemple le plus célèbre et celui du laplacien cf. [17]. Nous nous proposons, dans le chapitre 3, de traiter la même problématique dans le cas de l'opérateur de l'élasticité linéaire de Lamé. Combien même notre opérateur est linéaire et elliptique, la situation que nous envisageons est toute particulière du fait que l'ellipticité de l'opérateur d'élasticité est établie en utilisant l'inégalité de Korn. Pour la détermination explicite

des valeurs de la constante apparaissant dans l'inégalité de Korn relativement à certaines configuration géométrique du domaine  $\Omega$ , on renvoie le lecteur vers [15], [16].

Les applications d'ordre industriel, physique et informatique, dans le domaine de l'imagerie par exemple, sont à l'origine de développements importants en modélisation mathématique et par conséquent numérique. La modélisation se fait, généralement, à l'aide d'équations aux dérivées partielles. La théorie de l'existence pour ce type de problème fait intervenir, entre autres outils importants, l'opérateur de trace et ses propriétés, de continuité notamment. Pour définir un opérateur de trace, le domaine doit posséder un minimum de régularité, Lipschitzien ou faiblement Lipschitzien.

Par ailleurs, l'existence d'une théorie de la mesure pour les domaines qui ne rentrent pas dans la catégorie des domaines standards usuels sont à même de nous fournir les moyens théoriques et les bonnes justifications pratiques de la possibilité d'étudier cet opérateur de trace puis éventuellement, et de manière analogue au cas classique, de la validité d'une version similaire au théorème de trace. C'est à dire dans le cas où l'opérateur de trace est appliqué à des fonctions d'espaces de Sobolev qui sont définis sur des domaines à frontières non conventionnelles.

L'un des principaux intérêts de l'existence de la théorie des espaces de Sobolev est bien celle de fournir le cadre fonctionnel approprié à l'étude des équations aux dérivées partielles. Leurs définitions faisant intervenir les dérivées au sens des distributions et dont la régularité permet de caractériser ces espaces. Les solutions au sens faible sont généralement, à rechercher dans un premier temps dans ce type très large d'espaces et propice quant à la possibilité de donner un sens à des dérivées qu'on ne pouvait concevoir dans le sens classique. Ces espaces sont constitués de fonctions pour lesquelles, (et contrairement au espaces de Lebesgue), il est tout à fait possible d'étendre d'une certaine façon la restriction au bord de l'ensemble (qui est généralement ouvert) sur lequel l'espace ou les fonctions sont considérées. Ceci définit "une valeur sur le bord", et qui porte le nom de trace d'une fonction sur le bord. La façon avec laquelle on peut la définir est qu'on peut s'assurer de l'existence d'une unique fonction définie sur le bord, et faisant partie d'un espace de Sobolev ou de Lebesgue lui même aussi défini sur ce bord, telle que cette fonction coïnciderait avec la restriction de la fonction de départ dans le cas ou elle est continue. L'opérateur qui fait associer à une fonction d'un espace de Sobolev cette fonction définie sur le bord s'appelle opérateur de trace. En plus de son importance sans conteste dans la démonstration de l'existence et l'unicité pour une grande partie de problèmes d'équations au dérivées

partielles, ce qui est en somme quelque chose de fondamental pour cette discipline, il demeure un moyen qui met en valeur la "régularité Sobolev" et qui en fait un espace d'une extrême pertinence.

En dimension une et pour une fonction  $C^1$ , on peut facilement se rendre compte de cette pertinence. En effet, en utilisant le théorème fondamental de l'analyse on peut aisément déduire une inégalité qui permet de fournir l'exemple de base du théorème de trace ; l'existence étant assurée par définition mais en plus, on a continuité de cet opérateur. Les fonctions de l'espace de Sobolev  $H^1$  en dimension une sont continues, donc l'existence de la trace ne pose aucun problème.

L'intérêt se fait sentir à partir de la dimension  $N \geq 2$  et notamment avec le cas du demi-plan et de son bord qui est une droite. Pour le cas des domaines de classe  $C^1$  i.e. des domaines dont la frontière est localement le graphique d'une fonction  $C^1$ , le résultat de trace peut se déduire en se ramenant par cartes locales à celui du demi-plan ou du demi-espace en dimension supérieure. La généralisation qui constitue la suite logique de ces considérations géométriques consiste à établir un théorème de trace pour les fonctions de  $W^{1,p}(\Omega)$  dans le cas où le domaine  $\Omega$  est Lipschitz régulier, ceci à été achevé en 1966 par Gagliardo dans [2] et qui donne du même coup une caractérisation de l'image des opérateurs de trace définis sur ce type de domaine assez générale, cf. aussi [58]. L'étude qui fait l'objet du chapitre 2 s'inscrit dans cette lignée de généralisations où l'on établit un théorème de trace pour un type de domaine encore plus général, notamment celui des domaines de Jordan. C'est l'appellation par laquelle on désigne la catégorie des domaines qui sont homéomorphes à la boule unité. Il faut bien souligner que l'homéomorphie ne fait intervenir absolument aucune régularité en lien avec la dérivabilité ou le caractère Lipschitzien ou Hölderien qui sont toujours, d'une manière ou d'une autre, liées à la notion de dérivabilité. Les domaines de Jordan sont des domaines dont la frontière est paramétrisée par une fonction vectorielle continue. C'est une classe très générale de domaines qui inclut des domaines aussi divers que mystérieux pour quelqu'un qui n'a pas l'habitude de travailler avec des domaines dont la dimension est non nécessairement entière. Les fractals en sont un exemple très répandu actuellement dans la littérature mathématique et physique. Par ailleurs, il y a aussi les domaines d'extension qui peuvent constituer, pour certaines raisons évoquées au chapitre 2, des domaines à régularité intermédiaire. Cette généralisation suggère, et a fortiori la dernière d'entre elles, que l'opérateur de trace peut être conçu comme une notion très générale qui pourrait dépasser le cadre proprement fonctionnel actuel, dans le sens où cette suite de généralisation pourrait rendre compte d'une propriété qui revêt un caractère

assez universel.

Les domaines de Jordan sont les domaines les plus généraux et les moins réguliers qui assurent la possibilité de faire des mathématiques telles qu'elles se pratiquent à l'heure actuelle. C'est à dire que, d'un coté on peut obtenir des résultats dans le cadre de théories fonctionnelles existantes, et d'un autre coté ces domaines sont susceptibles de supporter des situations et applications intelligibles et concrètes.

Dans la dernière partie du travail et en guise d'application, on s'intéresse à la modélisation du comportement d'une structure déformable par les équations de Lamé. Un exemple de structure est celui d'un barrage hydraulique.

Il existe une grande variété de formes sous lesquelles les barrages hydrauliques sont construits. Nous nous intéressons au cas d'un barrage avec une face amont non verticale de forme polygonale. La structure étant soumise à une force hydro-dynamique d'un coté et à une excitation sismique de l'autre. Le modèle le plus adapté à l'étude de cette situation est celui d'un problème couplé entre le système d'équations de Lamé qui modélise le comportement de la structure et les équations de Navier-Stokes qui modélisent l'écoulement du fluide.

Pour commencer, on implémente un programme en utilisant la méthode des éléments finis pour résoudre le problème couplé : Navier-Stokes et Lamé. L'étude de l'existence et de l'unicité de la solution d'un tel problème couplé à été faite dans [3]. La question a aussi été traité dans [69] en lien avec un problème d'ingénierie. L'originalité consiste en la prise en compte de la donnée non homogène de Dirichlet qui représente les valeurs de l'excitation sismique.

Par ailleurs, il est souhaitable, pour des raisons de coût de construction notamment, que le volume du barrage soit minimal tout en garantissant, bien sûr, sa stabilité. On se proposera dans la dernière section du présent travail d'optimiser le volume de la structure, donc la fonction objectif à minimiser est la fonction qui à pour valeur le volume de la structure sous réserve de respecter les critères de stabilité qui seront, à cet effet, précisés.

L'optimisation de la forme est paramétrique, c'est-à-dire que nous fixons une forme préliminaire à laquelle nous ajoutons un renforcement. Notre apport original consiste à formuler les contraintes du problème qui prennent la forme d'inégalités algébriques. Ces inégalités émergent de fonctions sur lesquelles on impose un seuil et sont issues d'une étude mécanique du comportement de la structure, ceci dit, ces fonctions ne sont pas explicitement formulées. Afin de mener à bien l'optimisation, on reformule le problème

d'optimisation en un problème d'optimisation sans contraintes à l'aide de la méthode de pénalisation. Le problème pénalisé est résolu en utilisant la méthode exploratoire locale de Hooke-Jeeves qui s'avère être une résolution globale.

### Plan de la thèse

Le travail, dont la présente thèse en est l'aboutissement, se trouve être séquentiellement divisé en quatre parties relativement indépendantes. Le chapitre 1 est l'occasion de revoir des notions diverses de la théorie des problèmes elliptiques et les résultats qui y sont rattachées notamment les différentes notions de base de l'analyse fonctionnelle ainsi que des résultats indispensables pour les études menées dans les chapitres suivants.

Le chapitre 2 contient en substance deux résultats relatifs à l'opérateur de trace définis dans un premier temps pour des domaines de  $(1, p)$ -extension puis dans le cadre des domaines de Jordan. On démontre l'existence d'une trace sur le bord des ces domaines puis on démontre la continuité de l'opérateur de trace.

L'aspect numérique, qui est le second dessein directeur de cette thèse est véhiculé par le résultat dont la démonstration fait principalement l'objet du chapitre 3 dans lequel on établit une estimation a priori explicite pour la norme  $H^1$  de la solution du problème de Lamé posé sur un domaine polygonal convexe avec une condition au bord mixte de type Dirichlet-Neumann.

Enfin, le dernier chapitre, qui concerne essentiellement le domaine des applications, se divise en deux parties : D'abord, on commence par présenter la méthode partitionnée pour le couplage. On y expose notamment quelques idées relatives à la théorie d'existence et d'unicité de la solution du problème couplé dans le cadre de l'interaction fluide-structure. Puis l'aspect optimisation se trouve réalisé dans la seconde partie. On y explicite l'utilisation de la méthode de Hooke-Jeeves appliquée à la forme pénalisée de notre problème en plus d'une application à notre situation.

Le lecteur pourra trouver, à la fin du manuscrit, une annexe où l'on a réuni certains des résultats utilisés tout le long de la thèse avec leurs références. Il pourra s'y rapporter en cas de besoin.

# Chapitre 1

## Notions et outils d'analyse mathématique

On passe en revue dans ce chapitre les outils de base ainsi que les notions classiques qui sont utilisées à travers les différents développements présentés dans cette thèse. Par ailleurs, on fixe les notations principales qui seront adoptés dans le reste des chapitres.

### 1.1 Généralités

En analyse mathématique, une distribution, également appelée fonction généralisée, est un objet qui généralise la notion de fonction et de mesure. La théorie des distributions étend, d'une certaine façon, la notion de dérivée à toutes les fonctions localement intégrables et au-delà, et est utilisée pour formuler des solutions à un nombre très important d'équations aux dérivées partielles. Elles sont aussi importantes en physique et en ingénierie où beaucoup de problèmes discontinus conduisent naturellement à des équations différentielles dont les solutions sont des distributions plutôt que des fonctions au sens ordinaire.

Un espace fonctionnel d'une importance capitale est celui des fonctions test  $\mathcal{D}(\Omega)$  : l'ensemble des fonctions  $C^\infty(\Omega)$  à support compact dans  $\Omega$  qui, au passage, est muni d'une structure localement convexe non métrisable et qui en fait un espace vectoriel topologique localement convexe. On a alors :

**Définition 1.1.** Une distribution est une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions test  $\mathcal{D}(\Omega)$ . L'ensemble des distributions  $\mathcal{D}'(\Omega)$  est donc le dual topologique de  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

La possibilité de dériver autant de fois que souhaité une distribution d'une part, et le fait que à chaque fonction assez régulière est associée de manière unique une distribution

d'autre part en font une notion et même un point de vue très fécond qui a permis de donner un cadre unifié aux objets les plus fondamentaux de l'analyse comme les fonctions de tout genre et les mesures. On sait depuis définir la dérivée d'une mesure dans le sens où cette dérivée coïncide avec la dérivée d'une fonction dans ce même cadre. La dérivée  $k$ -ième,  $\partial^k\{u\}$  de la distribution associée à la fonction  $u \in L^2(\Omega)$  est définie par

$$\int_{\Omega} \partial^k\{u\} \phi \, dx = (-1)^k \int_{\Omega} u \partial^k \phi \, dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.1)$$

### Formule des sauts

La formule qu'on présente ci-après exprime la dérivée au sens des distributions d'une fonction de classe  $C^1$  mais avec une discontinuité bien localisée. La dérivée s'exprime en fonction du saut de la fonction en ces discontinuités, cf. [14].

**Théorème 1.1.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert à bord de classe  $C^1$  dont on note  $\Gamma = \partial\Omega$  la frontière et  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^N - \Gamma$  telle que :*

1) *la restriction de  $f$  à  $\Omega$  se prolonge en une fonction de classe  $C^1$  sur un voisinage ouvert de  $\overline{\Omega}$ , et*

2) *la restriction de  $f$  à  $\mathbb{R}^N - \Omega$  se prolonge en une fonction de classe  $C^1$  sur un voisinage ouvert de  $\overline{\mathbb{R}^N - \Omega}$ .*

*Alors la fonction  $f$  est localement intégrable sur  $\mathbb{R}^N$  et on a*

$$\partial_{x_j} f = \{\partial_{x_j} f\} + [f]_{\Gamma} \nu_j \sigma \text{ dans } D'(\mathbb{R}^N) \text{ pour } j = 1, \dots, N. \quad (1.2)$$

Dans la formule (1.2), on a noté  $\{\partial_{x_j} f\}$  la fonction continue par morceaux sur  $\mathbb{R}^N$  définie par la formule

$$\{\partial_{x_j} f\}(x) = \partial_{x_j} f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N - \Gamma$$

et on a noté  $[f]_{\Gamma}$  le saut de  $f$  à travers l'hypersurface  $\Gamma$  dans la direction  $\nu$  :

$$[f]_{\Gamma}(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (f(x + t\nu(x)) - f(x - t\nu(x))) \quad x \in \Gamma,$$

où l'on a désigné par  $\nu$  le champs des vecteurs unitaires normaux à  $\Gamma$  et pointant vers l'extérieur de  $\Omega$ . Enfin,  $\sigma$  est la mesure de surface sur  $\Gamma$  i.e. la distribution de simple couche définie par

$$\langle \sigma, \phi \rangle = \int_{\Gamma} \phi \, d\sigma,$$

où  $d\sigma$  désigne l'élément de surface sur  $\Gamma$ .

## Partition de l'unité subordonnée à un recouvrement

Soient  $\Omega$  un espace topologique et  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert localement fini de cet espace. On appelle partition de l'unité subordonnée au recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$ , une famille  $(\phi_i)_{i \in I}$ , de fonctions continues,  $C^\infty$  éventuellement, définies sur  $\Omega$  tel que le support de  $\phi_i$  soit inclus dans  $U_i$  et est à valeur dans l'intervalle  $[0, 1]$  et telles que pour tout point  $x \in \Omega$ , les deux conditions suivantes soient satisfaites :

1) il existe un voisinage de  $x$  tel que toutes les fonctions  $\phi_i$  soient nulles sur ce voisinage à l'exception d'un nombre fini d'entre elles ;

2) la somme de toutes les valeurs prises par les fonctions  $\phi_i$  en  $x$  soit égale à 1, c'est-à-dire :  $\sum_{i \in I} \phi_i(x) = 1$  pour tout  $x \in \Omega$ .

Les partitions de l'unité permettent, entre autres, d'établir le caractère global d'une propriété déjà vrai localement.

## Les espaces fonctionnels

On présente certains des espaces fonctionnels dont il est fait systématiquement usage dans le corps de cette thèse :

1) L'espace de Lebesgue des fonctions  $\lambda$ -mesurables et intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue,  $\lambda$ , est désigné par  $L^1(\Omega)$  et permet de définir l'espaces des fonctions de puissance  $p$ -ième intégrable qui est désigné par  $L^p(\Omega)$ . Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_{p,\Omega} = \int_{\Omega} |u|^p dx$$

qui en fait un espace vectoriel normé complet i.e. un espace de Banach pour  $p > 1$ . C'est un espace de Hilbert pour  $p = 2$ , c'est à dire que sa norme découle d'un produit scalaire ; pour  $0 < p < 1$  c'est une quasi-norme qui en fait juste un espace complet.

2) Les espaces de Sobolev

$$W^{k,p}(\Omega) := \{v \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \partial^\alpha v \in L^p(\Omega), \forall \alpha, \text{ multi-indice, } |\alpha| \leq k\}.$$

La dérivée figurant à l'intérieur de cette définition est comprise au sens des distributions, cf. définition 1.1. Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{p,\Omega} + \|\nabla u\|_{p,\Omega}.$$

Cette norme fait intervenir la norme  $L^p$  de la fonction et de sa dérivée en norme. Cet espace vectoriel, une fois muni de cette norme, est un espace de Banach et pour  $p = 2$  c'est un espace de Hilbert.

Les fonctions de l'espace  $L^p(\Omega)$  de Lebesgue étant définies presque partout, on ne peut, avec les outils à notre disposition, parler de manière intelligible d'une fonction de cet espace sur une partie de mesure nulle de  $\Omega$ . Par exemple : une partie de dimension 1, segment ou courbe, est de mesure de Lebesgue 2-dimensionnelle nulle ou bien même, un sous ensemble ayant une dimension de Hausdorff  $s < 2$  à aussi une mesure de Lebesgue 2-dimensionnelle nulle.

Par contre, dans le cas d'une fonction de l'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$ , qui est plus régulière, il est bien possible de donner un sens à la valeur de la fonction sur un sous ensemble de mesure nulle par rapport à la dimension du domaine ambiant  $\Omega$ . La fonction est même régulière et appartient dans notre cas à un espace de Sobolev  $W^{1-\frac{1}{p},p}$ . Cette constatation ouvre la voie vers la notion de trace ou d'opérateur de trace.

3) L'espace  $H(\text{div})(\Omega) = \{v \in [L^2(\Omega)]^3, \text{div } v \in L^2(\Omega)\}$  est l'espace des fonctions de carré sommable dont la divergence, au sens des distributions, est de carré sommable.

4) L'espace  $H^{-1}(\Omega)$  qui est un espace de Sobolev d'exposant négatif et qui peut être vu aussi comme étant isomorphe au dual de l'espace de Sobolev,  $H_0^1(\Omega)$ , des fonction de trace nulle sur le bord de  $\Omega$  avec lequel il s'identifie, sa norme est noté  $\| \cdot \|_{-1,\Omega}$ . Il y aussi l'espace  $[H^{\frac{1}{2}}]'(\Gamma)$  qui est le dual de l'espace de Sobolev d'exposant fractionnaire qui peut être identifié à l'espace  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , sa norme est noté  $\| \cdot \|_{[H^{\frac{1}{2}}]',\Gamma}$ .

## 1.2 Analyse variationnelle du système de l'élasticité

### Formulation faible de l'équation de Lamé

Nous appliquons l'approche variationnelle à la résolution du système d'équations de l'élasticité linéarisé, voir [14]. Ces équations modélisent les déformations d'un solide sous l'hypothèse de petites déformations et de petits déplacements. Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ . Soit une force  $f$ , fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^N$ . Le déplacement, inconnu,  $u$  est aussi une fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^N$ . La modélisation mécanique fait intervenir le tenseur des déformations, noté  $\varepsilon(u)$ , ainsi que le tenseur des contraintes  $\sigma(u)$ ; ces tenseurs sont reliés par la loi de Hooke

$$\sigma(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda \text{Tr } \varepsilon(u) \text{Id}$$

où  $\mu$  et  $\lambda$  sont les coefficients de Lamé qui sont constants car nous nous plaçons dans le cadre isotropique. A cette loi constitutive est ajouté le bilan des forces dans le solide

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{dans } \Omega$$

où, par définition, la divergence du tenseur d'ordre deux,  $\sigma$ , est le vecteur dont les composantes sont données par

$$\operatorname{div} \sigma = \left( \sum_{j=1}^N \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq N}.$$

En utilisant le fait que  $\operatorname{Tr}(\varepsilon(u)) = \operatorname{div} u$ , on déduit les équations pour  $1 \leq i \leq N$

$$-\sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda (\operatorname{div} u) \delta_{ij} \right) \quad (1.3)$$

où  $f_i$  et  $u_i$  sont les composantes de  $f$  et  $u$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^N$ . On se concentre sur le cas où la condition de bord est de type mixte i.e. avec une condition au bord de type Dirichlet homogène sur  $\Gamma_0$  correspondant à la distribution nulle et une condition au bord de Neumann sur  $\Gamma - \Gamma_0$  correspondant à la distribution  $g$ . On considère le sous espace  $V \subset H^1(\Omega)$  défini par :

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}. \quad (1.4)$$

On cherche à établir l'existence d'une solution au sens faible dans  $V$ . On énonce le résultat d'existence et d'unicité suivant :

**Théorème 1.2.** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ; alors il existe une unique solution faible  $u \in H_{\Gamma_0}^1$  au problème de l'élasticité avec condition de Dirichlet-Neumann.*

*Démonstration.* Pour trouver la formulation faible du problème, on multiplie chaque équation dans le système (1.3) par une fonction test s'annulant sur la partie Dirichlet,  $\Gamma_0$ , du bord et ce pour prendre en compte la condition de Dirichlet ensuite on intègre par partie pour obtenir

$$\int_{\Omega} \mu \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div} u \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\Gamma - \Gamma_0} g_i v_i d\sigma(x).$$

On somme ces équations pour  $1 \leq i \leq 3$ , pour faire apparaître la divergence du champs  $v = (v_1, v_2, v_3)$  et simplifier la première intégrale du moment que

$$\sum_{i,j=1}^N \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 2\varepsilon(u) \cdot \varepsilon(v).$$

La formulation faible s'écrit alors :

trouver  $u \in V$  tel que pour tout  $v \in V$  on ait :

$$\int_{\Omega} 2\mu\varepsilon(u)\varepsilon(v) \, dx + \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma-\Gamma_0} g v \, d\sigma. \quad (1.5)$$

On vérifie bien que chaque terme dans cette expression à un sens à condition que la condition de compatibilité soit vérifiée. La démonstration de l'existence d'une solution est immédiate en utilisant notamment le lemme de Lax-Milgram ; le seul point délicat à montrer est la coercivité de la forme bilinéaire associée à la forme faible du problème. Il faut, par conséquent, invoquer l'inégalité de Korn qui permet de montrer cette coercivité.  $\square$

## Inégalité de Korn

On renvoie le lecteur à l'article de Ciarlet, cf. [44], pour les éléments présentés dans cette sous-section ainsi que pour davantage de références. On commence par énoncer un lemme de Lions

**Lemme 1.1.** *Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^N$ . Soit une distribution  $v \in \mathcal{D}'$  telle que  $\partial_i v \in H^{-1}(\Omega)$  pour  $1 \leq i \leq N$  alors  $v \in L^2(\Omega)$ .*

Ce lemme est fondamental pour la démonstration de l'inégalité de Korn qu'on énonce à présent. L'inégalité de Korn affirme qu'étant donné un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$ , il existe une constante  $c_k$  dépendant uniquement de  $\Omega$  telle que

$$\left( \sum_{i=1}^N \|v_i\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i,j=1}^N \|\partial_j v_i\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_k \left( \sum_{i=1}^N \|v_i\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i,j=1}^N \|\varepsilon(v)\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

pour tout champs vectoriel  $\mathbf{v} = (v_i)_{i=1}^N \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ , où

$$\varepsilon_{ij}(v) := \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j) \in L^2(\Omega), \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

L'inégalité de Korn est cruciale pour établir l'existence et le caractère unique de la solution à la formulation faible du problème aux limites de l'élasticité linéarisée, en le

sens où il est la clé qui permet de prouver la coercivité de la forme bilinéaire associée. L'inégalité de Korn fournit donc une limite supérieure pour les normes  $L^2(\Omega)$  de toutes les  $N^2$  dérivées partielles  $\partial_j v_i$  du champ vectoriel  $v = (v_i) \in H^1(\Omega, \mathbb{R})$  en termes des normes  $L^2(\Omega)$  de seulement  $\frac{N(N+1)}{2}$  des combinaisons linéaires particulières de ces dérivées partielles, à savoir les fonctions  $\varepsilon_{ij}(v)$ . La preuve dépend du résultat du lemme 1.1.

**Théorème 1.3.** (*Inégalité de Korn dans  $H^1(\Omega)$* ) Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^N$ , alors, il existe une constante  $c_k = c_k(\Omega)$  telle que

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \leq c_k \left( \|v\|_{0,\Omega}^2 + \|\varepsilon(v)\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega)$$

où

$$\varepsilon(v) := (\varepsilon_{ij}(v)) \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{ij}(v) := \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j), \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

*Démonstration.* La preuve peut être trouvée dans le chapitre 3 de [12] ainsi que dans [44].  $\square$

L'inégalité de Korn pour des fonctions  $u \in H_0^1(\Omega)$  est relativement facile à démontrer et la constante qui est associée est calculable du même coup.

**Proposition 1.1.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . Pour toute fonction  $v \in H_0^1(\Omega)^N$  on a :

$$\|\nabla v\|_{0,\Omega} \leq \sqrt{2} \|\varepsilon(v)\|_{L^2(\Omega)}.$$

*Démonstration.* Soit  $v \in H_0^1$ ,

$$\int_{\Omega} \|\varepsilon(u)\|^2 dx = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

On intègre par partie deux fois et on fait intervenir la condition de Dirichlet

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_i} u_j dx + \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j},$$

finalement on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|\varepsilon(u)\|^2 dx &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 + \left| \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right|^2 dx \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \end{aligned}$$

$\square$

On renvoie le lecteur vers [24] pour une preuve de la proposition suivante :

**Proposition 1.2.** La constante de l'inégalité de Korn,  $c_k$ , vaut  $\frac{1}{2}$  dans le cas où  $\Omega$  est le demi-espace  $\mathbb{R}^{N+}$

## Régularité de la solution faible

On renvoie le lecteur vers l'article [13] et les références qui y sont incluses pour les résultats rappelés dans cette section. Le problème de Lamé considéré dans ce travail est essentiellement étudié sur un domaine polygonal du plan. On désigne exclusivement dans cette section par  $\mathcal{D}$  resp.  $\mathcal{N}$  l'ensemble des arrêtes correspondant à la condition de Dirichlet resp. de Neumann. La donnée, terme source,  $f \in L^2(\Omega)$  et les conditions au bord sont de nature mixte, de type Dirichlet-Neumann. Cela signifie que sur une partie de la frontière, nous imposons une condition de Dirichlet homogène qui fixe le champ de déplacement et sur le reste de la frontière, nous imposons une condition aux limites de Neumann, dans le sens où la traction normale est fixé sur le reste du bord. Nous relevons le comportement singulier de la solution faible de ce système près des angles. Le comportement de la solution  $u$  du problème faible du système d'élasticité (1.5) dans un voisinage des sommets est bien connu, cf. Théorème 1 dans [46]. On définit l'espace  $V \subset H^1(\Omega)$

$$V := \{v \in H^1(\Omega) \quad v = 0 \text{ sur } \Gamma_d\}.$$

Ici,  $\Gamma_d$  désigne la partie Dirichlet du bord  $\partial\Omega$ .

**Théorème 1.4.** *Soit  $u \in V$  solution du problème (1.5) avec  $f \in (L^2(\Omega))^2$ ,  $g_k \in [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^2$  pour tout  $k \in \mathcal{N}$ . Fixons  $j, k \in \mathcal{N}$  tels que  $\Gamma_j \cap \Gamma_k \neq \emptyset$ . On désigne par  $s_i$  leur sommet commun et par  $\omega$  la mesure de l'angle qu'ils forment. Alors il existe des coefficients  $c_{\alpha, \tau}$  tels que*

$$u - \sum_{\alpha} \sum_{\tau=1}^{N(\alpha)} c_{\alpha, \tau} \sigma^{\alpha, \tau} \in [W^{2,p}(\mathcal{V})]^2$$

où  $\mathcal{V}$  est un voisinage de  $s_i$  et où la somme parcourt toutes les racine  $\alpha \in \mathbb{C}$  de l'équation

$$\sin^2 \alpha \omega = \alpha^2 \sin \omega \tag{1.6}$$

dans la bande  $\mathcal{R}(\alpha) \in ]0, 2 - \frac{2}{p}[$  où  $\mathcal{R}(\alpha)$  désigne la partie réelle du nombre complexe  $\alpha$ . On a désigné par  $N(\alpha)$  la multiplicité de  $\alpha$  dans l'équation (1.6) ( $N(\alpha) = 1$  ou  $2$ , cf. [13], ainsi que les références qui y sont citées). Enfin,  $\sigma^{\alpha, \tau}$  sont les fonctions singulières définies par (1.4) dans [46]. Ce résultat est valable pour tout  $p < 2$  tel que l'équation (1.6) n'a pas de racines sur la droite  $\mathcal{R}(\alpha) = 2 - \frac{2}{p}$ . Si  $j, k \in \mathcal{D}$ , ce résultat demeure valable si on remplace (1.6) par

$$\sin^2 \alpha \omega = \frac{(\lambda + \mu)^2}{(\lambda + 3\mu)} \alpha^2 \sin^2 \omega, \tag{1.7}$$

dans ce cas , les fonction singulières  $\sigma^{\alpha,\tau}$  sont définies dans le paragraphe 6.1 dans [46].

Si  $j \in \mathcal{D}, k \in \mathcal{N}$ , ce problème est toujours valable si on remplace encore (1.6) par

$$\sin^2 \alpha \omega = \frac{(\lambda + 2\mu)^2 - (\lambda + \mu)^2 \alpha^2 \sin^2 \omega}{(\lambda + \mu)(\lambda + 3\mu)} \quad (1.8)$$

dans ce cas, les fonctions singulières  $\sigma^{\alpha,\tau}$  sont définies au niveau du paragraphe 6.2 dans [46].

D'après le théorème 1.4, on peut obtenir une régularité maximale de  $u$  en démontrant qu'une bande  $\mathcal{R}(\alpha) \in ]0, 2 - \frac{2}{p}[$  ne contient pas les racines des équations (1.6), (1.7) et (1.8). Ceci fait l'objet du lemme suivant dont on peut trouver une démonstration dans [13].

**Lemme 1.2.** *Si  $\omega \in ]0, 2\pi[$  alors les équations (1.6) et (1.7) ne possèdent pas de racines dans la bande  $\mathcal{R}(\alpha) \in ]0, \frac{1}{2}]$ . Par ailleurs l'équation (1.8) ne possède pas de racines dans la même bande si  $\omega \in ]0, \pi[$ .*

Comme conséquence de ce lemme, l'auteur donne avec une démonstration dans le théorème 2.3 énoncé au bas de la page 330 de [13], le résultat de régularité suivant, qui est crucial quant aux démonstrations présentées dans le chapitre 3 de cette thèse :

**Théorème 1.5.** *Si  $\Omega$  satisfait l'hypothèse géométrique suivante :*

(H)  $\forall j, k \in \mathcal{F}$  tels que  $\Gamma_j \cap \Gamma_k \neq \emptyset$ , l'angle interne  $\omega$  formé par  $\Gamma_j$  et  $\Gamma_k$  satisfait  $\omega < 2\pi$ , de plus, si  $j \in \mathcal{D}$  et  $k \in \mathcal{N}$  alors  $\omega < \pi$ .

Alors la solution  $u$  du problème faible (1.5) avec  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_k)$  pour tout  $k \in \mathcal{N}$  vérifie

$$u \in H^{\frac{3}{2}+\iota}(\Omega) \quad \text{pour un certain } \iota > 0. \quad (1.9)$$

### 1.3 Classes de régularité du domaine géométrique

Un sous-espace ouvert connexe de l'espace euclidien est habituellement désigné par le terme "domaine". On distingue divers types de régularité pour les domaines, on rencontre deux cas en particulier dans cette thèse. Le premier type est celui de domaine Lipschitzien.

#### Domaines fortement Lipschitziens

Un domaine borné  $\Omega$  de l'espace Euclidien est dit Lipschitzien ou à frontière Lipschitzienne si sa frontière est suffisamment régulière en ce sens qu'elle peut être considérée

comme étant localement le graphe d'une fonction Lipschitzienne. Ces domaines sont appelés domaines fortement Lipschitz en contraste avec les domaines faiblement Lipschitziens, qui constituent une classe plus générale de domaines.

**Définition 1.2.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert connexe et désignons par  $\partial\Omega$  sa frontière. On dit que  $\Omega$  est Lipschitzien si pour tout point  $p \in \partial\Omega$  il existe un hyperplan  $H$  de dimension  $n - 1$  passant par  $p$ , une fonction Lipschitzienne  $g : H \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur cet hyperplan et des nombre réels  $r > 0$ ,  $h > 0$  tels que

$$\begin{aligned}\Omega \cap C &= \{x + y\vec{n} \mid x \in B_r(p) \cap H, -h < y < g(x)\}, \\ \partial\Omega \cap C &= \{x + y\vec{n} \mid x \in B_r(p) \cap H, g(x) = y\}\end{aligned}$$

où l'on a désigné par  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal à  $H$  et

$$\begin{aligned}B_r(p) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - p\| < r\}, \\ C &:= \{x + y\vec{n} \mid x \in B_r(p) \cap H, -h < y < h\}.\end{aligned}$$

Cette définition implique, en particulier, que le domaine  $\Omega$  est situé d'un seul coté de son bord.

### Domaines faiblement Lipschitziens

Un domaine faiblement Lipschitzien est un domaine dont la frontière peut être, au moyen d'une transformation, localement aplatie par un Lipschitzeomorphisme i.e une application Lipschitzienne inversible et dont l'application inverse est Lipschitzienne. Le domaine  $\Omega$  est dit faiblement Lipschitzien si pour tout point  $p \in \partial\Omega$ , il existe un rayon  $r > 0$  et une application  $l_p : B_r(p) \rightarrow \mathcal{Q}$  tel que

$$\begin{aligned}l_p &\text{ est une bijection,} \\ l_p \text{ et } l_p^{-1} &\text{ sont des fonctions lipschitziennes,} \\ l_p(\partial\Omega \cap B_r(p)) &= \mathcal{Q}_0, \\ l_p(\Omega \cap B_r(p)) &= \mathcal{Q}_+\end{aligned}$$

où l'on a désigné par  $\mathcal{Q}$  la boule unité  $B_1(0)$  de  $\mathbb{R}^n$  et

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_0 &:= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{Q} \mid x_n = 0\}, \\ \mathcal{Q}_+ &:= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{Q} \mid x_n > 0\}.\end{aligned}$$

## Domaines de Jordan

Les courbes de Jordan qui sont des courbes très générales, à l'aides desquelles sont définies les domaines de Jordan et qui interviennent au chapitre 2 de cette thèse, sont définies comme suit :

**Définition 1.3.** Une courbe fermée simple continue, ou courbe de Jordan, dans un espace topologique  $X$  est l'image d'une injection continue vers  $X$  à partir du cercle unitaire  $S^1$ .

$$\begin{aligned} \gamma : S^1 = \partial B_1 &\rightarrow X \\ t &\rightarrow \gamma(t), \quad \gamma \in C^0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

(Cette application est elle-même une paramétrisation continue de la courbe.)

Le terme "continue" est généralement supposé de sorte que l'on parle simplement d'une courbe fermée simple. Si le terme "fermée" est supprimé, alors le domaine de départ est considéré comme étant l'intervalle unitaire au lieu de  $S^1$ . Si le mot "simple" est supprimé, l'application n'est plus considérée comme injective.

Un domaine de Jordan est un ouvert connexe borné ayant pour frontière une courbe de Jordan. Autrement dit, un domaine de Jordan est homéomorphe à la boule unité. Les courbes de Jordan sont célèbres pour être l'objet du théorème de la courbe de Jordan qui stipule qu'une courbe de Jordan divise le plan en deux composantes connexes ; c'est un énoncé d'apparence élémentaire mais dont la démonstration utilise des outils élaborés de la topologie algébrique.

La nature d'une courbe de Jordan est telle qu'elle embrasse une très grande variété de formes de courbe et de domaine qu'elle entoure naturellement. Pour se rendre bien compte de cette diversité, il faut considérer la notion de dimension fractionnaire qui met en évidence des situations intermédiaires entre courbe au sens commun, c'est à dire de dimension euclidienne égale 1, et des surface de dimension euclidienne égale 2. La notion de mesure qui est à même de caractériser cette diversité est celle de Hausdorff. L'un des exemples les plus célèbres de courbe de Jordan de dimension fractionnaire est celui de fractal.

Par ailleurs, le fait que la validité des résultats d'injections de Sobolev est restreinte aux domaines faiblement Lipschitziens, et a fortiori aux domaines Lipschitziens, est étroitement lié aux outils utilisés dans la démonstration de ces résultats ; parmi ces outils, figure le théorème d'extension de Sobolev qui, à cet effet, peut bien être appliqué étant donné qu'un domaine Lipschitzien possède la propriété de  $(1, p)$ -extension. Bien que cela n'entraîne

guère l'impossibilité que les théorèmes d'injections puissent être vrai pour un domaine de Jordan, la démonstration d'un tel résultat devrait inévitablement passer par un autre moyen que celui de l'idée d'extension. Ceci est dû au fait qu'étant donné la définition (1.3), la courbe de Jordan, qui est l'image de l'homéomorphisme  $\gamma$ , n'hérite pas de régularité en dérivée qui est très caractéristique de la boule unité dont le bord est  $C^1$ , cette information, en particulier celle de lipschitzieneté, peut se perdre quand on passe à une image par une transformation qui est seulement continue.

## 1.4 Espaces de Sobolev d'ordres fractionnaires

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , de régularité Lipschitzienne. Pour tout réel  $0 < s < 1$  et pour tout  $p \in [1, \infty[$ , on définit l'espace de Sobolev fractionnaire

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{n}{p} + s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}. \quad (1.11)$$

C'est un espace de Banach intermédiaire entre  $L^p(\Omega)$  et  $W^{1,p}(\Omega)$  muni de la norme

$$\|u\|_{W^{s,p}} := \left( \int_{\Omega} |u|^p dx + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.12)$$

Il est bien connu, cf. ([19], théorème 8.2), que

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \quad (1.13)$$

i.e. l'espace de Sobolev fractionnaire s'injecte continument dans l'espace des fonctions  $\alpha$ -Holderienne,  $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ , avec  $\alpha := \frac{(sp-n)}{p}$  et  $sp > n$ . On peut montrer que cette injection est valable dans le cas  $sp = n$  i.e.  $\alpha = 0$ . C'est à dire on montre

**Proposition 1.3.** *Soient  $0 < s < 1$  et  $p$  tels que  $sp = n$ . L'injection  $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega)$  est continue. i.e. il existe  $C_0 > 0$  telle que*

$$\|u\|_{C^0(\Omega)} \leq C_0 \left( \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.14)$$

pour tout  $u \in W^{s,p}(\Omega)$ .

*Démonstration.* Pour simplifier la présentation, on suppose que  $\Omega$  est la frontière de la surface délimitée par le carré  $[0, 1] \times [0, 1]$ . La démonstration est simple et se fait par l'absurde. Supposons qu'il existe une fonction  $u \in W^{s,p}(\Omega)$  qui n'est pas continue, disons

en le point  $(0, 0)$  i.e. il existe  $\epsilon_0 > 0$  telle que pour  $\delta > 0$  arbitrairement petit on ait,  $|x - (0, 0)| < \delta$  et  $|u(x) - u(0, 0)| > \epsilon_0$ .

Par ailleurs, l'intégrale double dans (1.14) existe et donc, par le théorème de Fubini, l'intégrale partielle par rapport à la variable  $x$  existe et l'on a

$$\int_0^1 \frac{|u(x) - u((0, 0))|^p}{|x - (0, 0)|^{n+sp}} dx > \epsilon_0 \int_0^1 \frac{1}{|x|^2} dx > +\infty.$$

Il découle de la relation de Chasles que l'intégrale double n'existe pas et contredit donc l'hypothèse, d'où la continuité de  $u$ . □

**Remarque 1.1.** On rappelle que l'ensemble des fonctions régulières jusqu'au bord,  $C^\infty(\bar{\Omega})$ , est dense dans  $W^{s,p}(\Omega)$  lorsque le domaine  $\Omega$  possède la propriété d'extension, cf. [45]; les domaines polyédriques, rencontrés par exemple au chapitre 3 ci-dessous, en sont un exemple des plus importants.

On rappelle aussi un résultat de densité démontré dans ([27], p.261); ce résultat est valable dans le cas où  $\Omega$  est un domaine Lipschitzien ou plus généralement de Jordan :

**Théorème 1.6.** *Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est un domaine ayant pour frontière une courbe de Jordan alors  $C^\infty(\bar{\Omega})$  est dense dans  $W^{1,p}(\Omega)$  pour  $1 < p < \infty$ .*

On clôt cette sections en rappelant la caractérisation de l'espace image de  $W^{1,p}(\Omega)$  par l'opérateur de trace quand  $\Omega$  est un domaine Lipschitzien, plus précisément on a :

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega),$$

autrement dit, l'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  s'injecte continument dans  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$  via l'opérateur linéaire et continu de trace sur  $\Gamma = \partial\Omega$ , cf. [2].

## 1.5 Théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle

Pour commencer, on ne peut ne pas rappeler le lemme topologique fondamental qui est à l'origine des théorèmes fondamentaux largement utilisés dans ce manuscrit et dans l'analyse fonctionnelle moderne, à savoir le lemme de Baire. Pour cela on définit d'abord ce qu'est un espace de Baire :

**Définition 1.4.** On dit qu'un espace topologique est un espace de Baire si toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. De façon équivalente, un espace topologique est de Baire si toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide.

Le lemme de Baire donne quant à lui des conditions suffisantes pour que certains espaces soient de Baire, dont voici l'énoncé :

**Théorème 1.7.** 1) *Tout espace topologique localement compact est un espace de Baire. Par conséquent : un espace localement compact non vide n'est pas la réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.*

2) *Tout ouvert d'un espace de Baire est de Baire.*

3) *Tout espace métrique complet est un espace de Baire.*

La matière présentée dans ce travail repose entre autres sur deux théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle et dont on fera essentiellement usage. On pourra se référer à [47] pour une discussion ainsi qu'une démonstration de ces résultats classiques.

### Théorème de Banach Steinhaus

**Théorème 1.8.** *Soit  $E$  un espace de Banach et  $F$  un espace normé. Soit  $(T_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \mathcal{L}(E, F)$  ( $I$ , non nécessairement dénombrable) une suite d'applications linéaires continues. On suppose que :*

$$\forall x \in E, \exists M_x < \infty \quad \text{tel que} \quad \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \leq M_x,$$

alors

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\| < \infty,$$

autrement dit, il existe  $M > 0$  tel que  $\forall x \in E, \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \leq M \|x\|$ .

### Théorème de l'application ouverte

**Théorème 1.9.** *Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  une application linéaire continue et surjective alors  $T$  est une application ouverte, c'est à dire : pour tout ouvert  $\mathcal{O}$  de  $E$ ,  $T(\mathcal{O})$  est un ouvert de  $F$ .*

### Théorème d'isomorphisme de Banach

Le théorème (1.9) a pour conséquence :

**Théorème 1.10.** *Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  bijective alors,  $T^{-1} \in \mathcal{L}(E, F)$ . autrement dit, si  $T$  est linéaire continue et bijective alors son inverse  $T^{-1}$  est continue.*

*"Il n'existe pas de problèmes résolus en mathématiques,  
il y a seulement des problèmes mieux compris  
au fur et à mesure qu'on réfléchit."*

-H. Poincaré

## Chapitre 2

# Résultats de trace sur des ouverts non-Lipschitziens

L'opérateur de trace, lorsqu'il est appliqué aux fonctions de l'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  définies sur un domaine  $\Omega$  ayant une frontière Lipschitzienne, est une notion standard dans la théorie des espaces de Sobolev. Les résultats autour de cet opérateur qui sont démontrés dans ce chapitre généralisent ceux classiquement connus au cas de domaines non-Lipschitziens.

On traite de la question de trace en deux temps distincts. Dans un premier temps, on donne une nouvelle démonstration de l'existence et de la continuité de l'opérateur de trace sur l'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  défini sur un domaine,  $\Omega$ , possédant une régularité intermédiaire entre Lipschitzien et Jordan : c'est la classe des domaines qui admettent la propriété de  $(1, p)$ -extension et qu'on appelle communément les domaines d'extension. Les fonctions de l'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  définies sur un tel domaine constituent une classe pertinente de fonctions dans le sens suivant : il existe des domaines dont la frontière est paramétrée par une fonction continue et non-Lipschitziennes et qui admettent la propriété de  $(1, p)$ -extension. La preuve que nous présentons dans le cadre des domaines d'extension s'appuie sur des idées différentes de la preuve habituelle et exploite totalement l'hypothèse d'extensibilité du domaine.

Dans un second temps, on démontre un résultat de trace dans le cas où  $\Omega$  est un domaine de Jordan arbitraire. C'est aussi une classe très pertinente de domaines, ne serait ce que par le fait qu'il existe des domaines dont la frontière est paramétrée par une fonction continue et ne jouissant pas de la propriété d'extension. Aussi, il n'est bien-sûr pas possible d'appliquer le théorème de trace habituel qui exige la régularité minimale :  $\Omega$  Lipschitzien, ou à la limite faiblement Lipschitzien.

Par ailleurs, il est à noter que les considérations qui sont observées dans ce chapitre sont

intéressantes pour la simple raison pratique suivante : la surface d'une structure déformable, qui est l'objet d'application principale de cette thèse, n'est jamais absolument lisse, c'est tout le contraire. Cela laisse penser que la non régularité à la surface de la structure est telle qu'on peut l'identifier à un ensemble s'apparentant à un fractal. Ce qui suggère de considérer des fonctions intégrables sur des domaines de Jordan. Les espaces de Sobolev étant l'espace naturel pour l'étude d'une EDP, l'une des principales questions soulevées par ce type de considérations, pour une fonction de cet espace, est de pouvoir définir un opérateur de trace ainsi que son éventuel caractère continu.

D'abord on commence par introduire quelques notions préliminaires ainsi que les outils et résultats indispensables pour mener à bien la preuve des deux résultats principaux de ce chapitre à savoir : l'établissement d'un théorème de trace pour des fonctions de l'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$ , d'abord dans le cas où  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est un domaine borné et possédant la propriété de  $(1,p)$ -extension, ensuite dans le cas où  $\Omega$  est un domaine de Jordan borné.

## 2.1 Trace sur un domaine d'extension pour $W^{1,p}(\Omega)$

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un domaine possédant la propriété de  $(1,p)$ -extension. Dans toute cette section,  $p$  désignera un nombre réel tel que  $1 < p < \infty$ . On note  $\text{diam } \Omega$  le diamètre de  $\Omega$ .

On note  $W^{1,p}(\Omega)$  l'espace de Sobolev défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \quad \nabla u \in L^p(\Omega)\}.$$

Nous nous proposons de montrer qu'un opérateur de trace peut être défini lorsque le domaine possède seulement la propriété de  $(1,p)$ -extension.

La propriété de  $(1,p)$ -extension d'un domaine  $\Omega$  signifie qu'un opérateur d'extension de Sobolev peut être défini sur  $W^{1,p}(\Omega)$ , le lecteur pourra se référer à [29] pour une discussion détaillée de cette classe de domaines. On rappelle qu'un domaine Lipschitzien est un domaine d'extension, l'inverse n'étant pas vrai.

Il est classiquement établi, cf. Théorème 1.6, que l'ensemble des fonctions régulières jusqu'au bord,  $C^\infty(\overline{\Omega})$ , est dense dans  $W^{1,p}(\Omega)$ . Nous établissons, en utilisant principalement ce fait de densité, un théorème de trace pour les fonctions de l'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  sur le bord du domaine  $\Omega$ . C'est-à-dire que nous prouvons qu'une trace de cette fonction existe et que l'opérateur de trace ainsi défini est continu.

**Définition 2.1.** On dit qu'un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est un domaine d'extension ou possède la propriété de  $(1, p)$ -extension s'il existe un opérateur linéaire  $P$  défini par

$$\begin{aligned} P : W^{1,p}(\Omega) &\rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^2) \\ u &\rightarrow \tilde{u} = Pu. \end{aligned}$$

tel que  $P$  soit continu i.e. il existe  $c_{ext} > 0$  tel que  $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$  on ait

$$\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^2)} \leq c_{ext} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad (2.1)$$

et  $(Pu)(x) = u(x)$  presque partout dans  $\Omega$ .

On rappelle la propriété de continuité de l'opérateur de trace sur la frontière Lipschitzienne (ou faiblement Lipschitzienne) du domaine  $D \subset \mathbb{R}^2$  défini sur l'espace de Sobolev  $W^{1,p}(D)$ , cf. [2] et sous-section 1.4 :

**Proposition 2.1.** *Soit  $D \subset \mathbb{R}^2$  un domaine Lipschitzien. Il existe une constante  $C_D > 0$ , dépendant du domaine  $D$ , telle que pour tout  $u \in W^{1,p}(D)$  on ait*

$$\|u\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} \leq C_D \|u\|_{W^{1,p}(D)}, \quad (2.2)$$

Il est à noter que la proposition 2.1 ne s'applique pas en principe ni à un domaine d'extension en général et encore moins à un domaine de Jordan  $\Omega$  compte tenu de l'hypothèse, primordiale, du caractère Lipschitzien du domaine ambiant  $D$ .

On rappelle aussi un résultat de trace pour les fonctions de l'espace de Sobolev  $W^{1,1}(D_r)$  avec  $D_r \subset \mathbb{R}^2$  étant un disque de rayon  $r$ , (cf. [36], estimation 7.1) :

**Proposition 2.2.** *Pour tout  $u \in W^{1,1}(D_r)$  on a*

$$\int_{\partial D_r} |u| d\sigma \leq \frac{2}{r} \int_{D_r} |u| dx + \int_{D_r} |\nabla u| dx. \quad (2.3)$$

Par ailleurs, on rappelle la représentation intégrale d'une fonction  $u \in C^2(D) \cap C^0(\partial D)$  où  $D \subset \mathbb{R}^2$  est un disque dont on note  $r_0$  le rayon, cette représentation s'écrit, cf. [37] :

$$u(x) = \int_D \Delta u(y) G(x, y) dy + \int_{\partial D} u(y) K(x, y) d\sigma(y), \quad (2.4)$$

où  $G$  est la fonction de Green du disque,  $D$ , associée à l'opérateur de Laplace et définie par :

$$G(x, y) := \Gamma(x - y) + h_x(y),$$

avec  $\Gamma(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|$  étant la solution fondamentale du Laplacien en dimension deux et  $h_x$  est la fonction harmonique en  $y$  et valant  $-\Gamma(x - y)$  pour  $x \in \text{Int}(D)$  et  $y \in \partial D$ . D'un autre côté  $K(x, y) = \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_y}$  est le noyau de Poisson qui dans le cas du disque s'écrit :

$$K(x, y) = \frac{r_0^2 - |x|^2}{2\omega_2 r_0 |x - y|^2},$$

où  $\omega_2$  est la mesure de la boule unité en deux dimensions. Cette représentation intégrale est intéressante dans la mesure où elle permet d'exprimer ponctuellement une fonction à l'aide de son Laplacien et des valeurs qu'elle prend sur le bord du disque  $D$ .

Le principal résultat de cette section est énoncé dans le théorème suivant, sa démonstration sera donnée après avoir énoncé un lemme auxiliaire.

**Théorème 2.1.** *Soit  $\Omega$  un domaine possédant la propriété de  $(1, p)$ -extension et  $p$  tel que  $1 < p < \infty$ . Alors, on peut définir un opérateur de trace*

$$\begin{aligned} T : W^{1,p}(\Omega) &\rightarrow L^p(\partial\Omega) \\ u &\rightarrow Tu \end{aligned}$$

qui coïncide avec l'opérateur de restriction au bord  $\partial\Omega$  pour les fonctions continues. En outre,  $T$  est continu i.e. il existe une constante  $c_t > 0$  indépendante de  $u$  telle que pour tout  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  on ait

$$\|Tu\|_{p,\partial\Omega} \leq c_t \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad (2.5)$$

où nous avons noté  $\|\cdot\|_{p,\partial\Omega}$  la norme usuelle de l'espace de Lebesgue  $L^p$ .

On a également besoin, pour démontrer le théorème 2.1, du lemme suivant :

**Lemme 2.1.** *Soit  $1 < p < 2$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  un point fixé. Soit  $D_{r_0} := D(x_0, r_0) \subset \mathbb{R}^2$  le disque de centre  $x_0$  et de rayon  $r_0 > 0$ . Il existe une constante  $c(r_0, p) > 0$  indépendante de  $u$  et de  $x$  telle que pour tout  $u \in C^\infty(\overline{D_{r_0}})$*

$$\forall x \in D_{\frac{r_0}{2}}, \quad |u(x)| \leq c(r_0, p) \|u\|_{W^{1,p}(D_{r_0})}. \quad (2.6)$$

On note  $|x - y|_2$  pour désigner la distance euclidienne entre les points  $x$  et  $y$ .

*Démonstration.* Soit  $u \in C^\infty(\overline{D_{r_0}})$ . Il existe  $f \in C^\infty(D_{r_0})$  et  $u^d \in C^\infty(\partial D_{r_0})$  tels que la fonction  $u$  soit solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u(y) &= f(y) & \text{dans } D_{r_0}, \\ u(y) &= u^d(y) & \text{sur } \partial D_{r_0}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Soit  $x \in D_{\frac{r_0}{2}}$ . En utilisant la représentation intégrale, (2.4), appliquée à la fonction  $u$  en  $x$  sur le disque  $D_{r_0}$ , on a :

$$u(x) = \int_{D_{r_0}} f(y)G(x, y) \, dy + \int_{\partial D_{r_0}} u^d(y)K(x, y) \, d\sigma(y). \quad (2.8)$$

Étant donné que  $\partial D_{r_0}$  est de classe  $C^\infty$ , alors on sait que la fonction de Green satisfait  $G(x, \cdot) \in W^{1,p}(D_{r_0})$  pour  $1 < p < 2$ , cf. [62]. En utilisant la propriété de continuité de la forme linéaire associée à  $f \in W^{-1,p}(\Omega)$ , on obtient à partir de l'estimation (2.8) ce qui suit

$$|u(x)| \leq \|f\|_{W^{-1,p}(D_{r_0})} \|G(x, \cdot)\|_{W^{1,p}(D_{r_0})} + \max_{y \in \partial D_{r_0}} |K(x, y)| \int_{\partial D_{r_0}} |u^d(y)| \, d\sigma(y).$$

Cette estimation a bien un sens du moment que  $|x - y|_2 > \frac{r_0}{2}$  pour  $x \in D_{\frac{r_0}{2}}$  et  $y \in \partial D_{r_0}$ .

En appliquant l'inégalité de trace sur le bord du disque, cf. estimation (2.3), on obtient

$$|u(x)| \leq \|f\|_{W^{-1,p}(D_{r_0})} \|G(x, \cdot)\|_{W^{1,p}(D_{r_0})} + \max_{y \in \partial D_{r_0}} |K(x, y)| \left( \frac{2}{r_0} \|u\|_{L^1(D_{r_0})} + \|\nabla u\|_{L^1(D_{r_0})} \right),$$

l'inégalité de Hölder donne alors

$$|u(x)| \leq \|f\|_{W^{-1,p}(D_{r_0})} \|G(x, \cdot)\|_{W^{1,p}(D_{r_0})} + \max_{y \in \partial D_{r_0}} |K(x, y)| c_{r_0} (\|u\|_{p, D_{r_0}} + \|\nabla u\|_{p, D_{r_0}}).$$

On applique le théorème d'isomorphisme de Banach, cf. théorème 1.10, à l'opérateur bijectif et continu  $L_1$  défini par

$$\begin{aligned} L_1 : (W^{-1,p}(D_{r_0}), \| \cdot \|_{W^{-1,p}(D_{r_0})}) &\rightarrow (W_0^{1,p}(D_{r_0}), \| \cdot \|_{W^{1,p}(D_{r_0})}) \\ f &\rightarrow L(f) = u_1, \end{aligned}$$

avec  $\Delta u_1 = f$ . On déduit alors l'existence d'une constante  $c'_1$  telle que

$$|u(x)| \leq c'_1 \|u_1\|_{W_0^{1,p}(D_{r_0})} \|G(x, \cdot)\|_{W^{1,p}(D_{r_0})} + \max_{y \in \partial D_{r_0}} |K(x, y)| c_{r_0} \|u\|_{W^{1,p}(D_{r_0})} \quad (2.9)$$

avec  $u_1 = u - u_2$  et  $u_2$  est solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_2 = 0 & \text{sur } D_{r_0}, \\ u_2 = u & \text{sur } \partial D_{r_0}. \end{cases}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, l'estimation (2.9) devient alors

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq c_1 (\|\nabla u\|_{p, D_{r_0}} + \|\nabla u_2\|_{p, D_{r_0}}) \|G(x, \cdot)\|_{W^{1,p}(D_{r_0})} \\ &\quad + \max_{y \in \partial D_{r_0}} |K(x, y)| c_{r_0} \|u\|_{W^{1,p}(D_{r_0})}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

En utilisant le résultat de la proposition 2.1, on peut appliquer le théorème d'isomorphisme, voir à cet effet les idées exposées dans le point a) de la démonstration du Lemme 3.2 chap.3, pour s'assurer de l'existence d'une constante  $c_2$  telle que

$$\|\nabla u_2\|_{p,D_{r_0}} \leq c_2 \|u\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial D_{r_0})}.$$

L'estimation (2.10) devient

$$\begin{aligned} |u(x)| \leq & c_1 \left( \|\nabla u\|_{p,D_{r_0}} + c_2 \|u\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial D_{r_0})} \right) \|G(x, \cdot)\|_{W^{1,p}(D_{r_0})} \\ & + \max_{y \in \partial D_{r_0}} |K(x, y)|_{c_{r_0}} (\|u\|_{p,D_{r_0}} + \|\nabla u\|_{p,D_{r_0}}). \end{aligned}$$

L'application du théorème de trace sur  $W^{1,p}(D_{r_0})$ , cf. proposition 2.1, permet de déduire qu'il existe une constante  $c_3$  telle que

$$\begin{aligned} |u(x)| \leq & c_1 (\|\nabla u\|_{p,D_{r_0}} + c_3 (\|u\|_{p,D_{r_0}} + \|\nabla u\|_{p,D_{r_0}})) \|G(x, \cdot)\|_{W^{1,p}(D_{r_0})} \\ & + \max_{y \in \partial D_{r_0}} |K(x, y)|_{c_{r_0}} \|u\|_{W^{1,p}(D_{r_0})}, \end{aligned}$$

alors on remarque facilement qu'il existe une constante  $c(r_0, p)$  qui est indépendante de  $u$  et de  $x$  telle que

$$\forall x \in D_{\frac{r_0}{2}}, \quad |u(x)| \leq c(r_0, p) \|u\|_{W^{1,p}(D_{r_0})}.$$

Cette dernière estimation est obtenue en utilisant le fait que  $\|G(x, \cdot)\|_{W^{1,p}(D_{r_0})}$  est uniformément borné en  $x \in D_{\frac{r_0}{2}}$   $\square$

### 2.1.1 Preuve du Théorème 2.1

*Démonstration.* On note  $\text{int}(\Omega)$  l'intérieur de  $\Omega$ . Soit  $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ . La fonction  $u$  est Lipschitzienne sur  $\overline{\Omega}$ . Si on note  $L$  la constante de Lipschitz de la fonction  $x \rightarrow u(x)$  relativement au domaine  $\Omega$ , alors pour tout  $x \in \partial\Omega$  et tout  $y \in \text{int}(\Omega)$  nous avons

$$|u(x) - u(y)| \leq L|x - y|_2,$$

ce qui implique immédiatement

$$|u(x)| \leq L|x - y|_2 + |u(y)|, \tag{2.11}$$

pour tout  $x \in \partial\Omega$  et tout  $y \in \text{int}(\Omega)$ . Fixons  $x \in \partial\Omega$ . Soit  $(y_\delta)_{\delta>0}$  une suite de points à l'intérieur du domaine  $\Omega$ ,  $y_\delta \in \text{int}(\Omega)$ , tels que  $|y_\delta - x|_2 \rightarrow 0$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$ . Fixons  $\delta > 0$ , l'estimation (2.11) donne

$$|u(x)| \leq L|x - y_\delta|_2 + |u(y_\delta)|, \quad (2.12)$$

pour tout  $\delta > 0$ . On note  $\tilde{u} = P u$  avec  $P$  étant l'opérateur d'extension défini sur  $W^{1,p}(\Omega)$  à valeurs dans  $W^{1,p}(\mathbb{R}^2) \subset W^{1,p}(\Omega)$ , cf. Définition 2.1. Du moment que  $\Omega$  possède la propriété de  $(1, p)$ -extension, un tel opérateur d'extension est bien défini.

Il faut bien noter que la fonction  $\tilde{u}$  n'est pas nécessairement continue à l'extérieur de  $\Omega$ , c'est-à-dire qu'elle ne possède pas de fonction représentative continue. En effet, ceci est dû au fait que  $1 - \frac{2}{p} < 0$  pour  $1 < p < 2$ ; donc l'injection classique des espaces de Sobolev dans les espaces de Hölder ne peut pas être appliquée dans le cas qui nous concerne.

Comme  $\Omega$  est borné, il existe  $r_0 > 0$  et  $x_0 \in \Omega$  tels que le disque  $D_{r_0}$  de centre  $x_0$  et de rayon  $r_0$  contient  $\Omega$  comme sous ensemble propre. L'ensemble des fonctions régulières jusqu'au bord,  $C^\infty(\overline{D_{2r_0}})$ , définies sur le domaine lipschitzien  $D_{2r_0} \subset \mathbb{R}^2$  étant dense dans  $W^{1,p}(D_{2r_0})$ , par conséquent il existe une suite  $(v_n)_n$ ,  $v_n \in C^\infty(\overline{D_{2r_0}})$ , telle que

$$\|v_n - \tilde{u}\|_{W^{1,p}(D_{2r_0})} \rightarrow 0. \quad (2.13)$$

L'estimation (2.13) implique qu'il existe une sous-suite  $(\phi(n))_n$ , telle que  $v_{\phi(n)}(x) \rightarrow \tilde{u}(x)$  p.p. dans  $D_{2r_0}$ . Comme  $v_n$  et  $\tilde{u}$  sont continues dans  $\Omega$ , cette convergence simple est valable partout dans  $\Omega$  i.e.

$$\forall y \in \Omega, \quad v_{\phi(n)}(y) \rightarrow \tilde{u}(y), \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (2.14)$$

En utilisant (2.12) et (2.14) on obtient :  $\forall \delta > 0$  et  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists n(\epsilon, y_\delta) > 0$  tel que

$$|u(x)| \leq L|x - y_\delta|_2 + |v_{\phi(n(\epsilon, y_\delta))}(y_\delta)| + \epsilon, \quad (2.15)$$

où  $\epsilon > 0$  est destiné à tendre vers zero et  $(n(\epsilon, y_\delta))_{\epsilon>0}$  est une suite d'entiers qui tend vers  $+\infty$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  et ce pour tout  $\delta > 0$ . D'autre part, la formule (2.15) et la régularité de  $v_{\phi(n(\epsilon, y_\delta))}$  permettent d'écrire

$$|u(x)| \leq L|x - y_\delta|_2 + |v_{\phi(n(\epsilon, y_\delta))}|_{\infty, \overline{D_{r_0}}} + \epsilon,$$

pour tout  $\delta > 0$ . En appliquant le lemme 2.1, dans le disque  $D_{2r_0}$  de centre  $x_0$ , on a

$$|u(x)| \leq L|x - y_\delta|_2 + c(r_0, p) \|v_{\phi(n(\epsilon, y_\delta))}\|_{W^{1,p}(D_{2r_0})} + \epsilon \quad (2.16)$$

où  $c(r_0, p)$  est la constante qui apparait dans l'estimation (2.6). L'estimation (2.16) est valable, indépendamment de  $\delta$ , pour tout  $\epsilon > 0$ . Ainsi, en passant à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  et en utilisant (2.13), on obtient

$$|u(x)| \leq L|x - y_\delta|_2 + c(r_0, p) \|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(D_{2r_0})}, \quad (2.17)$$

pour tout  $\delta > 0$ . Étant donné que tous les éléments constituant l'estimation (2.17) sont indépendants de  $\delta$  alors en faisant tendre  $\delta \rightarrow 0$  on trouve

$$|u(x)| \leq c(r_0, p) \|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(D_{2r_0})}. \quad (2.18)$$

Donc l'estimation (2.18) donne

$$|u(x)| \leq c(r_0, p) \|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^2)}. \quad (2.19)$$

En utilisant (2.1), l'estimation (2.19) donne à son tour

$$|u(x)| \leq c(r_0, p) c_{ext} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \quad (2.20)$$

Noter bien que l'estimation (2.20) est valide pour tout  $x \in \Gamma$  indépendamment des quantités présentes dans le membre de droite de cette inégalité.

À présent, on note  $t \in [a, b] \rightarrow x(t) = (t, \phi(t))$  la fonction qui représente paramétriquement la courbe  $\Gamma$ . Ainsi, d'après (2.20), nous avons :

$$|u(t, \phi(t))|^p \leq (c(r_0, p) c_{ext})^p \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p, \quad (2.21)$$

pour tout  $t \in [a, b]$ . Par définition de l'intégrale curviligne, on peut écrire

$$\int_{\Gamma} |u|^p ds = \int_a^b |u \circ \phi|^p ds_\phi.$$

Ainsi, en intégrant les deux côtés de (2.21) par rapport à l'abscisse curviligne  $\phi$ , on trouve

$$\int_{\Gamma} |u|^p ds \leq (c(r_0, p) c_{ext})^p \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p \int_a^b 1 ds_\phi,$$

ce qui donne

$$\int_{\partial\Omega} |u|^p ds \leq (c(r_0, p) c_{ext})^p \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p |\partial\Omega|. \quad (2.22)$$

On pose  $c_t := [(c(r_0, p)c_{ext})^p |\partial\Omega|]^{\frac{1}{p}}$ , la constante  $c_t$  ne dépend pas de  $u$  mais seulement de  $\Omega$  et de l'exposant  $p$ . A partir de (2.22), nous avons pour tout  $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$

$$\|u\|_{p, \partial\Omega} \leq c_t \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \quad (2.23)$$

Présentement, on conclut l'estimation (2.5). D'après le théorème 1.6, pour tout  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  il existe  $(u_l)_{l \in \mathbb{N}}$ ,  $u_l \in C^\infty(\overline{\Omega})$ , tel que

$$\|u_l - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Ainsi, en appliquant (2.23) aux éléments de la suite  $(u_l)_l$ , nous avons pour tout  $l \in \mathbb{N}$  l'estimation suivante :

$$\|u_l\|_{p, \partial\Omega} \leq c_t \|u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \quad (2.24)$$

Comme  $(u_l)_l$  est une suite de Cauchy dans l'espace normé  $W^{1,p}(\Omega)$  alors l'estimation (2.24) implique que c'est aussi une suite de Cauchy dans l'espace normé  $L^p(\partial\Omega)$ . Mais  $L^p(\partial\Omega)$  est complet, alors il existe  $u^* \in L^p(\partial\Omega)$  tel que

$$\|u^*\|_{p, \partial\Omega} \leq c_t \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Finalement, on pose  $Tu := u^*$ , nous avons

$$\|Tu\|_{p, \partial\Omega} \leq c_t \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

pour tout  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ . Ce qui définit bien un opérateur de trace continu sur l'espace  $L^p(\partial\Omega)$  défini à son tour sur le bord  $\partial\Omega$

$$T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$$

$$u \rightarrow Tu$$

□

**Remarque 2.1.** La pertinence du résultat qu'on vient de démontrer réside dans le fait qu'il est vrai pour des fonctions de l'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  qui ne sont pas nécessairement continues pour  $1 < p < 2$  et donc l'existence même de la trace n'est pas évidente. Par ailleurs, Mazya'a a construit, cf. [29], un exemple de domaine de Jordan,  $\Omega$ , tel que la frontière  $\partial\Omega$  n'est pas Lipschitzienne au voisinage d'au moins un de ses points et que la propriété de  $(1, p)$ -extension n'est valide que pour  $p < 2$ . Ceci illustre parfaitement non seulement la pertinence mais aussi la généralité qui résulte du fait qu'on ait considéré le domaine  $\Omega$  possédant seulement la propriété de  $(1, p)$ -extension.

Dans la section suivante, il sera question d'étudier le théorème de trace i.e. l'existence et la continuité de l'opérateur de trace défini sur  $W^{1,p}(\Omega)$  avec  $\Omega$  un domaine de Jordan, c'est à dire un domaine ayant pour frontière une courbe de Jordan. Pour parvenir à cet objectif, on doit définir l'intégrale curviligne par rapport à la mesure de Hausdorff sur le bord d'un domaine ayant une mesure de Hausdorff finie. Ce qui nous amène à nous mettre sous le point de vue de la théorie de la mesure de Hausdorff,  $\mathcal{H}^s(\Gamma)$ , avec  $1 < s < 2$  étant la dimension de Hausdorff de la courbe de Jordan  $\partial\Omega$  considéré. Donc l'intégrale intervenant dans la définition de la norme  $\|u\|_{p,\partial\Omega}$  sera comprise au sens de l'intégrale par rapport à la mesure de Hausdorff. Une considération auxiliaire, très utile, consiste à utiliser la propriété d'approximation d'un domaine de Jordan par une suite de domaines Lipschitziens.

## 2.2 Trace sur un domaine de Jordan

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un domaine de Jordan borné i.e. sa frontière, noté  $\partial\Omega$ , est homéomorphe au bord,  $\partial B_1$ , de la boule unité,  $B_1$ , dans  $\mathbb{R}^2$ , cf. section 1.3.

Nous nous proposons de montrer qu'un opérateur de trace peut être défini lorsque le domaine est caractérisé par une telle régularité relativement faible, c'est-à-dire lorsqu'il n'est que Jordan régulier. Un fait important concernant la classe des domaines de Jordan est qu'ils n'admettent généralement pas la propriété de  $(1,p)$ -extension, cf. [29] et théorème 1.1 dans [59].

Un résultat intéressant a été démontré par Lewis, cf. [27],[28], et qui consiste en le fait que  $C^\infty(\overline{\Omega})$  est dense dans  $W^{1,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , ceci lorsque  $\Omega$  est un domaine de Jordan arbitraire dans le plan. Nous établissons, en utilisant entre autres ce fait de densité, un théorème de trace pour les fonctions de  $W^{1,p}(\Omega)$ ,  $p > 2$ , sur le bord  $\Gamma := \partial\Omega$  du domaine de Jordan  $\Omega$ . Dans toute cette section,  $\Omega$  désignera un domaine de Jordan borné.

Nous présentons ci-après quelques faits issus de la théorie de la mesure et qui constituent le point de vue sous lequel le corpus de la section est considéré.

### Mesure de Hausdorff

Le lecteur pourra se référer à ([30], chap.7) pour les résultats et les faits énoncés dans cette sous-section. Nous rappelons ici la définition de la mesure de Hausdorff d'un ensemble.

Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$  et  $\delta$  un nombre réel strictement positif. On appelle un  $\delta$ -recouvrement de  $A$ , et on note  $R_\delta(A)$ , la collection d'ensembles donnée par

$$R_\delta(A) := \{E_i \subset \mathbb{R}^2 \mid \text{diam } E_i \leq \delta \quad A \subset \cup_i E_i\},$$

et on définit la mesure extérieure, auxiliaire :

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) := \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} |\text{diam } E_i|^s \quad \text{tel que } E_i \in R_\delta(A) \right\}. \quad (2.25)$$

La  $s$ -mesure de Hausdorff de  $A$  est alors définie par

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A). \quad (2.26)$$

On rappelle, cf. ([30], Théorème 27.6), que la mesure  $\mathcal{H}_\delta^s$  est décroissante en  $\delta$

$$\text{i.e. } 0 < \delta_1 < \delta_2 \text{ implique } \mathcal{H}_{\delta_1}^s(A) > \mathcal{H}_{\delta_2}^s(A). \quad (2.27)$$

Par ailleurs, la mesure de Hausdorff est une fonction d'ensemble croissante dans le sens où, si  $A$  et  $B$  sont deux ensembles alors

$$A \subset B \quad \text{alors} \quad \mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B). \quad (2.28)$$

Enfin, la dimension de Hausdorff de l'ensemble  $A$  est définie par

$$\dim_{\text{H}}(A) := \inf_{s>0} \{\mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup_{s>0} \{\mathcal{H}^s(A) = +\infty\}. \quad (2.29)$$

On rappelle la définition de la distance au sens de Hausdorff. Soit  $(G, d)$  un espace métrique et  $G_F$  la collection de sous-ensembles non vides fermés et bornés de  $G$ . La distance de Hausdorff sur  $G_F$  est l'application  $\text{dist}_{\text{H}}$ , de  $G_F \times G_F$  dans  $\mathbb{R}^+$ , définie par

$$(X, Y) \rightarrow \text{dist}_{\text{H}}(X, Y) := \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y) \right\}. \quad (2.30)$$

Ici et dans la suite, la distance  $(x, y) \rightarrow d(x, y)$  est comprise dans le sens de la distance euclidienne entre les points  $x$  et  $y$ .

**Remarque 2.2.** 1)- Étant donné un domaine de Jordan  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , nous pouvons construire une suite imbriquée de domaines Lipschitziens  $(\Omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$  qui approximent  $\Omega$  au sens de la distance de Hausdorff (2.30) avec  $\Omega_m \subset \Omega_{m+1} \subset \Omega$ , cf. ([63], p.11). Par conséquent, la courbe de Jordan  $\Gamma = \partial\Omega$  peut être approximée par une suite de courbes Lipschitziennes  $\Gamma_m$ . En outre, nous choisissons une paramétrisation précise  $\gamma_m$  pour chacune des courbes  $\Gamma_m$ ; ces fonctions sont définies par

$$\begin{aligned} \gamma_m &: [a, b] \rightarrow \Gamma_m \\ t &\rightarrow \gamma_m(t) \end{aligned} \quad (2.31)$$

tel que  $\gamma_m$  soit défini comme suit : si  $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \gamma^2(t))$  est le point de  $\Gamma$  correspondant au paramètre  $t$  alors le point  $\gamma_m(t)$  est l'unique point de  $\Gamma_m$  qui satisfait

$$d(\gamma_m(t), \gamma(t)) = \inf_{x \in \Gamma_m} d(x, \gamma(t)).$$

2)- Rappelons que la mesure de Hausdorff  $n$ -dimensionnelle pour  $n \in \mathbb{N}^*$  coïncide avec la mesure de Lebesgue  $n$ -dimensionnelle à une constante multiplicative,  $C_{\lambda^n}$ , près.

Nous supposons, dans ce qui suit, que la courbe de Jordan  $\Gamma = \partial\Omega$  a une dimension de Hausdorff  $s$ ,  $1 < s < 2$ . Le résultat principal de cette section est énoncé dans le Théorème 2.2. Sa démonstration sera donnée après avoir défini l'intégrale curviligne par rapport à la mesure de Hausdorff et après avoir introduit la notion de  $s$ -longueur.

**Théorème 2.2.** *Soit  $\Omega$  un domaine de Jordan d'intérieur non vide. Soit  $p, p > 2$ . On suppose que le bord  $\partial\Omega$  possède une  $s$ -mesure finie i.e.  $\mathcal{H}^s(\partial\Omega) < \infty$ . Alors, on peut définir un opérateur de trace :*

$$\begin{aligned} T : W^{1,p}(\Omega) &\rightarrow L^p(\partial\Omega) \\ u &\rightarrow Tu \end{aligned}$$

qui étend l'opérateur, usuel, de restriction au bord  $\partial\Omega$  pour les fonctions continues. De plus,  $T$  est continu i.e. il existe une constante  $C_t > 0$  indépendante de  $u$  tel que pour tout  $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|Tu\|_{p,\partial\Omega} \leq C_t \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad (2.32)$$

où nous avons noté  $\|\cdot\|_{p,\partial\Omega}$  la norme de l'espace  $L^p$  selon une mesure que nous définirons ci-dessous et qui est reliée à la mesure de Hausdorff sur le bord.

Dans ce qui suit,  $\Gamma$  est une courbe de  $\mathbb{R}^2$  ayant une dimension de Hausdorff  $1 < s < 2$ .

### Intégrale de Stieltjes et $s$ -longueur

Soit  $\gamma$  une représentation paramétrique continue,  $C^0([a, b])$ , de  $\Gamma$ . Comme il est question ici d'une courbe  $\Gamma$  de dimension de Hausdorff  $s > 1$  alors la longueur d'arc habituelle, c'est à dire par rapport à la mesure de Lebesgue ou, ce qui revient au même, à la 1-mesure de Hausdorff, ainsi que l'abscisse curviligne sont obsolètes dans notre situation vu qu'elles peuvent valoir  $+\infty$ . Ceci suggère d'adapter la définition de l'abscisse curviligne à la situation dans laquelle nous nous plaçons. On introduit la  $s$ -abscisse curviligne qui est définie par

$$t \rightarrow s_\gamma(t) := \mathcal{H}^s(\gamma([a, t])) \quad (2.33)$$

c'est à dire qu'elle est la mesure de Hausdorff  $s$ -dimensionnelle du "morceau" de la courbe image de  $[a, t]$  par  $\gamma$ . C'est aussi la  $s$ -longueur de l'arc  $\gamma$  restreint à l'intervalle  $[a, t]$ .

On définit l'intégrale curviligne, sur  $\Gamma$ , de la fonction continue  $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  comme l'intégrale de Stieltjes de  $u \circ \gamma$  par rapport à la  $s$ -abscisse curviligne définie dans (2.33). La définition de la  $s$ -abscisse curviligne est la clé qui permet de bien comprendre cette intégrale. En effet, l'intégrale de Stieltjes en question est donnée par :

$$\int_{\Gamma} u \, ds = \int_{[a,b]} u \circ \gamma(t) \, ds_{\gamma}(t)$$

où l'intégrale peut être, d'une manière intuitive, comprise au sens de Riemann ; c'est à dire qu'elle est la limite, quand le pas  $\sigma := \max_k [t_k, t_{k+1}]$  de la subdivision de  $[a, b]$  tend vers zero, des sommes de Riemann

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sum u(\gamma(t'_k)) (s_{\gamma}(t_k) - s_{\gamma}(t_{k-1})) \quad (2.34)$$

où la subdivision est notée :  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, t'_k \in [t_{k-1}, t_k]$ . Cette définition ne dépend pas de la paramétrisation choisie pour  $\Gamma$ . Noter bien que la limite (2.34), et donc l'intégrale, existe dès que  $u$  est bornée ; ceci en plus du fait que la  $s$ -abscisse curviligne est à variation bornée. En effet, comme  $]0, t_k] \subset ]0, t_{k+1}]$  implique  $\gamma(]0, t_k]) \subset \gamma(]0, t_{k+1}])$  et que  $\mathcal{H}^s$  est croissante au sens de (2.28), alors la fonction  $s$ -abscisse curviligne est croissante et bornée. Par ailleurs cela implique aussi que sa dérivée,  $s'_{\gamma}(t)$  existe presque partout dans  $[a, b]$ . La  $s$ -abscisse curviligne,  $s_{\gamma}$ , est une fonction qui définit à son tour une mesure  $\mu^s$  qui est appelée mesure de Lebesgue-Stieltjes associée avec  $s_{\gamma}$ . Pour le voir, on définit la fonction d'ensemble  $w$  sur les intervalles

$$w(]u, v]) = s_{\gamma}(v) - s_{\gamma}(u) = \mathcal{H}^s(\gamma(]0, v])) - \mathcal{H}^s(\gamma(]0, u])),$$

par le théorème d'extension de Carathéodory, il existe une unique mesure de Borel  $\mu^s$  sur  $[a, b]$  égale à  $w$  sur tout intervalle  $I \subset [a, b]$ . La mesure  $\mu^s$  provient d'une mesure extérieure définie par

$$\mu^s(E) = \inf \left\{ \sum_i w(I_i) : E \subset \bigcup_i I_i \right\}, \quad (2.35)$$

l'infimum étant pris sur tous les recouvrements de  $E$  par des intervalles semi-ouverts dénombrables.

Cette mesure généralise la mesure de Lebesgue. Enfin, on dit qu'une fonction  $f$  est intégrable au sens de Stieltjes ou plus rigoureusement au sens Lebesgue-Stieltjes si on a

$$\int_a^b |f(t)| \, ds_{\gamma}(t) < \infty,$$

qui est définie comme l'intégrale classique de Lebesgue de  $f$  selon la mesure de Lebesgue-Stieltjes  $\mu^s$  associée avec  $s_\gamma$ . En particulier l'intégrale de Stieltjes de  $f$  coïncide avec l'intégrale de la fonction  $f s'_\gamma$  au sens de Lebesgue. Dans notre situation  $s'_\gamma$  existe presque partout.

En revanche, nous n'avons pas explicitement exprimé la dépendance de la mesure  $\mu^s$  et, plus loin ci-dessous, celle de  $\mu_\delta^s$ , en la fonction de paramétrisation  $\gamma$ ; mais il faut comprendre implicitement que les mesures  $\mu^s$  et  $\mu_\delta^s$  sont définies, dans la suite, relativement à la paramétrisation, préalablement choisie,  $\gamma$  de  $\Gamma$ . La même remarque vaut pour la fonction d'ensemble que nous avons désigné par  $w$  au lieu de  $w_\gamma$ .

**Définition 2.2.** Soit  $\Gamma$  une courbe de Jordan dans le plan  $\mathbb{R}^2$  et soit

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

une représentation paramétrique continue, élément de l'espace  $C^0([a, b])$ , de  $\Gamma$ . On suppose que  $\Gamma$  est un ensemble Hausdorff  $s$ -dimensionnel. On définit la  $s$ -longueur de  $\Gamma$  par

$$L_s(\Gamma) = \sup_{P_t \in \mathcal{P}} V^s(\gamma, P_t) \quad (2.36)$$

où la  $s$ -variation de  $\gamma$  est définie par

$$V^s(\gamma, P_t) := \sum_{k=0}^{n_p-1} d^s(\gamma(t_{k+1}), \gamma(t_k)) \quad (2.37)$$

et où le supremum, dans (2.36), parcourt l'ensemble des partitions

$$\mathcal{P} := \{P_t = \{t_0, t_1, \dots, t_{n_p}\} | P_t \text{ est une partition de } [a, b]\}.$$

On dit que  $\Gamma$  est  $s$ -rectifiable si  $L_s(\Gamma) < \infty$  et que  $t \rightarrow \gamma(t)$  est à  $s$ -variation bornée.

On énonce, dans le cadre de cette définition, le résultat suivant :

**Proposition 2.3.** *Soit  $\Gamma$  une courbe de Jordan dans  $\mathbb{R}^2$  Hausdorff  $s$ -dimensionnelle telle que  $\mathcal{H}^s(\Gamma) < \infty$ . On suppose, comme dans la définition 2.2, que la courbe  $\Gamma$  est paramétrée par  $\gamma \in C^0([a, b])$  alors*

$$\mathcal{H}^s(\Gamma) = L_s(\Gamma). \quad (2.38)$$

*Autrement dit, la  $s$ -longueur de  $\Gamma$  est égale à sa mesure de Hausdorff  $s$ -dimensionnelle.*

*Démonstration.* La preuve se fait en deux étapes :

1)- On montre que  $\mathcal{H}^s(\Gamma) \leq L_s(\Gamma)$ . On construit par récurrence une partition de  $[a, b]$  comme suit :

$$t_0 := a; \quad t_{k+1} := \inf\{x \in [t_k, b]; d(\gamma(t_k), \gamma(x)) = \epsilon\} \cup \{b\}$$

donc nous obtenons ainsi une partition de  $[a, b]$  définie par  $P_t := \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$  telle que

$$\begin{aligned} |d(\gamma(t_k), \gamma(t_{k+1}))|^s &= \text{diam}^s(\gamma([t_k, t_{k+1}])) \quad \forall k \in \{0, \dots, m-2\}, \\ |d(\gamma(t_m), \gamma(t_{m-1}))|^s &= \text{diam}^s(\gamma([t_m, t_{m-1}])) \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Nous avons alors pour tout  $\epsilon > 0$  ce qui suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\epsilon^s(\Gamma) &\leq \sum_{k=0}^{m-2} \text{diam}^s(\gamma([t_k, t_{k+1}])) + \text{diam}^s(\gamma([t_{m-1}, t_m])) \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-2} |d(\gamma(t_k), \gamma(t_{k+1}))|^s + \epsilon \leq L_s(\Gamma) + \epsilon, \end{aligned}$$

en faisant tendre  $\epsilon \rightarrow 0$  on trouve :  $\mathcal{H}^s(\Gamma) \leq L_s(\Gamma)$ .

2)- On montre que  $L_s(\Gamma) \leq \mathcal{H}^s(\Gamma)$ . On peut voir aisément que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta_\epsilon > 0$  tel que

$$d(\gamma(t_{k+1}), \gamma(t_k)) \leq \text{diam}(\gamma([t_k, t_{k+1}])) \leq [\mathcal{H}_{\delta_\epsilon}^1(\gamma([t_k, t_{k+1}]))] + \epsilon.$$

Donc, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta_\epsilon > 0$  tel que

$$[d(\gamma(t_{k+1}), \gamma(t_k))]^s \leq [\mathcal{H}_{\delta_\epsilon}^1(\gamma([t_k, t_{k+1}]))]^s + \epsilon. \quad (2.39)$$

D'après la définition de la mesure extérieure  $\mathcal{H}_{\delta_\epsilon}^1$ , si  $(A_i)_i$  est tel que  $A_i \in R_{\delta_\epsilon}$ ,  $R_{\delta_\epsilon}$  un  $\delta_\epsilon$ -recouvrement de  $\gamma([t_k, t_{k+1}])$ , nous avons à partir de (2.39)

$$[d(\gamma(t_{k+1}), \gamma(t_k))]^s \leq \left[ \sum_i \text{diam}(A_i) \right]^s + \epsilon.$$

Comme  $\text{diam}(A_i) < 1$  pour tout  $i$  alors on a

$$[d(\gamma(t_{k+1}), \gamma(t_k))]^s \leq \sum_i \text{diam}^s(A_i) + \epsilon,$$

et ce pour tout  $A_i \in R_{\delta_\epsilon}$  tel que  $\text{diam}(A_i) \leq \delta_\epsilon$ . On déduit alors que

$$[\text{d}(\gamma(t_{k+1}), \gamma(t_k))]^s \leq \inf_{A_i \in R_{\delta_\epsilon}} \sum_i \text{diam}^s(A_i) + \epsilon.$$

En faisant tendre  $\epsilon \rightarrow 0$ , on déduit, en utilisant (2.26) et (2.27), que

$$[\text{d}(\gamma(t_{k+1}), \gamma(t_k))]^s \leq \mathcal{H}^s(\gamma([t_k, t_{k+1}])).$$

Comme  $\mathcal{H}^s$  est une mesure sigma-additive, alors

$$L_s(\Gamma) = \sum [\text{d}(\gamma(t_{k+1}), \gamma(t_k))]^s \leq \mathcal{H}^s(\Gamma),$$

ce qui achève la preuve de (2.38).  $\square$

La proposition 2.3 permet de bien se rendre compte que l'intégrale de la fonction constante 1, qui, par définition de l'intégrale, est égale à  $\mathcal{H}^s(\Gamma)$ , n'est rien d'autre que la  $s$ -longueur de  $\Gamma$  définies par (2.36)-(2.37). Ce fait est présent en particulier dans le cas de la dimension  $s = 1$  où la 1-longueur n'est rien d'autre que la longueur habituelle de l'arc de courbe .

On peut aussi définir (ou construire) l'intégrale curviligne par rapport à la mesure de Hausdorff  $s$ -dimensionnelle à l'aide de laquelle la  $s$ -abscisse curviligne sur  $\Gamma$  s'exprime. Ceci fera l'objet de la sous section suivante. Nous soulignons qu'un travail presque similaire a été présenté dans le contexte de l'intégrale curviligne de Lebesgue-Hausdorff, cf. [31].

### Construction de l'intégrale de Lebesgue-Hausdorff-Stieltjes (LHS) sur une courbe de Jordan

Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$ ,  $\gamma \in C^0([a, b])$ , une paramétrisation de la courbe de Jordan  $\Gamma$ . Soit  $\psi$  une fonction simple définie sur  $[a, b]$  i.e. il existe une suite de réels  $(\alpha_i)_i$  et une suite d'ensembles  $(E_i)_i$  tel que  $[a, b] = \cup_i E_i$  et

$$\psi(t) = \sum_i \alpha_i \chi(E_i),$$

où  $\chi(E_i)$  désigne la fonction indicatrice de  $E_i$ . Alors l'intégrale de  $\psi$  est définie par

$$(LHS) \int_{[a,b]} \psi \, d\mu^s := \sum_i \alpha_i \mu^s(E_i),$$

où la mesure  $\mu^s$  est définie par (2.35). L'intégrale inférieure de la fonction continue  $u \circ \gamma$ , définie sur  $[a, b]$ , est donnée par

$$(LHS) \int_{[a,b]} u \circ \gamma \, d\mu^s := \sup \left\{ \int_{[a,b]} \zeta \, d\mu^s, \zeta \leq u \circ \gamma, \zeta \text{ fonction simple sur } [a, b] \right\}.$$

On définit de même l'intégrale supérieure de la fonction continue  $u \circ \gamma$ , définie sur  $[a, b]$ , est donnée par

$$(LHS) \int_{[a,b]} u \circ \gamma \, d\mu^s := \inf \left\{ \int_{[a,b]} \xi \, d\mu^s, u \circ \gamma \leq \xi, \xi \text{ fonction simple sur } [a, b] \right\}.$$

Finalement, la fonction  $u \circ \gamma$  est dite  $s$ -Hausdorff-Lebesgue-Stieltjes intégrable si

$$(LHS) \int_{[a,b]} u \circ \gamma \, d\mu^s := (LHS) \int_{[a,b]} u \circ \gamma \, d\mu^s = (LHS) \int_{[a,b]} u \circ \gamma \, d\mu^s,$$

ce nombre est l'intégrale curviligne de  $u$  sur  $\Gamma$  et est noté

$$\int_{\Gamma} u \, d\sigma^s := (LHS) \int_{[a,b]} u \circ \gamma \, d\mu^s. \quad (2.40)$$

Si l'intégrale de la fonction  $|u|$  est finie alors on écrit  $u \in L^1(\Gamma, d\sigma^s)$ . On définit aussi l'espace  $L^p(\Gamma, d\sigma^s)$  comme étant l'ensemble des fonctions mesurables  $u$  telles que  $|u|^p \in L^1(\Gamma, d\sigma^s)$ .

La définition (2.40) de l'intégrale sur  $\Gamma$  par rapport à la mesure  $\sigma^s$  est indépendante de la paramétrisation  $\gamma$  de l'ensemble  $\Gamma$ .

**Remarque 2.3.** 1)- Dans la mesure où l'on a défini l'intégrale par rapport à la mesure  $\mu_\delta^s$ , l'intégrale curviligne par rapport à la mesure  $\sigma_\delta^s$

$$\int_{\Gamma} |u|^p \, d\sigma_\delta^s := \int_{[a,b]} |u \circ \gamma|^p \, d\mu_\delta^s$$

peut être défini exactement de la même manière que ce qui a été fait ci-dessus pour la mesure  $\sigma^s$ . Il suffit pour cela de reconsidérer la définition de la  $s$ -abscisse curviligne, (2.33), en terme de la mesure de Hausdorff auxiliaire  $\mathcal{H}_\delta^s$ .

2)- Par ailleurs on peut facilement montrer que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma} |u| \, d\sigma_\delta^s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{[a,b]} |u \circ \gamma(t)| \, d\mu_\delta^s(t) = \int_{[a,b]} |u \circ \gamma(t)| \, d\mu^s(t) = \int_{\Gamma} |u| \, d\sigma^s. \quad (2.41)$$

3)- Supposons que  $u$  soit Lipschitz régulière (ou à la limite uniformément continue) sur  $\overline{\Omega}$  et soient  $\gamma, \gamma_m$  telles que définies dans la remarque 2.2. Considérons les fonctions  $u \circ \gamma$  et  $u \circ \gamma_m$  comme étant définies sur l'espace mesuré  $(]a, b[, \mathcal{B}(]a, b[), \mu_\delta^1)$ ; elles sont clairement  $\mu_\delta^1$ -intégrables.

Ainsi, la définition de l'intégrale par rapport à la mesure  $\mu_\delta^1$  et la définition 2.31 des fonctions  $\gamma_m$ , cf. remarque 2.2, donnent, en utilisant le théorème de convergence dominé appliqué à la suite de fonctions  $(u \circ \gamma_m)_m$ , la limite suivante :

$$\left| \int_{[a,b]} |u \circ \gamma_m(t)|^p d\mu_\delta^1(t) - \int_{[a,b]} |u \circ \gamma(t)|^p d\mu_\delta^1(t) \right| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } m \rightarrow \infty. \quad (2.42)$$

4)- Nous pouvons choisir  $m$  de telle sorte que  $\Gamma_m$  et  $\Gamma$  soient arbitrairement proches au sens de la distance de Hausdorff (2.30) c'est-à-dire de sorte à ce que

$$\text{dist}_H(\Gamma, \Gamma_m)$$

soit suffisamment petit. Comme conséquence, nous avons : pour tout  $\delta, 0 < \delta < 1$

$$|\mathcal{H}_\delta^s(\Gamma_m) - \mathcal{H}_\delta^s(\Gamma)| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } m \rightarrow \infty. \quad (2.43)$$

Ceci implique en particulier, sachant que  $\mathcal{H}_\delta^1(\Gamma) < \infty$  pour  $\delta > 0$ , qu'il existe  $m_\delta$  tel que pour tout  $m > m_\delta$  nous avons

$$\mathcal{H}_\delta^s(\Gamma_m) \leq 2\mathcal{H}_\delta^s(\Gamma). \quad (2.44)$$

Avant de proposer une preuve du Théorème 2.2, nous rappelons un résultat classique qui concerne la continuité de l'injection de Sobolev :

**Proposition 2.4.** *Soit  $p > 2$ . Soit  $(\Omega_m)_m$  une suite de domaines Lipschitziens qui approximent le domaine de Jordan  $\Omega$  telle que définie dans la remarque 2.2. Soit  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ .*

*Pour tout  $m$ , il existe une constante,  $C'_m > 0$ , telle que pour tout  $u \in W^{1,p}(\Omega_m)$  on a*

$$\|u\|_{\infty, \Omega_m} \leq C'_m \|u\|_{W^{1,p}(\Omega_m)}. \quad (2.45)$$

*Autrement dit,  $W^{1,p}(\Omega_m)$  s'injecte continument dans  $C^0(\overline{\Omega_m})$ , on écrit alors*

$$W^{1,p}(\Omega_m) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega_m}).$$

### 2.2.1 Preuve du Théorème 2.2

Nous passons maintenant à la preuve du Théorème 2.2.

*Démonstration.* Soit  $p > 2$ . Selon le point -1) de la remarque 2.2, il existe une suite de courbes Lipschitziennes, désignées  $\Gamma_n := \partial\Omega_n$ , qui approximent la courbe de Jordan  $\Gamma := \partial\Omega$ .

On définit  $C^0(\cup_n \Gamma_n)$  comme étant l'espace vectoriel dont les éléments sont les fonctions  $u$  définies et continues sur la réunion dénombrable,  $\cup_n \Gamma_n$ , des sous-ensembles  $(\Gamma_n)_n$ . On choisit comme paramétrisation des courbes  $\Gamma_n$  les fonctions  $\gamma_n$  définis par (2.31). Il s'agit clairement d'un espace vectoriel normé lorsqu'il est muni de la norme

$$\|u\|_{C^0(\cup_n \Gamma_n)} := \sup_{x \in \cup_n \Gamma_n} |u(x)|.$$

On commence par montrer dans un premier temps que les constantes  $C'_m$  apparaissantes dans l'estimation (2.45) sont bornées uniformément par rapport à  $m$ . D'après la proposition 2.4, les fonctions de l'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  sont continues uniformément dans  $\Omega$ , mais ne sont pas continues dans  $\bar{\Omega}$ . On note  $E' \subset W^{1,p}(\Omega)$  l'ensemble des fonctions  $u$  tel que  $\lim_{x \rightarrow \partial\Omega} u(x) = 0$ . Il est aisé de remarquer alors que si  $u \in E'$  alors  $u \in C^0(\bar{\Omega})$ .

On remarque aisément aussi que l'espaces  $E'$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{1,p}$  est complet. En effet, soit  $(u_l)_l$  une suite convergente d'éléments de  $E'$  i.e.  $\|u_l - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0$  lorsque  $l \rightarrow \infty$ . En utilisant (2.45) on a pour tout  $m$ ,  $\|u_l - u\|_{\infty, \Omega_m} \leq C'_m \|u_l - u\|_{W^{1,p}(\Omega_m)} \rightarrow 0$  lorsque  $l \rightarrow \infty$ . Comme par définition  $\lim_{x \rightarrow \partial\Omega} u_l(x) = 0$  pour tout  $l$ . Il apparait clairement alors que  $\lim_{x \rightarrow \partial\Omega} u(x) = 0$ , donc  $u \in E'$ . Par conséquent  $E'$  est un sous-espace fermé de l'espace complet  $W^{1,p}(\Omega)$ , donc  $E'$  est un espace de Banach.

On définit la suite d'applications linéaires  $(L_m)_{m \in \mathbb{N}}$  par

$$\begin{aligned} L_m : (E'; \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) &\rightarrow (C^0(\cup_n \Gamma_n); \|\cdot\|_{C^0}) \\ u &\rightarrow L_m u \end{aligned}$$

avec

$$(L_m u)(x) = \begin{cases} u(x) & , \quad x \in \Gamma_m, \\ 0 & , \quad x \in \cup_n \Gamma_n - \Gamma_m. \end{cases}$$

Il convient de noter que, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , l'opérateur  $L_m$  est bien défini et ce en vertu de la proposition 2.4. Par ailleurs on a :

1) Pour tout  $m$ , l'opérateur  $L_m$  est continu. En effet, soit  $m \in \mathbb{N}$ . D'après la propriété de continuité de l'injection de Sobolev, cf. (2.45), il existe une plus petite constante  $C_m > 0$  telle que :

$$\|L_m(u)\|_{C^0(\cup_n \Gamma_n)} = \|u\|_{\infty, \Gamma_m} \leq \|u\|_{\infty, \overline{\Omega_m}} \leq C_m \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad (2.46)$$

pour tout  $u \in E'$ .

2) D'autre part, soit  $u \in E'$  alors

$$\|L_m(u)\|_{C^0(\cup_n \Gamma_n)} = \sup_{x \in \Gamma_m} |u(x)| \leq \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u|. \quad (2.47)$$

Autrement dit, (2.47) signifie que

$$\forall u \in E' \subset W^{1,p}(\Omega), \sup_{m \in \mathbb{N}} \|L_m(u)\|_{C^0(\cup_n \Gamma_n)} < \infty. \quad (2.48)$$

Les propriétés (2.46) et (2.48) permettent d'appliquer le théorème de Banach-Steinhaus, cf. théorème 1.8, et donc de déduire que les normes des opérateurs  $(L_m)_m$  sont bornées i.e. qu'il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $m$

$$C_m < C. \quad (2.49)$$

Ce qui revient aussi à affirmer que les constantes  $C'_m$  apparaissant dans l'estimation de la proposition 2.4 sont également bornées par rapport à  $m$ , cf. remarque 2.4.

Soit  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ . D'après Lewis, cf. [27],[28], l'espace  $C^\infty(\overline{\Omega})$  est dense dans  $W^{1,p}(\Omega)$  i.e. il existe une suite  $(u_l)_l$  telle que  $u_l \in C^\infty(\overline{\Omega})$  et

$$\|u - u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } l \rightarrow \infty. \quad (2.50)$$

D'autre part, en utilisant l'uniforme continuité des fonctions  $u_l$ , on a

$$\left( \int_{\Gamma} |u_l|^p d\sigma^s \right)^{\frac{1}{p}} \leq |u_l|_{\infty, \Gamma} [\mathcal{H}^s(\Gamma)]^{\frac{1}{p}}$$

Le caractère approximatif des courbes  $\Gamma_m$ , dont le point 1) de la remarque 2.2, permet d'obtenir en utilisant la proposition 2.4

$$\begin{aligned} \left( \int_{\Gamma} |u_l|^p d\sigma^s \right)^{\frac{1}{p}} &\leq 2|u_l|_{\infty, \Gamma_{m(l)}} [\mathcal{H}^s(\Gamma)]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2C'_{m(l)} \|u_l\|_{W^{1,p}(\Omega_{m(l)})} [\mathcal{H}^s(\Gamma)]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

On obtient alors en utilisant (2.49)

$$\left( \int_{\Gamma} |u_l|^p d\sigma^s \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2C' \|u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)} [\mathcal{H}^s(\Gamma)]^{\frac{1}{p}}, \quad (2.51)$$

où l'intégrale sur le bord est comprise comme étant par rapport à la mesure  $\sigma^s$ , cf. la formule (2.40). On passe à la limite,  $l \rightarrow \infty$  dans (2.51), en utilisant (2.50) pour déduire qu'il existe une constante  $C_t$  telle que

$$\left( \int_{\Gamma} |u|^p d\sigma^s \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_t \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad (2.52)$$

pour tout  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ . Ce qui achève la preuve de l'estimation (2.32).

On peut obtenir une estimation similaire à (2.51) mais avec un membre gauche de cette inégalité qui fait intervenir, en plus, la semi-norme de l'espace de Sobolev d'ordre fractionnaire  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\Omega)$ .

Soit  $u \in W^{2,p}(\Omega)$ . Soit  $(u_l)_l$  une suite fonction de  $C^\infty(\overline{\Omega})$ . En appliquant la même procédure que ci-dessus, notamment la régularité  $C^1(\overline{\Omega})$  de la fonction  $u_l$ , le caractère approximatif des courbes  $\Gamma_m$  et par ailleurs, la proposition 2.4 ainsi que l'estimation (2.49), on obtient en utilisant la définition de la norme de l'espace  $W^{1-\frac{1}{p},p}$ , cf. (1.12).

$$\begin{aligned} \|u_l\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} &\leq (|\nabla u_l|_{\infty,\Gamma} + |u_l|_{\infty,\Gamma}) [\mathcal{H}^s(\Gamma)]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2|\nabla u_l|_{\infty,\Gamma_{m(l)}} + |u_l|_{\infty,\Gamma_{m(l)}} [\mathcal{H}^s(\Gamma)]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2C'_{m(l)} \left( \|\nabla u_l\|_{W^{1,p}(\Omega_{m(l)})} + \|u_l\|_{W^{1,p}(\Omega_{m(l)})} \right) [\mathcal{H}^s(\Gamma)]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2C' \left( \|\nabla u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)} \right) [\mathcal{H}^s(\Gamma)]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

où l'intégrale sur le bord est comprise comme étant par rapport à la mesure  $\sigma^s$ , cf. la formule (2.40). On passe à la limite,  $l \rightarrow \infty$  dans (2.53), en utilisant la densité de  $C^\infty(\overline{\Omega})$  dans  $W^{2,p}(\Omega)$  pour déduire qu'il existe une constante  $C'_t$  telle que

$$\|u_l\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} \leq C'_t \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}, \quad (2.54)$$

pour tout  $u \in W^{2,p}(\Omega)$ . □

- Il apparait clairement que pour être en mesure de donner un sens à la trace sur le bord  $\partial\Omega$  du domaine de Jordan  $\Omega$  avec une régularité  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ , il faudrait que la fonction jouisse d'une régularité  $W^{2,p}(\Omega)$ . Ceci est notamment dû à "l'épaisseur" dimensionnelle avec laquelle est caractérisé la courbe de Jordan  $\partial\Omega$  qui a une dimension de Hausdorff  $s > 1$ .

C'est à dire que rechercher une régularité  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ , sous réserve de son existence, revient à exiger une régularité de la fonction  $u$  sur  $\Omega$  plus forte que ce qui est habituellement requis dans le cas d'un domaine Lipschitzien.

- On peut se rendre compte de la pertinence du résultat du théorème 2.2 en remarquant que ni les fonctions de l'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  ni celles de l'espaces  $W^{2,p}(\Omega)$  ne sont nécessairement continues sur  $\partial\Omega$  et ce faute de pouvoir appliquer le résultat d'injection des espaces de Sobolev dans les espaces de Hölder dans le cas de notre domaine de Jordan  $\Omega$ .

- Il convient de rappeler que le résultat de densité sur lequel repose la seconde partie de la preuve qu'on vient de présenter i.e. la densité de  $C^\infty(\overline{\Omega})$  dans  $W^{k,p}(\Omega)$ ,  $k > 1$ , est conjectural. Par conséquent le résultat est valide seulement si la conjecture en question est résolue par l'affirmative, cf. [27].

**Remarque 2.4.** Le lecteur pourra aisément voir que les constantes,  $C_m$ , issues de la continuité de l'opérateur d'injection défini sur l'espace  $E' \cap W^{1,p}(\Omega_m)$  cf. (2.46) sont les mêmes que les constantes de continuité,  $C'_m$ , de l'opérateur d'injection mais défini sur  $W^{1,p}(\Omega)$  cf. (2.45). Pour s'en convaincre, il suffit de constater que toute fonction de l'espace  $W^{1,p}(\Omega_m)$  peut être prolongée en une fonction de l'espace  $E'$ .

## 2.3 Conclusion

En plus d'être intéressant en soi, ce théorème, comme tout autre résultat de trace de fonctions des espaces de Sobolev, ne manquera pas de trouver une application dans le domaine de l'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles, étant donné son utilisation répandue dans la littérature d'analyse. Ce type de résultats s'est avéré très utile pour démontrer des résultats d'existence et d'unicité pour les EDPs.

En ce qui concerne le Théorème 2.1, la même idée de preuve peut être utilisée afin de prouver une estimation similaire à (2.5) pour  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  et qui ferait intervenir  $\partial^j u$  avec  $1 < j \leq k$ . Ceci est possible sous réserve d'établir un résultat de densité similaire au théorème 1.6 pour l'espace de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  avec  $\Omega$  un domaine de Jordan. À notre connaissance, ce dernier fait constitue toujours un problème ouvert.

Nous avons choisi dans un premier temps d'établir le résultat de trace pour les fonctions de l'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  avec  $p > 2$ . Ce choix à été dicté par les idées même utilisées dans la preuve et qui sont essentiellement le théorème de Banach-Steinhaus et l'injection de Sobolev dans des domaines Lipschitziens.

Par ailleurs, même si l'existence d'une trace i.e. le caractère bien défini de l'opérateur

de trace pour les fonction de  $W^{1,p}(\Omega)$  avec  $p > 2$  et  $\Omega$  un domaine d'extension, est de facto justifié étant donnée notamment la propriété de continuité de telles fonctions, nous estimons tout de même avoir dégagé, par le biais des deux théorèmes 2.1) et 2.2, le terrain pour une compréhension moins superficielle de la problématique liée à la notion de trace sur un domaine de Jordan arbitraire.

Par ailleurs, le fait que la frontière  $\partial\Omega$  du domaine de Jordan  $\Omega$  est de mesure de Hausdorff  $s > 1$  alors cela laisse penser que la trace sur le bord devrait jouir d'une régularité plus forte que celle qui est habituellement valable dans le d'un frontière Lipschitzienne qui de mesure de Hausdorff égale à 1.

En revanche, il semble quelque peu difficile de généraliser en outre ce résultat pour le cas  $p < 1$ , du moins dans le cadre de la preuve présentée ci-dessus. Cela est dû, entre autres, au fait que l'ingrédient essentiel de la preuve, à savoir le résultat de densité qui fait l'objet du Théorème 1.6, peut ne pas être vrai dans ce cas général. Aussi,  $L^p$  n'est plus un espace de Banach pour  $p < 1$ . Donc, il serait très souhaitable de dégager un cadre approprié avant de songer à une éventuelle généralisation.

# Chapitre 3

## Estimations explicites pour le problème de l'élasticité linéaire

On établit dans ce chapitre une estimation explicite pour la solution du problème de l'élasticité linéaire posé sur un domaine  $\Omega$  polygonal convexe et dont la solution satisfait une condition au bord mixte de type Dirichlet-Neumann. Par estimation explicite, nous entendons une majoration de la norme  $L^2$  du gradient,  $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ , de la solution  $u$  en terme des données du problème d'une part, et de certaines constantes explicitement (numériquement) majorables d'autre part. Ce qui a pour conséquence directe la possibilité de majorer explicitement la norme  $H^1$  de la fonction solution. On renvoie le lecteur vers [67] pour l'étude abordée dans ce chapitre.

### 3.1 Introduction

Soit  $\Omega$  un ouvert convexe borné de  $\mathbb{R}^2$ , donc c'est un domaine. L'équilibre statique d'une structure déformable occupant le domaine  $\Omega$  est gouverné par le système linéaire d'elasto-statique, cf. [12]. Dans ce chapitre, on restreint l'étude à un domaine convexe  $\Omega$  ayant une frontière de forme polygonale et qui possède  $m + 1$  arêtes avec  $m \geq 2$ . On note  $\Gamma = \cup_{i=0}^m \Gamma_i$  son bord et  $\text{diam } \Omega$  son diamètre. De plus, nous supposons que toutes les arêtes  $\Gamma_i$  ont une mesure strictement positive. Le système considéré est donné par

$$\begin{cases} Lu = f & \text{p.p. dans } \Omega, \\ \sigma(u) \cdot \vec{n}_i = g_i & \text{sur } (\Gamma - \Gamma_0) \cap \Gamma_i, \quad 1 \leq i \leq m; \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Pour parvenir aux objectifs fixés pour ce chapitre, nous avons besoin de supposer que

les arêtes  $(\Gamma_i)_i$ , qui forment la frontière  $\Gamma$ , remplissent une condition similaire à l'hypothèse  $(H)$  du Théorème 1.5. En fait, pour notre objectif, une condition plus forte est nécessaire et elle est formulée dans (3.5) ci-dessous. La fonction vectorielle  $u = (u^1, u^2)$  satisfaisant le système (3.1) décrit un déplacement dans le plan. Dans ce modèle, nous imposons une condition de Dirichlet homogène sur  $\Gamma_0$  et une condition de Neumann sur la partie restante de la frontière. L'égalité sur la frontière est comprise au sens de la trace. Dans toute la suite du chapitre, nous désignerons par  $L$  l'opérateur de Lamé défini par

$$Lu := -\operatorname{div} \sigma(u) = -\operatorname{div}[2\mu\varepsilon(u) + \lambda \operatorname{Tr} \varepsilon(u)\operatorname{Id}]. \quad (3.2)$$

Nous supposons que les fonctions vectorielles  $f$  et  $g$  présentes aux seconds membres de (3.1) satisfont  $f \in [L^2(\Omega)]^2$  et  $g \in [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_0)]^2$ . Le vecteur  $\vec{n}_i$  représente la normale extérieure à  $\Gamma_i$ . Nous notons  $\mu$  et  $\lambda$  les coefficients de Lamé. Nous nous plaçons dans le cadre isotropique, ce qui implique, notamment, que les coefficients de Lamé sont constants. Le tenseur des déformations  $\varepsilon$  est défini par

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^t u). \quad (3.3)$$

La formulation faible du problème (3.1) s'écrit, (cf. [12], [14]) :

trouver  $u \in V$ ;  $\forall v \in V$

$$\int_{\Omega} (2\mu\varepsilon(u)\varepsilon(v) + \lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v) \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma - \Gamma_0} g v \, d\sigma(x) \quad (3.4)$$

où

$$V = \{v \in [H^1(\Omega)]^2; \quad v = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0\}.$$

La question de l'existence et de l'unicité de la solution de (3.4) dans  $V$  est classique, cf. [14], et a été traitée au chapitre 1 de la présente thèse dans la section 1.2.

Si on note  $\theta$  la mesure de l'angle intérieur entre les arêtes  $\Gamma_j$  et  $\Gamma_k$ ,  $0 \leq j, k \leq m$  tel que  $\bar{\Gamma}_j \cap \bar{\Gamma}_k \neq \emptyset$  et  $\gamma$  la mesure d'angle intérieur entre la partie Neumann du bord  $\Gamma_N := \Gamma - \Gamma_0$  et la partie Dirichlet du bord  $\Gamma_D := \Gamma_0$ , alors on impose

$$0 < \theta < \pi, \quad 0 < \gamma < \pi. \quad (3.5)$$

La raison de cette hypothèse sur la frontière réside dans notre souhait de s'assurer d'une meilleure régularité de la solution du problème faible (3.4). Précisément, nous avons dans

ce cas, d'après le théorème 1.9,  $u \in [H^{\frac{3}{2}+\iota}(\Omega)]^2$  pour un nombre réel  $\iota > 0$ . Ce qui implique en particulier, en utilisant l'injection de Sobolev appropriée et le fait que  $\Omega$  soit un domaine Lipschitzien, (cf. la partie II du théorème 4.12 dans [10] page 85), que

$$u \in [C^{0, \frac{1}{2}+\iota}(\overline{\Omega})]^2 \quad (3.6)$$

i.e.  $u$  nest  $(\frac{1}{2} + \iota)$ -Hölder continue. Il est aisé de remarquer que les conditions (3.5) sont remplies puisque le domaine considéré dans notre cas est convexe. Désignons

$$\|\varepsilon(u)\|_{0,\Omega} := \left( \int_{\Omega} \varepsilon(u) \varepsilon(u) \, dx \right)^{\frac{1}{2}}; \quad \|\nabla u\|_{0,\Omega} := \left( \int_{\Omega} |\nabla u^1|^2 + |\nabla u^2|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant la première inégalité de Korn, cf. [15], les inégalités de trace et de Poincaré, on obtient facilement à partir de (3.4) l'estimation suivante

$$\|\nabla u\|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{c_k} \frac{1}{2\mu} (c_p \|f\|_{0,\Omega} + c_{p,t} \|g\|_{\frac{1}{2}, \Gamma - \Gamma_0}), \quad (3.7)$$

où  $c_{p,t}$  est une constante qui dépend de la constante de Poincaré et de la constante de l'inégalité de trace. La constante  $c_k$  est celle de l'inégalité de Korn. A Noter que les valeur des constantes  $c_k$  et  $c_{p,t}$  apparaissant dans (3.7) sont inconnues et ne peuvent être explicitement minorées et/ou majorées dans le cas général. Nous nous proposons de déterminer explicitement ces constantes et ce relativement à la configuration géométrique polygonale convexe du domaine  $\Omega$ .

Le principal résultat de ce chapitre est énoncé dans le théorème suivant :

**Théorème 3.1.** *L'unique solution faible  $u$  de (3.4) sur le domaine polygonal convexe  $\Omega$  admet la majoration explicite suivante*

$$\|\nabla u\|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{\sqrt{\mu}} [1 + (\text{diam}\Omega + 1) \|f\|_{0,\Omega} + 8(|\Gamma| + \|g\|_{0,\Gamma}^2)], \quad (3.8)$$

où  $\text{diam}\Omega$  représente le diamètre de  $\Omega$  et  $|\Gamma|$  la 1-mesure de Hausdorff de la frontière de  $\Omega$ .

L'estimation (3.8) est similaire à l'estimation (3.7) dans le sens où les constantes qui y apparaissent sont les mêmes. Avant de démontrer ce théorème, il est utile de passer en revue quelques remarques et résultats. Ces résultats auxiliaires sont nécessaires afin d'obtenir une décomposition de la solution du problème principal, qui appartient à  $H^1(\Omega) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , en des fonctions qui sont encore dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Notons  $x_i$ , pour  $1 \leq i \leq m$ , le sommet du polygone qui relie  $\Gamma_{i-1}$  à  $\Gamma_i$  et  $x_0$  celui qui relie  $\Gamma_m$  à  $\Gamma_0$ . On définit, pour  $\epsilon > 0$ , la fonction

auxiliaire  $u_\epsilon \in H^1(\Omega)$  comme l'unique solution, sous réserve de son existence, au problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} Lu_\epsilon = f & \text{p.p. dans } \Omega, \\ u_\epsilon = u_\epsilon^d & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (3.9)$$

où  $u_\epsilon^d$  est la trace sur le bord  $\Gamma$  de la fonction

$$\phi_\epsilon(x)u(x). \quad (3.10)$$

avec  $u \in H^1(\Omega)$  étant l'unique solution de (3.4). Pour  $\epsilon \ll \frac{|\Gamma_i|}{2}$ ,  $\forall i$ ,  $0 \leq i \leq m$ , la fonction  $\phi_\epsilon$  est une suite de fonctions continues de troncature qui est définie comme suit. Soit  $\Omega'$  un domaine polygonal contenant  $\Omega$  et dont les sommets  $x'_i$  sont définis à partir des sommets  $x_i$  de la manière suivante. Pour tout  $i$ ,  $x'_i \in \mathbb{R}^2 - \Omega$  est situé sur la bissectrice de l'angle de  $\Omega$  de sommet  $x_i$  et tel que  $\|x_i - x'_i\| = \epsilon_0^2$ .

$$\begin{cases} \phi_\epsilon(x) = 0, & \|x - x'_i\| \leq \epsilon^2, \quad 0 \leq i \leq m; \\ \phi_\epsilon(x) = \exp\left[-\frac{\epsilon - \|x - x'_i\|}{\|x - x'_i\| - \epsilon^2}\right], & \epsilon^2 < \|x - x'_i\| < \epsilon, \quad 0 \leq i \leq m; \\ \phi_\epsilon(x) = 1, & \epsilon \leq \|x - x'_i\|, \quad 0 \leq i \leq m. \end{cases} \quad (3.11)$$

Désignons

$$D_{i,\epsilon} := \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \|x - x'_i\| < \epsilon^2\},$$

où  $\|x - x_i\|$  représente la norme euclidienne du vecteur  $x - x_i$ . On peut facilement voir que  $\phi_\epsilon \in C^0(\overline{\Omega})$ , par conséquent il n'y aura pas de saut en passant à la dérivée au sens des distributions,  $\nabla \phi_\epsilon$ , de la fonction  $\phi_\epsilon$  qui est  $H^1$  régulière dans  $D_{i,\epsilon}$  et dans  $\Omega - \overline{D_{i,\epsilon}}$ , cf. théorème 1.1, et donc  $\phi_\epsilon \in H^1(\Omega)$ . Par ailleurs, on définit la fonction  $\tilde{u}$  image de  $u$  par un opérateur de prolongement  $P : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$ . Comme  $u = \tilde{u} \in H^1(\Omega)$  alors  $\phi_\epsilon u \in H^1(\Omega) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . En utilisant la procédure classique de relèvement, appliquée au problème (3.9), on déduit que  $u_\epsilon \in H^1(\Omega)$  en est l'unique solution. On peut montrer, en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue par exemple, que  $\|\phi_\epsilon - 1\|_{0,\Gamma_i} \rightarrow 0$ , c'est-à-dire que nous avons une convergence dans  $L^2$  le long du bord  $\Gamma_i$ . A vrai dire, on a seulement besoin de la convergence  $\epsilon \rightarrow \frac{\epsilon_0^2}{2}$ . Un fait crucial, pour la suite de l'étude, réside dans le fait que les fonctions  $\phi_\epsilon$ , et par suite les fonctions  $u_\epsilon$  aussi, soient identiquement nulles sur un voisinage des sommets  $x_i$  du polygone  $\partial\Omega$ . Par la suite, on désigne  $u_\epsilon$  la fonction vectorielle  $u_\epsilon = (u_\epsilon^1, u_\epsilon^2)$ .

## 3.2 Problème faible pour $u_\epsilon$ et résultats d'approximation

Tout d'abord, nous construisons le problème faible vérifié par la fonction approximante  $u_\epsilon$  solution du problème (3.9). A cette fonction approximante en déplacement  $u_\epsilon \in V$  est associé le tenseur des contraintes approximant défini par

$$\sigma_\epsilon := 2\mu\varepsilon(u_\epsilon) + \lambda \operatorname{Tr} \varepsilon(u_\epsilon)\mathbf{I}, \quad (3.12)$$

comme  $Lu_\epsilon = \operatorname{div} \sigma_\epsilon = f$ , alors  $\sigma_\epsilon \in [H(\operatorname{div})(\Omega)]^{2 \times 2}$ . Fixons  $\epsilon > 0$ . D'après la densité des fonctions régulières dans l'espace  $H(\operatorname{div})(\Omega)$ , il existe  $\sigma_\epsilon^n \in [C^\infty(\overline{\Omega})]^{2 \times 2}$  tel que  $\sigma_\epsilon^n \rightarrow \sigma_\epsilon$  dans  $[H(\operatorname{div})(\Omega)]^{2 \times 2}$ . Cela signifie que

$$\|\sigma_\epsilon^n - \sigma_\epsilon\|_{\operatorname{div}, \Omega} := \|\operatorname{div} \sigma_\epsilon^n - \operatorname{div} \sigma_\epsilon\|_{0, \Omega} + \|\sigma_\epsilon^n - \sigma_\epsilon\|_{0, \Omega} \rightarrow 0 \quad (3.13)$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ . On pose  $\operatorname{div} \sigma_\epsilon^n = f^n$ . L'intégration par partie, de cette égalité, contre une fonction test  $v \in [C^\infty(\overline{\Omega})]^2 \cap V$  donne ce qui suit

$$\int_{\Omega} \sigma_\epsilon^n \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f^n v \, dx + \int_{\Gamma} \sigma_\epsilon^n \cdot \vec{n} v \, d\sigma(x).$$

En passant à la limite,  $n \rightarrow \infty$ , et ce en utilisant (3.13), on trouve :  $\forall v \in [C^\infty(\overline{\Omega})]^2 \cap V$

$$\int_{\Omega} \sigma_\epsilon \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \langle \sigma_\epsilon \cdot \vec{n}, v \rangle_{[H^{\frac{1}{2}}]'\!(\Gamma - \Gamma_0) \times [H^{\frac{1}{2}}]'\!(\Gamma - \Gamma_0)},$$

où  $\sigma_\epsilon \cdot \vec{n} =: g^\epsilon \in [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_0)]'$  est l'image de la composante normale de  $\sigma_\epsilon$  par l'opérateur de trace sur  $\Gamma$ . Comme, d'après le théorème 1 établi dans [21],  $[C^\infty(\overline{\Omega})]^2 \cap V$  est un sous espace dense dans  $V \subset H^1(\Omega)$ , alors selon la définition (3.3) et l'expression (3.12), la fonction  $u_\epsilon$  satisfait

$$\begin{aligned} \forall v \in V, \\ \int_{\Omega} 2\mu\varepsilon(u_\epsilon)\varepsilon(v) \, dx + \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div} u_\epsilon \operatorname{div} v \, dx \\ = \int_{\Omega} f v \, dx + \langle g^\epsilon, v \rangle_{[H^{\frac{1}{2}}]'\!(\Gamma - \Gamma_0) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_0)}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

c'est le problème faible dont l'unique solution est la fonction de déplacement  $u_\epsilon$  solution du problème (3.9).

Rappelons, cf. [19] et section 1.4, que la norme  $H^{\frac{1}{2}}$  en dimension une sur  $\Gamma_i$  d'une fonction  $u$  est définie par :

$$\|u\|_{\frac{1}{2},\Gamma_i} := \left( \|u\|_{0,\Gamma_i}^2 + \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_i} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{\|x - y\|^2} dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On vérifie sans grandes peines le résultat du lemme suivant :

**Lemme 3.1.** *La suite de fonctions  $(\phi_\epsilon)_\epsilon$  définie par (3.11) admet les limites suivantes*

$$\text{pour tout } i, 0 \leq i \leq m, \quad \|\phi_\epsilon - 1\|_{\frac{1}{2},\Gamma_i} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \epsilon \rightarrow \epsilon_0^2.$$

*Démonstration.* La démonstration de ce lemme est presque immédiate, il suffit juste d'utiliser la définition, qui est à cet effet très adaptée, de la suite de fonctions de troncature  $(\phi_\epsilon)_\epsilon$  donnée par (3.11).  $\square$

Du moment que, d'après le résultat de régularité énoncé dans (3.6),  $u$  est  $(\frac{1}{2} + \iota)$ -Hölder continue et donc uniformément continue sur  $\Omega$ , le résultat du lemme 3.1 implique

$$\|u_\epsilon - u\|_{\frac{1}{2},\Gamma} \leq \|(\phi_\epsilon - 1)u\|_{\frac{1}{2},\Gamma} \leq \|u\|_{\infty,\Gamma} \|\phi_\epsilon - 1\|_{\frac{1}{2},\Gamma} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \epsilon \rightarrow \epsilon_0^2. \quad (3.15)$$

À présent, on peut établir le lemme d'approximation suivant :

**Lemme 3.2.** *La fonction  $u_\epsilon$  solution du problème (3.9) et la distribution  $g^\epsilon$  apparaissant dans le problème (3.14) satisfont respectivement aux limites suivantes*

$$a) \|\nabla u_\epsilon - \nabla u\|_{0,\Omega} \rightarrow 0, \quad b) \|g^\epsilon - g\|_{[H^{\frac{1}{2}}]^\cdot, \Gamma - \Gamma_0} \rightarrow 0$$

*lorsque*  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0^2$ .

*Démonstration.* a) on considère le problème aux limites de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{p.p. dans } \Omega, \\ u = u^d & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.16)$$

Considérons l'opérateur linéaire  $G$  qui associe à chaque  $u^d \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  l'unique solution  $u$  du problème (3.16) i.e.

$$\begin{aligned} G : \left( H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \|\cdot\|_{\frac{1}{2},\Gamma} \right) &\rightarrow A \subset H^1(\Omega), \\ u^d := u|_\Gamma &\mapsto G(u^d) = u, \end{aligned}$$

où  $(A, \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$  désigne l'espace image de  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  par  $G$ . Il est aisé de constater que l'espace  $A$  est complet pour la norme  $H^1$  du moment que c'est un sous-espace fermé de l'espace complet  $H^1(\Omega)$ , il est notamment un Banach. L'opérateur inverse  $G^{-1}$  s'identifie avec l'opérateur de trace appliqué à  $u \in A$  sur  $\Gamma$ . Cet opérateur est évidemment bien défini et bijectif. L'inégalité de trace sur  $\Gamma$  implique qu'il existe  $c_{-1} > 0$  tel que  $\forall u \in A$

$$\|G^{-1}u\|_{\frac{1}{2},\Gamma} := \|u\|_{\frac{1}{2},\Gamma} \leq c_{-1}\|\nabla u\|_{0,\Omega},$$

cela implique la continuité de l'opérateur linéaire bijectif  $G^{-1}$ . D'après le théorème d'isomorphisme de Banach, cf. théorème 1.10, l'opérateur  $G$  est continu, cela signifie qu'il existe  $c > 0$  tel que

$$\|\nabla u\|_{0,\Omega} \leq c\|u\|_{\frac{1}{2},\Gamma}, \quad (3.17)$$

pour tout  $u \in A$ . Ainsi, comme  $L(u - u_\epsilon) = 0$ , alors en utilisant la conséquence de la limite établie dans le lemme 3.1, notamment la limite (3.15), on obtient en utilisant l'inégalité (3.17) :

$$\|\nabla u - \nabla u_\epsilon\|_{0,\Omega} \leq c\|u - u_\epsilon\|_{\frac{1}{2},\Gamma} \rightarrow 0, \quad (3.18)$$

lorsque  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0^2$ , ce qui achève la démonstration du point a).

b) Nous faisons le même raisonnement que pour le point a). Soit  $g \in [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_0)]'$  donnée, désignons par  $w \in V$  l'unique fonction satisfaisant :

$$\int_{\Omega} 2\mu\varepsilon(w)\varepsilon(v) + \lambda \operatorname{div} w \operatorname{div} v \, dx = \langle g, v \rangle_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_0)]', H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_0)} \quad , \quad (3.19)$$

pour tout  $v \in V$ . En choisissant  $v = w$ , il existe  $c' > 0$  telle que

$$\|\nabla w\|_{0,\Omega} \leq c'\|g\|_{[H^{\frac{1}{2}}]', \Gamma - \Gamma_0}. \quad (3.20)$$

Soit  $K$  l'opérateur qui associe à chaque donnée  $g \in [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_0)]'$  la fonction  $w$  solution du problème (3.19) correspondant i.e.

$$\begin{aligned} K : [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_0)]' &\rightarrow D \subset V \\ g &\mapsto K(g) = w, \end{aligned}$$

où  $(D, \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$  désigne l'image de  $[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_0)]'$  par l'opérateur  $K$ . D'après le résultat d'existence et d'unicité pour le problème (3.19),  $K$  est bien défini, de plus il est linéaire et inversible. Une formulation équivalente de (3.20) est : il existe une constante  $c' > 0$  telle que  $\forall g \in [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_0)]'$  nous avons

$$\|K(g)\|_{H^1} \leq c'\|g\|_{[H^{\frac{1}{2}}]', \Gamma - \Gamma_0},$$

c'est-à-dire que  $K$  est continu. Par suite, d'après le théorème d'isomorphisme de Banach, il existe  $c'_{-1} > 0$  telle que

$$\|g\|_{[H^{\frac{1}{2}}]', \Gamma - \Gamma_0} \leq c'_{-1} \|\nabla w\|_{0, \Omega}. \quad (3.21)$$

En réécrivant (3.4) avec  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_0) \equiv D \subset [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_0)]'$  puis en soustrayant (3.4) et (3.14) membre à membre, nous trouvons que  $u - u_\epsilon$  satisfait :

$$\begin{aligned} \forall v \in V, \\ \int_{\Omega} 2\mu(\varepsilon(u_\epsilon) - \varepsilon(u))\varepsilon(v) + \lambda \operatorname{div}(u_\epsilon - u) \operatorname{div} v \, dx \\ = \langle g^\epsilon - g, v \rangle_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_0)]', H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_0)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

En appliquant (3.21) à  $w = u_\epsilon - u$  nous avons :

$$\|g^\epsilon - g\|_{[H^{\frac{1}{2}}]', \Gamma - \Gamma_0} \leq c'_{-1} \|\nabla u_\epsilon - \nabla u\|_{0, \Omega}.$$

En prenant en considération (3.18), nous déduisons le point b).  $\square$

**Remarque 3.1.** Une conséquence du lemme précédent : pour un réel  $\beta > 0$  arbitrairement petit, il existe  $\epsilon_1 > 0$  telle que  $\forall \epsilon, \epsilon_0^2 < \epsilon < \epsilon_1$ , nous avons

$$i) \quad u_\epsilon \text{ s'annule sur } D_{i, \epsilon} \cap \partial\Omega,$$

$$ii) \quad \|g^\epsilon - g\|_{[H^{\frac{1}{2}}]', \Gamma - \Gamma_0} \leq c'_{-1}\beta,$$

$$iii) \quad \|\nabla u_\epsilon - \nabla u\|_{0, \Omega} \leq \beta,$$

iv) Comme par hypothèse  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_0)$ , alors en utilisant la continuité de l'injection canonique

$$I : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_0) \rightarrow L^2(\Gamma - \Gamma_0),$$

nous avons

$$\|g\|_{0, \Gamma - \Gamma_0} \leq \|g\|_{\frac{1}{2}, \Gamma - \Gamma_0}.$$

### 3.3 Lemmes auxiliaires

Soit  $\epsilon_1$  tel que défini dans la remarque 3.1. Nous fixons pour toute la suite  $\epsilon, \epsilon_0^2 < \epsilon < \epsilon_1$ .

Avant de présenter une preuve du résultat principal, nous avons l'intention d'énoncer deux lemmes auxiliaires. Ces lemmes sont établis en utilisant, principalement, le Théorème 2.1 démontré dans [20]. Afin d'appliquer ce résultat, l'hypothèse 1.2, [20], de ce même résultat doit être satisfaite. On vérifie aisément que notre domaine polygonal satisfait bien à cette hypothèse.

Ces lemmes, lemme 3.3 et lemme 3.4 ci-dessous, véhiculent l'idée essentielle dans la démonstration du théorème principal, Théorème 3.1. Nous commençons par approximer la solution  $u_\epsilon$  du problème (3.9) par une fonction régulière s'annulant sur une partie adéquate de la frontière  $\Gamma$ . Ensuite, il s'agit d'effectuer une décomposition particulière de cette fonction d'approximation, cf. l'allusion qui en a été faite dans l'introduction de ce chapitre. Cette idée clé est illustrée dans l'exemple suivant. Considérons  $v \in V$  la solution d'un problème similaire à (3.9) par exemple

$$\begin{cases} Lv = f & \text{p.p. dans } \Omega, \\ v = v^d & \text{sur } \cup_j \Gamma_j. \end{cases}$$

Nous supposons que la trace de  $v$  sur la frontière s'annule sur un voisinage ouvert des sommets de  $\Omega$ . Posons

$$E_i = \{v \in V; \quad v = 0 \quad \text{sur } \Gamma - \Gamma_i\}. \quad (3.23)$$

Décomposons ce problème en deux autres problèmes

$$S_1^i : \begin{cases} Lv_1^i = f & \text{p.p. dans } \Omega, \\ v_1^i = v^d & \text{sur } \Gamma_i, \\ v_1^i = 0 & \text{sur } \cup_j \Gamma_j - \Gamma_i. \end{cases} \quad S_2^i : \begin{cases} Lv_2^i = f & \text{p.p. dans } \Omega, \\ v_2^i = 0 & \text{sur } \Gamma_i, \\ v_2^i = v^d & \text{sur } \cup_j \Gamma_j - \Gamma_i. \end{cases}$$

Pour autant que les problèmes  $S_1^i$  et  $S_2^i$  soient bien posés, les fonctions  $v_1^i$  et  $v_2^i$  sont bien définies. D'autre part, il est facile de voir que le fait  $v_1^i = v$  sur  $\Gamma_i$  n'implique généralement pas que  $\sigma(v_1^i) \cdot \vec{n} = \sigma(v) \cdot \vec{n}$  sur  $\Gamma_i$ . L'idée est donc de trouver une décomposition qui permette de satisfaire une propriété presque similaire, c'est-à-dire telle que  $v_1^i$  puisse être approximée par une fonction  $v_1^{i,n}$  et telle que  $\sigma(v_1^{i,n}) \cdot \vec{n}$  soit, en même temps, une bonne approximation de  $\sigma(v_1^i)$  sur  $\Gamma_i$  au sens de la trace. Une utilisation adéquate du Théorème 2.1 démontré dans [20] peut rendre une telle décomposition possible.

Vu qu'on a besoin, par la suite de travailler des fonctions auxiliaire dont la trace de la composante normale du tenseur qui leur est associé jouisse d'une régularité  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et comme

on a seulement  $g_\epsilon \in [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_0)]'$  alors il est nécessaire d'introduire une seconde fonction auxiliaire  $u_\epsilon^p$  suffisamment régulière.

On note toujours  $u_\epsilon$  la solution du problème (3.9). En utilisant (Théorème 1, [21]), on peut trouver une suite  $(\tilde{u}_\epsilon^p)_p \in C^\infty(\bar{\Omega})$  telle que pour chaque  $p$ ,  $\tilde{u}_\epsilon^p$  s'annule sur la même partie de  $\Gamma := \partial\Omega$  où l'est  $u_\epsilon$  et telle que

$$\|\tilde{u}_\epsilon^p - u_\epsilon\|_{\frac{1}{2},\Gamma} \leq c_t \|\nabla \tilde{u}_\epsilon^p - \nabla u_\epsilon\|_{0,\Omega} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } p \rightarrow \infty. \quad (3.24)$$

Une conséquence particulière de (3.24) est : étant donné  $\beta > 0$  arbitrairement petit, nous pouvons fixer  $p$  de telle sorte que

$$\|\nabla \tilde{u}_\epsilon^p - \nabla u_\epsilon\|_{0,\Omega} \leq \frac{\beta}{(cc_t C_6 + cc_t)}, \quad (3.25)$$

où  $c$  est la constante qui apparaît dans l'estimation (3.17) et où  $C_6$  est la constante de continuité de l'opérateur  $G'^{-1}$  définie comme suit : on fixe  $f \in L^2(\Omega)$ . On définit  $G'$  comme étant l'opérateur qui associe à chaque donnée  $g \in [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_0)]'$  la solution  $v$  de

$$\begin{cases} Lv = f & \text{p.p. dans } \Omega, \\ \sigma(v) \cdot \vec{n} = g & \text{sur } \Gamma - \Gamma_0 \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

i.e.

$$G' : [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_0)]' \rightarrow M \subset V \\ g \mapsto G'(g) = v,$$

où  $(M, \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$  désigne l'image de  $[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_0)]'$  par  $G'$  pour  $f \in L^2(\Omega)$  fixée. Puisque  $G'$  est bijectif et continue, alors en appliquant le théorème de Banach à  $G'$ , nous en déduisons que l'opérateur inverse  $G'^{-1}$  est continu, c'est-à-dire

$$\|g\|_{[H^{\frac{1}{2}}]',\Gamma-\Gamma_0} = \|G'^{-1}v\|_{[H^{\frac{1}{2}}]',\Gamma-\Gamma_0} \leq C_6 \|\nabla v\|_{0,\Omega}. \quad (3.26)$$

pour tout  $v \in M$ . Notons  $u_\epsilon^p$  l'unique solution du problème

$$\begin{cases} Lu_\epsilon^p = f & \text{p.p. dans } \Omega, \\ u_\epsilon^p = \tilde{u}_\epsilon^p & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

On note

$$g_p^\epsilon := \sigma(u_\epsilon^p) \cdot \vec{n}. \quad (3.27)$$

On choisit  $v = u_\epsilon^p - u_\epsilon$  dans (3.26). Étant donné que le réel  $\beta > 0$  est arbitrairement petit, on obtient en utilisant (3.24) et (3.25)

$$\|g_p^\epsilon - g^\epsilon\|_{[H^{\frac{1}{2}}]', \Gamma - \Gamma_0} \leq \beta. \quad (3.28)$$

D'un coté en utilisant les mêmes idées que dans le point a) du lemme 3.2, et d'un autre coté en utilisant (3.24) et (3.25), on en arrive à établir l'existence d'une constante  $C_7$  telle que

$$\|\nabla u_\epsilon^p - \nabla u_\epsilon\|_{0, \Omega} \leq \beta \quad (3.29)$$

Par ailleurs, il est aisé de constater que, d'après sa définition,  $u_\epsilon^p \in H^2(\Omega) \cap C^\infty(\partial\Omega)$ . Cette régularité suffit pour les objectifs qui sont en vue. Nous fixons, pour le reste du chapitre,  $p$  et  $u_\epsilon^p$  pour lesquels (3.28) et (3.29) sont satisfaits.

### Premier résultat de décomposition.

**Lemme 3.3.** *Soit  $\delta_0$  un nombre réel arbitrairement petit. Il existe deux fonctions  $u_1$  et  $u_2$  dans  $V \subset H^1(\Omega)$  telles que*

$$i) \quad u_\epsilon^p = u_1 + u_2.$$

$$ii) \quad \begin{cases} L(u_1) = f_1 & \text{dans } \Omega, \\ u_1 = 0 & \text{sur } \Gamma - \Gamma_0, \\ u_1 = 0 & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases} \quad \begin{cases} L(u_2) = f_2 & \text{dans } \Omega, \\ u_2 = u_\epsilon^p & \text{sur } \Gamma - \Gamma_0, \\ u_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases}$$

$$iii) \quad \sigma(u_1) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \text{ et ainsi, } \sigma(u_2) \cdot \vec{n} = g_p^\epsilon \quad \text{sur } \Gamma.$$

$$iv) \quad f_2 := f - f_1 \text{ satisfait } \|f - f_1\|_{-1, \Omega} \leq \frac{\delta_0}{2m}.$$

*Démonstration.* Soit  $\delta_0 > 0$  un nombre réel arbitrairement petit. Considérons la décomposition

$$u_\epsilon^p := w + z$$

où  $w$  et  $z$  sont respectivement les solutions aux problèmes suivants

$$\begin{cases} L(w) = f & \text{dans } \Omega, \\ w = 0 & \text{sur } \Gamma - \Gamma_0, \\ w = 0 & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases} \quad \begin{cases} L(z) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ z = u_\epsilon^p & \text{sur } \Gamma - \Gamma_0, \\ z = 0 & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases}$$

On observe bien que  $\sigma(w) \cdot \vec{n}$  n'est pas nécessairement égal à zéro, au sens de la trace sur  $\Gamma$ , et donc  $\sigma(z) \cdot \vec{n}$  n'est pas nécessairement égal à  $g_p^\epsilon$  sur  $\Gamma$ . Néanmoins, par densité, il existe des fonctions à supports compacts  $w_n \in C_0^\infty(\Omega)$  telles que

$$\|\nabla w_n - \nabla w\|_{0,\Omega} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Il convient de noter que, selon la définition des fonctions à support compact dans  $\Omega$ ,  $\sigma(w_n) \cdot \vec{n} = 0$  sur  $\partial\Omega$  pour tout  $n$ .

En utilisant le même argument que dans la preuve du lemme 3.2 (théorème de Banach), et pour la condition de Dirichlet homogène fixée, il existe  $C_0 > 0$ , dépendant uniquement du domaine  $\Omega$ , telle que

$$\|L(w_n) - f\|_{-1,\Omega} \leq C_0 \|\nabla w_n - \nabla w\|_{0,\Omega} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (3.30)$$

Ainsi, il existe un élément  $w^*$  dans  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  qui satisfait l'estimation

$$\|L(w^*) - f\|_{-1,\Omega} \leq \frac{\delta_0}{m}. \quad (3.31)$$

On décompose  $w := w^* + w_2$  où  $w_2$  est la solution de

$$\begin{cases} L(w_2) = f - L(w^*) & \text{dans } \Omega \\ w_2 = 0 & \text{sur } \Gamma - \Gamma_0 \\ w_2 = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Il est à souligner que

$$\sigma(w_2) \cdot \vec{n} + \sigma(z) \cdot \vec{n} = g_p^\epsilon.$$

En effet,  $\sigma(w_2) \cdot \vec{n} + \sigma(z) \cdot \vec{n} = \sigma(u) \cdot \vec{n} - \sigma(w^*) \cdot \vec{n} = g_p^\epsilon - 0$ . Posons

$$u_1 := w^* \quad , \quad u_2 := w_2 + z$$

et

$$f_1 := L(w^*) \quad , \quad f_2 := f - L(w^*),$$

ce qui conclut le lemme.  $\square$

il est à noter également que nous appliquons de manière répétée l'argument essentiel dans le lemme 3.2, à savoir le théorème d'isomorphisme de Banach, cf. théorème 1.10, et ce afin d'obtenir des estimations pour les inverses de certains opérateurs. D'autre part, bien que les fonctions  $u_1$  et  $u_2$  dépendent de  $\epsilon$ , nous avons supprimé l'indice  $\epsilon$  pour des raisons de clarté de présentation.

### Second résultat de décomposition.

**Lemme 3.4.** *Soit  $E_i$  le sous-espace de  $V$  défini par (3.23) et  $g_p^\epsilon$  telle que définie dans (3.27). Soient  $u_1, u_2$  telles que définies dans le lemme 3.3. Étant donnés  $\delta_1, \delta_2 > 0$  des nombres réels arbitrairement petits, il existe  $m$  fonctions  $u_{2,i} \in E_i, 1 \leq i \leq m$  (dépendant de  $p$  et  $\epsilon$ ), telles que*

$$u_{2,i} = u_\epsilon^p \quad \text{sur} \quad \Gamma_i; \quad u_{2,i} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma - \Gamma_i, \quad (u_{2,i} \in E_i)$$

et telles que  $g_i := \sigma(u_{2,i}) \cdot \vec{n}$  satisfait à

$$\|g_i - g_p^\epsilon\|_{[H^{\frac{1}{2}}]', \Gamma_i} \leq \frac{\delta_1}{m}. \quad (3.32)$$

Et tel que  $u'_2 := \sum_{i=1}^m u_{2,i}$  satisfait

$$\|\nabla(u_1 + u'_2) - \nabla u_\epsilon^p\|_{0, \Omega} \leq \delta_2. \quad (3.33)$$

La construction de la fonction  $u_{2,i}$  qui est présentée dans la preuve du lemme 3.4 ci-dessous montre que pour tout  $i$ , les fonctions  $u_{2,i}$  s'annulent, respectivement, non seulement sur  $\Gamma - \Gamma_i$  mais aussi sur  $N_i \subset \partial\Omega$  qui est un voisinage ouvert de  $\overline{\Gamma - \Gamma_i} \subset \Gamma$ . La preuve est faite en deux étapes principales. Dans la première nous construisons les fonctions  $u_{2,i}$ , et dans la seconde étape nous prouvons que ces fonctions satisfont effectivement les estimations (3.32) et (3.33).

*Démonstration.* Soient  $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$  deux nombres réels arbitrairement petits. Les fonctions  $u_{2,i}$  seront définies en introduisant les fonctions intermédiaires  $X_i, Y_i, \tilde{Y}_i^n$  et  $V_i$  respectivement dans les sous-sections a), b), c) et d). En définissant ces fonctions, nous présentons quelques estimations qui permettront de déduire (3.32) et (3.33) dans la seconde étape.

**Étape 1.** Fixons  $i, 1 \leq i \leq m$ . Considérons la décomposition

$$u_2 = X_i + \sum_{j \neq i} X_j = X_i + Z_i,$$

où  $X_i \in E_i$  et  $Z_i \in V$  sont les solutions respectives de

$$(P_1) : \begin{cases} L(X_i) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ X_i = u_\epsilon^p & \text{sur} \quad \Gamma_i, \\ X_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma - \Gamma_i \cup \Gamma_0, \\ X_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0. \end{cases} \quad (P'_1) : \begin{cases} L(Z_i) = f_2 & \text{dans} \quad \Omega, \\ Z_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_i, \\ Z_i = u_\epsilon^p & \text{sur} \quad \Gamma - \Gamma_i \cup \Gamma_0, \\ Z_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0. \end{cases}$$

Il faut remarquer que ces deux problèmes sont bien posés, on s'en convainc en considérant la régularité  $u_\epsilon^p \in C^\infty(\partial\Omega)$  sur la frontière et le fait que  $u_\epsilon^p$  s'annule identiquement sur un voisinage des sommets. Puisque  $\Omega$  est un domaine Lipschitzien, il possède bien la propriété de  $W^{1,2}$ -extension, cf. section 3.5.

a) D'après le Théorème 2.1 dans [20], voir aussi la section 3.5 à la fin de ce chapitre, il existe  $X_i^n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  tel que nous ayons

$$(h1) : \quad \|\nabla X_i^n - \nabla X_i\|_{0,\Omega} \leq \frac{\delta_3}{m}, \quad (h2) : \quad \text{supp}(X_i^n) \cap (\Gamma - \Gamma_i) = \emptyset,$$

où  $\delta_3 > 0$  est un nombre réel choisi de manière adéquate, cf. condition (c1) ci-dessous. Une conséquence de (h2) est

$$(h3) : \quad \sigma(X_i^n) \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma - \Gamma_i, \quad X_i^n = 0 \text{ sur } \Gamma - \Gamma_i.$$

De plus, la condition homogène de Dirichlet sur  $\Gamma - \Gamma_i$  étant fixée dans le problème  $P_1$  et dans le problème résolu par  $X_i^n$ , alors en utilisant le théorème de Banach, il existe  $C_1 > 0$  tel que

$$\|L(X_i^n) - 0\|_{-1,\Omega} \leq C_1 \|\nabla X_i^n - \nabla X_i\|_{0,\Omega} \leq \frac{C_1 \delta_3}{m}.$$

Nous choisissons  $\delta_3$ , dans l'hypothèse (h1), tel que

$$(c1) : \quad \frac{C_1 \delta_3}{m} < \frac{\delta_0}{4m}$$

où  $\delta_0$  est un nombre réel positif dont le choix sera précisé ultérieurement (voir la condition (c4) ci-dessous). Fixons  $n_1$  de telle sorte que  $F_i^{n_1} := L(X_i^{n_1})$  satisfasse

$$\|F_i^{n_1} - 0\|_{-1,\Omega} \leq \frac{\delta_0}{4m}. \quad (3.34)$$

On pose  $\tilde{X}_i^{n_1} := X_i - X_i^{n_1} \in E_i$ , cette fonction satisfait :

$$X_i^{n_1} + \tilde{X}_i^{n_1} + Z_i = u_2 \quad (3.35)$$

i.e.

$$(P_2) : \begin{cases} L(X_i^{n_1}) = F_i^{n_1} & \text{dans } \Omega, \\ X_i^{n_1} = x_i^{n_1} & \text{sur } \Gamma_i, \\ X_i^{n_1} = 0 & \text{sur } \Gamma - \Gamma_i \end{cases} \quad (P'_2) : \begin{cases} L(\tilde{X}_i^{n_1}) = -F_i^{n_1} & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{X}_i^{n_1} = u_\epsilon^p - x_i^{n_1} & \text{sur } \Gamma_i, \\ \tilde{X}_i^{n_1} = 0 & \text{sur } \Gamma - \Gamma_i, \end{cases}$$

pour les mêmes raisons que pour  $(P_1)$  et  $(P'_1)$ , les problèmes  $(P_2)$  et  $(P'_2)$  sont bien posés.

Compte tenu de (h3) et (3.35), la fonction  $\tilde{X}_i^{n_1} + Z_i$  satisfait

$$(P_3) : \begin{cases} L(\tilde{X}_i^{n_1} + Z_i) = -F_i^{n_1} + f_2 & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{X}_i^{n_1} + Z_i = u_\epsilon^p - x_i^{n_1} & \text{sur } \Gamma_i, \\ \sigma(\tilde{X}_i^{n_1} + Z_i) \cdot \vec{n} = g_p^\epsilon & \text{on } \Gamma - \Gamma_i \cup \Gamma_0, \\ \tilde{X}_i^{n_1} + Z_i = 0 & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases}$$

Il est utile de remarquer que  $\tilde{X}_i^{n_1} + Z_i = u_2 - X_i^{n_1} = u_\epsilon^p$  sur  $\Gamma - \Gamma_i \cup \Gamma_0$ .

b) Soit  $Y_i$  la fonction définie par

$$(P_4) : \begin{cases} L(Y_i) = -F_i^{n_1} + f_2 & \text{dans } \Omega, \\ Y_i = 0 & \text{sur } \Gamma_i, \\ Y_i = u_\epsilon^p & \text{sur } \Gamma - \Gamma_i \cup \Gamma_0, \\ Y_i = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \end{cases}$$

grâce à l'hypothèse (3.5), ce problème est bien posé. Concernant la régularité, on peut montrer que  $Y_i \in H^2(\Omega)$ . Pour ce faire on procède comme suit : D'abord on remarque que  $u_\epsilon^p \in C^\infty(\Gamma - \Gamma_i \cup \Gamma_0)$  et  $\Omega$  est convexe. Ensuite on construit un relèvement de la donnée de Dirichlet en utilisant le théorème 2 dans [66] et on utilise la nature elliptique du problème  $P_4$ . Cette régularité implique que

$$\sigma(Y_i) \cdot \vec{n} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega). \quad (3.36)$$

Il existe une constante de trace  $c_t$  telle que, en utilisant (h1), nous avons

$$\|u_\epsilon^p - x_i^{n_1}\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_i} \leq c_t \times \|\nabla X_i - \nabla X_i^{n_1}\|_{0, \Omega} \leq \frac{c_t \times \delta_3}{m}. \quad (3.37)$$

En fixant  $-F_i^{n_1} + f_2 \in L^2(\Omega)$ ,  $u_\epsilon^p \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_i \cup \Gamma_0)$  et la condition homogène de Dirichlet sur  $\Gamma_0$  dans les problèmes  $(P_3)$  et  $(P_4)$ . D'un autre coté en utilisant le fait que  $\tilde{X}_i^{n_1} + Z_i = u_\epsilon^p$  sur  $\Gamma - \Gamma_i \cup \Gamma_0$ , alors en utilisant un argument similaire à celui de la partie (a) de la preuve du lemme 3.2 (théorème de Banach), il existe une constante  $C_3 > 0$  telle qu'en utilisant (3.37) on a :

$$\begin{aligned} \|\nabla Y_i - \nabla(\tilde{X}_i^{n_1} + Z_i)\|_{0, \Omega} &\leq C_3 \|Y_i - (u_\epsilon^p - x_i^{n_1})\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_i} \\ &= C_3 \|0 - (u_\epsilon^p - x_i^{n_1})\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_i} \\ &\leq \frac{c_t \times C_3 \delta_3}{m}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

En considérant (3.35), l'estimation (3.38) devient

$$\|\nabla(X_i^{n_1} + Y_i) - \nabla u_2\|_{0,\Omega} \leq \frac{c_t \times C_3 \delta_3}{m}. \quad (3.39)$$

D'autre part, puisque  $Y_i = 0$  sur  $\Gamma_i$ , alors en utilisant le résultat (Théorème 2.1, [20] cf. la section 3.5 à la fin), il existe  $Y_i^n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  tel que

$$(h4) \quad \|\nabla Y_i^n - \nabla Y_i\|_{0,\Omega} \leq \frac{\delta'_1}{m} \quad \text{et} \quad \text{supp}(Y_i^n) \cap \Gamma_i = \emptyset,$$

où  $\delta'_1 > 0$  est un nombre réel correctement choisi. Une conséquence de (h4) est :

$$\sigma(Y_i^n) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_i \quad \text{et} \quad Y_i^n = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_i. \quad (3.40)$$

Pour la condition de Dirichlet homogène sur  $\Gamma_i \cup \Gamma_0$  dans le problème  $(P_4)$  et le problème résolu par  $Y_i^n$ , et en utilisant le théorème de Banach, il existe  $C'_1 > 0$  telle que

$$\|L(Y_i^n) - (-F_i^{n_1} + f_2)\|_{-1,\Omega} \leq C'_1 \|\nabla Y_i^n - \nabla Y_i\|_{0,\Omega}.$$

Nous choisissons  $\delta'_1 > 0$  dans l'hypothèse (h4) telle que

$$(c2) : \quad \frac{C'_1 \delta'_1}{m} < \frac{\delta_0}{4m},$$

où  $\delta_0$  est tel que défini dans le lemme 3.3, c'est-à-dire doit satisfaire à la condition (c4) ci-dessous. Fixons  $n_2 > n_1$  de telle sorte que

$$h_i^{n_2} := L(Y_i^{n_2}) \quad (3.41)$$

satisfasse à

$$\|h_i^{n_2} - (-F_i^{n_1} + f_2)\|_{-1,\Omega} \leq \frac{\delta_0}{4m}.$$

Par conséquent, en considérant le point (iv) du lemme 3.3 et l'estimation (3.34), nous avons

$$\|h_i^{n_2}\|_{-1,\Omega} \leq \frac{\delta_0}{m}. \quad (3.42)$$

c) On note  $\tilde{Y}_i^{n_2} := Y_i - Y_i^{n_2}$ , nous avons

$$(P_5) : \quad \begin{cases} L(Y_i^{n_2}) = h_i^{n_2} & \text{dans } \Omega, \\ Y_i^{n_2} = 0 & \text{sur } \Gamma_i, \\ Y_i^{n_2} = y_i^{n_2} & \text{sur } \Gamma - \Gamma_i \cup \Gamma_0, \\ Y_i^{n_2} = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \end{cases}$$

et

$$(P_6) : \begin{cases} L(\tilde{Y}_i^{n_2}) = -h_i^{n_2} - F_i^{n_1} + f_2 & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{Y}_i^{n_2} = 0 & \text{sur } \Gamma_i, \\ \tilde{Y}_i^{n_2} = Y_i - y_i^{n_2} & \text{sur } \Gamma - \Gamma_i \cup \Gamma_0, \\ \tilde{Y}_i^{n_2} = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \end{cases}$$

l'estimation (3.39) se réécrit

$$\|\nabla(\tilde{Y}_i^{n_2} + Y_i^{n_2} + X_i^{n_1}) - \nabla u_2\|_{0,\Omega} \leq \frac{c_t \times C_3 \delta_3}{m}. \quad (3.43)$$

On note

$$g' := \sigma(\tilde{Y}_i^{n_2}) \cdot \vec{n} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i),$$

cette régularité découle de (3.36).

d) Soit  $V_i \in E_i$  la fonction définie par

$$(P_7) : \begin{cases} L(V_i) = -h_i^{n_2} - F_i^{n_1} + f_2 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma(V_i) \cdot \vec{n} = g' & \text{sur } \Gamma_i, \\ V_i = 0 & \text{sur } \Gamma - \Gamma_i \cup \Gamma_0, \\ V_i = 0 & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases}$$

On pose

$$u_{2,i} := X_i^{n_1} + V_i \in E_i,$$

où  $E_i$  est défini par (3.23) est tel que  $E_i \hookrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

**Étape 2.** Les fonctions  $u_{2,i}$  sont respectivement les solutions uniques des problèmes

$$(P_{2,i}) \begin{cases} L(u_{2,i}) = -h_i^{n_2} + f_2 & \text{dans } \Omega, \\ u_{2,i} = X_i^{n_1} + V_i & \text{sur } \Gamma_i, \\ u_{2,i} = 0 & \text{sur } \Gamma - \Gamma_i \cup \Gamma_0, \\ u_{2,i} = 0 & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases}$$

pour  $1 \leq i \leq m$ . A présent, nous sommes prêts à démontrer (3.32) et (3.33).

**Preuve de l'estimation (3.32).** Comme  $\sigma(V_i) \cdot \vec{n} = \sigma(\tilde{Y}_i^{n_2}) \cdot \vec{n}$  sur  $\Gamma_i$ , alors nous avons pour  $g_i := \sigma(V_i + X_i^{n_1}) \cdot \vec{n} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i) \equiv M \subset [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)]'$  et en considérant (iii) du lemme 3.3 :

$$\begin{aligned} \|g_i - g_p^\epsilon\|_{[H^{\frac{1}{2}}]', \Gamma_i} &= \|\sigma(V_i + X_i^{n_1}) \cdot \vec{n} - g_p^\epsilon\|_{[H^{\frac{1}{2}}]', \Gamma_i} \\ &= \|\sigma(\tilde{Y}_i^{n_2} + X_i^{n_1}) \cdot \vec{n} - \sigma(u_2) \cdot \vec{n}\|_{[H^{\frac{1}{2}}]', \Gamma_i}. \end{aligned}$$

En utilisant (3.40) on a

$$\begin{aligned} \|g_i - g_p^c\|_{[H^{\frac{1}{2}}]', \Gamma_i} &= \|\sigma(\tilde{Y}_i^{n_2} + Y_i^{n_2} + X_i^{n_1}) \cdot \vec{n} - \sigma(u_2) \cdot \vec{n}\|_{[H^{\frac{1}{2}}]', \Gamma_i} \\ &\leq \|\sigma(\tilde{Y}_i^{n_2} + Y_i^{n_2} + X_i^{n_1}) \cdot \vec{n} - \sigma(u_2) \cdot \vec{n}\|_{[H^{\frac{1}{2}}]', \Gamma - \Gamma_0} . \end{aligned}$$

On rappelle que  $Y_i = Y_i^{n_2} + \tilde{Y}_i^{n_2}$ . Selon le théorème d'isomorphisme de Banach et en utilisant (3.43), il existe une constante  $C_2 > 0$  dépendant uniquement de  $\Omega$  et  $n_1$  peut être choisi tel que l'on ait

$$\begin{aligned} \|g_i - g_p^c\|_{[H^{\frac{1}{2}}]', \Gamma_i} &\leq \|\sigma(Y_i + X_i^{n_1}) \cdot \vec{n} - \sigma(u_2) \cdot \vec{n}\|_{[H^{\frac{1}{2}}]', \Gamma - \Gamma_0} \\ &\leq C_2 \|\nabla(Y_i + X_i^{n_1}) - \nabla u_2\|_{0, \Omega} \\ &\leq \frac{c_t \times C_3 C_2 \delta_3}{m} . \end{aligned}$$

Si  $\delta_3$  remplit également la condition

$$(c3) : \quad \frac{c_t \times C_3 C_2 \delta_3}{m} < \frac{\delta_1}{m} ,$$

où  $\delta_1$  est le petit nombre arbitraire supposé au début de la preuve, alors l'estimation (3.32) est démontrée.

Afin d'établir l'estimation (3.33), nous devons estimer d'abord la norme de la trace de  $X_i^{n_1} + V_i$  sur  $\Gamma_i$ .

1) On remarque premièrement, en utilisant (h3), que

$$V_i + X_i^{n_1} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma - \Gamma_i .$$

2) Pour la condition  $-(h_i^{n_2} + F_i^{n_1} - f_2) \in L^2(\Omega)$ ,  $g' \in L^2(\Gamma_i)$  et la condition homogène de Dirichlet sur  $\Gamma_0$  dans les problèmes  $(P_6)$  et  $(P_7)$ , le théorème d'isomorphisme de Banach assure l'existence d'une constante  $C_4 > 0$  dépendant uniquement de  $\Omega$  telle que

$$\|\nabla V_i - \nabla \tilde{Y}_i^{n_2}\|_{0, \Omega} \leq C_4 \|V_i - \tilde{Y}_i^{n_2}\|_{\frac{1}{2}, \Gamma - \Gamma_i} = C_4 \|0 - (Y_i - y_i^{n_2})\|_{\frac{1}{2}, \Gamma - \Gamma_i} ,$$

par conséquent, en considérant (h4) et en utilisant l'inégalité de trace, nous avons

$$C_4 \|0 - (Y_i - y_i^{n_2})\|_{\frac{1}{2}, \Gamma - \Gamma_i} \leq c_t C_4 \|\nabla Y_i - \nabla Y_i^{n_2}\|_{0, \Omega} \leq c_t C_4 \frac{\delta'_1}{m} ,$$

ainsi,

$$\|\nabla V_i - \nabla \tilde{Y}_i^{n_2}\|_{0, \Omega} \leq c_t C_4 \frac{\delta'_1}{m} . \quad (3.44)$$

En utilisant l'inégalité de trace et (3.44) nous obtenons

$$\|V_i - 0\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_i} \leq \|V_i - \tilde{Y}_i^{n_2}\|_{\frac{1}{2}, \Gamma} \leq c_t \|\nabla V_i - \nabla \tilde{Y}_i^{n_2}\|_{0, \Omega} \leq c_t^2 \times C_4 \frac{\delta'_1}{m}. \quad (3.45)$$

Les estimations (3.37) et (3.45) impliquent

$$\begin{aligned} \|V_i + X_i^{n_1} - u_\epsilon^p\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_i} &\leq \|V_i - 0\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_i} + \|X_i^{n_1} - u_\epsilon^p\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_i} \\ &= \|V_i - 0\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_i} + \|x_i^{n_1} - u_\epsilon^p\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_i} \\ &\leq c_t^2 \times C_4 \frac{\delta'_1}{m} + \frac{c_t \delta_3}{m}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

**Preuve de l'estimation (3.33).** Écrivons  $u'_2 := \sum_i u_{2,i} = \zeta' + \eta'$  où  $\zeta'$  et  $\eta'$  sont respectivement les solutions de

$$(P_8) : \begin{cases} L(\zeta') = -\sum_{i=1}^m (h_i^{n_2} - f_2) & \text{dans } \Omega, \\ \zeta' = 0 & \text{sur } \Gamma_i, \\ \zeta' = 0 & \text{sur } \Gamma - \Gamma_i. \end{cases} \quad (P'_8) : \begin{cases} L(\eta') = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \eta' = \sum_{i=1}^m u_{2,i} & \text{sur } \Gamma - \Gamma_0, \\ \eta' = 0 & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases}$$

Écrivons  $u_2 = \zeta + \eta$  où  $\zeta$  et  $\eta$  sont solutions de

$$(P_9) : \begin{cases} L(\zeta) = f_2 & \text{dans } \Omega, \\ \zeta = 0 & \text{sur } \Gamma_i, \\ \zeta = 0 & \text{sur } \Gamma - \Gamma_i. \end{cases} \quad (P'_9) : \begin{cases} L(\eta) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \eta = u_\epsilon^p & \text{sur } \Gamma - \Gamma_0, \\ \eta = 0 & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases}$$

Si nous désignons par  $c_k$  la constante de l'inégalité de Korn, alors la forme faible du problème résolu par  $\zeta - \zeta'$  donne

$$\begin{aligned} \|\nabla \zeta - \nabla \zeta'\|_{0, \Omega} &\leq c_k \text{diam } \Omega \|f_2 + \sum_i (h_i^{n_2} - f_2)\|_{-1, \Omega} \\ &\leq \text{diam } \Omega \left( \|f_2\|_{-1, \Omega} + \sum_i \|h_i^{n_2}\|_{-1, \Omega} + \sum_i \|f_2\|_{-1, \Omega} \right). \end{aligned}$$

En utilisant le point (iv) du lemme 3.3 et l'estimation (3.42), nous avons

$$\|\nabla \zeta - \nabla \zeta'\|_{0, \Omega} \leq \text{diam } \Omega \left( \frac{\delta_0}{2m} + \delta_0 + \frac{\delta_0}{2} \right). \quad (3.47)$$

D'autre part, le théorème d'isomorphisme de Banach assure, pour le terme source nul et la condition homogène de Dirichlet sur  $\Gamma_0$  dans les problèmes  $(P'_8)$  et  $(P'_9)$ , l'existence

d'une constante  $C_5 > 0$  telle que

$$\begin{aligned} \|\nabla\eta - \nabla\eta'\|_{0,\Omega} &\leq C_5\|\eta - \eta'\|_{\frac{1}{2},\Gamma-\Gamma_0} = C_5\|u_\epsilon^p - \sum_{i=1}^m u_{2,i}\|_{\frac{1}{2},\Gamma-\Gamma_0} \\ &\leq C_5\sum_{i=1}^m \|u_\epsilon^p - \sum_{i=1}^m u_{2,i}\|_{\frac{1}{2},\Gamma_i} \\ &= C_5\sum_{i=1}^m \|u_\epsilon^p - u_{2,i}\|_{\frac{1}{2},\Gamma_i}. \end{aligned}$$

On applique l'estimation (3.46) avec  $u_{2,i} = V_i + X_i^{n_1}$  pour avoir

$$\|\nabla\eta - \nabla\eta'\|_{0,\Omega} \leq C_5(c_t^2 \times C_4\delta'_1 + c_t\delta_3). \quad (3.48)$$

En combinant (3.47) et (3.48), nous obtenons en utilisant l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \|\nabla u_2 - \nabla u'_2\|_{0,\Omega} &\leq \|\nabla\zeta - \nabla\zeta'\| + \|\nabla\eta - \nabla\eta'\|_{0,\Omega} \\ &\leq \text{diam } \Omega \left( \frac{\delta_0}{2m} + \delta_0 + \frac{\delta_0}{2} \right) + C_5(c_t^2 \times C_4\delta'_1 + c_t\delta_3). \end{aligned}$$

Finalement, si  $\delta_0$ ,  $\delta_3$  et  $\delta'_1$  sont soumis à la condition

$$(c4) : \quad \text{diam } \Omega \left( \frac{\delta_0}{2m} + \delta_0 + \frac{\delta_0}{2} \right) + C_5(c_t^2 \times C_4\delta'_1 + c_t\delta_3) < \delta_2,$$

où  $\delta_2$  est le petit nombre arbitraire supposé au début de la preuve. Par conséquent on a :

$$\|\nabla u_\epsilon^p - \nabla(u_1 + u'_2)\|_{0,\Omega} \leq \delta_2,$$

ce qui prouve (3.33). □

**Remarque 3.2.** 1) Soit  $g_p^\epsilon$  tel que défini par (3.27), on montre que

$$\|g_p^\epsilon\|_{\frac{1}{2},\Gamma-\Gamma_0} \leq \|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma-\Gamma_0} + \delta_6, \quad (3.49)$$

où  $\delta_6$  est un nombre réel positif arbitrairement petit. En effet, écrivons en utilisant la définition du crochet de dualité  $[H^{\frac{1}{2}}] \times H^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \left| \|g_p^\epsilon\|_{\frac{1}{2},\Gamma-\Gamma_0}^2 - \langle g, g_p^\epsilon \rangle_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma-\Gamma_0)]', H^{\frac{1}{2}}(\Gamma-\Gamma_0)} \right| &= \left| \langle g_p^\epsilon, g_p^\epsilon \rangle_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma-\Gamma_0)]', H^{\frac{1}{2}}(\Gamma-\Gamma_0)} \right. \\ &\quad \left. - \langle g, g_p^\epsilon \rangle_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma-\Gamma_0)]', H^{\frac{1}{2}}(\Gamma-\Gamma_0)} \right| \\ &\leq \left| \langle g_p^\epsilon - g, g_p^\epsilon \rangle_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma-\Gamma_0)]', H^{\frac{1}{2}}(\Gamma-\Gamma_0)} \right| \\ &\leq \|g_p^\epsilon - g\|_{[H^{\frac{1}{2}}]', \Gamma-\Gamma_0} \|g_p^\epsilon\|_{\frac{1}{2},\Gamma-\Gamma_0} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} & \left| \|g_p^\epsilon\|_{\frac{1}{2}, \Gamma - \Gamma_0}^2 - \langle g, g_p^\epsilon \rangle_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_0)]', H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_0)} \right| \\ & \leq \left( \|g_p^\epsilon - g^\epsilon\|_{[H^{\frac{1}{2}}]', \Gamma - \Gamma_0} + \|g^\epsilon - g\|_{[H^{\frac{1}{2}}]', \Gamma - \Gamma_0} \right) \|g_p^\epsilon\|_{\frac{1}{2}, \Gamma - \Gamma_0} \end{aligned}$$

En utilisant le point i) de la remarque 3.1 et (3.28) ainsi qu'un choix adéquat de  $\beta$ , les paramètres  $p$  et  $\epsilon$  peuvent être choisis tels que

$$\|g_p^\epsilon\|_{\frac{1}{2}, \Gamma - \Gamma_0}^2 - \langle g, g_p^\epsilon \rangle_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_0)]', H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_0)} \leq 2\beta \|g_p^\epsilon\|_{\frac{1}{2}, \Gamma - \Gamma_0}.$$

ainsi on déduit en utilisant la continuité du crochet de dualité

$$\|g_p^\epsilon\|_{\frac{1}{2}, \Gamma - \Gamma_0}^2 \leq \|g\|_{[H^{\frac{1}{2}}]', \Gamma - \Gamma_0} \|g_p^\epsilon\|_{\frac{1}{2}, \Gamma - \Gamma_0} + 2\beta \|g_p^\epsilon\|_{\frac{1}{2}, \Gamma - \Gamma_0}.$$

La propriété iii) de la remarque 3.1 permet d'écrire

$$\|g_p^\epsilon\|_{\frac{1}{2}, \Gamma - \Gamma_0}^2 \leq \|g\|_{\frac{1}{2}, \Gamma - \Gamma_0} \|g_p^\epsilon\|_{\frac{1}{2}, \Gamma - \Gamma_0} + 2\beta \|g_p^\epsilon\|_{\frac{1}{2}, \Gamma - \Gamma_0},$$

on conclut qu'il existe  $p$  tel que  $g_p^\epsilon$  satisfait

$$\|g_p^\epsilon\|_{\frac{1}{2}, \Gamma - \Gamma_0} \leq \|g\|_{\frac{1}{2}, \Gamma - \Gamma_0} + 2\beta.$$

pour tout  $\epsilon > 0$ . Posons

$$\delta_6^2 := 2\beta.$$

Comme, d'après le point (i) de la remarque 3.1 et (3.28),  $\beta$  est arbitrairement petit, alors il en est de même avec  $\delta_6$ .

2) Soit  $g_i$  telle que définie à l'étape 2 de la preuve du lemme 3.4. De la même façon que pour le point 1) de la présente remarque, on montre l'estimation

$$\|g_i\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_i} \leq \|g_p^\epsilon\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_i} + \frac{\delta_1}{m}, \quad (3.50)$$

avec  $\delta_6'$  arbitrairement petit. Cette estimation est établie, d'un coté en considérant la quantité  $\left| \|g_i\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_i}^2 - \langle g_i, g_p^\epsilon \rangle_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)]', H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)} \right|$ , et d'un autre coté en utilisant l'estimation (3.32) ainsi que le fait  $g_i \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$  pour tout  $i$ , cf. la remarque au début de la l'estimation (3.32).

D'après (3.49) et (3.50), les fonctions  $\|g_i\|_{0, \Gamma_i}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , qui dépendent de  $p$  et  $\epsilon$ , sont uniformément bornées par rapport à  $\epsilon$  et  $p$ .

3) Si  $u_{2,i}$  et  $h_i^{n_2}$  sont respectivement tels que définis dans le lemme 3.4 et (3.41), alors en utilisant le point (iv) du lemme 3.3 et l'estimation (3.42) on trouve

$$\begin{aligned} \|L(u_{2,i})\|_{-1,\Omega} &= \| -h_i^{n_2} + f_2 \|_{-1,\Omega} \leq \|h_i^{n_2}\|_{-1,\Omega} + \|f_2\|_{-1,\Omega} \\ &\leq \frac{\delta_0}{m} + \frac{\delta_0}{2m} =: \tau, \end{aligned} \quad (3.51)$$

où  $\delta_0$  est arbitrairement petit et satisfait (c4) et ainsi,  $\tau$  est aussi arbitrairement petit.

On conclut cette section en présentant deux autres lemmes utiles qui joueront un rôle importants dans la preuve du théorème 3.1.

### 3.3.1 Extension des fonctions $u_{2,i}$

Comme nous recherchons des estimations explicites, nous devrions utiliser les inégalités de Poincaré, de Trace et de Korn par rapport à des configurations géométriques appropriées, c'est-à-dire pour lesquelles ces constantes sont explicitement formulées. La configuration qui correspond le mieux à notre domaine polygonal convexe  $\Omega$  est le demi-plan  $\mathbb{R}^{2+}$  contenant le domaine  $\Omega$  pour l'inégalité de Korn, le carré  $S_d$  de coté égale à  $\text{diam } \Omega$  pour l'inégalité de Poincaré et de coté égal à  $\Gamma_i$  pour l'inégalité de trace. Ces carrés seront considérés comme des sous-ensembles du demi-plan contenant  $\Omega$ . Ainsi, nous déterminons ces constantes grâce aux résultats disponibles pour ce type de domaines. La nécessité de considérer les fonctions dans et hors du domaine  $\Omega$  suggère d'étendre par zéro les fonctions  $u_{2,i}$  hors du domaine convexe  $\Omega$ . La définition des fonctions  $u_{2,i}$  est adaptée pour réaliser une telle extension.

Soit  $u_{2,i}$  telle que définie dans le lemme 3.4. Nous considérons pour  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , l'extension par zéro de  $u_{2,i}$  du domaine convexe  $\Omega$  au demi-plan  $\mathbb{R}^{2+}$  contenant  $\Omega$  tel que  $\Gamma_i \subset \partial\mathbb{R}^{2+}$ .

$$\tilde{u}_{2,i} = \begin{cases} u_{2,i}, & p.p. \quad x \in \overline{\Omega}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^{2+} - \overline{\Omega}. \end{cases} \quad (3.52)$$

Nous affirmons que  $\tilde{u}_{2,i} \in H^1(\mathbb{R}^{2+})$ , ceci est dû essentiellement à la définition 3.10, cette définition implique l'existence d'un voisinage ouvert  $V_i$  du sommet  $i$  tel que  $u_{2,i}$  s'annule sur  $V_i \cap \Gamma$ . Ainsi, nous avons, de façons immédiate, ce qui suit

$$\|\partial_{x_i} \tilde{u}_{2,i}\|_{0,\mathbb{R}^{2+}} = \|\partial_{x_i} \tilde{u}_{2,i}\|_{0,\Omega} = \|\partial_{x_i} u_{2,i}\|_{0,\Omega}. \quad (3.53)$$

On peut facilement voir que les fonctions  $\tilde{u}_{2,i}$  résultantes de cette extension appartiennent à l'espace de Sobolev  $H^1(\mathbb{R}^{2+})$ . En effet, vu la définition de ces fonctions, il n'y aura pas

de saut lors du passage à la dérivée au sens des distributions. Les inégalités suivantes sont établies pour les fonctions résultantes de cette extension et qui sont  $H^1$  régulières définies sur un carré contenant le domaine polygonal convexe  $\Omega$ .

### 3.3.2 Détermination explicite de la constante de l'inégalité de Poincaré

Nous montrons dans le lemme suivant que la fonction  $u_{2,i} \in E_i$  satisfait l'inégalité de Poincaré pour laquelle nous déterminons explicitement la constante.

**Lemme 3.5.** *Pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq m$ , la fonction  $u_{2,i}$  vérifie :*

$$\|u_{2,i}\|_{0,\Omega} \leq \text{diam } \Omega \|\nabla u_{2,i}\|_{0,\Omega}, \quad (3.54)$$

le terme  $\text{diam } \Omega$  désigne toujours le diamètre de  $\Omega$ .

*Démonstration.* Nous établissons l'inégalité de Poincaré pour l'une des deux composantes  $u_{2,i}^l$ ,  $l = 1, 2$ , la même estimation se vérifie pour l'autre. Notons  $abcd$  le carré  $S_d$ , dont la longueur des cotés est égale à  $\text{diam } \Omega$  et qui est un sous-ensemble du demi-plan contenant  $\Omega$ , tel que  $a = (a_1, a_2)$ ,  $b = (b_1, b_2)$ ,  $c = (c_1, c_2)$  et  $d = (d_1, d_2)$  et tel que  $\Gamma_i \subset S_i := [c, d]$ ; donc  $\tilde{u}_{2,i}^l = 0$  sur  $\partial S_d - \Gamma_i$ .

Puisque  $\tilde{u}_{2,i}^l$  est absolument continue sur les droites parallèles aux axes de coordonnées, alors, en appliquant le théorème fondamental de l'analyse à la fonction  $\tilde{u}_{2,i}^l$  sur  $S_d$  pour  $l = 1, 2$ , nous avons pour tout  $(x_1, x_2) \in [a_1, d_1] \times [a_2, b_2]$

$$\tilde{u}_{2,i}^l(x_1, x_2) = \int_{a_1}^{x_1} \partial_{x_1} \tilde{u}_{2,i}^l(s, x_2) ds + \tilde{u}_{2,i}^l(a_1, x_2).$$

Comme  $(a_1, x_2) \in \partial S_d - \Gamma_i$ , alors  $\forall (x_1, x_2) \in [a_1, d_1] \times [a_2, b_2]$

$$\tilde{u}_{2,i}^l(x_1, x_2) = \int_{a_1}^{x_1} \partial_{x_1} \tilde{u}_{2,i}^l(s, x_2) ds.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz  $\forall (x_1, x_2) \in [a_1, d_1] \times [a_2, b_2]$

$$|\tilde{u}_{2,i}^l(x_1, x_2)| \leq |x_1 - a|^{1/2} \left( \int_{a_1}^{x_1} |\partial_{x_1} \tilde{u}_{2,i}^l(s, x_2)|^2 ds \right)^{1/2}.$$

En élevant au carré les deux côtés de cette inégalité et en utilisant le fait  $|x_1 - a| \leq \text{diam } \Omega$  :  $\forall (x_1, x_2) \in [a_1, d_1] \times [a_2, b_2]$  on obtient

$$|\tilde{u}_{2,i}^l(x_1, x_2)|^2 \leq |x_1 - a| \int_{a_1}^{x_1} |\partial_{x_1} \tilde{u}_{2,i}^l(s, x_2)|^2 ds \leq \text{diam } \Omega \int_{a_1}^{d_1} |\partial_{x_1} \tilde{u}_{2,i}^l(s, x_2)|^2 ds.$$

En intégrant sur  $S_d$  par rapport aux variable  $x_1$  et  $x_2$  on :

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_{2,i}^l\|_{0,S_d}^2 &= \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{d_1} |\tilde{u}_{2,i}^l(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \leq \text{diam } \Omega \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{d_1} \int_{a_1}^{d_1} |\partial_x \tilde{u}_{2,i}^l(s, x_2)|^2 ds dx_1 dx_2 \\ &\leq \text{diam } \Omega^2 \int_{S_d} |\partial_x \tilde{u}_{2,i}^l(s, x_2)|^2 ds dx_2. \end{aligned}$$

Selon la définition (3.52) et en considérant (3.53) nous obtenons

$$\|u_{2,i}^l\|_{0,\Omega}^2 \leq d^2(\Omega) \|\nabla u_{2,i}^l\|_{0,\Omega}^2.$$

Nous déduisons que

$$\begin{aligned} \|u_{2,i}\|_{0,\Omega}^2 &= \|u_{2,i}^1\|_{0,\Omega}^2 + \|u_{2,i}^2\|_{0,\Omega}^2 \leq d^2(\Omega) (\|\nabla u_{2,i}^1\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla u_{2,i}^2\|_{0,\Omega}^2) \\ &= d^2(\Omega) \|\nabla u_{2,i}\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned}$$

D'où l'on obtient l'estimation (3.54).  $\square$

### 3.3.3 Majoration explicite de la constante de l'inégalité de trace pour $u_{2,i}$ sur $\Gamma_i$

En utilisant principalement l'inégalité de Poincaré énoncée dans le lemme 3.5 et l'inégalité de trace pour  $u_{2,i}$  sur le bord  $\Gamma_i$  du carré  $S_{\Gamma_i}$  qui est aussi un parallélogramme (cf. lemme 4.2 dans [22] ainsi, que la remarque 3.3 dans [22] et les référence qui y figurent), on établit une majoration explicite pour la constante de trace de la fonction  $u_{2,i}$  sur  $\Gamma_i$ .

**Lemme 3.6.** *Pour tout  $i$ , la fonction  $u_{2,i}$  définie dans le lemme 3.4 satisfait :*

$$\|u_{2,i}\|_{0,\Gamma_i} \leq 16|\Gamma_i| \|g_i\|_{0,\Gamma_i} + \delta_9, \quad (3.55)$$

où  $\delta_9$  est un nombre réel positif arbitrairement petit et  $g_i$  est telle que définie dans le lemme 3.4.

*Démonstration.* Soit  $\tilde{u}_{2,i}$  défini sur le carré  $S_{\Gamma_i}$  de côté  $\Gamma_i$  tel que  $S_{\Gamma_i}$  soit un sous-ensemble du demi-plan  $\mathbb{R}^{2+}$  contenant  $\Omega$ . Il faut bien noter que  $\tilde{u}_{2,i}$  n'est pas nécessairement nulle sur  $\partial S_{\Gamma_i} - \Gamma_i$ . Écrivons

$$\tilde{u}_{2,i} = \alpha + \varrho,$$

cette décomposition est faite de manière similaire à celle présentée dans le lemme 3.4, c'est-à-dire telle que d'une part

$$\|L(\alpha)\|_{-1,S_{\Gamma_i}} \quad \text{et} \quad \|\sigma(\alpha) \cdot \vec{n} - g_i\|_{[H^{\frac{1}{2}}]',\Gamma_i} \quad \text{soit suffisamment petit} \quad (3.56)$$

et d'autre part,  $\alpha$ ,  $\varrho$  s'annulent respectivement sur  $\partial S_{\Gamma_i} - \Gamma_i$ ,  $\Gamma_i$ . On démontre (3.55) pour la trace de la fonction  $\alpha$ , la même estimation vaut pour la trace de  $u_{2,i}$  du moment que  $\alpha$  et  $u_{2,i}$  coïncident sur  $\Gamma_i$ . Considérons la décomposition de  $\alpha := \alpha_1 + \alpha_2$  de la manière suivante

$$(P_{10}) : \begin{cases} L(\alpha_1) = L(\alpha) & \text{dans } S_{\Gamma_i} \\ \sigma(\alpha_1) \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_i \\ \alpha_1 = 0 & \text{sur } \partial S_{\Gamma_i} - \Gamma_i \end{cases} \quad (P'_{10}) : \begin{cases} L(\alpha_2) = 0 & \text{dans } S_{\Gamma_i} \\ \sigma(\alpha_2) \cdot \vec{n} = \sigma(\alpha) \cdot \vec{n} & \text{sur } \Gamma_i, \\ \alpha_2 = 0 & \text{sur } \partial S_{\Gamma_i} - \Gamma_i. \end{cases}$$

En appliquant l'inégalité de trace sur le bord  $\Gamma_i$  du carré  $S_{\Gamma_i}$ , qui est un parallélogramme (cf. lemme 4.2 dans [22]), on obtient pour  $k = 1, 2$

$$\|\alpha_k\|_{0,\Gamma_i}^2 \leq 2 \frac{|\Gamma_i|}{|\Gamma_i|^2} \|\alpha_k\|_{0,S_{\Gamma_i}}^2 + 2 \frac{|\Gamma_i|^2}{|\Gamma_i|} \|\nabla \alpha_k\|_{0,S_{\Gamma_i}}^2,$$

en simplifiant

$$\|\alpha_k\|_{0,\Gamma_i}^2 \leq 2 \frac{1}{|\Gamma_i|} \|\alpha_k\|_{0,S_{\Gamma_i}}^2 + 2|\Gamma_i| \|\nabla \alpha_k\|_{0,S_{\Gamma_i}}^2,$$

en utilisant l'estimation (3.54) pour le cas où  $\Omega$  est le carré  $S_{\Gamma_i}$ , avec  $d(S_{\Gamma_i}) = \sqrt{2}|\Gamma_i|$ , nous avons

$$\begin{aligned} \|\alpha_k\|_{0,\Gamma_i}^2 &\leq 2 \frac{2|\Gamma_i|^2}{4|\Gamma_i|} \|\nabla \alpha_k\|_{0,S_{\Gamma_i}}^2 + 2|\Gamma_i| \|\nabla \alpha_k\|_{0,S_{\Gamma_i}}^2 \\ &\leq 3|\Gamma_i| \|\nabla \alpha_k\|_{0,S_{\Gamma_i}}^2. \end{aligned} \quad (3.57)$$

En appliquant l'inégalité de Korn pour la fonction  $\tilde{\alpha}$  définie sur le demi-plan  $\mathbb{R}^{2+}$  contenant  $S_{\Gamma_i}$ , cas pour lequel la constante de Korn vaut  $\frac{1}{2}$ , l'estimation (3.57) devient

$$\|\alpha_k\|_{0,\Gamma_i}^2 \leq 12|\Gamma_i| \|\varepsilon(\alpha_k)\|_{0,S_{\Gamma_i}}^2. \quad (3.58)$$

Comme  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  satisfont respectivement

$$\|\varepsilon(\alpha_1)\|_{0,S_{\Gamma_i}}^2 = \langle L(\alpha), \alpha_1 \rangle_{[H^1(S_{\Gamma_i})]', H^1(S_{\Gamma_i})}$$

et

$$\|\varepsilon(\alpha_2)\|_{0,S_{\Gamma_i}}^2 = \langle \sigma(\alpha) \cdot \vec{n}, \alpha_2 \rangle_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)]', H^{\frac{1}{2}}(S_{\Gamma_i})},$$

, alors en utilisant la continuité des formes linéaires, l'inégalité de Korn ainsi que le lemme 3.5, on est conduit aux estimations

$$\|\varepsilon(\alpha_1)\|_{0,S_{\Gamma_i}} \leq 2(\sqrt{2}|\Gamma_i| + 1) \|L(\alpha)\|_{-1,S_{\Gamma_i}} \quad \text{et} \quad \|\varepsilon(\alpha_2)\|_{0,S_{\Gamma_i}} \leq \|\sigma(\alpha) \cdot \vec{n}\|_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)]', \Gamma_i} \|\alpha_2\|_{0,\Gamma_i}.$$

En incorporant ces deux dernières estimations dans (3.58) on obtient

$$\|\alpha_1\|_{0,\Gamma_i}^2 \leq 12 \times 4(\sqrt{2}|\Gamma_i| + 1)^2 \|L(\alpha)\|_{-1,S\Gamma_i}^2, \quad \|\alpha_2\|_{0,\Gamma_i}^2 \leq 12|\Gamma_i| \|\sigma(\alpha) \cdot \vec{n}\|_{[H^{\frac{1}{2}}]',\Gamma_i} \|\alpha_2\|_{0,\Gamma_i}.$$

En utilisant (3.51) et l'hypothèse (3.56), nous pouvons trouver  $\delta_5$  et  $\delta_6$  suffisamment petit pour que

$$\|\alpha_1\|_{0,\Gamma_i} \leq \delta_5, \quad \|\alpha_2\|_{0,\Gamma_i} \leq 12|\Gamma_i| \|g_i\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_i} + \delta_6,$$

pour tout  $i$ . Ainsi, en combinant ces deux estimations, on obtient

$$\|u_{2,i}\|_{0,\Gamma_i} \leq \|\alpha_1\|_{0,\Gamma_i} + \|\alpha_2\|_{0,\Gamma_i} \leq \delta_9 + 16|\Gamma_i| \|g_i\|_{0,\Gamma_i}$$

avec  $\delta_9 = \delta_5 + \delta_6$  arbitrairement petit. □

### 3.4 Preuve du théorème 3.1

Nous sommes maintenant en mesure de présenter une preuve du théorème principal.

Cette preuve fait usage, principalement, du lemme 3.3 et du lemme 3.4.

*Démonstration. Étape 1.* - Soit  $u_1$  telle que définie dans le lemme 3.3, il est facile de vérifier que  $u_1$  est solution du problème variationnel

$$2\mu \int_{\Omega} \varepsilon(u_1) \varepsilon(v) \, dx + \lambda \int_{\Omega} \operatorname{div} u_1 \operatorname{div} v \, dx = \langle f_1, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$$

pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ . On choisit  $v = u_1$  et on utilise la propriété de continuité de la forme linéaire  $v \rightarrow \langle f_1, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$  pour obtenir

$$2\mu \|\varepsilon(u_1)\|_{0,\Omega}^2 + \lambda \|\operatorname{div} u_1\|_{0,\Omega}^2 \leq \|f_1\|_{-1,\Omega} \|u_1\|_{1,\Omega}.$$

En utilisant l'inégalité de Korn relativement au cas de la condition de Dirichlet homogène d'une part, et l'inégalité de Poincaré d'autre part, on a

$$\frac{\mu}{2} \|\nabla u_1\|_{0,\Omega}^2 \leq \|f_1\|_{-1,\Omega} \left( \frac{\operatorname{diam}\Omega}{2} + 1 \right) \|\nabla u_1\|_{0,\Omega},$$

en utilisant le point (iv) du lemme 3.3, on obtient

$$\mu \|\nabla u_1\|_{0,\Omega} \leq \left( \frac{\operatorname{diam}\Omega}{2} + 1 \right) \|f_1\|_{-1,\Omega} + \left( \frac{\operatorname{diam}\Omega}{2} + 1 \right) \frac{\delta_0}{m}. \quad (3.59)$$

- Fixons  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Soit  $u_{2,i}$  telle que définie dans le lemme 3.4. Il est aisé de vérifier que  $u_{2,i}$  est solution du problème variationnel

$$2\mu \int_{\Omega} \varepsilon(u_{2,i}) \varepsilon(v) \, dx + \lambda \int_{\Omega} \operatorname{div} u_{2,i} \operatorname{div} v \, dx = \langle L(u_{2,i}), v \rangle_{[H^1(\Omega)]', H^1(\Omega)} + \int_{\Gamma-\Gamma_0} g_i v \, d\sigma$$

pour tout  $v \in V$ . On choisit  $v = u_{2,i}$ . En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que la propriété de continuité du crochet de dualité  $[H^{\frac{1}{2}}]'$   $\times$   $H^{\frac{1}{2}}$ , on obtient

$$2\mu \|\varepsilon(u_{2,i})\|_{-1,\Omega}^2 + \lambda \|\operatorname{div} u_{2,i}\|_{1,\Omega}^2 \leq \|L(u_{2,i})\|_{-1,\Omega} \|u_{2,i}\|_{1,\Omega} + \|g_i\|_{0,\Gamma_i} \|u_{2,i}\|_{0,\Gamma_i},$$

en utilisant l'estimation (3.54) on a

$$2\mu \|\varepsilon(u_{2,i})\|_{0,\Omega}^2 \leq \|L(u_{2,i})\|_{-1,\Omega} (\operatorname{diam} \Omega + 1) \|\nabla u_{2,i}\|_{0,\Omega} + \|g_i\|_{0,\Gamma_i} \|u_{2,i}\|_{0,\Gamma_i}. \quad (3.60)$$

D'autre part, il est aisé de voir qu'il existe des constantes  $c_k$ ,  $c_p$  et  $c_t$  telles que

$$\|\nabla u_{2,i}\|_{0,\Omega} \leq c_p c_k \|L(u_{2,i})\|_{-1,\Omega} + c_t c_k \|g_i\|_{0,\Gamma_i} \quad (3.61)$$

ainsi, en incorporant (3.61) dans (3.60), on trouve

$$\begin{aligned} & 2\mu \|\varepsilon(u_{2,i})\|_{0,\Omega}^2 \\ & \leq (\operatorname{diam} \Omega + 1) \|L(u_{2,i})\|_{-1,\Omega} (c_k c_p \|L(u_{2,i})\|_{-1,\Omega} + c_k c_t \|g_i\|_{0,\Gamma_i}) + \|g_i\|_{0,\Gamma_i} \|u_{2,i}\|_{0,\Gamma_i}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

En utilisant (3.49), (3.50) et (3.51), l'estimation (3.62) devient

$$\begin{aligned} 2\mu \|\varepsilon(u_{2,i})\|_{0,\Omega}^2 & \leq (\operatorname{diam} \Omega + 1) \tau c_k (c_p \tau + c_t \|g_i\|_{0,\Gamma_i}) + \|g_i\|_{0,\Gamma_i} \|u_{2,i}\|_{0,\Gamma_i} \\ & \leq (\operatorname{diam} \Omega + 1) \tau c_k (c_p \tau + c_t (\|g_i\|_{0,\Gamma-\Gamma_0} + \delta_6 + \frac{\delta_1}{m})) + \|g_i\|_{0,\Gamma_i} \|u_{2,i}\|_{0,\Gamma_i}; \end{aligned} \quad (3.63)$$

posons

$$\delta_7^2 := (\operatorname{diam} \Omega + 1) \tau c_k (c_p \tau + c_t (\|g_i\|_{0,\Gamma-\Gamma_0} + \delta_6 + \frac{\delta_1}{m})).$$

Grâce à l'estimation (3.51),  $\delta_7$  peut être rendu aussi petit que souhaité. En appliquant (3.49), (3.50) et (3.55), l'estimation (3.63) devient

$$\begin{aligned} 2\mu \|\varepsilon(u_{2,i})\|_{0,\Omega}^2 & \leq \delta_7^2 + 16|\Gamma_i| \|g_i\|_{0,\Gamma_i}^2 + \delta_9 \|g_i\|_{0,\Gamma_i} \\ & \leq \delta_7^2 + 16|\Gamma_i| \|g_i\|_{0,\Gamma_i}^2 + \delta_9 \left( \frac{\delta_1}{m} + \delta_6 + \|g_i\|_{\frac{1}{2},\Gamma_i} \right) \\ & \leq \frac{\delta_{10}^2}{m^2} + 16|\Gamma_i| \|g_p^\varepsilon\|_{\frac{1}{2},\Gamma_i}^2, \end{aligned}$$

où  $\frac{\delta_{10}^2}{m^2} := \delta_7^2 + \delta_9(\frac{\delta_1}{m} + \delta_6 + \|g\|_{0,\Gamma_i})$ , alors en simplifiant on trouve

$$\sqrt{2\mu}\|\varepsilon(u_{2,i})\|_{0,\Omega} \leq \frac{\delta_{10}}{m} + 4|\Gamma_i|^{\frac{1}{2}}\|g_p^\varepsilon\|_{\frac{1}{2},\Gamma_i}. \quad (3.64)$$

Il convient de noter que, d'après la définition des constantes  $\delta_6$ ,  $\delta_7$  et  $\delta_9$ , la constante  $\delta_{10}$  peut être rendue aussi petite que souhaitée.

**Étape 2.** Puisque la déformation  $\varepsilon(u_{2,i})$  est une application linéaire en les dérivées premières de  $u_{2,i}$ , alors avec les mêmes notations que dans (3.52) et en utilisant (3.53), nous avons

$$\|\varepsilon(\tilde{u}_{2,i})\|_{0,\mathbb{R}^{2+}} = \|\varepsilon(\tilde{u}_{2,i})\|_{0,\Omega} = \|\varepsilon(u_{2,i})\|_{0,\Omega_i}.$$

En appliquant l'estimation énoncée dans (corollaire 1.2.2, [24]) à  $\tilde{u}_{2,i}$ , on obtient

$$\frac{1}{2} \times \|\nabla u_{2,i}\|_{0,\Omega} = \frac{1}{2} \times \|\nabla \tilde{u}_{2,i}\|_{0,\mathbb{R}^{2+}} \leq \|\varepsilon(\tilde{u}_{2,i})\|_{0,\mathbb{R}^{2+}},$$

ainsi, (3.64) devient

$$\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}}\|\nabla u_{2,i}\|_{0,\Omega} \leq \frac{\delta_{10}}{m} + 4|\Gamma_i|^{\frac{1}{2}}\|g_p^\varepsilon\|_{\frac{1}{2},\Gamma_i}.$$

L'inégalité de Young donne

$$\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}}\|\nabla u_{2,i}\|_{0,\Omega} \leq \frac{\delta_{10}}{m} + 2(|\Gamma_i| + \|g_p^\varepsilon\|_{\frac{1}{2},\Gamma_i}^2). \quad (3.65)$$

En sommant sur  $i = \overline{1, m}$  et en utilisant l'inégalité triangulaire nous obtenons à partir de (3.65)

$$\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}}\|\nabla u'_2\|_{0,\Omega} \leq \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}} \sum_i \|\nabla u_{2,i}\|_{0,\Omega} \leq \delta_{10} + 2|\Gamma| + 2\|g_p^\varepsilon\|_{\frac{1}{2},\Gamma-\Gamma_0}^2. \quad (3.66)$$

Finalement, en combinant (3.59) et (3.66), on a

$$\begin{aligned} & \sqrt{\mu}\|\nabla(u_1 + u'_2)\|_{0,\Omega} \\ & \leq \frac{\delta_0}{m} \left( \frac{\text{diam}\Omega}{2} + 1 \right) + \sqrt{2}\delta_{10} + \left( \frac{\text{diam}\Omega}{2} + 1 \right) \|f\|_{0,\Omega} + 8(|\Gamma| + \|g_p^\varepsilon\|_{\frac{1}{2},\Gamma-\Gamma_0}^2). \end{aligned}$$

En considérant les estimations (3.49), (3.33) et en posant  $\delta_{11} := \frac{\delta_0}{m} \text{diam}\Omega + \sqrt{2}\delta_{10}$ , on a

$$\|\nabla u_\varepsilon^p\|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{\sqrt{\mu}} [8\delta_6^2 + \delta_{11} + \sqrt{\mu}\delta_2 + \left( \frac{\text{diam}\Omega}{2} + 1 \right) \|f\|_{0,\Omega} + 8(|\Gamma| + \|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma-\Gamma_0}^2)]. \quad (3.67)$$

En utilisant (3.25), l'estimation (3.67) devient

$$\|\nabla u_\epsilon\|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[ \frac{1}{2} + 8\delta_6^2 + \sqrt{\mu}\delta_2 + \delta_{11} + \left( \frac{\text{diam}\Omega}{2} + 1 \right) \|f\|_{0,\Omega} + 8(|\Gamma| + \|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma-\Gamma_0}^2) \right].$$

En choisissant correctement les nombres positifs  $\delta'_j$ , nous obtenons immédiatement

$$\|\nabla u_\epsilon\|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[ 1 + \left( \frac{\text{diam}\Omega}{2} + 1 \right) \|f\|_{0,\Omega} + 8(|\Gamma| + \|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma-\Gamma_0}^2) \right]. \quad (3.68)$$

Nous concluons le théorème pour  $u$  en appliquant le point (a) du lemme 3.2 et ce en faisant tendre  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0^2$  dans (3.68).  $\square$

Enfin, pour obtenir l'estimation  $H^1$  explicite de  $u_\epsilon$ , et donc celle de  $u$ , on utilise l'inégalité de Poincaré (3.54) pour majorer  $\|u\|_{0,\Omega}$  d'une part et l'estimation (3.8) d'autre part.

### 3.5 Quelques clarifications

En ce qui concerne l'application du résultat principal, théorème 2.1, établi dans [20] à la démonstration du lemmes 3.3 et du lemme 3.4, nous constatons les faits suivants. La partie de ce théorème utilisée dans la preuve du lemme 3.4 est l'équivalence entre les deux affirmations suivantes

- 1)  $X_i \in E_i$  est approximé par des fonctions régulières à supports disjoints de  $\Gamma - \Gamma_i$ .
- 2) Pour  $C_{1,2}$  – presque tout  $x \in \Gamma - \Gamma_0$ ,  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r) \cap \Omega} |X_i(y)| dy = 0$ .

Pour appliquer de manière efficace ce résultat, nous devons montrer que le fait  $X_i = 0$  sur  $\Gamma - \Gamma_i$  implique 2). En effet, soit  $x \in \Gamma - \Gamma_i$ . Nous supposons, par commodité, que  $x$  coïncide avec l'origine  $(0,0)$  de  $\mathbb{R}^2$ . Puisque  $\partial\Omega$  est un polygone alors, il existe  $c > 0$  indépendant de  $r$  tel que

$$|B(0,r) \cap \Omega| = c|B(0,r)|.$$

Par ailleurs, la fonction  $X_i$  solution du problème  $(P_1)$  est continue sur  $\bar{\Omega}$ . On peut le voir à l'aide de l'argument suivant : comme  $L(X_i) \in L^2(\Omega)$  alors  $X_i \in H_{loc}^2(\Omega)$ . Selon sa définition, la fonction  $u_\epsilon^p$  s'annule identiquement au voisinage des sommets du polygone  $\partial\Omega$ . On déduit aisément que  $\sigma(X_i) \cdot \vec{n} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ . Par conséquent, on a aussi

$$X_i \in H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega).$$

En outre, en utilisant l'injection de Sobolev adéquate,  $X_i \in C^0(\overline{\Omega})$ , d'où la continuité recherchée. Le théorème de différenciation de Lebesgue donne quant à lui :

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(x, r) \cap \Omega} |X_i(y)| \, dy &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(0, r) \cap \Omega} |X_i(y)| \, dy \\ &\leq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(0, r) \cap \Omega|} \int_{B(0, r) \cap \Omega} |X_i(y)| \, dy \\ &= |X_i(0)| = 0, \end{aligned}$$

nous en déduisons que l'affirmation 2) est valable pour tout  $x \in \Gamma - \Gamma_i$  et donc,  $C_{1,2}$ —presque partout dans  $\Gamma - \Gamma_0$ . La notation  $C_{1,2}$  fait référence à la 2—capacité de l'ensemble  $\Gamma - \Gamma_i$ .

Enfin, on peut montrer la continuité de la fonction  $Y_i$  qui résout le problème  $P_4$  en remarquant que  $\sigma(Y_i) \cdot \vec{n} = g_p^\epsilon \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma - \Gamma_i \cup \Gamma_0)$  et en appliquant le même argument que celui utilisé pour justifier la régularité de la solution  $u$  du problème (3.1). On peut facilement déduire que  $Y_i \in C^0(\overline{\Omega})$  et ainsi, on obtient les mêmes conclusions que pour  $X_i$ .

## Conclusion

Du point de vue de l'analyse numérique, l'estimation du théorème (3.1) est intéressante. En effet, les estimations d'erreur en éléments finis du type

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch \|\nabla u\|_{0,\Omega}$$

font intervenir la quantité  $\|\nabla u\|_{0,\Omega}$ . En supposant que la constante  $C$  peut être explicitement calculée, il est alors possible de majorer explicitement  $\|\nabla u\|_{0,\Omega}$  ce qui entraîne une meilleure estimation de  $\|u\|_{0,\Omega}$ .

Une autre caractéristique intéressante de l'estimation (3.8) qui la rend efficace est qu'elle ne dépend pas des paramètres caractéristiques du domaine polygonal  $\Omega$ , à savoir, la longueur des arêtes, leur nombre ainsi que les mesures des angles. L'estimation est donc indifféremment applicable à tous les polygones. Tout cela permet la possibilité de généraliser ce résultat, par approximation conséquente à un domaine de classe  $C^1$ .

# Chapitre 4

## Étude d'un problème couplé et application à l'optimisation de structure

### 4.1 Introduction et position du problème

Dans ce chapitre, notre objectif est l'étude numérique du comportement d'une structure déformable, représentée par un barrage hydraulique en béton armé, soumise à une force hydrodynamique. Il s'agit donc d'un problème classique d'interaction fluide-structure. De plus, le problème considéré peut constituer une contribution intéressante si nous souhaitons prendre aussi en compte l'effet d'un tremblement de terre sur la stabilité du barrage.

Le problème régissant cet équilibre est résolu en mettant en œuvre un code numérique d'éléments finis pour chacun des problèmes modélisant le comportement de la structure d'une part, et du fluide d'autre part. L'interaction sera prise en compte en appliquant une procédure de couplage fluide-structure. Puis, nous identifierons les paramètres mécaniques qui assurent la stabilité de la structure. Les données obtenues sont ensuite utilisées pour optimiser le volume du barrage en prenant en compte les contraintes mécaniques du problème. Finalement, le problème d'optimisation sera résolu en utilisant la méthode de Hooke-Jeeves qui sera appliquée à la forme pénalisée du problème de minimisation.

Le barrage en béton armé occupe un domaine bidimensionnel  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  dont la forme géométrique est représentée dans la figure 4.1. Cette structure est soumise à la force hydrodynamique sur les cotés E2 et E3.

La partie de la structure désignée par **Rf** est variable et constitue le renforcement triangulaire du barrage. Le problème d'optimisation sera réalisé sur cette partie de la structure. Ce triangle **Rf** est caractérisé par la hauteur  $H$  et l'angle  $\theta$ . Afin de constituer un ensemble admissible pour ces deux paramètres, il faut identifier les critères mécaniques

selon lesquels le barrage est stable. Il y a principalement trois critères :

- Critère de non-dislocation,
- Critère de non-soulèvement,
- Critère de non-renversement.

Ces critères se traduisent comme des contraintes du problème d'optimisation. Cette structure étant constituée par un milieu déformable, son équilibre est régi par le système d'équations élasto-dynamique de Lamé. Ce modèle fait intervenir le tenseur des contraintes de second ordre  $\sigma$ . De plus, il est nécessaire de prendre en compte l'évolution du système hydrodynamique dans le temps. On est donc amené à considérer une situation dépendante du temps. La modélisation se fera donc à l'aide de l'équation de Lamé hyperbolique du second ordre en temps couplée aux équations de Navier-Stokes. On a donc à résoudre les problèmes suivants :

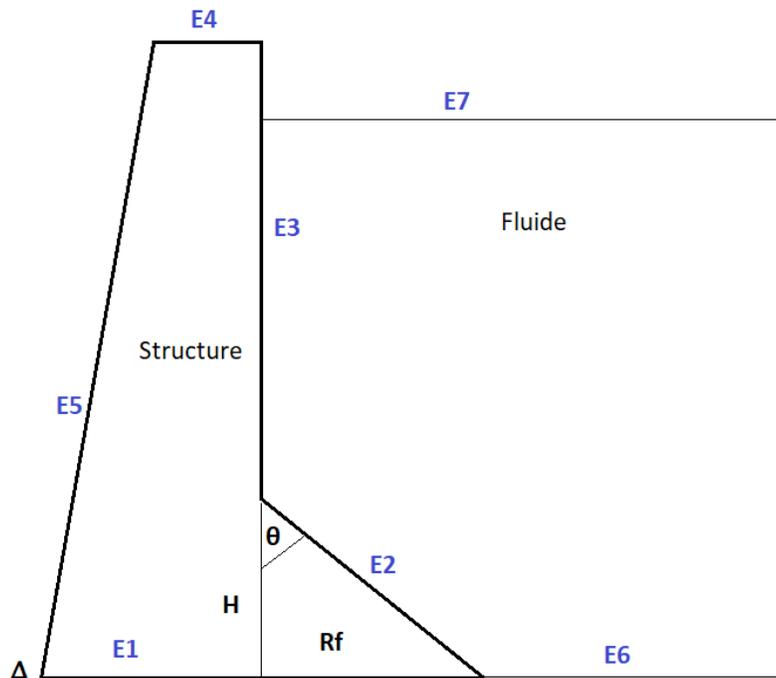


FIGURE 4.1 – Forme géométrique du barrage en deux dimensions.

### 4.1.1 Partie fluide

Pour le fluide, le modèle est donné par les équations de Navier-Stokes incompressibles

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v - g \right) + \nabla p - \mu_f \Delta v = 0 \quad \text{dans } \Omega_f(t), \end{array} \right. \quad (4.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot v = 0 \quad \text{dans } \Omega_f(t), \end{array} \right. \quad (4.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v(0, x) =: v_f^0(x) = 0 \quad \text{dans } \Omega_f(0), \end{array} \right. \quad (4.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v(t, x) = v_f^d(t, x) \quad \text{sur } \Gamma_f^d(t), \end{array} \right. \quad (4.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(v, p) \cdot \vec{n} = h \quad \text{sur } \Sigma(t), \end{array} \right. \quad (4.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(v, p) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } E7(t), \end{array} \right. \quad (4.6)$$

avec  $\Omega_f(t)$  représentant le domaine occupé par le fluide à l'instant  $t$ ,  $\Sigma(t) \subset E2 \cup E3$  désigne la partie du bord de  $\Omega_f(t)$  en contact avec la structure,  $\Gamma_f^d(t)$  désigne la partie du bord de  $\Omega_f(t)$  en contact avec le sol,  $\rho_f$  et  $g$  représentent respectivement la densité volumique du fluide et la force extérieure subie par le fluide et qui est due à la gravité. Les fonctions inconnues  $v$  et  $p$  représentent respectivement la vitesse et la pression,  $\mu_f$  est la viscosité dynamique du fluide, on désigne par  $\vec{n}$  la normale extérieure sortante définie sur chaque point du bord. La fonction constante  $g$  représente la force extérieure due à la gravitation. L'intervalle  $(0, T)$  désigne l'intervalle de temps. Dans les équations (4.5) et (4.6), on a désigné par

$$\sigma(v, p) := \mu_f(\nabla v + \nabla^t v) - pI$$

le tenseur des contraintes de Cauchy.

L'équation (4.1) représente la conservation de la quantité de mouvement. L'équation (4.2) représente la condition d'incompressibilité du fluide. L'équation (4.3) décrit la condition initiale du problème, et l'équation (4.4) représente la condition au bord de type Dirichlet supposée sinusoïdale pour prendre en compte l'effet d'un tremblement de terre éventuel. Les équation (4.5) et (4.6) expriment les conditions de Neumann et concerne directement le champs de pression via le tenseur des contraintes. Plus précisément, l'équation (4.6) exprime le fait que la pression est nulle sur la surface du réservoir fluide.

**Remarque 4.1.** Il y a lieu de remarquer la dépendance en temps du domaine sur lequel le problème de Navier-Stokes (4.1)-(4.6) est posé. Par conséquent, il est indispensable de reformuler ce problème de manière à ce que les variables s'expriment dans un référentiel Lagrangien, ce qui permet d'exprimer le problème dans un domaine cylindrique de la forme  $(0, T) \times \Omega_f$ , où  $\Omega_f := \Omega_f(0)$  désigne la configuration géométrique du réservoir fluide à l'instant initial.

Pour ce qui est du traitement numérique et sous réserve de formuler le problème en variables Lagrangiennes, la discrétisation des équations de Navier-Stokes se fait en différences finies pour la variable temporelle et en éléments finis pour la variable spatiale. Pour plus de détails concernant l'aspect variationnel et numérique de l'équation de Navier-Stokes, on renvoie le lecteur vers [40], [65]. On introduit les espaces

$$V^d = \{w \in H^1(\Omega) : w|_{\Gamma_f^d} = v_f^d\},$$

$$V = \{w \in H^1(\Omega) : w|_{\Gamma_f^d} = 0\}, \quad M = L^2(\Omega).$$

Soit  $\zeta_h^f = \cup K_i$  un maillage triangulaire du domaine  $\Omega_f$ . On définit les sous-espaces d'approximation interne,  $V_h \subset V$ ,  $M_h \subset M$  et ce en utilisant les éléments finis  $\mathbb{P}_2$  pour  $V_h$  et les éléments finis  $\mathbb{P}_1$  pour  $M_h$ . On a besoin aussi de considérer,  $v_f^{d,h}$ , l'interpolée de Lagrange de la donnée au bord de Dirichlet  $v_f^d$ .

Afin que la forme discrète de la formulation variationnelle du système d'équations de Navier-Stokes soit bien posée, il est bien connu, cf. [41] et la section 2 de [42], que les espaces discrets de vitesse et de pression  $V_h$  et  $M_h$  doivent satisfaire une condition inf – sup donnée par

$$\inf_{q_h \in M_h} \sup_{w_h \in V_h} \frac{(q_h, \operatorname{div} \cdot w_h)}{|w_h|_V |q_h|_M} \geq \beta > 0.$$

La formulation semi-discrète des équations de Navier-Stokes s'écrit : pour tout  $t \in (0, T]$ , trouver  $(v_h, p_h) \in V_h^d \times M_h$  telle que

$$\begin{aligned} (\rho \partial_t v_h, w_h) + (\rho v_h \cdot \nabla v_h, w_h) + (\mu(\nabla v_h + \nabla^T v_h), \nabla w_h) - (p_h, \nabla \cdot w_h) \\ + (\nabla \cdot v_h, q_h) = (\rho_f g, w_h) + (h, w_h)_\Sigma. \end{aligned} \quad (4.7)$$

pour tout  $(w_h, q_h) \in V_h \times M_h$ , avec  $v_h(0, x) = v_f^0$ . On passe à la discrétisation en temps en utilisant un schéma implicite. Pour cela on commence par subdiviser l'intervalle de temps  $[0, T]$  en  $N_t$  sous-intervalles de taille égales  $\Delta t = \frac{T}{N_t}$  et on note  $t_n = n\Delta t$ , pour  $n = 0, \dots, N_t$ . Par ailleurs, on désigne par  $v_h^n$  et  $p_h^n$  les approximations de  $v_h$  et  $p_h$  aux instants  $t_n$  respectivement. On approxime la dérivée en temps de la vitesse comme suit :

$$\partial_t v_h \approx \frac{v_h^{n+1} - v_h^n}{\Delta t}$$

L'approximation implicite de l'équation de Navier-Stokes est donnée par : étant donnée

$v_h^n$ , pour  $n > 0$  trouver  $(v_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in V_h \times M_h$  telles que

$$\begin{aligned} & \left( \rho \frac{v_h^{n+1} - v_h^n}{\Delta t}, w_h \right) + (\rho v_h^{n+1} \cdot \nabla v_h^{n+1}, w_h) \\ & + (\mu(\nabla v_h^{n+1} + \nabla^T v_h^{n+1}), \nabla w_h) - (p_h^{n+1}, \nabla \cdot w_h) + (\nabla \cdot v_h^{n+1}, q_h) \\ & = g((w_h, q_h); t_{n+1}) + (h^{n+1}, w_h)_\Sigma + (\rho_f g, w_h). \end{aligned} \quad (4.8)$$

pour tout  $(w_h, q_h) \in V_h \times M_h$ . Dans l'équation (4.8), la fonctionnelle  $g(\cdot; t) : V_h \times M_h \rightarrow \mathbb{R}$  rend compte de l'action de la donnée non homogène de Dirichlet  $v_h|_{\Gamma_f^d} = v_f^{d,h}$ .

### 4.1.2 Partie structure

Pour la structure, elle est modélisée par l'équation de Lamé hyperbolique

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{dt^2} - \operatorname{div} \sigma(u) = g \rho_s \text{ dans } (0, T) \times \Omega_s, & (4.9) \\ \sigma(u) \cdot \vec{n} = p(t, x) \text{ sur } (0, T) \times \Sigma, & (4.10) \\ \sigma(u) \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } (0, T) \times ((E3 - \Sigma) \cup E4 \cup E5), & (4.11) \\ u(t, x) = 0 \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_s^d, & (4.12) \\ u(0, x) = u_s^0(x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_s^1(x) \text{ dans } \Omega_s, & (4.13) \end{cases}$$

où  $\Omega_s$  désigne le domaine occupé par le solide,  $\Sigma := \Gamma_s^N \subset E2 \cup E3$  la partie du bord de  $\Omega_s$  en contact avec le fluide et  $\Gamma_s^d$  la partie du bord de  $\Omega_s$  en contact avec le sol. On a désigné  $\rho_s$  la densité volumique du béton armé et  $\vec{n}$  le vecteur normal pointant vers l'extérieur défini en chaque point du bord  $\partial\Omega_s$ , la fonction  $p$  apparaissant dans (4.10) représente la pression.

L'équation (4.9) traduit l'équilibre dynamique de la structure. L'équation (4.10) représente la condition de Neumann qui prend en compte la force induite par la pression du fluide. L'équation (4.11) représente la condition de Neumann homogène définie sur la partie du bord de  $\Omega_s$  sur laquelle le domaine ne subit pas de forces extérieures. L'équation (4.12) représente la condition au bord de type Dirichlet homogène. Les équations dans (4.13) décrivent respectivement la condition initiale en déplacement et en vitesse du problème.

Dans l'équation (4.9),  $\sigma$  désigne le tenseur des contraintes. Il est défini en terme du tenseur des déformations,  $\varepsilon(u)$ , qui à son tour peut être défini en utilisant le champ de déplacement bidimensionnel  $u = (u_1, u_2)$  comme suit

$$\varepsilon(u) := \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^t u). \quad (4.14)$$

Les tenseurs de contraintes et de déformations sont liés entre eux par la loi Hook qui s'écrit :

$$\sigma(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda \operatorname{Tr} \varepsilon(u) \operatorname{Id} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

où  $\mu$  et  $\lambda$  désignent les coefficients de Lamé. Les conditions aux limites permettent d'asseoir le caractère bien posé des deux problèmes (4.1)-(4.6) et (4.9)-(4.13). La dépendance en temps des seconds membres, mis à part le poids de la structure, mettent bien en évidence la nature dynamique du problème. Par ailleurs, d'un coté, la condition de Neumann rend compte de l'interaction qui existe entre la structure et le réservoir fluide sur  $\Sigma$ . D'un autre coté, la condition de Dirichlet non homogène, dépendant toujours du temps, rend compte quant à elle de l'effet de l'excitation sismique qu'exerce le sol sur le fluide.

On écrit le problème discrétisé associé aux équations (4.9)-(4.13), le système en question est formulé en termes du champ vectoriel des déplacements.

Tout comme pour le cas des équations de Navier-Stokes, la discrétisation des équations de Lamé se fait en différences finies pour la variable temporelle et en éléments finis pour la variable spatiale.

Soit  $\zeta_h^s = \cup K_i$  un maillage triangulaire du domaine  $\Omega_s$ . On applique la méthode des éléments finis pour la variable spatiale en utilisant l'espace,  $\mathbb{P}_1$ , des polynômes du premier degré. L'espace d'approximation interne est défini par :

$$V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}), v = 0 \text{ sur } \Gamma_s^d, v|_{K_i} \in \mathbb{P}_1\}.$$

En utilisant un schéma numérique implicite, centré du second ordre, pour la variable temporelle et connaissant  $u_h^0, u_h^1$ , la forme discrétisée du problème s'écrit : étant donné  $u_h^{n-1}, u_h^n$  trouver  $u_h^{n+1} \in V_h$  tel que  $\forall v_h \in V_h$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_s} \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{(\Delta t)^2} \phi_h \, dx + \int_{\Omega_s} \varepsilon(u_h^{n+1}) \varepsilon(\phi_h) \, dx + \int_{\Omega_s} \operatorname{div} u_h^{n+1} \operatorname{div} \phi_h \, dx \\ & = \int_{\Omega_s} \rho_s g \phi_h \, dx + \int_{\Sigma} p \phi_h \, d\sigma. \end{aligned} \quad (4.16)$$

avec  $u_h(0, x) = 0$  et  $\partial_t u_h(0, x) = u_s^1(x)$ . L'implémentation d'un programme sur MatLab nous permet de résoudre numériquement ce problème d'élasticité discret. Le tenseur des contraintes est obtenu, d'une part en résolvant numériquement l'équation discrétisée (4.16), et d'autre part en utilisant (4.14) et (4.15).

### 4.1.3 Procédure de couplage

#### Description

Il existe deux points de vue principaux dans la manière de considérer le couplage entre le fluide et la structure. Ces deux points conduisent à considérer deux méthodes de résolution différentes.

La méthode monolithique, qui consiste à résoudre les problèmes considérés en écrivant le problème global sous forme variationnelle. L'avantage de cette méthode réside dans le fait qu'on obtient un couplage fort et rigoureux entre les deux milieux ; cependant son implémentation sur machine n'est pas facile.

La seconde méthode, que nous adopterons dans ce travail, consiste en un couplage partitionné. On a donc à résoudre alternativement les équations de Navier-Stokes et les équations de Lamé hyperboliques. On résume dans l'Algorithme 1, ci-dessous, le schéma général de la procédure d'interaction fluide-structure, **IFS**.

On désigne par  $v_f$  le champs des vitesses aux nœuds du maillage du réservoir fluide et  $v_s$  le champs des vitesses aux nœuds du maillages de la structure. Le couplage consiste à imposer l'égalité des composantes du champs des vitesses  $v_f$  et  $v_s$  et de pression  $p$  sur l'interface de contact entre le fluide et la structure. La résolution de l'équation de Navier-Stokes fournit la vitesse  $v_f$  et la pression en tout point du maillage fluide. La pression sert à calculer la force de traction à l'interface fluide-structure. L'équation de Lamé utilise cette force de traction comme condition de Neumann et fournit à son tour les valeurs du champs des vitesses  $v_s$  en tout point du maillage de la structure. En résolvant l'équation de Lamé on obtient également le tenseur des déformations par la formule

$$\varepsilon(u) := \frac{1}{E} ((1 + \nu)\sigma - \nu \text{Tr}(\sigma) \mathbf{I}),$$

où  $E$  et  $\nu$  désignent respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson.

---

#### Algorithm 1 : la procédure IFS

---

```

for  $t = 1$  à  $t_f$  do
  while IFS ne converge pas do
    mettre à jour le maillage
    résoudre Navier-Stokes sur  $\Omega_f$ 
    résoudre Lamé sur  $\Omega_s$ 
    calculer le déplacement et la vitesse du maillage
  end while
end for

```

---

Par ailleurs, en utilisant la formule (4.14) définissant les composantes du tenseur des déformations, on obtient la relation suivante qui nous permet d’avoir l’expression du déplacement  $u$  en fonction de la déformation  $\varepsilon(u)$

$$u^1(x, y) = \int \varepsilon_{xx}(s, y) \, ds, \quad u^2(x, y) = \int \varepsilon_{yy}(x, s) \, ds.$$

Ce processus de couplage convergera quand  $\|v_s(t, \cdot) - v_f(t, \cdot)\|_{\infty, \Sigma}$  deviendra suffisamment petit. Si ce critère d’arrêt de la procédure de couplage fluide-structure est satisfait, on recommence de nouveau la procédure de couplage en résolvant l’équation de Navier-Stokes au pas de temps suivant.

### Mise à jour du maillage

Une fois calculées, les valeurs du champs des déplacements aux nœuds du maillage de la structure seront rajoutées aux coordonnées des nœuds relatifs à la configuration précédente du maillage, et ce pour obtenir la nouvelle distribution des nœuds. On opérera de la même façon pour le fluide car le maillage doit être mis à jour à chaque pas de temps.

La loi qui régit le mouvement du maillage peut être précisée en considérant le maillage comme étant un solide. Il faut savoir qu’on est libre quant au choix de l’opérateur supposé régir le mouvement du maillage. Ceci est en fait lié à ce qu’on appelle la régularisation du maillage, une technique née dans le cadre de l’application de la méthode ALE, cf. sous-section suivante, voir par exemple [48], [49]. Cela conduit à résoudre l’équation de Laplace pour déterminer la vitesse du maillage  $v_m$  :

$$\Delta(cv_m) = 0,$$

où  $c$  est un coefficient de diffusion. Pour le choix de l’équation de Laplace comme loi régissant le mouvement du maillage, on pourra se référer à [57]. Cette équation est résolue sur le domaine fluide avec comme condition aux limites la vitesse  $v_s$  calculée sur l’interface fluide-structure, on impose une condition de Dirichlet homogène sur le reste du bord du domaine fluide  $\Omega_f$ . On résout cette équation de Laplace. La vitesse  $v_m$  ainsi calculée sera utilisée pour obtenir le champs de déplacement des nœuds du maillage qui servira à déterminer les nouvelles positions des nœuds du maillage fluide  $\Omega_f$  d’une part et d’autre part, à réécrire les équations de Navier-Stokes à résoudre durant le pas de temps suivant, voir l’équation (4.17) ci-dessous. Il faut bien noter que même si le maillage est déformé au cours de l’interaction, les positions relatives des nœuds ne changent pas.

## Formulation ALE

La description Lagrangienne-Eulérienne Arbitraire (ALE), (cf. [49], [50]), est l'une des méthodes les plus utilisées et le cadre le plus approprié pour résoudre le problème d'interaction fluide-structure. Elle en représente une approche fiable car elle tient compte du mouvement du maillage dans la résolution numérique de ce type de problème. Par approche fiable, nous entendons le fait que les tractions sur la structure peuvent être récupérées avec plus de précision.

Il s'agit d'effectuer une adaptation continue du maillage à chaque pas de temps, c'est à dire sans modification de sa topologie. La résolution se fait en tenant compte du déplacement de la frontière. La formulation mathématique de l'équation du mouvement est commodément décrite par rapport à un référentiel eulérien. Cependant, ceci est incompatible avec la formulation lagrangienne, qui est plus appropriée pour décrire la partie solide. La méthodologie ALE combine le meilleur des caractéristiques de ces deux formulations différentes. L'essence de l'ALE est que la loi du mouvement du maillage peut être arbitrairement choisie, cf. [49].

Cette méthode est couteuse, car la partie du maillage du domaine fluide en contact avec le solide suit le mouvement de ce dernier, ce qui exige l'adaptation de la position des nœuds internes du maillage fluide aux déformations de la structure à chaque étape tout en conservant la qualité ainsi que la validité du maillage. Ceci revient entre autres à garantir l'absence d'éventuelles distorsions.

Les équations qui gouvernent le mouvement du fluide sont formulées dans le cadre d'un repère Eulérien dans lequel le domaine ne suit pas le mouvement propre du maillage. Soit  $\Omega_f \subset \mathbb{R}^2$ , le domaine de référence et soit  $v_m$  le champs de vitesse du maillage. La forme convective de l'équation de conservation des moments pour le fluide incompressible s'écrit dans la formulation ALE :

$$\rho_f \left( \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{v_m} + (v - v_m) \cdot \nabla v - g \right) + \nabla p - \mu_f \Delta v = 0 \quad (4.17)$$

où  $\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{v_m}$  est la dérivée en temps en laissant fixée  $v_m$ . On voit bien que la formulation ALE affecte le terme convectif de l'équation de Navier-Stokes.

La vitesse  $(v - v_m)$  représente donc la vitesse du fluide relativement au maillage.

## Données sismographiques

Le sismomètre fournit un sismogramme qui est un enregistrement sous forme de graphiques représentant le déplacement, la vitesse ainsi que l'accélération en fonction du temps

et de la position. Pour la détection des tremblements de terre, l'étude des sismogrammes apporte de précieuses informations. Leur décryptage permet, par exemple, de connaître la vitesse de propagation des ondes, leur nature mais aussi à localiser l'épicentre. L'étude de l'onde sismique générée par ces données sismographiques conjuguées avec une connaissance préalable du sol sur lequel la structure à été construite, sont à même de nous renseigner sur l'effet direct du séisme sur l'interface Sol-Structure en terme de déplacements, cf. [69]. Pour le cas qui nous concerne, on fait usage de la fonction fournit par le sismogramme et qui donne la vitesse et le déplacement en fonction du temps et de la position pour pouvoir prescrire la condition de Dirichlet pour le problème fluide sur la partie du bord en contact avec le sol. Cette fonction est définie sur la parties du bord  $\Gamma_f^d \times (0, T)$  et désignées :

$$(t, x) \rightarrow v_f^d(t, x).$$

## 4.2 Étude mathématique de la solution du problème couplé

### Présentation du problème couplé

Pour former le problème couplé du système parabolique de Navier-Stokes (4.1)-(4.6) et du système hyperbolique de Lamé (4.9)-(4.13), il est très souhaitable d'uniformiser les référentiels dans lesquels sont exprimés les deux problèmes, ceci pour pouvoir effectuer le couplage sur l'interface  $\Sigma$ . L'écriture en variables lagrangiennes est très adaptée aux solides déformables. Donc, on réécrit les équations de Navier-Stokes (4.1)-(4.6) en variables lagrangiennes. Pour cela, on note  $\Omega_f := \Omega_f(0)$  la configuration géométrique du domaine fluide à l'instant  $t = 0$  et on introduit les fonctions inconnues suivantes

$$\tilde{v}(t, y) = v(t, X(t, y)) \quad ; \quad \tilde{p}(t, y) = p(t, X(t, y))$$

où  $X(., t)$  désigne, pour chaque temps  $t$ , un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\Omega_f$  vers  $\Omega_f(t) = X(t, \Omega_f)$  pour tout  $t \in [0, T_\alpha]$  et satisfaisant à l'équation différentielle

$$\frac{\partial X}{\partial t}(t, y) = v(t, X(t, y)), \quad X(0, y) = y \quad \text{pour tout } y \in \Omega_f.$$

La borne supérieure  $T_\alpha$  est définie explicitement dans le lemme 6.1 dans [3]. Maintenant que les vitesses du fluide et de la structure s'expriment selon le même type de variables, on peut imposer la condition de couplage, et qui s'écrit :

$$\tilde{v} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad ; \quad \sigma(\tilde{v}, \tilde{p}) \cdot n = \sigma(u) \cdot n + H(\tilde{v}, \tilde{p}) \quad \text{sur } (0, T) \times \Sigma,$$

c'est à dire qu'on impose l'égalité des champs de vitesse et des contraintes sur l'interface de contact  $\Sigma$  et ce en tout les temps  $t$ . Il en résulte du couplage des équations non linéaires de Navier-Stokes avec l'équation hyperbolique de Lamé le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - \mu_f \Delta \tilde{v} + \nabla \tilde{p} = F(\tilde{v}, \tilde{p}) \text{ dans } \Omega_f^T, \\ \operatorname{div} \tilde{v} = G(\tilde{v}) \text{ dans } \Omega_f^T, \\ \tilde{v}(0, \cdot) = 0 \text{ dans } \Omega_f, \quad \tilde{v} = u_f^I \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_f^d, \\ \tilde{v} = \frac{\partial u}{\partial t} \text{ et } \sigma(\tilde{v}, \tilde{p}) \cdot n = \sigma(u) \cdot n + H(\tilde{v}, \tilde{p}) \text{ sur } \Sigma^T, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div} \sigma(u) = g \rho_s \text{ dans } \Omega_s^T, \\ u(0, \cdot) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, \cdot) = u_s^1 \text{ dans } \Omega_s, \quad u = 0 \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_s^d, \\ \sigma(u) \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } (0, T) \times (\partial \Omega_s - \Sigma \cup \Gamma_s^d), \\ X(t, y) = y + \int_0^t \tilde{u}(s, y) ds, \quad \forall y \in \Omega_f \text{ et } \forall t \in [0, T], \\ \Omega_f(t) = X(t, \Omega_f). \end{array} \right. \quad (4.18)$$

où l'on a noté  $\Sigma^T := (0, T) \times \Sigma$ ,  $\Omega_f^T = (0, T) \times \Omega_f$  et  $\Omega_s^T = (0, T) \times \Omega_s$ . Pour obtenir ces équations, on commence par appliquer des transformations aux équations qui composent le modèle couplé. Ceci afin que les termes non-linéaires,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  résultants de ces transformations, apparaissent uniquement au second membre des équations. Posons

$$\tilde{v} = w + \tilde{v}^0, \quad \tilde{p} = q + \tilde{p}^0, \quad u = z + u^0,$$

où  $(\tilde{v}^0, \tilde{p}^0, u^0)$  est solution du système couplé (4.18) avec des seconds membres nuls i.e.  $(F, G, H) \equiv (0, 0, 0)$ . Donc, par linéarité des opérateurs différentiels intervenants dans le problème couplé,  $(v, q, z)$  est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} - \mu_f \Delta w + \nabla q = F(w + \tilde{v}^0, q + \tilde{p}^0) \text{ dans } \Omega_f^T, \\ \operatorname{div} w = G(w + \tilde{v}^0) = \operatorname{div} g(w + \tilde{v}^0) \text{ dans } \Omega_f^T, \\ w(0, \cdot) = 0 \text{ dans } \Omega_f, \quad w = 0 \text{ sur } \Gamma_f^d, \\ w = \frac{\partial z}{\partial t} \text{ et } \sigma(w, q) \cdot n = \sigma(z) \cdot n + H(w + \tilde{v}^0, q + \tilde{p}^0) \text{ sur } \Sigma^T, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \operatorname{div} \sigma(z) = g \rho_s \text{ dans } \Omega_s^T, \\ \sigma(z) \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } (0, T) \times (\partial \Omega_s - \Sigma), \quad z = 0 \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_s^d, \\ u(0, \cdot) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, \cdot) = 0, \text{ dans } \Omega_s^T, \end{array} \right.$$

$$X^{k+1}(t, y) = y + \int_0^t \tilde{u}^{k+1}(s, y) ds, \quad \text{pour tout } y \in \Omega_f \text{ et tout } t \in [0, T],$$

$$\Omega_f^{k+1}(t) = X^{k+1}(t, \Omega_f).$$

Dans ce qui suit, on souhaite exposer quelques idées qui permettent d'adapter le point de vue adopté dans [3] à notre situation. Un enjeu très important de la preuve de l'existence et de la régularité de la solution du problème couplé (4.18) est celui de trouver les bons espaces dans lesquels rechercher les solutions, faibles dans un premier temps. Soient  $l, \beta$ ,  $\frac{1}{2} \leq l \leq 1$ ,  $\beta \geq 0$ . Suivant les hypothèses (cf. [3], p.554-555), on note  $K_0$  la constante

$$K_0 = \|v_0\|_{H^{1+l}(\Omega_f)} + \|u_1\|_{H^{\frac{1}{2}+l+\beta}(\Omega_s)}.$$

On note  $C_1 \geq 1$ , cf. Théorème 5.1, p.570, [3], la constante telle que

$$\begin{aligned} & \|\tilde{v}^0\|_{H^{2+l, 1+\frac{1}{2}}(\Omega_f^T)} + \|\nabla \tilde{p}^0\|_{H^{l, \frac{1}{2}}(\Omega_f^T)} + \|\tilde{p}^0\|_{H^{\frac{1}{2}+l, \frac{1}{4}+\frac{1}{2}}(\Sigma^T)} \\ & \leq C_1 \left( \|v_0\|_{H^{1+l}(\Omega_f)} + \|u_1\|_{H^{\frac{1}{2}+l+\beta}(\Omega_s)} \right). \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} \tilde{K}_0 = & \|\mathcal{G}(\tilde{v}^0)\|_{L^2(0, T; H^{1+l}(\Omega_f)) \cap H^{\frac{1}{2}}(0, T; H^1(\Omega_f))} + \|\mathcal{G}(\tilde{v}^0)\|_{(0, T) \times \Sigma} \|_{H^{\frac{1}{2}+l, \frac{1}{4}+\frac{1}{2}}(0, T \times \Sigma)} \\ & + \|g(\tilde{v}^0)\|_{H^{1+\frac{1}{2}}(0, T; L^2(\Omega_f))}. \end{aligned}$$

avec  $g(\tilde{v}) = (I - J_Y)\tilde{v}$ , où  $J_Y$  est l'inverse de la matrice Jacobienne de la transformation  $X$ . On pose aussi  $M_0 = 3C_1(K_0 + \tilde{K}_0) + 3$ . Soit  $T_f$  un temps final arbitrairement fixé. Pour  $0 < T < T_f$ , on introduit les espaces fonctionnels suivants

$$\begin{aligned} E_{T, M_0, u_0} = & \{ \tilde{v} \in H^{1+\frac{1}{2}}(0, T; L^2(\Omega_f)) \cap L^2(0, T; H^{1+\frac{1}{2}}(\Omega_f)) ; \\ & \tilde{u}_0(\cdot, 0) = u_0; \|\tilde{u}\|_{H^{l+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}}(\Omega_f^T)} \leq M_0 \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{T, M_0, u_0} = & \{ p \in L^2(0, T; H^{1+l}(\Omega_f)) \cap H^{\frac{1}{2}}(0, T; H^1(\Omega_f)) \mid p|_{\Sigma^T} \in H^{\frac{1}{2}+l, \frac{1}{4}+\frac{1}{2}}(\Sigma^T), \\ & \|p|_{\Sigma^T}\|_{H^{\frac{1}{2}+l, \frac{1}{4}+\frac{1}{2}}(\Sigma_S^T)} \leq M_0, p|_{\Gamma_S \times \{0\}} = 2\nu\varepsilon(u_0) \vec{n} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_S} \}, \end{aligned}$$

$$X_T = \{ X \in H^1(0, T; H^{2+l}(\Omega_f)) \cap H^{2+\frac{1}{2}}(0, T; L^2(\Omega_f)) \mid \|\nabla_y X - I\|_{C(\overline{\Omega_f^T})} \}.$$

Le résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème couplé énoncé dans le Théorème 2.1, [3] est le suivant

**Théorème 4.1.** *Supposons que*

$$v_0 \in H^{1+l}(\Omega_f), \quad \operatorname{div} v_0 = 0, \quad \text{et} \quad u_1 \in H^{\frac{1}{2}+l+\beta}(\Omega_s)$$

avec  $l \in (\frac{1}{2}, 1)$  et  $\beta \geq 0$  et que les conditions de compatibilité suivantes soient satisfaites

$$v_{0|\Sigma} = u_{1|\Sigma}, \quad 2\nu(\varepsilon(v_0) \cdot \vec{n}) \cdot \vec{\tau} = 0 \text{ sur } \Sigma,$$

pour tout vecteur unitaire,  $\vec{\tau}$ , tangent à  $\Sigma$ . Alors il existe  $T > 0$  tel que le système (4.18) admette une unique solution  $(\tilde{v}, \tilde{p}, u, X)$  dans l'espace

$$E_{T, M_0, u_0} \times P_{T, M_0, u_0} \times C^0([0, T]; H^{\frac{7}{4} + \frac{l}{2}}(\Omega_s)) \cap C^1([0, T]; H^{\frac{3}{4} + \frac{l}{2}}(\Omega_s)) \times X_T.$$

Il est à souligner le fait que la solution unique prédite par ce théorème est locale en temps. Dans ce qui suit, on discute d'une adaptation de la procédure de preuve présentée par les auteurs dans l'article [3], et qui débouche sur le Théorème 4.1 énoncé ci-dessus, à notre situation pour le cas  $l = \frac{1}{2}$ . On note les différences suivantes avec la situation considérée dans l'article :

- Forme géométrique de la surface de contact fluide-structure qui peut être non plate, ou même plus arbitraire.
- Nature mixte de la condition au bord de type Dirichlet-Neumann.
- prise en compte de la donnée de Dirichlet non-homogène pour la partie fluide du problème (équation de Stokes puis équation de Navier-Stokes).

### Considérations et résultats auxiliaires

Nous nous proposons dans ce qui suit de donner quelques remarques sur l'étude théorique d'existence, d'unicité et de régularité pour le problème couplé (4.18). Cette étude à été intégralement et complètement traitée dans l'article [51].

Par ailleurs, le même type d'étude pour le problème couplé, (4.18), à aussi été menée dans [3] dans le cas particulier où la surface de contact fluide-structure est plate. La nécessité d'une telle condition réside, d'après les auteurs, dans le fait de pouvoir démontrer le lemme 3.2 dans [3] et ce dans le but de récupérer une régularité supplémentaire pour  $\sigma(u) \cdot \vec{n}$  sur  $\Sigma$ , voir aussi la remarque 3.1 du même article.

Pour adapter la preuve donné dans [3] à notre situation, on démontre, pour  $l = \frac{1}{2}$ , un résultat analogue au Théorème 3.3, p.563 dans [3] ou ce qui revient au même, au lemme 3.1 p.560. Les autres résultats auxiliaires restent valables dans notre situation à la seule et importante différence que la résolution devrait se faire dans des espaces moins réguliers et donc plus larges. Le fait de se restreindre à de tels espaces permet d'adapter le théorème 5.1 p.570 dans [3] à notre situation, qui est en somme le seule modification qui exige un travail supplémentaire. Une autre raison fait que nous devons nous résigner à une telle

restriction est que le problème est formulé en terme d'une condition au bord mixte de type Dirichlet-Neumann. Le traitement de cette condition diffère assurément de celle abordée dans l'énoncé du (théorème 5.1, [3]), et du (Théorème 3.3, [3]) qui lui est subordonné, et qui consiste à étudier un problème de Dirichlet sur tout le bord. Par ailleurs, cette restriction à aussi comme avantage de nous dispenser de devoir adapter le lemme 3.2 dont la démonstration est très délicate.

On souligne que la condition de la forme plate de l'interface de contact, qui est une hypothèse importante dans [3], n'est pas indispensable dans notre situation vu que la résolution du problème se fait dans un espace dont la régularité n'est pas maximale. Notre contribution se limite à établir un résultat analogue au Théorème 3.3 dans [3]. Ce résultat fait l'objet de la proposition 4.1 ci-dessous. Tous les autres résultats demeurent valables, y compris la démonstration du résultat global d'existence du problème couplé, bien-sûr dans des espaces moins réguliers.

Il y a lieu de noter avant de démontrer le lemme auxiliaire, à savoir le lemme 4.1 énoncé ci-dessous qui est indispensable pour une preuve de la proposition 4.1, qu'on peut facilement extrapoler à partir des Théorèmes 2.4 p.164 et 2.5 p.165 dans [4] qui sont relatifs à l'équation des ondes, deux résultats similaires mais valides pour l'opérateur hyperbolique de Lamé. Ceci est notamment dû à la nature commune aux deux opérateurs, voir à cet effet la section 4.2 p.185 dans [4].

**Lemme 4.1.** *Soit  $\zeta$  la solution du problème suivant*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \operatorname{div} \sigma(\zeta) = 0 \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega_s, \\ \zeta(0, \cdot) = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t}(0, \cdot) = u_1 \quad \text{dans } \Omega_s, \\ \zeta = G(t, x) \quad \text{sur } (0, T) \times \Sigma, \\ \zeta = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times (\partial\Omega_s - \Sigma), \end{array} \right. \quad (4.19)$$

où  $u_1 \in H^{1+\theta}(\Omega_s)$  pour un certain  $\theta > 0$  et où  $G$  est telle que si l'on note

$$\tilde{G} := \left\{ \begin{array}{l} G(t, x) \quad \text{sur } (0, T) \times \Sigma, \\ 0 \quad \text{sur } (0, T) \times (\partial\Omega - \Sigma), \end{array} \right. \quad (4.20)$$

alors  $\tilde{G} \in H^{2+\theta}((0, T) \times \partial\Omega_s)$ . Par ailleurs, on impose les conditions de compatibilité :  $G(0, x) = 0$  et  $\partial_t G(0, x) = u_1(x)$  sur  $\Sigma$  et  $u_1(x) = 0$  sur  $\partial\Omega_s - \Sigma$ . Alors

$$\sigma(\zeta) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_s - \Sigma.$$

*Démonstration. Étape 1 : existence d'une suite approximante.* D'après le Théorème 2.1 p.151 dans [4], la solution,  $\zeta$ , du problème (4.19) satisfait au moins à  $\zeta \in C^0(0, T; H^1(\Omega_s))$ ,  $\partial_t \zeta \in C^0(0, T; L^2(\Omega_s))$ . Par conséquent

$$\zeta \in L^\infty(0, T; W^{1,2}(\Omega_s)) \cap W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega_s)).$$

Par ailleurs, il est utile de remarquer que

$$L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega_s)) \cap W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega_s)) \subset W^{1,2}((0, T) \times \Omega_s).$$

En effet, ceci est vrai du moment qu'il existe un isomorphisme isométrique  $\Phi$  défini par

$$\begin{aligned} \Phi : L^2((0, T) \times W^{1,2}(\Omega_s)) &\rightarrow L^2((0, T); W^{1,2}(\Omega_s)) \\ u &\rightarrow \Phi(u) := (t \mapsto u(t, \cdot)), \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\zeta \in W^{1,2}((0, T) \times \Omega_s)$ . On note  $X$  l'espace défini par :

$$X = \{\zeta \in W^{1,2}((0, T) \times \Omega_s) \text{ telles que } \zeta = 0 \text{ sur } (0, T) \times (\partial\Omega_s - \Sigma)\}.$$

On sait, (cf. [20], [21]), qu'il existe une suite de fonctions  $(\zeta^n)_n$ , telle que

- 1)  $\zeta^n \in C^\infty((0, T) \times \Omega_s)$ ,
- 2)  $\text{supp } \zeta^n \cap (0, T) \times (\partial\Omega_s - \Sigma) = \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ,
- 3)  $\|\zeta^n - \zeta\|_{W^{1,2}((0, T) \times \Omega_s)} \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Le point 2) implique en particulier que

$$\sigma(\zeta^n) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times (\partial\Omega_s - \Sigma) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.21)$$

Par définition des espaces de Bochner,  $L^2(I \times \Omega_s) \subset L^2(I; L^2(\Omega_s))$ , le point 3) implique alors que

$$\|\zeta^n - \zeta\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega_s))} + \|\partial_t \zeta^n - \partial_t \zeta\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_s))} \rightarrow 0. \quad (4.22)$$

En appliquant le théorème d'Egorov aux suites de fonctions  $(\|\zeta^n(t, \cdot)\|_{H^1(\Omega_s)})_n$  et  $(\|\partial_t \zeta^n(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega_s)})_n$  qui sont presque partout convergentes selon une sous-suite  $n_k$ , on en déduit, à partir de (4.22), que pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $I_\delta \subset (0, T)$  avec  $|(0, T) - I_\delta| \leq \delta$ , tel qu'on ait

$$\|\zeta^{n_k} - \zeta\|_{L^\infty(I_\delta; H^1(\Omega_s))} + \|\partial_t \zeta^{n_k} - \partial_t \zeta\|_{L^\infty(I_\delta; L^2(\Omega_s))} \rightarrow 0, \quad (4.23)$$

lorsque  $n_k \rightarrow +\infty$ . Il y a lieu de remarquer, étant donné que  $I_\delta$  est compact pour tout  $\delta > 0$ , que  $I_\delta$  est réunion,  $\cup_j I_\delta^j$ , d'un nombre fini de sous ensembles compacts,  $I_\delta^j$ . On note  $a_\delta^j = \inf I_\delta^j$ .

**Étape 2 : nullité de la composante normale.** Si l'on note  $G^n := \text{Tr}|_{(0,T) \times \partial\Omega_s} \zeta^n$ , la fonction  $\zeta^n$  est solution du problème de Dirichlet suivant

$$(P_{\delta,j}) : \begin{cases} \frac{\partial^2 \zeta^n}{\partial t^2} - \text{div } \sigma(\zeta^n) = f^n \text{ dans } I_\delta^j \times \Omega_s, \\ \zeta^n(a_\delta^j, \cdot) = \zeta_{0,\delta}^{n,j}, \quad \frac{\partial \zeta^n}{\partial t}(a_\delta^j, \cdot) = \zeta_{1,\delta}^{n,j} \text{ dans } \Omega_s, \\ \zeta^n = G^n(t, x) \text{ sur } I_\delta^j \times \Sigma, \\ \zeta^n = 0 \text{ sur } I_\delta^j \times (\partial\Omega_s - \Sigma). \end{cases} \quad (4.24)$$

La remarque 2.2 p.152 de [4] permet de s'assurer de la dépendance continue de la solution du problème (4.24) ainsi que de sa composante normale sur le bord en les données du problème. On déduit que, pour tout  $\delta > 0$ , il existe une constante  $C_{\delta,j} > 0$  telle que l'on ait :

$$\begin{aligned} & \|\sigma(\zeta) \cdot \vec{n}\|_{L^2(I_\delta^j \times \Omega_s)} + \|\zeta\|_{L^\infty(I_\delta^j; H^1(\Omega_s))} + \|\partial_t \zeta\|_{L^\infty(I_\delta^j; L^2(\Omega_s))} \\ & \leq C_{\delta,j} (\|F\|_{L^1(I_\delta^j; L^2(\Omega_s))} + \|G\|_{H^1(I_\delta^j \times \partial\Omega_s)} + \|\zeta(a_\delta^j, \cdot)\|_{H^1(\Omega_s)} \\ & \quad + \|\partial_t \zeta(a_\delta^j, \cdot)\|_{L^2(\Omega_s)}). \end{aligned} \quad (4.25)$$

pour tout  $\zeta \in L^\infty(I_\delta^j; H^1(\Omega_s)) \cap W^{1,\infty}(I_\delta^j; L^2(\Omega_s))$  solution du problème  $P_{\delta,j}$ . On désigne par  $E_F$ ,  $E_G$ ,  $E_0$  et  $E_1$  les espaces images de  $L^\infty(I_\delta^j; H^1(\Omega_s)) \cap W^{1,\infty}(I_\delta^j; L^2(\Omega_s))$  par l'opérateur différentiel associé au problème aux limites (4.24). Par ailleurs, on désigne par  $T$  l'opérateur qui associe à  $F \in E_F$ ,  $G \in E_G$ , ainsi qu'aux fonctions données initiales  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$  définies respectivement dans les espaces  $E_0$  et  $E_1$  l'unique solution  $\zeta$  du problème (4.24) correspondant i.e. posé sur  $I_\delta^j \times \Omega_s$ . On note  $D_\delta^j$  l'espace image de  $E_F \times E_G \times E_0 \times E_1$  par l'opérateur  $T$ . À l'aide de la propriété de continuité (4.25) on applique le théorème d'isomorphisme de Banach pour déduire l'existence d'une constante  $C'_{\delta,j} > 0$  telle que pour tout  $\zeta \in D_\delta^j \subset L^\infty(I_\delta^j; H^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(I_\delta^j; L^2(\Omega))$  on ait

$$\begin{aligned} & \|T^{-1}(\zeta)\| \\ & := \|F\|_{E_F} + \|G\|_{E_G} + \|\zeta(a_\delta^j, \cdot)\|_{E_0} + \|\partial_t \zeta(a_\delta^j, \cdot)\|_{E_1} \\ & \leq C'_{\delta,j} \left( \|\zeta\|_{L^\infty(I_\delta^j; H^1(\Omega))} + \|\partial_t \zeta\|_{L^\infty(I_\delta^j; L^2(\Omega))} \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

L'estimation (4.26) appliquée à la fonction  $\zeta - \zeta^n$  donne

$$\begin{aligned} & \|f - f^n\|_{E_F} + \|G - G^n\|_{E_G} \\ & + \|\partial_t \zeta^n(a_\delta^j, \cdot) - \partial_t \zeta(a_\delta^j, \cdot)\|_{E_1} + \|\zeta^n(a_\delta^j, \cdot) - \zeta(a_\delta^j, \cdot)\|_{E_0} \\ & \leq C'_{\delta,j} \left( \|\zeta - \zeta^n\|_{L^\infty(I_\delta^j; H^1(\Omega))} + \|\partial_t \zeta - \partial_t \zeta^n\|_{L^\infty(I_\delta^j; L^2(\Omega))} \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

On déduit, en utilisant (4.23), que le membre gauche de (4.27) converge fortement dans l'espace  $E_F \times E_G \times E_0 \times E_1$  vers zero. Par ailleurs, il s'ensuit de la propriété de continuité (4.25) que, pour tout  $\delta > 0$ , la fonction  $\zeta^n - \zeta$  satisfait

$$\begin{aligned} & \|\sigma(\zeta^n - \zeta) \cdot \vec{n}\|_{E_\sigma(I_\delta \times \partial\Omega_s)} + \|\zeta^n - \zeta\|_{L^\infty(I_\delta^j; H^1(\Omega))} + \|\partial_t(\zeta^n - \zeta)\|_{L^\infty(I_\delta^j; L^2(\Omega))} \\ & \leq C'_{\delta,j} (\|f^n - f\|_{E_F} + \|G^n - G\|_{E_G} + \|\zeta_{0,\delta}^{n,j} - \zeta_{0,\delta}^j\|_{E_0} + \|\zeta_{1,\delta}^{n,j} - \zeta_{1,\delta}^j\|_{E_1}). \end{aligned} \quad (4.28)$$

pour tout  $j$ . On a donc que

$$\|\sigma(\zeta^n) \cdot \vec{n} - \sigma(\zeta) \cdot \vec{n}\|_{E_\sigma(I_\delta \times (\partial\Omega_s - \Sigma))} \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty,$$

d'où l'on déduit, en utilisant la propriété (4.21), que

$$\sigma(\zeta) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } I_\delta \times (\partial\Omega_s - \Sigma) \quad (4.29)$$

pour tout  $\delta > 0$ . Étant données les hypothèses de régularité sur  $\tilde{G}$  et  $u_1$ , alors en interpolant des résultats similaires aux (Théorème 2.4, p.164, [4]) et (Théorème 2.5, p.165, [4]) pour notre problème avec l'opérateur d'élasticité, on conclut que la solution du problème (4.19) satisfait à  $\sigma(\zeta) \cdot \vec{n} \in H^{1+\theta}((0, T) \times \partial\Omega_s)$ . Ceci implique que  $\sigma(\zeta) \cdot \vec{n}$  est au moins Holdérienne. Par conséquent il découle facilement de ce fait et de (4.29) que  $\sigma(\zeta) \cdot \vec{n} = 0$  sur  $(0, T) \times (\partial\Omega_s - \Sigma)$  tout entier.  $\square$

On énonce à présent la proposition 4.1 qui est analogue aux résultats dans [3], plus précisément, le Lemme 3.1, p.560, et le Théorème 3.3, p.563 pour  $l = \frac{1}{2}$ .

Soit  $G \in H^{2+\theta}((0, T) \times \Sigma)$ , pour un certain  $\theta > 0$ . On définit sur le bord la fonction  $G_\epsilon = \phi_\epsilon G$  où  $\phi_\epsilon \in C^\infty((0, T) \times \partial\Omega_s)$  et  $\phi_\epsilon$  est identiquement nulle sur  $(0, T) \times \mathcal{V}_i$  avec  $\mathcal{V}_i \subset \partial\Omega_s$ ,  $i = 1, 2$ , un voisinage des points  $(a_1, a_2) = \partial\Sigma$  et  $\phi_\epsilon = 1$  sur la partie en dehors de  $\mathcal{V}_i$ . Par conséquent, si  $\tilde{G}_\epsilon$  est telle que définie dans (4.20) alors elle satisfait à la régularité  $\tilde{G}_\epsilon \in H^{2+\theta}((0, T) \times \partial\Omega_s)$ .

Afin d'éviter d'avoir recours à certaines considérations techniques, accessoires quant aux idées générales qu'on souhaite exposer, nous établissons la proposition 4.1 pour une

donnée initiale en vitesse  $u_1 \in H^{1+\theta}(\Omega_s)$ ,  $u_1 = 0$  sur  $\Sigma$ . Par ailleurs, on suppose que  $G$  vérifie les conditions de compatibilité suivantes :  $G(0, x) = 0$  et  $\partial_t G(0, x) = u_1(x) = 0$  sur  $\Sigma$ .

Ce qui fait qu'on a pas à adapter la fonction donnée initiale,  $u_1$ , pour garantir une compatibilité avec  $G_\epsilon$ .

**Proposition 4.1.** *Soit  $G$ ,  $G_\epsilon$  et  $u_1$  telles que définies ci-dessus. Donc la condition de compatibilité  $\partial_t G_\epsilon(0, x) = u_1(x) = 0$  sur  $\Sigma$  pour tout  $\epsilon > 0$  est satisfaite. On note  $u_\epsilon$  la solution du problème*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial t^2} - \operatorname{div} \sigma(u_\epsilon) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega_s, \\ u_\epsilon(0, \cdot) = 0, \quad \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t}(0, \cdot) = u_1 & \text{dans } \Omega_s, \\ u_\epsilon = G_\epsilon(t, x) & \text{sur } (0, T) \times \Sigma, \\ \sigma(u_\epsilon) \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } (0, T) \times (\partial\Omega_s - \Sigma), \end{cases} \quad (4.30)$$

alors on a

$$\|\sigma(u_\epsilon) \cdot \vec{n}\|_{H^1((0, T) \times \Sigma)} \leq C (\|G_\epsilon\|_{H^2((0, T) \times \Sigma)} + \|u_1\|_{H^1(\Omega_s)}). \quad (4.31)$$

De plus, si on note  $u$  l'unique solution du problème (4.30) correspondant à la donnée  $G$  au lieu de  $G_\epsilon$  alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u_\epsilon - u\|_{C^0(0, T; L^2(\Omega_s)) \cap C^1(0, T; H^{-1}(\Omega_s))} = 0.$$

On va voir au cours de la démonstration que les hypothèses sur la fonction donnée initiale  $u_1$  sont naturelles.

*Démonstration.* On considère la fonction  $\zeta_\epsilon$  solution du problème (4.32)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \zeta_\epsilon}{\partial t^2} - \operatorname{div} \sigma(\zeta_\epsilon) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega_s, \\ \zeta_\epsilon(0, \cdot) = 0, \quad \frac{\partial \zeta_\epsilon}{\partial t}(0, \cdot) = u_1 & \text{dans } \Omega_s, \\ \zeta_\epsilon = G_\epsilon(t, x) & \text{sur } (0, T) \times \Sigma, \\ \zeta_\epsilon = 0 & \text{sur } (0, T) \times (\partial\Omega_s - \Sigma). \end{cases} \quad (4.32)$$

Il apparait clairement que  $u_\epsilon = \zeta_\epsilon$ . En effet, d'un coté on a, d'après le lemme 4.1, que  $\sigma(\zeta_\epsilon) \cdot \vec{n} = 0$  sur  $(0, T) \times \partial\Omega_s - \Sigma$ . Par conséquent :

$$\sigma(u_\epsilon) \cdot \vec{n} = \sigma(\zeta_\epsilon) \cdot \vec{n} \quad \text{p.p. sur } (0, T) \times \partial\Omega_s, \quad (4.33)$$

et, en particulier, l'égalité (4.33) est vraie dans  $H^{-1}((0, T) \times \partial\Omega_s)$ . Ce qui signifie aussi que  $\zeta_\epsilon$  résout le problème (4.30), d'ailleurs elle en est l'unique solution. En effet, supposons,

pour un certain  $\epsilon > 0$ , qu'il y ait deux solutions  $u_\epsilon^1$  et  $u_\epsilon^2$  au problème (4.30), il advient alors que  $u_\epsilon^1 - u_\epsilon^2$  est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2(u_\epsilon^1 - u_\epsilon^2)}{\partial t^2} - \operatorname{div} \sigma(u_\epsilon^1 - u_\epsilon^2) = 0 \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega_s, \\ (u_\epsilon^1 - u_\epsilon^2)(0, \cdot) = 0, \quad \frac{\partial(u_\epsilon^1 - u_\epsilon^2)}{\partial t}(0, \cdot) = 0 \quad \text{dans } \Omega_s, \\ \sigma(u_\epsilon^1 - u_\epsilon^2) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times \Sigma, \\ u_\epsilon^1 - u_\epsilon^2 = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times (\partial\Omega_s - \Sigma). \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Or, d'après [52] et plus précisément le Théorème 1 et l'estimation 1.9 p.170, ce problème admet une unique solution et cette solution est identiquement nulle, d'où l'unicité recherchée. Finalement on déduit aisément l'estimation (4.31) par un argument de continuité.

La fonction  $\zeta$  solution du problème (4.35)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \operatorname{div} \sigma(\zeta) = 0 \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega_s, \\ \zeta(0, \cdot) = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t}(0, \cdot) = u_1 \quad \text{dans } \Omega_s, \\ \zeta = G(t, x) \quad \text{sur } (0, T) \times \Sigma, \\ \zeta = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times (\partial\Omega_s - \Sigma). \end{array} \right. \quad (4.35)$$

où  $G$  et  $u_1$  vérifient, par hypothèses, les conditions de compatibilité. La fonction  $\zeta$  est seulement  $L^2$  sur  $(0, T) \times \partial\Omega$  et sa régularité, telle qu'énoncée dans le théorème 2.3, p.153 dans [4], est :

$$\zeta \in C^0(0, T; L^2(\Omega_s)) \quad , \quad \partial_t \zeta \in C^0(0, T; H^{-1}(\Omega_s)). \quad (4.36)$$

Concernant la composante normale du tenseur, on ne peut espérer mieux que  $\sigma(\zeta) \cdot \vec{n} \in H^{-1}((0, T) \times \Sigma)$ . Avec les mêmes arguments que ci-dessus i.e. la dépendance continue des fonctions  $\zeta - \zeta_\epsilon$  et  $\sigma(\zeta) \cdot \vec{n} - \sigma(\zeta_\epsilon) \cdot \vec{n}$  en la fonction  $G - G_\epsilon$  on a

$$\begin{aligned} & \|\zeta - \zeta_\epsilon\|_{C^0(0, T; L^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; H^{-1}(\Omega_s))} \\ & + \|\sigma(\zeta) \cdot \vec{n} - \sigma(\zeta_\epsilon) \cdot \vec{n}\|_{H^{-1}((0, T) \times \partial\Omega_s)} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  et

$$\begin{aligned} & \|\sigma(u) \cdot \vec{n} - \sigma(u_\epsilon) \cdot \vec{n}\|_{H^{-1}((0, T) \times \partial\Omega_s)} + \\ & \|u - u_\epsilon\|_{C^0(0, T; L^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; H^{-1}(\Omega_s))} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (4.38)$$

lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . Ceci est dû au fait que, par définition de  $G_\epsilon$ ,  $\|G - G_\epsilon\|_{L^2((0, T) \times \Sigma)} \rightarrow 0$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . Donc, en utilisant (4.33), (4.37) et (4.38), on a

$$\sigma(u) \cdot \vec{n} = \sigma(\zeta) \cdot \vec{n} \quad \text{dans } H^{-1}((0, T) \times \partial\Omega_s). \quad (4.39)$$

En utilisant la dépendance continue, telle que énoncée dans ([4], remarque 2.2), on a immédiatement

$$\begin{aligned} \|\sigma(u) \cdot \vec{n}\|_{H^{-1}((0,T) \times \partial\Omega)} &\leq C \left( \|\zeta\|_{L^2((0,T) \times \Sigma)} + \|u_1\|_{H^{-1}(\Omega_s)} \right) \\ &= C \left( \|G\|_{L^2((0,T) \times \Sigma)} + \|u_1\|_{H^{-1}(\Omega_s)} \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

□

**Remarque 4.2.** Il y a lieu de noter que, dans [3], les auteurs ont établi dans le Théorème 3.3 un résultat équivalent à celui de la proposition 4.1 dans des espaces plus restreints et qui fait que les problèmes étudiés ailleurs dans l'article, y compris le problème couplé global, jouissent dans ce cas d'une régularité maximale. On ne peut certainement pas prétendre à une telle régularité dans le cas qui nous concerne vu qu'on ne peut obtenir mieux que  $u \in C^0(0, T; L^2(\Omega_s)) \cap C^1(0, T; H^{-1}(\Omega_s))$ , ceci est foncièrement dû l'irrégularité de la donnée de Dirichlet. Il faut savoir aussi qu'on ne peut s'attendre à une régularité du type  $C^0(0, T; H^1(\Omega_s)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega_s))$  pour la solution  $\zeta$  du problème (4.32) correspondant à la donnée  $G$  sur le bord. Autrement, il adviendrait que  $\zeta(t, \cdot) \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  et donc, d'après (1.3),  $\zeta$  serait continue sur  $\partial\Omega_s$ , ce qui ne peut être la cas à moins de supposer, par exemple, que  $\lim_{x \rightarrow x_0 \in \partial\Sigma} G(t, x) = 0$  pour tout  $t \in (0, T)$ , cette condition serait en fait assez restrictive eu égard au résultat obtenu et qui est valable pour une donnée de Dirichlet,  $G$ , plus générale.

Ceci dit, même si l'on est en mesure de se contenter d'une telle régularité faible pour ce qui est de l'existence d'une solution dans l'espace des distributions pour le problème (4.30), on ne peut cependant pas utiliser dans ce cas le résultat de la proposition 4.1 pour établir un équivalent, ne serait ce que faible, du Théorème 5.1 dans [3]. Ceci est dû au fait que pour réaliser le couplage avec le problème de Stokes, un minimum de régularité doit être assuré. Plus précisément nous devrions travailler avec une donnée  $G$  telle que  $\tilde{G} \in H^2((0, T) \times \partial\Omega_s)$  à laquelle correspondra une composante normale du tenseur des contraintes  $\sigma(u) \cdot \vec{n} \in H^1((0, T) \times \Omega_s)$ .

Par ailleurs, il est aisé de remarquer qu'étant donné  $G_1$  et  $G_2$  dans  $H^2((0, T) \times \Sigma)$  alors les solutions  $u_{G_1}$  et  $u_{G_2}$  des problèmes (4.30) correspondants vérifient d'après (4.40)

$$\|\sigma(u_{G_1} - u_{G_2}) \cdot \vec{n}\|_{H^{-1}((0,T) \times \partial\Omega_s)} \leq C \|G_1 - G_2\|_{L^2((0,T) \times \Sigma)}. \quad (4.41)$$

Parallèlement, si l'on note  $G_{i,\epsilon} = G_i \phi_\epsilon$  avec  $\phi_\epsilon$  la suite de fonctions de troncature telle que définie juste avant l'énoncé de la proposition 4.1 et de sorte que  $\tilde{G}_{i,\epsilon}$  définie par (4.20)

satisfasse aux mêmes hypothèses de régularité que dans le lemme 4.1, alors une estimation équivalente à (4.41), mais dans des espaces plus réguliers, peut être obtenue, à savoir que l'on a

$$\|\sigma(u_{G_{1,\epsilon}}) \cdot \vec{n} - \sigma(u_{G_{2,\epsilon}}) \cdot \vec{n}\|_{H^1((0,T) \times \partial\Omega_s)} \leq C \|G_{1,\epsilon} - G_{2,\epsilon}\|_{H^2((0,T) \times \Sigma)}. \quad (4.42)$$

L'estimation (4.42) est la clé qui permet de démontrer l'existence d'une solution au problème couplé dans le cas des équations linéaires i.e. un résultat équivalant au théorème 5.1 p.570 dans [3] et ce dans des espaces moins réguliers mais suffisamment adaptés. On démontre un tel résultat en établissant l'existence d'un point fixe pour le problème couplé auxiliaire, cf. le système (2.10) dans [3] p.556, mais avec le problème (4.30) au lieu du problème (5.2), p.571. Par conséquent on montre, pour chaque  $\epsilon > 0$ , l'existence d'un point fixe  $\sigma(u_\epsilon) \cdot \vec{n} \in H^1((0,T) \times \Sigma)$ . Puis on démontre l'existence d'une solution pour le problème couplé global dans le même esprit que celui de la démonstration du Théorème 7.1 dans [3]. Enfin, on passe à la limite,  $\epsilon \rightarrow 0$ , en utilisant notamment (4.38). Par conséquent, il suffit de considérer des conditions initiales et au bord avec une régularité similaire à celle supposé dans les hypothèses du Théorème 4.1 mais correspondante à  $l = \frac{1}{2}$ . Ceci dit, on récupère, au final, seulement une solution,  $u$ , telle que  $\sigma(u) \cdot \vec{n} \in H^{-1}((0,T) \times \partial\Omega_s)$ .

Cela étant, et pour les raisons évoquées ci-dessus, la régularité de la solution prédite par le Théorème 4.1 peut être satisfaite par la solution approximative  $u_\epsilon$  et ce pour tout  $\epsilon$ . En effet, on a  $\sigma(u_\epsilon) \cdot \vec{n} \in H^1((0,T) \times \Sigma)$ , ce qui implique que la solution du problème global vérifie  $u_\epsilon \in L^2(0,T; H^1(\Sigma)) \cap H^1(0,T; L^2(\Sigma))$ , autrement dit, c'est exactement la régularité énoncée dans le Théorème 4.1 pour  $l = \frac{1}{2}$ . Dit autrement encore, on obtient la même régularité de la solution globale au problème couplé que dans [3] pour  $l = \frac{1}{2}$ . Cette régularité n'est assurément pas valable pour la solution  $u$ .

Par ailleurs, il faut souligner une considération qui diffère de la situation traitée dans [3] et qui consiste en la prise en compte d'une donnée de Dirichlet non homogène pour le problème de Stokes posé sur le domaine Lipschitzien  $\Omega_f$ . Pour cela, on renvoie le lecteur vers [55] pour ce qui concerne la théorie de l'existence et de l'unicité relative à cette situation. On évoque dans la prochaine section le problème de Stokes avec, d'une part une condition de Dirichlet non homogène, et d'autre part une divergence du champs de vitesse non identiquement nulle sur le domaine  $\Omega_f$ . Donc, des hypothèses de régularité assez strictes doivent être imposées afin de pouvoir récupérer une vitesse sur  $\Sigma$  suffisamment régulière de telle sorte à ce qu'elle permette d'établir le résultat similaire au (Théorème 5.1, [3]).

Le Théorème 4.1 p.566 dans [3] se démontre exactement de la même manière sauf qu'on fait apparaître la norme de la donnée de Dirichlet au sens du Théorème 2.1 dans [55].

Pour le problème (4.18), on démontre l'existence d'une solution pour chacun des deux problèmes aux limites qui le composent et ce dans des espaces bien précis, ce qui est analogue à l'étude de la régularité de ces solutions, et ce après avoir incorporé toutes les conditions au bord propres aux considérations particulières du modèle étudié. Ceci nous mène à établir des estimations a priori pour ces solutions qui permettent de définir ces espaces fonctionnels dans lesquels rechercher les solutions. Puis, dans une seconde étape, on démontre l'existence d'un point fixe solution du problème couplé. Finalement, on achève la preuve avec un argument d'unicité.

A présent, on esquisse sommairement l'idée sous-jacente à la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution du problème (4.18).

### Existence

La démonstration de l'existence d'une solution au problème (4.18) repose essentiellement sur l'idée des approximations successives. On pose

$$(\tilde{v}^{k+1}, \tilde{p}^{k+1}, u^{k+1}) = (w^{k+1} + \tilde{v}^0, q^{k+1} + \tilde{p}^0, z^{k+1} + u^0),$$

où la suite  $(w^{k+1}, q^{k+1}, z^{k+1})_k$  est définie par récurrence comme solutions, pour  $k \geq 0$ , du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w^{k+1}}{\partial t} - \mu_f \Delta w^{k+1} + \nabla q^{k+1} = F(\tilde{v}^k, \tilde{p}^k) \quad \text{dans } \Omega_f^T, \end{array} \right. \quad (4.43)$$

$$\text{div } w^{k+1} = G(\tilde{v}^k) = \text{div } g(\tilde{v}^k) \quad \text{dans } \Omega_f^T, \quad (4.44)$$

$$w^{k+1}(0, \cdot) = 0 \quad \text{dans } \Omega_f, \quad w^{k+1} = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times \Gamma_f^d, \quad (4.45)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w^{k+1} = \frac{\partial z^{k+1}}{\partial t}, \quad \sigma(w^{k+1}, q^{k+1}) \cdot \vec{n} = \sigma(z^{k+1}) \cdot \vec{n} + H(\tilde{v}^k, \tilde{p}^k) \quad \text{dans } \Sigma^T, \end{array} \right. \quad (4.46)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 z^{k+1}}{\partial t^2} - \text{div } \sigma(z^{k+1}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_s^T, \quad z^{k+1} = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times \Gamma_f^d, \end{array} \right. \quad (4.47)$$

$$\sigma(z^{k+1}) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times (\partial\Omega - \Gamma_s^d), \quad (4.48)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z^{k+1}(0, \cdot) = 0, \quad \frac{\partial z^{k+1}}{\partial t}(0, \cdot) = u_s^1 \quad \text{dans } \Omega_s, \end{array} \right. \quad (4.49)$$

et où l'on a aussi

$$X^{k+1}(t, y) = y + \int_0^t \tilde{u}^{k+1}(s, y) \, ds, \quad \text{pour tout } y \in \Omega_f \quad \text{et tout } t \in (0, T),$$

$$\Omega_f^{k+1}(t) = X^{k+1}(t, \Omega_f).$$

La forme linéarisée des équations (4.43)-(4.49) ci-dessus se prête à exprimer la solution du système sous forme de point fixe dont l'existence peut être démontrée par l'application de la méthode des approximations successives. Ceci est possible en utilisant, d'un coté la dépendance linéaire, en les fonctions  $w$ ,  $q$  et  $z$ , des expressions qui figurent aux membres sur la gauche des équations (4.43)-(4.49), et d'un autre coté les estimations, cf. l'intégralité de la section 6 dans [3], pour les opérateurs non linéaires aux seconds membres de ces équations. Si on choisit  $E_{T,M_0,u_0} \times P_{T,M_0,u_0}$  comme étant l'espace dans lequel on recherche la solution,  $(\tilde{u}, \tilde{p})$ , du problème couplé, alors il est facile de remarquer que les fonctions  $\tilde{v}$  et  $\tilde{p}$  recherchées sont point fixe de l'opérateur  $P$  défini par :

$$\begin{aligned} P : E_{T,M_0,u_0} \times P_{T,M_0,u_0} &\rightarrow E_{T,M_0,u_0} \times P_{T,M_0,u_0} \\ (\tilde{v}^k, \tilde{p}^k) &\rightarrow P(\tilde{u}^k, \tilde{p}^k) = (\tilde{v}^{k+1}, \tilde{p}^{k+1}), \end{aligned}$$

l'opérateur est bien défini car pour  $(\tilde{u}^k, \tilde{p}^k)$  fixé, il existe bien une image  $(\tilde{u}^{k+1}, \tilde{p}^{k+1})$  qui correspond à l'existence de la solution du problème linéaire (4.43)-(4.49) correspondant. L'existence d'une solution au problème couplé revient à montrer que la méthode des approximations successives converge.

On déduit facilement, en utilisant des estimations Lipschitziennes pour les opérateurs non-linéaires  $F, G, H$  - voir les sous sections 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6 dans [3]- ce qui suit

$$\begin{aligned} &\|v^{k+1} - v^k\|_{E_T} + \|\nabla q^{k+1} - \nabla q^k\|_{F_T} + \|q_{|\Sigma_T^S}^{k+1} - q_{|\Sigma_T^S}^k\|_{H_T} \\ &\leq (\|F^k - F^{k-1}\|_{F_T} + \|g^k - g^{k-1}\|_{G_T} + \|G^k - G^{k-1}\|_{G_T} + \|H^k - H^{k-1}\|_{H_T}) \quad (4.50) \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \|\tilde{u}^k - \tilde{u}^{k-1}\|_{E_T} + \|\nabla \tilde{p}^k - \nabla \tilde{p}^{k-1}\|_{F_T} + \|\tilde{p}_{|\Sigma_T^S}^k - \tilde{p}_{|\Sigma_T^S}^{k-1}\|_{H_T} \right). \end{aligned}$$

On en arrive, par récurrence et quelques calculs, au fait que  $(\tilde{u}^k, \tilde{p}^k)$  satisfait

$$\begin{aligned} &\|\tilde{v}^k\|_{E_T} + \|\nabla \tilde{q}^k\|_{F_T} + \|\tilde{q}_{|\Sigma_T^S}^k\|_{H_T} \\ &\leq \|\tilde{v}^1\|_{E_T} + \|\nabla \tilde{q}^1\|_{F_T} + \|\tilde{q}_{|\Sigma_T^S}^1\|_{H_T} \quad (4.51) \\ &+ M_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \leq 2M_1, \end{aligned}$$

en utilisant, d'une part le Théorème 5.1 et la proposition 6.1 dans [3], et d'autre part (4.51),

on déduit que  $(\tilde{u}^k, \tilde{p}^k)$  satisfait

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{u}^k\|_{E_T} + \|\nabla \tilde{p}^k\|_{F_T} + \|\tilde{p}^k|_{\Sigma_S^T}\|_{H_T} \\
& \leq \|\tilde{u}^0\|_{E_T} + \|\nabla \tilde{p}^0\|_{F_T} + \|\tilde{p}^0|_{\Sigma_S^T}\|_{H_T} + \\
& \quad + \|\tilde{v}^k\|_{E_T} + \|\tilde{q}^k\|_{F_T} + \|\tilde{q}^k|_{\Sigma_S^T}\|_{H_T} \\
& \leq M_0.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Les itérations relevant de la méthode d'approximation successive, ayant pour point initial  $(\tilde{v}^0, \tilde{p}^0, u^0)$ , engendre une suite  $(\tilde{v}^k, \tilde{p}^k, u^k)_k$ . L'estimation (4.52) implique que la suite  $(\tilde{v}^k, \tilde{p}^k)$  converge vers  $(\tilde{v}, \tilde{p})$  appartenant à  $E_{T, M_0, u_0} \times P_{T, M_0, u_0}$ . Enfin, concernant le suite  $u^k$ , comme la suite  $(\tilde{v}^k)_k$  converge vers  $\tilde{v}$  alors d'après le Théorème 3.3 dans [3], ou de manière équivalente la proposition 4.1, la suite  $(u_k)_k$  qui lui correspond converge vers une fonction  $u$  dans un espace bien précis. De plus, la suite  $(\sigma(u^k) \cdot \vec{n})_k$  converge vers  $(\sigma(u) \cdot \vec{n})_k$ . Il en est de même pour la suite  $(X^k)_k$ , cf. section 7 de l'article [3].

### Unicité

Pour montrer l'unicité de la solution du problème (4.18), on procède par l'absurde i.e. on suppose l'existence de deux solutions distinctes. Un point important à remarquer est celui que les deux solutions coïncident sur la partie du bord sur laquelle est posée la condition de Dirichlet. Par conséquent ceci revient à montrer l'unicité pour le cas de la condition de Dirichlet homogène, pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que la fonction  $\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2$  est identiquement nulle sur la partie du bord concernée par la condition de Dirichlet. En appliquant l'estimation (4.51) pour les deux solutions supposées distinctes  $(\tilde{v}_1, \tilde{p}_1)$  et  $(\tilde{v}_2, \tilde{p}_2)$ , on en arrive à la contradiction suivante

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|_{E_T} + \|\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2\|_{F_T} + \|\tilde{p}_1|_{\Sigma_S^T} - \tilde{p}_2|_{\Sigma_S^T}\| \\
& \leq \frac{1}{2} \left( \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|_{E_T} + \|\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2\|_{F_T} + \|\tilde{p}_1|_{\Sigma_S^T} - \tilde{p}_2|_{\Sigma_S^T}\| \right),
\end{aligned}$$

ce qui conclut à l'unicité.

La démonstration de la proposition 4.1 est valable pour n'importe quel domaine de forme polygonale, il en est par conséquent de même de la preuve du résultat analogue au Théorème 4.1 pour notre situation.

Contrairement à la manière dont le couplage a été décrit au début de la sous section 1.3 et dont la procédure consistait à réaliser l'égalité des vitesses du fluide et de la structure sur l'interface de contact en supposant, à chaque itération de la procédure, que la pression

est identique entre le fluide et la structure ; le point fixe dont l'existence à été établie dans la démonstration théorique ci-dessus concerne la pression. C'est à dire que dans ce cas c'est bien la vitesse du fluide et de la structure sur l'interface qui sont supposées identique. Cela ne change absolument rien quant au résultats obtenus.

Tel que présenté dans (4.18), le problème couplé prend en compte, en partie seulement, l'effet du tremblement de terre à travers la condition au bord de Dirichlet. Nous disions en partie seulement car pour une modélisation effective de l'effet sismique, la condition au bord de Dirichlet, en vitesse pour le fluide par exemple, doit concerner l'intégralité de la frontière, ceci du moment qu'elle est entièrement soumise à l'effet des ondes sismiques. Nous pensons tout de même que les idées discutées sont d'ores et déjà dans l'esprit de cette situation et que la différence se situe uniquement au niveau de la technicité.

## 4.3 Aspects mécaniques

### 4.3.1 Critères mécaniques

Pour simplifier la présentation des éléments de cette section, nous nous plaçons dans le cas statique, ce qui correspond toujours à la configuration géométrique  $\Omega_s$  de la structure. On s'intéresse à un problème d'optimisation de la structure soumise à des contraintes, tout en garantissant la stabilité du barrage. Ces contraintes découlent de la mécanique des milieux déformables. Les deux paramètres variables à optimiser,  $H$  et  $\theta$ , sont assujettis à prendre leurs valeurs dans l'ensemble  $D$  défini par (4.53)

$$D = \{(H, \theta) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad 0 \leq H \leq 40; \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}. \quad (4.53)$$

Nous considérons une subdivision de ces intervalles avec des pas respectifs  $\tau_h$  et  $\tau_\theta$ . On définit les trois fonctions à deux variables suivantes associées respectivement à chacun des critères mécaniques définissant la non dislocation, le non soulèvement et le non renversement.

1) La fonction  $F_1$  définie par

$$F_1 : (H, \theta) \rightarrow F_1(H, \theta) = \max_{x \in \Omega(H, \theta)} \sigma_{vm}(H, \theta),$$

associe à chaque couple de hauteur et d'angle donnés la valeur maximale de la contrainte équivalente de Von-Mises, définie par

$$\sigma_{vm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx})^2} \quad (4.54)$$

2) La fonction  $F_2$  définie par

$$F_2 : (H, \theta) \rightarrow F_2(H, \theta) = \max_{x \in A(H, \theta)} \sigma_{yy}(H, \theta)$$

associe à chaque couple de hauteur et d'angle la valeur maximale de la composante verticale du tenseur des contraintes défini sur la base du barrage notée  $A(H, \theta)$ .

3) La fonction  $F_3$  définie par

$$F_3 : (H, \theta) \rightarrow F_3(H, \theta) = \frac{M_s}{M_r}$$

associe à chaque configuration géométrique  $\Omega_s = \Omega_s(H, \theta)$  le quotient du moment des forces stabilisatrices, c'est à dire le poids du barrage augmenté de la composante verticale de la pression par le moment des forces renversantes c'est à dire la composante horizontale de la pression où  $M_s$  et  $M_r$  sont définis par

$$M_s = \int_{A(H, \theta)} \sigma_{yy}^s(x) d(\Delta, x) dx,$$

$$M_r = \int_{A(H, \theta)} \sigma_{yy}^r(x) d(\Delta, x) dx$$

où  $\sigma^s$  est le tenseur des contraintes associé aux forces stabilisatrices et  $\sigma^r$  est le tenseur des contraintes associé aux forces renversantes ; et où on a désigné  $\Delta$  le sommet commun des arrêtes  $E1$  et  $E5$  de la structure.

Dans la définition des fonctions  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$ , la valeur des composantes du tenseur des contraintes est calculée en résolvant le problème de structure sur le domaine  $\Omega_s(H, \theta)$ . Ce domaine représente la configuration géométrique de la structure associée aux données  $H$  et  $\theta$ . Les fonctions  $(F_i)_{i=1,3}$  nous permettent d'exprimer les contraintes du problème d'optimisation. Ces dernières sont formulées en termes des inégalités algébriques suivantes :

1) Le premier critère est de s'assurer que le barrage ne se disloque pas. Cette condition s'exprime en fonction de la contrainte

$$C_1(H, \theta) := F_1(H, \theta) - 2.5 \times 10^6 < 0.$$

2) Le deuxième critère, permet d'assurer que la composante verticale du tenseur des contraintes est négative, ce qui traduit le fait que le barrage ne se soulève pas; cette contrainte s'exprime donc comme suit

$$C_2(H, \theta) := F_2(H, \theta) < 0$$

3) Le troisième critère assigne un seuil de sécurité pour le quotient des moments, ce qui garantit que le barrage ne se renverse pas; d'où la condition

$$C_3(H, \theta) := -F_3(H, \theta) + 1.5 < 0.$$

Pour mettre en évidence l'intérêt de considérer le renforcement triangulaire, la partie **Rf** du barrage, nous présentons dans les figures suivantes deux exemples de configurations géométriques de la structure pour lesquelles ces critères ne sont pas remplis en raison notamment du volume insuffisant du renforcement, mais pas seulement. En effet, après avoir effectué plusieurs tests numériques, on constate que le choix de certaines plages de valeurs spécifiques des paramètres  $H$  et  $\theta$  jouent aussi un rôle important pour garantir une stabilité de la structure.

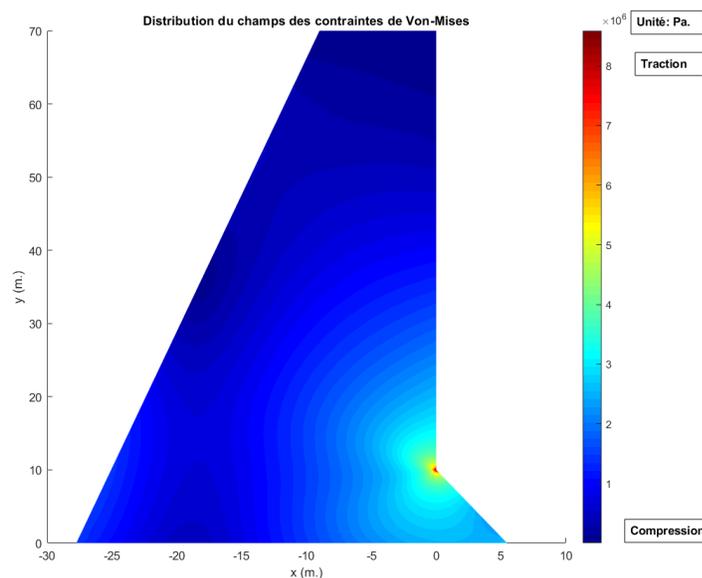


FIGURE 4.2 – Une configuration géométrique pour laquelle il y a dislocation.

La figure 4.2 donne les valeurs de la contrainte de Von-Mises sur toute la surface de la

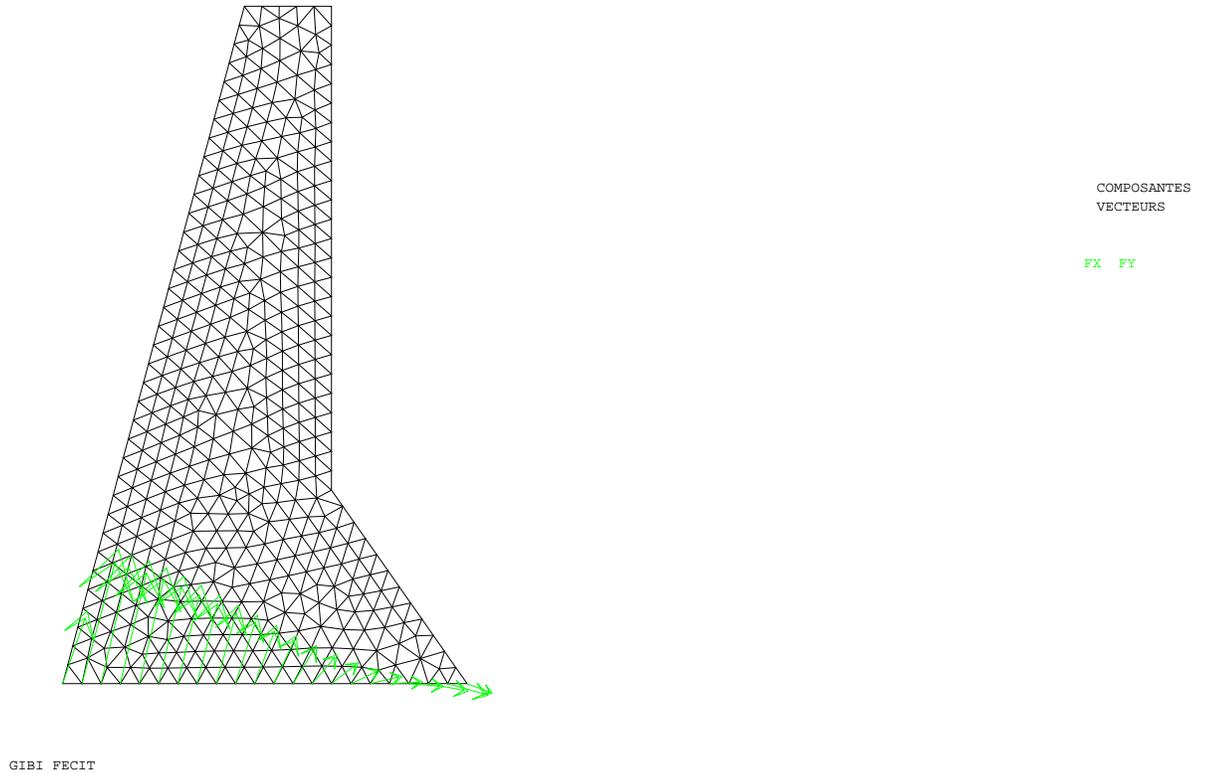


FIGURE 4.3 – Une configuration géométrique pour laquelle il y a un soulèvement.

structure, la partie colorée en rouge désigne une traction, celle en bleu désigne la compression.

Sur la figure 4.3 sont représentés les vecteurs de réaction du sol et qui sont définis sur les nœuds de contact entre le sol et la structure. On peut aisément apprécier la nature ou l'effet de cette réaction à travers le signe de la composante verticale  $\sigma_{yy}(x)$  du tenseur des contraintes qui est égal en module mais de signe inverse de la composante verticale des vecteurs de réaction du sol et ce en fonction de la position  $x \in A(H, \theta)$  sur la base de la structure. La configuration présentée sur la figure 4.3 correspond aux paramètres  $H = 25 \text{ m}$  et  $\theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$ . On observe par ailleurs les faits suivants :

- Sur la figure 4.2 la valeur maximale de la contrainte équivalente de Von-Mises est de l'ordre de  $8 \times 10^6 \text{ Pa.}$ , en rouge sur le sommet non convexe, donc dépasse le seuil de non dislocation qui est fixé à  $2.5 \times 10^6 \text{ Pa.}$  pour la structure.

- Sur la figure 4.3, le critère de non soulèvement n'est pas respecté puisqu'il existe des valeurs positives de la composante verticale  $\sigma_{yy}$  du tenseur des contraintes correspondantes aux composantes négatives des vecteurs de réaction, en couleur verte sur la figure.

- Concernant le troisième critère, si nous fixons  $h = 35$  et  $\theta = \frac{\pi}{4}$  alors nous avons, pour le domaine associé  $\Omega_s(H, \theta)$ , le rapport  $|\frac{Ms}{Mr}| = 1,73 > 1,5$ . Cela signifie que le critère de non renversement n'est pas satisfait.

En revanche, pour les valeurs  $H = 30$  et  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , les trois contraintes sont satisfaites, ce qui démontre que l'ensemble des solutions du problème d'optimisation est non vide.

### 4.3.2 Construction des surfaces

Afin de tester les trois contraintes  $C_{i=1,3}$  ainsi que pour trouver les valeurs optimales de  $H$  et  $\theta$ , les surfaces que nous construisons représentent graphiquement les valeurs de ces grandeurs mécaniques en fonction des deux paramètres  $H$  et  $\theta$ . On considère la plage des valeurs  $H$  et  $\theta$  appartenant au domaine  $D$  défini par (4.53). Après discrétisation des variables  $H$  et  $\theta$  avec un pas  $\tau_H, \tau_\theta$ , pour chaque valeur de ces paramètres d'optimisation, nous définissons un maillage du domaine  $\Omega_s(H, \theta)$  sur lequel nous résolvons ce problème par la méthode des éléments finis. Ainsi, en chaque point du maillage on peut calculer chacun des critères  $C_{i=1,3}$ , et on interpole ces données pour obtenir les surfaces présentées dans les figures 4.4, 4.5 et 4.6 ci-dessous. L'Algorithme qui nous permet d'obtenir ces surfaces s'écrit sous la forme suivante :

---

**Algorithm 2** : construction des surfaces

---

```

for  $H = 3 : \tau_H : 41$  do
  for  $\theta = 3 : \tau_\theta : \frac{\pi}{4}$  do
    Appliquer le programme ISF et calculer  $C_i(H, \theta)$ 
    Interpoler les valeurs  $(3 + n\tau_H, 3 + m\tau_\theta, C_i(3 + n\tau_H, 3 + m\tau_\theta))$ 
    Représenter graphiquement les surfaces  $((H, \theta) \rightarrow C_i(H, \theta))_i$ 
  end for
end for

```

---

Puis, on projette sur le plan  $(H, \theta)$  les points  $(H, \theta, C_i(H, \theta))_{i=1,3}$  qui vérifient les contraintes  $C_i(H, \theta) \leq 0$ ,  $i = 1, 3$ . On obtient ainsi les surfaces d'admissibilité suivantes notées  $Z_{i=1,3}$  représentées sur les figures 4.7, 4.8 et 4.9.

L'intersection de ces trois régions donne lieu à une zone d'admissibilité  $D^- = \cap_{i=1,2,3} Z_i$  qui contient les points  $(H, \theta)$  définissant les configurations géométriques pour lesquelles la structure est stable.

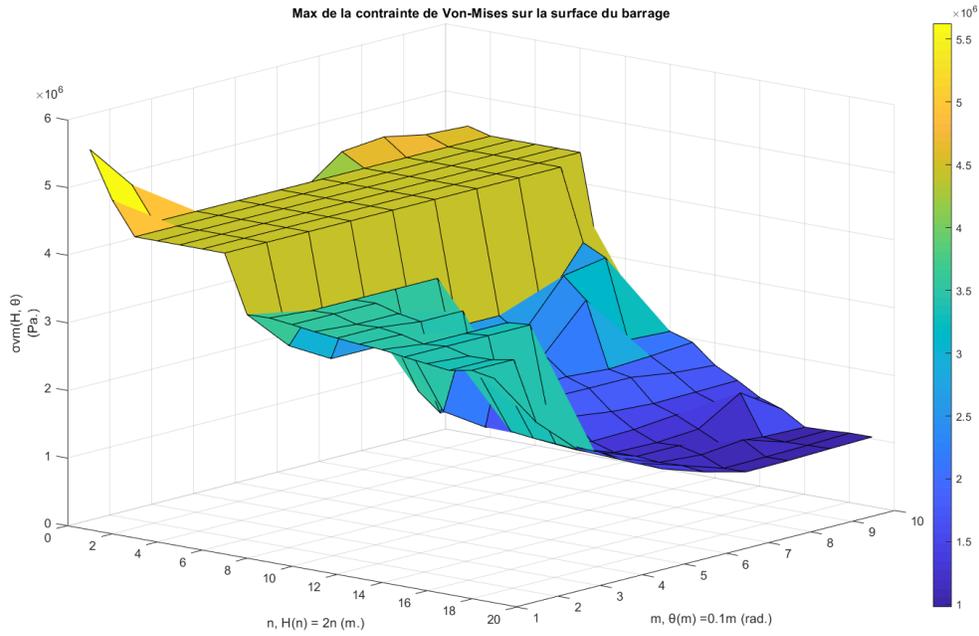


FIGURE 4.4 – Représentation graphique de  $C_1$

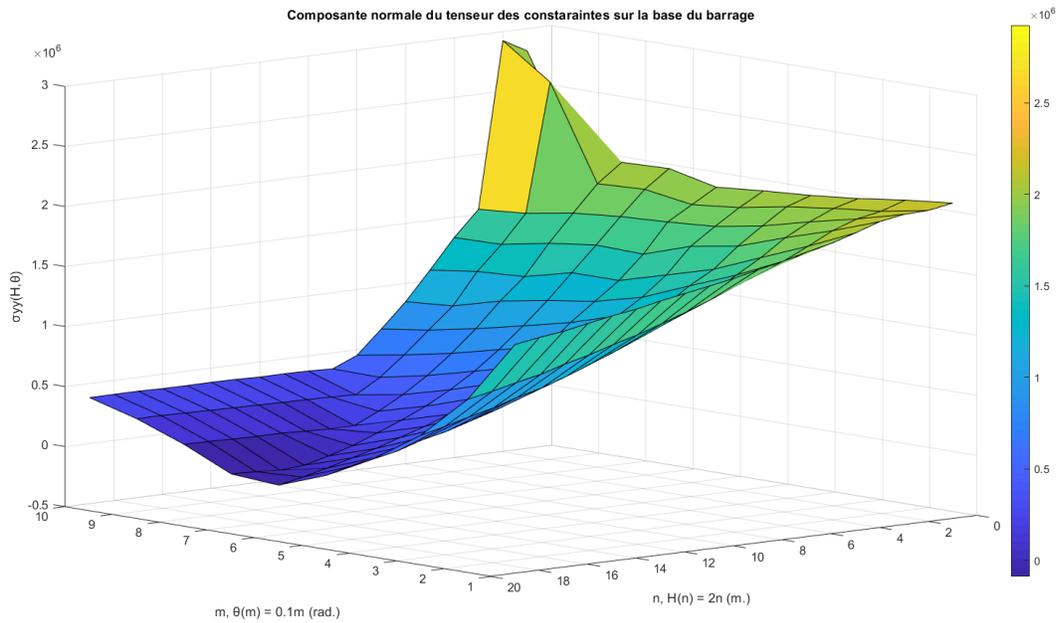


FIGURE 4.5 – Représentation graphique de  $C_2$

**Rapport des moments des forces stabilisatrices sur les moments des forces renversantes en le point  $\Delta$**

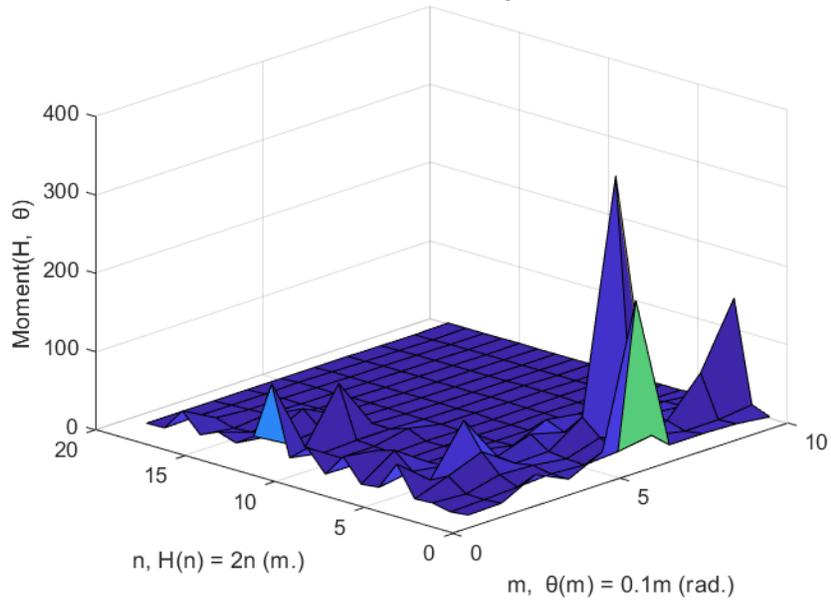


FIGURE 4.6 – Représentation graphique de  $C_3$

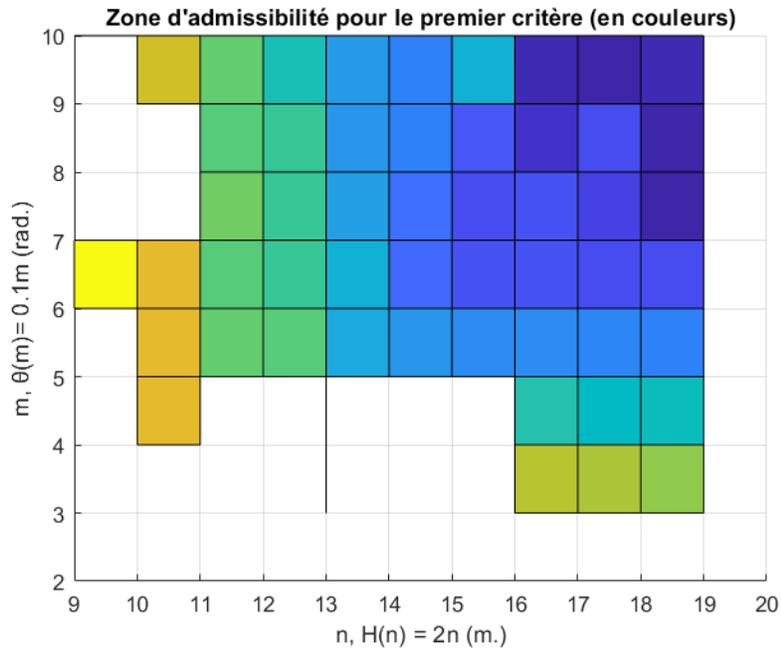


FIGURE 4.7 – Zone d'admissibilité pour  $C_1$

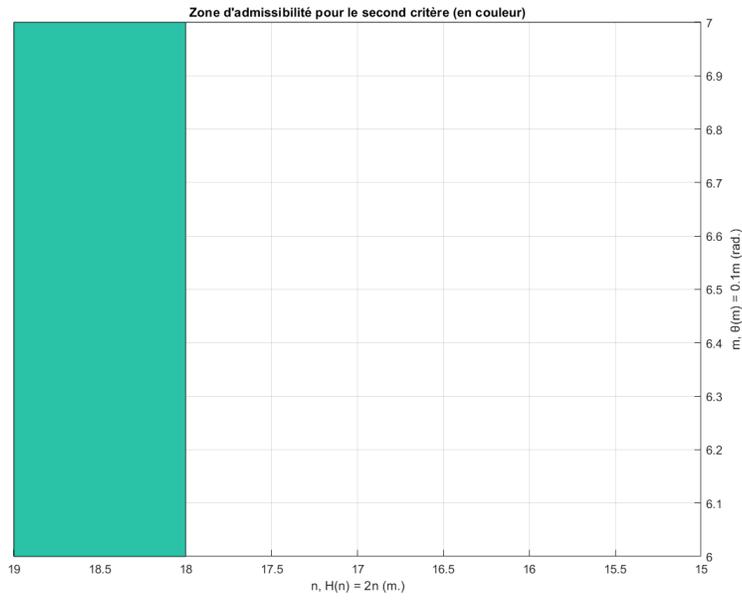


FIGURE 4.8 – Zone d’admissibilité pour  $C_2$

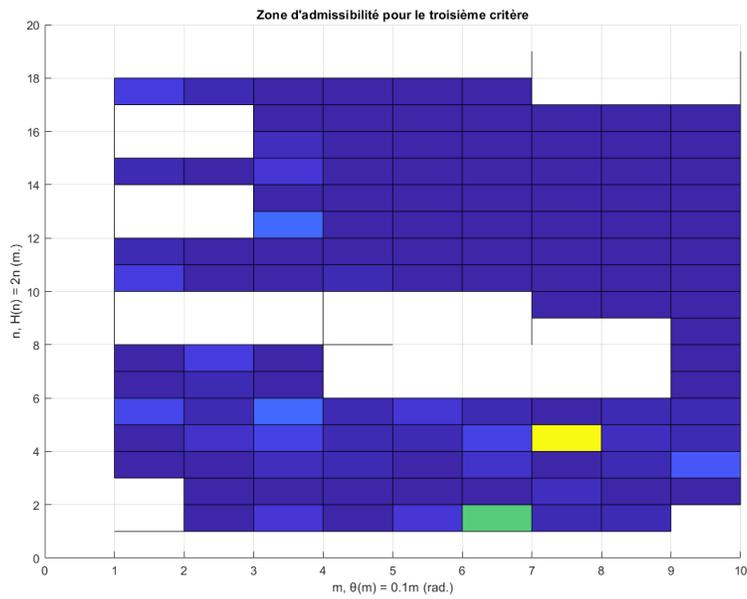


FIGURE 4.9 – Zone d’admissibilité pour  $C_3$

## 4.4 Optimisation

### 4.4.1 Présentation de la méthode de Hooke-Jeeves

La méthode de Hooke-Jeeves a été introduite dans [11]; c'est une méthode essentiellement locale, c'est à dire qu'elle sert à déterminer les minimums locaux d'une fonction définie globalement, pour un problème d'optimisation sans contraintes.

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à minimiser. La méthode de Hooke-Jeeves est une méthode exploratoire, qui comporte deux phases distinctes : une phase exploratoire locale et une phase de déplacement tant que le critère n'est pas minimisé.

**a) Description de l'exploration locale.** À partir d'un point  $x = (x_1, \dots, x_n)$  donné et d'un pas  $\Delta^1 > 0$  fixé, on effectue l'exploration suivante :

- à la  $k$ -ème étape, on pose  $\alpha = f(x^k)$  au dernier point courant  $x^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$  obtenu par l'algorithme; on modifie le point courant en ajoutant un pas  $\Delta_1^k$ , de sorte que  $x_1^{k+1} = x_1^k + \Delta_1^k$ . Si la valeur de  $f(x^k)$  est améliorée i.e.  $f(x_1^{k+1}, x_2, \dots, x_n) \leq \alpha$ , alors  $x_1^k + \Delta_1^k e_1$  est adopté comme nouvelle première coordonnée de  $x^k$  avec  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$  étant le premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Sinon,  $x_1^k$  est remplacée par  $x_1^k - \Delta_1^k$ , et la nouvelle valeur de la fonction objectif  $f(x^k)$  est à nouveau calculée. Si la valeur de  $f(x^k)$  n'est pas améliorée par  $\pm \Delta_1^k$ , alors on garde l'ancienne valeur de la coordonnée  $x_1^k$  et on passe à la coordonnée suivante  $x_2^k$  qui sera remplacée par une des quantités  $\pm \Delta_2^k$ , et ainsi de suite, jusqu'à ce que toutes les variables indépendantes aient été modifiées et la recherche exploratoire est terminée.

- Pour chaque étape, la valeur de la fonction objectif est comparée à la valeur au point courant précédent  $x^k$ . Si la fonction objectif est améliorée pour l'étape donnée, alors l'ancienne valeur de la fonction objectif est remplacée par la nouvelle valeur. Sinon, si l'étape échoue, l'ancienne valeur est conservée. De cette façon, la recherche exploratoire s'arrête lorsque la vérification est effectuée en utilisant chacune des variables indépendantes (coordonnées). Cela engendre un nouveau point courant  $x^{k+1}$ .

**b) Description de la phase déplacement.** À partir des deux bases successives  $x^k$  et  $x^{k+1}$ , on calcule un nouveau point :

$$x = x^{k+1} + (x^{k+1} - x^k),$$

ce point est le symétrique de  $x^k$  par rapport à  $x^{k+1}$ . Repartant de ce nouveau point  $x$ , on recommence une exploration locale. Si au terme de cette phase, on a encore diminué  $f$  (par rapport à  $f(x^{k+1})$ ) alors le point  $x$  obtenu est la nouvelle base  $x^{k+2}$ . Sinon, cette base est fixée à  $x^{k+1}$  et on recommence avec des pas moitié  $\frac{\Delta_i^k}{2}$ ,  $i = 1 : n$ .

#### 4.4.2 Présentation du problème de minimisation du volume de la structure

L'existence du minimum  $V^*$  du volume du barrage au point  $x^* = (H^*, \theta^*)$  est une conséquence de la compacité de la zone d'admissibilité ceci d'une part, et de la continuité de la fonction qui définit le volume d'autre part.

Nous nous proposons de résoudre le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \min V(H, \theta), \\ C_i(H, \theta) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq 3, \\ (H, \theta) \in D, \end{array} \right. \quad (4.55)$$

où  $D$  est donné par (4.53).

Il y a deux façons d'envisager le problème d'optimisation (4.55). La première consiste à résoudre le problème d'EDPs couplées sur tous les points de la grille. Dans le cas où nous considérons une étude dynamique du problème, la résolution du problème d'optimisation se fera de manière récurrente pour tous les pas de temps. On utilise ensuite le solveur **fmincon** avec comme consigne de respecter les contraintes. L'exécution de ce solveur permet de trouver le point  $x^* = (H^*, \theta^*)$  en lequel le volume du renforcement, et donc du barrage, atteint une valeur minimale. Il faut noter que le nombre de contraintes augmente au fur et à mesure que les pas de discrétisation en temps et en espaces diminuent. L'Algorithme d'optimisation, dans cette situation, est donné par Algorithme 3.

Cette méthode souffre cependant d'un sérieux inconvénient : le temps d'exécution de l'Algorithme. En effet, le temps d'exécution du programme pour une seule boucle en temps nécessite un temps de calcul important. La lenteur de l'exécution est d'autant plus accentuée que le programme est exécuté sur une grille  $(H, \theta)$  plus fine. Pour surmonter ce problème, l'idée est de se restreindre uniquement à la région où les contraintes sont respectées. La seconde approche du problème d'optimisation correspond à la mise en œuvre de la méthode exploratoire locale de Hooke-Jeeves.

Cette méthode nous permet de réduire le nombre de tests dans l'Algorithme d'optimisation. Elle se divise en les deux étapes principales :

---

**Algorithm 3** : Résolution du problème de minimisation en utilisant le solveur **fmincon**

---

```

for  $t = 1 : \tau_t : t_{final}$  do
  for  $H = 3 : \tau_H : 41$  do
    for  $\theta = 3 : \tau_\theta : \frac{\pi}{4}$  do
      Calculer  $F_1(H, \theta)$   $F_2(H, \theta)$  and  $F_3(H, \theta)$ ;
    end for
  end for
end for

```

Construire, par interpolation, les courbes représentatives des fonction  $F_1, F_2, F_3$  ;  
Définir la fonction volume, @Vfun ;  
Choisir un point initial,  $x^0$ , vérifiant les contraintes ;  
 $[x^*, V_{min}] = \mathbf{fmincon}(\text{@Vfun}, x^0, (C_1, C_2, C_3))$  ;

---

1) **Phase exploratoire** → choix judicieux du point initial : on choisit un point  $x^0 = (H^0, \theta^0)$  à l'intérieur de la zone de confiance et qui caractérise une configuration géométrique du barrage pour laquelle la structure est stable.

2) **Phase de déplacement** → Choix adéquat du pas de déplacement à chaque étape, en principe en respectant les contraintes si elles existent.

En fait, la méthode de Hooke-Jeeves est conçue pour résoudre des problèmes d'optimisation sans contraintes. Cela dit, son utilisation dans notre situation est toujours possible car on va se ramener grâce à la méthode de pénalisation à un problème d'optimisation sans contraintes. La mise en œuvre de cette méthode consiste alors à :

- 1) Transformer le problème (4.55) en le problème d'optimisation sans contraintes (4.56).
- 2) Choisir correctement le point initial dans l'algorithme de Hooke-Jeeves.
- 3) Appliquer la méthode de Hooke-Jeeves avec ses deux étapes.

### 4.4.3 Pénalisation

On renvoie à l'ouvrage de Céa [35], pour un rappel des résultats abordés dans cette sous-section. Pour transformer le problème avec contraintes en un problème de minimisation sans contraintes, on utilise la méthode de pénalisation. Pour cela, on pose pour  $x = (H, \theta)$  :

$$W_\epsilon(H, \theta) := V(H, \theta) + \frac{1}{\epsilon} \times \sum_{i=1}^3 \max[0, C_i(H, \theta)] = V(H, \theta) + \frac{1}{\epsilon} \times \psi(H, \theta),$$

et on considère le problème pénalisé défini par

$$\begin{cases} \text{minimiser } W_\epsilon(H, \theta) \\ (H, \theta) \in D. \end{cases} \quad (4.56)$$

On note  $D^- \subset D$  le sous ensemble dans le lequel on a

$$\max[0, C_i(H, \theta)] = 0, \quad i = 1 : 3.$$

Il est clair que  $D^-$  contient les points,  $(H, \theta)$ , en lesquels les trois contraintes associées aux fonctions  $(C_i)_{i=1,3}$  sont satisfaites. La question cruciale qui s'impose est la suivante : quel est le lien entre les solutions respectives des problèmes (4.55) et (4.56) ? Pour répondre à cette question, on rappelle le théorème suivant décrivant la méthode de pénalisation ainsi que sa convergence lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Théorème 4.2.** *Soit  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, coercitive sur  $\mathbb{R}^2$  et strictement convexe, et  $D^- \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble convexe, fermé et non-vide. Soit  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de pénalisation de  $D^-$  satisfaisant les hypothèses suivantes :*

$$\begin{cases} \psi \text{ est une fonction continue et convexe,} \\ \psi(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \\ \psi(x) = 0 \text{ si et seulement si } x \in D^-. \end{cases} \quad (4.57)$$

On définit, pour  $\epsilon > 0$  suffisamment petit, la fonction de pénalité suivante :

$$\begin{aligned} W_\epsilon : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow W_\epsilon(x) := V(x) + \frac{1}{\epsilon} \psi(x) \end{aligned}$$

avec  $\psi(x) = \sum_i \max[0, C_i(x)]$ . Alors pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un unique élément  $x_\epsilon \in \mathbb{R}^n$  vérifiant

$$W_\epsilon(x_\epsilon) = \min_{x \in \mathbb{R}^2} W_\epsilon(x).$$

De plus on a

$$x_\epsilon \rightarrow x^* \quad \text{pour } \epsilon \rightarrow 0$$

où  $x^*$  est l'unique point de  $D^-$  satisfaisant

$$V(x^*) \leq V(x), \quad \forall x \in D^-.$$

*Démonstration.* On précise que la première condition de (4.57) sert à montrer que  $W_\epsilon$  est continue, coercitive et strictement convexe ce qui permet de déduire l'existence d'un unique minimum global de  $W_\epsilon$  sur  $\mathbb{R}^2$ . On note un tel minimum par  $x_\epsilon$ . Il est aisé de voir que

$$W_\epsilon(x) \geq V(x) \quad \forall x \in D \quad \text{et} \quad W_\epsilon = V \quad \text{sur} \quad D^-.$$

On déduit alors

$$V(x_\epsilon) \leq W_\epsilon(x_\epsilon) \leq W_\epsilon(x) = V(x), \quad \forall x \in D^-. \quad (4.58)$$

Ceci nous dit que la suite  $V(x_\epsilon)$  est bornée, ce qui implique que la suite  $x_\epsilon$  est bornée (car sinon, il y aurait une sous-suite de  $x_\epsilon$  dont la norme tend vers  $\infty$ , ce qui impliquerait, par coercivité de  $V$ , que  $V(x_\epsilon) \rightarrow \infty$  ceci est impossible à cause de (4.58)). Comme  $x_\epsilon$  est borné dans  $\mathbb{R}^2$ , le Théorème de Bolzano-Weierstrass nous dit qu'il existe une sous-suite  $x_{\epsilon'}$  de  $x_\epsilon$  tel que  $x_{\epsilon'}$  converge vers un élément  $x^*$  de  $\mathbb{R}^2$ . En passant à la limite  $\epsilon' \rightarrow 0$  dans (4.58), on déduit, grâce à la continuité de  $V$  que

$$V(x^*) \leq V(x), \quad \forall x \in D^-. \quad (4.59)$$

Pour montrer que  $x^*$  est un point de minimum de  $V$  sur  $D^-$  il reste à montrer que  $x^* \in D^-$ ; grace à la troisième propriété de (4.57) ceci revient à montrer que  $\psi(x^*) = 0$  sur  $D^-$ . En effet nous avons :

$$0 \leq \psi(x_{\epsilon'}) = \epsilon' (W_{\epsilon'}(x_{\epsilon'}) - V(x_{\epsilon'})) \leq \epsilon' (V(x) - V(x_{\epsilon'})) \quad (4.60)$$

pour un  $x \in D^-$  fixé. La suite  $V(x_{\epsilon'})$  converge car  $V$  est continue, donc  $(V(x_{\epsilon'}))_{\epsilon'}$  est une suite bornée. Dans ce cas on a en passant à la limite  $\epsilon' \rightarrow 0$  dans (4.60) que  $\lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \psi(x_{\epsilon'}) = \psi(x^*) = 0$  ce qui implique que  $x^* \in D^-$ .

Il nous reste à démontrer que toute la suite  $x_\epsilon$  converge vers  $x^*$ . Montrons ce résultat par absurde : supposons que  $x_\epsilon$  ne converge pas en entier vers  $x^*$ ; ceci implique qu'il existe une sous-suite  $x_{\epsilon''}$  de  $x_\epsilon$  et un  $\delta > 0$  tels que

$$\|x_{\epsilon''} - x^*\| \geq \delta. \quad (4.61)$$

En reproduisant pour  $x_{\epsilon''}$  le même argument que pour  $x_\epsilon$ , on peut extraire une sous-suite  $x_{\epsilon''''}$  de  $x_{\epsilon''}$  qui converge vers  $x^*$  (unicité de  $x^*$  est ici essentielle); ceci contredit (4.61) et donc achève la preuve du Théorème.  $\square$

**Remarque 4.3.** La première condition de (4.57) peut ne pas être vérifiée dans notre cas. En effet, en plus du fait qu'elles ne sont pas définies globalement sur  $\mathbb{R}^2$ , on ne connaît pas les expressions explicites des fonctions  $(F_i)_{i=1,3}$  intervenantes dans les trois contraintes du problème,  $(C_i)_{i=1,3}$ , cf. sous-section (4.3.1). Il en est donc de même de la fonction de pénalisation  $\psi$ . Ceci dit, pour montrer l'existence d'un minimum global  $x_\epsilon$  de  $W_\epsilon$ , il est possible, dans le cas qui nous intéresse, de nous affranchir de cette condition à l'aide d'autres hypothèses propres à notre problème. En effet, ceci est possible en utilisant la continuité et la coercitivité de la fonction auxiliaire  $\tilde{W}_\epsilon$  sur  $\mathbb{R}^2$  et qui est définie dans la sous-section 4.4.4, voir aussi la remarque 4.4 ci-dessous. Ainsi, on s'assure de l'existence d'au moins un minimum global du volume au sens où il peut être atteint en plus d'un point. L'unicité quant à elle découle de la définition du prolongement des fonctions  $C_i$  qui constituent la fonction de pénalité  $\psi$ .

Mais alors, rappelons un théorème classique de la théorie de l'optimisation sans contraintes. Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $D$  désignant une partie de  $\mathbb{R}^2$ . On considère le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \inf f(x) \\ x \in D. \end{cases} \quad (4.62)$$

**Théorème 4.3.** *Supposons que dans le problème (4.62),  $f$  est convexe sur  $D$  convexe (éventuellement de dimension infinie). Alors on a :*

1. *Si  $x_0 \in \text{Int}(D)$  est un minimum local de  $f$  alors c'est un minimum global, de plus, l'ensemble des minimums locaux (et donc globaux) de  $f$  est convexe.*
2. *Si  $f$  est strictement convexe, il y a au plus un minimum.*
3. *Si  $D$  est non borné et  $f$  est coercive i.e.  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$  alors elle admet au moins un minimum global, si de plus  $f$  est strictement convexe alors on a unicité de ce minimum.*

Il est aisé de constater, par un calcul élémentaire, que le volume du renforcement est donné par :

$$V(H, \theta) = \frac{H^2 \times \text{tg}(\theta)}{2}. \quad (4.63)$$

La fonction  $V$  est la fonction objectif à minimiser.

**Remarque 4.4.** 1) La fonction à minimiser définie sur  $\mathbb{R}^2$  par (4.63) est coercitive mais pas convexe, comme représentée sur la figure 4.10. Aussi, vu que l'énoncé du théorème 4.2 suppose que les fonctions qui y interviennent soient définies sur l'espace entier, alors

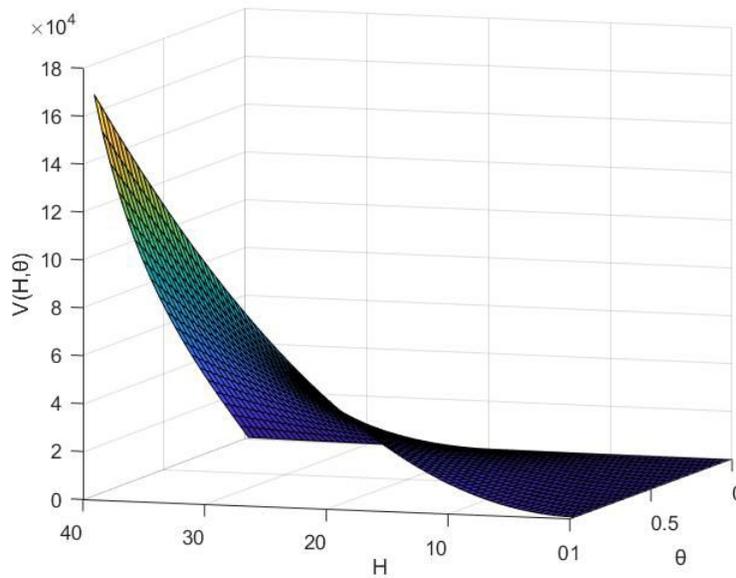


FIGURE 4.10 – Non Convexité de la fonction objectif  $V$ .

il est indispensable, pour pouvoir appliquer ce théorème à notre situation et pour dégager une assise théorique à l'Algorithme qu'on présente ci-après, de prolonger la fonction à minimiser sur  $\mathbb{R}^2$ . Ce prolongement doit se faire de telle sorte que la fonction qui en résulte,  $\tilde{W}_\epsilon$ , admette un minimum. La continuité, à elle seule, de la fonction  $W_\epsilon$  sur le compact  $\overline{D^-}$  aurait suffi pour garantir l'existence d'une valeur minimale  $W_\epsilon^*$ . Ceci dit, comme le domaine de définition est non borné, on a aussi besoin de la coercitivité de la fonction à minimiser. Cependant, la valeur minimale en question peut, éventuellement, être réalisée en plus d'un point  $x_\epsilon^*$ . Même dans le cas où les points en lesquels le minimum est atteint ne convergent pas vers un unique point dans le sens du théorème 4.2 i.e. il existe plus d'une suite de minimums  $x_\epsilon$  et  $x'_\epsilon$  convergeant vers deux limites distinctes, cela ne pose aucun problème tant que le volume est minimal. De plus, il est utile de noter que dans notre cas "pratique", il n'est pas indispensable de garantir l'unicité du point en lequel le minimum est atteint, sauf si l'on a l'intention d'introduire des critères d'optimisation.

#### 4.4.4 Fonction auxiliaire convexe et prolongement par continuité des fonctions

Comme on vient de le signaler, la fonction objectif définie par (4.63) n'est pas convexe ; ce qui rend impossible l'application de la théorie de l'optimisation disponible dans ce

contexte, en particulier, on ne peut pas conclure sur les résultats du Théorème 4.3. Pour cela on doit considérer la fonction auxiliaire convexe (ou bien la fonction convexifiée) définie par :

$$(H, \theta) \rightarrow V_1(H, \theta) := (10^4 V(H, \theta))^{0.1} - \ln(10^4 V(H, \theta)). \quad (4.64)$$

La fonction,  $V_1$ , est représentée graphiquement sur la figure 4.11. On vérifie aisément que la fonction

$$g : [10^{-1}, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ t \rightarrow (10^4 t)^{0.1} - \ln(10^4 t)$$

est croissante. On déduit, en utilisant cette croissance, que minimiser la fonction  $V_1$  revient à minimiser  $V$ . A présent, on se propose de montrer que la fonction  $V_1$  définie par (4.64) et dépendant des variables  $H$  et  $\theta$  est convexe. Il suffit pour cela de montrer que la matrice hessienne associée est définie positive en tout point du domaine. La matrice en question est donnée par :

$$Hess := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V_1}{\partial H^2} & \frac{\partial^2 V_1}{\partial H \partial \theta} \\ \frac{\partial^2 V_1}{\partial \theta \partial H} & \frac{\partial^2 V_1}{\partial \theta^2} \end{pmatrix}.$$

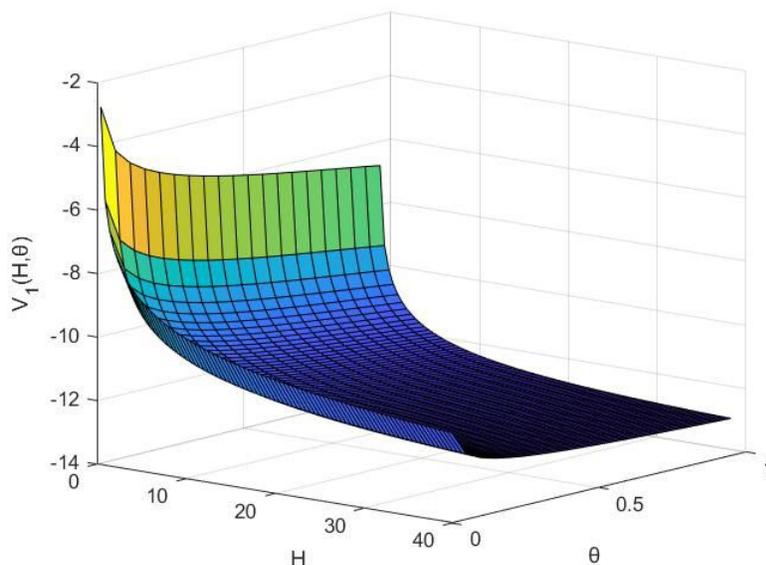


FIGURE 4.11 – Convexité de la fonction auxiliaire  $V_1$ .

Si on note  $N_1$  et  $N_2$  les mineurs principaux de la matrice *Hess* alors on montre que pour  $(H, \theta) \in D$  on a

$$1) N_1 > 0 \quad , \quad 2) N_2 > 0$$

par conséquent d'après le critère de Sylvester, la hessienne *Hess* est définie positive, symétrique et donc  $V_1$  est convexe sur  $D$ . Si on note  $V_1^*$  le minimum de  $V_1$  atteint en  $x^* = (H_1^*, \theta_1^*)$  alors

$$V_1(H_1^*, \theta_1^*) = g(V(H^*, \theta^*)) < g(V(H, \theta)) = V_1(H, \theta)$$

pour tout  $(H, \theta)$ , comme  $g$  est croissante alors  $(H_1^*, \theta_1^*)$  est aussi un point en lequel  $V$  réalise le minimum i.e.

$$V(H^*, \theta^*) < V(H, \theta).$$

On prolonge à  $\mathbb{R}^2$  la fonction  $V_1$ , ce qui se fait en deux temps :

- 1) Horizontalement en la variable  $H$  i.e. sur la bande  $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$  : on garde simplement l'expression de la fonction  $V_1 = g(V)$  définie par (4.64).

- 2) Verticalement en la variable  $\theta$  : on prolonge  $V_1$  par périodicité en une fonction  $\tilde{V}_1$  et on ajoute une autre fonction croissante en  $H$  et  $\theta$  tout en conservant la continuité.

Donc la fonction prolongée est définie par :

$$\tilde{V}(H, \theta) = \tilde{V}_1(H, \theta) + H \times \max[0, \theta - \frac{\pi}{4}], \quad (4.65)$$

ce qui permet, à son tour, de définir la fonction

$$\tilde{W}_\epsilon(H, \theta) = \tilde{V}(H, \theta) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^3 \max[0, \tilde{C}_i(H, \theta)]. \quad (4.66)$$

Il est aisé de voir que les fonctions  $(C_i)_{i=1:3}$  peuvent être prolongées à  $\mathbb{R}^2$  en des fonctions  $\tilde{C}_{i=1,3}$  continues et positives sur  $\mathbb{R}^2 - \Omega$ . La nature des fonctions,  $\tilde{C}_i$ , résultats de ce prolongement et de moindre importance dans le sens où elles n'interfèrent pas avec le fait que le minimum puisse appartenir à  $D^-$  ; ceci est notamment dû à la forme de la fonction à minimiser.

Par ailleurs, comme la fonction tangente est croissante sur  $[0, \frac{\pi}{4}]$ , on a :

$$V(H, \theta) > \frac{H^2 \tan(\theta_{min})}{2},$$

par conséquent

$$\lim_{\|(H, \theta)\| \rightarrow +\infty} V(H, \theta) = +\infty.$$

La croissance de  $g$  permet de déduire que la fonction

$$(H, \theta) \rightarrow V_1(H, \theta) := g(V(H, \theta))$$

est également coercitive. Comme la fonction de pénalité est positive alors la fonction auxiliaire  $\tilde{W}_\epsilon$  est aussi coercitive.

#### 4.4.5 Caractère global du minimum calculé par la méthode de Hooke-Jeeves

L'évolution dans le processus d'approximation par la méthode de Hooke-Jeeves est essentiellement dictée par l'amélioration dans la recherche du minimum. Ce fait permet, entre autres, de se rendre compte, indirectement, du lien entre le problème pénalisé et le problème primal. D'où, il ne peut qu'être avantageux, du point de vue du temps d'exécution, de choisir comme point initial,  $x^0 = (H^0, \theta^0)$ , dans l'Algorithme de Hooke-Jeeves un point qui corresponde à une configuration géométrique pour laquelle on ait

$$\max[0, \tilde{C}_i(H^0, \theta^0)] = 0, \quad 1 \leq i \leq 3 \quad (4.67)$$

i.e. tel que les contraintes soient satisfaites. Si on note  $x_{\epsilon_0}$  le minimum (théorique) de  $\tilde{W}_{\epsilon_0}$  et  $x_{\epsilon_0}^k$  l'approximation de  $x_{\epsilon_0}$  obtenu après  $k$  itérations, alors d'après la condition d'amélioration dans l'algorithme de Hooke-Jeeves, on a :

$$\tilde{W}_{\epsilon_0}(x_{\epsilon_0}^k) \leq \tilde{W}_{\epsilon_0}(H^0, \theta^0) = \tilde{V}(H^0, \theta^0) + \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \max[0, \tilde{C}_i(H^0, \theta^0)], \quad (4.68)$$

étant donnée la continuité de  $\tilde{W}_{\epsilon_0}$ , l'estimation (4.68) est valable dans un voisinage de  $x_{\epsilon_0}^k$ .

Par ailleurs, et à défaut d'avoir une estimation de l'erreur commise dans l'approximation de  $x^*$  par  $x_\epsilon$ , on saurait peu apprécier, pour un rang  $\epsilon_0$  choisi, la qualité de l'approximation du minimum  $x^*$  par  $x_{\epsilon_0}^k$  résultant de l'application de la méthode de Hooke-Jeeves. Ceci est d'autant plus vrai si on souhaite conclure à un résultat du type énoncé au point (1) du Théorème 4.3 à moins, bien sur, qu'on suppose que non seulement le domaine admissible  $D^-$  est connexe mais aussi convexe. Cette supposition est indispensable si on souhaite affirmer le caractère global du minimum trouvé. Néanmoins, on peut se contenter de la convexité de  $D$  mais à condition de travailler avec une fonction  $\tilde{V}$  convexe et que le minimum calculé par Hooke-Jeeves appartienne à l'intérieur de  $D^- \subset\subset D$ . Ceci est une conséquence du fait que les conditions d'admissibilité soient strictement satisfaites au point initial  $(H^0, \theta^0)$  de l'algorithme.

Ceci étant, on ne peut pas établir de résultats précis sur la forme topologique du domaine  $D^-$  : convexité, connexité ou simple connexité du domaine admissible  $D^-$  et ce pour différentes raisons : nature du problème, non connaissance explicite des fonctions  $(F_i)_{i=1,3}$  qui définissent  $D^-$ . Par conséquent on doit se contenter, d'une part des résultats numériques en sortie de l'exécution du programme, et d'autre part en fixant des hypothèses préalables afin de démontrer la proposition 4.2 énoncée ci-dessous.

On se propose, en utilisant la forme particulière de la fonction de pénalisation  $\psi$  définie dans l'énoncé du théorème 4.2, de montrer que la solution approchée du problème (4.56) est une bonne approximation de la solution du problème (4.55). Ce qui nous permettra également de prendre une certaine connaissance du rapport entre  $x_{\epsilon_0}$  et l'unique minimum global théorique. On fixe  $\epsilon_0 = 10^{-1}$  et on applique l'Algorithme de Hooke-Jeeves à la fonction  $W_{\epsilon_0}$ . On obtient, après  $k$  itérations, un pas  $\Delta^k$  et un minimum local approché  $x_{\epsilon_0}^k$ . On montre :

**Proposition 4.2.** *Le minimum de  $\tilde{W}_\epsilon$  calculé par l'Algorithme de Hooke-Jeeves est une bonne approximation du minimum global.*

*Démonstration.* On note  $\tilde{W}_{\epsilon_0}(x_{\epsilon_0})$  la valeur minimale de  $\tilde{W}_{\epsilon_0}$  atteinte en  $x_{\epsilon_0} := (H_{\epsilon_0}, \theta_{\epsilon_0})$ . Le caractère local du minimum approché,  $(x_{\epsilon_0}, \tilde{W}(\epsilon_0))$ , est garanti par la méthode de calcul utilisée (Hooke-Jeeves). A cet effet, il est très utile de constater que cette méthode, dont l'algorithme associée est présenté dans Algorithme 4, converge vers le minimum du problème, (cf. [26]) i.e.

$$x_{\epsilon_0}^k \rightarrow x_{\epsilon_0}$$

lorsque  $k$  devient grand. Ce qui se traduit par

$$|\tilde{V}(x_{\epsilon_0}) - \tilde{V}(x_{\epsilon_0}^k)| \leq \kappa_0, \quad (4.69)$$

la constante  $\kappa_0$  est donnée par la condition d'arrêt qui est exprimée à l'entrée de la boucle **while** dans l'Algorithme 4 et  $\tilde{V}(x_{\epsilon_0}^k)$  est la valeur minimale approchée qui est effectivement fournit pas l'algorithme H.-J.. Par conséquent,  $\exists r > 0$  (inférieur au dernier pas obtenu dans l'Algorithme de Hooke-Jeeves) tel que pour tout  $x \in A_r := B(x_{\epsilon_0}, r)$  on ait

$$\begin{aligned} \tilde{W}_\epsilon(x_{\epsilon_0}) &:= \tilde{V}(x_{\epsilon_0}) + \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \max[0, \tilde{C}_i(x_{\epsilon_0})] \\ &\leq \tilde{V}(x) + \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \max[0, \tilde{C}_i(x)] \\ &:= \tilde{W}_{\epsilon_0}(x). \end{aligned} \quad (4.70)$$

On se doit de faire une distinction entre deux situations :

**Situation 1.**  $\tilde{C}_i(x_{\epsilon_0}) < 0$  pour tout  $1 \leq i \leq 3$ . Autrement dit, le minimum local est atteint à l'intérieur de  $D^-$ . En utilisant la continuité de la fonction  $\tilde{C}_i$ , alors  $\tilde{C}_i(x) < 0$  sur un voisinage de  $x_{\epsilon_0}$ . Donc il existe un voisinage  $A_{r'}$  suffisamment restreint autour de  $x_{\epsilon_0}$  telle que l'estimation (4.70) devienne :

$$\tilde{V}(x_{\epsilon_0}) \leq \tilde{V}(x), \quad \forall x \in A_{r'}. \quad (4.71)$$

**Conséquence de la situation 1.** L'estimation (4.71) ajouté au fait que le domaine  $D$  est convexe et que  $\tilde{V}$  est une fonction convexe sur  $D$  nous amène, en utilisant le Théorème 4.3, à conclure le caractère global du minimum. Autrement dit, le minimum calculé effectivement par l'Algorithme de Hooke-Jeeves, qui est une approximation du minimum local, est aussi une bonne approximation du minimum global dont l'existence est prédite par le Théorème 4.2.

**Situation 2.**  $\tilde{C}_i(x_{\epsilon_0}) \geq 0$  pour un certain  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . On distingue deux sous-situations :

2.1)  $\tilde{V}(x_{\epsilon_0}) \leq \tilde{V}(x)$  pour tout  $x \in A_r$  : dans ce cas la valeur de  $\tilde{V}(x_{\epsilon_0})$  va être prise comme solution à notre problème du moment que

$$\tilde{C}_i(x_{\epsilon_0}) < \epsilon_0 V(x^0) < \epsilon_0 \max_{x \in \Omega} V(x) < 10^{-3},$$

ce qui est insignifiant au regard des contraintes imposées.

2.2) Il existe  $x^1 \in D^-$  tel que  $\tilde{V}(x_{\epsilon_0}) \geq \tilde{V}(x^1)$  : dans ce cas on a d'après la condition d'amélioration de l'Algorithme de Hooke-Jeeves

$$\tilde{V}(x_{\epsilon_0}) + \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \max[0, \tilde{C}_i(x_{\epsilon_0})] \leq \tilde{V}(x^1) + 0,$$

ce qui implique bien que  $\tilde{C}_i(x_{\epsilon_0}) < 0$  : contradiction avec l'hypothèse de la situation 2 ; c'est à dire qu'on revient à la première situation.

**Conséquence de la situation 2.** d'après le Théorème 4.2,  $\tilde{V}(x_\epsilon)$  converge toujours vers l'unique minimum global. On conclut que  $x_\epsilon$  converge vers  $x^* \in \partial D^-$ . Ceci est vrai seulement dans le cas où il y a une infinité de terme  $x_\epsilon$  pour lesquels l'hypothèse de la situation 2 est vérifiée.

Cela signifie donc que  $(x_{\epsilon_0}, \tilde{V}(x_{\epsilon_0}))$  résout bien et de manière globale le problème d'optimisation (4.55) dans  $\overline{D^-}$ . Finalement, on peut estimer assez correctement  $\tilde{V}(x_{\epsilon_0})$  en utilisant (4.69) et le résultat,  $V(x_{\epsilon_0}^\delta)$ , en sortie de l'exécution de l'Algorithme 4.  $\square$

---

**Algorithm 4** : Résolution du problème d'optimisation par la méthode de Hooke-Jeeves
 

---

Définir la fonction objectif à minimiser  $V$  ;

Étape 1 : Choisir un point de démarrage de l'algorithme,  $x^0$ , dans  $D$  ;

Étape 2 : Résoudre le problème d'EDP couplé ;

Étape 3 :

Calculer  $C_i(x)$  for  $1 \leq i \leq 3$  ;

Initialiser un pas  $\Delta^1$

**while** ( $\Delta > \Delta^0$ ) ou ( $|V(x^i) - V(x^{i+1})| > \kappa_0$ ) **do**

**for**  $i = 1 : 2$  **do**

    Calculer  $\alpha = W(x^0)$  ;

$x_{i+} = x + \Delta_i$  puis appliquer l'étape 2 ;

**if**  $W(x_{i+}) \leq \alpha$  **then**

      poser  $\alpha = W(x_{i+})$  et continuer la boucle en  $i$  ;

**else if**  $W(x_{i+}) > \alpha$  **then**

      poser  $x_{i-} = x - \Delta_i$ , appliquer l'étape 2 et calculer  $W(x_{i-})$  ;

**end if**

$x_{i+} = x + \Delta_i$

**if**  $W(x_{i-}) \leq \alpha$  **then**

      poser  $\alpha = W(x_{i-})$  et passer à  $i + 1$  ;

**else if**  $W(x_{i-}) > \alpha$  **then**

      revenir à  $x$  et passer à  $i + 1$  ;

**end if**

**end for**

  Nous obtenons un point de base  $x_i$ .

  Construire, à partir de  $x_i$  et  $x_{i-1}$ , un nouveau point  $x = x_i + (x_i - x_{i-1}) = 2x_i - x_{i-1}$ ,

  Effectuer à partir de ce point une nouvelle étape exploratoire avec un éventuel retour à l'étape 2.

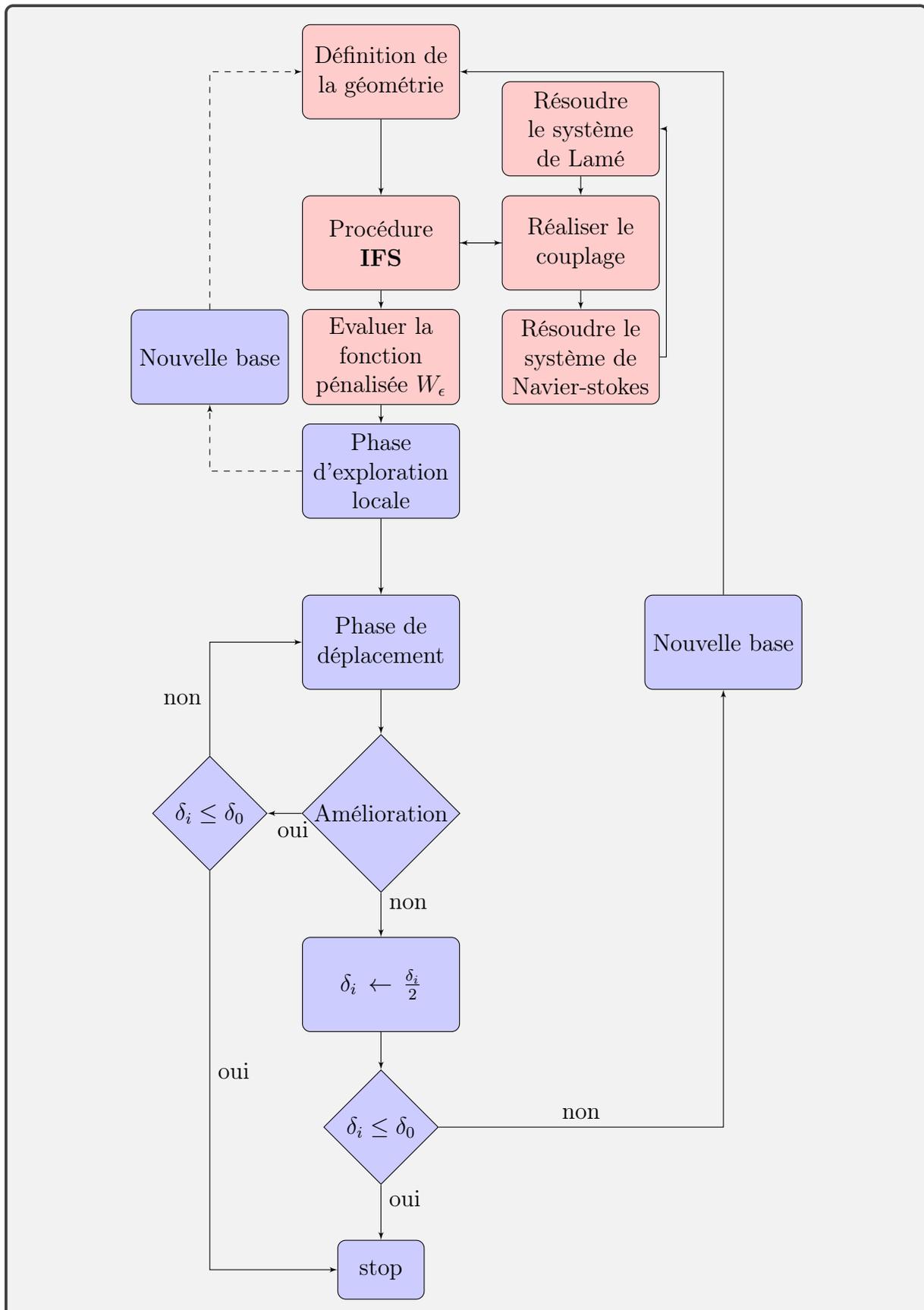
**end while**

---

## Algorithme global

On présente ci-après l'Algorithme global de minimisation résumé sous forme d'un organigramme et qui inclut :

- Résolution du problème couplé, (cases en rouge).
- Procédure de minimisation par Hooke-Jeeves, (cases en bleu).



Organigramme général de l'Algorithme global

**Remarque 4.5.** Étant donné que d'un côté la fonction à minimiser,  $V$  en tant qu'elle est définie sur  $D$ , est croissante en chacune des variables en laissant fixe l'autre, et que d'un autre côté cette fonction admet un minimum au point  $(0, 0)$ , alors on se convainc aisément que le minimum sur  $D^- \subset D$  se réalise sur la frontière  $\partial D^-$  et il en est de même, vu la croissance de la fonction  $g$ , pour la fonction auxiliaire  $V_1$ . Donc l'algorithme de Hooke-Jeeves converge certainement vers un point du domaine  $\overline{D^-}$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . Ceci est rendu vrai d'après la forme pénalisée du problème d'un côté, et la manière dont les fonctions  $V$  et  $C_i$  ont été prolongées en dehors de  $D$  d'un autre côté cf. sous-section (4.4.4). Donc on ne sort du domaine  $D$ , éventuellement, qu'un nombre très limité de fois durant le processus d'approximation par Hooke-Jeeves. Ceci nous épargne en conséquence la fait de devoir adapter le pas du déplacement dans l'algorithme 4, pour demeurer à l'intérieur de  $\overline{D^-}$ , durant le processus d'approximation.

## 4.5 Conclusion

- Comme perspectives d'un développement dans un futur proche, on se propose d'utiliser la technique d'adimensionnement afin de remédier efficacement au problème du temps d'exécution. On souligne une nouvelle fois que ce problème se pose dans le cas de la modélisation en 3D. L'adimensionnement en question se fera sur une ou toutes les variables impliquées dans les équations de Navier-Stokes et de Lamé et ce en vue de se ramener à des équations pour lesquelles la résolution numérique sous Matlab se fera en un temps assez raisonnable.

- Nous nous proposons aussi de nous investir dans l'optique de la prise en compte effective de l'effet d'un séisme sur la stabilité et le comportement de la structure. Les mêmes idées exploitées dans ce travail demeurent valables dans cette nouvelle situation mise à part la démonstration de la proposition 4.1. Ceci est dû au fait qu'on aura plus une donnée de Dirichlet homogène sur  $\Gamma_s^d$ , cette dernière sera plutôt égale à la fonction exprimant le déplacement résultant de l'excitation sismique. Par ailleurs, il sera nécessaire de revoir le critère de non soulèvement ainsi que la contrainte  $C_2$  associée.

# Conclusion générale

## Rappel des problématiques abordées

La matière présentée dans cette thèse s'est articulée autour de quatre thèmes relativement assez indépendants :

- Nous avons développé, dans un premier temps, un résultat en rapport avec la théorie de trace de fonctions d'espaces de Sobolev définis sur des domaines non-Lipschitziens. Notre travail s'inscrit dans la suite des généralisations successives à des domaines de moins en moins réguliers. Nous avons, dans un premier temps, établi la continuité de l'opérateur de trace sur le bord d'un ouvert admettant la propriété de  $(1, p)$ -extension. Dans un second temps, et dans le cas d'un ouvert avec une frontière de mesure de Hausdorff  $s$ -dimensionnelle,  $1 < s < 2$ , nous avons construit une intégrale curviligne de type Lebesgue-Stieltjes, ce qui nous a permis de définir un opérateur de trace sur un tel espace. La seconde étape a consisté en la démonstration de la continuité de cet opérateur en utilisant essentiellement le théorème de Banach-Steinhaus ainsi que la continuité de certaines injections de Sobolev. Par ailleurs, on a utilisé également le résultat de densité des fonctions régulières jusqu'au bord dans l'espace  $W^{1,p}(\Omega)$ .

- Le second thème abordé consiste en l'étude du système d'élasticité de Lamé avec une condition au bord mixte de type Dirichlet-Neumann, la condition de Dirichlet étant homogène. Ce problème a été considéré sur un domaine polygonal convexe. La régularité des données du problème, terme source et traction sur le bord, ont été choisies de telle sorte à ce que le problème admette une solution suffisamment régulière. Nous avons établi pour cette solution une estimation sous forme de majoration explicite. Ceci après avoir établi des estimations explicites à des théorèmes et aux inégalités de Poincaré, de trace et de Korn sur des domaines spécifiques à chacune d'entre elles.

- Le troisième thème abordé est celui de l'étude de l'interaction fluide-structure. Nous avons formulé dans ce cadre un système couplé d'équations aux dérivées partielles qui, pour des raisons d'ordre mécanique, modélise fidèlement l'interaction entre un barrage

(structure), et son réservoir d'eau (fluide). Concrètement, le travail a consisté en le couplage des équations de Navier-Stokes et le système hyperbolique de second degré de Lamé. A cet effet, une théorie de l'existence et d'unicité d'une solution à été présenté au chapitre 4.

-L'étude à culminé avec, le dernier thème abordé, l'optimisation du volume du barrage. On a étudié un problème de minimisation de la fonction volume du barrage avec des contraintes découlant de critères de stabilité mécanique. Puis on a formulé un problème dit pénalisé, qui est un problème d'optimisation sans contrainte, équivalent au premier. Ce dernier à été résolu dans le cas bidimensionnel en utilisant la méthode de Hooke-Jeeves.

### Intérêts de l'étude entreprise

L'intérêt d'un résultat de trace en analyse mathématique n'est plus à démontrer vu sa très large utilisation dans la démonstration de résultats d'existence et d'unicité de solution d'équations aux dérivées partielles, pour ne citer que l'application la plus étroitement liée à notre thèse.

Les deux résultats de trace démontrés dans cette thèse permettent de rendre les fonctions des espaces de Sobolev définis sur des domaines non-Lipschitziens, en particulier les fractals, accessible à la théorie moderne des équations aux dérivées partielles qui est largement supportée par l'analyse fonctionnelle.

Notre apport à consisté en l'introduction de la notion de  $s$ -longueur ainsi que la construction de l'intégrale curviligne sur le bord d'un ouvert de Jordan. L'établissement des résultats de trace à été achevé avec l'utilisation adéquate des théorèmes fondamentaux pour établir le résultat de trace.

L'apport essentiel concernant le second thème se manifeste sous deux formes. D'abord par les résultats établis puis par les idées plus ou moins originales supportées, pour la plus part, par des outils d'analyse fonctionnelle très adaptés.

La décomposition de la solution du problème elliptique de Lamé se fait sans perte de régularité grâce au procédé décrit dans le chapitre 2, bien sur, dans le cas où nous avons affaire à une régularité  $H^1$  sur le domaine. Cette décomposition permet l'application des théorème de Poincaré, trace et Korn avec des constantes numériquement déterminées. La seconde idée à consisté en l'approximation d'une fonction s'annulant sur le bord par des suites de fonctions à support d'intersection vide avec cette partie du bord. Cette propriété à rendu possible diverses décompositions qui ont aidé à l'établissement de l'estimation à priori explicite qui, bien que non optimale, à de quoi intéresser un numéricien. En effet, les estimations d'erreur d'approximation par la méthode des éléments finis font intervenir

dans la plus part du temps la norme  $W^{k,p}$  de la solution du problème. Il est certain qu'une estimation explicite de cette norme soit très avantageuse pour estimer à son tour l'erreur commise et pour apprécier la qualité de l'approximation.

Cette idée d'approximation à été reprise, avec succès, au chapitre 4 et qui a débouché sur la démonstration d'un résultat assez surprenant et qui affirme que pour le problème hyperbolique du second ordre de Lamé avec condition de Dirichlet suffisamment régulière, si la condition de Dirichlet est homogène alors il en est de même de la composante normale du tenseur des contraintes. Il faut remarquer un fait très important, à savoir que les propriétés indispensables du système hyperbolique de lamé ont été extrapolées depuis la théorie établie dans [4], pour l'équation des ondes.

Concernant la problématique d'optimisation dans le dernier thème abordé, la méconnaissance d'une forme explicite des fonctions intervenantes dans les contraintes d'optimisation est un sérieux obstacle pour résoudre le problème de minimisation. L'idée a consisté en la formulation du problème de pénalisation qui a servi à transformer le problème d'optimisation avec contrainte en un problème d'optimisation sans contrainte. Ceci nous a permis de résoudre le problème de minimisation à l'aide de la méthode exploratoire locale de Hooke-Jeeves.

Par ailleurs, seul le cas bidimensionnel à été complètement traité. Pour le cas de la dimension 3, notre schéma numérique en élément finis souffre d'un problème de temps d'exécution qui est considérable.

### Perspective de futurs développements

En perspective, il y a lieu de formuler des idées concernant la possibilité d'étudier les propriétés géométriques des espaces  $s$ -Hausdorff dimensionnel,  $1 < s < 2$ , par le biais d'outils de l'analyse fonctionnelles ou bien à travers certaines équations différentielles. Autrement dit, des propriétés géométriques de domaines sont à récupérer à partir de propriétés analytiques des fonctions définies sur ce domaine.

Ils serait également intéressant d'établir un résultat de trace pour des fonctions de l'espace de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  avec  $\Omega$  un domaine de Jordan quelconque et  $k > 1$ . Il y a aussi la possibilité d'envisager l'éventualité de considérer un espace de Sobolev fractionnaire dans ce cadre général.

La dérivation d'estimations explicites à été effectuée dans la cadre d'une problématique particulière. Étant donné que les inégalités de Poincaré et de trace sont indispensables pour obtenir de telles estimations, alors il est très possible que l'approche suivie dans le

chapitre 3 soit un point de départ intéressant pour celui qui souhaite établir des estimations explicites pour d'autres type de problèmes aux dérivées partielles, notamment ceux faisant intervenir les dérivées d'ordres supérieurs. Cette démarche pourrait aboutir à l'obtention d'estimations  $H^2$ -explicites. Il y a lieu aussi, dans notre situation, de signaler la possibilité de déduire une estimation a priori explicite dans le cas où notre problème est posé sur un domaine de classe  $C^1$ . D'autant plus qu'à certains égards, ce type de domaine est le moins régulier contenant l'ensemble des domaines Lipschitziens tels que les domaine polygonaux convexe. Ceci peut se faire en exploitant adéquatement, d'un coté l'estimation établi au chapitre 3, qui ne dépend pas du nombre des arrêtes, des mesures d'angle des polygones, et d'un autre coté en utilisant le fait que tout domaine  $C^1$  peut être approximé, localement au moins, par une suite de domaines Lipschitziens.

Dans la mesure où notre quête concerne l'obtention d'une régularité maximale pour le problème couplé, la démonstration de l'existence d'une solution au problème couplé est étroitement liée à la forme géométrique de la surface de contact entre le fluide et la structure. La validité d'une telle procédure est inévitablement tributaire de la forme plate de la surface de contact. D'un autre coté la nature mixte, Dirichlet-Neumann, de la condition au bord constitue aussi une limite dans le sens où une régularité maximale ne peut être valide que sur un sous-domaine éloigné des points en lesquels la condition mixte change de nature.

Deux perspectives sont en vue. La première consiste à étudier l'existence, l'unicité et la régularité sur un domaine construit comme une limite de domaines polygonaux ou Lipschitziens, cette même question à été soulevé par les auteurs dans [3]. Également, en perspective d'un développement futur, il serait très intéressant, du point de vue des applications, d'incorporer effectivement l'effet des ondes sismiques dans la modélisation de l'interaction fluide-structure. Pour cela, il faudra considérer une condition de Dirichlet sur le bord qui prenne en compte toutes les données indispensables fournis par le sismomètre.

On pourra penser enfin à étendre le problème d'optimisation au cas tri-dimensionnel, en utilisant la méthode d'adimensionnement. Cette approche permettra sans doute de remédier au sérieux problème du temps d'exécution, d'autant plus que le cas traité contient, en essence, tous les ingrédients pour traiter le problème dans la généralité souhaitée.

# Annexe

**Résultat 1 :** cf. estimation 1.6, page 305 dans [62].

L'opérateur de Laplace,  $\Delta$ , est un opérateur linéaire elliptique s'écrivant sous forme de divergence. Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ . Supposons que sa frontière,  $\partial\Omega$ , est de classe  $C^\infty$ . Alors la fonction de Green,  $G$ , associée à l'opérateur de Laplace avec une condition au bord de Dirichlet sur le domaine  $\Omega$  est définie par :

$$G(x, y) := \Gamma(x - y) + h_x(y)$$

où  $x \rightarrow \Gamma(x)$  est la solution fondamentale du laplacien i.e. si on note  $\delta$  la mesure de Dirac alors

$$\Delta\Gamma = \delta.$$

La fonction  $y \rightarrow h_x(y)$  est solution de

$$\begin{cases} -\Delta_y h_x(y) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ h_x(y) = -\Gamma(x - y) & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.72)$$

$$(4.73)$$

Dans le cas particulier où  $\Omega$  est un disque de centre  $x_0$  et de rayon  $R$ ,  $G$  satisfait :

$$(i) G(x_0, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x_0 - y|_2} - \Gamma(R), \quad (ii) |\nabla_x G(x_0, y)| \leq C|x_0 - y|_2^{1-n}. \quad (4.74)$$

pour tout  $y$  tels que  $y \neq x_0$  et où  $|x_0 - y|_2$  désigne la distance euclidienne entre les points  $x_0$  et  $y$ . On déduit aisément, en utilisant (4.74), que dans le cas bidimensionnel,  $G \in W^{1,p}(\Omega)$  pour  $1 < p < 2$ . Par ailleurs, il faut souligner le fait que la fonction de Green considérée ci-dessus est associée à une condition de type Dirichlet sur tout le bord. Dans le cas où la nature de la condition sur le bord change de nature, alors la fonction de Green aura une autre expression et l'estimation (i) dans (4.74) qu'on vient d'énoncer peut ne plus être valable.

**Résultat 2 :** cf. théorème 1 dans [21].

Soit  $\Omega$  un domaine non vide et borné de  $\mathbb{R}^2$  de classe Lipschitzienne. On désigne par  $V$  l'ensemble des fonctions qui s'annulent sur une partie du bord ayant une mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle strictement positive i.e.

$$V := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \quad \text{tel que } \Gamma_1 \subset \partial\Omega\}.$$

Alors l'espace  $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap V$  est dense dans  $V$ . On a désigné par  $C^\infty(\overline{\Omega})$  l'ensemble des restrictions des fonctions de  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$  à  $\Omega$ .

**Résultat 3 :** cf. théorème 2.1 dans [20].

Soit  $1 < p < \infty$ . On considère l'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  défini sur le domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . On suppose que ce domaine possède la propriété de  $(1, p)$ -extension. Soit  $D \subset \partial\Omega$  une partie fermée de la frontière de  $\Omega$ . On définit l'espace

$$C_D^\infty := \{u|_\Omega : u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \text{ supp}(u) \cap D = \emptyset\},$$

c'est à dire que le support est disjoint de l'ensemble fermé  $D$ . Soit  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ . Alors on a équivalence entre :

- 1) la fonction  $u$  appartient à l'espace  $W_D^{1,p}(\Omega)$ .
- 2) pour  $C_{1,p}$ - presque tout  $x \in D$ , nous avons

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r) \cap \Omega} |u| dy.$$

On rappelle aussi, cf. lemme 4.2 p.7, [20] que dans notre situation nous avons

$$C_{1,p}(D) = 0 \Rightarrow \mathcal{H}^1(D) = 0,$$

où  $\mathcal{H}^1(D)$  désigne 1-mesure de Hausdorff de  $D$ .

**Résultat 4 :** cf. lemme 4.2 dans [22].

Soit  $\omega \subset \mathbb{R}^2$  un parallélogramme dont la frontière s'écrit  $\partial\omega := \cup_i \Gamma_i$ . L'inégalité issue de la propriété de continuité de l'opérateur de trace pour une fonction  $u$  de l'espace de Sobolev  $W^{1,2}(\omega)$  s'exprime explicitement de la manière suivante :

$$\|u\|_{L^2(\Gamma_i)}^2 \leq 2 \frac{|\Gamma_i|}{|\omega|} \|u\|_{L^2(\omega)} + \frac{|\omega|}{|\Gamma_i|} \|\nabla u\|_{L^2(\omega)},$$

où  $|\Gamma_i|$  désigne la longueur de l'arrête  $\Gamma_i \subset \partial\omega$  et  $|\omega|$  désigne l'aire de parallélogramme  $\omega$ .

**Résultat 5 :** cf. théorème 2.1, p.151 dans [4].

- Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un domaine borné ayant une frontière Lipschitzienne. On considère le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{dt^2} - \Delta \Phi = F & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ \Phi = g & \text{sur } (0, T) \times \Gamma, \\ \Phi(0, x) = \Phi^0(x), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Phi^1(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (4.75)$$

$$\Phi = g \quad \text{sur } (0, T) \times \Gamma, \quad (4.76)$$

$$\Phi(0, x) = \Phi^0(x), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Phi^1(x), \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.77)$$

avec les conditions de compatibilité suivantes :

$$g|_{t=0} = \Phi^0|_{\Gamma}, \quad \frac{\partial g}{\partial t}|_{t=0} = \Phi^1|_{\Gamma}. \quad (4.78)$$

Alors il existe une unique solution  $\Phi$  de (4.75)-(4.77) et qui satisfait à :

$$\Phi \in C([0, T]; H^1(\omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \in L^2([0, T] \times \partial\Omega).$$

- De plus, l'application

$$F, \Phi^0, \Phi^1, g \rightarrow \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}$$

définie du sous-espace de  $L^1(0, T; L^2(\Omega)) \times H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1((0, T) \times \partial\Omega)$  des fonctions satisfaisant les conditions de compatibilité dans l'espace  $C^0(0, T; H^1(\Omega)) \times C^1(0, T; L^2(\Omega)) \times L^2((0, T) \times \partial\Omega)$  est continue, cf. remarque 2.2, p.152, [4].

D'après le théorème 2.5, p.165, [4], le même résultat est valable avec des données plus régulières i.e.

$$\begin{cases} F \in L^1(0, T; H^2(\Omega)), \quad \frac{\partial F}{\partial t} \in L^1(0, T; H^1(\Omega)), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \in L^1(0, T; L^2(\Omega)), \\ \Phi^0 \in H^3(\Omega), \quad \Phi^1 \in H^1(\Omega), \\ g \in H^3((0, T) \times \Gamma). \end{cases}$$

avec les conditions de compatibilité (4.78) et  $\partial_t^2 g|_{t=0} = \Delta \Phi^0 + F(0)$  sur  $\Gamma$ . Dans ce cas, le problème (4.75)-(4.77) possède une unique solution  $\Phi$  satisfaisant :

$$\begin{cases} \Phi \in C^0(0, T; H^3(\Omega)), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \in C^0(0, T; H^2(\Omega)), \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \in C^0(0, T; H^1(\Omega)), \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \in C^0(0, T; L^2(\Omega)). \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \in H^2(\Omega).$$

En utilisant l'interpolation comme dans la théorème 2.4 p.164 dans [4], avec des données  $F$ ,  $g$ ,  $\Phi^0$  et  $\Phi^1$  de régularités bien adaptées, on en arrive à des régularités d'ordres intermédiaires pour la fonction solution du problème (4.75)-(4.77).

Par ailleurs, il est facile de constater que les opérateurs linéaires de Lamé et de Laplace ont en commun l'ellipticité. En utilisant les mêmes idées que dans la démonstration du théorème 2.3, p.153 dans [4] et qui concerne l'existence d'une solution faible au problème (4.75)-(4.77), on en arrive aisément à transposer les résultats de régularité ci-dessus pour l'opérateur de Lamé.

**Résultat 6 :** cf. théorème 1 dans [52].

Soit  $\Omega$  un domaine polygonal. On considère le problème suivant associé à l'opérateur de Lamé, qui est sous forme de divergence, avec une condition au bord mixte de type Dirichlet-Neumann homogène :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{dt^2} - Lu = f(t, x) & \text{dans } (0, T) \times \Omega, & (4.79) \\ \sigma(u) \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } (0, T) \times \Sigma, & (4.80) \\ u(t, x) = 0 & \text{sur } (0, T) \times \Gamma, & (4.81) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u(0, x) = u_j(x), & \text{dans } \Omega, & (4.82) \end{cases}$$

tel que  $\Gamma \cup \Sigma = \partial\Omega$ . De plus, on exige des fonctions  $u_0$  et  $u_1$  de satisfaire les conditions de compatibilité adéquates avec les conditions de Dirichlet (4.81) et de Neumann (4.80). On note  $C_{\Gamma}^{\infty}(\bar{\Omega})$  l'espace des fonctions de classe  $C^{\infty}$  sur  $\bar{\Omega}$  qui s'annulent sur un voisinage de  $\Gamma$ . On désigne par  $K(\Omega)$  le complété de  $C_{\Gamma}^{\infty}(\bar{\Omega})$  par rapport à la norme de l'espace  $H^1$ .

Soient  $u_0, u_1 \in H^1(\Omega)$ . Si  $\{u_0, u_1\}$  satisfont les conditions de compatibilité et  $f \in C^0(0, T; K(\Omega))$ , alors il existe une unique solution  $(t, x) \rightarrow u(t, x)$  du problème aux limites (4.79)-(4.82) dans  $C^1(0, T; K(\Omega)) \cap C^2(0, T; L^2(\Omega))$  qui satisfait (4.82) et il existe  $\beta > 0$  indépendante de  $u$  et de  $t$  telles que

$$\|u(t)\|_{1,\Omega} + \|u'(t)\|_{0,\Omega} \leq C \exp^{\beta t} \left( \|u_0\|_{1,\Omega} + \|u_1\|_{0,\Omega} + \int_0^t \|f(s)\|_0 ds \right), \quad \forall t \in (0, T).$$

On peut noter, d'après la remarque 2 dans [52], que ce résultat d'existence à été démontré dans [53] dans le cas où la frontière du domaine est de classe  $C^{\infty}$  mais que le même résultat est valable si on suppose que notre domaine,  $\Omega$ , contient des coins, par exemple s'il est de forme polygonale, cf. théorème 2, p.172, [52].

# Bibliographie

- [1] D. Ait-Akli, A. Merakeb. *Explicit  $H^1$ -Estimate for the solution of the Lamé system with Mixed boundary conditions*. J. part. Diff. Eq., N.1, vol.33 (2020), pp.64-92.
- [2] E. Gagliardo. *Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in  $n$  variabili*. Ren. Sem. Mat.Univ. Padova., vol.27 (1957), pp.284-305.
- [3] J. P. Raymond, M. Vanninathan. *Fluid structure model coupling the Navier-Stokes equations and the Lamé system*. J. Math. Pures Appl., N.9, vol.102 (2014), pp.546-596.
- [4] I. Lasiecka, J. L. Lions, R. Triggiani. *Non-homogeneous boundary value problems for second order hyperbolic operators*. J. Math. Pures Appl., vol.65 (1986), pp.149-192.
- [5] C. Kassiotis, A. Ibrahimbegovic, R. Niekamp, H. G. Matthies. *Nonlinear fluid-structure interaction problem. Part I : implicit partitioned algorithm, nonlinear stability proof and validation examples*. Comput. Mech., vol.47 (2011), pp.305-323.
- [6] Q. Long, C. Wu. *A hybrid method combining genetic algorithm and Hookes-Jeeves method for constrained global optimization*. J. Ind. Manag. Optim., N.4, vol.10 (2014), pp.1279-1296.
- [7] C. Yu, K. L. Teo, L. Zhang, Y. Bai. *A new exact penalty function method for continuous inequality constrained optimization problems*. J. Ind. Manag. Optim., vol.6, N.4 (2010), pp.895-910.
- [8] V.I. Burenkov. *Extension theorems for Sobolev spaces, Operator Theory : Advances and Applications*. Birkhauser Verlag Basel/Switzerland., vol.109 (1999), pp.187-200.
- [9] J. Necas. *Introduction to the Theory of Nonlinear Elliptic Equations*. Teubner, Leipzig, (1983).
- [10] R. A. Adams, J. J. Fournier. *Sobolev spaces*. Pure and applied mathematics series. 2nd ed. (2003).

- [11] R. Hooke, T. A. Jeeves. *Direct search solution of numerical and statistical problems*. J. Assoc. Comput. Mosh., vol.8 (1961), pp.212-229.
- [12] G. Duvaut, J.L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, (1972).
- [13] S. Nicaise. *About the Lamé system in a polygonal or polyhedral domain and a coupled problem between the Lamé system and the plate equation. I : regularity of the solutions*. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.(4), N.3, vol.19 (1992), pp.327-361.
- [14] G. Allaire. *Analyse Numérique et Optimisation. Une introduction à la modélisation et à la simulation numérique*. Editions de l'école polytechnique, (2004).
- [15] C. O. Horgan, *Korn's inequalities and their applications in continuum mechanics*. SIAM Rev., N.4, vol.37 (1995), pp.91-511.
- [16] C. O. Horgan, L. E. Payne. *On inequalities of Korn, Friedrichs and Babuška-Aziz*. Arch. Rational Mech. Anal., 82 (1983), pp.165–179.
- [17] M. Plum. *Explicit  $H^2$ -estimates and pointwise bounds for solutions of second-order elliptic boundary value problems*. J. Math. Anal. Appl., Vol.165, N.1 (1992), pp.36-61.
- [18] L. Consiglieri. *Explicit Estimates for Solutions of Mixed Elliptic Problems*. International Journal of Partial Differential Equations, vol. 2014, Article ID 845760, (2014), 16 pages.
- [19] E. Di Nezzaa, G. Palatucci, E. Valdinoci. *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*. Bull. Sci. Math., **136** (2012), pp.521-573.
- [20] M. Egert, P. Tolksdorf. *Characterizations of Sobolev Functions that vanish on a part of the boundary*. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, N.4, vol.10 (2017), pp.729-743.
- [21] P. Doktor, A. Zenisek. *The density of infinitely differentiable functions in Sobolev spaces with mixed boundary conditions*. Appl. Math., N.5, vol.51 (2006), pp.517-547.
- [22] C. Carstensen, S. A. Sauter. *A posteriori error analysis for elliptic PDEs on domains with complicated structures*. Numer. Math., N.4, vol.96 (2004), pp.691-721.
- [23] S. Repin, S. Sauter, A. Smolianski. *A posteriori error estimation for the Poisson equation with mixed Dirichlet-Neumann boundary conditions*. J. Comput. Appl. Math., vol.164–165 (2004), pp.601–612.
- [24] C. Eck, J. Jarusek, M. Krbec. *Unilateral Contact Problems : variational methods and existence theorems*. Series : Chapman and Hall/CRC Pure and Applied Mathematics, (2005).

- [25] H. Whitney. *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*. Trans. Amer. Math. Soc., vol.36 (1934), pp.63-89.
- [26] Y. Weichun. *Positive basis and a class of direct search techniques*. Scientia Sinica, vol.9, Issue S1 (1979), pp.53-67.
- [27] J. L. Lewis. *Approximation of Sobolev functions in Jordan domains*. Ark. Mat., Vol.25, N.1-2, (1987), pp.255-264.
- [28] J. L. Lewis. *Approximations of sobolev functions and related topics*. In : Berenstein C.A. (eds) Complex Analysis I. Lecture Notes in Math., Springer, vol 1275,(1987), pp.223–234.
- [29] V.G. Maz'ya. *Extension of functions from Sobolev spaces*. English translation : Journal of Soviet Mathematics, vol.22 (1983), pp.1851-1855.
- [30] J. Yeh. *Real Analysis, Theory of measure and integration*. World scientific. 2nd ed. (2006).
- [31] A. Lazwardi, R. Nurmeidina. *Lebesgue-Hausdorff Line Integral of Hausdorff Measurable Multivariable Function over Simple Curve on  $[a,b]$* . The international conference on mathematical analysis, its applications and learning, (2018).
- [32] J. Droniou. *Quelques Résultats sur les Espaces de Sobolev*. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01382370>, (2001).
- [33] E. B. Fabes, D. W. Stroock. *The  $L^p$ –Integrability of Green's function and fundamental solution for elliptic and parabolic equations*. Duke Math. J., Vol. 51, No.4 (1984), pp.997-1016.
- [34] M. E. Taylor. *Measure Theory and Integration*. A.M.S. Graduate Studies in Mathematics, vol.76, (2006).
- [35] J. Céa. *Optimisation : théorie et algorithmes*. Méthodes mathématiques de l'informatique, Dunod, Paris, (1971).
- [36] G. Auchmuty. *Sharp boundary trace inequalities*. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics, Vol.144, N.1 (2014), pp.1-12.
- [37] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, A.M.S, 1998.
- [38] J. A. Fiordilino. *On pressure estimates for the Navier-Stokes equations*. Arxiv, (2018).
- [39] A. Seghir. *Contribution à la modélisation numérique de la réponse sismique des ouvrages avec interaction sol-structure et interaction fluide-structure : application à l'étude des barrages poids en béton*. Thèse de doctorat en génie civil, (2010).

- [40] P. Jamet, pp. A. Raviart. *Numerical solution of the stationary Navier-Stokes equations by finite element methods*. Computing Methods in Applied Sciences and Engineering Part 1, (2005), pp.193-223.
- [41] V. Girault, pp. A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*. Springer-Verlag, (1986).
- [42] K. J. Bathe. *The inf – sup condition and its evaluation for mixed finite element methods*. Computers and Structures 79, (2001), pp.243-252.
- [43] R. Rannacher. *Finite Element Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations*. Fundamental Directions in Mathematical Fluid Mechanics, (2000) pp.191-293.
- [44] P. G. Ciarlet. *On Korn's inequality*. Chin. Ann. Math., 31B(5) (2010), pp.607–618.
- [45] Y Zhou. *Fractional Sobolev extension and imbedding*. Trans. Amer. Math. Soc., vol.367 (2015), pp.959-979.
- [46] P. Grisvard. *Singularités en élasticité*. Arch. Rational. Mech. Anal., vol.107 (1989), pp.157-180.
- [47] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext, Springer, (2010).
- [48] H. Jasak, Z. Tukovic. *Automatic mesh motion for the unstructured Finite Volume Method*. Trans. of FAMENA, 30(2) (2006), pp.1-20.
- [49] J. Donea, A. Huerta, J.-Ph. Ponthot. and A. Rodríguez-Ferran. *Arbitrary Lagrangian-Eulerian methods*. The Encyclopedia of Computational Mechanics., Wiley, Vol.1 (2004), Chapter 14, pp.413-437.
- [50] J. Donea, S. Giuliani, J.pp. Halleux. *An Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions*. Compp. Methods Appl. Mech. Eng., vol.33 (1982), pp.689-723.
- [51] D. Coutand, S. Shkoller. *Motion of an elastic solid inside an incompressible viscous fluid*. Arch. Ration. Mech. Anal., vol.176 (2005), pp.25–102, .
- [52] K. Ibuki. *On the regularity of solutions of a mixed problem for hyperbolic equations of second order in a domain with corners*. J. Math. Kyoto Univ., vol.(JMKYAZ) 16-1, (1976), pp.167-183.
- [53] K. Hayashida. *On a mixed problem for hyperbolic equations with discontinuous boundary conditions*. Publ. RIMS, Kyoto Univ., vol.7 (1971/72), pp.57-67.

- [54] I. Lasiecka and R. Triggiani. *Regularity of Hyperbolic Equations Under  $L^2(0, T; L^2(F))$ -Dirichlet Boundary Terms*. Appl. Math. Optim., vol.10 (1983), pp.275-286.
- [55] I. Lasiecka and R. Triggiani. *On the Stokes Problem in Lipschitz Domains*. Annali di Matematica pura ed applicata (IV), Vol.CLXVII (1994), pp.147-163.
- [56] K. Yosida. *Strong Convergence and Weak Convergence*. In : *Functional Analysis. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete*. vol.123. Springer, Berlin, Heidelberg, (1974).
- [57] R.Lohner, C. Yang. *Improved ALE mesh velocities for moving bodies*. Communications in numerical methods in engineering, vol.12 (1996), pp.599–608.
- [58] Z. Ding. *A proof of the trace theorem of Sobolev spaces in Lipschitz domains*. Proc. Amer. Math. Soc., Vol.124, N.2 (1996), pp. 591-600.
- [59] P. Koskela, D. Yang, Y. Zhou. *A Jordan Soblev extension domain*. Ann. Acad. Sci. Fenn., Math. Vol.35 (2010), pp.309-320.
- [60] X. Liu, F. Kikuchi. *Analysis and Estimation of Error Constants for  $P_0$  and  $P_1$  Interpolations over Triangular Finite Elements*. J. Math. Sci. Univ. Tokyo. Math., Vol.17 (2010), pp.27–78.
- [61] X. Liu, F. Kikuchi. *Explicit Estimation of Error Constants Appearing in Non-Conforming Linear Triangular Finite Element Method*. Appl. Math., Vol.63 (2018), pp.381–397.
- [62] D. Mitrea, I. Mitrea. *On the Regularity of Green Functions in Lipschitz Domains*. Comm. Partial Differential Equations, vol.36 (2011), pp.304–327.
- [63] p. Koskela, Y.R. Zhang. *A Density Problem for Sobolev Spaces on Planar Domains*. Arch. Rational Mech. Anal., vol.222 (2016), pp.1-14.
- [64] G. Di Fratta, A. Fiorenza. *A short proof of local regularity of distributional solutions of Poisson's equation*. Proc. Amer. Math. Soc. 148 (2020), pp.2143-2148.
- [65] M. Fortin. *Résolution numérique des équations de Navier-Stokes par des éléments finis de type mixte*. Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, fascicule S5, « Journées « éléments finis » » (1976), pp.1-14.
- [66] C. Fefferman. *Whitney's extension problems and interpolation of data*. Bull. Amer. Math. Soc., vol.46 (2009), pp.207-220.

- 
- [67] V. Partimbene, T. Garcia, P. Spiteri, P. Marthon, L. Ratsifandrihana. *Asynchronous multi-splitting method for linear and pseudo-linear problems*. Advances in Engineering Software, vol.133 (2019), pp.76-95.
- [68] V. Partimbene. *Calcul haute performance pour la simulation d'interactions fluide-structure*. Thèse de doctorat de L'université de Toulouse en mathématiques Appliquées, (2018).
- [69] A. Fortin and A. Garon, Les éléments finis de la théorie à la pratique. Springer New-York, 1994.