

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHESCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI OUZOU



ⵍⵓⵎⵓⵝ ⵎⵓⵎⵎⵉⵔ ⵉⵎⵓⵏⵉⵔ ⵉⵏ ⵔⵉⵣⵉ ⵓⵣⵣⵓ



FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT MATHEMATIQUE

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de MASTER en Mathématiques Appliquées à
la Gestion

Thème

**Programmation linéaire et quadratique et
Applications au sein de l'entreprise
HADJEB AUTO**

Présenté par

CHERIFI Fazia

HOCINE Sylia

Membres de jury

M^r AOUANE

M^{me} OUBAKOUK

Dirigé par

M^r OUANES

Année universitaire : 2020/2021

Remerciement

Nous remercions le DIEU le tout puissant d'avoir guidé nos pas vers les portes de savoir tout en illuminant notre chemin et de nous avoir donné suffisamment de courage et de persévérance pour mener notre travail à terme.

Nous tenons à remercier Mr OUANES, notre promoteur, de nous avoir encadré, nous lui exprimons notre gratitude pour sa disponibilité, ses conseils qui étaient notre guide vers une vision plus étendue et le soutien qu'il nous a apportée tout au long de la préparation de ce mémoire.

Toutes nos sincères gratitudes et notre profond respect à Mr LANDRI qui nous a aidés tout au long de la période de ce stage pratique.

Nous vifs remerciements s'adressent au membre de jury qui a aimablement accepté de nous honorer en faisant ce mémoire pour évaluer et apprécier notre travail, nous espérons qu'ils seront satisfaits.

Nous apportons aussi nos vifs remerciements aux personnels enseignants de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou A toute la promotion de 2020/2021.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mon cher grand-père, à ma chère grand-mère, à mes chers parents, pour leur tendresse, leurs conseils, leurs sacrifices, leur présence à mes côtés et leur soutien, auxquels je dois ce que je suis et à qui je souhaite une longue vie pleine de bonheur.

A mes chères tantes: Malika, Hamama, Ouiza, Aldjia, Fatima, Fatiha, Zohra et leurs époux.

A ma chère tante Sadia.

A ma chère tante Karima et son petit Yufteu et son époux.

A mes chers oncles: Djamel, Ali et leurs épouses

A mes chers frères: Mourad, Massi, Jugurtha, Lounes.

A mes chers cousins: Houda, Ameer, Chaouki, Massi, Salwa, Lahna, Fouad, Yamina, Abdou, Katia, Fatma Zahra, Zohra, Mustapha, Aya, Said, Moumouh, Oahab, Youssra, Mira, Tamazight, Yanis, Rania, Aziz, Youba, Noursine, Arinasse.

A mon cher binôme Fazia et sa famille.

A mes chères amies: Lydia, Sabrina, Safia, Rebiha et Zahra.

Sylia

Dédicaces

J'ai l'immense plaisir de dédier ce modeste travail à:

Mes très chers parents: MOHAMED ET HAMMAMA.

Mes frères: SAMIR, NASSIM.

Mes sœurs: SAMIA, SABIHA, NASSIMA, DJEDJIGA.

Ma belle sœur: RAZIKA.

Mes beaux frères: OMAR, AHMED.

*A tous les membres de ma grande famille, oncles, tantes, cousins
et cousines.*

A mon cher binôme Sylia et sa famille.

Mes amis (e)s.

Fazia

Sommaire

Introduction générale.....	1
 Chapitre 1: Programmation linéaire	
Introduction	4
I.Définition et modélisation d'un programme linéaire	4
I.1 Définition	4
I.2 Méthodologie de modélisation en programmation linéaire.....	4
II.Dualité	8
Proposition 1.1 (Dualité faible)	8
Proposition 1.2 (Dualité forte)	9
III.Autres définitions.....	9
Définitions 1.1	9
Proposition 1.3.....	9
IV.La résolution d'un programme linéaire (PL).....	9
IV.1. La résolution des programmes linéaires par la méthode du simplexe.....	9
IV.1.1. Algorithme du simplexe	10
IV.1.2. Critère d'optimalité.....	11
V.Problème de transport	13
V.1. Enonce générale du problème de transport.....	13
V.2. Réseau de transport	14
V.3. Tableau de problème.....	14
V.4. Propriétés et caractéristiques du problème de transport	15
a. Cas où l'offre totale est égal à la demande totale.....	15
b. Cas où l'offre totale est différent de la demande totale	15
V.5. Résolution de problème de transport	16
V.5.1. Le flot.....	16
V.5.2. Problème du flot de coût minimum.....	17
V.5.3. La transformation du problème de transport en problème du flot de coût minimum	17
V.6. Résolution du problème de transport (cas général)	20

V.6.1. La méthode Nord-Ouest pour résoudre les problèmes de transport	20
V.6.1.1. Principe	20
V.6.1.2. But	20
V.6.1.3. Limite	20
V.6.2. Calcul d'un plan basique initial de transport	20
V.6.3. Méthode des potentiels.....	22

Chapitre 2: Programmation quadratique

Introduction	27
I. Méthodes de résolution en programmation quadratique convexe.....	27
I.1. La méthode de points intérieurs	27
I.1.1. Position du problème	28
I.1.2. Problème dual	28
I.1.3. Technique de la méthode	29
I.1.4. La technique de chemin central	31
I.1.5. Schéma de l'algorithme	33
I.2. La méthode d'activation des contraintes	34
I.2.1. Critère d'optimalité	34
I.2.2. Itération de la méthode	36
I.2.3. Schéma de l'algorithme.....	38
I.3. Exemple numérique.....	39

Chapitre 3: Problème d'approvisionnement et de distribution

Introduction	44
I. Présentation du groupe	44
I.1. Présentation	44
I.2. Historique	44
I.3. Organigramme des filiales du groupe HADJEB	45
II. L'entreprise HADJEB AUTO.....	45
II.1. Présentation de l'organisme d'accueil.....	45

II.2. Les activités de l'entreprise	45
III. Système de gestion de stock et d'approvisionnement.....	46
III.1. Critères de stockage et identification des volumes de pièces	46
III.1.1. Choix de la méthode d'approvisionnement	46
III.2. La méthode d'approvisionnement	48
III.3. L'Analyse de Pareto (Analyse ABC)	49
Problématique.....	50
1. Modélisation	50
2. Représentation graphique.....	51
3. La résolution	52
4. Les résultats	53
Conclusion.....	54
Chapitre 4: Simulations numériques	
Application sur Lingo	56
Introduction	56
I. Installation du logiciel	56
Application 1: Exemple 1.1	57
Application 2: Exemple 1.2	58
Application 3: Exemple 2.1	59
Application 4: Problématique.....	60
Conclusion générale	61
Références	62

Liste des figures

Figure 1.1: Etapes à suivre dans le processus de modélisation	5
Figure 1.2: Organigramme de la structure d'un modèle de programmation linéaire	6
Figure 1.3: Réseau de transport associé.	15
Figure 1.4: Représentation de cycle C.....	17
Figure 1.5: Réseau de transport après la transformation.	19
Figure 3.1: Organigramme des filiales du groupe HADJEB.....	46
Figure 3.2: Organigramme des services de l'entreprise Hadjeb AUTO.	47
Figure 3.3: Le réapprovisionnement par seuil.....	49
Figure 3.4: Table de consommation.	50
Figure 3.5: Réseau de transport.....	53
Figure 4.1: Application de l'exemple 1.1 sur logiciel Lingo	57
Figure 4.2: Application de l'exemple 1.2 sur logiciel Lingo	58
Figure 4.3: Application de l'exemple 2.1 sur logiciel Lingo	59
Figure 4.4: Application de la problématique sur logiciel Lingo.....	60

Liste des tableaux

Tableau 1.1: La quantité minimale des produits de nourriture des troupeaux	7
Tableau 1.2: les apports d'une unité de chaque produit en protéines, lipides et vitamines A	7
Tableau 1.3: Tableau de transport.	15
Tableau 1.4: tableau de transport.	21

Introduction générale

La recherche opérationnelle peut être définie comme l'ensemble des méthodes et techniques rationnelles orientées vers la recherche du meilleur choix dans la façon d'opérer en vue d'obtenir des résultats visés ou de meilleurs résultats possibles, elle vise l'amélioration des opérations des entreprises, des organismes publics ou privés par l'application de l'approche scientifique. Elle repose sur l'utilisation: Des mathématiques appliquées, De l'informatique et des sciences de la gestion. Ainsi la recherche opérationnelle a permis de résoudre plusieurs problèmes réels.

Une des parties essentielles de la recherche opérationnelle est la programmation linéaire, qui étudie l'optimisation d'une fonction objectif linéaire soumise à des contraintes linéaires, elle est résolue par l'américain G.B. DANTZIG en 1947, selon les caractéristiques des situations visées, des modèles proposées pour les présenter et des techniques de résolution utilisées. On peut par exemple évoquer le problème de transport.

L'optimisation quadratique est l'une des théories de la programmation mathématique la plus utilisée pour modéliser des problèmes pratiques. C'est une théorie autonome de l'optimisation non linéaire dans lequel on minimise (ou maximise) une forme quadratique sous des contraintes linéaires. Cette branche est très importante d'un point de vue pratique: de nombreux domaines d'application ont été touchés par cette théorie, notamment la recherche opérationnelle, l'économie, les sciences de l'ingénieur et la physique.

Notre travail est structuré sur quatre principaux chapitres:

- Dans le premier chapitre, nous énumérons quelques notions de base sur la programmation linéaire et une des méthodes de résolution d'un programme linéaire qui est la méthode du simplexe puis on présente le problème de transport ainsi que sa modélisation en tant qu'un programme linéaire et la résolution de ce problème par la méthode du simplexe après l'avoir ramené à un problème du flot de coût minimum.
- Le deuxième chapitre comprend des définitions et des théorèmes sur la programmation quadratique convexe et la notion de la dualité et les méthodes de résolution d'un problème de programmation quadratique telles que la méthode d'activation des contraintes et celle de points intérieurs où on présente d'une manière détaillée le principe de ces deux méthodes.
- Dans le troisième chapitre on présente d'abord l'entreprise HADJEB AUTO ainsi que les activités de cette entreprise et son système de gestion et

d'approvisionnement ensuite on passe à la problématique qui est un problème de transport de pièces de rechanges, et on le transforme à un problème du flot à coût minimum qu'on résout en utilisant logiciel Lingo.

- Le quatrième chapitre on utilise un langage de programmation et on applique notre programme du simplexe et quadratique à des exemples en montrant les résultats.

Enfin nous achevons notre travail par une conclusion.

Chapitre 1

Programmation linéaire

Introduction

Le problème de l'alimentation est l'un des premiers problèmes d'optimisation à être étudié dans les années 30 et 40. Il a d'abord été motivé par le désir de l'armée de répondre aux besoins nutritionnels des agents de terrain tout en minimisant les coûts. L'un des premiers chercheurs à étudier ce problème était George Stigler. Il a fait une estimation éclairée de la solution optimale au programme linéaire en utilisant une méthode heuristique. Son estimation du coût d'un régime optimal était de 39,93 \$ par an (prix de 1939). À l'automne 1947, Jack Laderman, du Mathematical Tables Project du National Bureau of Standards, entreprit de résoudre le modèle de Stigler avec la nouvelle méthode du simplexe. C'était le premier calcul "à grande échelle" en optimisation. Le programme linéaire se composait de neuf équations en 77 inconnues. Il a fallu à neuf commis utilisant des calculatrices de bureau manuelles 120 jours-homme pour trouver la solution optimale de 39,69 \$. L'estimation de Stigler pour la solution optimale n'était que de 24 cents par an.

I. Définition et modélisation d'un programme linéaire

I.1 Définition

La programmation linéaire est un programme consiste à minimiser ou à maximiser une fonction objectif à plusieurs variables de décision soumises à un ensemble de contraintes exprimées sous forme d'équations linéaires.

I.2 Méthodologie de modélisation en programmation linéaire

Un modèle mathématique est une traduction d'une observation dans le but de lui appliquer les outils, les techniques et les théories mathématiques. Puis généralement, en sens inverse, la traduction des résultats mathématiques obtenus en prédiction ou opérations dans le monde réel.

En Recherche Opérationnelle, modéliser un problème consiste à identifier les variables intrinsèques, les différentes contraintes auxquelles sont soumises ces variables et l'objectif visé (optimisation).

Le schéma de la figure 1 suivant résume les étapes à suivre dans le processus de modélisation:

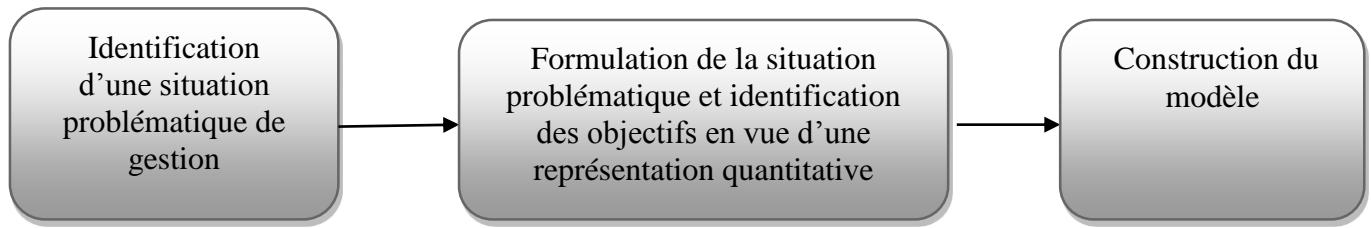


Figure 1.1: Etapes à suivre dans le processus de modélisation

Dans le cas où la situation que l'on veut analyser se prête à l'utilisation de la programmation linéaire comme outil d'aide à la décision, la démarche à suivre dans l'application de cette technique d'optimisation est résumé dans la figure 2 suivante:

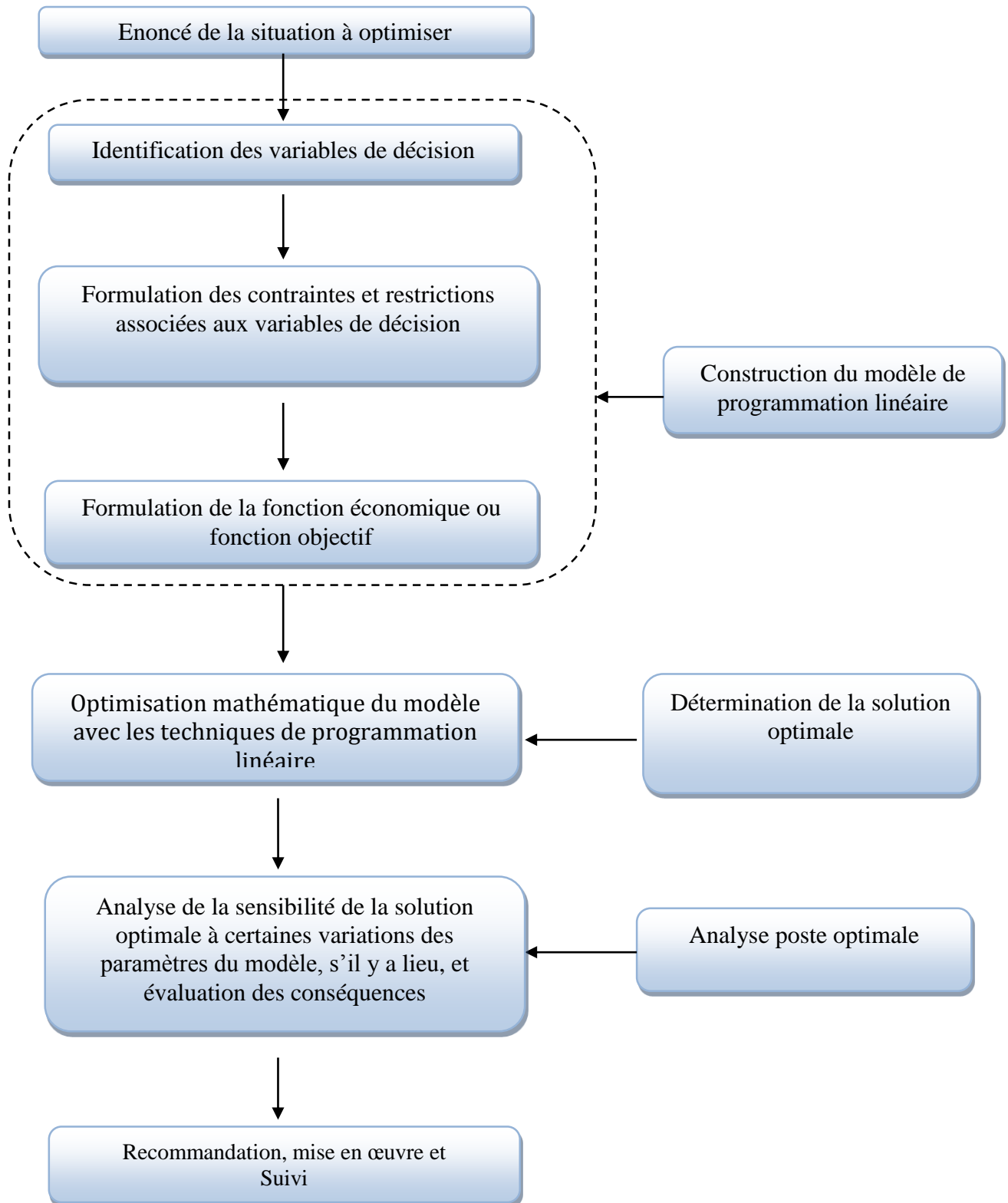


Figure 1.2: Organigramme de la structure d'un modèle de programmation linéaire

Comme l'indique ce schéma (figure 2), la structure d'un modèle de programmation linéaire comporte trois éléments importants:

- Les variables de décisions;
- Les contraintes linéaires;
- La fonction économique.

Exemple 1.1

La nourriture d'un troupeau est formée de 3 produits P1, P2 et P3 le prix unitaire 340 €, 2400 € et 560 €. D'autre part, cette nourriture doit comporter une quantité minimale de protéines, lipides et de vitamines A.

	Seuil minimal
Protéines	1100
Lipides	1400
Vitamines A	1500

Tableau 1.1: La quantité minimale des produits de nourriture des troupeaux

Le tableau 2 suivant décrit les apports d'une unité de chaque produit en protéines, lipides et vitamines A.

	Protéines	Lipides	Vitamines A
P1	1	1	1
P2	2	3	1
P3	1	2	3

Tableau 1.2: les apports d'une unité de chaque produit en protéines, lipides et vitamines A

- Une unité de produit P1 contient 1 unité de protéines, 1 unité de lipides et 1 unité de vitamine A.
- Une unité de produit P2 contient 2 unités de protéines, 3 unités de lipides et 1 unité de vitamines A.
- Une unité de produit P3 contient 1 unité de protéines, 2 unités de lipides et 3 unités de vitamines A.

Proposition 1.2 (Dualité forte) [4]

Si x est fini et optimal pour le programme primal (P), alors le programme dual (DU) a une solution y optimale telle que:

$$b^t y = c^t x.$$

III. Autres définitions**Définitions 1.1**

- 1) On dit que x est un point extrême de D , s'il ne peut pas s'écrire comme une combinaison convexe stricte de deux points de D . $\nexists x_1, x_2 \in D, \gamma \in]0,1[$ Pour lesquels

$$(1 - \gamma)x_1 + \gamma x_2 = x / x_1 \neq x_2.$$

- 2) Une base de A est toute sous-matrice A_B (matrice de base) formée de m colonnes linéairement indépendantes de A .
- 3) Soit A_B une base de A . La solution de base associée à A_B est le point:

$$X + (x_B, x_H) \in \mathbb{R}^n \text{ telque: } X_B = A_B^{-1}b. \text{ (Composante de base).}$$

$$X_H = 0 \text{ (Hors base).}$$

Proposition 1.3 [4]

Si un programme linéaire possède une solution optimale finie, alors au moins un sommet du domaine réalisable est une solution optimale.

IV. La résolution d'un programme linéaire (PL)

Dans le cas de programmation linéaire, on dispose d'une méthode efficace de résolution: l'algorithme du simplexe, découvert par Dantzig en 1947.

Cet algorithme a connu depuis lors de nombreuses améliorations, et il est utilisé dans la majorité des logiciels commerciaux. Comme il y'a aussi le problème de transport qui est utilisé dans les différents domaines.

IV.1. La résolution des programmes linéaires par la méthode du simplexe

La méthode du simplexe itère d'une base réalisable à une autre base réalisable adjacente (seuls deux indices de la base sont modifiés). Le nombre de base réalisable est clairement fini. Dans le cas non dégénéré ($X_B > 0$), ces deux bases correspondent à deux points extrêmes voisins de valeurs différentes. Dans le cas dégénéré (au moins une composante du vecteur X_B est nulle), les deux bases peuvent correspondre au même point extrême, et donc de même valeur.

IV.1.1. Algorithme du simplexe [4]

1- Soit X une solution de base réalisable

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ \Leftrightarrow A_B x_B + A_H x_H &= b \\ \Leftrightarrow x_B &= A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_H x_H \end{aligned}$$

Et de valeur:

$$\begin{aligned} Z &= C^t X = c_B^t x_B + c_H^t x_H \\ &= c_B^t (A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_H x_H) + c_H^t x_H \\ &= c_B^t A_B^{-1} b + (c_H^t - c_B^t A_B^{-1} A_H) x_H \end{aligned}$$

De façon compacte, on associe à chaque base un dictionnaire (ou encore tableau):

$$\frac{X_P = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_H x_H}{Z = c_B^t A_B^{-1} b + (c_H^t - c_B^t A_B^{-1} A_H)}$$

On note:

$\nabla_H = c_H^t - c_B^t A_B^{-1} A_H$. Le vecteur des coûts réduits (des estimations) des variables hors bases et on pose:

$y = A_B^{-1} A_H$ est le vecteur des potentiels. Plutôt on peut dire que la solution du système:

$$A_B y = c_B^t.$$

2- Changement de base

a) Choix de variable d'entrée:

Choisir X_{i^*} tel que $\Delta_{i^*} = \min_{i \in J_H} \{ \Delta_i < 0 \}$; S'il n'existe pas un tel i , la solution trouvée est optimale.

b) Choix de variable de sortie:

On cherche une composante X_{i^*} du vecteur de base X_B pour laquelle:

$$\theta_i = \min \frac{(A_B^{-1} b)_j}{(A_B^{-1} a_{i^*})_j} : \{ j \in J_B \text{ et pour } (A_B^{-1} a_i)_j > 0 \}$$

S'il n'existe pas un tel j^* , le programme linéaire est non borné.

3- Le pivotage

- i. Mettre à jour la base: la variable x_{i^*} entre dans la base et la variable x_{j^*} sort de la base.
- ii. Obtenir le nouveau dictionnaire par pivotage. Aller en 2.

IV.1.2. Critère d'optimalité [2]

On dit $X = (x_B, x_H)^t$ est optimale si seulement si:

Le vecteur des estimations $\Delta_H \geq 0$ est positif (cas de maximisation).

Exemple 1.2

Soit le problème de maximisation suivant:

$$\begin{cases} \max z = x_1 + 2x_2 \\ \text{sc} \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{P1})$$

Après l'addition des variables d'écart, on obtient le problème canonique suivant:

$$\begin{cases} \max z = x_1 + 2x_2 \\ \text{sc} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{P2})$$

La résolution du problème (P2)

1) Dressons le premier tableau de simplexe suivant

	C	1	2	0	0	
	B	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_3	2	1	1	1	0	2
x_4	1	-1	1	0	1	1
	Δ_j	-1	-2	0	0	

Soit la solution de base réalisable donnée:

$$X_0 = (x_B, x_H) = (0, 0, 2, 1)$$

avec J_B {indice de base} = {3,4} et J_H {Indice hors base} = {1,2}.

$\exists \Delta_1, \Delta_2 < 0$, donc X_0 n'est pas optimale.

a. La recherche de la variable d'entrée

On a pour $i^* \in J_H = \{1,2\}$

$$\Delta_{i^*} = \{\Delta_i < 0\} = \Delta_2, \quad i^* = 2 \text{ ce qui fait } x_2 \text{ vas entrer dans la bas}$$

b. La recherche de la variable sortante de la base

$$\theta_{j^*} = \text{Min} \frac{(A_B^{-1}b)_j}{(A_B^{-1}a^l)_j} = \text{Min}\{2,1\} = \theta_4: \{\text{pour } j \in j_B \text{ et } (A_B^{-1}a_l)_j \text{ strictement positifs}\}.$$

Donc x_4 qui vas sortir de la base, et on fait le pivotage.

2) Dressons le deuxième tableau du simplexe

	C	1	2	0	0	
B		x_1	x_2	x_3	x_4	θ →
x_3	1	2	0	1	-1	1/2
x_2	1	-1	1	0	1	/
Δ_j		3	0	0	2	

D'après la première itération, on obtient alors:

$$x_1 = (0, 0, 1, 1) \text{ avec } Z_1=2 \text{ et } J_B \{\text{indice de base}\} = \{2,3\} \text{ et } J_H \{\text{indice hors base}\} = \{1,4\}.$$

On a $\Delta_1, \Delta_4 < 0$, donc x_1 n'est pas optimale.

On passe à une autre itération:

a. La recherche de la variable d'entrée

On a pour $i^* \in J_H = \{1,4\}$

$$\Delta_{i^*} = \{\Delta_i < 0\} = \Delta_1, \text{ donc } i^*=1 \text{ ce qui fait, } x_1 \text{ va entrer dans la base.}$$

b. La recherche de la variable de sortie

$$\theta_{j^*} = \text{Min} \frac{(A_B^{-1}b)_j}{(A_B^{-1}a^l)_j} = \text{Min}\{2,1\} = \theta_3: \{\text{pour } j \in j_B \text{ et } (A_B^{-1}a_l)_j \text{ strictement positifs}\} \text{ Donc } x_3$$

qui va sortir de la base.

Après le pivotage, on trouve le tableau suivant:

3-Dressons le troisième tableau suivant

	C	1	2	0	0	
Solution	B	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_1	$1/2$	1	0	$1/2$	$1/2$	/
x_2	$3/2$	0	0	-1	2	/
	Δ_j	0	0	$3/2$	$1/2$	

Δ_3, Δ_4 sont positifs; parfois, on dit que le tableau est optimale, donc

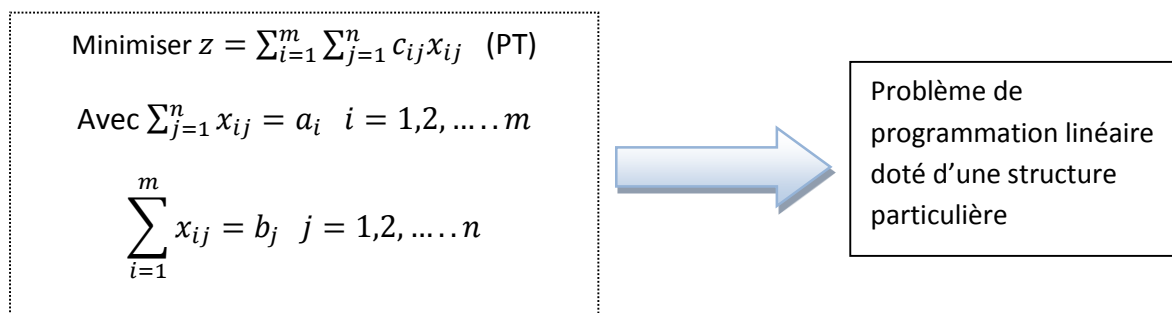
$x_2 = (1/2, 3/2, 0, 0)$ est la solution optimale pour le problème (P2) avec une valeur

$Z = 7/2$ ce qui nous donne:

$X = (1/2, 3/2)$ la solution optimale pour le problème (P1), avec $Z = 7/2$

V. Problème de transport

Le problème de transport a été formalisé pour la première fois par le mathématicien français Gaspard Monge en 1781, ensuite il a été développé pendant la seconde guerre mondiale par le mathématicien et économiste russe Léonid Kantorovitch. Ce problème consiste à minimiser le coût de transport total d'un plan d'expédition. Le fait de minimiser à la fois la distance totale et le coût de transport fait partie de la théorie de flot de réseau. C'est un problème linéaire qui peut être représenté sous forme d'un graphe et qu'on peut le résoudre en utilisant les différentes méthodes de résolution des problèmes linéaires.

V.1. Enonce générale du problème de transport [5]

Où

a_i : La quantité de biens à acheminer de la source i aux n destinations

b_j : La quantité de biens nécessaire pour satisfaire à la demande à la destination j

c_{ij} : Coût unitaire de transport entre une source i et une destination j

x_{ij} : La q^{t^e} transportée de l'origine i à la destination j

m : origines

n : destinations

V.2. Réseau de transport [10]

Graphiquement, le problème du transport est souvent visualisé comme un graphe biparti avec m sources, n destinations et un ensemble de $m \times n$ "arcs orientés". Ceci est représenté dans la figure 1.3 les arcs relient chaque sommet origine aux sommets destinations. Ces arcs sont de capacités de coût c_{ij}

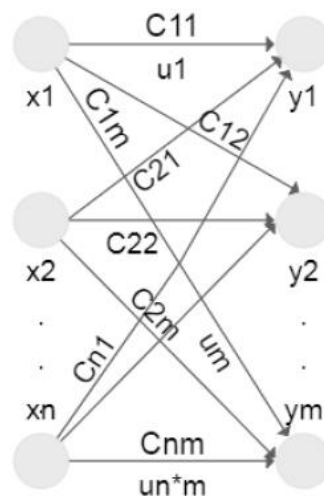


Figure 1.3: Réseau de transport associé.

V.3. Tableau de problème

Le tableau de transport (Un problème de transport typique est représenté sous forme de matrice standard), où la disponibilité d'approvisionnement (a_i) à chaque source est affichée

dans la colonne droite du tableau, et les demandes de destinations (b_j) sont affichées dans la ligne inférieure.

Chaque cellule représente une voie, Le coût de transport unitaire (c_{ij}) est indiqué dans le coin supérieur droit de la cellule, la quantité de matériel transporté est affichée au centre de la cellule, Le tableau de transport exprime implicitement les contraintes de l'offre et de la demande et le coût de transport entre chaque source et destination.

Destination →	D ₁	D ₂	... D _j ...	D	Disponibilité
source ↓					
S ₁	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}		c_{1m} x_{1m}	a_1
S ₂	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}		c_{2m} x_{2m}	a_2
... S _i ...			c_{ij} x_{ij}		... a_i ...
S _n	c_{n1} x_{n1}	c_{n2} x_{n2}		c_{nm} x_{nm}	a_n
Demande	b_1	b_2	... b_j ...	b_m	$\sum a_i$ $\sum b_j$

Tableau 1.3: Tableau de transport.

V.4. Propriétés et caractéristiques du problème de transport

a. Cas où l'offre totale est égal à la demande totale

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad \text{Avec } a_i > 0, b_j > 0$$

C'est-à-dire que la demande totale soit égale à la disponibilité totale

Dans ce cas on dit que le problème de transport est équilibré.

b. Cas où l'offre totale est différent de la demande totale

- **Offre totale > demande totale : ajouter une colonne fictive. Cette colonne correspond donc à un écoulement de surplus avec demande b_{n+1} .**

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j \text{ et coûts unitaires } c_{i,n+1} = 0, i=1, \dots, m.$$

- **Offre totale < demande totale: ajouter une ligne fictive afin de sauter la production avec comme disponibilité a_{m+1}**

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i \text{ et coûts unitaires } c_{m+1,j} = 0, j=1, \dots, n.$$

Dans ce cas on dit que le problème de transport est déséquilibré.

V.5. Résolution de problème de transport

L'algorithme du simplexe n'est pas le plus performant pour ce type de problème. On préfère utiliser des procédures fondées sur les concepts de flots. Le problème de transport classique est en fait un cas particulier d'un problème de flot de réseaux. Le problème de transport est un problème linéaire qui peut être représenté sous forme d'un graphe et qu'on peut résoudre en utilisant les différentes méthodes de résolution des problèmes linéaires qu'on va présenter par la suite.

V.5.1. Le flot [10]

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté: $|U| = m$

Le cycle $C = (x_1, u_1, x_2, u_2, \dots, x_{k-1}, u_{k-1}, x_1)$.

On définit un sens de parcours sur C : $C = C^+ \cup C^-$

$$C^+ = \{u_i \in C / u_i = (x_i, x_{i+1})\}$$

$$C^- = \{u_i \in C / u_i = (x_{i+1}, x_i)\}$$

A tout cycle, on associe un m -vecteur représentatif: $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$

$$\mu_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_i \in C^+ \\ -1 & \text{si } \mu_i \in C^- \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le flot f est une combinaison linéaire de vecteurs représentatifs de cycles de G

$$f = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mu^i, \lambda_i \in \mathbb{R}, \mu^i \text{ vecteur représentatif du cycle } C_i.$$

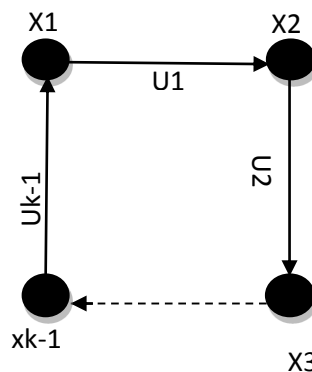


Figure 1.4: Représentation de cycle C .

Soit $f \in \mathbb{R}^m$

f est un flot

$$\Leftrightarrow \forall x \in X, \sum_{u \in c^-(\{x\})} f(u) = \sum_{u \in c^+(\{x\})} f(u) \Leftrightarrow E \cdot f = 0$$

Où E matrice d'incidence sommet-arc

La notion de flot peut être associée, à de multiples problèmes qui consistent à faire passer des quantités de matières sur les arcs d'un réseau de transport tout en essayant de faire respecter au mieux certains critères. Remarquons qu'elle est aussi très utilisée dans d'autres disciplines que la recherche opérationnelle (hydraulique et électricité par exemple).

Nous allons examiner le problème essentiel relatif à cette notion: celui du flot du coût minimum.

V.5.2. Problème du flot de coût minimum

Définition 1.3 [10]

Etant donné un réseau $R = (X; U; c; b; a)$ où

$c: U \rightarrow \mathbb{R}$ coût.

$b: U \rightarrow \mathbb{R}$ demande .

$a: U \rightarrow \mathbb{R}$ disponibilité $\forall \mu \in U; b(u) \leq a(u)$.

Le problème de la recherche d'un flot de coût minimum sur R consiste à chercher $f \in \mathbb{R}^m$, tq:

- f soit un flot sur $G = (X, U)$.
- $\forall \mu \in U; b(u) \leq f(u) \leq a(u)$.
- $\sum_u U f(u) \cdot c(u)$ soit minimum.

Programmation linéaire

$$\begin{cases} \min(z) = c \cdot f \\ f \geq b \\ -f \geq -a \\ E \cdot f = 0 \end{cases}$$

V.5.3. La transformation du problème de transport en problème du flot de coût minimum

V.5.3.1. Représentation graphique

Soit $R = (X, U, c, b, a)$ un réseau:

$$X = \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{y_1, \dots, y_n\} \cup \{s, p\},$$

$\{x_1, \dots, x_n\}$: Ensemble des origines

$\{y_1, \dots, y_n\}$: Ensemble des destinations

$\{s, p\}$: La source et le puit

$$U = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \{U_r\}.$$

$$V_1 = \{(x_i, y_i), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\}, V_2 = \{(s, x_i), i = \overline{1, n}\}, V_3 = \{(y_i, p), j = \overline{1, m}\}.$$

$$c(u) = \begin{cases} c_{ij} & \text{si } u \in V_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$a(u) = \begin{cases} a_i & \text{si } u \in V_2 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$b(u) = \begin{cases} b_j & \text{si } u \in V_3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

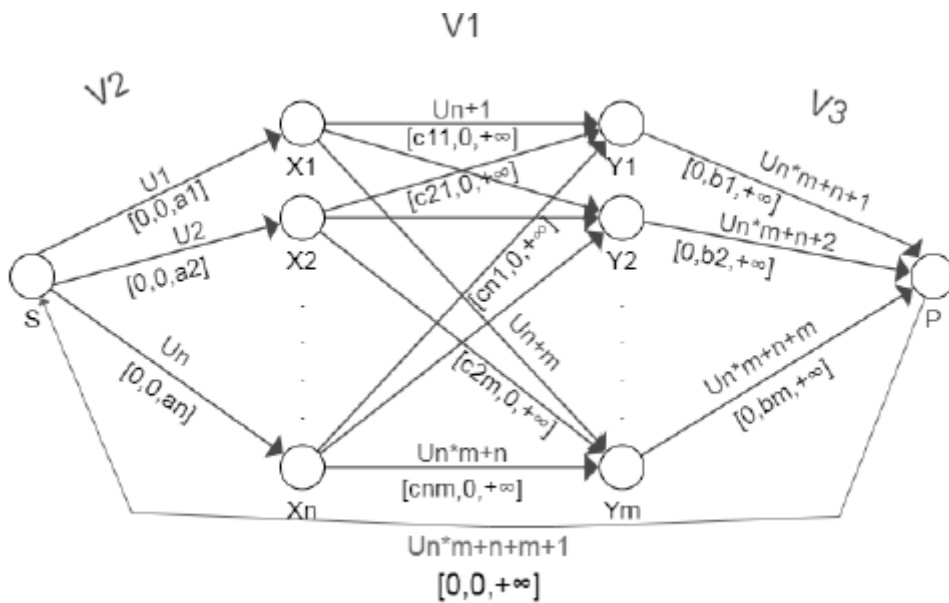


Figure 1.5: Réseau de transport après la transformation.

V.5.3.2. Programmation linéaire du problème de transport

Les variables de décision

Les variables de la programmation linéaire (LP) du problème de transport sont des entiers naturels représentant des unités transportées de s à p .

Les variables de décision sont les suivantes:

$f(u_k)$: La quantité de flot qu'on peut passer du sommet s au sommet p avec $k \in IN$.

La fonction objectif

La fonction objectif est: $\min c(u_k). f(u_k)$.

Les contraintes

- contraintes de conservation de flot: $E.f = 0$

On va représenter ce réseau sous forme d'une matrice d'incidence E .

Définition de la matrice d'incidence

Soit G un graphe orienté et sans boucle, $|X| = n, |U| = m$, la matrice d'incidence sommet-arc associé à ce graphe est la matrice $E = (n \times m)$.

$$E_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \text{ est extrémité initiale de } e_{ij} \\ -1 & \text{si } x_i \text{ est extrémité terminale de } e_{ij} \\ 0 & \text{si } x_i \text{ n'est pas une extrémité de } e_{ij} \end{cases}$$

- Contraintes de capacité:

Le flot f ne dépasse pas la disponibilité a_i :

$$f(u_k) \leq a_i \quad \forall u_k \in V_2$$

Le flot f ne diminue pas à la demande:

$$f(u_k) \geq b_i \quad \forall u_k \in V_3$$

PL associé après la transformation est:

$$\begin{cases} \min(z) = c(u_k). f(u_k) \\ f(u_k) \leq a_i \forall u_k \in V_2 \\ f(u_k) \geq b_i \forall u_k \in V_3 \\ E.f(u_k) = 0 \\ f(u_k) \geq 0 \\ \forall i \in \{1..n\}, j \in \{1..m\}, k \in IN \end{cases}$$

On le résoudra à l'aide du simplexe en utilisant solveur (Excel, Matlab, Lingo...).

Remarque

La résolution du problème de transport nous donne une solution optimale seulement dans le cas où le problème est équilibré, pour le cas général nous avons posé le modèle mathématique

du problème et on va essayer de le résoudre avec la méthode de coin Nord-Ouest. (On n'utilise pas le simplexe).

V.6. Résolution du problème de transport (cas général)

La résolution du problème passe par deux étapes essentielles:

- La première c'est de trouver une solution de base initiale.
- La deuxième étape est de trouver la solution optimale à partir de la solution de base.

V.6.1 La méthode Coin-Nord-Ouest pour résoudre les problèmes de transport [1]

V.6.1.1. Principe

Cette méthode consiste à partir du coin supérieur gauche (le Coin Nord-Ouest sur une carte géographique) du tableau en suivant les étapes suivantes:

- Allouer le plus possible à la cellule courante et ajuster l'offre et la demande;
- Se déplacer d'une cellule vers la droite (demande nulle) ou le bas (offre nulle);
- Répéter jusqu'au moment où toute l'offre est allouée.

V.6.1.2. But

La méthode Coin-Nord-Ouest garantit l'obtention d'une solution de base en l'absence de dégénérescence.

V.6.1.3. Limite

- La méthode Coin-Nord-Ouest donne bien une solution de base, mais elle peut être très loin de l'optimale.
- Elle a tendance à donner des solutions de base dégénérées (avec des variables de base à zéro).
- Elle ne tient pas compte de tout du coût.

V.6.2. Calcul d'un plan basique initial de transport [1]

On choisit la case (1,1), situé au coin nord-ouest du tableau du transport, et on lui affecte la quantité $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$.

Deux cas peuvent alors se présenter:

- i) Si $x_{11} = a_1$, alors la quantité de A_1 est entièrement transportée et ceci sature la première ligne du tableau.

Dans le tableau réduit, on remplacera b_1 par $(b_1 - x_{11})$ et on répétera la même procédure que précédemment.

- ii) Si $x_{11} = b_1$, alors la demande du point de distribution satisfaite par A_1 et ceci sature la première colonne.

Dans le tableau réduit, on remplacera a_1 par $(a_1 - x_{11})$ et on fera la même procédure.

De cette manière, après $(m + n - 1)$ opérations, on trouve $(m + n - 1)$ quantités positives x_{ij} affectées à $(m + n - 1)$ cases, et les cases restantes auront des quantités nulles $x_{ij} = 0$

On obtiendra ainsi un plan basique de transport.

Exemple 1.3

On a le tableau suivant:

	D_1	D_2	D_3	D	a_i
S_1	1	4	2	3	20
S_2	5	1	3	4	21
S_3	2	5	1	2	35
b_j	12	23	28	13	76

Tableau 1.4: tableau de transport.

En appliquant la méthode du coin nord-ouest, on trouve:

$$x_{11} = \min\{20, 12\} = 12 ; x_{12} = \min\{20 - 12, 23\} = 8.$$

$$x_{22} = \min\{21, 23 - 8\} = 15 ; x_{23} = \min\{21 - 15, 28\} = 6.$$

$$x_{33} = \min\{35, 28 - 6\} = 22 ; x_{34} = \min\{35 - 22, 13\} = 13.$$

Les composantes basiques du plan x sont représentées en gras dans le tableau de transport ci-dessous et $x_{ij} = 0$ pour les cases restantes:

	D_1	D_2	D_3	D	a_i
S_1	1 (12)	4 (8)	2	3	20
S_2	5	1 (15)	3 (6)	4	21
S_3	2	5	1 (22)	2 (13)	35
b_j	12	23	28	13	76

V.6.3. Méthode des potentiels

V.6.3.1. Critère d'optimalité [1]

Le principe de la méthode des potentiels est issu de la théorie de la dualité pour cela introduisons le problème dual du problème:

$$\begin{cases} w(y) = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \rightarrow \max \\ u_i + v_j \leq c_{ij}, i = 1..m, j = 1..n, \\ \text{où } y = (u, v), u = (u_i, i = 1 \dots m), v = (v_j, j = 1..n) \end{cases} \quad (\text{DT})$$

Théorème 1 [1]

Soit x^0 et $y^0(u_i^0, v_j^0)$ deux solutions optimales respectivement du problème (PT)

Et son dual (DT), alors les relations suivantes:

$$\begin{cases} u_i^0 + v_j^0 = c_{ij}, \text{ si } x_{ij}^0 \geq 0, \\ u_i^0 + v_j^0 \leq c_{ij}, \text{ si } x_{ij}^0 = 0, \\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n. \end{cases} \quad (1) \quad \text{Sont vérifiées.}$$

En s'inspirant de la métrique du simplexe, on construit les valeurs suivantes:

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Ici par construction, on a:

$$u_i + v_j - c_{ij} = 0, (i, j) \in U_B \quad (2)$$

Les U_B sont appelés cases de base et les U_H cases hors base.

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}, (i, j) \in U_H. \quad (3)$$

Les $u_i (1 \leq i \leq m)$ et $v_j (1 \leq j \leq n)$ sont appelés potentiels et les nombres Δ_{ij} sont appelés estimations des variables x_{ij} .

En utilisant le théorème 1, on déduit le critère suivant.

Théorème 2: (critère d'optimalité) [1]

Les inégalités:

$$\Delta_{ij} \leq 0, (i, j) \in U_H, \quad (3)$$

Sont suffisantes pour l'optimalité du plan basique de transport x .

Elles sont aussi nécessaires dans le cas où x est non dégénérée.

V.6.3.2. Méthode des potentiel [1]

Soit x un plan basique de transport de départ, auquel correspond U_B

Si le critère d'optimalité (2) n'est pas vérifié, alors on cherche une case

$$(i, j) \in U_H: \Delta_{i_0 j_0} = \max \Delta_{ij}, (i, j) \in U_H.$$

A l'aide de la case (i_0, j_0) et des cases de U_B , on construit un cycle qui est d'ailleurs unique. Puis on affecte des signe successivement (+) et (-) aux sommets de ce cycle, en commençant par des sommets (i_0, j_0) affecté du signe (+) et en se mouvant dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens contraire.

Parmi les sommets du cycle affectés du signe (-), on choisit celui ou la variable x_{ij} est minimale et on pose:

$$\theta^0 = \min x_{ij} = x_{i_1 j_1}.$$

Pour les sommets affectés du signe (+), on ajoute aux variables x_{ij} la quantité θ^0 et on soustrait la même quantité des variables x_{ij} , correspondantes aux sommets affectés de signe (-). Toutes les autres variables x_{ij} resteront inchangées.

On obtient ainsi un nouveau plan basique de transport \bar{x} , avec un nouvel ensemble basique

$$\bar{U}_B = \{U_B / (i_1, j_1)\} \cup (i, j).$$

Cette itération sera répétée jusqu'à ce que le critère d'optimalité soit vérifié.

Exemple 1.4

Prenons le plan basique trouvé dans l'exemple 3. Dressons le tableau de transport avec les variables basiques x trouvé dans l'exemple 3 en utilisant la méthode du coin nord-ouest:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
S_1	1 (12)	4 (8)	2	3	20
S_2	5	1 (15)	3 (6)	4	21
S_3	2	5	1 (22)	2 (13)	35
b_j	12	23	28	13	76

En posant $u_1 = 0$, on calcule les autres potentiels par la formule (2). On placera les u_i sur une colonne à droite des a_i et les v_i sur une ligne au-dessous des b_j . En suite en utilisant la formule (4), on trouve les estimations Δ_{ij} qu'on va placer en bas et à droite des cases non basiques.

Le nouveau tableau obtenu alors possède la forme suivante:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i	u_i
S_1	1 (12)	4 (8)	2 4	3 4	20	0
S_2	5 -7	1 (15)	3 (6)	4 0	21	-3
S_3	2 -6	5 -6	1 (22)	2 (13)	35	-5
b_j	12	23	28	13	76	
v_j	1	4	6	7		

Le plan basique initial n'est pas optimal, car $\Delta_{i_0 j_0} = \max \Delta_{ij} = \Delta_{13} = 4 > 0$.

A l'aide de la case (1,3), on construit le cycle (1,3) → (2,3) → (1,2) → (1,3), on aura alors:

$$\theta^0 = x_{ij} = \min\{8,6\} = 6.$$

Pour le nouveau plan basique \bar{x} , on obtient:

$$\bar{x}_{13} = x_{13} + \theta^0 = 6; \bar{x}_{22} = x_{22} + \theta^0 = 21; \bar{x}_{12} = x_{12} + \theta^0 = 2; \bar{x}_{23} = x_{23} + \theta^0 = 0$$

Les autres variables \bar{x}_{ij} resteront inchangées.

On commencera donc une nouvelle itération avec le tableau suivant:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i	u_i
S_1	1 (12)	4 (2)	2 (6)	3 0	20	0
S_2	5 -7	1 (21)	3 -4	4 -4	21	-3
S_3	2 -2	5 -2	1 (22)	2 (13)	35	-1
b_j	12	23	28	13	76	
v_j	1	4	6	7		

Le critère d'optimalité est vérifié dans ce tableau, donc

$$x^0 = \{x_{ij}^0, 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 4\} \text{ avec:}$$

$$x_{11}^0 = 12, x_{12}^0 = 2, x_{13}^0 = 6, x_{14}^0 = 0, x_{21}^0 = 0, x_{22}^0 = 21, x_{23}^0 = 0, x_{24}^0 = 0, x_{31}^0 = 0$$

$$x_{32}^0 = 0, x_{33}^0 = 22, x_{34}^0 = 13, \text{ est optimale et } Z^0 = \min(Z(x) = Z(x^0)) = 101.$$

Chapitre 2

Programmation quadratique

Introduction

La programmation quadratique est connue pour ses applications multiples dans plusieurs domaines. Son importance provient du fait que plusieurs problèmes réels sont quadratiques c'est le cas de nombreux problèmes en particuliers ceux de la physique et de l'économie....Souvent, qui intervient comme procédures intermédiaires pour des programmes non linéaires.

Dans ce chapitre, nous introduisons deux approches développées pour la résolution des problèmes de programmation quadratique convexe. Elles sont généralement des extensions de celles développées pour la programmation linéaire (PL):

- La première approche dite de points intérieurs (MPI) est réputée pour avoir une bonne complexité polynômiale et qui est efficace pour la résolution des PQs de grande taille.
- La deuxième approche dite d'activation des contraintes qui est une généralisation de la méthode du simplexe pour la (PL).

Le problème quadratique en général peut s'écrire comme suit:

$$\begin{cases} \text{Min } F = \left(\frac{1}{2}x^t Qx + c^t x\right) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{PQ})$$

Où Q est une matrice symétrique d'ordre n

$$(Q \in \mathbb{R}^{n \times n}), b \in \mathbb{R}^m, c, x \in \mathbb{R}^n \text{ et } A \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ de plein rang } (rgA = m \leq n).$$

Remarque

- 1) L'ensemble des contraintes $D = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, x \geq 0\}$ est un polyèdre convexe et fermé, la fonction objectif est infiniment différentiable.
- 2) (PQ) est convexe si et seulement si F est convexe auquel cas la matrice Q est semi-définie positive, car les contraintes sont linéaires (affines), donc elles sont convexes.

I. Méthodes de résolution en programmation quadratique convexe

I.1. La méthode de points intérieurs:

En 1984, Karmarkar [11] a montré qu'une méthode de points intérieurs (MPI) peut résoudre des programmes linéaires (PLs) en un temps polynomial. Les deux décennies

suivantes ont vu d'énormes efforts fournis par les spécialistes de l'optimisation pour étudier les propriétés théoriques et pratiques des différentes MPIs. Une des premières découvertes est que ces méthodes peuvent être vues comme une modification de la méthode de Newton [6], qui est capable de traiter des contraintes d'inégalités. Nesterov et Nemirovski [12] ont montré que cette approche est applicable à une large classe de problèmes que celles des programmes linéaires. Par exemple, les problèmes de programmation quadratique peuvent être résolus polynomialement comme d'autres programmes convexes en utilisant des MPIs. Les MPIs ont des caractéristiques communes qui se distinguent de celle de la méthode du simplexe [3]. Chaque itération est coûteuse à calculer, mais peut faire un Progress significatif vers la solution. Par contre, le simplexe demande généralement un plus grand nombre d'itérations non coûteuses. La méthode du simplexe chemine autour de la bordure du polytope réalisable, testant une séquence de sommets (points extrêmes) jusqu'à ce qu'il trouve un point optimal. Les MPIs approximent la solution soit de l'intérieur ou de l'extérieur du domaine réalisable et ne s'approchent de la frontière qu'en limite. Les MPIs se présentent sous forme de trois classes: primale, duale et primale-duale.

Dans ce mémoire, on va présenter la méthode primale-duale.

I.1.1. Position du problème

On considère, pour simplifier, le problème avec contraintes d'inégalités seulement, celles pour lesquelles les algorithmes de points intérieurs ont été conçus. On l'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} \min F(x) = \frac{1}{2}x'Dx + c'x, \\ A_i'x \leq b, i \in I, \end{cases} \quad (2.1)$$

Où x, c et A_i sont des n -vecteurs; b est un m -vecteur; D est une matrice symétrique d'ordre n et $(A = A_i \in I)$ est une $m \times n$ -matrice.

I.1.2 Problème dual

Considérons le PQ primal (2.1), où la matrice D est supposée semi-définie positive. La fonction de Lagrange associée au problème est la suivante:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = F(x) + \lambda'(Ax - b)$$

Où $\lambda = (\lambda_i, i \in I)$ est le vecteur de multiplicateurs de Lagrange associé aux contraintes du problème.

On peut écrire le problème dual comme suit:

$$\begin{cases} \max \mathcal{L}(x, \lambda) = \frac{1}{2}x'Dx + c'x + \lambda'(Ax - b) \\ Dx + c + A'\lambda = 0 \\ \lambda_i \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

En prenant la transposition, puis en multipliant la relation (*) par x à droite, on aura:

$$-x'Dx - c'x = \lambda'Ax$$

En utilisant cette expression dans la fonction objectif duale, le problème précédent devient alors:

$$\begin{cases} \max \mathcal{L}(x, \lambda) = -\frac{1}{2}x'Dx - b'\lambda \\ Dx + c + A'\lambda = 0, \\ \lambda_i \geq 0, \quad i \in I. \end{cases} \quad (2.2)$$

Si D est semi-définie positive, alors la fonction objectif F du problème primal est convexe sur \mathbb{R}^n et par conséquent, la fonction objectif \mathcal{L} du problème dual est concave sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Dans ce cas les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) suivantes sont à la fois nécessaires et suffisantes pour l'optimalité du couple (x, λ) :

$$\begin{cases} Dx + c + A'\lambda = 0, \\ Ax - b \leq 0, \\ \lambda_i(Ax - b)_i = 0, \\ \lambda \geq 0. \end{cases} \quad \forall i \in I, \quad (2.3)$$

Tout point $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant la deuxième inégalité de problème (2.1) est dite solution réalisable primale. De même, tout couple (x, λ) vérifiant la première et la quatrième relation de (2.3) est dite solution réalisable primale-duale.

I.1.3. Technique de la méthode

En introduisant le vecteur des variables d'écart $s = b - Ax$, on peut réécrire les conditions d'optimalité (2.3) du couple $(x, \lambda) = (x^*, \lambda^*)$ comme suit:

$$\begin{cases} Dx + A'\lambda + c = 0, \\ Ax + s - b = 0, \\ s_i \lambda_i = 0, \quad \forall i \in I, \\ (\lambda, s)' \geq 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

En écrivant sous forme matricielle les conditions de KKT, nous savons en effet que l'optimum global vérifie:

$$F(x, \lambda, s) = \begin{bmatrix} Dx + A'\lambda + c \\ Ax + s - b \\ S\lambda e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (s, \lambda) \geq 0, \quad (2.5)$$

Où $S = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_m)$ et $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ sont des matrices carrées diagonales d'ordre m , ainsi que $e = (1, 1, \dots, 1)'$ est un m -vecteur dont chaque composante est égale à 1.

Le principe de la méthode de points intérieurs primale-duale est d'essayer de résoudre directement ce système d'équations. Ce système est carré et possède $2m + n$ variables et $2m + n$ équations. Les deux premières séries d'équations sont linéaires, tandis que la dernière est non linéaire.

On peut observer que si nous n'avions à faire qu'à des équations linéaires et que la contrainte $(s, \lambda) \geq 0$ n'existait pas, la résolution se ferait alors très simplement par la méthode d'élimination de Gauss. La tâche est donc rendue compliquée par l'existence des contraintes de positivité et des équations non linéaires.

En regardant le système d'un point de vue fonctionnel, on s'aperçoit qu'il est équivalent à résoudre l'équation $F(x, \lambda, s) = 0$, où F est une fonction de \mathbb{R}^{2n+m} dans \mathbb{R}^{2n+m} .

La résolution d'équation de ce type est un domaine bien connu des méthodes numériques.

En effet, sans l'existence des contraintes de positivité, cette équation se résout très bien par la méthode de Newton.

Les méthodes de points intérieurs de type primal-dual génèrent des itérés (x^k, λ^k, s^k) qui vérifient les bornes strictes, c'est-à-dire que $\lambda^k > 0$ et $s^k > 0$. Cette propriété est à l'origine du terme point intérieur.

Admettons qu'on a une estimation initiale (x^k, λ^k, s^k) , la méthode de Newton forme une approximation linéaire du système non linéaire et itère selon:

$$(x^{k+1}, \lambda^{k+1}, s^{k+1}) = (x^k, \lambda^k, s^k) + (\Delta x^k, \Delta \lambda^k, \Delta s^k)$$

Où $(\Delta x^k, \Delta \lambda^k, \Delta s^k)$ est la solution du système suivant:

$$J(x^k, \lambda^k, s^k) \begin{bmatrix} \Delta x^k \\ \Delta \lambda^k \\ \Delta s^k \end{bmatrix} = -F(x^k, \lambda^k, s^k). \quad (2.6)$$

$J(x^k, \lambda^k, s^k)$ est la matrice Jacobéenne de la fonction F et $(\Delta x^k, \Delta \lambda^k, \Delta s^k)$ la direction de recherche.

On a

$$J(x^k, \lambda^k, s^k) = \begin{bmatrix} D & A' & 0 \\ A & 0 & I \\ 0 & \Lambda^k & S^k \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

De plus, on a

$$F(x^k, \lambda^k, s^k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S^k \Lambda^k e \end{bmatrix}.$$

Donc, l'équation de Newton s'écrit:

$$\begin{bmatrix} D & A' & 0 \\ A & 0 & I \\ 0 & \Lambda^k & S^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^k \\ \Delta \lambda^k \\ \Delta s^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Lambda^k S^k e \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Un pas complet le long de cette direction n'est pas toujours permis, parce que la méthode de Newton n'est pas une méthode qui tient compte de contraintes; rien ne garantit que ce pas de Newton ne nous emmène pas en dehors de la zone admissible (à savoir la zone où $s \geq 0$ et $\lambda \geq 0$). C'est d'ailleurs à cause de cela qu'il a fallu faire une recherche linéaire le long de cette direction pour déterminer le paramètre α^k indiquant la longueur du pas. Une fois la longueur du pas est déterminée, on calcule alors le nouveau itéré comme suit:

$$(x^{k+1}, \lambda^{k+1}, s^{k+1}) = (x^k, \lambda^k, s^k) + \alpha^k (\Delta x^k, \Delta \lambda^k, \Delta s^k).$$

Mais, malheureusement les modifications apportées à la méthode de Newton en introduisant le paramètre α^k sont insuffisantes en pratique. Cela est dû au fait que les pas suivants ($\alpha^{k+1}, \alpha^{k+2}, \dots$) sont très petits, car les itérés correspondants tendent vers le bord de la zone admissible, ce qui ralentit extrêmement la convergence de la méthode. La direction obtenue dans (2.6) est dite direction de Newton pure, et pour pallier à ce problème, on considère une modification de cette dernière dite direction de Newton centrée. Nous introduisons tout d'abord le concept du chemin central.

I.1.4. La technique de chemin central [11]

Un chemin central \mathbb{C} est un arc de points réalisables stricts qui joue un rôle vital dans les algorithmes de type primal-dual, il est paramétré par un scalaire $\tau > 0$, et à chaque point $(x_\tau, \lambda_\tau, s_\tau) \in \mathbb{C}$ on résout le système suivant:

$$F(x_\tau, \lambda_\tau, s_\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau e \end{bmatrix}, \quad (\lambda_\tau, s_\tau) > 0 \quad (2.9)$$

Cette équation n'est autre que l'équation de Newton pour laquelle la condition de complémentarité est remplacée par $\lambda_i s_i = \tau (i = 1, \dots, m)$. Elle approxime le système (2.5) de plus en plus lorsque τ tend vers zéro. Si \mathbb{C} converge lorsque τ tend vers zéro, il doit converger vers la solution primale-duale du système (2.9). Donc le chemin central nous guide vers la solution optimale le long d'une route en gardant les produits $\lambda_i s_i$ strictement positifs et il tend vers zéro avec un même taux.

Choisissons un paramètre de centrage $\sigma \in [0,1]$ et introduisant la mesure de la dualité μ définie par:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i = \frac{\lambda' s}{n}.$$

Qui mesure la moyenne des produits $\lambda_i s_i$. En posant $\tau = \sigma \mu$ et en appliquant la méthode de Newton au système (2.8), on obtient:

$$\begin{bmatrix} D & A' & 0 \\ A & 0 & I \\ 0 & A & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\lambda S + \sigma \mu) e \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Le déplacement $(\Delta x, \Delta \lambda, \Delta s)$ est une direction de Newton vers le point $(x_\tau, \lambda_\tau, s_\tau) \in \mathbb{C}$ pour lesquels les produits sont égale à $\tau = \sigma \mu$. Par contre, le déplacement (2.8) pointe directement du point pour lesquelles les conditions de KKT (2.4) sont satisfaites. Si $\sigma = 1$, les équations (2.8) définissent une direction centrée et si $\sigma = 0$, (2.8) définissent une direction standard de Newton.

Pour la majorité des problèmes, un point de départ strictement réalisable (x^0, λ^0, s^0) est difficile à calculer. Les méthodes de points intérieurs irréalisables remédient à ça en imposant uniquement que les composantes λ^0 et s^0 soient strictement positives.

Par conséquent, on change légèrement le système (2.8) en définissant les résidus des deux équations de la manière suivante:

$$r_d = Dx + A' \lambda + c; \quad r_p = Ax - b + s.$$

Alors comme (2.8) pour le calcul de la direction d'amélioration, on résout le système modifié suivant:

$$\begin{bmatrix} D & A' & 0 \\ A & 0 & I \\ 0 & A & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_d \\ r_p \\ (\lambda S + \sigma \mu) e \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

La prochaine itération est obtenue en posant:

$$(x^{k+1}, \lambda^{k+1}, s^{k+1}) = (x^k, \lambda^k, s^k) + \alpha^k (\Delta x^k, \Delta \lambda^k, \Delta s^k). \quad (2.12)$$

Où λ est choisi de manière à retenir les composantes de λ_i et s_i strictement positives:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \alpha^k \Delta \lambda^k > 0, i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.13)$$

$$s^{k+1} = s^k + \alpha^k \Delta s^k > 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.14)$$

Il n'est pas difficile de voir que la valeur maximale α_{max} qui maintient ces conditions est donnée par la formule suivante:

$$\alpha_{max} = \min \left\{ \min_{i: \Delta \lambda_i < 0} -\frac{\lambda_i}{\Delta \lambda_i}, \min_{i: \Delta s_i < 0} -\frac{s_i}{\Delta s_i} \right\} \quad (2.15)$$

Nous pouvons nous éloigner de cette valeur maximale et empêcher ainsi chaque composante λ_i et si s_i d'être aussi proche de zéro en définissant le pas α , comme suit:

$$\alpha = \min\{1, \eta \alpha_{max}\}, \quad (2.16)$$

Où η est un coefficient proche de 1 et généralement on le prend égal à 0.999.

I.1.5. Schéma de l'algorithme [11]

Dans cette partie, on présente l'algorithme de la méthode de point intérieur primal dual pour la programmation quadratique convexe:

Données: Soit (x^0, λ^0, s^0) avec $(s^0, \lambda^0) > 0$ une solution réalisable initiale et

$$\mu^0 = \frac{\lambda^0 s^0}{n};$$

Choisir $\sigma \in [0, 1]$;

Pour $k = 1, 2, \dots$ (l'indice d'itération);

Tant que $(\lambda, s)' \geq 0$ faire

- ✓ Résoudre le système (2.8) avec (x^k, λ^k, s^k) et $\tau = \sigma \mu$ pour obtenir $(\Delta x^k, \Delta \lambda^k, \Delta s^k)$;
- ✓ Calculer le pas α^k tel que $s^k + \alpha^k \Delta s^k > 0$ et $\lambda^k + \alpha^k \Delta \lambda^k > 0$;
- ✓ Mise à jour le point $(x^{k+1}, \lambda^{k+1}, s^{k+1}) = (x^k, \lambda^k, s^k) + \alpha^k (\Delta x, \Delta \lambda, \Delta s)$.

k=k+1;

I.2. La méthode d'activation des contraintes [15]

La méthode d'activation des contraintes (active set method ASM) est une méthode classique, développée au début des années soixante-dix pour la résolution des problèmes de programmation linéaire et quadratique. Elle s'applique pour des problèmes d'optimisation avec des contraintes linéaires de types inégalités ou mixtes (égalités et inégalités).

Le principe général de la méthode consiste à écarter temporairement un certain nombre de contraintes d'inégalités et de résoudre à chaque itération un problème avec uniquement des contraintes d'égalités, correspondantes aux contraintes actives. Par la suite l'ensemble des indices actifs est ajusté en ajoutant ou /et en supprimant une contrainte à la fois jusqu'à l'obtention de la solution optimale.

La méthode ASM pour le cas linéaire est facile à appliquer par rapport au cas quadratique puisque cela dépend du nombre de contraintes actives à l'optimum. D'après la théorie de la programmation linéaire, on sait à l'avance que la solution optimale correspond à un sommet du polyèdre du domaine admissible, contrairement à un problème quadratique où la solution peut être un sommet, une face ou un point de l'intérieur du polyèdre.

Les méthodes d'activation des contraintes sont itératives et essaient d'identifier les contraintes actives à l'optimum. Elles se présentent sous forme de trois classes: primale, duale et primale-duale.

Dans ce mémoire, on va présenter la méthode primale. Nous considérons le programme quadratique avec des contraintes d'égalités et d'inégalités linéaires suivant:

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2}x'Dx + c'x \\ h_i(x) = A'_i x - b_i = 0 & i \in \varepsilon \\ h_i(x) \leq 0 & i \in \mathfrak{I} \end{cases} \quad (2.17)$$

I.2.1. Critère d'optimalité

En associant aux contraintes du problème (2.17) le m -vecteur multiplicateur λ tels que $\lambda = (\lambda_i, i \in I)$, la fonction de Lagrange s'écrit:

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2}x'Dx + c'x + \lambda. \quad (2.18)$$

En plus, on définit l'ensemble actif $I_0(x^*)$ à la solution optimale x^* comme étant les indices des contraintes pour lesquelles l'égalité est vérifiée:

$$I_0(x^*) = \{i \in I; A'_i x^* = b_i\}.$$

La condition nécessaire d'optimalité du point x^* pour le problème (2.17) est qu'il existe un m -vecteur λ^* , tels que:

$$\begin{aligned} Dx^* + c + \lambda^*(A'_i x^* - b_i) &= 0, \\ A'_i x^* &= b_i, \text{ pour tout } i \in I_0(x^*), \\ A'_i x^* &\leq b_i, \text{ pour tout } i \in I \setminus I_0(x^*), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_i^* \in \mathbb{R}, \quad i \in \varepsilon, \lambda_i^* \geq 0, \quad \text{pour tout } i \in \mathfrak{I}, \\ \lambda_i^*(A'_i x^* - b_i) &= 0 \quad \text{pour } i \in \mathfrak{I} \end{aligned}$$

Sachant que:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x^*} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda^*} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Dx^* + c + A'\lambda^* = 0; \\ Ax^* = b. \end{cases}$$

En écrivant ce système de $(n + m)$ équations à $(n + m)$ variables sous forme compacte, on obtient:

$$\begin{pmatrix} D & A' \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

L'expression (2.19) peut être réécrite sous une autre forme, utile pour le calcul de x^* en posant $x^* = x + p$, où x est une estimation de la solution et p est le déplacement désiré.

Par introduction de cette notation et en réarrangeant les équations, on aura:

$$\begin{pmatrix} D & A' \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ \lambda^* \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} g \\ r \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

$$\text{Où } g = Dx + c, \quad r = Ax - b, \quad p = x^* - x.$$

La matrice de (2.20) est appelée matrice de Karush-Kuhn-Tucker (*KKT*), et les résultats suivants donnent sous quelles conditions elle est non singulière.

Notons par Z une matrice d'ordre $n \times (n - m)$, où ses colonnes forment une base du noyau de A et qui vérifient donc $AZ = 0$ et Z est donnée de la manière suivante:

$$\begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

où $A_B = A(I, I_B)$, $A_N = A(I, I_N)$, le sous-ensemble $J_B \subset J = \{1, \dots, n\}$, tel que $|J_B| = m$, est l'ensemble d'indices de la matrice de base A_B , vérifiant $\det(A_B) \neq 0$ et $J_N = J \setminus J_B$ et les vecteurs P et λ^* auront les expressions simples suivantes:

$$p = Zp_N, \text{ avec } p_N = p(J_N) = -(Z'DZ)^{-1}Z'g,$$

1.2.2. Itération de la méthode

$$\lambda^* = - \begin{pmatrix} A_B^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} g_B \\ g_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D(J_B, J) \\ D(J_N, J) \end{pmatrix} p \right] = -[A_B^{-1}]'(g_B + D(J_B, J)p).$$

Lemme1 [6]

Soit A une matrice de rang complet en lignes, et supposons que la matrice hessienne réduite $Z'DZ$ est définie positive. Alors, la matrice de KKT :

$$K = \begin{pmatrix} D & A' \\ A & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Est non singulière, et il existe une paire de vecteurs (x^*, λ^*) satisfaisant le système (2.19).

Théorème1 [6]

Supposons que les conditions du lemme précédent sont vérifiées.

Alors, le vecteur x^* satisfaisant (2.19) est l'unique solution globale pour le problème (2.17)

À une itération donnée de l'algorithme, soit x la solution courante de I_0 l'ensemble d'indices actifs correspondant. Une itération de l'algorithme consiste à exécuter les opérations suivantes:

1. On résout le sous-problème quadratique correspondant à l'ensemble de travail suivant:

$$\begin{cases} \min F(x) = \frac{1}{2}x'Dx + c'x, \\ A'_i x = b_i \quad i \in I_0 \end{cases} \quad (2.23)$$

La solution optimale pour (2.23) est de la forme $x + p$, où p est une certaine correction (direction de descente) de la solution courante x . Alors le n -vecteur p est calculé de telle sorte que la fonction objectif diminue. On obtient:

$$\begin{cases} \min F(x + p) = \frac{1}{2}(x + p)'D(x + p) + c'(x + p), \\ A'_i(x + p) = b_i \quad i \in I_0, \end{cases}$$

En simplifiant ce problème, alors le programme quadratique à résoudre est le suivant:

$$\begin{cases} \min F(x) = \frac{1}{2}p'Dp + g'p, \\ A'_i p = 0 \quad i \in I_0, \end{cases} \quad (2.24)$$

Où $g = Dx + c$ est le gradient de F au point x .

On envisage deux cas possibles:

Si $p = 0$, aller à l'étape (2)

Sinon ($p \neq 0$), posons:

$$\bar{x} = x + \theta p \quad \text{avec} \quad 0 < \theta \leq 1. \quad (2.25)$$

Où θ est la longueur du pas, doit être choisi de telle sorte que la nouvelle solution soit réalisable. Pour $i \in I_0$ n'importe quelle valeur de θ va maintenir la faisabilité de \bar{x} . Par contre, toute contrainte non saturée doit vérifier:

$$A'_i(x + \theta p) \leq b_i, \quad \forall i \in I \setminus I_0.$$

Alors, la valeur optimale θ^0 est la suivante:

$$\theta^0 = \min \{1, \theta_{i_0}\} \quad (2.26)$$

$$\text{Où } \theta_{i_0} = \min \{\theta_i, \forall i \in I \setminus I_0\}, \text{ avec } \theta_i = \begin{cases} \frac{b_i - A'_i x}{A'_i p}, & \text{si } A'_i > 0, \\ \infty, & \text{si } A'_i \leq 0, i \in I \setminus I_0. \end{cases}$$

Si $\theta^0 = 1$, alors dans ce cas l'ensemble de travail ne change pas, et on aura:

$$\bar{x} = x + p, \quad \bar{I} = I_0.$$

Sinon, la contrainte i_0 est ajoutée à l'ensemble de travail. Par conséquent, le nouveau ensemble de travail est donc:

$$\bar{I}_0 = I_0 \cup \{i_0\}.$$

2. Cette étape consiste à vérifier si la nouvelle solution obtenue \bar{x} est optimale ou non dans le problème (2.17). Ceci se fait en calculant les multiplicateurs de Lagrange associés au problème

(2.23). Rappelons que pour $i \in I_0$, $\lambda_i = 0$. Les autres composantes du vecteur λ sont calculées lors de la résolution du problème (2.23).

- a) Si $\lambda_i \geq 0, \forall i \in I_0$ alors la condition d'optimalité de *KKT* est remplie pour le problème (2.17). Donc, la solution optimale est trouvée, et on arrête l'algorithme.
- b) Sinon, il existe une composante de vecteur λ vérifiant $\lambda_{i_1} < 0$, avec $i_1 \in I_0$.

Alors on peut améliorer la valeur de la fonction objectif en supprimant la contrainte i_1 de l'ensemble de travail. Si plusieurs contraintes ne vérifient pas le critère d'optimalité, alors la contrainte à supprimer doit vérifier la relation suivante:

$$\lambda_{i_1} = \min \{ \lambda_i, \lambda_i < 0, i \in \mathfrak{I} \cap I_0 \}; \quad (2.27)$$

Donc, le nouvel ensemble de travail est $\bar{I}_0 = I_0 \setminus \{i_1\}$. Ce processus de résolution est répété jusqu'à ce que l'optimum soit trouvé.

I.2.3. Schéma de l'algorithme

Soit x une solution réalisable du problème (2.17) et I_0 l'ensemble du travail correspondant.

Le schéma de l'algorithme présente les étapes suivantes:

- a) Calculer p en résolvant le programme quadratique (2.24):
 - Si $p = 0$, alors aller à (c):
 - Sinon, on pose

$$\bar{x} = x + \theta^0 p,$$

- b) Où θ^0 est défini par la relation (2.26). Aller à (b) Changement de l'ensemble actif:
 - Si $\theta^0 = \theta_{i_0} < 1$, alors

$$\bar{I}_0 = I_0 \cup \{i_0\}$$

- Sinon ($\theta^0 = 1$), on pose

$$\bar{I}_0 = I_0$$

Aller à (c).

- c) Calculer les multiplicateurs de Lagrange de (2.23).
 - Si $\lambda_i \geq 0, \forall i \in I_0$, alors l'algorithme est arrêté, avec \bar{x} solution optimale.
 - Sinon, déterminer

$$\lambda_{i_1} = \min\{\lambda_i : \lambda_i < 0, i \in \mathfrak{I} \cap I_0\}$$

Posons $\bar{I}_0 = I_0 \setminus \{i_1\}$. Aller à (a).

I.3. Exemple numérique

Considérons le programme quadratique suivant:

$$\begin{cases} \min F(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 12x_1 - 10x_2, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ -x_1 \leq 0, \\ -x_2 \leq 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

Les données de ce problème sont les suivantes:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -12 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La méthode qu'on utilise dans cet exemple pour la résolution du problème (2.24) est la méthode d'élimination simple des variables.

Itération 1

Soit $x^1 = (0,0)$ la solution réalisable de départ pour ce problème. L'ensemble d'indices actifs en ce point est $I_0^1 = \{2,3\}$. Alors pour le problème (2.23), on a:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $p^1 = (0,0)$ est optimal pour (2.24), puisque en fait aucun autre point n'est réalisable pour cet ensemble actif. Le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associé est:

$$\lambda^1 = -A^{-1}g(x^1) = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Aucun indice actif n'est optimal et par conséquent la deuxième contrainte sera supprimée de l'ensemble de travail. Donc, on aura:

$$x^2 = x^1, \quad I_0^2 + I_0^1 \setminus \{2\} = \{3\}.$$

Itération 2

Résolution du problème (2.23) avec les paramètres suivants:

$$A = (0 \quad -1), \quad b = 0, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z'DZ = 4.$$

Le déplacement optimal est le suivant:

$$p^2 = -Z(Z'DZ)^{-1}Z'g = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le nouveau point obtenu est:

$$x^3 = x^2 + p^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Qui est réalisable. Le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte saturée est alors:

$$\lambda_3 = -[A_B^{-1}]'(g_B + D(J_B, J)P) = -(-1) \left[-10 + (1 \quad 2) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = -7 < 0.$$

Par conséquent, la troisième contrainte est supprimée de l'ensemble des indices actifs; donc, on aura:

$$I_0^3 = I_0^2 \setminus \{3\} = \emptyset$$

Itération

A cette itération aucune contrainte n'est active au point x^3 . Par conséquent, la solution du problème (2.28) sans contrainte nous donne:

$$x^* = -D^{-1}c = -\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

Qui n'est pas réalisable. Le déplacement du point x^3 à x^* est le vecteur:

$$p^3 = x^* - x^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Calcul de θ^0 :

$$A'_1 p^4 = (1 \quad 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 > 0 \Rightarrow \theta_1 = \frac{b_1 - A'_1 x^3}{A'_1 p^4} = \frac{4 - (0 \quad 0) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3};$$

$$A'_2 p^4 = (-1 \quad 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 > 0 \Rightarrow \theta_2 = \frac{b_2 - A'_2 x^3}{A'_2 p^4} = \frac{0 - (-1 \quad 0) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}{1} = 3;$$

$$A'_3 p^4 = (0 \quad -1) \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = -4 \leq 0 \Rightarrow \theta_3 = \infty.$$

$$\theta_{i_0} = \min \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\} = \theta_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow i_0 = 1 \text{ alors } \theta^0 = \min \{1, \theta_{i_0}\} = \theta_{i_0} = \frac{1}{3}.$$

La nouvelle solution obtenue, ainsi que l'ensemble de travail correspondant sont les suivants:

$$x^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}; \quad I_0^4 = I_0^3 \cup \{1\} = \{1\}.$$

Itération 4

Données correspondant à x^4 et I_0^4 :

$$A = (1 \quad 1), \quad b = 4, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Z'DZ = 4, \quad g = g(x^4) = \begin{pmatrix} 0 \\ -14 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le déplacement optimal est le suivant:

$$p^4 = -Z(Z'DZ)^{-1}Z'g = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \quad -1) \begin{pmatrix} 0 \\ -14 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

Calcul θ^0 :

$$A'_2 p^4 = (-1 \quad 0) \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix} = \frac{7}{6} > 0 \Rightarrow \theta_2 = \frac{b_2 - A'_2 x^4}{A'_2 p^4} = \frac{0 - (-1 \quad 0) \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}}{\frac{7}{6}} = \frac{16}{7}$$

$$A'_3 p^4 = (0 \quad -1) \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} \\ 7 \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix} = -\frac{7}{6} \leq 0 \Rightarrow \theta_3 = \infty$$

$\theta^0 = \min \{1, \theta_2, \theta_3\} = 1$, alors on aura:

$$x^5 = x^4 + p^4 = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 4 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} \\ 7 \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{15}{6} \\ \frac{3}{6} \end{pmatrix}.$$

La valeur du multiplicateur de *KKT* associé à la première contrainte est:

$$\lambda_3 = -[A_B^{-1}]'(g_B + D(J_B, J)P) = - \left[-\frac{14}{3} + (2 \quad 1) \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} \\ 7 \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix} \right] = \frac{7}{2} \geq 0.$$

Donc x^5 est la solution optimale pour le problème (2.28).

Conclusion

La méthode d'activation des contraintes a l'avantage de traiter les problèmes d'optimisation linéaire et quadratique tels qu'ils se présentent, sans chercher à modifier leurs contraintes. Cela permet d'avoir un gain en espace mémoire et en temps d'exécution sur la machine. L'inconvénient de cette méthode est que l'ensemble actif change lentement contrairement à d'autres méthodes qui permettent un changement rapide de l'ensemble actif.

Chapitre 3

Problème d'approvisionnement et de distribution

Introduction

Dans ce chapitre on tentera à proposer une méthodologie pour le traitement d'un problème de transport posé au sein l'entreprise HADJEB AUTO qui est une entreprise d'automobile d'importation et de distribution de pièces de rechanges HYUNDAI & KIA ou l'objectif est d'approvisionner les centres de consommation à partir des centres de production de manière à minimiser le coût total de transport.

I. Présentation du groupe

I.1. Présentation

La projection du groupement HADJEB répond à une vision réaliste avec un double objectif consistant à assurer la pérennité des entités du groupe et privilégier progressivement et graduellement l'activité production pour évaluer une stratégie de croissance et de diversification dans le domaine de l'agro-alimentaire de l'automobile à moyen et long terme qui nécessitera la mobilisation de financements beaucoup plus importants.

I.2. Historique

Le groupement Hadjeb a marqué ses débuts en 1993 sous forme d'une simple épicerie en alimentation générale.

Par le principe d'investissements des bénéfices engrangés, l'affaire a pris de l'ampleur et a connu son développement en s'orientant vers le commerce en gros de produits alimentaires.

Cet essor a fait de groupement Hadjeb le leader dans la wilaya de Tizi Ouzou et un opérateur incontournable au niveau national.

Cette notoriété conjuguée à la maîtrise du marché de l'agro-alimentaire a permis de cerner les différents rouages et mécanismes qui régissent ce secteur dans le but d'assurer un meilleur positionnement sur le marché et être en mesure de faire face à une concurrence très agressive.

C'est donc en pleine rentabilité et montée en cadence des investissements consentis et dans le cadre d'un axe de développement murement réfléchi qu'il a été créé des unités complémentaires ci-après activant dans le domaine de l'agro-alimentaire créant une synergie et une dynamique de développement appréciable.

- Unité d'importation exportation de produits alimentaires.
- Unité de conditionnement et de distribution des produits alimentaires.
- Centrale d'achat Tizi Ouzou.
- Magasin Semmar.

- Entreprise de transport.
- Unité automobile.

I.3. Organigramme des filiales du groupe HADJEB

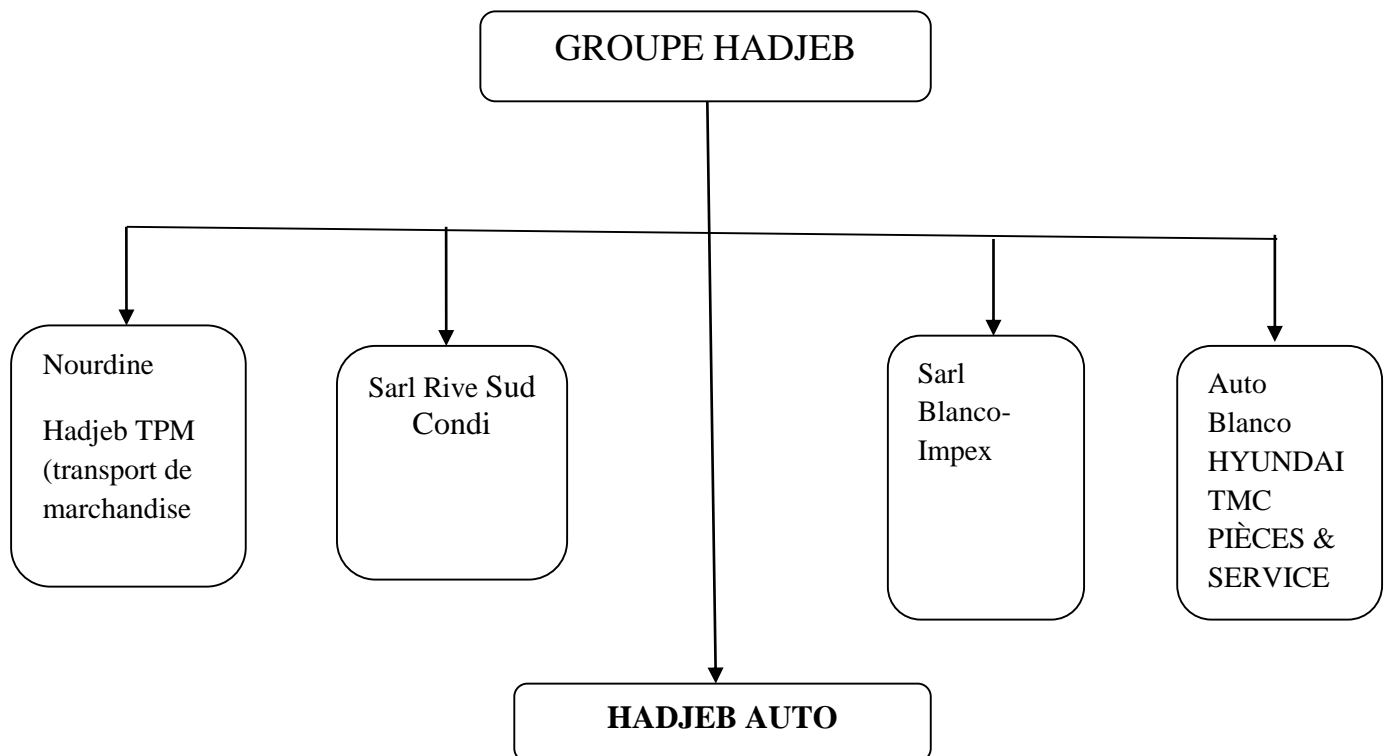


Figure 3.1: Organigramme des filiales du groupe HADJEB.

II. L'entreprise HADJEB AUTO:

II.1. Présentation de l'organisme d'accueil:

HADJEB AUTO est une entreprise de vente d'automobile et d'importation et de distribution de pièces de rechanges KIA

Situation géographique

LOCAL D/31 ZONE A ET B RTE DE MAATKAS ANNER AMELLAL Tizi Ouzou, Tizi Ouzou (15), Algérie

Forme juridique : EURL

II.2. Les activités de l'entreprise

L'entreprise a comme activité principale deux missions d'abord l'importation de la pièce de rechange puis la vente et la distribution de cette dernière sur tous les centres de vente sur l'échelle nationale afin de satisfaire les besoins du marché.

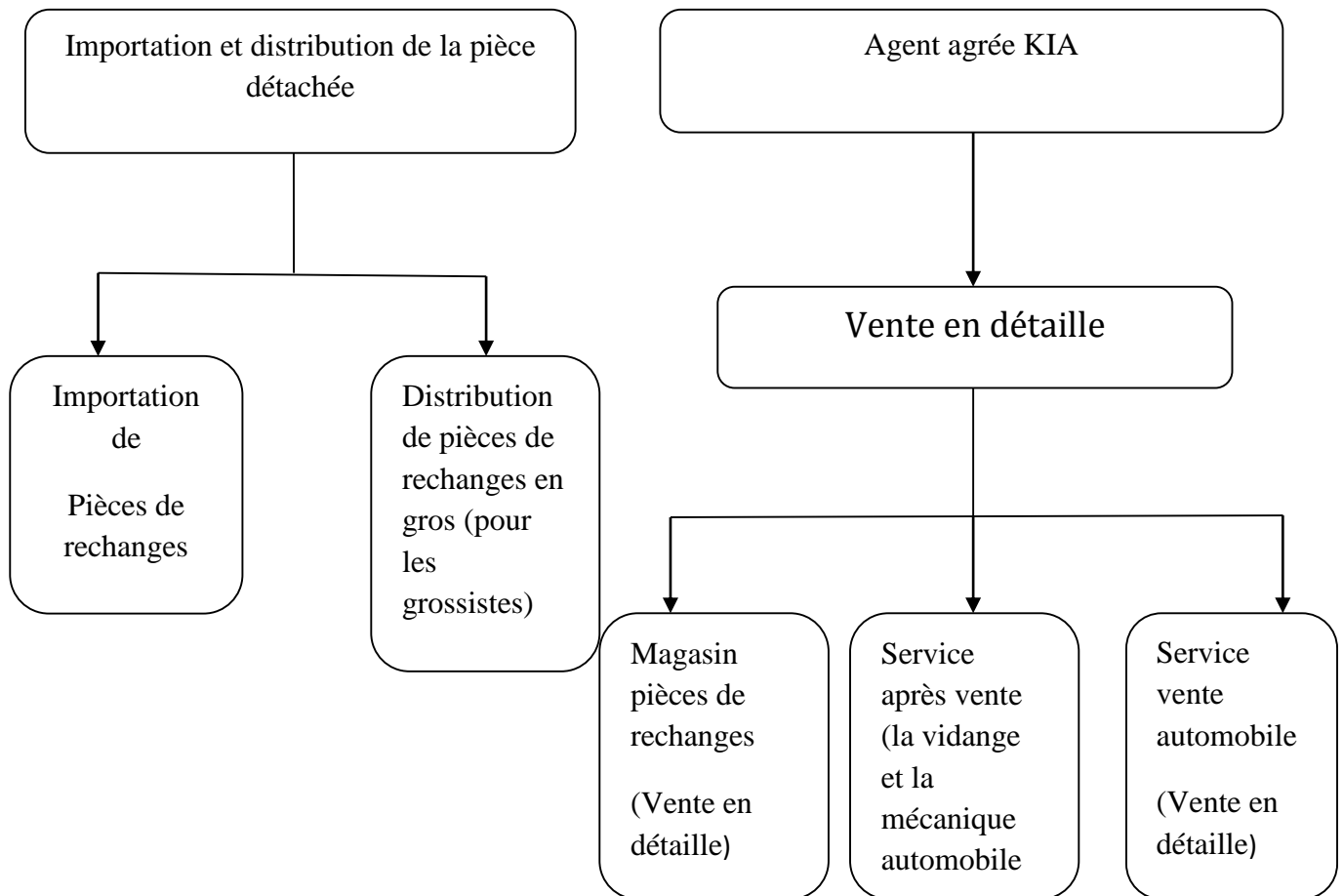


Figure 3.2: Organigramme des services de l'entreprise Hadjeb AUTO.

III. Système de gestion de stock et d'approvisionnement

III.1. Critères de stockage et identification des volumes de pièces

III.1.1. Choix de la méthode d'approvisionnement

Avant de définir la méthode à mettre en place sur la plateforme centrale, différentes possibilités ont été étudiés:

1. Le retour de l'information du client final

Des réseaux commerciaux de Hadjeb Auto ont comme mission: transmettre l'information du client, des réunions hebdomadaires se fait entre les agents commerciaux et les superviseurs pour discuter l'offre et la demande sur le marché.

2. Le service après-vente

Ce qui concerne la vidange et les anomalies mécaniques et électriques des automobiles vendues aux cours de 5 ans de leurs garanties.

3. Approvisionnement à la commande

En fonction d'un besoin client bien identifié.

4. Réapprovisionnement de stock

- Le remplètement périodique:

Pour le service après vente la consommation des pièces est régulière vu que les véhicules vendus sont garantis par l'entreprise.

- Le réapprovisionnement par seuil de réapprovisionnement:

Cette méthode est la méthode qui s'approche plus à nos besoins. Cette méthode consiste à calculer un stock minimum sur une référence (appelé seuil de réapprovisionnement) et à lancer une commande d'approvisionnement dès que le niveau de stock de cette référence est inférieur à cette valeur.

Le système de réapprovisionnement consiste à comparer en permanence le niveau de stock d'une référence avec son seuil de déclenchement d'une commande. Lorsque ce seuil est franchi; cela signifie qu'il est temps de franchir une commande d'approvisionnement. La quantité d'approvisionnement correspond à la quantité économique.

III.2. La méthode d'approvisionnement

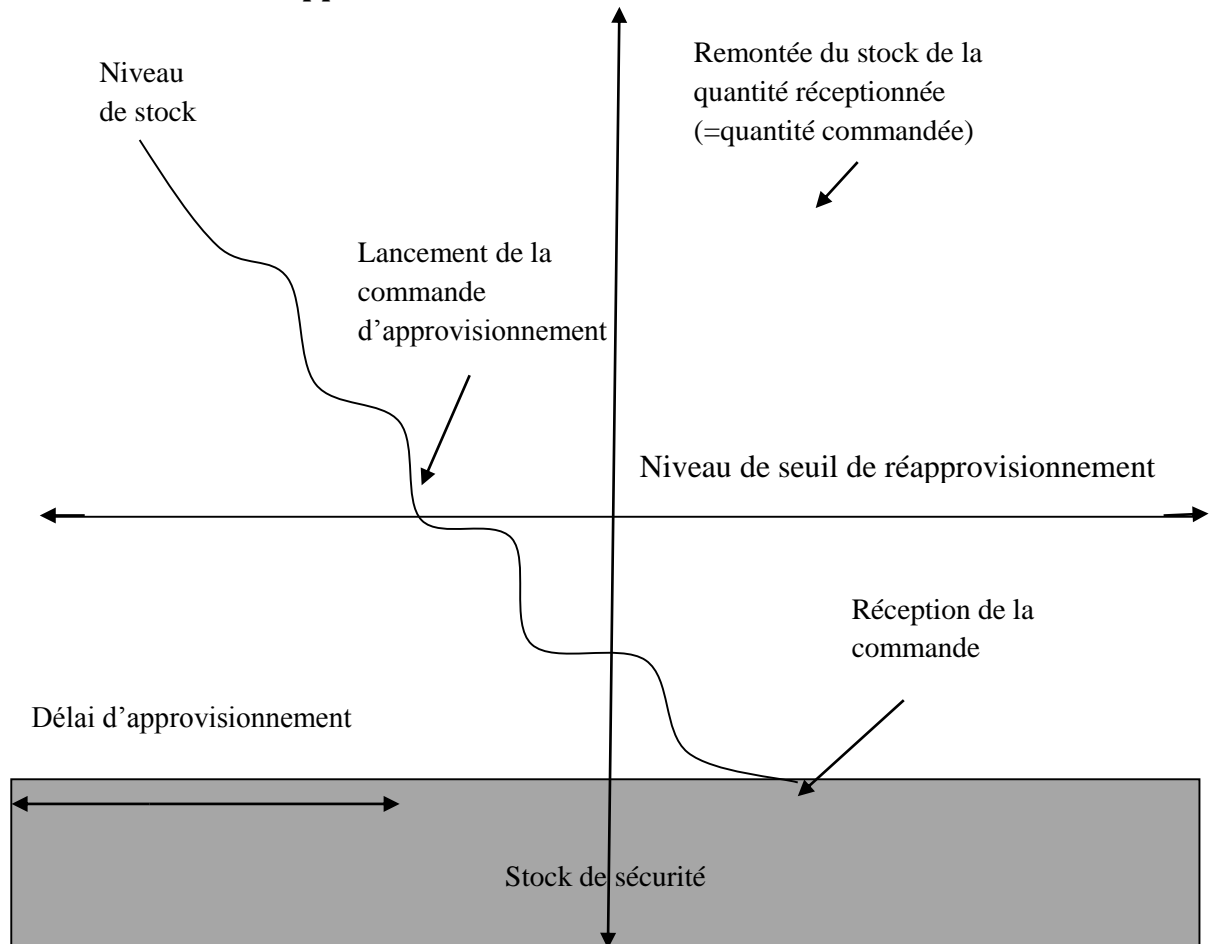


Figure 3.3: Le réapprovisionnement par seuil.

SR= seuil de réapprovisionnement.

CMJ= consommation moyenne journalière (pièces/jour).

D= délai d'approvisionnement.

QC= quantité à commander.

SS= stock de sécurité.

$$SR > CMJ \times \text{Délai}$$

A partir de la méthode ABC sur tous les articles de la base de données, nous avons le résultat suivant:

Méthode ABCD	Niveau de consommation	Consommation quotidienne	Consommation hebdomadaire
Groupe A	Articles avec une très forte consommation	>0.8 articles/jour	5.6 articles/semaine
Groupe B	Articles avec une consommation importante	Entre 0.12 et 0.8 articles/jour	Entre 0.8 et 5.6 articles/semaine
Groupe C	Faible consommation	< 0.12 articles/jour	<0.8 articles/semaine

Figure 3.4: Table de consommation.

III.3. L'Analyse de Pareto (Analyse ABC)

Il s'agit d'une analyse d'une population qui consiste à classer par ordre décroissant les articles selon une grandeur donnée pour identifier la minorité d'articles représentant la plupart de la rotation totale. C'est un modèle d'optimisation des stocks. Il consiste à effectuer une classification sur la totalité du stock de pièces pour déterminer les 20% de pièces qui représentent 80% des consommations.

Les quatre classes dites ABCD sont réparties de la manière suivante:

- 1) Catégorie A: est le 20% des articles qui représentent le 80% de la consommation.
- 2) Catégorie AB: est le 50% des articles qui représentent le 95% de la consommation.
- 3) Catégorie ABC: le 100% des articles représentent le 100% de la consommation.
- 4) Catégorie D: il s'agit des pièces qui n'ont pas de sorties les trois dernières années.

Problématique

L'entreprise HADJEB AUTO possède trois points de vente principaux qui sont des grands marchés de la pièce détachée en Algérie dans les trois wilayas: Oran, Alger (Bab Ezzouar), Oum el Bouaghi (ain mlila) arrivent dans le port de Jijel et d'Alger. Les quantités hebdomadaires d'une pièce X demandé par chaque point de vente sont respectivement de 400, 300 et 200 pièces. La quantité hebdomadaire qui arrive au Jijel est de 550 pièces et elle est de 350 pièces à Alger. Les coûts de transport d'un port à un point de vente sont donnés dans le tableau ci-dessous

(DA par pièce):

	Oran	Alger	Oum el Bouaghi
Jijel	5	6	3
Alger	3	5	4

1. Modélisation

On note S_1, S_2 respectivement les deux ports de Jijel, Alger et D_1, D_2, D_3 les trois points de vente Oran, Alger, Oum el Bouaghi respectivement.

On a le tableau de transport suivant:

	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	5	6	3	550
S_2	3	5	4	350
b_j	400	300	200	900

On est dans le cas d'équilibre car la somme des disponibilités égale à la somme des demandes.

Désignons par $x = \{x_{ij}, i = \overline{1,2}, j = \overline{1,3}\}$ le plan de transport de la marchandise qui doit vérifier les contraintes suivantes:

$$x_{11} + x_{12} = 400.$$

$$x_{21} + x_{22} = 300.$$

$$x_{31} + x_{32} = 200.$$

C'est-à-dire toutes les pièces disponibles doivent être acheminées.

De plus toutes les commande doivent être satisfaite, d'où:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 550.$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 350.$$

Par ailleurs toutes les quantités à transporter doivent être positives ou nulles

$$x_{ij} > 0, i = \overline{1,2}, j = i = \overline{1,3}$$

L'objectif du constructeur est de minimiser le coût global du transport suivant:

$$Z = 5x_{11} + 6x_{12} + 3x_{13} + 3x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23}$$

Le PL associé au problème est le suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z = 5x_{11} + 6x_{12} + 3x_{13} + 3x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} \\ x_{11} + x_{12} = 400 \\ x_{21} + x_{22} = 300 \\ x_{31} + x_{32} = 200 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 550 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 350 \\ x_{ij} > 0, i = \overline{1,2}, j = i = \overline{1,3} \end{array} \right.$$

2. Représentation graphique:

Comme dit précédemment dans le chapitre I (problème de transport), nous allons transformer le problème au problème de flot à coût minimum (FCM), Pour cela, commençons par traduire le problème en réseau de FCM.

- Le coût: $c(u_k) = \{0, 0, 5, 6, 3, 3,5, 4, 0,0, 0, 0\}$.
- La disponibilité: $a(u_k) = \{550, 350, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty\}$.
- La demande: $b(u_k) = \{0,0,0,0,0,0,0,0,400,300,200,0\}$.

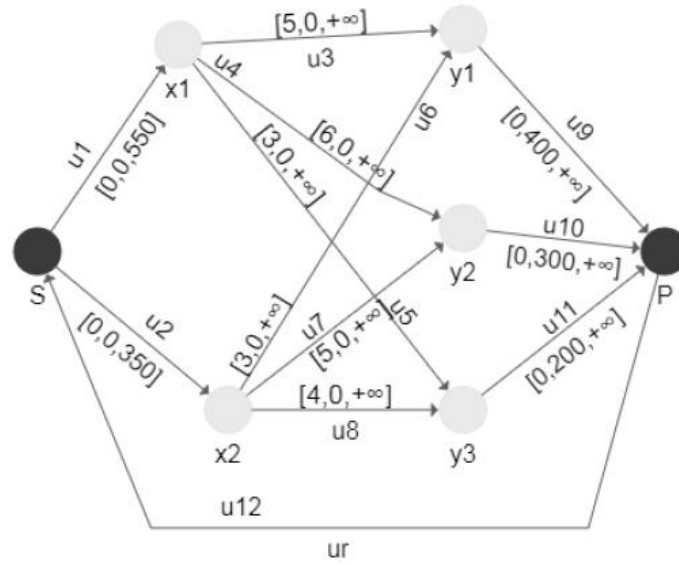


Figure3.5: Réseau de transport

3. La résolution

La matrice d'incidence sommet-arc est:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Alors le PL après la transformation est comme la suite:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min(z) = 5f(u_3) + 6f(u_4) + 3f(u_5) + 3f(u_6) + 5f(u_7) + 4f(u_8) \\ f(u_1) + f(u_2) + f(u_{12}) = 0 \\ -f(u_1) + f(u_3) + f(u_4) + f(u_5) = 0 \\ -f(u_2) + f(u_6) + f(u_7) + f(u_8) = 0 \\ -f(u_3) - f(u_6) + f(u_9) = 0 \\ -f(u_4) - f(u_7) + f(u_{10}) = 0 \\ -f(u_5) - f(u_8) + f(u_{11}) = 0 \\ -f(u_9) - f(u_{10}) - f(u_{11}) + f(u_{12}) = 0 \\ f(u_1) \leq 550 \\ f(u_2) \leq 350 \\ f(u_9) \geq 400 \\ f(u_{10}) \geq 300 \\ f(u_{11}) \geq 200 \\ f(u_i) \geq 0 \quad i = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\} \end{array} \right.$$

4. Les résultats

Nous résolvons ce PL en utilisant logiciel Lingo on obtient les résultats suivants:

$$f(u_1) = 550, f(u_2) = 350, f(u_3) = 50, f(u_4) = 300, f(u_5) = 200, f(u_6) = 350, \\ f(u_7) = 0, f(u_8) = 0, f(u_9) = 400, f(u_{10}) = 300, f(u_{11}) = 200, f(u_{12}) = 900.$$

Cette solution trouvée représente les quantités transportées telles que:

$f(u_1) = 550$: correspond à la quantité de pièces X disponible au niveau du port de Jijel.

$f(u_2) = 350$: correspond à la quantité de pièces X disponible au niveau du port de Alger.

$f(u_3) = 50$: transporter 50 pièces X de Jijel vers Oran.

$f(u_4) = 300$: transporter 300 pièces X de Jijel vers Alger.

$f(u_5) = 200$: transporter 200 pièces X de Jijel vers Oum El Bouaghi.

$f(u_6) = 350$: transporter 350 pièces X d'Alger vers Oran.

$f(u_7) = 0$: transporter 0 pièce X d'Alger vers Alger.

$f(u_8) = 0$: transporter 0 pièces X d'Alger vers Oum El Bouaghi.

$f(u_9) = 400$: correspond à la quantité de pièces X disponible après la distribution à Oran.

$f(u_{10}) = 300$: correspond à la quantité de pièces X disponible après la distribution à Alger.

$f(u_{11}) = 200$: correspond à la quantité de pièces X disponible après la distribution à Oum El Bouaghi.

$f(u_{12}) = 900$: correspond à la quantité totale de pièces X transportées des deux ports vers les trois points de vente (Oran, Alger, Oum El Bouaghi).

Le coût total de transport est:

$$Z = 5 \times 50 + 6 \times 300 + 3 \times 200 + 3 \times 350 + 5 \times 0 + 4 \times 0 = 3700.$$

Conclusion

Nous avons constaté que l'application de l'algorithme sur le réseau de transport des pièces de rechanges des deux ports aux trois marchés apparait comme un bon moyen qui calcule très rapidement une solution optimale afin d'éviter de prendre des mesures aux conséquences négatives.

Chapitre 4

simulations numériques

Application sur Lingo [16]

Lingo : Logiciel pour la résolution des programmes linéaires et non linéaires.

Introduction

Lingo est un logiciel utilisé pour résoudre les modèles d'optimisation linéaire, entier et quadratique, il est aussi utilisé pour résoudre les modèles d'optimisation globale non linéaire. Une des caractéristiques de Lingo c'est qu'il offre des outils qui peuvent aider à l'analyse des modèles en utilisant la méthode du simplexe.

I. Installation du logiciel [16]

Pour utiliser cette version de Lingo il est conseillé d'avoir au moins un processeur 486 et 8 Mo de mémoire RAM. Il faut aussi prévoir un espace disque dur de 2 Mo pour pouvoir l'installer. Les étapes de l'installation sont:

1. Démarrer Windows
2. Insérer CD-ROM
3. Cliquer sur l'icône setup (Install) dans votre explorateur de Windows
4. Suivre les instructions de l'écran. Pour plus d'information sur ce logiciel visiter l'adresse web www.lingo.com.

Application 1: Exemple 1.1

Programmation du problème linéaire.

The screenshot displays the Lingo 18.0 interface. On the left, the 'Lingo Model - Lingo1' window contains the following code:

```

min=340*x1+2400*x2+560*x3;
x1+2*x2+x3>=1100;
x1+x2+2*x3>=1400;
x1+x2+3*x3>=1500;
end
    
```

The 'Solution Report - Lingo1' window shows the following summary:

```

Global optimal solution found.
Objective value:           440000.0
Infeasibilities:          0.000000
Total solver iterations:    2
Elapsed runtime seconds:   0.25

Model Class:                LP

Total variables:            3
Nonlinear variables:        0
Integer variables:          0

Total constraints:          4
Nonlinear constraints:      0

Total nonzeros:            12
Nonlinear nonzeros:        0
    
```

The 'Lingo 18.0 Solver Status [Lingo1]' dialog box provides further details:

- Solver Status: LP
- Model Class: LP
- State: Global Opt
- Objective: 440000
- Infeasibility: 0
- Iterations: 2
- Variables: Total: 3, Nonlinear: 0, Integers: 0
- Constraints: Total: 4, Nonlinear: 0
- Nonzeros: Total: 12, Nonlinear: 0
- Generator Memory Used (K): 23
- Elapsed Runtime (hh:mm:ss): 00:00:00

The bottom section of the report shows the optimal values for variables and constraints:

Variable	Value	Reduced Cost
X1	800.0000	0.000000
X2	0.000000	1940.0000
X3	300.0000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	440000.0	-1.000000
2	0.000000	-120.0000
3	0.000000	-220.0000
4	200.0000	0.000000

Figure 4.1: Application de l'exemple 1.1 sur logiciel Lingo

Application 2: Exemple 1.2

Programmation du problème linéaire.

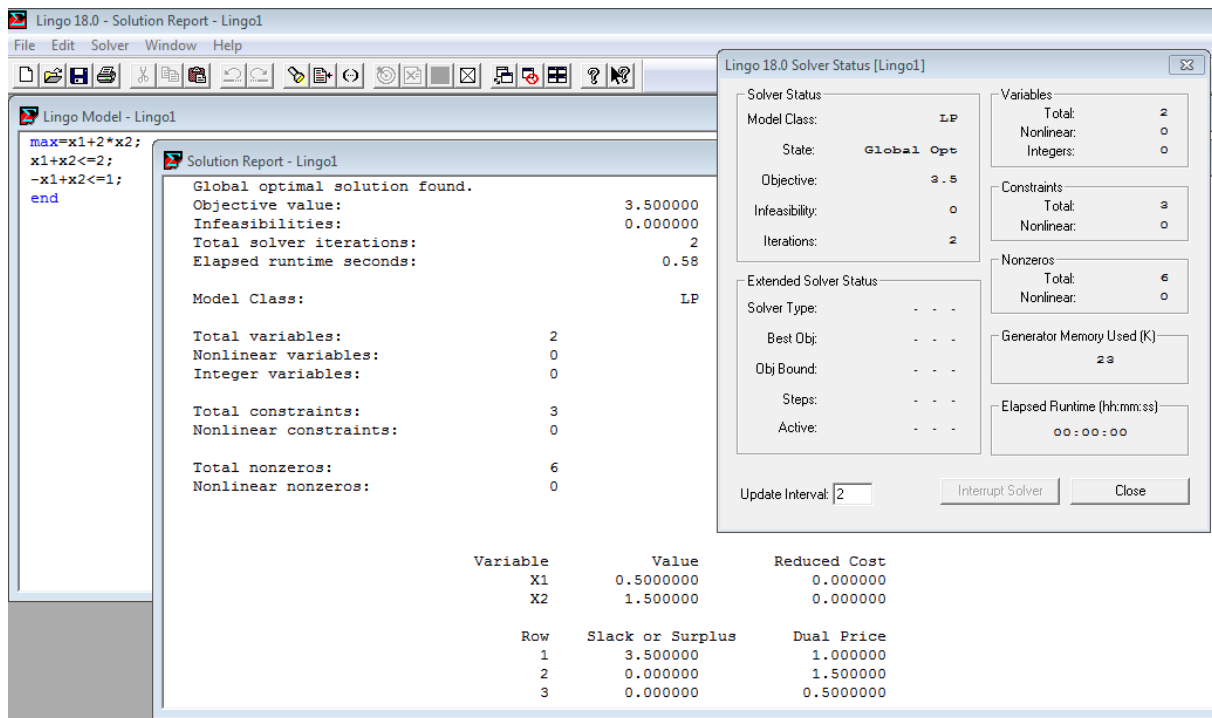


Figure 4.2: Application de l'exemple 1.2 sur logiciel Lingo

Application 3: Exemple 2.1

Programmation du problème quadratique.

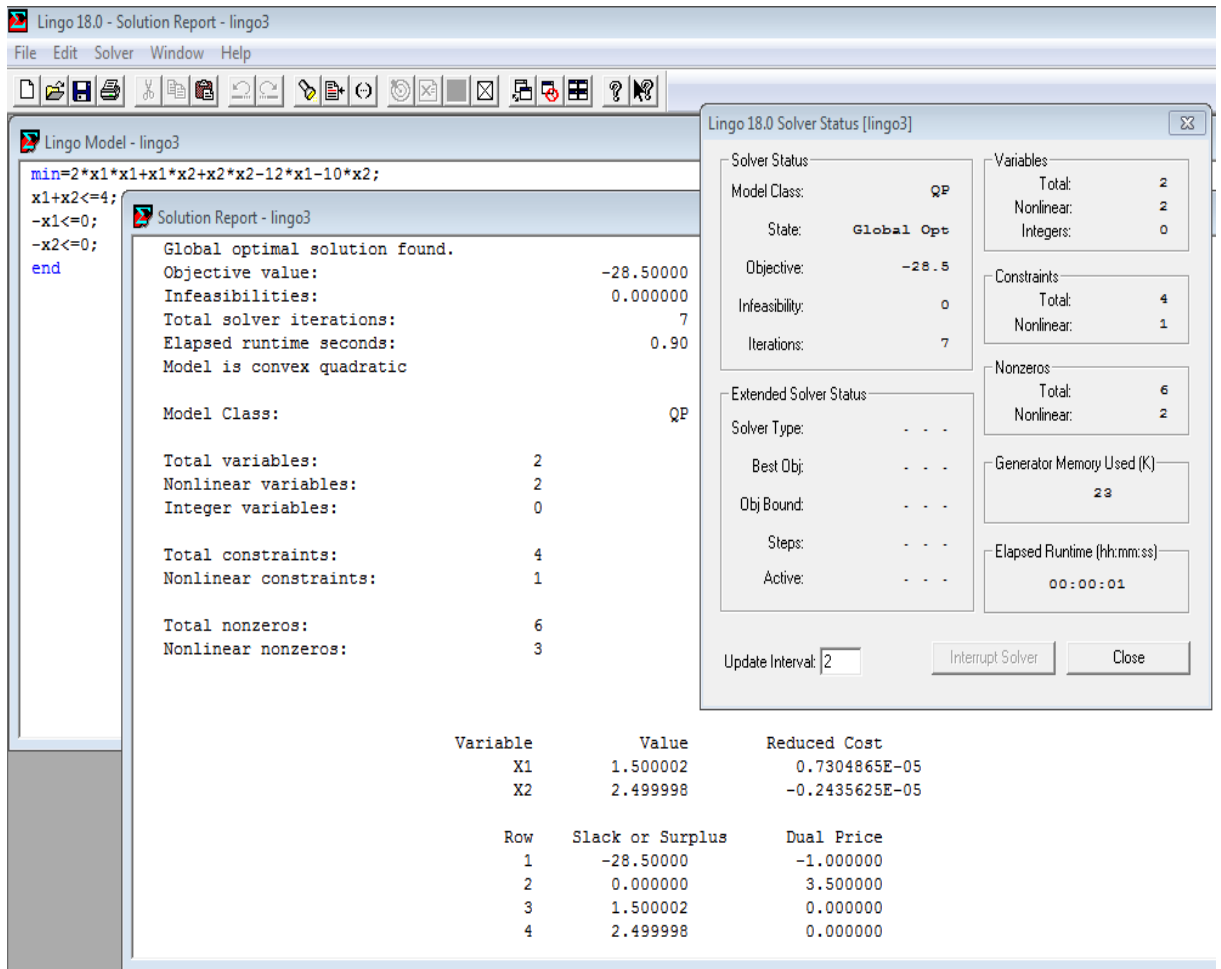


Figure 4.3: Application de l'exemple 2.1 sur logiciel Lingo

Application 4: Problématique

Programmation de la problématique.

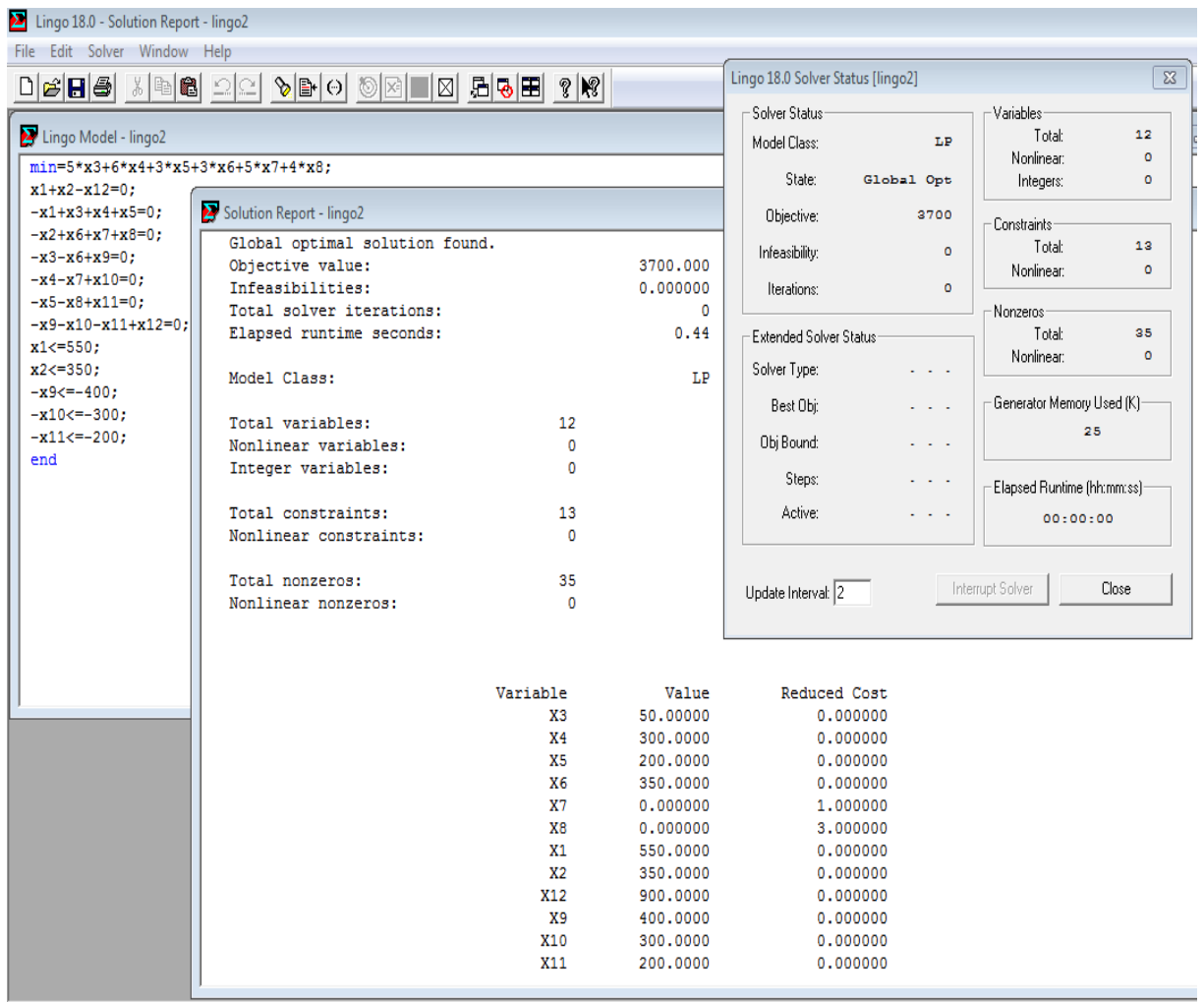


Figure 4.4: Application de la problématique sur logiciel Lingo.

Conclusion générale

La recherche opérationnelle se situe au carrefour de différentes sciences et technologies et propose un ensemble de méthodes scientifiques pour résoudre des problèmes d'optimisation liés aux organisations du monde réel: gestion des flux, problème de transport, d'emploi du temps... Dans cette étude, on a essayé de modéliser et résoudre le problème de transport classique par la méthode du simplexe en utilisant le langage Lingo.

Le problème consiste à trouver la quantité des marchandises transportées d'un nombre de sources vers un nombre de destinations en minimisant le coût de transport et en satisfaisant la demande de chaque client.

Une autre méthode pour traiter les problèmes d'optimisation qui est la programmation quadratique convexe avec la méthode de points intérieurs qui est une approche efficace pour la résolution des problèmes quadratiques de grandes tailles et la méthode d'activation des contraintes qui est une généralisation de la méthode du simplexe pour la programmation linéaire.

Nous avons atteint de nouveaux objectifs et nous espérons dans le proche avenir pouvoir continuer à travailler sur les problèmes de la recherche opérationnelle ainsi que leurs résolutions telles que l'optimisation non convexe.

Références

- [1] M. Aïden, B. Oukacha. Programmation linéaire, Editions Pages Bleues (2005).
- [2] M. Thomas. Dominique de Werra. Liebling. Jean-François Hêche, Recherche opérationnelle Pour ingénieurs, tome 01, ISBN 2-88074-446-, page 68-72, 2003.
- [3] G.B. Dantzig. Linear programming and extentions. Princeton University Press, Princeton, N.J, 1963.
- [4] G.S. GERAD en collaboration avec le département des mathématiques et génie industriel, école polytechnique de Montréal, introduction aux méthodes des points intérieurs, février 2001.
- [5] Hugues Talbot, problème transport et transbordement, laboratoire A2SI, 9 avril 2009.
- [6] J. Nocedal and S.J. Wright. Numerical Optimization. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [7] Z. Kebbich, études et extensions d'algorithmes de points intérieurs pour la programmation Non linéaire, thèse de doctorat d'état, université FERHAT ABBAS SETIF (2007).
- [8] Lakhdar Djeflal, A New Approach for Solving an Optimization Problem Applied Mathematical Sciences, Vol 6, 2012.
- [9] M. Kojima, S. Mizuno and A. Yoshise, A primal-dual interior point method, for linear Programing. Progress in mathematical programing, interior-point and related methods, scSpring-Verlag, New York, vol 47, 1989.
- [10] Martin Luther MFENJOU, Recherche opérationnelle: application aux problèmes miniers, 2015/2016.
- [11] N.K. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. Combinatorica, vol 4, pages 375-395, 1984.
- [12] Y.E. Nesterov and A.S. Nemirovsky. Interior-Point Polynomial Methods in Convex Programming. SIAM Publications, 1994.
- [13] E.W Barankin and R. Dorfman. On quadratic programming, volume II. Publications in statistics, University of California, 1958.
- [14] R. FLETCHER, A general quadratic programming algorithm. Journal of institute of mathematics and its applications., 1996.
- [15] R. Fletcher. Pratical methods of optimization. Constrained optimization. John Wiley andsons edition, 1981.
- [16] www.lingo.com.

Résumé

Dans cette étude, on a essayé de modéliser et résoudre le problème de transport classique par la méthode du simplexe en utilisant le langage Lingo.

Le problème consiste à trouver la quantité des marchandises transportées d'un nombre de sources vers un nombre de destinations en minimisant le coût de transport et en satisfaisant la demande de chaque client.

Une autre méthode pour traiter les problèmes d'optimisation qui est la programmation quadratique convexe avec la méthode de points intérieurs qui est une approche efficace pour la résolution des problèmes quadratiques de grandes tailles et la méthode d'activation des contraintes qui est une généralisation de la méthode du simplexe pour la programmation linéaire.

Mots clés: programmation linéaire(PL), problème de transport, problème de flot à coût minimum, programmation quadratique(PQ), logiciel Lingo.