

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri De Tizi-Ouzou



Faculté De Génie Electrique Et D'Informatique
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

**Mémoire de Fin d'Etudes
de MASTER ACADEMIQUE**
Spécialité : **Commande des systèmes.**

Présenté par
Djamal HABI
Mouloud LALLOUCHE

Sujet Proposé par M. Redouane KARA

Dirigé par Mme. Aldjia NAIT ABDESSELAM

Thème

**Synthèse d'un contrôleur avec
observateur dans l'algèbre des dioïdes :
Application à un système de production.**

Mémoire soutenu publiquement le 13 Juillet 2017 devant le jury composé de :

M. Ahmed MAIDI

Professeur, UMMTO, Président

Mme. Aldjia NAIT ABDESSELAM

MAA, UMMTO, Rapporteur

M. Redouane KARA

Professeur, UMMTO, Examineur

Mme. Karima TEBANI

MAA, CDTA, Examineur

Remerciements

Nous remercions Dieu le tout puissant de nous avoir donné le courage, la patience, la force, et la volonté pour la réalisation de ce travail.

Nous tenons à remercier en premier lieu nos chères parents qui nous ont tant encouragés et soutenus tout au long de nos études.

Nos remerciements sont destinés à notre promotrice Madame «Nait Abdesselam Aldjia» pour l'aide, les précieux conseils et la compréhension qu'elle a montrée à notre égard, ainsi que pour toutes les informations, le temps et l'encouragement qu'elle n'hésite jamais de nous fournir pendant toute la période consacrée à la réalisation de notre projet de fin d'études.

Nous adressons nos remerciements au président Monsieur « KARA Redouane» et ainsi qu'aux membres du Jury Monsieur « MAIDI Ahmed » et Madame «TIBANI Karima » qui ont accepté d'examiner notre travail en lui portant de l'intérêt.

Nous remercions aussi Monsieur le chef du département Monsieur «TOUAT Mohand Achour » pour ses conseils, son humour et pour sa qualité d'enseignement.

Nous remercions également l'ensemble des employés et les enseignants du département Automatique de nous avoir fourni les connaissances nécessaires tout au long de notre cursus, et pour leurs conseils qui nous permettent d'appréhender notre entrée dans la vie professionnelle de la meilleure façon et de faire un métier qui nous passionne.

Nous tenons aussi à exprimer nos remerciements les plus sincères à tous ceux et toutes celles qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Je dédie ce modeste travail...

*A mes chers parents, qui m'ont toujours encouragé et soutenu, à mes **grands-parents** que dieu nous les garde sains et saufs, à ma grande sœur **Dyhia** ainsi que mon petit frère **Arezki** et toute ma grande famille sans exception.*

*A tous mes amis(es) et camarades... Particulièrement: **Sabiha.D, Imene.B, Amine.N, Vivicha.A, Arezki.O, Louna.M, Chabane.K, Nessrine.M, Massil.G, Ahcene.H Amirouche.H, Katia.B Hocine.H, Massi.I, Hakim.F, Ghiles Hsd, Lydia.A . . .**, avec eux on a eu une ambiance formidable, et on a vécu et partagé des moments inoubliables. A toute la **promotion 2016/2017**, Ainsi que tous ceux et toutes celles qui ne figurent pas sur cette liste.*

*Sans oublier, mon binôme **Mouloud** et toute sa **famille** que je remercie infiniment.*

Djamal. H

Je dédie ce modeste travail...

*A mes **parents**, qui m'ont toujours encouragé et soutenu,*

*A ma sœur et sa petite famille **Hocine** et **Kyliane**,*

*A mon grand frère **Amar** et sa future femme **Wassila**,*

*A **Maya** qui était patiente avec moi,*

*A mon binôme, ami et frère **Djamal**,*

*A tous mes amis(es) et camarades... Particulièrement:
Sabiha.D, Imene.B, Amine.N, Vivicha.A, Arezki.O, Louna.M,
Chabane.K, Nessrine.M, Massil.G, Amirouche H, Katia.B, Hocine.K,
Lamia.CH, Aguelid.H, Ahcene.Z, Mouh.T, Iyes et Yacine.L*

Mouloud. L

Notations

| | |
|--------------------|--|
| \oplus : | Addition dans un dioïde. |
| \otimes : | Multiplication dans un dioïde. |
| ε : | Élément neutre pour la loi \oplus . |
| e : | Élément neutre pour la loi \otimes . |
| T : | Plus grand élément dans un dioïde. |
| \perp : | Plus petit élément dans un dioïde. |
| \vee : | La borne supérieure. |
| \wedge : | La borne inférieure. |
| P : | Ensemble des places $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. |
| T : | Ensemble des transitions $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$. |
| ${}^\circ t$: | L'ensemble des places d'entrée de la transition t . |
| t° : | L'ensemble des places de sortie de la transition t . |
| ${}^\circ p$: | L'ensemble des transitions d'entrée de la place p . |
| p° : | L'ensemble des transitions de sortie de la place p . |
| M_i : | Nombre de jetons initialement contenus dans la place p_i . |
| W : | Matrice d'incidence d'un réseau de Petri. |
| W^+ : | Matrice d'incidence arrière d'un réseau de Petri. |
| W^- : | Matrice d'incidence avant d'un réseau de Petri. |
| w_{ij}^- : | Poids de l'arc qui relie une transition t_j à une place en amont P_i . |
| w_{ij}^+ : | Poids de l'arc qui relie une transition t_j à une place en aval P_i . |
| $x_i(k)$: | Variable dateur associée à la transition t_i d'un GET. |
| $\theta_i(k)$: | Variable compteur associée à la transition t_i d'un GET. |
| \preceq : | l'ordre dans \mathbb{R}_{max} coïncide avec l'ordre \leq . |
| \succeq : | l'ordre dans \mathbb{R}_{max} coïncide avec l'ordre \geq . |
| D : | Dioïde. |
| $D^{n \times n}$: | Dioïde matriciel. |
| L_a : | Produit à gauche par a , $L_a(x) = a \otimes x$. |
| R_a : | Produit à droite par a , $R_a(x) = x \otimes a$. |

| | |
|----------------------------------|--|
| \mathbb{L} : | Notation utilisée pour représenter $L_a^\#$. |
| \mathbb{R} : | Notation utilisée pour représenter $R_a^\#$. |
| a^* : | Etoile de Kleen $a^* = e \oplus a \oplus a^2 \oplus \dots$ |
| a^+ : | Dérivé de l'étoile de Kleen $a^+ = a \otimes a^* = a \oplus a^2 \oplus \dots$ |
| \mathbb{R}_{max} : | Dioïde $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, max, +)$, appelé aussi algèbre $(max, +)$. |
| \mathbb{R}_{min} : | Dioïde $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, min, +)$, appelé aussi algèbre $(min, +)$. |
| $\bar{\mathbb{Z}}_{max}$: | Dioïde $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}, max, +)$, appelé aussi algèbre $(max, +)$. |
| $\bar{\mathbb{Z}}_{min}$: | Dioïde $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}, min, +)$, appelé aussi algèbre $(min, +)$. |
| $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$: | Dioïde des séries formelle en γ et δ a exposant dans \mathbb{R} et a coefficient booléens. |
| $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$: | Dioïde des séries formelle en γ et δ a exposant dans \mathbb{R} . |
| H : | Matrice de transfert. |
| Sci : | Semi-continue inferieur. (Distributivité de produit à gauche et à droite sur les sommes infinies) |
| Scs : | Semi-continue supérieur. (Distributivité de produit à gauche et à droite sur les sommes supérieur) |
| SED : | Système à événements discret. |
| RdP : | Réseau de Petri. |
| GET : | Graphe d'événements temporisé. |

Table des figures

Table des figures

Figure 2.1 : exemple d'un réseau de pétri

Figure 2.2 : un réseau de Petri et son marquage initiale

Figure 2.3. (a) : t_1 est validée

Figure 2.3. (b) : marquage

Figure 2.4 : RdP modélisant le comportement d'un système à ressource partagée

Figure 2.5 : Graphe des marquages atteignables du réseau de Petri de la figure 2.4

Figure 2.6 exemple d'un graphe d'évènement.

Figure 2.7 exemple de graphe d'état.

Figure 2.8 : Modèle GET d'une machine.

Figure 2.9 : Exemple de graphe d'événements temporisés.

Figure 2.10 : Extension évènementielle

Figure 2.11 extension temporelle

Figure 2.12 : Opérateur de décalage "évènementiel"

Figure 2.13 : graphe d'évènement temporisé

Figure 3.1. Structure de l'observateur.

Figure 3.2: Structure de l'observateur avec perturbation

Figure 3.3: Structure d'un contrôleur de type retour d'état avec observateur

Figure 3.4 : commande avec modèle de référence: correcteur de type retour de sortie.

Figure 3.5 : unité de production

Figure 3.6 : boucle de production 2.

Figure 3.7 : graphe d'évènement temporisé associé a la boucle 2

Figure 3.8 : représentation de x_{obs} et x_{sys} au niveau de la transition x_1 et x_3 .

Figure 3.9 : representation de la sortie du systeme Y_{sys} .

Figure 3.10 : graphe d'évènement temporisé associé a la boucle 2 avec perturbation.

Figure 3.11: représentation de x_{obs_p} et x_{sp} au niveau de la transition x_4

Table des figures

Figure 3.12 : représentation de la sortie Y_{sys} et la sortie perturbé Y_p .

Figure 3.13 : représentation de la sortie Y_{sys} avec la sortie corrigé Y_{cor}

Figure 3.14 : représentation du transfert G_{Kopt} et G_{ref}

Figure 3.15 : représentation du transfert G_{Fopt} et G_{ref}

Figure 3.16 : Exemple d'atelier d'assemblage.

Figure 3.17 : représentation du transfert G_{Fopt} et G_{ref}

Figure 3.18 : représentation du transfert G_{Kopt} et G_{ref}

Sommaire

Notation

Table des figures

| | |
|----------------------------|---|
| Introduction générale..... | 2 |
|----------------------------|---|

Chapitre 1 : Théorie des dioïdes

| | |
|---|----|
| 1.1. Introduction | 6 |
| 1.2. Théorie des dioïdes | 6 |
| 1.3. Structures ordonnées et treillis..... | 7 |
| 1.3.1. Relation d'ordre et ensembles ordonnés | 7 |
| 1.3.2. Théorie des treillis | 9 |
| 1.3.3. Structure ordonnée d'un dioïde | 10 |
| 1.4. Applications définies sur les dioïdes | 13 |
| 1.5. Résolution de L'équation $x = ax \oplus b$, dans les dioïdes complets | 15 |
| 1.6. Théorie de la résiduation dans les dioïdes | 17 |
| 1.6.1. Résolution des équations $ax \preceq b$ et $xa \preceq b$ | 17 |
| 1.6.2. Résolutions Dans Le Cas Matriciel..... | 18 |
| 1.7. Conclusion | 20 |

Chapitre 2 : comportement linéaire des GET dans les dioïdes

| | |
|---|----|
| 2.1. Introduction | 22 |
| 2.2. Système à événement discret | 22 |
| 2.3. Réseaux de Pétri | 23 |
| 2.3.1. Définition et notation | 23 |
| 2.3.2. Propriétés d'un RdP | 28 |
| 2.3.3. Principales classes d'un RdP | 29 |
| 2.4. Graphe d'évènement temporisé | 31 |
| 2.4.1. Temporisation et fonctionnement d'un graphe d'évènements | 31 |
| 2.4.2. Fonctionnement au plus tôt d'un GET | 32 |
| 2.5. Modélisations des systèmes | 33 |
| 2.5.1. Dateurs, domaine évènementiel | 34 |
| 2.5.2. Compteurs, domaine temporel | 38 |

| | |
|--|----|
| 2.5.3. Modèle exprimé sous forme de séries formelles | 42 |
| 2.5.3.1 Transformé en γ | 42 |
| 2.5.3.2 Transformé en δ | 46 |
| 2.5.3.3 Représentation bidimensionnelle : dioïde $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ | 49 |
| 2.6. Réalisabilité, rationalité et périodicité | 50 |
| 2.7. Conclusion | 51 |

Chapitre 3 : Synthèse d'un contrôleur avec observateur

| | |
|---|----|
| 3.1. Introduction | 53 |
| 3.2. Synthèse d'un observateur | 53 |
| 3.2.1. Conception d'un observateur sans présence de perturbation | 54 |
| 3.2.2. Conception d'un observateur avec présence de perturbation | 57 |
| 3.3. Synthèse d'un Contrôleur de type retour d'état avec observateur | 60 |
| 3.3.1. Formulation du problème | 61 |
| 3.4. Synthèse d'un correcteur par retour de sortie | 64 |
| 3.4.1. Formulation du problème | 64 |
| 3.5. Exemple d'application | 67 |
| 3.5.1. Descriptions de l'unité de production | 67 |
| 3.5.2. Boucle de production considérer | 68 |
| 3.5.3. Modélisations par un graphe d'évènement temporisé | 69 |
| 3.5.4. Modélisation par un modèle d'état | 70 |
| 3.5.5. Synthèse d'un observateur | 72 |
| 3.5.6. Synthèse d'un contrôleur de type retour d'état avec observateur..... | 80 |
| 3.5.7. Synthèse d'un contrôleur de type retour de sortie..... | 84 |
| 3.6. Exemple supplémentaire | 86 |
| 3.7. Conclusion | 90 |
| Conclusion générale | 93 |
| Bibliographie | 95 |
| Annexe | 98 |

Introduction générale

L'automatique classique considère des systèmes dynamiques où le changement d'état dépend du temps en continu ou discret. Le comportement des systèmes dynamiques en automatique classique est souvent modélisé par des équations différentielles ou aux différences. En revanche, les Systèmes Dynamiques à Événements Discrets (SDED) sont des systèmes généralement conçus par l'homme et correspondent à des processus dont l'état change à l'occurrence d'un événement. Ils sont utilisés dans plusieurs domaines d'application, parmi lesquelles on peut citer les systèmes de production (ateliers flexibles, lignes d'assemblage) [1], [2], les réseaux de transport (routier, ferroviaire ou aérien) [3], les réseaux de communication (les systèmes informatiques et les systèmes multimédias) [4].

L'importance prise par ces systèmes a conduit de nombreux chercheurs à proposer des modèles mathématiques permettant de décrire leur comportement. Citons, les modèles à base d'automates à états finis qui servent pour représenter des systèmes concernés par les phénomènes de concurrence, les réseaux de Petri pour les systèmes plus complexes qui comportent à la fois des phénomènes de synchronisation, de concurrence et de parallélisme.

La classe des SED à qui nous nous intéresserons ici est celle qui met en jeu des phénomènes de synchronisation et de délai. Pour un tel processus, on peut obtenir un modèle mathématique sous forme d'équations de récurrence qui utilise des opérateurs *max* ou *min*, et qui sont donc non linéaire, mais qui peuvent être traduits dans une structure algébrique particulière, appelée dioïde qui devient linéaire. La représentation est alors dite *(max, +) linéaire*, dans le cas du dioïde *(max, +)* ou *(min, +) linéaire*, dans le cas du dioïde *(min, +)*. L'algèbre des dioïdes est donc apparue comme la structure mathématique adéquate pour modéliser et étudier cette classe de systèmes [5] et [6].

Les réseaux de Petri jouent un rôle important, présentant la caractéristique d'être un outil à la fois graphique et mathématique de modélisation. L'emploi de ces graphes pour spécifier et analyser ces systèmes, permet de décrire des phénomènes de synchronisation, de partage de ressources...etc. Dans ce cadre, de multiples modèles ont été développés. Parmi ces modèles, deux types de réseaux de Petri se dégagent : les graphes d'état et les graphes d'événement. Dans notre cas, on s'intéresse à la deuxième catégorie, c'est-à-dire la classe des graphes d'événements à laquelle sont associées des temporisations, ce sont des graphes d'événements temporisés GET dont l'évolution de l'état est représentable par des équations récurrentes linéaires sur des structures algébriques tel que l'algèbre *(max, +)* ou l'algèbre

($min, +$). Le dioïde privilégié pour la représentation entrée/sortie des GET sera par la suite le dioïde $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ [5], [7] et [8].

Tout comme dans le cas des systèmes continus, le comportement dynamique des GET peut être entièrement décrit par l'évolution de ses variables d'état. Or, ces variables ne sont en général pas, accessibles par des mesures. Ces problèmes peuvent être résolus, en introduisant un observateur d'état ou un estimateur d'état dont la tâche sera de fournir une estimation de vecteur d'état du système étudié en fonction des informations disponibles sur ce système (les mesures d'entrée et de sortie et le modèle dynamique du procédé).

Les résultats concernant les problèmes d'observation des systèmes à événements discrets, obtenus par une approche ($max, +$), ont été développés dans [9] où l'estimation par étoile de Kleene en se basant sur les équations récurrentes a été donnée. L'estimation en utilisant la théorie de résiduation est faite par Laurent Hardouin et Carlos Maia [10], il s'agit d'un résultat inspiré de Luenberger [11]. Dans notre travail, nous adoptons la même démarche, en se basant sur le modèle décrit par la présentation du dioïde $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$.

Le problème de commande abordé dans ce mémoire peut être vu comme un problème de poursuite de modèle. Partant d'un système représentable par un GET, l'objectif est de synthétiser un correcteur par retour d'état avec observateur, également descriptible par un GET, de telle sorte que le comportement entrée/sortie du système corrigé (système nominal + correcteur) soit aussi proche que possible de celui d'un modèle de référence. Nous verrons qu'une telle stratégie est plus performante qu'un contrôle de type retour de sortie simple.

Ce mémoire est structuré en trois chapitres comme suit :

- Dans le premier chapitre, nous présenterons les outils algébriques, qui concernent les propriétés des demi-anneaux idempotents, ou dioïdes. Nous donnons tout d'abord, quelques généralités sur les structures ordonnées et treillis, sur lesquelles sont basées les dioïdes. Une part importante est ensuite consacrée à la théorie de la résiduation, ainsi que l'étoile de Kleene. Ces éléments jouent un rôle clé dans les problèmes de synthèse d'observateur et de correcteur abordés dans le troisième chapitre.
- Dans le second chapitre, on présentera la mise en équations d'une classe de réseau de Petri qui est les graphes d'événements temporisés, sur différents dioïdes rencontrés dans la littérature. Nous insisterons particulièrement sur la présentation du dioïde $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$, qui sera utilisée tout au long du mémoire. L'avantage de cette structure concerne le

transfert entrée/sortie d'un GET qui se présente alors sous forme d'une matrice rationnelle. Dès lors, l'étude des GET est liée à l'algèbre des séries rationnelles de $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$.

- Le troisième chapitre aborde dans un premier temps, la démarche adoptée pour la synthèse d'observateur des GET, nous allons considérer les deux cas avec et sans perturbations. Dans un deuxième temps, un observateur est utilisé pour estimer l'état nécessaire à la mise en place d'un correcteur de type retour d'état, et nous allons comparer les résultats avec un correcteur de type retour de sortie de manière à ce que le système en boucle fermée possède une dynamique inférieure ou égale à celle d'un modèle de référence. Un exemple d'application est considéré, il s'agit d'une unité de production de tube de caoutchouc pour un équipement automobile.

Une annexe présente le script Scilab qui fournit les résultats de calcul pour l'exemple proposé. Il s'agit de script utilisant la boîte à outils MinMaxGD.

Chapitre 1

Théorie des dioïdes

1.1. Introduction

Ce chapitre passe en revue les différentes définitions et notations sur les dioïde, qui sont des semi-anneaux idempotents, ils ont la particularité d'être ordonnée, de ce fait ils peuvent être vus comme des treillis, c'est pourquoi en premier lieu, nous effectuerons un rappel sur les ensembles ordonnés et les treillis. Ensuite nous allons présenter les techniques permettant de résoudre les équations qui sont de deux types. Le premier concerne les équations aux points fixes, dont la solution repose sur l'utilisation de l'étoile de Kleene [9]. Le deuxième type est résolu en utilisant des inverses. Or, cette approche n'est pas permise dans un dioïde. Pour ce problème d'inversions des applications ordonnée, la théorie de résiduation [5], [6] et [12], qu'on exposera dans ce chapitre fournis une alternative à cette impossibilité pour des applications qui sont isotone afin d'établir la plus grande ou la plus petite solution.

1.2. Théorie des dioïdes

Dans Cette partie on fait part de quelques définitions et propriétés à la structure algébrique d'un dioïde qu'on utilisera tous le long de ce mémoire [5] et [6].

Définition 1.1 (Monoïde)

Un monoïde (M, \oplus) est une structure algébrique basée sur un ensemble d'éléments M , muni d'une loi de composition interne \oplus , telle que, La loi \oplus est associative $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) = a \oplus b \oplus c$. M Possède un élément neutre noté ε , tel que $\forall a \in M, : a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a$

Si de plus, la loi est commutative : $\forall a, b \in M, a \oplus b = b \oplus a$. On dit que le monoïde est commutatif.

Définition 1.2 (Monoïde idempotent)

Un monoïde (M, \oplus) est dit idempotent si la loi \oplus est Commutative, associative et idempotente, c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\forall a \in M, a \oplus a = a$$

Définition 1.3 (Semi-anneau)

On appelle semi-anneau un ensemble D muni de deux lois Internes \oplus et \otimes telles que :

1. (D, \oplus) est un monoïde commutatif dont l'élément neutre est noté ε .

2. (D, \otimes) est un monoïde ayant pour élément neutre e .
3. La loi multiplicative \otimes est distributive à droite et à gauche par rapport à la loi additive \oplus .
 - À droite c.-à-d. : $\forall a, b, c \in D, a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$.
 - et à gauche : $\forall a, b, c \in D, (b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a)$.
4. L'élément ε est absorbant pour la loi \otimes ($\forall a \in D, a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$)
5. Si la loi \otimes est commutative, alors (D, \oplus, \otimes) est un semi-anneau commutatif.

Définition 1.4 (Dioïde)

Soit (D, \oplus, \otimes) un semi-anneau. Si la loi \oplus est idempotente, c'est-à-dire :

$\forall a \in D, a \oplus a = a$, alors (D, \oplus, \otimes) est appelé dioïde (ou encore semi-anneau idempotent).

Nous citons quelques exemples de dioïdes exploités dans notre travail.

Exemple 1.1. (Algèbre (max, +))

L'ensemble $\mathbb{R} \cup]-\infty, +\infty[$ muni du max, noté \oplus , et de l'addition usuelle, noté \otimes , qui peut s'écrire $(\mathbb{R} \cup]-\infty, +\infty[, \max, +)$ est un dioïde commutatif pour lequel $\varepsilon = -\infty$ et $e = 0$. Ce dioïde est noté $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ et est traditionnellement nommé « *algèbre (max, +)* » ou algèbre *Max-Plus*.

Exemple 1.2. (Algèbre (min, +))

L'ensemble $\mathbb{R} \cup]-\infty, +\infty[$ muni du min, noté \oplus , et de l'addition usuelle, noté \otimes , qui peut s'écrire $(\mathbb{R} \cup]-\infty, +\infty[, \min, +)$ est un dioïde commutatif pour lequel $\varepsilon = +\infty$ et $e = 0$. Ce dioïde est noté $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ et est traditionnellement nommé « *algèbre (min, +)* » ou algèbre *Min-Plus*.

Remarque. Comme dans le cas des structures algébriques usuelles, le signe multiplicatif \otimes sera parfois omis dans les expressions analytiques concernant les éléments d'un dioïde.

1.3. Structures ordonnées et treillis

1.3.1 Relation d'ordre et ensembles ordonnés

Afin de définir certaines propriétés des dioïdes, il est nécessaire de présenter quelques notions concernant les ensembles ordonnés et la théorie des treillis sur lesquelles repose amplement l'algèbre des dioïdes [13] et [14].

Définition 1.5 (relation d'ordre)

On dit qu'une relation \preceq est une relation d'ordre sur un ensemble E si elle vérifie les trois propriétés $\forall x, y, z \in E$:

1. Réflexivité : $x \preceq x$
2. Antisymétrie : $x \preceq y$ et $y \preceq x \Rightarrow x = y$
3. Transitivité : $x \preceq y$ et $y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$

Définition 1.6 (ensemble ordonné)

Un ensemble E est ordonné, s'il est muni d'une relation d'ordre notée \preceq . On la notera (E, \preceq) .

Un ensemble est dit totalement ordonné si deux éléments quelconques x et y sont toujours comparables, c'est-à-dire si l'on a $x \preceq y$ ou $y \preceq x$.

Exemple 1.3

(\mathbb{R}, \leq) , (\mathbb{Z}, \leq) , (\mathbb{N}, \leq) et (\mathbb{Q}, \leq) Où \leq est l'ordre naturel totalement ordonné.

Un ensemble est dit partiellement ordonné, s'il existe deux éléments $x, y \in E$, tels que x et y sont incomparables (c.-à-d. $\forall x, y \in E : x \not\preceq y$ et $y \not\preceq x$), alors la relation d'ordre \preceq est partielle.

Exemple 1.4

Soit l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N}^* . La relation d'ordre \preceq est définie comme suit : $x \preceq y$ si et seulement si, x divise y .

Il est clair alors que (\mathbb{N}^*, \preceq) est partiel ($3 \not\preceq 5$ car 3 n'est pas divisible par 5 dans \mathbb{N}^* et inversement).

Définition 1.7 (Majorant, minorant)

Soit un ensemble muni d'une relation d'ordre notée \preceq . Soit $A \subseteq E$.

- Un élément $y \in E$ est un majorant de A si pour tout $x \in A, x \preceq y$.
- Un élément $y \in E$ est un minorant de A si pour tout $x \in A, y \preceq x$.

Définition 1.8 (Bornes d'un ensemble):

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre notée \preceq . Un ensemble $A \subseteq E$ est dit borné s'il admet un majorant et un minorant.

- Un élément $y \in E$ est appelé borne supérieure de A , noté $y = \sup(A)$ noté aussi $(\vee A)$, si :
 - a) y est un majorant de A .
 - b) y est le plus petit des majorants de A .
- Un élément $y \in E$ est la borne inférieure de A , noté $y = \inf(A)$ noté aussi $(\wedge A)$, si :
 - a) y est un minorant de A .
 - b) y est le plus grand des minorants de A .

1.3.2 Théorie des treillis

Les treillis sont des concepts mathématiques, que l'on peut manipuler en tant qu'ensembles ordonnés ou en tant que structures algébriques [13], [15] et [16].

Définition 1.9 (sup-demi treillis)

Un sup-demi treillis est un ensemble ordonné, dans lequel tout couple d'éléments (x, y) admet une borne supérieure, soit un plus petit majorant, notée $x \vee y$.

Définition 1.10 (inf-demi treillis)

Un inf-demi treillis est un ensemble ordonné, dans lequel tout couple d'éléments (x, y) admet une borne inférieure, soit un plus grand minorant, notée $x \wedge y$.

Définition 1.11 (Treillis)

Un treillis est un ensemble ordonné (E, \leq) qui est à la fois un *sup*-demi treillis et un *inf*-demi treillis. Autrement dit, un treillis est un ensemble ordonné dans lequel tout couple d'éléments admet un plus petit majorant et un plus grand minorant.

Définition 1.12 (sup-demi treillis complet)

Un *sup*-demi treillis P est complet s'il existe une borne supérieure $\vee U$ pour tout sous-ensemble fini ou infini $U \subseteq P$.

Définition 1.13 (inf-demi treillis complet)

Un *inf*-demi treillis Q est complet s'il existe une borne inférieure $\wedge V$ pour tout sous-ensemble fini ou infini $V \subseteq Q$.

Définition 1.14 (Treillis complet)

Un treillis est dit complet s'il est à la fois un *sup*-demi treillis complet et un *inf*-demi treillis complet.

1.3.3. Structure ordonnée d'un dioïde

Ces définitions d'ordre et de treillis ont un sens dans l'algèbre des dioïdes grâce à l'idempotence de la loi \oplus qui leur confère naturellement une structure ordonnée.

Dans un dioïde D donné, la propriété d'idempotence de la loi additive \oplus induit une relation d'ordre, notée \preceq , définie par: $\forall a, b \in D, a \preceq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$. De plus cette relation d'ordre est compatible avec les lois \oplus et \otimes de structure de D , c'est-à-dire, $\forall a, b, c \in D$

$$a \preceq b \Rightarrow \begin{cases} a \oplus c \preceq b \oplus c \\ a \otimes c \preceq b \otimes c \text{ et } c \otimes a \preceq c \otimes b \end{cases}$$

Remarque. L'ordre \preceq défini dans $\overline{\mathbb{R}}_{max}$ est total et coïncide avec l'ordre usuel \leq . En revanche, l'ordre total \preceq défini dans $\overline{\mathbb{R}}_{min}$ est l'inverse de l'ordre usuel \leq .

Exemple 1.5

La relation \preceq , associée à l'application **max** est une relation d'ordre qui correspond à l'ordre usuel \leq , $a \preceq b \Leftrightarrow b = \max(a, b)$, ($2 \preceq 3 = 3 \Leftrightarrow 2 \leq 3 \Leftrightarrow \max(2, 3) = 3$)

La relation \preceq , associée à l'application **min** est une relation d'ordre qui correspond à l'inverse de l'ordre usuel \geq , $a \preceq b \Leftrightarrow b = \min(a, b) \Leftrightarrow a \geq b$, ($3 \preceq 2 = 2 \Leftrightarrow 3 \geq 2 \Leftrightarrow \min(3, 2) = 2$)

L'idempotence de la somme dans un dioïde induit une structure de sup-demi treillis pour lequel la borne supérieure notée \vee est représentée par la loi additive \oplus du dioïde, soit :

$$\forall a, b \in D, a \oplus b = a \vee b. \text{ Ainsi, } a \oplus b \text{ est le plus petit majorant de } a \text{ et } b.$$

On peut noter que la loi \vee d'un sup demi treillis est associative, commutative et idempotente, c'est-à-dire que \vee possède les mêmes axiomes que la loi additive \oplus d'un dioïde.

Définition 1.15 (Dioïde complet)

Un dioïde est dit complet s'il est fermé pour les sommes infinies et si la loi \otimes distribue sur les sommes infinies, c'est-à-dire si pour tout $c \in D$ et tout sous-ensemble $A \subset D$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} c \otimes (\oplus_{a \in A} a) &= \oplus_{a \in A} (c \otimes a) \\ (\oplus_{a \in A} a) \otimes c &= \oplus_{a \in A} (a \otimes c) \end{aligned}$$

La borne supérieure d'un dioïde complet D existe et sera notée \top . Il correspond à la somme des éléments du dioïde $\top = \bigoplus_{x \in D} x$ L'élément \top est donc absorbant pour l'addition : $\top \oplus a = \top$

Rappelons néanmoins que, puisque ε est absorbant pour la loi \otimes , on a : $\top \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes \top = \varepsilon$.

Exemple 1.6

$\mathbb{R}max = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, max; +)$ n'est pas complet. Nous devons ajouter la borne supérieure $\top = +\infty$ avec la convention :

$$(\top \otimes \varepsilon) = +\infty + (-\infty) = -\infty = \varepsilon.$$

Ce nouveau dioïde complet est noté :

$$\bar{\mathbb{R}}_{max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}, max, +)$$

Définition 1.16 (Dioïde distributif)

Un dioïde (D, \oplus, \otimes) est dit distributif s'il est complet et si $\forall a \in D$ et pour tout sous-ensemble $C \subset D$:

$$\begin{aligned} \left(\bigoplus_{x \in C} x \right) \wedge a &= \bigoplus_{x \in C} (a \wedge x) \\ \left(\bigwedge_{x \in C} x \right) \oplus a &= \bigwedge_{x \in C} (x \oplus a) \end{aligned}$$

Remarque. Si le dioïde n'est pas distributif, les inégalités suivantes sont néanmoins vérifiées grâce à l'isotonie des lois \oplus et \wedge :

$$\begin{aligned} \left(\bigoplus_{x \in C} x \right) \wedge a &\succcurlyeq \bigoplus_{x \in C} (a \wedge x) \\ \left(\bigwedge_{x \in C} x \right) \oplus a &\succcurlyeq \bigwedge_{x \in C} (x \oplus a) \end{aligned}$$

Définition 1.17 (Dioïde matriciel)

L'ensemble des matrices carrées de dimension n , à coefficients dans un dioïde (D, \oplus, \otimes) , est un dioïde matriciel, noté $(D^{n \times n}, \oplus, \otimes)$, où les opérations sont définies, à partir des opérations du dioïde (D, \oplus, \otimes) de manière analogue à l'algèbre classique, de la façon suivante : $\forall A, B \in D^{n \times n}$

$$\text{Addition :} \quad A \oplus B : (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

$$\text{Multiplication :} \quad A \otimes B : (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

L'élément identité de $D^{n \times n}$ est la matrice, notée Id_n , composée de e sur la diagonale et de ε partout ailleurs. L'élément zéro est la matrice composée exclusivement de ε .

La somme et le produit de deux matrices de dimensions compatibles, pas nécessairement carrées, peuvent être définis de la façon suivante :

$$A \in D^{n \times p}, B \in D^{n \times p} :$$

$$A \oplus B : (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} \quad \forall : i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, p$$

$$C \in D^{n \times p}, F \in D^{p \times q} :$$

$$C \otimes D : (C \otimes D)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^q A_{ik} \otimes B_{kj} \quad \forall : i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, q$$

Exemple 1.7

Soit A et $B \in D^{2 \times 2}$ deux matrices dans l'algèbre $(max, +)$ tel que :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

On a :

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} \max(3, 8) & \max(10, 1) \\ \max(1, 4) & \max(5, 5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

ET :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} \max(3+8, 10+4) & \max(3+1, 10+5) \\ \max(1+8, 5+4) & \max(e+1, 5+5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 15 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Exemple 1.8

Soit A et $B \in D^{2 \times 2}$ deux matrices dans l'algèbre $(min, +)$ tel que :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

On a :

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} \min(3, 8) & \min(10, 1) \\ \min(1, 4) & \min(5, 5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

ET:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} \min(3 + 8, 10 + 4) & \min(3 + 1, 10 + 5) \\ \min(1 + 8, 5 + 4) & \min(1 + 1, 5 + 5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Remarque. Un sup-demi treillis complet P a nécessairement un plus grand élément noté $\top = \bigvee_{x \in P} x$, de même, un inf-demi treillis complet Q a toujours un plus petit élément noté

$$\perp = \bigwedge_{x \in Q} x$$

1.4. Applications définies sur les dioides

Dans cette section, on met en évidence certaines propriétés concernant les applications définies sur des ensembles ordonnés et plus précisément sur des dioides [6], [17].

Définition 1.18 (Homomorphisme)

Soient D et C deux diodes et $f : D \rightarrow C$, f est un homomorphisme si : $\forall a, b \in D$

$$\begin{aligned} f(a \oplus b) &= f(a) \oplus f(b) \text{ et } f(\varepsilon) = \varepsilon \\ f(a \otimes b) &= f(a) \otimes f(b) \text{ et } f(e) = e \end{aligned}$$

Définition 1.19 (isomorphisme)

$f : D \rightarrow C$ est un isomorphisme si $f^{-1} : C \rightarrow D$ existe et f et f^{-1} sont des homomorphismes. Un homomorphisme bijectif est appelé isomorphisme.

Définition 1.20 (Continuité)

Soient (D, \oplus, \otimes) et (C, \oplus, \otimes) deux dioides complets. Une application f de D dans C est dite semi-continue inférieurement (s.c.i. en abrégé), respectivement semi-continue supérieurement (s.c.s.) si, pour tout sous-ensemble $B \subset D$,

$$f\left(\bigwedge_{x \in B} x\right) = \bigwedge_{x \in B} f(x)$$

Respectivement :

$$f\left(\bigwedge_{x \in B} x\right) = \bigwedge_{x \in B} f(x)$$

Notons qu'une application s.c.i. est isotone puisque :

$$a \geq b \Leftrightarrow a = a \oplus b \Rightarrow f(a) = f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b) \geq f(b)$$

Pour une application s.c.s. est isotone puisque :

$$a \succcurlyeq b \Leftrightarrow b = a \wedge b \Rightarrow f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \preccurlyeq f(b)$$

Définition 1.21(Linéarité)

Une application f d'un dioïde $(D; \oplus, \otimes)$ dans un dioïde (C, \oplus, \otimes) est dite linéaire si elle satisfait les propriétés d'additivité et d'homogénéité :

$$\forall a, b \in D, \quad f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b) \quad (\text{additivité})$$

$$\forall \alpha, \beta \in D, \quad f(\alpha a) = \alpha f(a) \quad (\text{homogénéité})$$

La combinaison des deux conditions mentionnées est connue sous le nom de principe de superposition, soit :

$$\forall a, b \in D, \forall \alpha, \beta \in D, \quad f(\alpha a \oplus \beta b) = \alpha f(a) \oplus \beta f(b)$$

Définition 1.22 (Isotonie)

Une application f d'un dioïde (D, \oplus, \otimes) dans un dioïde (C, \oplus, \otimes) est dite isotone si :

$$\forall a, b \in D, \quad a \succcurlyeq b \Rightarrow f(a) \succcurlyeq f(b).$$

Autrement dit si pour tout $a, b \in D$, on a :

$$f(a \oplus b) \succcurlyeq f(a) \oplus f(b).$$

On dit communément qu'une fonction isotone "conserve l'ordre" (du reste, le terme anglais pour isotonie est "order preserving").

Remarque. La dernière équation est obtenue en considérant que :

$$a \oplus b \succcurlyeq a \quad \text{et} \quad a \oplus b \succcurlyeq b.$$

Puisque f conserve l'ordre, on obtient :

$$f(a \oplus b) \succcurlyeq f(a) \quad \text{et} \quad f(a \oplus b) \succcurlyeq f(b)$$

D'ou

$$f(a \oplus b) \succcurlyeq f(a) \oplus f(b).$$

Remarque. La composition de deux applications isotones demeure isotone.

Définition 1.23 (Antitonie)

Une application g d'un dioïde (D, \oplus, \otimes) dans un dioïde (C, \oplus, \otimes) est dite antitone si :

$$\forall a, b \in D, a \succcurlyeq b \Rightarrow g(a) \preccurlyeq g(b)$$

Remarque. Notons que le résultat de la composition de deux applications antitones est une application isotone. Une application est dite monotone si elle est isotone ou antitone.

1.5. Résolution de l'équation $x = ax \oplus b$, dans les dioïdes complets

Certaines équations définies dans des dioïdes complets admettent des solutions particulières extrêmes, c.-à-d. Plus petite ou plus grande que toute autre solution.

Des résultats généraux concernant l'étude d'équations au point fixe sur des dioïdes complets sont fournis dans [5]. Nous rappelons ici simplement le résultat concernant la résolution de l'équation implicite $x = ax \oplus b$ qu'on va utiliser par la suite.

Définition 1.25 (Étoile de Kleene)

Soit (D, \oplus, \otimes) un dioïde complet et $a \in D$, l'opérateur étoile est défini par :

$$a^* = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} a^i \quad (\text{avec } a^0 = e)$$

On notera également :

$$a^+ = a \oplus a^2 \oplus \dots \oplus a^n = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} a^i$$

Les égalités suivantes sont facilement vérifiées : $a^+ = aa^*$.

Cette définition s'applique également aux éléments des dioïdes matriciels.

L'opérateur $*$ est appelé couramment étoile de Kleene dans la littérature.

Théorème (Théorème de l'étoile) [9].

Soit $D^{n \times n}$ un dioïde complet, l'équation.

$$x = ax \oplus b$$

Admet $x = a^*b$ comme plus petite solution.

L'étoile de Kleene d'une matrice carrée $A \in D^{n \times n}$, notée A^* , est définie par :

$$A^* = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} A^k, \quad \text{avec } A^0 = I_n.$$

L'étoile de Kleene possède certaines propriétés dont les plus courantes sont données comme suit :

Soit (D, \oplus, \otimes) un dioïde complet $\forall a, b \in D$:

$$a^+ \preceq a^* \tag{1.1}$$

$$(a^*)^* = a^* \tag{1.2}$$

$$(a^+)^* = a^* \tag{1.3}$$

$$a(ba)^* = (ab)^*a \tag{1.4}$$

$$(a \oplus b)^* = (a^*b)^*a^* = a^*(ba^*)^* = b^*(ab^*)^* = (b^*a)^*b \tag{1.5}$$

$$a^*a^* = a^* \tag{1.6}$$

$$(a^*)^*a = a^+ \tag{1.7}$$

$$(a^+)^+ = a^+ \tag{1.8}$$

$$(ab^*)^+ = a(a \oplus b)^* \tag{1.9}$$

$$(ab^*)^* = e \oplus a(a \oplus b)^* \tag{1.10}$$

$$(a)^* \preceq b^* \Rightarrow (a) \preceq b \tag{1.11}$$

Exemple 1.9

Considérons dans le dioïde \mathbb{R}_{\max} le système suivant :

$$x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}}_A x \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \varepsilon \end{pmatrix}}_B$$

Le calcul de A^* donne :

$$A^* = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & 6 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & 6 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix}$$

Ce qui donne :

$$x = A^*B = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ e \end{pmatrix}$$

1.6. Théorie de la résiduation dans les dioïdes

La théorie de la résiduation [5], [6] permet de définir des "pseudo-inverses" pour des applications isotones définies sur des ensembles ordonnés (comme les dioïdes par exemple). Plus précisément, la théorie de la résiduation permet d'établir, lorsqu'elle existe, la plus grande solution de l'inéquation $f(x) \leq b$ avec $b \in C$. Cet élément lorsqu'il existe est noté $f^\#(b)$ et $f^\#$ est appelée application résiduée de f [12], [18].

De même, f est dualement résiduable si $\forall b \in C$, l'inéquation $f(x) \geq b$ admet une plus petite solution dans D . Autrement dit, la borne inférieure du sous ensemble $\{x \in D / f(x) \geq b\}$, notée $f^b(b)$, existe et appartient à ce sous ensemble. L'application f^b est appelée la résiduée duale de f .

1.6.1. Résolution des équations $ax \leq b$ et $xa \leq b$

Dans [12] sont considérées les applications suivantes, Soit L_a (produit à gauche) et R_a (produit à droite), les applications définies sur un dioïde D complet comme suit :

$$L_a : D \rightarrow D : x \rightarrow a \otimes x \quad (\text{Produit à gauche par } a),$$

$$R_a : D \rightarrow D : x \rightarrow x \otimes a \quad (\text{Produit à droite par } a)$$

Le fait que le dioïde D soit complet implique que les applications L_a et R_a sont semi-continues inférieurement (distributivité de produit à gauche et à droite sur les sommes infinies). En outre, comme ε est absorbant pour le produit \otimes , alors $L_a(\varepsilon) = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$ et $R_a(\varepsilon) = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$. Autrement dit, L_a et R_a sont isotones donc résiduable, et leurs applications résiduées sont notées :

$$L_a^\#(x) = a \oslash x \quad (\text{Résiduée à gauche par } a).$$

$$R_a^\#(x) = x \oslash a \quad (\text{Résiduée à droite par } a).$$

Ainsi, $L_a^\#(b) = a \bowtie b$ et $R_a^\#(b) = b \not\bowtie a$ sont les plus grandes solutions des inégalités :

$$a x \leq b \quad \text{Et} \quad x a \leq b.$$

Lorsque D est un dioïde commutatif, $L_a = R_a$ cela implique que $L_a^\# = R_a^\#$.

Les applications L_a et R_a possèdent les propriétés suivantes, qui sont vraies pour tout dioïde complet (D, \oplus, \otimes) , avec $a, b, x \in D$.

residuation à gauche :

$$\begin{aligned} a \bowtie \top &= \top \\ a(a \bowtie x) &\preceq x \\ a \bowtie (ax) &\succeq x \\ a(a \bowtie (ax)) &= ax \\ a \bowtie (a(a \bowtie x)) &= a \bowtie x \\ a \bowtie (x \wedge y) &= a \bowtie x \wedge a \bowtie y \\ a \bowtie (x \oplus y) &\succeq (a \bowtie x) \oplus (a \bowtie y) \\ (a \wedge b) \bowtie x &\succeq (a \bowtie x) \oplus (b \bowtie x) \\ (a \oplus b) \bowtie x &= a \bowtie x \wedge b \bowtie x \\ (ab) \bowtie x &= b \bowtie (a \bowtie x) \\ (a \bowtie x)b &\preceq a \bowtie (xb) \\ b(a \bowtie x) &\preceq (a \not\bowtie b) \bowtie x \\ a \bowtie b &= (a \not\bowtie b)^* \end{aligned}$$

residuation à droite :

$$\begin{aligned} \top \not\bowtie a &= \top \\ (x \not\bowtie a)a &\preceq x \\ (xa) \not\bowtie a &\succeq x \\ ((xa) \not\bowtie a)a &= xa \\ ((x \not\bowtie a)a) \not\bowtie a &= x \not\bowtie a \\ (x \wedge y) \not\bowtie a &= x \not\bowtie a \wedge y \not\bowtie a \\ (x \oplus y) \not\bowtie a &\succeq (x \not\bowtie a) \oplus (y \not\bowtie a) \\ x \not\bowtie (a \wedge b) &\succeq (x \not\bowtie a) \oplus (x \not\bowtie b) \\ x \not\bowtie (a \oplus b) &= x \not\bowtie a \wedge x \not\bowtie b \\ x \not\bowtie (ba) &= (x \not\bowtie a) \not\bowtie b \\ b(x \not\bowtie a) &\preceq (bx) \not\bowtie a \\ (x \not\bowtie a)b &\preceq x \not\bowtie (b \bowtie a) \\ a \not\bowtie b &= (a \not\bowtie b)^* \end{aligned}$$

Les preuves sont données dans [6], [9].

1.6.2. Résolutions Dans Le Cas Matriciel

Il s'agit d'étendre les applications résiduées de l'addition et de la multiplication au cas des dioïdes matriciels, sachant que les résultats décrits dans la partie précédente ont été développés sur des dioïdes généraux (scalaires).

Concernant le cas matriciel, définissons comme suit les applications produit à gauche $L_A : D^{n \times p} \rightarrow D^{m \times p}$ et produit à droite $R_{A'} : D^{p \times n} \rightarrow D^{p \times m}$ sur les dioïdes de matrices à coefficients dans le dioïde complet D :

$$L_A : X \rightarrow A \otimes X$$

$$R_{A'} : X \rightarrow X \otimes A'$$

Dans ces applications, $A \in D^{m \times n}$ et $A' \in D^{n \times m}$.

Les plus grandes solutions des inéquations $AX \leq B$ et $XA' \leq B'$ pour lesquelles $B \in D^{m \times p}$ et $B' \in D^{p \times m}$, sont respectivement la résiduée du produit à gauche notée $L_A^\#(B) = A \bowtie B$ et la résiduée du produit à droite notée $R_{A'}^\#(B') = B' \not\bowtie A'$. Les valeurs de ces matrices sont alors données comme suit :

$$(A \bowtie B)_{ij} = \bigwedge_{l=1}^n A_{li} \bowtie B_{lj} \quad \text{Pour } i, j = 1 \dots, n$$

Le théorème suivant exprime les applications résiduées de L_A et $R_{A'}$ dans le cas où les matrices considérées ne sont pas nécessairement de dimension carrée. Soient les applications :

$$\begin{array}{l} L_A : D^{p \times q} \rightarrow D^{n \times q} \\ X \rightarrow AX \quad (A \in D^{n \times p}) \end{array} \quad \text{Et} \quad \begin{array}{l} R_{A'} : D^{q \times p} \rightarrow D^{q \times n} \\ X \rightarrow XA' \quad (A' \in D^{p \times n}) \end{array}$$

Les inéquations $AX \leq B$ et $XA' \leq B'$ admettent $L_A^\#(B)$ et $R_{A'}^\#(B')$ comme plus grandes solutions respectives. Les expressions de ces matrices s'obtiennent via le théorème suivant.

$$\begin{aligned} (L_A^\#(B))_{ij} &= (A \bowtie B)_{ij} = \bigwedge_{k=1}^m A_{ki} \bowtie B_{kj} & i = 1 \dots p, j = 1 \dots q \\ (R_{A'}^\#(B'))_{ij} &= (B' \not\bowtie A')_{ij} = \bigwedge_{l=1}^m B'_{il} \not\bowtie A'_{jl} & i = 1 \dots q, j = \dots P \end{aligned}$$

Se référer à [5] pour la preuve de ce théorème.

Exemple 1.10

Soient :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ \varepsilon & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{Et} \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$A \bowtie B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.7. Conclusion:

Dans ce chapitre, on a présenté les définitions et les outils mathématiques qu'on utilisera dans la suite de ce travail. Nous avons abordé la structure algébrique des dioïdes et la théorie de la résiduation, cette dernière permet de donner l'inverse pour les applications isotones définies sur l'ensemble ordonné.

La théorie des dioïdes est intéressante, car elle permet de représenter de manière linéaire les phénomènes de synchronisation, très présents dans les systèmes de production, le chapitre suivant décrit comment appliquer cette théorie à l'étude de systèmes dynamiques à événements discrets. En particulier, nous chercherons à représenter des systèmes sous forme graphique, basés sur le formalisme des réseaux de Petri. Ensuite, nous verrons comment ces graphes peuvent être représentés dans des dioïdes.

Chapitre 2

*Comportement linéaire des
GET dans les dioïdes*

2.1. Introduction

On s'intéressera dans ce chapitre à la modélisation des systèmes à évènement discret (SED) par les graphes d'évènements temporisés (GET) et leurs mises en équation avec l'algèbre des dioïdes.

Les réseaux de Petri (RdP) [19], [20] sont des modèles de représentation souvent utilisés dans le domaine des SED [1] [21], dans ce chapitre, on s'intéresse à une classe ces systèmes, mettant en jeu des phénomènes de synchronisation qui peuvent être modélisés de façon linéaire grâce à l'algèbre des dioïdes. Avec les outils algébriques qu'on a présentés précédemment.

On présentera Une classe de réseaux de Petri qui est : les graphes d'évènements temporisé, où le temps est intégré dans la structure du réseau. Cette classe présente deux mises en équations des GET qui conduisent toutes les deux à des modèles linéaires qui peuvent être décrits par des équations récurrentes $(max, +)$ linéaires qu'on appelle dateurs, ou $(min, +)$ linéaires qu'on appelle compteurs. Et on exposera également les transformées en γ et δ qui permettent d'exploiter les équations aux compteurs et dateurs [5] [6].

Puis nous introduisons le dioïde $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ dans lequel les trajectoires associées aux évènements sont manipulés comme des séries formelles [7] [22]. L'intérêt de cette étude réside alors dans le fait que l'on peut représenter ces systèmes par leur fonction de transfert.

2.2. Système à évènement discret

Un système à évènements discrets [19] [23] est un système dont l'espace d'état est discret. Les transitions d'état sont provoquées par l'occurrence d'évènements. L'ensemble des évènements est également discret. Un évènement est validé si l'ensemble des conditions nécessaires à son occurrence sont vérifiées.

Pour prendre en compte le temps, des temporisations peuvent être associées aux évènements, une temporisation est un laps de temps qui doit être écoulé avant qu'un évènement validé puisse survenir.

Plusieurs objets mathématiques ont été proposés pour modéliser les systèmes à évènements discrets. Les réseaux de Petri constituent un de ces formalismes [1].

2.3. Réseaux de Pétri

Les Réseaux de Pétri (RdP) constituent un formalisme graphique propre à la modélisation des Systèmes à Evénements Discrets (SED) introduit en 1962 par Carl Adam Pétri. Ils sont particulièrement adaptés à l'étude des processus complexes mettant en jeu des propriétés de synchronisme et de délais et de partage de ressources. Leur support mathématique a permis en outre d'établir de nombreux résultats analytiques [19] [20] [23].

Pour l'étude des SED dans l'algèbre des dioïdes, les RdP sont souvent utilisés comme un outil de modélisation intermédiaire. La démarche consiste en effet à modéliser le système étudié en premier lieu par un réseau de Pétri, puis à établir, à partir du graphe obtenu, les équations dans le dioïde propre à l'analyse de ce système [6].

2.3.1 Définition et notation

Définition 2.1 (réseau de Pétri)

Un réseau de Pétri est un graphe biparti constitué de deux types de sommets : *places* (représentées par des cercles) et *transitions* (représentées par des barres). Des *arcs* orientés relient certaines places à certaines transitions, ou certaines transitions à certaines places. A chaque arc on associe un *poids* (entier positif). Le nombre de places est fini, et non nul. Chaque place, peut contenir un ou plusieurs *jetons* (représentés par des points) qui modélisent la dynamique du système. A chaque place on associe une *temporisation*. Cette dernière correspond au temps de séjour des jetons dans une place [19].

Définition 2.2 (définition formelle)

Un réseau de Pétri est un quadruplet $R = (P; T; Pré; Post)$, où

- $P (P_1 \dots P_n)$ est un ensemble non vide et fini dont les éléments sont appelés places ;
- $T (T_1 \dots T_n)$ est un ensemble non vide et fini dont les éléments sont appelés transitions ;
- $Pré : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ une application d'incidence avant : $Pré (P_i; t)$ contient la valeur entière n associée à l'arc allant de P_i à t .
- $Post : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ une application d'incidence arrière : $Post (P_i; t)$ contient la valeur entière k associée à l'arc allant de t à P_i .

Un arc relie une place P_i à une transition t si et seulement si $Pré(p, t) \neq 0$. De même, un arc relie une transition t à une place P_i si et seulement si $Post(p, t) \neq 0$.

La grandeur w_{ij}^- (respectivement w_{ij}^+) représente le poids de l'arc qui relie une transition t_j à une place en amont P_i (respectivement une transition t_j à une place en aval P_i).

La matrice d'incidence d'un RdP est défini comme suit :

$$W = W^- - W^+$$

La matrice W^- est la matrice d'incidence avant tel que $W^- = [w^-]$, et W^+ est la matrice d'incidence arrière tel que $W^+ = [w^+]$

Exemple 2.1

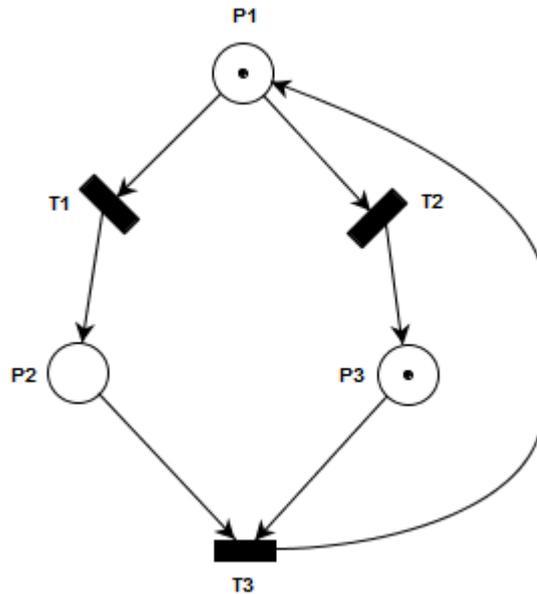


Figure 2.1 : exemple d'un réseau de pétri

Les matrice W^+ et W^- sont comme suite :

$$W^+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad W^- \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice d'incidence W est :

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Définition 2.3 (marquage)

Dans un RdP chaque place contient un nombre entier positif ou nul de marquages, Les places sont “marquées” par des “jetons” (points noirs) qui vont “circuler” dans les places selon

des règles bien définies. Le marquage M définit l'état du système décrit par le réseau à un instant donné.

Un RDP marqué est déterminé par le couple $N = (R, M_0)$

R : est un réseau de pétri

M_0 : est le marquage initial

$M_0(m_i)$: C'est un vecteur colonne de dimension n (le nombre de place dans le réseau).

La $j^{\text{ème}}$ composante de ce vecteur représente le nombre de marque dans la $j^{\text{ème}}$ place du réseau.

Le marquage M évolue selon la règle de fonctionnement suivante :

1. une transition est validée s'il y a au moins un jeton dans chacune des places en amont,
2. une transition validée peut être tirée,
3. le tir d'une transition transforme le marquage : un jeton est prélevé dans chacune des places en amont, et un jeton est ajouté dans chacune des places en aval.

Exemple 2.2.

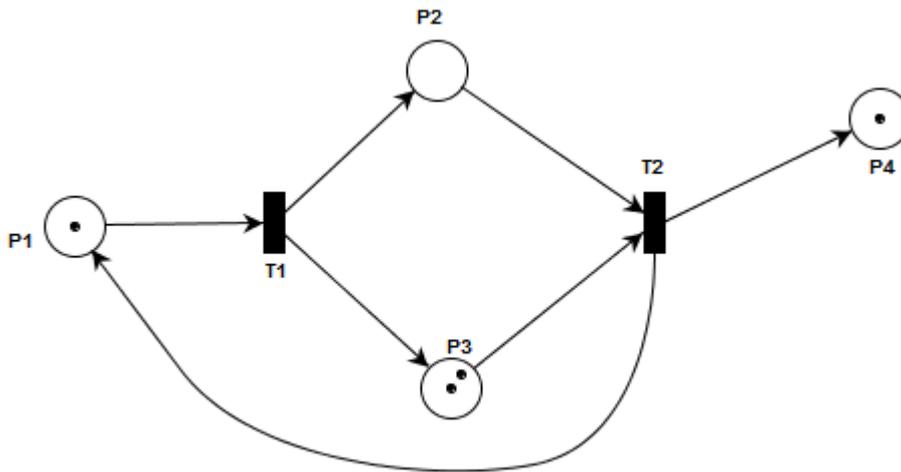


Figure 2.2 : un réseau de Petri et son marquage initiale

$$M_0 = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Définition 2.4 (transition franchissable)

On dit qu'une transition est tirable (franchissable) si toute place d'entrée p_i de t_i contient un nombre de jetons au moins égal au poids attachée à l'arc reliant p_i à t_i . Dans le cas d'un RdP ordinaire, il suffit que toutes les places d'entrée d'une transition contiennent au moins un jeton pour qu'elle soit franchissable.

Une transition franchissable peut être franchie ou non. Franchir une transition t_i consiste à :

- retirer w_{ij}^- jetons de toute place $p_i \in {}^\circ t_i$.
- ajouter w_{ij}^+ jetons dans toute place $p_i \in t_i^\circ$.

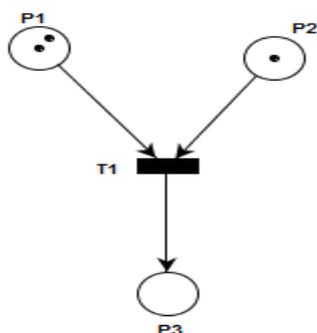
Avec :

${}^\circ t$ L'ensemble des places d'entrée de la transition t .

t° L'ensemble des places de sortie de la transition t .

Exemple 2.3.

La figure 2.3. (a) représente un réseau de Petri élémentaire dans lequel la transition, notée t_1 , est validée. Le tir de t_1 provoque une modification du marquage : un jeton est prélevé dans chacune des places en amont, notées p_1 et p_2 et un jeton est ajouté dans la place en aval, notée p_3 . La figure 2.3. (b) représente le réseau de Petri suite au tir de la transition t_1 . On note que ce réseau de Petri n'est pas vivant car le marquage atteint ne permet plus aucun tir de la transition t_1 .



Suite au franchissement de t_1

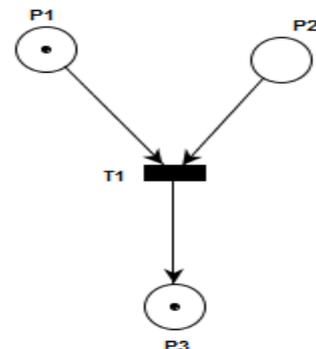


Figure 2.3. (a) : t_1 est validée

Figure 2.3. (b) : marquage

2.3.1.1 Ensemble des marquages accessibles

Soit $N = (R, M_0)$ un réseau de Petri. L'ensemble des marquages accessibles $A(R, M_0)$ d'un réseau de Petri marqué est l'ensemble des marquages que l'on peut atteindre à partir du marquage initial M_0 par une séquence de franchissement σ , c.-à-d :

$$A(R ; M_0) = \{M_i ; \exists t M_0 \xrightarrow{\sigma} M_i\}.$$

Lorsque cet ensemble est fini, on peut le représenter sous la forme d'un graphe. Les sommets de ce graphe correspondent aux marquages accessibles de $A(R; M_0)$. Un arc orienté relie deux sommets M_i et M_j s'il existe une transition t ou une séquence σ franchissable permettant de passer d'un marquage à un autre :

$$M_i \xrightarrow{\sigma} M_j.$$

Exemple 2.4.

Le RdP représente un système, où 2 tâches requièrent une même ressource renouvelable.

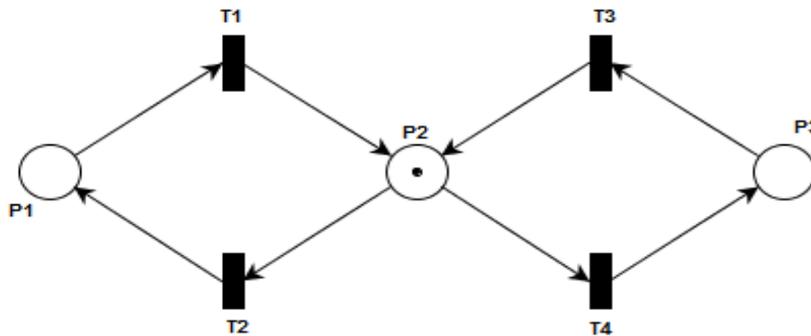


Figure 2.4 : RdP modélisant le comportement d'un système à ressource partagée.

La figure (2.5) représente le graphe des marquages accessibles pour le réseau de Petri de la figure (2.4) avec un marquage initial $M_0 = (0,1,0)$:

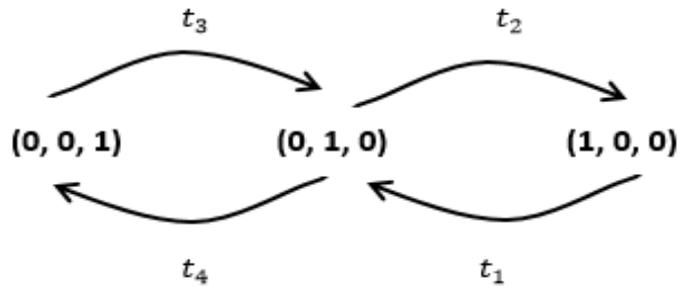


Figure 2.5 : Graphe des marquages atteignables du réseau de Petri de la figure 2.4

2.3.1.2 Équation fondamentale

Une séquence de franchissement à partir d'un marquage M_0 est représentée par une suite de transitions.

L'équation fondamentale qui caractérise l'évolution dynamique d'un RdP est :

$$M_f = M_0 + W.S$$

Où :

M_f : Est le marquage que l'on atteint à partir de M_0 après la séquence de franchissement

σ réalisable $M_0 \xrightarrow{\sigma} M_f$

S : est un vecteur dont la dimension est égale au nombre de transitions du réseau de Petri et dont la composante numérotée j correspond au nombre de franchissements de la transition t_j dans cette séquence.

2.3.2 Propriétés d'un RdP

Certaines propriétés des RdP dépendent de leurs marquages initiaux, Ainsi le graphe des marquages accessibles d'un RdP fournit des indications essentielles sur ses propriétés, et donc sur le fonctionnement du système qu'il représente.

Définition 2.5 (Accessibilité)

L'accessibilité consiste à savoir si l'on peut atteindre un marquage M_f à partir d'un marquage initial M_0 .

On dit qu'un marquage M_f est accessible (ou atteignable) à partir de M_0 s'il existe une séquence de franchissement σ telle que $M_0 \xrightarrow{\sigma} M_f$.

Définition 2.6 (bornitude)

Une place p_i est dite bornée pour un marquage initial M_0 si pour tout marquage accessible à partir de M_0 le nombre de marque dans p_i reste borné.

Un RdP est dit borné si toutes ses places sont bornées.

Remarque. Borné: est une propriété dépendant du marquage initial.

Définition 2.7 (vivacité)

Un RdP est dit vivant pour un marquage initial M_0 si, pour tout marquage M atteignable depuis M_0 et pour toute transition t_i , il existe une séquence de franchissement σ qui inclut la transition t_i .

Cette propriété permet de déduire si le système comporte un état de blocage ou pas.

Définition 2.8 (blocage)

Un marquage atteignable M d'un RdP marqué M_0 est une situation de blocage si pour toute transition $t \in T$, t n'est pas franchissable pour M .

Un RdP est sans blocage si aucun de ses marquages atteignables n'est une situation de blocage.

2.3.3 Principales classes d'un RdP

On s'intéresse ici à deux sous-classes bien connues de réseaux de Petri :

Définition 2.9 (Graphe d'évènements)

Un graphe d'évènements est un réseau de Petri tel que chaque place a exactement un arc entrant et un arc sortant, autrement dit chaque place a exactement une transition en amont et une transition en aval :

$$|\circ p| = |p^\circ| = 1 ; \forall p \in P$$

Avec :

$\circ p$: L'ensemble des transitions d'entrée de la place p .

p° : L'ensemble des transitions de sortie de la place p .

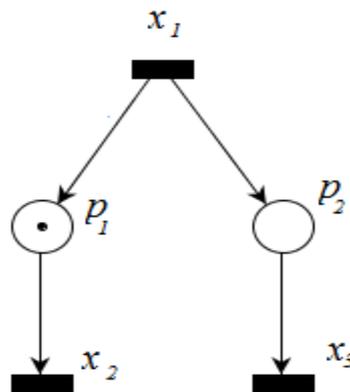


Figure 2.6 exemple d'un graphe d'évènement.

Définition 2.10 (Graphes d'états)

Un graphe d'états est un réseau de Petri pour lequel chaque transition a exactement un arc entrant et un arc sortant, autrement dit chaque transition a exactement une place en amont et une place en aval:

$$|\circ t| = |t^\circ| = 1 ; \forall t \in T$$

Avec:

$\circ t$: L'ensemble des places d'entrée de la transition t .

t° : L'ensemble des places de sortie de la transition t .

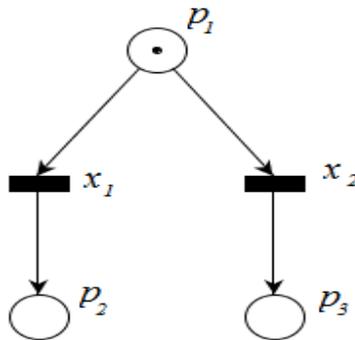


Figure 2.7 – exemple de graphe d'état.

2.4. Graphe d'évènement temporisé

Définition 2.11 (Graphe d'Événements Temporisés)

Les Graphes d'Événements Temporisés [9] constituent une sous-classe des réseaux de Petri pour laquelle toute place ne possède qu'une transition en amont et une en aval. Une transition d'un GET correspond alors à un événement, et le tir de celle-ci représente l'occurrence de cet événement.

2.4.1 Temporisisation et fonctionnement d'un graphe d'évènements

L'introduction d'un nouveau paramètre qui est le temps sur les graphes d'évènements va nous permettre de définir les graphes d'évènements temporisés [8] [9].

On temporisise un graphe d'évènements en associant à chaque transition et/ou à chaque place les durées suivantes :

- Au niveau des transitions : on définit le temps de tir d'une transition comme l'intervalle de temps entre le début et la fin du tir de la transition.
- Au niveau des places : le temps de séjour d'une place est le temps qu'un jeton doit passer dans la place avant de devenir disponible pour le tir des transitions placées en aval.

Exemple 2.5

Le graphe d'évènements temporisé de la figure ci-dessous peut représenter une cellule de production fonctionnant comme suit : une machine M capable d'usiner deux pièces à la fois

(les 2 jetons dans la place P₂ signifient que les 2 ressources d'usinages de la machine sont libres). Les pièces sont amenées à un stock amont P₁ de capacité infinie, l'usinage d'une pièce est représenté par la présence d'un jeton dans la place P₃, le traitement d'une pièce prend au moins 3 unités de temps. A l'issue du traitement, la pièce finie est déposée dans un stock aval P₄ de capacité infinie et la machine ayant traité la pièce redevient disponible (1 jeton revient dans P₂), en attendant une nouvelle pièce.

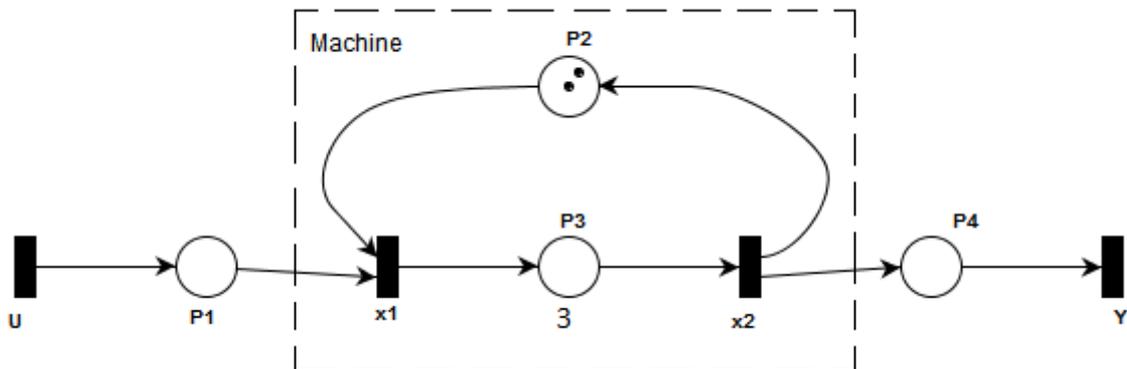


Figure 2.8 : Modèle GET d'une machine.

Remarque. Notons qu'au plus deux pièces peuvent être simultanément traitées, puisque le nombre de jetons dans un circuit est constant. Sur cet exemple, le régime permanent est périodique : deux pièces sont traitées toutes les 3 unités de temps, ce qui conduit à un taux de production de 2/3.

2.4.2 Fonctionnement au plus tôt d'un GET

On appelle fonctionnement au plus tôt d'un GET, le mode de fonctionnement suivant :

Toutes les transitions sont franchies dès que possible. Les jetons qui arrivent dans une place, pourront contribuer au franchissement de la transition située en aval dès que le temps de séjour minimum se termine.

Définition 2.12

Le fonctionnement au plus tôt d'un réseau de Petri temporisé obéit aux points suivants :

- Une transition t est validée s'il y a au moins un jeton disponible dans chacune des places située en amont de t .
- Une transition t est tirée dès qu'elle est validée. On note τ l'instant où le tir d'une transition t a lieu. Ce tir transforme le marquage : un jeton est prélevé dans chacune des places située en amont de t , et simultanément un jeton est ajouté dans chacune des places située en aval de t .

2.5. Modélisations des systèmes

Les graphes d'évènements temporisés sont utilisés comme outil de modélisation intermédiaire. Si cette modélisation graphique constitue une première étape, la seconde étape est la mise en équation du modèle graphique, c.-à-d. la définition d'une représentation analytique du système. Le comportement d'un graphe d'évènements temporisés peut s'exprimer sous forme d'équations linéaires dans les dioides \mathbb{R}_{min} ou \mathbb{R}_{max} , ces équations représentent l'évolution du graphe dans les domaines temporel et évènementiel [17].

Il y a deux manières pour effectuer cette modélisation, la première avec l'utilisation des équations où la variable est le nombre de franchissement des transitions à la date t , c'est-à-dire, on associe à chaque transition un compteur pour compter le nombre des fois que cette transition a été franchie. Une deuxième manière de modélisation est d'associer à chacune des transitions une fonction dateur qui enregistre la date du franchissement des transitions [5] [6].

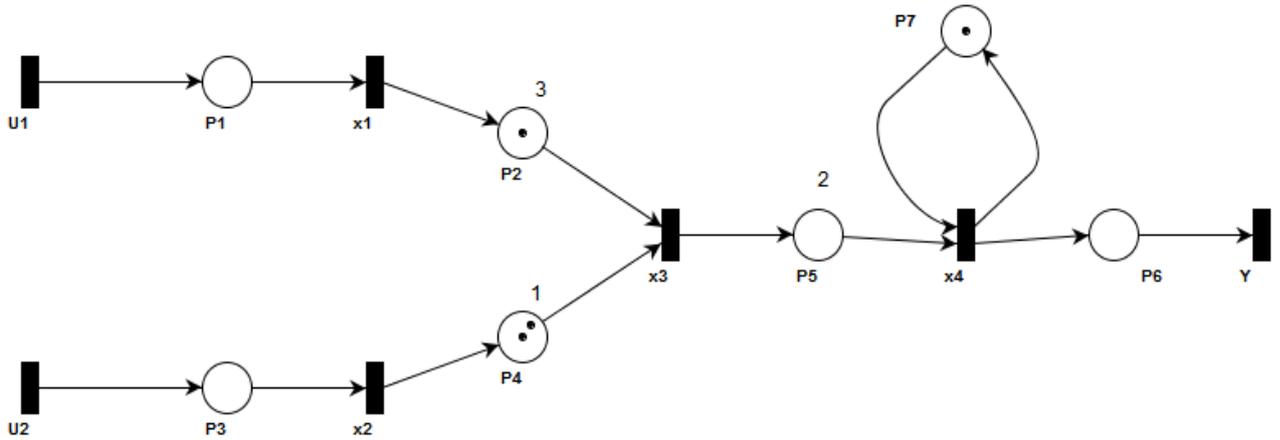


Figure 2.9 : Exemple de graphe d'événements temporisés.

2.5.1 Dateurs, domaine évènementiel

La représentation en *dateurs*, amène à manipuler des variables discrètes qui correspondent aux dates d'activation des transitions du **GET**. Plus précisément, on associe à l'événement x la variable discrète $x(\cdot)$ pour laquelle l'itéré $x(k)$ désigne la date de la $k + 1^{\text{ème}}$ occurrence de l'événement, (en effet, on considère que la date de la première occurrence de x est $x(0)$). Il est ensuite possible d'exprimer les variables dateurs les unes en fonction des autres.

$$x(k) \geq \max x(k - m_0) + \tau$$

Avec :

m_0 : Le nombre de marquage.

τ : La durée de temporisation.

De cette façon, on peut mettre en équations le GET de la figure (2.9) comme suite :

$$x_1(k) \geq \max\{u_1(k)\}$$

$$x_2(k) \geq \max\{u_2(k)\}$$

$$x_3(k) \geq \max\{x_1(k - 1) + 3, x_2(k - 2) + 1\}$$

$$x_4(k) \geq \max\{x_3(k) + 2, x_4(t - 1)\}$$

$$y(k) \geq \max\{x_4(t)\}$$

La représentation obtenue n'est pas linéaire, elle met en jeu l'opérateur « max », la présence de cette opérateur se justifie par le fait qu'un dateur dépend de la date d'activation des transition amont et les jetons présents dans les places amont, l'égalité du « max » de ces deux expressions résulte des hypothèse de fonctionnement au plus tôt (dès qu'une transition peut être franchie, elle est franchie).

Dans l'algèbre ($max, +$):

$$a \oplus b = \max\{a, b\} \quad \text{et} \quad a \otimes b = a + b$$

$$a \oplus b = b \quad \text{ssi} \quad b \geq a$$

$$\varepsilon = -\infty \quad \text{et} \quad e = 0$$

La solution au plus tôt de ces équations est donnée comme suit :

$$x_1(k) = e \otimes u_1(k)$$

$$x_2(k) = e \otimes u_2(k)$$

$$x_3(k) = 3 \otimes x_1(k-1) \oplus 1 \otimes x_2(k-2)$$

$$x_4(k) = 2 \otimes x_3(k) \oplus e \otimes x_1(k-1)$$

$$y(k) = e \otimes x_4(k)$$

- **La forme implicite**

$$x(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \end{bmatrix} x(k) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} x(k-1) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} x(k-2) \oplus \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad e] x(k)$$

La plus petite solution de cette inéquation est donné par :

$$x(k) = A_0^* A_1 x(k-1) \oplus A_0^* A_2 x(k-2) \oplus A_0^* B u(k)$$

Ou bien :

$$\overline{A}_2 = A_0^* A_2 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & e \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

$$\overline{B} = A_0^* \otimes B = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & e \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

• La forme explicite

$$x(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 5 & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} x(k-1) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} x(k-2) \oplus \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} u(k).$$

• La forme d'état

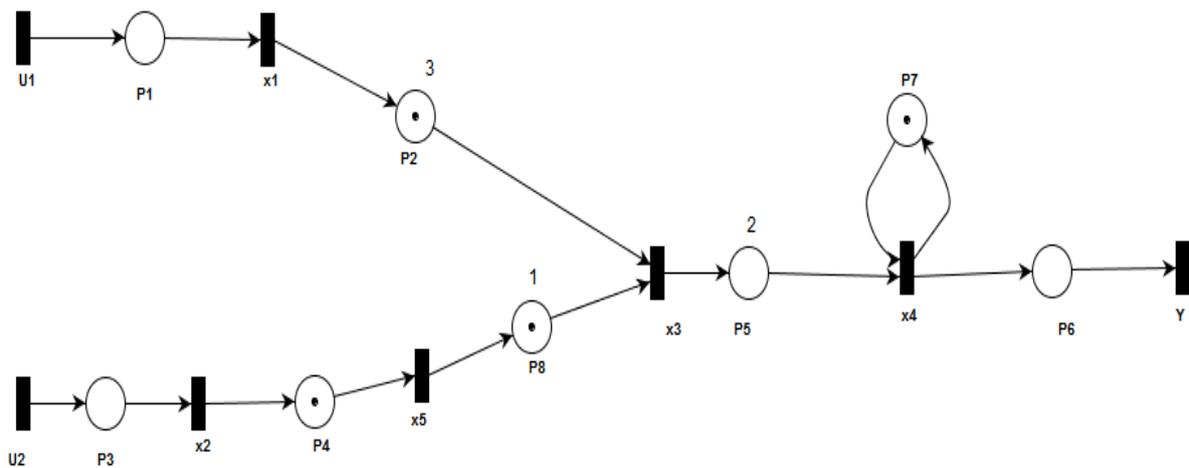


Figure 2.10 : Extension évènementielle.

Pour avoir la forme d'état, nous avons étendu le graphe d'événements temporisés initial (figure 2.9) pour un nouveau graphe équivalent avec des marquages égaux à 1 ou 0 (figure 2.10). Et on obtient le modèle suivant :

$$x(k) = Ax(k - 1) \oplus Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

On aura donc :

$$x_5(k) = x_2(k - 1) \Rightarrow x_5(k - 1) = x_2(k - 2)$$

Ce qui donne le modèle d'état comme suite:

$$x(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ 5 & \varepsilon & \varepsilon & e & 3 \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} x(k-1) \oplus \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} u(k).$$

$$y(k) = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad e] x(k).$$

2.5.2 Compteurs, domaine temporel

De manière duale, le comportement du système précédent peut se représenter à l'aide d'équations dynamiques en *compteur*. C'est à dire qu'une fonction compteur est associée à chacune des transitions, elle sera chargée de compter le nombre de franchissement des transitions à une date t (on se place dans le domaine temporel).

$$\theta(t) \leq \min x(t - \tau) + m_0$$

On peut mettre en équations le GET de la figure (2.7) comme suite :

$$\theta_1(t) \leq \min\{u_1(t)\}$$

$$\theta_2(t) \leq \min\{u_2(t)\}$$

$$\theta_3(t) \leq \min\{x_1(t - 3) + 1, x_2(t - 1) + 2\}$$

$$\theta_4(t) \leq \min\{x_3(t - 2), x_4(t) + 1\}$$

$$y(t) \leq \min\{x_4(t)\}$$

Dans l'algèbre $(\min, +)$:

$$a \oplus b = \min\{a, b\} \quad \text{et} \quad a \otimes b = a + b$$

$$a \oplus b = a \quad \text{ssi} \quad a \preccurlyeq b$$

$$\varepsilon = +\infty \quad \text{et} \quad e = 0$$

La solution au plus tôt de ces équations est donnée comme suit :

$$\theta_1(t) = e \otimes u_1(t)$$

$$\theta_2(t) = e \otimes u_2(t)$$

$$\theta_3(t) = 1 \otimes x_1(t-3) \oplus 2 \otimes x_2(t-1)$$

$$\theta_4(t) = e \otimes x_3(t-2) \oplus 1 \otimes x_4(t)$$

$$y(t) = e \otimes x_4(t)$$

- **La forme implicite**

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \theta(t) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \theta(t-1) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix} \theta(t-2) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \theta(t-3) \oplus \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad e] \theta(t).$$

La plus petite solution de cette inéquation est donné par :

$$\theta(t) = A_0^* A_1 \theta(t-1) \oplus A_0^* A_2 \theta(t-2) \oplus A_0^* A_3 \theta(t-3) \oplus A_0^* B u(t).$$

Ou bien :

$$\theta(t) = \overline{A}_1 \theta(t-1) \oplus \overline{A}_2 \theta(t-2) \oplus \overline{A}_3 \theta(t-3) \oplus \overline{B} u(t).$$

Avec :

$$A_0^* = I \oplus A_0 \oplus A_0^2 \oplus A_0^3$$

Calcul de A_0^* :

$$A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} ; \quad A_0^2 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} .$$

$$A_0^* = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} .$$

Calcul de $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ et \overline{B} :

$$\overline{A_1} = A_0^* \otimes A_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} ; \quad \overline{A_2} = A_0^* \otimes A_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} .$$

$$\overline{A_3} = A_0^* \otimes A_3 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} ; \quad \overline{B} = A_0^* \otimes B = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} .$$

• **La forme explicite**

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \theta(t-1) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \theta(t-2) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \theta(t-3) \oplus \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad e] \theta(k).$$

- La forme d'état

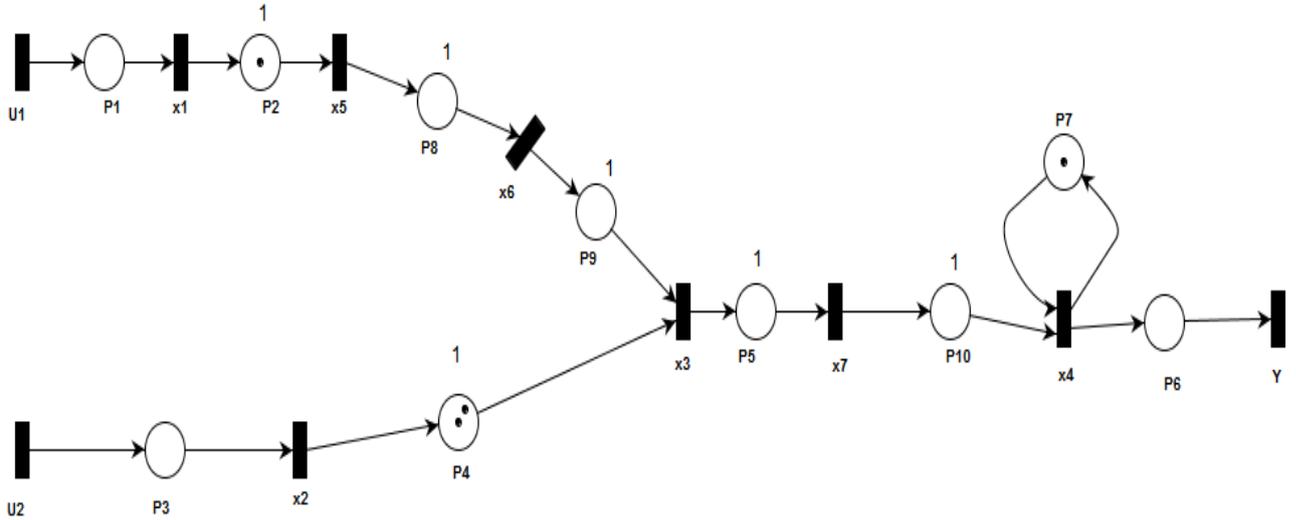


Figure 2.11 extension temporelle.

Pour avoir la forme d'état, nous avons étendu le graphe d'évènements temporisés initial (figure 2.9) pour un nouveau graphe équivalent avec des temporisations égales à 1 ou 0 (figure 2.11). Et on obtient le modèle suivant :

$$\theta(t) = A\theta(t - 1) \oplus Bu(t)$$

$$y(t) = C\theta(t)$$

On aura donc les équations tel que:

$$\theta_5(t) = 1 \otimes x_1(t - 1) \Rightarrow \theta_5(t - 1) = 1 \otimes x_1(t - 2).$$

$$\theta_6(t) = x_5(t - 1) \Rightarrow \theta_6(t - 1) = x_5(t - 2) = 1 \otimes x_1(t - 1).$$

$$\theta_7(t) = x_3(t - 1) \Rightarrow \theta_7(t - 1) = x_3(t - 2).$$

Ce qui donne le modèle d'état comme suite:

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \theta_3(t) \\ \theta_4(t) \\ \theta_5(t) \\ \theta_6(t) \\ \theta_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \theta(t-1) \oplus \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad e] \theta(t)$$

2.5.3 Modèle exprimé sous forme de séries formelles

Les techniques de transformation jouent un rôle important dans l'étude des systèmes linéaires invariants. C'est le cas des transformées de Fourier ou Laplace pour les systèmes en temps continu de la transformée en z pour les systèmes en temps discret. Les séries formelles γ dans \mathbb{R}_{max} (dateur) et δ dans le dioïde \mathbb{R}_{min} (compteur) permettent de modéliser les GET, c'est deux variable γ et δ commutative a exposant dans \mathbb{R} aboutisse à une représentation bidimensionnelle dans le dioïde $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$, voir [1], [21] et [22].

2.5.3.1 Transformé en γ

La transformée en γ joue un rôle analogue à la transformée en z dans la théorie des systèmes échantillonnés classiques. Elle permet d'écrire les convolutions en des produits de séries formelles.

Définitions 2.13

Pour un dateur $\{x(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, la transformée en γ , notée $x(\gamma)$, est définie comme la série formelle :

$$x(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x(k) \gamma^k$$

Supposons deux dateurs reliés par l'égalité $x_1(k) = x_2(k - n_0)$, ce qui correspond à deux transitions séparées par une place contenant n_0 jetons. La transformée en γ de chacun des dateurs est :

$$\begin{aligned} x_1(\gamma) &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_1(k) \gamma^k \\ &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_2(k - n_0) \gamma^k \\ &= \gamma^{n_0} \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_2(k - n_0) \gamma^{(k - n_0)} \\ &= \gamma^{n_0} x_2(\gamma) \end{aligned}$$

Il apparaît que multiplier une série en γ par n_0 revient à décaler la séquence de n_0 unités. Il est donc possible d'interpréter l'opérateur γ comme opérateur de décalage "événementiel", ce que l'on écrit parfois $\gamma x(k) = x(k - 1)$. Ceci est illustré par la figure (2.12) :

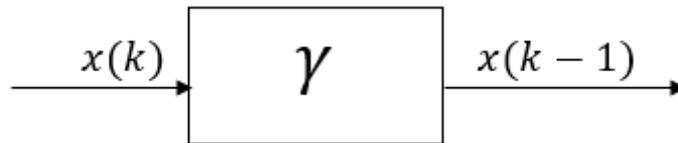


Figure 2.12 : Opérateur de décalage "événementiel"

Définition 2.14

L'ensemble des séries formelles en γ à exposant dans \mathbb{R} et coefficients dans $\overline{\mathbb{R}}_{max}$ à une structure de dioïde. Pour L'élément neutre de l'addition :

$$\varepsilon(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon \gamma^k \quad \text{avec } (\varepsilon = -\infty).$$

Pour L'élément neutre de la multiplication est :

$$e(\gamma) = e \gamma^0 \quad \text{avec } (e = 0).$$

Dans ce dioïde la somme et le produit sont définis en séries formelles en γ comme suit :

$$\begin{aligned} x_1(\gamma) \oplus x_2(\gamma) &= \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} [x_1(t) \oplus x_2(t)] \gamma^t \\ x_1(\gamma) \otimes x_2(\gamma) &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \bigotimes_{j \in \mathbb{Z}} [x_1(k) \oplus x_2(k - j)] \gamma^k \end{aligned}$$

Le système d'équations :

$$\begin{cases} x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

Nous pouvons donc écrire le système d'équations en fonction de la variable γ :

$$\begin{cases} x(\gamma) = \gamma Ax(\gamma) \oplus Bu(\gamma) \\ y(\gamma) = Cx(\gamma) \end{cases}$$

On a : l'équation implicite suivante : $x = a \oplus x \otimes b$

Cette équation admet $x = a^*b$ comme petite solution.

$$\text{On a donc : } \begin{cases} x(\gamma) = \gamma Ax(\gamma) \oplus Bu(\gamma) & (1) \\ y(\gamma) = Cx(\gamma) & (2) \end{cases}$$

On remplace $x(\gamma)$ dans (2) :

$$\begin{aligned} y(\gamma) &= C(\gamma Ax(\gamma) \oplus Bu(\gamma)) \\ &= C(\gamma A)^* Bu(\gamma) \\ y(\gamma) &= Hu(\gamma) \end{aligned}$$

Où H est appelée la matrice de transfert d'entrée/sortie du système en γ .

On obtient donc $y(\gamma) = Hu(\gamma)$ qui est une relation de transfert caractérisant le comportement entrée/sortie du système.

➤ Trajectoire monotone

Dans un GET les trajectoires sont monotones croissantes, si $x(\cdot)$ un dateur d'un GET, la date d'occurrence de $x(k)$ est supérieur à $X(k-1)$ donc :

$$\forall k \in \mathbb{Z} : x(k) \succcurlyeq x(k-1) \Leftrightarrow x(k) = x(k) \oplus x(k-1)$$

Qui peut être formulé avec γ par :

$$x(\gamma) \geq \gamma x(\gamma) \Leftrightarrow x(\gamma) = \gamma^* x(\gamma)$$

D'où la transformée en γ d'une trajectoire monotone $\gamma^* x(\gamma)$, et la multiplication par γ^* d'une trajectoire non monotone donne une trajectoire monotone croissant.

Remarque L'ensemble des trajectoires monotones forme un dioïde, noté $\gamma^* \overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ tel que:

$$(\gamma^n \oplus \gamma^p) x(k) = \gamma^{\min(n,p)} x(k).$$

Preuve :

$$\begin{aligned} (\gamma^n \oplus \gamma^p) x(k) &= x(k-n) \oplus x(k-p) \\ &= \max(x(k-n), x(k-p)) \\ &= x(k - \min(n, p)) \quad \text{puisque } x \text{ est isotone} \\ &= \gamma^{\min(n,p)} x(k) \end{aligned}$$

- l'élément neutre pour l'addition est : $\gamma^* \varepsilon(\gamma) = \varepsilon \oplus \varepsilon\gamma \oplus \varepsilon\gamma^2 \oplus \dots \oplus \varepsilon\gamma^{+\infty}$
- l'élément neutre pour la multiplication est : $\gamma^* e(\gamma) = e \oplus e\gamma \oplus e\gamma^2 \oplus \dots \oplus e\gamma^{+\infty}$

Exemple 2.6 : soit le graphe d'évènement temporisé de la figure (2.13) suivant :

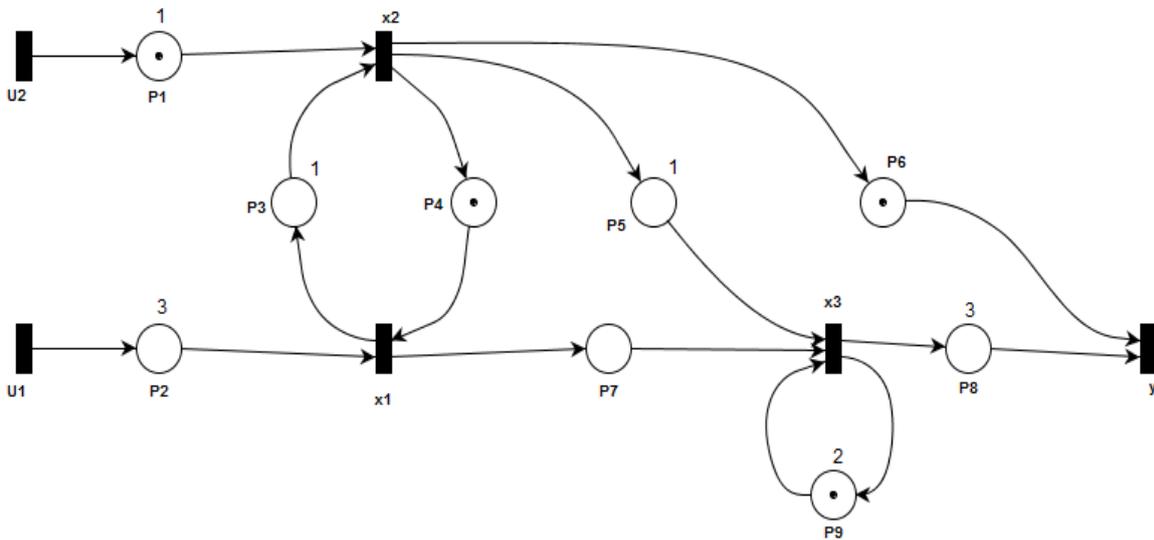


Figure 2.13 : graphe d'évènement temporisé.

Les fonctions dateur $x_i(k)$ qui correspondent à chaque transition de la figure (2.13) pour un franchissement au plus tôt :

$$\begin{cases} x_1(k) = x_2(k-1) \oplus 3 \otimes u_1(k) \\ x_2(k) = 1 \otimes x_1(k) \oplus 1 \otimes u_2(k-1) \\ x_3(k) = x_1(k) \oplus 1 \otimes x_2(k) \oplus 2 \otimes x_3(k-1) \\ y(k) = x_2(k-1) \oplus 3 \otimes x_3(k) \end{cases}$$

L'interprétation de ces équations en γ donne :

$$\begin{cases} x_1(\gamma) = \gamma x_2(\gamma) \oplus 3 \otimes u_1(\gamma) \\ x_2(\gamma) = 1 \otimes x_1(\gamma) \oplus 1 \otimes \gamma u_2(k) \\ x_3(\gamma) = e \otimes x_1(\gamma) \oplus 1 \otimes x_2(\gamma) \oplus 2 \otimes \gamma x_3(\gamma) \\ y(\gamma) = \gamma x_2(\gamma) \oplus 3 \otimes x_3(\gamma) \end{cases}$$

On obtient la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} x(\gamma) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ e & 1 & 2\gamma \end{bmatrix} x(\gamma) \oplus \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1\gamma \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} u(\gamma) \\ y(\gamma) = [\varepsilon \quad \gamma \quad 3] x(\gamma) \end{cases}$$

2.5.3.2 Transformé en δ

On définit la transformée en série formelle en δ pour un compteur $\theta(\cdot)$ comme suit :

$$\theta(\delta) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} \theta(t) \delta^t$$

L'ensemble des séries formelles en δ à exposants dans \mathbb{Z} et à coefficients dans \mathbb{Z}_{\min} a une structure de dioïde, avec pour élément neutre de l'addition

$$\varepsilon(\delta) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} \varepsilon \delta^t \quad \text{avec } (\varepsilon = +\infty)$$

Pour élément neutre de la multiplication

$$e(\delta) = e \delta^0 \quad \text{avec } (e = 0)$$

Dans ce dioïde la somme et le produit sont définis en séries formelles en δ comme suivant :

$$\begin{aligned}\theta_1(\delta) \oplus \theta_2(\delta) &= \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} [\theta_1(t) \oplus \theta_2(t)] \delta^t \\ \theta_1(\delta) \otimes \theta_2(\delta) &= \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} \bigotimes_{j \in \mathbb{Z}} [\theta_1(t) \oplus \theta_2(t-j)] \delta^t\end{aligned}$$

Le système d'équations :

$$\begin{cases} \theta(t) = A\theta(t-1) \oplus Bu(t) \\ y(t) = C\theta(t) \end{cases}$$

Nous pouvons donc écrire le système d'équations en fonction de la variable δ :

$$\begin{cases} \theta(\delta) = \delta A \theta(\delta) \oplus B u(\delta) \\ y(\delta) = C \theta(\delta) \end{cases}$$

On a : l'équation implicite suivante : $x = ax \oplus b$

Cette équation admet $X = a^*b$ comme petite solution.

$$\text{On a donc : } \begin{cases} \theta(\delta) = \delta A \theta(\delta) \oplus B u(\delta) & (1) \\ y(\delta) = C \theta(\delta) & (2) \end{cases}$$

On remplace $\theta(\delta)$ dans (2) :

$$\begin{aligned}y(\delta) &= C(\delta A \theta(\delta) \oplus B u(\delta)) \\ &= C(\delta A)^* B u(\delta) \\ y(\delta) &= H u(\delta)\end{aligned}$$

Où H est appelée la matrice de transfert d'entrée/sortie du système en δ .

On obtient donc $y(\delta) = Hu(\delta)$ qui est une relation de transfert caractérisant le comportement entrée/sortie du système.

➤ Trajectoire monotone

Si $\theta(\cdot)$ est un compteur d'un GET, le nombre d'événements à l'instant $t + 1$ supérieur au nombre d'événements à l'instant t :

$$\forall t \in \mathbb{Z} \quad : \quad \theta(t) \succ \theta(t+1) \Leftrightarrow \theta(t) = \theta(t+1) \oplus \theta(t)$$

Qui peut être formulé en δ par :

$$\theta(\delta) = \delta^{-1} \theta(\delta) \oplus \theta(\delta) \Leftrightarrow \theta(\delta) = (\delta^{-1})^* \theta(\delta)$$

D'où la forme générale d'une trajectoire monotone en δ exprimé par la relation :

$$(\delta^{-1})^* \theta(\delta).$$

Remarque. L'ensemble des trajectoires monotones forme un dioïde, noté $\delta^* \overline{\mathbb{Z}}_{\min}[\delta]$ talque :

$$(\delta^n \oplus \delta^p) x(t) = \delta^{\max(n,p)} x(t).$$

- l'élément neutre pour l'addition est : $\varepsilon(\delta) = \varepsilon \oplus \varepsilon\delta \oplus \varepsilon\delta^2 \oplus \dots \oplus \varepsilon\delta^{+\infty}$ avec $\varepsilon = +\infty$
- l'élément neutre pour la multiplication est : $e(\gamma) = e \oplus e\gamma \oplus e\gamma^2 \oplus \dots \oplus e\gamma^{+\infty}$

Exemple 2.7

Les fonctions compteur $\theta_i(t)$ qui correspond à chaque transition de la figure (2.13) pour un franchissement au plus tôt :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = 1 \otimes \theta_2(t) \oplus u_1(t-3) \\ \theta_2(t) = \theta_1(t-1) \oplus 1 \otimes u_1(t-1) \\ \theta_3(t) = e \otimes \theta_1(t) \oplus \theta_2(t-1) \oplus 1 \otimes \theta_3(t-2) \\ y(t) = 1 \otimes \theta_2(t) \oplus \theta_3(t-3) \end{cases}$$

L'interprétation de ces équations en δ donne :

$$\begin{cases} \theta(\delta) = 1 \otimes \theta_2(\delta) \oplus \delta^3 u_1(\delta) \\ \theta(\delta) = \delta \theta_1(\delta) \oplus 1 \otimes \delta u_1(\delta) \\ \theta(\delta) = e \otimes \theta_1(\delta) \oplus \delta \theta_2(\delta) \oplus 1 \otimes \delta^2 \theta_3(\delta) \\ y(\delta) = 1 \otimes \theta_2(\delta) \oplus \delta^3 \theta_3(\delta) \end{cases} \dots$$

On obtient la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \theta(\delta) = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \delta & 1\delta^2 \end{bmatrix} \theta(\delta) \oplus \begin{bmatrix} \delta^3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1\delta \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} u(\delta) \\ y(\delta) = [\varepsilon \quad 1 \quad \delta^3] \theta(\delta) \end{cases}$$

2.5.3.3 Représentation bidimensionnelle : dioïde $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

Une représentation dite bidimensionnelle a été introduite dans [5], [12]. Dans cette représentation, les opérateurs γ et δ sont traités de façon symétrique.

Le dioïde $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ est un dioïde de séries formelles particulièrement bien adapté à la représentation des trajectoires de tir d'un graphe d'évènements temporisé. En effet, il permet de manipuler uniquement des séries croissantes. Dans ce dioïde, on manipule des séries formelles en deux indéterminées commutatives γ et δ à exposants dans \mathbb{Z} et à coefficients dans le dioïde de Boole \mathbb{B} , cet ensemble de séries formelles est un dioïde appelé $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$.

De manière générale, les éléments de la matrice de transfert représentant un GET sont des séries périodiques et causales de la forme : $p + qr^*$, avec p et q des polynômes à exposants dans \mathbb{N} et r un monôme à exposants dans \mathbb{N} . Le polynôme p caractérise le comportement transitoire de la série, le polynôme q représente un motif qui se répète périodiquement, la périodicité étant fournie par $r = \gamma^v \delta^\tau$ où v/τ caractérise le taux de production de la série.

On note ce dioïde $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$, avec l'élément neutre $e = \gamma^0 \delta^0$, l'élément absorbant

$$\varepsilon = \gamma^{+\infty} \delta^{+\infty}$$

Règles de calcul et de simplification sur $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$:

La représentation des séquences de tirs d'un GET induit a des règles de simplifications suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma^n \delta^t \oplus \gamma^{n'} \delta^{t'} &= \gamma^{\min(n, n')} \delta^t \\ \gamma^n \delta^t \oplus \gamma^n \delta^{t'} &= \gamma^n \delta^{\max(t, t')} \\ \gamma^n \delta^t \wedge \gamma^{n'} \delta^{t'} &= \gamma^{\max(n, n')} \delta^{\min(t, t')} \end{aligned}$$

Exemple 2.8

En utilisant ces deux transformées (γ, δ) , on peut écrire la forme d'état de l'exemple de la figure (2.13) comme suite :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \delta & \gamma\delta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \delta^3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \gamma\delta \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma & \delta^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.6. Réalisabilité, rationalité et périodicité

Les définitions sont ici fournies dans le dioïde $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$, mais s'étendent naturellement aux dioïdes $D[\gamma]$ et $D[\delta]$.

Définition 2.15 (Causalité)

Une série $s \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ est dite causale si $s = \varepsilon$ (la série est nulle) ou si son représentant minimal est à exposants dans \mathbb{N} . Une matrice est dite causale si toutes ses composantes sont causales.

L'ensemble des séries causales de $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ est stable pour la somme et le produit de $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$. Cet ensemble forme un sous-dioïde complet de $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ noté $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ par la suite. Notons que l'élément maximum de $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ est δ^* , [24].

Définition 2.16 (Rationalité)

Un élément $\in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ est dit rationnel si son représentant minimal appartient à la clôture rationnelle de l'ensemble $\{\gamma, \delta, e, \varepsilon\}$, c'est-à-dire peut s'écrire avec un nombre fini de sommes, produits et d'étoiles d'éléments de l'ensemble $\{\gamma, \delta, e, \varepsilon\}$.

Une matrice est dite rationnelle si toutes ses composantes sont rationnelles.

Remarque Par définition, un élément rationnel est également causal.

Définition 2.17 (Réalisabilité)

Une matrice $H \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ est dite réalisable s'il existe quatre matrices A_1, A_2, B et C de tailles respectivement $n \times n$, $n \times n$, $n \times m$ et $p \times n$ à coefficient dans l'ensemble $\{e, \varepsilon\}$ telles que :

$$H = C(\gamma A_1 \oplus \delta A_2)^* B$$

Définition 2.18 (Périodicité)

Une série s est dite périodique s'il existe deux polynômes p et q de $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ telle que

$$p = \bigoplus_{i=0}^{\alpha} \gamma^{n_i} \delta^{t_i} \quad \text{et} \quad q = \bigoplus_{j=0}^{\beta} \gamma^{N_j} \delta^{T_j}$$

Et un monôme causal $r = \gamma^v \delta^T$ tels que :

$$s = p \oplus q r^*$$

Remarque. Notons que cette définition de la périodicité n'impose pas la causalité de la série.

Définition 2.19 (pente asymptotique)

La pente asymptotique d'une série périodique $p + q (\gamma^v \delta^\tau)^*$ est noté $\sigma_\infty(s)$ et est définie comme le ratio $\sigma_\infty(s) = v/\tau$.

Théorème. L'ensemble des séries périodiques de $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ est stable pour la somme, le produit, l'inf et la résiduation. En outre, pour s_1 et s_2 deux séries périodiques telles que $v_1, v_2 \neq 0$ et $\tau_1, \tau_2 \neq 0$, on obtient les résultats suivants :

$$\sigma_\infty(s_1 \oplus s_2) = \min(\sigma_\infty(s_1), \sigma_\infty(s_2)),$$

$$\sigma_\infty(s_1 \otimes s_2) = \min(\sigma_\infty(s_1), \sigma_\infty(s_2)),$$

$$\sigma_\infty(s_1 \wedge s_2) = \max(\sigma_\infty(s_1), \sigma_\infty(s_2)),$$

Si

$$\sigma_\infty(s_1) \leq \sigma_\infty(s_2) \text{ alors } \sigma_\infty(s_2 \setminus s_1) = \sigma_\infty(s_1)$$

Sinon

$$s_2 \setminus s_1 = \varepsilon$$

2.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une approche de modélisation avec les réseaux de Petri où on a défini leur propriétés, leur diffèrent sous-classe et leur principe de fonctionnement.

Nous avons également présenté les différents dioïde permettant la représentation d'un graphe d'évènement temporisé (GET). Une part importante a été consacré pour les transformé en γ et δ , la représentation d'état du système $(max, +)$, et la représentation du dioïde $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$.

Chapitre 3

*Synthèse d'un contrôleur
avec observateur*

3.1. Introduction

Afin de concevoir des méthodes de commande, il est essentiel d'avoir les informations sur les systèmes étudiés. Classiquement sur un système, on connaît les entrées qui correspondent aux variables de commandes et qui permettent de piloter le système, et on connaît aussi directement par la mesure, les sorties des systèmes étudiés. Cependant, ces informations ne sont très souvent pas suffisantes pour concevoir des méthodes de commande. En effet, il est parfois nécessaire de connaître des informations relatives aux variables internes du système. Afin d'obtenir ces informations, on peut rajouter des capteurs, quand ceci est physiquement possible. Ou bien, utiliser des observateurs quand le système est observable.

La théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes concerne essentiellement les systèmes dynamiques à événements discrets qui mettent en jeu des phénomènes de synchronisation. Ces systèmes sont représentés en fait par des Graphes d'Événements Temporisés (GET) qui constituent une sous classe des Réseaux de Petri (RDP) dont chaque place n'admet qu'une transition en amont et une transition en aval. L'objectif de ce chapitre dans un premier temps, est d'adapter les concepts et les résultats de la théorie conventionnelle de l'observation des systèmes linéaires à la structure algébrique de dioïde. Le modèle de GET utilisé dans la suite est basé sur la représentation dans le dioïde $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$. L'avantage de cette structure, de point de vue entrée-sortie, est la possibilité de représenter le GET par sa fonction de transfert.

Dans un deuxième temps, nous allons aborder le problème de commande avec modèle de référence. Le problème traité d'une manière générale consiste, à calculer un correcteur, tel que le GET nominal dont on connaît la fonction de transfert, ait un comportement aussi proche que possible de celui d'un modèle de référence.

3.2. Synthèse d'un observateur

Le comportement dynamique d'un procédé peut être entièrement décrit par l'évolution de ses variables d'état. Or, ces variables ne sont en général pas, accessibles par des mesures. Ces problèmes peuvent être résolus, en introduisant un observateur d'état dont la tâche sera de fournir une estimation de vecteur d'état du système étudié en fonction des informations disponibles sur ce système (les mesures d'entrée et de sortie et le modèle dynamique du procédé).

Les premiers résultats concernant les problèmes d'observation des systèmes à événements discrets, obtenus par une approche $(max, +)$, ont été développés par Laurent Hardouin et Carlos Maia [10], il s'agit d'un résultat inspiré de Luenberger [11]. Dans ce travail nous adoptons la même démarche en se basant sur la représentation dans le dioïde $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$. La notion d'observabilité structurelle des Graphes d'événements temporisés est essentielle.

Définition 3.1

Un graphe d'événements est structurellement observable si, à partir de chaque transition interne, il existe au moins un chemin qui mène à une transition de sortie.

La base de la construction de cet observateur est la structure de l'observateur de Luenberger mais avec les transformations suivantes : l'addition (+) du modèle et la soustraction (-) du comparateur, sont remplacées par le maximum noté \oplus ; la multiplication \times est remplacée par l'addition notée \otimes .

Nous avons considéré deux cas, le premier sans perturbations et le deuxième avec la présence des perturbations.

3.2.1 Conception d'un observateur sans présence de perturbation

La structure d'un observateur pour les systèmes max plus est inspirée de la théorie des systèmes linéaires classiques. Elle est donnée par la figure suivante :

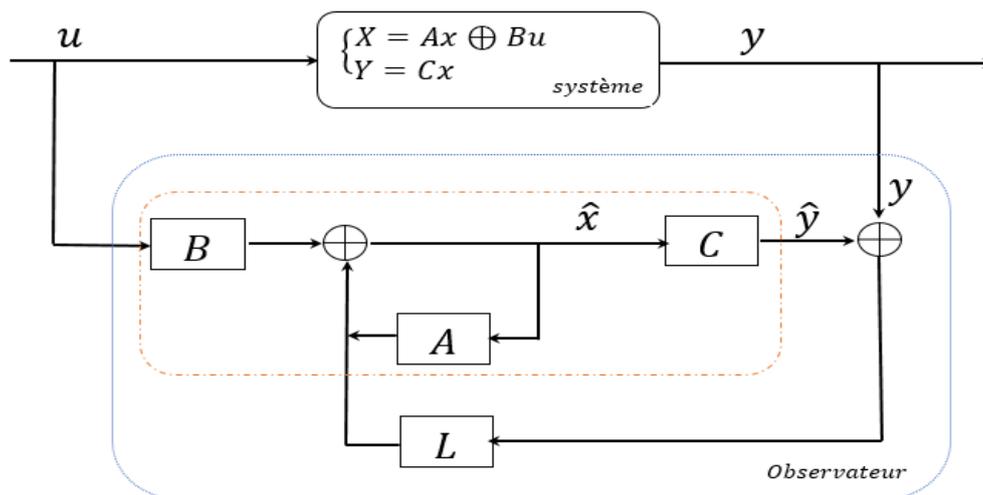


Figure 3.1. Structure de l'observateur.

Nous avons la représentation d'état du Graphe d'événement temporisé :

$$x = A x \oplus B u = A^* B u \quad (3.1)$$

$$y = C x = C A^* B u \quad (3.2)$$

Où u, y et x sont des vecteurs de commande, de sortie et de l'état du système. Et les Matrices $A \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times n}$, $B \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times p}$ et $C \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{q \times n}$ sont des matrices d'état, de commande et d'observation.

Comme l'état n'est pas accessible, l'objectif d'un observateur consiste à estimer cet état par une variable que nous noterons \hat{x} . Cette estimation est réalisée par un Graphe d'événement temporisé dont la sortie sera précisément \hat{x} et l'entrée sera constituée de l'ensemble des informations disponibles, c'est-à-dire :

L'équation de l'observateur est de la forme :

$$\hat{x} = A \hat{x} \oplus B u \oplus L(\hat{y} \oplus y) = A \hat{x} \oplus B u \oplus L C \hat{x} \oplus L C x \quad (3.3)$$

$$\hat{y} = C \hat{x} \quad (3.4)$$

Où L est le gain de correction, appelé aussi gain de l'observateur à déterminer.

Cette structure peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= A \hat{x} \oplus B u \oplus L C \hat{x} \oplus L C A^* B u \\ \hat{x} &= (A \oplus L C) \hat{x} \oplus B u \oplus L C A^* B u \\ \hat{x} &= (A \oplus L C)^* B u \oplus (A \oplus L C)^* L C A^* B u \end{aligned} \quad (3.5)$$

En utilisant les propriétés (1.5) de l'étoile de Kleene définie dans le chapitre précédent, on a : $(A \oplus L C)^* = A^*(L C A^*)^*$

En l'introduisant dans l'équation (3.5), nous obtenons :

$$\hat{x} = A^*(L C A^*)^* B u \oplus A^*(L C A^*)^* L C A^* B u$$

D'après la propriété (1.7) on a :

$$(L C A^*)^* L C A^* = (L C A^*)^+$$

Alors on peut écrire :

$$\hat{x} = A^*(LCA^*)^*Bu \oplus A^*(LCA^*)^+Bu \quad (3.6)$$

D'après la propriété (1.1) de l'étoile de Kleen, on a: $(LCA^*)^+ \leq (LCA^*)^*$, alors l'équation (3.6) devient comme suit :

$$\hat{x} = A^*(LCA^*)^*Bu = (A \oplus LC)^*Bu$$

L'objectif de cette synthèse est de calculer la plus grande matrice d'observation L telle que le vecteur d'état estimé \hat{x} soit aussi proche que possible de l'état x , sous la contrainte $\hat{x} \preceq x$ cela peut s'écrire comme suit: $(A \oplus LC)^*Bu \preceq A^*Bu$

Ou bien :

$$A^*(LCA^*)^*B \preceq A^*B \quad (3.7)$$

On peut écrire aussi :

$$\hat{y} \preceq y \Leftrightarrow C\hat{x} \preceq Cx$$

L'équation (3.7) devient

$$CA^*(LCA^*)^*B \preceq CA^*B$$

D'après la propriété (1.5) de l'étoile de Kleene nous avons les équivalences suivantes :

$$C(A \oplus LC)^*B \preceq CA^*B = CA^*(LCA^*)^*B \preceq CA^*B = (CA^*L)^*CA^*B \preceq CA^*B$$

En utilisant la résiduation à droite pour L :

$$(CA^*L)^* \preceq CA^*B \not\preceq CA^*B$$

D'après la propriété $a \not\preceq b = (a \not\preceq b)^*$ on peut écrire :

$$(CA^*L)^* \preceq (CA^*B \not\preceq CA^*B)^*$$

On utilisant la propriété (1.11) de l'étoile de Kleen, on aura donc :

$$(CA^*L) \preceq CA^*B \not\prec CA^*B$$

En utilisant la résiduation à gauche pour L :

$$L \preceq CA^* \not\prec CA^*B \not\prec CA^*B$$

Au final la plus grande matrice L qui satisfait la condition $\hat{y} \preceq y$ est donnée par :

$$L_{opt} = CA^* \not\prec CA^*B \not\prec CA^*B .$$

3.2.2 Conception d'un observateur avec présence de perturbation

La structure d'un observateur en présence de perturbation est la même que la précédant, avec injection de perturbation dans le GET, et elle est donnée par la figure suivante :

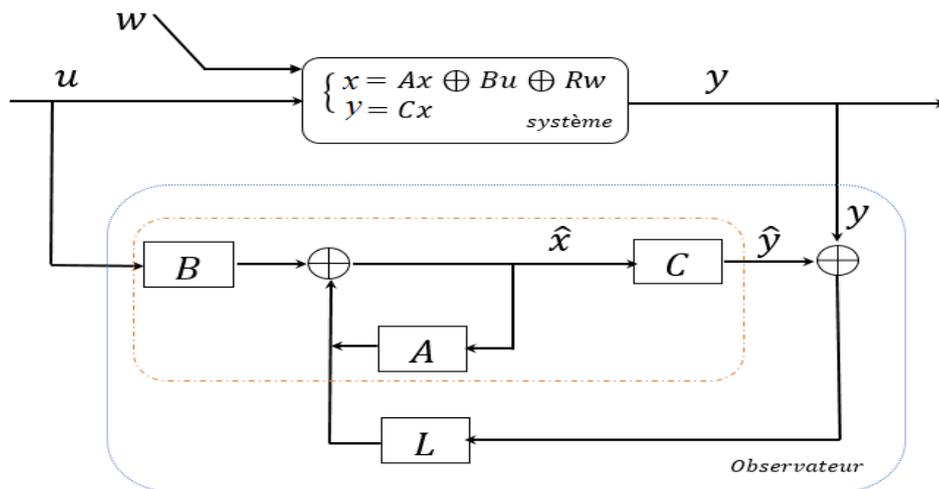


Figure 3.2: Structure de l'observateur avec perturbation .

Dans ce cas nous avons la représentation d'état du Graphe d'événement temporisé est exprimée sous la forme suivante:

$$x = Ax \oplus Bu \oplus Rw = A^*Bu \oplus A^*Rw \tag{3.8}$$

$$y = Cx \tag{3.9}$$

Où u, w, y et x sont des vecteurs de commande, de perturbation, de sortie et de l'état du système. Et les Matrices $A \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times n}$, $B \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times p}$ et $C \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{q \times n}$ et $R \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times m}$ sont des matrices d'état, de commande, d'observation et de perturbations.

Et la représentation d'état de l'observateur est donnée par (3.3) et (3.4)

En introduisant l'équation (3.8) dans (3.3) on aura la forme suivante:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (A \oplus LC)^* Bu \oplus (A \oplus LC)^* LC (A^* Bu \oplus A^* Rw) \\ \hat{x} &= (A \oplus LC)^* Bu \oplus (A \oplus LC)^* LCA^* Bu \oplus (A \oplus LC)^* LCA^* Rw \end{aligned} \quad (3.10)$$

D'après les propriétés (1.5) de l'étoile de Kleen, on a : $(A \oplus LC)^* = A^* (LCA^*)^*$

En l'introduisant dans l'équation (3.10), on obtient :

$$\hat{x} = A^* (LCA^*)^* Bu \oplus A^* (LCA^*)^* LCA^* Bu \oplus A^* (LCA^*)^* LCA^* Rw$$

Comme dans le cas précédent en utilisant la propriété (1.7):

$$(LCA^*)^* LCA^* = (LCA^*)^+$$

On peut écrire donc :

$$\hat{x} = A^* (LCA^*)^* Bu \oplus A^* (LCA^*)^+ Bu \oplus A^* (LCA^*)^+ Rw \quad (3.11)$$

On utilisant la propriété (1.1) on à $(LCA^*)^+ \leq (LCA^*)^*$, l'équation (3.11), devient sous la forme suivante :

$$\hat{x} = A^* (LCA^*)^* Bu \oplus A^* (LCA^*)^+ Rw \quad (3.12)$$

L'objectif de cette synthèse est de calculer la plus grande matrice d'observation L_{opt} telle que le vecteur d'état estimé \hat{x} soit aussi proche que possible de l'état x , sous la contrainte $\hat{x} \preceq x$ cela peut s'écrire comme suit:

$$(A \oplus LC)^* Bu \oplus (A \oplus LC)^* LCA^* Rw \preceq A^* Bu \oplus A^* Rw \quad (3.13)$$

Soit formellement :

$$\hat{y} \preceq y \Rightarrow C\hat{x} \preceq Cx$$

D'après l'équation (3.13) on déduit:

$$C(A \oplus LC)^* Bu \oplus C(A \oplus LC)^* LCA^* R w \preceq CA^* Bu \oplus CA^* R w$$

Cela est équivalent à :

$$C(A \oplus L_1 C)^* B \preceq CA^* B \quad (i)$$

$$C(A \oplus L_2 C)^* LCA^* R \preceq CA^* R \quad (ii)$$

- Pour l'équation (i) on a $L_1 = L_{opt}$.

L_{opt} a été calculé précédemment dans le cas sans perturbation.

C'est-à-dire d'après (i) On aura le gain d'observations L_{1opt} comme suit:

$$L_1 \preceq CA^* \setminus CA^* B \not\prec CA^* B$$

$$L_{1opt} = CA^* \setminus CA^* B \not\prec CA^* B$$

- Pour l'équation (ii) on obtient les équivalences suivantes :

En utilisant les propriétés (1.5) de l'étoile de Kleen, on a : $(A \oplus L_2 C)^* = A^*(L_2 C A^*)^*$

$$C(A \oplus L_2 C)^* L_2 C A^* R \preceq CA^* R = CA^* (L_2 C A^*)^* L_2 C A^* R \preceq CA^* R$$

En utilisant la propriété (1.7) on a :

$$(L_2 C A^*)^* L_2 C A^* = (L_2 C A^*)^+$$

On peut écrire

$$CA^* (L_2 C A^*)^+ R \preceq CA^* R$$

En utilisant la résiduation à gauche pour L_2 :

$$(L_2 CA^*)^+ R \preceq CA^* \bowtie CA^* R$$

D'après la propriété (1.1) de l'étoile de Kleen on a :

$$(L_2 CA^*)^+ R = (L_2 CA^*)^* R$$

Donc :

$$(L_2 CA^*)^* R \preceq CA^* \bowtie CA^* R$$

D'après la propriété $a \bowtie b = (a \bowtie b)^*$ on peut écrire :

$$(L_2 CA^*)^* R \preceq (CA^* \bowtie CA^*)^* R$$

D'après la propriété (1.11), on aura donc :

$$L_2 CA^* R \preceq CA^* \bowtie CA^* R$$

En utilisant la résiduation à droite pour L_2 :

$$L_2 \preceq CA^* \bowtie CA^* R \not\prec CA^* R$$

$$L_{2opt} = CA^* \bowtie CA^* R \not\prec CA^* R$$

A partir des deux inégalités (i) et (ii) on obtient deux solutions L_{1opt} et L_{2opt} d'où la solution optimale qui satisfait le système perturbé est donnée par :

$$L_{opt} = L_{1opt} \wedge L_{2opt}$$

3.3. Synthèse d'un Contrôleur de type retour d'état avec observateur

Maintenant, nous considérons un problème de synthèse d'un contrôleur de type retour d'état avec un observateur pour GET, et cela dans un objectif de poursuite de modèle.

Ce problème peut être décrit de la manière suivante:

Prendre un GET dont on connaît la matrice de transfert, on estime son état et on calcule un dispositif de commande qui conduit à un système en boucle fermée dont le comportement sera aussi proche que possible du modèle de référence.

La structure d'un contrôleur de type retour d'état avec observateur pour les systèmes max plus est inspirée de la théorie des systèmes linéaires classiques et est donnée par la figure suivante :

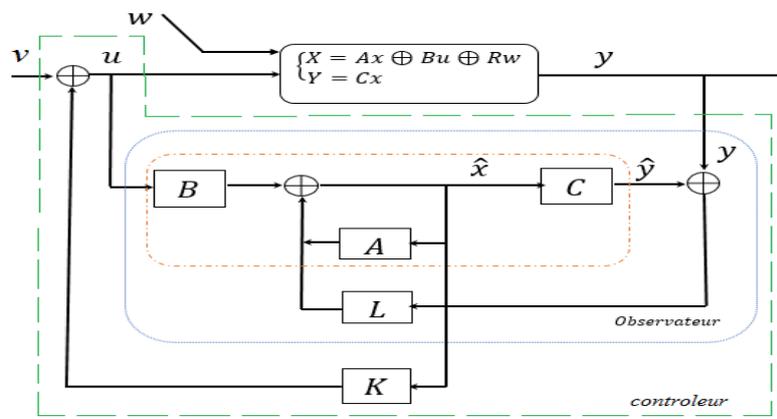


Figure 3.3: Structure d'un contrôleur de type retour d'état avec observateur .

3.3.1 Formulation du problème

L'objectif de commande est d'imposer au Graphe d'événement temporisé la dynamique décrite par un modèle de référence spécifié sous forme de matrice de transfert. La stratégie de contrôle est présentée par la figure (3.3).

Partant de l'équation de sortie (3.4) du GET :

$$y = Cx \Rightarrow y = CA^*Bu$$

La fonction de transfert entrée-sortie est donnée par

$$H = CA^*B$$

Les expressions de l'état estimé et de l'état x du GET sont les suivantes :

$$\hat{x} = (A \oplus L_{opt}C)^* B u = A^*(L_{opt}CA^*)^* B u$$

$$x = A x \oplus B u = A^* B u$$

La loi de commande entre \hat{x} et u est décrite par :

$$u = K \hat{x} \oplus v$$

On remplace \hat{x} par son expression et on obtient :

$$u = K(A \oplus L_{opt}C)^* B u \oplus v$$

La relation de transfert entre l'entrée v et la commande u s'écrit comme suit :

$$u = \left(K(A \oplus L_{opt}C)^* B \right)^* v$$

L'état du système devient:

$$x = A^* B u = A^* B \left(K(A \oplus L_{opt}C)^* B \right)^* v$$

Et l'état estimé devient :

$$\hat{x} = (A \oplus L_{opt}C)^* B \left(K(A \oplus L_{opt}C)^* B \right)^* v$$

De même, la sortie :

$$y = C A^* B u$$

$$y = C A^* B \left(K(A \oplus L_{opt}C)^* B \right)^* v = H \left(K(A \oplus L_{opt}C)^* B \right)^* v$$

Pour pouvoir calculer la sortie y , tout d'abord, on cherche la plus grande matrice d'observation $L_{opt} = CA^* \setminus CA^*B \not\subset CA^*B$ qu'on a déjà calculée précédemment, ensuite pour le contrôleur, nous devons trouver pour un modèle de référence (G_{ref}) un plus grand correcteur K_{opt} tel que le transfert en boucle fermée soit inférieur ou égal à G_{ref} .

En effet, pour le choix de modèle de référence, de point de vue mathématique, il n'existe aucune restriction sur son choix hormis qu'il soit réalisable, pour que la spécification (G_{ref}) soit atteinte via un correcteur lui-même réalisable. L'interprétation pratique montre que les limites physiques du système corrigé demeurent la vitesse maximale (taux de production) du système nominal.

En tant qu'application à la gestion de production, la correction n'aura pas de sens que pour des spécifications telles que $\sigma_{\infty}(G_{ref}) \leq \sigma_{\infty}(H)$, c'est-à-dire que le taux de production de modèle de référence est inférieur ou égal à celui du système corrigé.

Pour un modèle de référence $G_{ref} \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{p \times q}$ réalisable, il existe un plus grand correcteur K tel que le transfert en boucle fermée soit inférieur ou égal à G_{ref}

$$G_K \preceq G_{ref}$$

On a :

$$C A^* B \left(K (A \oplus L_{opt} C)^* B \right)^* \preceq G_{ref}$$

En utilisant la résiduation à gauche pour K :

$$\left(K (A \oplus L_{opt} C)^* B \right)^* \preceq C A^* B \bowtie G_{ref}$$

D'après la propriété $a \bowtie b = (a \bowtie b)^*$ on peut écrire :

$$\left(K (A \oplus L_{opt} C)^* B \right)^* \preceq \left(C A^* B \bowtie G_{ref} \right)^*$$

D'après la propriété (1.11) de l'étoile de Kleen, on aura donc :

$$K (A \oplus L_{opt} C)^* B \preceq C A^* B \bowtie G_{ref}$$

En utilisant la résiduation à droite pour k :

$$K \preceq C A^* B \bowtie G_{ref} \oslash (A \oplus L_{opt} C)^* B$$

D'où :

$$K_{opt} = CA^*B \oslash G_{ref} \oslash (A \oplus L_{opt}C)^*$$

L'utilisation d'un correcteur de type retour d'état améliore les performances, c.-à-d. engendre une commande plus grande et un système corrigé plus proche du modèle de référence.

3.4. Synthèse d'un correcteur par retour de sortie

L'objectif de la commande est d'imposer au système bouclé la dynamique décrite par un modèle de référence, spécifié sous forme de la matrice de transfert [25]. En théorie des systèmes linéaires, ce problème de commande est similaire au problème de poursuite de modèle. La figure (3.4) présente le schéma bloc du système nominal, du système en boucle fermée et du modèle de référence.

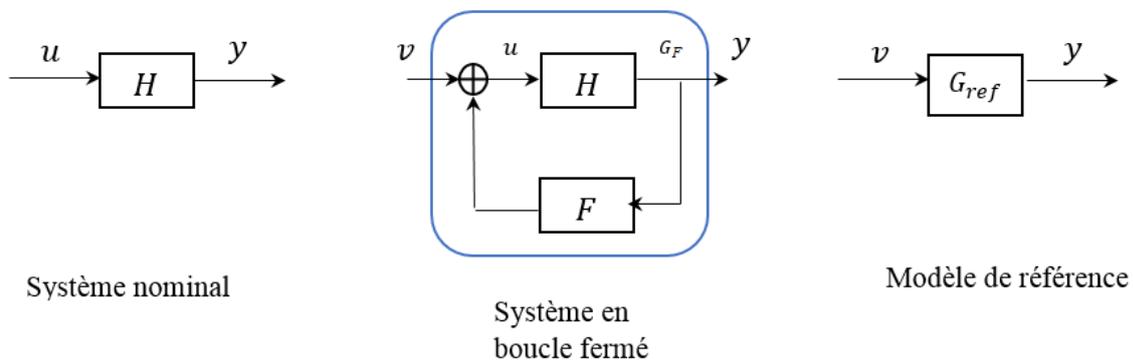


Figure 3.4 : commande avec modèle de référence: correcteur de type retour de sortie.

3.4.1 Formulation du problème

Il convient tout d'abord de déterminer le transfert d'un système H muni d'un feedback F :

$$\begin{cases} u = Fy \oplus v \\ y = Hu \end{cases}$$

Par le fonctionnement au plus tôt, le système bouclé possède la dynamique suivante entre v et y , on a :

$$u = FHu \oplus v \Rightarrow u = (FH)^*v$$

Donc la sortie devient :

$$y = H(FH)^*v = G_F v$$

Le problème d'atteinte d'un modèle de référence par l'action d'un feedback F , s'exprime donc de la manière suivante :

Existe-t-il un plus grand feedback F tel que $G_F \preceq G_{ref}$?

La solution du problème découle de la résiduabilité sur un dioïde.

$$G_F \preceq G_{ref} \Rightarrow H(FH)^* \preceq G_{ref}$$

En utilisant la résiduation à gauche pour F :

$$(FH)^* \preceq H \bowtie G_{ref}$$

D'après la propriété $a \bowtie b = (a \bowtie b)^*$ on peut écrire :

$$(FH)^* \preceq (H \bowtie G_{ref})^*$$

On utilisant la propriété (1.11) de l'étoile de Kleen, on aura donc :

$$FH \preceq H \bowtie G_{ref}$$

En utilisant la résiduation à droite pour F :

$$F \preceq H \bowtie G_{ref} \not\prec H$$

Donc :

$$F_{opt} = H \bowtie G_{ref} \not\prec H$$

Il est à noter que les correcteurs de type retour de sortie et de type retour d'état sont liés par une relation. Afin de prouver que cette relation existe on utilise un correcteur de type retour d'état sans observateur [25].

Le transfert entrée/sortie du système avec correcteur sans observateur est donnée comme suite :

$$G_K = C A^* B (K A^* B)^*$$

On synthétise un correcteur K_{opt} de telle sorte que $G_K \approx G_{ref}$ donnée dans [25]:

$$K_{opt} = C A^* B \approx G_{ref} \phi A^* B$$

La relation entre F_{opt} et K_{opt} est donnée comme suite :

$$F_{opt} = K_{opt} \phi C$$

C'est à dire :

$$\begin{aligned} F_{opt} C &= (K_{opt} \phi C) C \approx K_{opt} \\ F_{opt} C &\approx K_{opt} \\ \Rightarrow (F_{opt} H)^* &\approx (K_{opt} A^* B)^* \\ H (F_{opt} H)^* &\approx H (K_{opt} A^* B)^* \\ G_F &\approx G_K \end{aligned}$$

On a aussi montré que :

$$G_K \approx G_{ref}$$

Donc on peut écrire :

$$G_F \approx G_K \approx G_{ref}$$

D'après ce résultat On constate que le contrôle par retour d'état est plus performant que le contrôle par retour de sortie c.-à-d. engendre une commande plus grande et un système corrigé plus proche du modèle de référence.

La relation trouvée est valable aussi dans le cas d'un correcteur de type retour d'état avec observateur, en prenant compte le gain du correcteur calculé avec observateur.

3.5. Exemple d'application

Sur cet exemple nous abordant le problème de pilotage d'une unité de production de tube de caoutchouc pour un équipement automobile [26]. L'unité étudiée fait partie de la classe des systèmes à événements discrets.

3.5.1. Descriptions de l'unité de production

L'unité de productions que nous étudions est composée de convoyeurs en boucle connecté entre eux, Elle est constituée de deux boucles identiques désignées par 1 et 2, et d'une troisième boucle (désignée par 3) qui les alimente comme le montre la figure (3.5). Chacune des deux premières boucles est constituée d'un poste de garnissage (point A), ou sont fixées sur des palettes les pièces qui arrivent de la boucle 3, pour subir un traitement thermique, elle comporte aussi un poste de dégarnissage (point E), où les pièces finies sont démontées, et sont transférées vers d'autre unité de productions.

Le poste de travail essentielle des deux boucles est un four (point *I* et *O*), où sont effectués des traitements thermiques. Le four est constitué de deux zones, une zone de chauffe et une zone de refroidissement. La durée de séjour des palettes dans la zone de chauffe est fixée. Le cahier des charges du système indique que les pièces à traiter doivent être regroupé par lots dans des palettes. À chaque poste de travail (poste de garnissage, poste de dégarnissage, four) est associée une durée d'opération, sans oublier les temps de transfert entre postes qu'on prend aussi en considération (voir figure (3.6)). Une palette garnie est guidé par le convoyeur jusqu'au four. Elle peut être bloquée avant d'entrer dans le four puisque les convoyeurs de la boucle ne fonctionnent pas avec la même vitesse. Les pièces de la palette sont soumises à une température élevée pendant leur passage dans la première partie du four. Ensuite, elles sont refroidies dans la seconde moitié du four. La palette est amenée jusqu'au poste de dégarnissage où un opérateur démonte les pièces finies et les expédie vers une autre unité de l'atelier de production donc il peut y avoir une accumulation des palettes au poste de dégarnissage. La palette dégarnie est libérée et conduit au poste de garnissage pour une nouvelle utilisation.

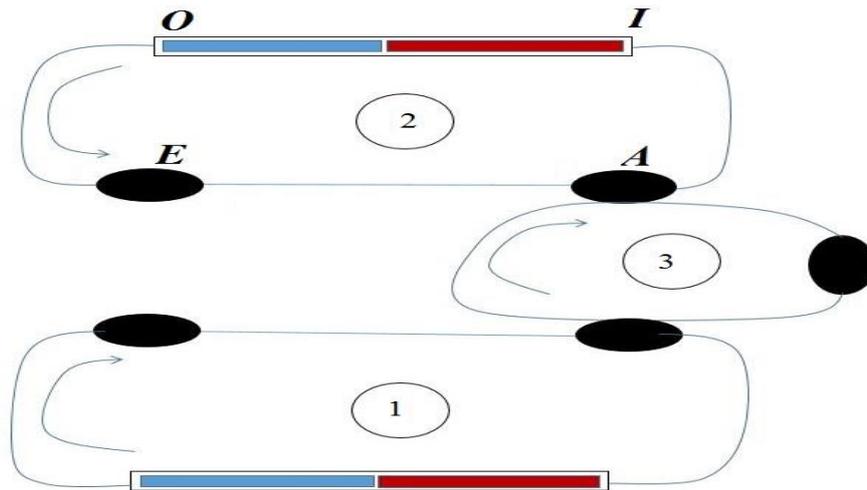


Figure 3.5 : unité de production.

3.5.2. Boucle de production considérée

Nous nous intéressons au fonctionnement de la boucle 2 de ce système de production. Nous associons le graphe d'évènement temporisé, donné par la figure (3.7), pour cette boucle. Deux problèmes se rencontrent dans le fonctionnement de cette unité de production. D'une part, il peut se produire une saturation à l'entrée du poste de dégarnissage, qui conduit à un blocage des palettes dans le four. Dans ce cas les palettes dépassent leur temps de cuisson et les pièces embarquées sont rebutées. D'autre part, il peut apparaître une famine au poste de graissage conduisant à un mauvais remplissage du four et donc à une dégradation de la productivité du système. L'occurrence des phénomènes de saturation et de famine dépend de nombreux paramètres, des durées de garnissage, du nombre de palette disponibles et des capacités des différentes parties de ce système de production. La partie du système étudiée fait apparaître des synchronisations. En effet, le garnissage d'une palette n'est possible que si une palette est disponible et vide et les produits entrants sont présents, ce qui impose une synchronisation au niveau du poste de dégarnissage. Les variable d et l notée sur la figure (3.6) représentent respectivement, la durée minimal de séjours des palettes dans chaque partie de la boucle et la capacité des convoyeurs de transfert ou des poste de travail.

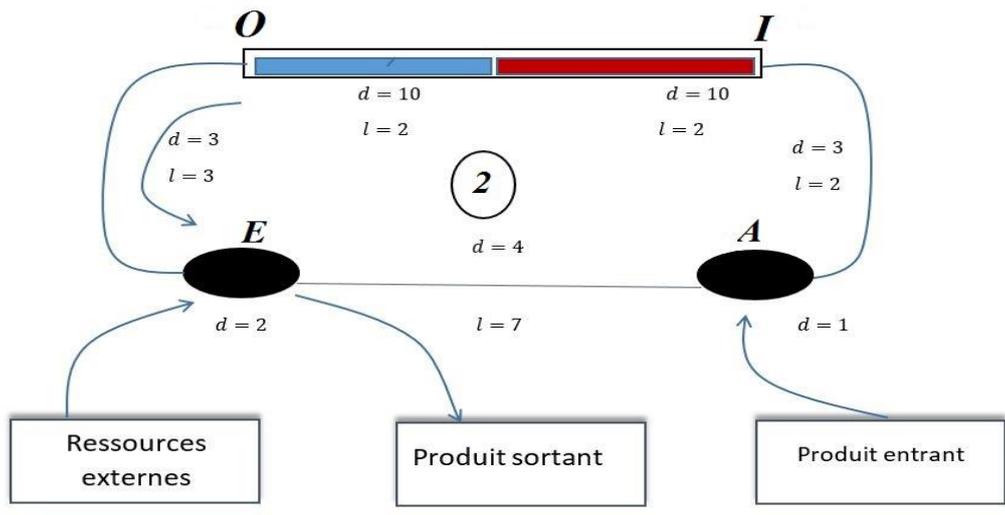


Figure 3.6 : boucle de production 2.

3.5.3. Modélisations par un graphe d'évènement temporisé

On modélise par un graphe d'évènements P-temporisé la boucle 2 de productions donné par la figure (3.7). La transitions « u_1 » représente l'arrivé des pièces à traiter et la transitions « u_2 » modélise le dispositif de transport des pièces finies. La transition de sortie y correspond aux pièces terminées et enlevées par des palettes pour rejoindre d'autres unités de productions. Les synchronisations au niveau des postes de garnissage et de dégarnissage sont modélisées par l'emploi des transitions « x_1 » jusqu'à « x_7 ». Le franchissement d'une transition « x_i » de ce graphe correspond à l'occurrence d'un évènement, par exemple le franchissement de la transitions « x_1 » signifie le début de l'opération du garnissage d'une palette, et « x_2 » la fin de cette opérations. Les durée des opérations et des transferts sont représentées par des temporisations sur les places, les jetons initiaux dans les places modélisent les ressources de l'unité de productions : les palettes, les capacités des convoyeurs. On voir par exemple sur la figure (3.7), qu'il y'a cinq palettes libres (marquage initial de la place « p_1 ») et qu'il reste deux places disponibles sur le convoyeur d'entrée (marquage initial de la place « p_2 »).

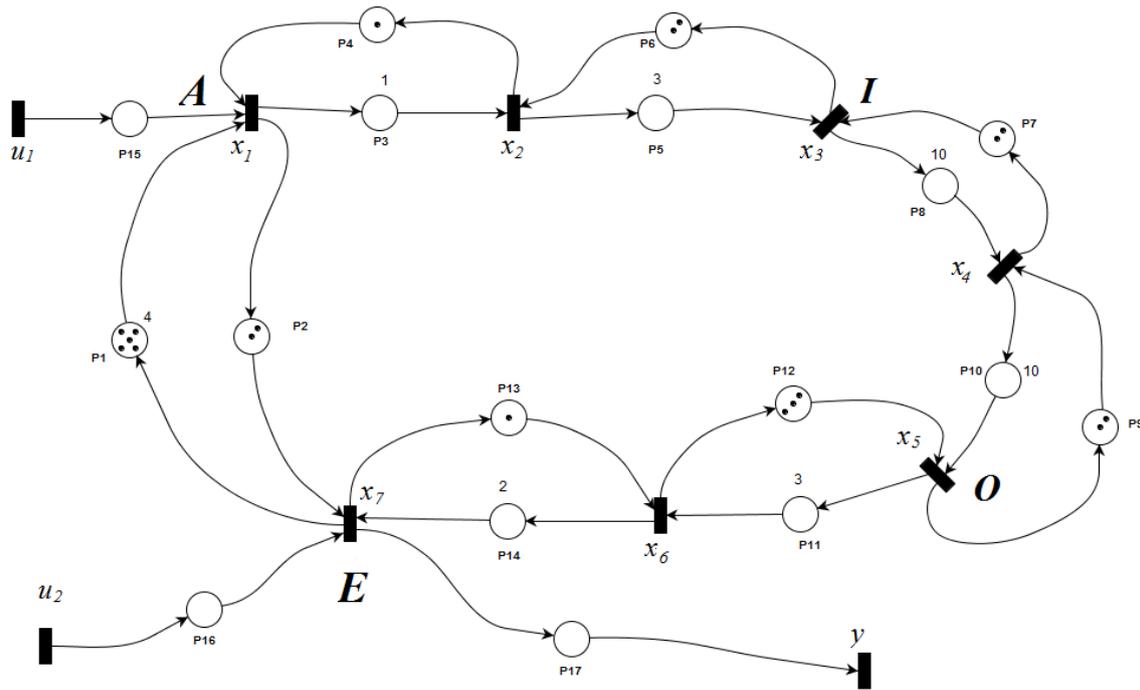


Figure 3.7 : graphe d'évènement temporisé associé à la boucle 2.

3.5.4. Modélisation par un modèle d'état

Nous avons vu précédemment qu'on peut décrire le comportement dynamique d'un graphe d'évènement temporisé par une forme d'état dans le dioïde $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ (voir les équations de l'exemple (2.8)).

Nous présenterons le comportement dynamique du graphe de la figure (3.7), pour cela nous associons à chaque évènement l'opérateur γ et à chaque temporisation l'opérateur δ .

Modèle d'état

Le modèle d'état d'un graphe d'évènement temporisé dans $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ s'écrit comme suite :

$$\begin{cases} x = Ax \oplus Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Donc pour le graphe d'évènement temporisé de la figure (3.7) on obtient le modèle suivant :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma^5 \delta^4 \\ \delta & \varepsilon & \gamma^2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \gamma^2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \delta^{10} & \varepsilon & \gamma^2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^{10} & \varepsilon & \gamma^3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \gamma \\ \gamma^2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^2 & \varepsilon \end{bmatrix} x \oplus \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix} u$$

Remarque

Notons que la quantité des pièces finie est représentée par l'emploi de la transition y et sa fonction associée s'exprime par l'équation suivante :

$$y = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad e] x$$

A chaque transition du GET est associée une composante des vecteurs $x \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$ (vecteur associé aux transitions internes, ici $n = 7$), $u \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^m$ (vecteur associé aux transitions d'entrée, ici $m = 2$) et $y \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^l$ (vecteur associé aux transitions de sortie, ici $l = 1$). Les matrices $A \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times n}$, $B \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times m}$, $C \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times n}$ représentent l'interaction entre ces transitions.

Par exemple la composante $A_{5,6} = \gamma^3$ traduit la présence de 3 jetons dans la place séparant les transitions x_6 et x_5 , de manière duale, la composante $A_{4,3} = \delta^{10}$ indique qu'une temporisation de 10 unités de temps est attachée à la place séparant les transitions x_3 et x_4 .

La résolution de l'équation au point fixe permet d'établir un modèle entrée-sortie du système.

Dans notre exemple, cette matrice de transfert, $H \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times m}$ est :

$$H = CA^*B$$

Avec : $H = [h_{11} \quad h_{12}]$

$$h_{11} = [e \oplus (\gamma^0 \delta^{29} \oplus \gamma^1 \delta^{31} \oplus \gamma^2 \delta^{39} \oplus \gamma^3 \delta^{41} \oplus \gamma^4 \delta^{49} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^*]$$

$$h_{12} = [\gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^4 \oplus \gamma^3 \delta^6 \oplus \gamma^4 \delta^8 \oplus (\gamma^5 \delta^{33} \oplus \gamma^6 \delta^{35} \oplus \gamma^7 \delta^{43} \oplus \gamma^8 \delta^{45} \oplus \gamma^9 \delta^{53} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^*]$$

De manière générale, les éléments de la matrice de transfert représentant un GET sont des séries périodiques et causales de la forme : $p \oplus qr^*$, avec p et q des polynômes et r un monôme à exposants dans \mathbb{N} . Le polynôme p caractérise le comportement transitoire de la série, le polynôme q représente un motif qui se répète périodiquement, la périodicité étant fournie par $r = \gamma^v \delta^\tau$ où v/τ caractérise le taux de production de la série.

Dans notre exemple on a le taux de production de la série qui est égale a :

$$r = \gamma^5 \delta^{33} \text{ Ce qui donne } r = \frac{33}{5} = 6.6 \text{ unité de temps.}$$

3.5.5. Synthèse d'un observateur

On reprend l'exemple et on lui rajoute l'observateur d'état qu'on a présenté par la figure (3.1).

- **Cas sans perturbation**

Nous avons la représentation d'état suivante:

$$x_{sys} = A x \oplus B u = A^* B u$$

$$x_{sys} = \begin{bmatrix} \gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^4 \oplus \gamma^4 \delta^5 \oplus (\gamma^5 \delta^{33} \oplus \gamma^6 \delta^{35} \oplus \gamma^7 \delta^{43} \oplus \gamma^8 \delta^{45} \oplus \gamma^9 \delta^{53} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^0 \delta^1 \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^4 \oplus \gamma^3 \delta^5 \oplus \gamma^4 \delta^{14} \oplus (\gamma^5 \delta^{34} \oplus \gamma^6 \delta^{36} \oplus \gamma^7 \delta^{44} \oplus \gamma^8 \delta^{46} \oplus \gamma^9 \delta^{54} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^0 \delta^4 \oplus \gamma^1 \delta^5 \oplus \gamma^2 \delta^{14} \oplus \gamma^3 \delta^{15} \oplus (\gamma^4 \delta^{24} \oplus \gamma^5 \delta^{37} \oplus \gamma^6 \delta^{39} \oplus \gamma^7 \delta^{47} \oplus \gamma^8 \delta^{49} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^0 \delta^{14} \oplus \gamma^1 \delta^{15} \oplus \gamma^2 \delta^{24} \oplus \gamma^3 \delta^{25} \oplus (\gamma^4 \delta^{34} \oplus \gamma^5 \delta^{47} \oplus \gamma^6 \delta^{49} \oplus \gamma^7 \delta^{57} \oplus \gamma^8 \delta^{59} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^0 \delta^{24} \oplus \gamma^1 \delta^{25} \oplus \gamma^2 \delta^{34} \oplus \gamma^3 \delta^{35} \oplus (\gamma^4 \delta^{44} \oplus \gamma^5 \delta^{57} \oplus \gamma^6 \delta^{59} \oplus \gamma^7 \delta^{67} \oplus \gamma^8 \delta^{69} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ e \oplus (\gamma^0 \delta^{27} \oplus \gamma^1 \delta^{29} \oplus \gamma^2 \delta^{37} \oplus \gamma^3 \delta^{39} \oplus \gamma^4 \delta^{47} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ e \oplus (\gamma^0 \delta^{29} \oplus \gamma^1 \delta^{31} \oplus \gamma^2 \delta^{39} \oplus \gamma^3 \delta^{41} \oplus \gamma^4 \delta^{49} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \end{bmatrix}$$

Le gain optimal dans ce cas est le suivant :

$$L_{opt} = CA^* \ \& \ CA^* B \ \neq \ CA^* B$$

$$L_{opt} = \begin{bmatrix} e \oplus (\gamma^5 \delta^4 \oplus \gamma^6 \delta^6 \oplus \gamma^7 \delta^{14} \oplus \gamma^8 \delta^{16} \oplus \gamma^9 \delta^{24} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ e \oplus (\gamma^5 \delta^5 \oplus \gamma^6 \delta^7 \oplus \gamma^7 \delta^{15} \oplus \gamma^8 \delta^{17} \oplus \gamma^9 \delta^{25} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ e \oplus (\gamma^5 \delta^8 \oplus \gamma^6 \delta^{10} \oplus \gamma^7 \delta^{18} \oplus \gamma^8 \delta^{20} \oplus \gamma^9 \delta^{28} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ e \oplus (\gamma^5 \delta^{18} \oplus \gamma^6 \delta^{20} \oplus \gamma^7 \delta^{28} \oplus \gamma^8 \delta^{30} \oplus \gamma^9 \delta^{38} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^3 \delta^1 \oplus \gamma^4 \delta^3 \oplus (\gamma^5 \delta^{28} \oplus \gamma^6 \delta^{30} \oplus \gamma^7 \delta^{38} \oplus \gamma^8 \delta^{40} \oplus \gamma^9 \delta^{48} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^1 \delta^0 \oplus \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^4 \oplus \gamma^4 \delta^6 \oplus (\gamma^5 \delta^{31} \oplus \gamma^6 \delta^{33} \oplus \gamma^7 \delta^{41} \oplus \gamma^8 \delta^{43} \oplus \gamma^9 \delta^{51} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^4 \oplus \gamma^3 \delta^6 \oplus \gamma^4 \delta^8 \oplus (\gamma^5 \delta^{33} \oplus \gamma^6 \delta^{35} \oplus \gamma^7 \delta^{43} \oplus \gamma^8 \delta^{45} \oplus \gamma^9 \delta^{53} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \end{bmatrix}$$

L'équation de l'observateur est de la forme suivante :

$$\hat{x} = x_{obs} = A^*(LCA)^*Bu = (A \oplus LC)^*Bu$$

$$x_{obs} = \begin{bmatrix} \gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^4 \oplus \gamma^4 \delta^5 \oplus (\gamma^5 \delta^{33} \oplus \gamma^6 \delta^{35} \oplus \gamma^7 \delta^{43} \oplus \gamma^8 \delta^{45} \oplus \gamma^9 \delta^{53} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^0 \delta^1 \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^4 \oplus \gamma^3 \delta^5 \oplus \gamma^4 \delta^{14} \oplus (\gamma^5 \delta^{34} \oplus \gamma^6 \delta^{36} \oplus \gamma^7 \delta^{44} \oplus \gamma^8 \delta^{46} \oplus \gamma^9 \delta^{54} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^0 \delta^4 \oplus \gamma^1 \delta^5 \oplus \gamma^2 \delta^{14} \oplus \gamma^3 \delta^{15} \oplus (\gamma^4 \delta^{24} \oplus \gamma^5 \delta^{37} \oplus \gamma^6 \delta^{39} \oplus \gamma^7 \delta^{47} \oplus \gamma^8 \delta^{49} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^0 \delta^{14} \oplus \gamma^1 \delta^{15} \oplus \gamma^2 \delta^{24} \oplus \gamma^3 \delta^{25} \oplus (\gamma^4 \delta^{34} \oplus \gamma^5 \delta^{47} \oplus \gamma^6 \delta^{49} \oplus \gamma^7 \delta^{57} \oplus \gamma^8 \delta^{59} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^0 \delta^{24} \oplus \gamma^1 \delta^{25} \oplus \gamma^2 \delta^{34} \oplus \gamma^3 \delta^{35} \oplus (\gamma^4 \delta^{44} \oplus \gamma^5 \delta^{57} \oplus \gamma^6 \delta^{59} \oplus \gamma^7 \delta^{67} \oplus \gamma^8 \delta^{69} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ e \oplus (\gamma^0 \delta^{27} \oplus \gamma^1 \delta^{29} \oplus \gamma^2 \delta^{37} \oplus \gamma^3 \delta^{39} \oplus \gamma^4 \delta^{47} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ e \oplus (\gamma^0 \delta^{29} \oplus \gamma^1 \delta^{31} \oplus \gamma^2 \delta^{39} \oplus \gamma^3 \delta^{41} \oplus \gamma^4 \delta^{49} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \end{bmatrix}$$

Les figures suivantes représentent l'état du système et l'état estimé. Elles montrent bien que la contrainte $\hat{x} \leq x$ est bien respectée, cela ce voit au niveau de la figure (3.8) où les trajectoires sont bien confondues ce qui prouve la bonne observation.

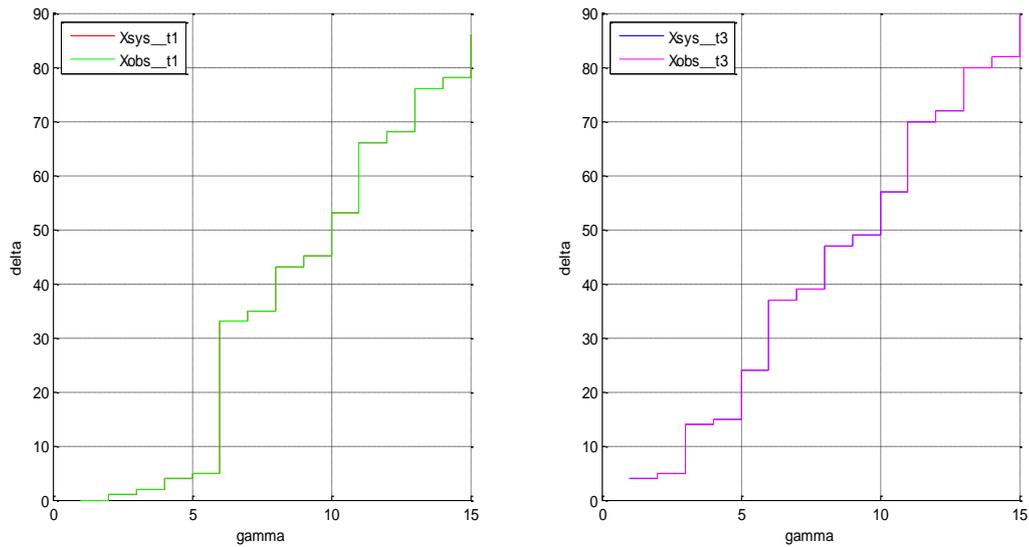


Figure 3.8 : représentation de x_{obs} et x_{sys} au niveau de la transition x_1 et x_3 .

La sortie du système :

$$y = Cx = CA^*Bu$$

$$y = e \oplus \left(\gamma^0 \delta^{29} \oplus \gamma^1 \delta^{31} \oplus \gamma^2 \delta^{39} \oplus \gamma^3 \delta^{41} \oplus \gamma^4 \delta^{49} \oplus \right) \left[\gamma^5 \delta^{33} \right]^*$$

La sortie estimée :

$$\hat{y} = C\hat{x}$$

$$\hat{y} = e \oplus \left(\gamma^0 \delta^{29} \oplus \gamma^1 \delta^{31} \oplus \gamma^2 \delta^{39} \oplus \gamma^3 \delta^{41} \oplus \gamma^4 \delta^{49} \oplus \right) \left[\gamma^5 \delta^{33} \right]^*$$

La figure suivante représente la sortie du système et la sortie du système estimé

Les deux courbes sont identiques et superposées ce qui prouve la bonne observation.

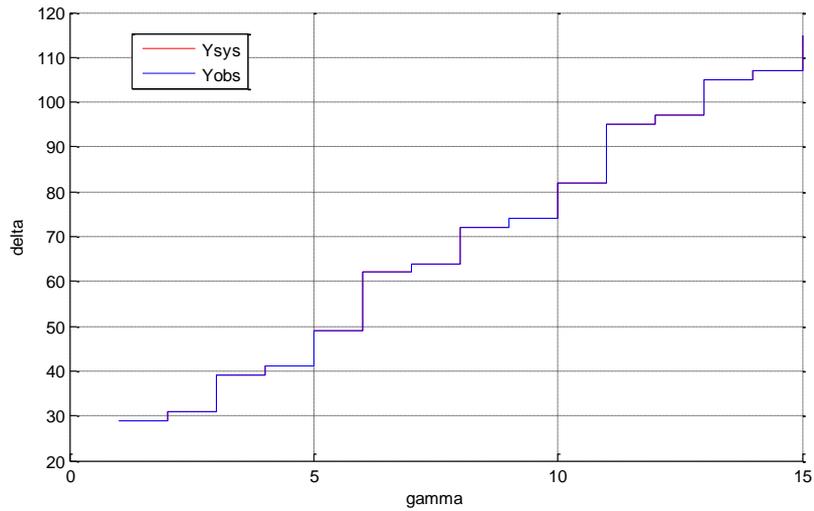


Figure 3.9 : representation de la sortie du systeme Y_{sys} .

• Cas avec perturbation :

On reprend le modèle de l'unité de production représenté dans la figure (3.7), on rajoute une perturbation w au niveau de la transition x_4 et on obtient le graphe d'évènement temporeisé représenté dans la figure (3.10) si dessous :

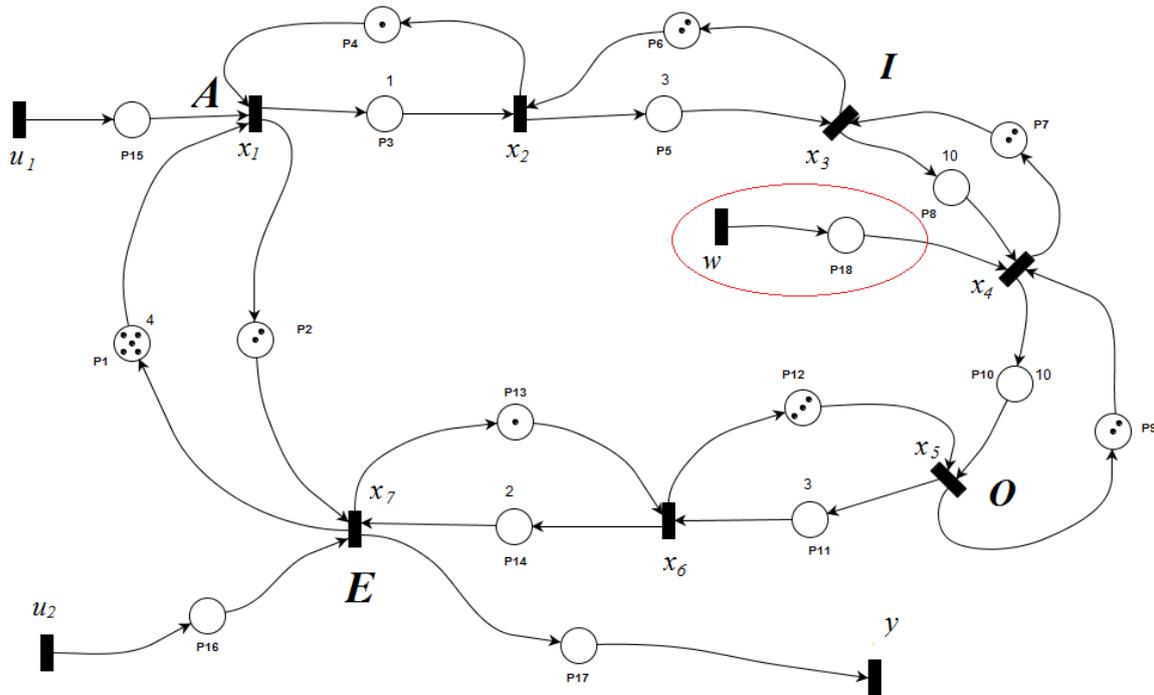


Figure 3.10 : graphe d'évènement temporeisé associé a la boucle 2 avec perturbation.

La représentation d'état du système est donnée comme suit:

$$x_{sp} = A x \oplus B u \oplus R w = A^* B u \oplus A^* R w$$

La transition w représente une perturbation qui a pour effet de retarder la sortie du GET. On considère qu'une panne surgisse à l'intérieur du four et cela à l'entrée de la partie refroidissement qui est modélisée par la transition x_4 .

Nous supposons que la panne intervient à l'événement 5 et que cette perturbation repousse le tir de la transition x_4 à l'instant 50 ($\gamma^5 \delta^{50}$) au lieu de l'instant 47 ($\gamma^5 \delta^{47}$). Après simulation sous scilab, on obtient les résultats suivants :

$$x_{sp} = \begin{bmatrix} \gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^4 \oplus \gamma^4 \delta^5 \gamma^5 \delta^{33} \oplus \gamma^6 \delta^{35} \oplus \gamma^7 \delta^{43} \oplus \gamma^8 \delta^{45} \oplus \gamma^9 \delta^{53} \oplus (\gamma^{10} \delta^{69} \oplus \gamma^{11} \delta^{71} \oplus \gamma^{12} \delta^{79} \oplus \gamma^{13} \delta^{81} \oplus \gamma^{14} \delta^{89} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^0 \delta^1 \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^4 \oplus \gamma^3 \delta^5 \oplus \gamma^4 \delta^{14} \oplus \gamma^5 \delta^{34} \oplus \gamma^6 \delta^{36} \oplus \gamma^7 \delta^{44} \oplus \gamma^8 \delta^{46} \oplus \gamma^9 \delta^{54} \oplus (\gamma^{10} \delta^{70} \oplus \gamma^{11} \delta^{72} \oplus \gamma^{12} \delta^{80} \oplus \gamma^{13} \delta^{82} \oplus \gamma^{14} \delta^{90} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^0 \delta^4 \oplus \gamma^1 \delta^5 \oplus \gamma^2 \delta^{14} \oplus \gamma^3 \delta^{15} \oplus \gamma^4 \delta^{24} \oplus \gamma^5 \delta^{37} \oplus \gamma^6 \delta^{39} \oplus \gamma^7 \delta^{50} \oplus (\gamma^9 \delta^{60} \oplus \gamma^{10} \delta^{73} \oplus \gamma^{11} \delta^{75} \oplus \gamma^{12} \delta^{83} \oplus \gamma^{13} \delta^{85} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^0 \delta^{14} \oplus \gamma^1 \delta^{15} \oplus \gamma^2 \delta^{24} \oplus \gamma^3 \delta^{25} \oplus \gamma^4 \delta^{34} \oplus \gamma^5 \delta^{50} \oplus \gamma^7 \delta^{60} \oplus (\gamma^9 \delta^{70} \oplus \gamma^{10} \delta^{83} \oplus \gamma^{11} \delta^{85} \oplus \gamma^{12} \delta^{93} \oplus \gamma^{13} \delta^{95} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^0 \delta^{24} \oplus \gamma^1 \delta^{25} \oplus \gamma^2 \delta^{34} \oplus \gamma^3 \delta^{35} \oplus \gamma^4 \delta^{44} \oplus \gamma^5 \delta^{60} \oplus \gamma^7 \delta^{70} \oplus (\gamma^9 \delta^{80} \oplus \gamma^{10} \delta^{93} \oplus \gamma^{11} \delta^{95} \oplus \gamma^{12} \delta^{103} \oplus \gamma^{13} \delta^{105} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^0 \delta^{27} \oplus \gamma^1 \delta^{29} \oplus \gamma^2 \delta^{37} \oplus \gamma^3 \delta^{39} \oplus \gamma^4 \delta^{47} \oplus (\gamma^5 \delta^{63} \oplus \gamma^6 \delta^{65} \oplus \gamma^7 \delta^{73} \oplus \gamma^8 \delta^{75} \oplus \gamma^9 \delta^{83} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^0 \delta^{29} \oplus \gamma^1 \delta^{31} \oplus \gamma^2 \delta^{39} \oplus \gamma^3 \delta^{41} \oplus \gamma^4 \delta^{49} \oplus (\gamma^5 \delta^{65} \oplus \gamma^6 \delta^{67} \oplus \gamma^7 \delta^{75} \oplus \gamma^8 \delta^{77} \oplus \gamma^9 \delta^{85} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \end{bmatrix}$$

Le gain optimal dans ce cas est égale à :

$$L_{opt} = L_{1opt} \wedge L_{2opt}$$

On a :

$$L_{1opt} = CA^* \not\subseteq CA^*B \not\subseteq CA^*B$$

$$L_{1opt} = \begin{bmatrix} e \oplus (\gamma^5 \delta^4 \oplus \gamma^6 \delta^6 \oplus \gamma^7 \delta^{14} \oplus \gamma^8 \delta^{16} \oplus \gamma^9 \delta^{24} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ e \oplus (\gamma^5 \delta^5 \oplus \gamma^6 \delta^7 \oplus \gamma^7 \delta^{15} \oplus \gamma^8 \delta^{17} \oplus \gamma^9 \delta^{25} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ e \oplus (\gamma^5 \delta^8 \oplus \gamma^6 \delta^{10} \oplus \gamma^7 \delta^{18} \oplus \gamma^8 \delta^{20} \oplus \gamma^9 \delta^{28} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ e \oplus (\gamma^5 \delta^{18} \oplus \gamma^6 \delta^{20} \oplus \gamma^7 \delta^{28} \oplus \gamma^8 \delta^{30} \oplus \gamma^9 \delta^{38} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^3 \delta^1 \oplus \gamma^4 \delta^3 \oplus (\gamma^5 \delta^{28} \oplus \gamma^6 \delta^{30} \oplus \gamma^7 \delta^{38} \oplus \gamma^8 \delta^{40} \oplus \gamma^9 \delta^{48} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^1 \delta^0 \oplus \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^4 \oplus \gamma^4 \delta^6 \oplus (\gamma^5 \delta^{31} \oplus \gamma^6 \delta^{33} \oplus \gamma^7 \delta^{41} \oplus \gamma^8 \delta^{43} \oplus \gamma^9 \delta^{51} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^4 \oplus \gamma^3 \delta^6 \oplus \gamma^4 \delta^8 \oplus (\gamma^5 \delta^{33} \oplus \gamma^6 \delta^{35} \oplus \gamma^7 \delta^{43} \oplus \gamma^8 \delta^{45} \oplus \gamma^9 \delta^{53} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \end{bmatrix}$$

Et :

$$L_{2opt} = CA^* \bowtie CA^*R \not\subset CA^*R$$

$$L_{2opt} = \begin{bmatrix} e \oplus (\gamma^5 \delta^4 \oplus \gamma^6 \delta^6 \oplus \gamma^7 \delta^{14} \oplus \gamma^8 \delta^{16} \oplus \gamma^9 \delta^{24} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ e \oplus (\gamma^5 \delta^5 \oplus \gamma^6 \delta^7 \oplus \gamma^7 \delta^{15} \oplus \gamma^8 \delta^{17} \oplus \gamma^9 \delta^{25} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ e \oplus (\gamma^5 \delta^8 \oplus \gamma^6 \delta^{10} \oplus \gamma^7 \delta^{18} \oplus \gamma^8 \delta^{20} \oplus \gamma^9 \delta^{28} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ e \oplus (\gamma^4 \delta^5 \oplus \gamma^5 \delta^{18} \oplus \gamma^6 \delta^{20} \oplus \gamma^7 \delta^{28} \oplus \gamma^8 \delta^{30} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ e \oplus (\gamma^2 \delta^5 \oplus \gamma^3 \delta^7 \oplus \gamma^4 \delta^{15} \oplus \gamma^5 \delta^{28} \oplus \gamma^6 \delta^{30} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ e \oplus (\gamma^1 \delta^0 \oplus \gamma^2 \delta^8 \oplus \gamma^3 \delta^{10} \oplus \gamma^4 \delta^{18} \oplus \gamma^5 \delta^{31} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ e \oplus (\gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^{10} \oplus \gamma^3 \delta^{12} \oplus \gamma^4 \delta^{20} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \end{bmatrix}$$

D'ou :

$$L_{opt} = L_{1opt} \wedge L_{2opt}$$

$$L_{opt} = \begin{bmatrix} e \oplus (\gamma^5 \delta^4 \oplus \gamma^6 \delta^6 \oplus \gamma^7 \delta^{14} \oplus \gamma^8 \delta^{16} \oplus \gamma^9 \delta^{24} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ e \oplus (\gamma^5 \delta^5 \oplus \gamma^6 \delta^7 \oplus \gamma^7 \delta^{15} \oplus \gamma^8 \delta^{17} \oplus \gamma^9 \delta^{25} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ e \oplus (\gamma^5 \delta^8 \oplus \gamma^6 \delta^{10} \oplus \gamma^7 \delta^{18} \oplus \gamma^8 \delta^{20} \oplus \gamma^9 \delta^{28} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ e \oplus (\gamma^5 \delta^{18} \oplus \gamma^6 \delta^{20} \oplus \gamma^7 \delta^{28} \oplus \gamma^8 \delta^{30} \oplus \gamma^9 \delta^{38} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^3 \delta^1 \oplus \gamma^4 \delta^3 (\gamma^5 \delta^{28} \oplus \gamma^6 \delta^{30} \oplus \gamma^7 \delta^{38} \oplus \gamma^8 \delta^{40} \oplus \gamma^9 \delta^{48} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^1 \delta^0 \oplus \gamma^2 \delta^3 \oplus \gamma^3 \delta^4 \oplus \gamma^4 \delta^6 (\gamma^5 \delta^{31} \oplus \gamma^6 \delta^{33} \oplus \gamma^7 \delta^{41} \oplus \gamma^8 \delta^{43} \oplus \gamma^9 \delta^{51} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^4 \oplus \gamma^3 \delta^6 \oplus \gamma^4 \delta^8 (\gamma^5 \delta^{33} \oplus \gamma^6 \delta^{35} \oplus \gamma^7 \delta^{43} \oplus \gamma^8 \delta^{45} \oplus \gamma^9 \delta^{53} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \end{bmatrix}$$

L'équation de l'observateur est de la forme suivante :

$$\hat{x} = x_{obs} = (A \oplus LC)^* Bu \oplus (A \oplus LC)^* LCA^* R w$$

$$x_{obs} = \begin{bmatrix} \gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^4 \oplus \gamma^4 \delta^5 \oplus \gamma^5 \delta^{33} \oplus \gamma^6 \delta^{35} \oplus \gamma^7 \delta^{43} \oplus \gamma^8 \delta^{45} \oplus \gamma^9 \delta^{53} \oplus (\gamma^{10} \delta^{69} \oplus \gamma^{11} \delta^{71} \oplus \gamma^{12} \delta^{79} \oplus \gamma^{13} \delta^{81} \oplus \gamma^{14} \delta^{89} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^0 \delta^1 \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^4 \oplus \gamma^3 \delta^5 \oplus \gamma^4 \delta^{14} \oplus \gamma^5 \delta^{34} \oplus \gamma^6 \delta^{36} \oplus \gamma^7 \delta^{44} \oplus \gamma^8 \delta^{46} \oplus \gamma^9 \delta^{54} \oplus (\gamma^{10} \delta^{70} \oplus \gamma^{11} \delta^{72} \oplus \gamma^{12} \delta^{80} \oplus \gamma^{13} \delta^{82} \oplus \gamma^{14} \delta^{90} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^0 \delta^4 \oplus \gamma^1 \delta^5 \oplus \gamma^2 \delta^{14} \oplus \gamma^3 \delta^{15} \oplus \gamma^4 \delta^{24} \oplus \gamma^5 \delta^{37} \oplus \gamma^6 \delta^{39} \oplus \gamma^7 \delta^{47} \oplus \gamma^8 \delta^{49} \oplus \gamma^9 \delta^{57} \oplus (\gamma^{10} \delta^{73} \oplus \gamma^{11} \delta^{75} \oplus \gamma^{12} \delta^{83} \oplus \gamma^{13} \delta^{85} \oplus \gamma^{14} \delta^{93} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^0 \delta^{14} \oplus \gamma^1 \delta^{15} \oplus \gamma^2 \delta^{24} \oplus \gamma^3 \delta^{25} \oplus \gamma^4 \delta^{34} \oplus \gamma^5 \delta^{47} \oplus \gamma^6 \delta^{49} \oplus \gamma^7 \delta^{57} \oplus \gamma^8 \delta^{59} \oplus \gamma^9 \delta^{67} \oplus (\gamma^{10} \delta^{83} \oplus \gamma^{11} \delta^{85} \oplus \gamma^{12} \delta^{93} \oplus \gamma^{13} \delta^{95} \oplus \gamma^{14} \delta^{103} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^0 \delta^{24} \oplus \gamma^1 \delta^{25} \oplus \gamma^2 \delta^{34} \oplus \gamma^3 \delta^{35} \oplus \gamma^4 \delta^{44} \oplus \gamma^5 \delta^{57} \oplus \gamma^6 \delta^{59} \oplus \gamma^7 \delta^{67} \oplus \gamma^8 \delta^{69} \oplus \gamma^9 \delta^{77} \oplus (\gamma^{10} \delta^{93} \oplus \gamma^{11} \delta^{95} \oplus \gamma^{12} \delta^{103} \oplus \gamma^{13} \delta^{105} \oplus \gamma^{14} \delta^{113} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^0 \delta^{27} \oplus \gamma^1 \delta^{29} \oplus \gamma^2 \delta^{37} \oplus \gamma^3 \delta^{39} \oplus \gamma^4 \delta^{47} \oplus \gamma^5 \delta^{60} \oplus \gamma^6 \delta^{65} \oplus \gamma^7 \delta^{70} \oplus \gamma^8 \delta^{75} \oplus \gamma^9 \delta^{80} \oplus (\gamma^{10} \delta^{96} \oplus \gamma^{11} \delta^{98} \oplus \gamma^{12} \delta^{106} \oplus \gamma^{13} \delta^{108} \oplus \gamma^{14} \delta^{116} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \\ \gamma^0 \delta^{29} \oplus \gamma^1 \delta^{31} \oplus \gamma^2 \delta^{39} \oplus \gamma^3 \delta^{41} \oplus \gamma^4 \delta^{49} \oplus (\gamma^5 \delta^{65} \oplus \gamma^6 \delta^{67} \oplus \gamma^7 \delta^{75} \oplus \gamma^8 \delta^{77} \oplus \gamma^9 \delta^{85} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \end{bmatrix}$$

La figure suivante représente l'état du système perturbé et l'état estimé.

L'application de la perturbation affecte le comportement du système, cela est distingué par le passage des jetons qui ont été retardés.

Au départ les courbes sont superposées mais après avoir appliqué la perturbation au niveau de la transition x_4 à partir du 5^{ème} franchissement, il s'est avéré un décalage entre les deux courbes, ce décalage est dû au retardement du passage du jeton qui est passé à 50 au lieu

de 47 unités de temps. On constate aussi un franchissement simultané du Jeton 6 avec le 5^{ème} qui est dû à la perturbation appliquée qui dépasse le temps de franchissement du jeton 6, cette perturbation a eu un effet sur le passage du jeton 8 qui a été retardé et qui passe aussi simultanément avec le jeton 7. A l'arrivée du jeton 10, les deux courbes se rejoignent et se superposent.

On pourra dire que la contrainte $\hat{x} \leq x$ est bien respectée, d'où la bonne observation auprès du système perturbé.

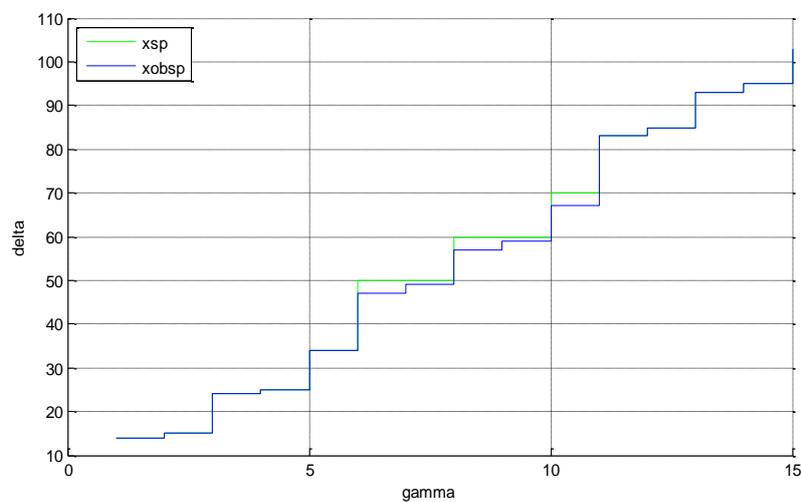


Figure 3.11: représentation de x_{obsp} et x_{sp} au niveau de la transition x_4 .

La sortie du système perturbé :

$$y_p = C \hat{x}$$

$$y_p = \gamma^0 \delta^{29} \oplus \gamma^1 \delta^{31} \oplus \gamma^2 \delta^{39} \oplus \gamma^3 \delta^{41} \oplus \gamma^4 \delta^{49} \oplus (\gamma^5 \delta^{65} \oplus \gamma^6 \delta^{67} \oplus \gamma^7 \delta^{75} \oplus \gamma^8 \delta^{77} \oplus \gamma^9 \delta^{85} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^*$$

La figure suivante représente la sortie du système idéal et la sortie du système perturbé. Au départ les deux courbes sont superposées, mais après avoir appliqué la perturbation on constate un décalage tout en gardant la même dynamique et la même pente ultime qui est de $\gamma^5 \delta^{33}$.

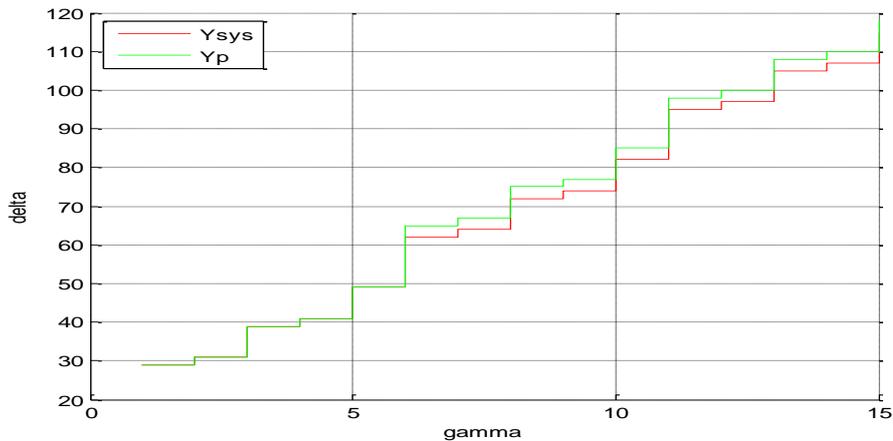


Figure 3.12 : représentation de la sortie Y_{sys} et la sortie perturbé Y_p .

3.5.6. Synthèse d'un contrôleur de type retour d'état avec observateur

On reprend l'exemple de la figure (3.10) et on propose de calculer un plus grand correcteur K_{opt} afin que le système commandé se comporte aussi proche que possible du modèle de référence souhaité comme l'indique la figure (3.3). Dans notre cas, on considère $G_{ref} = Q^*H$. En utilisant scilab on calcul G_{ref} :

$$G_{ref} = \begin{bmatrix} G_{ref11} & G_{ref12} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$G_{ref11} = \left[e \oplus (\gamma^0 \delta^{29} \oplus \gamma^1 \delta^{31} \oplus \gamma^2 \delta^{39} \oplus \gamma^3 \delta^{41} \oplus \gamma^4 \delta^{49} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \right]$$

$$G_{ref12} = \left[\gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^4 \oplus \gamma^3 \delta^6 \oplus \gamma^4 \delta^8 \oplus (\gamma^5 \delta^{33} \oplus \gamma^6 \delta^{35} \oplus \gamma^7 \delta^{43} \oplus \gamma^8 \delta^{45} \oplus \gamma^9 \delta^{53} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \right]$$

Avec L_{opt} obtenu précédemment, on calcule le plus grand correcteur K_{opt} en utilisant l'expression suivante :

$$K_{opt} = CA^*B \oslash Q^*H \oslash (A \oplus L_{opt}C)^* B$$

On obtient :

$$K_{opt} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{2,1} \\ k_{1,2} & k_{2,2} \\ k_{1,3} & k_{2,3} \\ k_{1,4} & k_{2,4} \\ k_{1,5} & k_{2,5} \\ k_{1,6} & k_{2,6} \\ k_{1,7} & k_{2,7} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$K_{1,1} = \left[e \oplus (\gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^{10} \oplus \gamma^3 \delta^{12} \oplus \gamma^4 \delta^{20} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \right]$$

$$K_{1,2} = \left[e \oplus (\gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^2 \delta^9 \oplus \gamma^3 \delta^{11} \oplus \gamma^4 \delta^{19} \oplus \gamma^5 \delta^{32} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \right]$$

$$K_{1,3} = \left[e \oplus (\gamma^2 \delta^6 \oplus \gamma^3 \delta^8 \oplus \gamma^4 \delta^{16} \oplus \gamma^5 \delta^{29} \oplus \gamma^6 \delta^{31} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \right]$$

$$K_{1,4} = \left[e \oplus (\gamma^4 \delta^6 \oplus \gamma^5 \delta^{19} \oplus \gamma^6 \delta^{21} \oplus \gamma^7 \delta^{29} \oplus \gamma^8 \delta^{31} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \right]$$

$$K_{1,5} = \left[e \oplus (\gamma^5 \delta^9 \oplus \gamma^6 \delta^{11} \oplus \gamma^7 \delta^{19} \oplus \gamma^8 \delta^{21} \oplus \gamma^9 \delta^{29} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \right]$$

$$K_{1,6} = \left[e \oplus (\gamma^5 \delta^6 \oplus \gamma^6 \delta^8 \oplus \gamma^7 \delta^{16} \oplus \gamma^8 \delta^{18} \oplus \gamma^9 \delta^{26} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \right]$$

$$K_{1,7} = \left[e \oplus (\gamma^5 \delta^4 \oplus \gamma^6 \delta^6 \oplus \gamma^7 \delta^{14} \oplus \gamma^8 \delta^{16} \oplus \gamma^9 \delta^{24} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \right]$$

Et :

$$K_{2,1} = \left[e \oplus (\gamma^0 \delta^{29} \oplus \gamma^1 \delta^{31} \oplus \gamma^2 \delta^{39} \oplus \gamma^3 \delta^{41} \oplus \gamma^4 \delta^{49} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \right]$$

$$K_{2,2} = \left[e \oplus (\gamma^0 \delta^{28} \oplus \gamma^1 \delta^{30} \oplus \gamma^2 \delta^{38} \oplus \gamma^3 \delta^{40} \oplus \gamma^4 \delta^{48} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \right]$$

$$K_{2.3} = \left[e \oplus (\gamma^0 \delta^{25} \oplus \gamma^1 \delta^{27} \oplus \gamma^2 \delta^{35} \oplus \gamma^3 \delta^{37} \oplus \gamma^4 \delta^{45} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \right]$$

$$K_{2.4} = \left[e \oplus (\gamma^0 \delta^{15} \oplus \gamma^1 \delta^{27} \oplus \gamma^2 \delta^{25} \oplus \gamma^3 \delta^{27} \oplus \gamma^4 \delta^{35} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \right]$$

$$K_{2.5} = \left[e \oplus (\gamma^0 \delta^5 \oplus \gamma^1 \delta^7 \oplus \gamma^2 \delta^{15} \oplus \gamma^3 \delta^{17} \oplus \gamma^4 \delta^{25} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \right]$$

$$K_{2.6} = \left[\gamma^0 \delta^2 \oplus \gamma^1 \delta^4 \oplus \gamma^2 \delta^6 \oplus \gamma^3 \delta^8 \oplus (\gamma^4 \delta^{22} \oplus \gamma^5 \delta^{35} \oplus \gamma^6 \delta^{37} \oplus \gamma^7 \delta^{45} \oplus \gamma^8 \delta^{47} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \right]$$

$$K_{2.7} = \left[\gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^4 \oplus \gamma^3 \delta^6 \oplus \gamma^4 \delta^8 \oplus (\gamma^5 \delta^{33} \oplus \gamma^6 \delta^{35} \oplus \gamma^7 \delta^{43} \oplus \gamma^8 \delta^{45} \oplus \gamma^9 \delta^{53} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \right]$$

Par conséquent, on peut calculer la commande u et la sortie y du système :

$$u = \left(K (A \oplus L_{opt} C)^* B \right)^* v$$

Donc on aura :

$$u = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$u_{11} = \left[e \oplus (\gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^{10} \oplus \gamma^3 \delta^{12} \oplus \gamma^4 \delta^{20} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \right]$$

$$u_{21} = \left[e \oplus (\gamma^0 \delta^{29} \oplus \gamma^1 \delta^{31} \oplus \gamma^2 \delta^{39} \oplus \gamma^3 \delta^{41} \oplus \gamma^4 \delta^{49} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \right]$$

On a aussi:

$$y_{cor} = C A^* B \left(K (A \oplus L_{opt} C)^* B \right)^* v$$

$$y_{cor} = e \oplus (\gamma^0 \delta^{29} \oplus \gamma^1 \delta^{31} \oplus \gamma^2 \delta^{39} \oplus \gamma^3 \delta^{41} \oplus \gamma^4 \delta^{49} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^*$$

La figure suivante représente la sortie du système nominal et la sortie du système bouclé. Après avoir appliqué un correcteur de type retour d'état pour le système, on constate qu'il a pu

garder le même transfert et cela se voit bien sur la superposition des deux courbes, et que les deux systèmes G_{ref} et le système corrigé (le système muni de correcteur) aient les mêmes sorties.

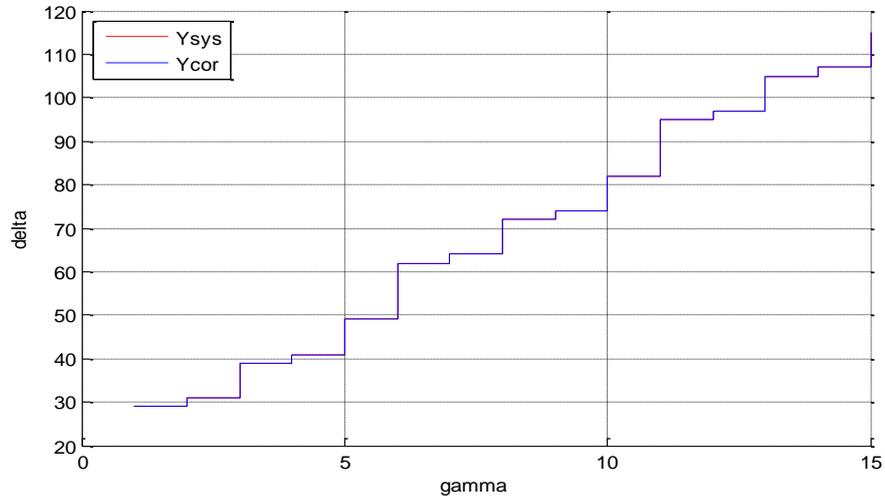


Figure 3.13 : représentation de la sortie Y_{sys} avec la sortie corrigé Y_{cor}

On suppose que

$$G_{Kopt} = CA^*B \left(K(A \oplus L_{opt}C)^* B \right)^*$$

Avec :

$$G_{Kopt} = \begin{bmatrix} G_{Kopt11} & G_{Kopt12} \end{bmatrix}$$

On a :

$$G_{Kopt11} = \left[e \oplus (\gamma^0 \delta^{29} \oplus \gamma^1 \delta^{31} \oplus \gamma^2 \delta^{39} \oplus \gamma^3 \delta^{41} \oplus \gamma^4 \delta^{49} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \right]$$

$$G_{Kopt12} = \left[\gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^4 \oplus \gamma^3 \delta^6 \oplus \gamma^4 \delta^8 \oplus (\gamma^5 \delta^{33} \oplus \gamma^6 \delta^{35} \oplus \gamma^7 \delta^{43} \oplus \gamma^8 \delta^{45} \oplus \gamma^9 \delta^{53} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \right]$$

$$G_{Kopt} = G_{ref}$$

La figure suivante représente le modèle de référence G_{ref} et le transfert en boucle fermée, G_{ref} et G_{Kopt} sont parfaitement confondues.

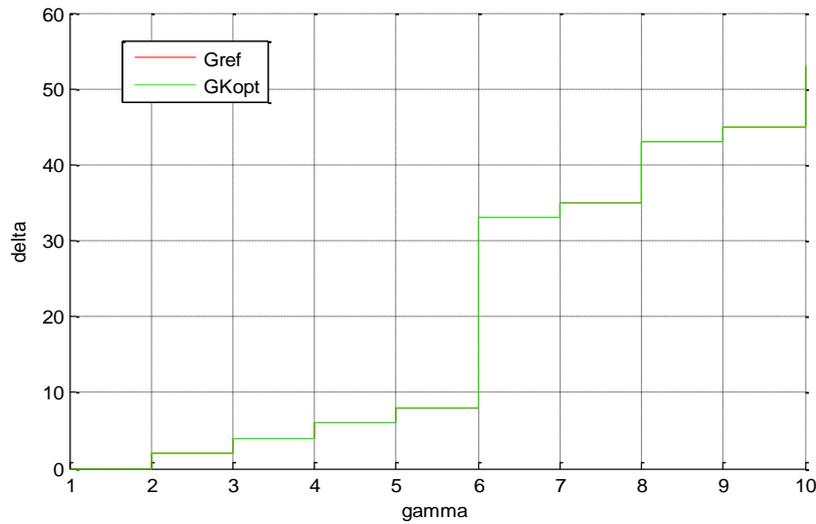


Figure 3.14 : représentation du transfert G_{Kopt} et G_{ref}

3.5.7 Synthèse d'un contrôleur de type retour de sortie

On reprend le modèle de la figure (3.10), on calcule G_{Fopt} en utilisant le gain de sortie F_{opt} qu'on a trouvé avec le transfert entrée / sortie du système sans observateur.

On a :

$$F_{opt} = H \setminus G_{ref} \notin H$$

On obtient :

$$F_{opt} = \begin{bmatrix} F_{opt11} \\ F_{opt21} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$F_{opt11} = \left[e \oplus (\gamma^5 \delta^4 \oplus \gamma^6 \delta^- \oplus \gamma^7 \delta^{14} \oplus \gamma^8 \delta^{16} \oplus \gamma^9 \delta^{24} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \right]$$

$$F_{opt21} = \left[\gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^4 \oplus \gamma^3 \delta^6 \oplus \gamma^4 \delta^8 \oplus (\gamma^5 \delta^{33} \oplus \gamma^6 \delta^{35} \oplus \gamma^7 \delta^{43} \oplus \gamma^8 \delta^{45} \oplus \gamma^9 \delta^{53} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^* \right]$$

On calcule G_{Fopt} :

$$G_{Fopt} = H(F_{opt}H)^*$$

On obtient le résultat suivant :

$$G_{Fopt} = [G_{Fopt11} \quad G_{Fopt12}]$$

Avec :

$$G_{Fopt11} = [e \oplus (\gamma^0 \delta^{29} \oplus \gamma^1 \delta^{31} \oplus \gamma^2 \delta^{39} \oplus \gamma^3 \delta^{41} \oplus \gamma^4 \delta^{49} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^*]$$

$$G_{Fopt12} = [\gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^4 \oplus \gamma^3 \delta^6 \oplus \gamma^4 \delta^8 \oplus (\gamma^5 \delta^{33} \oplus \gamma^6 \delta^{35} \oplus \gamma^7 \delta^{43} \oplus \gamma^8 \delta^{45} \oplus \gamma^9 \delta^{53} \oplus) [\gamma^5 \delta^{33}]^*]$$

$$G_{Fopt} = G_{ref}$$

La figure suivante représente le modèle de référence G_{ref} et le transfert en boucle fermée, G_{ref} et G_{Fopt} sont parfaitement confondues.

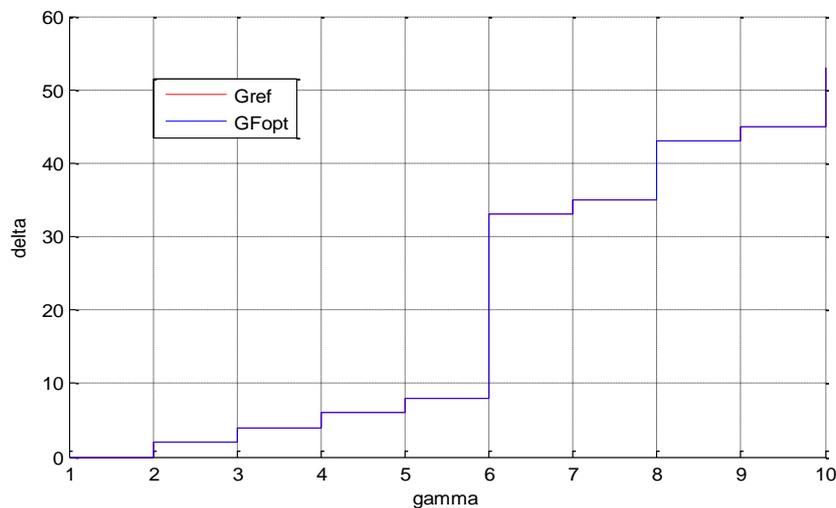


Figure 3.15 : représentation du transfert G_{Fopt} et G_{ref}

Comme dans notre cas le modèle de référence est le même avec le modèle nominal, on a trouvé $G_{Fopt} = G_{Kopt} = G_{ref}$, d'après ce résultat on a pu montrer que pour un GET, il est possible de conserver son propre transfert en gardant son comportement entrée/sortie inchangé.

Afin de prouver que le correcteur de type retour d'état améliore les performances, engendre une commande plus grande et un système corrigé plus proche du modèle de référence, on reprend avec un exemple d'une machine d'atelier d'assemblage [25] dont le modèle de référence est différent avec le modèle nominal.

3.6. Exemple supplémentaire :

Nous considérons l'exemple de la figure suivante :

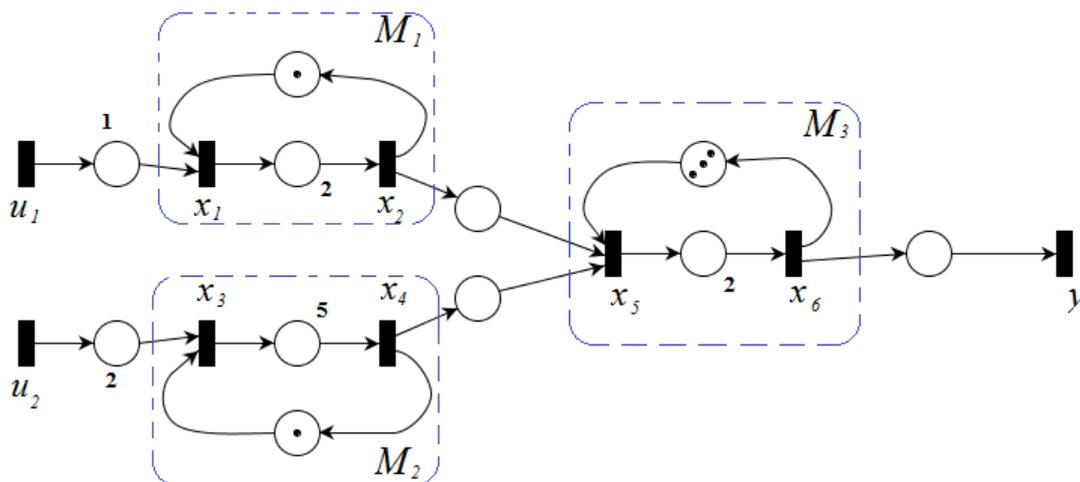


Figure 3.16 : Exemple d'atelier d'assemblage.

Ce GET représente le comportement d'un atelier d'assemblage, constitué de 3 machines M_1 , M_2 et M_3 . La transition u_1 caractérise l'entrée de matière première dans l'atelier, la transition x_1 représente l'introduction de la matière dans la machine M_1 , pour cela il doit y avoir un jeton dans la place située entre x_2 et x_1 (c'est à dire que la machine doit être libre), et la transition u_1 doit être tirée depuis 1 unité de temps. Après 2 unités de temps, la transition x_2 sera franchie (sortie de la machine). La transition x_5 représente l'entrée dans la machine M_3 qui

assure l'assemblage du produit provenant des machines M_1 et M_2 . La transition y représente la sortie du produit final.

Le modèle d'état de ce GET dans $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ est donné par :

$$x = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \delta^5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta & \varepsilon & \delta^2 & \varepsilon & \gamma^3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^2 & \varepsilon \end{bmatrix} x \oplus \begin{bmatrix} \delta & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^2 \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} u$$

$$y = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad e] x$$

- **Synthèse d'un correcteur de type retour de sortie**

Nous rappelons le modèle entrée / sortie de ce système :

$$H = C A^* B = \begin{bmatrix} \delta^6 (\gamma^1 \delta^2)^* & \delta^{12} (\gamma^1 \delta^5)^* \end{bmatrix}$$

Pour ce modèle nous choisissons le modèle de référence suivant :

$$G_{ref} = (\gamma^1 \delta^5)^* H$$

De telles sortes que les deux composantes de la matrice de transfert auront le même taux de production

$$G_{ref} = (\gamma^1 \delta^5)^* H = G_{ref} = \begin{bmatrix} \delta^6 (\gamma^1 \delta^5)^* & \delta^{12} (\gamma^1 \delta^5)^* \end{bmatrix}$$

Le correcteur de type retour de sortie optimal est donné par :

$$F_{opt} = H \setminus G_{ref} \not\in H$$

$$F_{opt} = \begin{bmatrix} \gamma^2 \delta^4 (\gamma \delta^5)^* \\ \gamma^3 \delta^3 (\gamma \delta^5)^* \end{bmatrix}$$

Où F_{opt} est le plus grand retour de sortie. Il conduit au transfert entrée / sortie suivant :

$$G_{F_{opt}} = H (F_{opt} H)^*$$

$$G_{F_{opt}} = \left[\gamma^0 \delta^6 \oplus \gamma^1 \delta^8 \oplus (\gamma^2 \delta^{16}) [\gamma^1 \delta^5]^* \quad \gamma^0 \delta^{12} [\gamma^1 \delta^5]^* \right]$$

Avec ce résultat, on montre bien que :

$$G_{F_{opt}} \approx G_{ref}$$

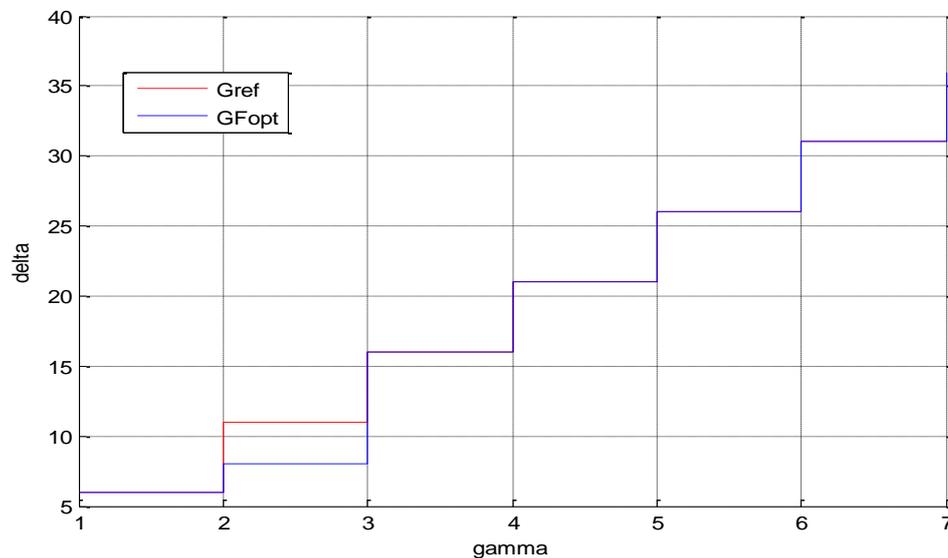


Figure 3.17 : représentation du transfert $G_{F_{opt}}$ et G_{ref}

- **Synthèse d'un correcteur de type retour d'état avec observateur**

Nous reprenons l'exemple de la figure (3.16) avec les mêmes objectifs avec le retour de sortie.

Le transfert entrée / sortie :

$$H = C A^* B = \left[\delta^6 (\gamma^1 \delta^2)^* \quad \delta^{12} (\gamma^1 \delta^5)^* \right]$$

Le modèle de référence choisit :

$$G_{ref} = (\gamma^1 \delta^5)^* H = G_{ref} = \begin{bmatrix} \delta^6 (\gamma^1 \delta^5)^* & \delta^{12} (\gamma^1 \delta^5)^* \end{bmatrix}$$

On rappelle que le gain optimal de l'observateur est donné par :

$$L_{opt} = CA^* \oslash H \oslash H$$

$$L_{opt} = \begin{bmatrix} \gamma^3 \delta^1 (\gamma \delta^2)^* \\ \gamma^2 \delta^1 (\gamma \delta^2)^* \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \gamma^1 \delta^0 (\gamma \delta^2)^* \\ \gamma^0 \delta^0 (\gamma \delta^2)^* \end{bmatrix}$$

On rappelle aussi que :

$$K_{opt} = H \oslash G_{ref} \oslash (A \oplus L_{opt} C)^* B$$

Où K_{opt} est le plus grand retour d'état avec observateur. Il conduit au transfert entrée / sortie suivant :

$$G_{Kopt} = CA^* B \left(K (A \oplus L_{opt} C)^* B \right)^*$$

$$G_{Kopt} = \begin{bmatrix} \gamma^0 \delta^6 [\gamma^1 \delta^5]^* & \gamma^0 \delta^{12} [\gamma^1 \delta^5]^* \end{bmatrix}$$

D'après ce résultat on a :

$$G_{Kopt} = G_{ref}$$

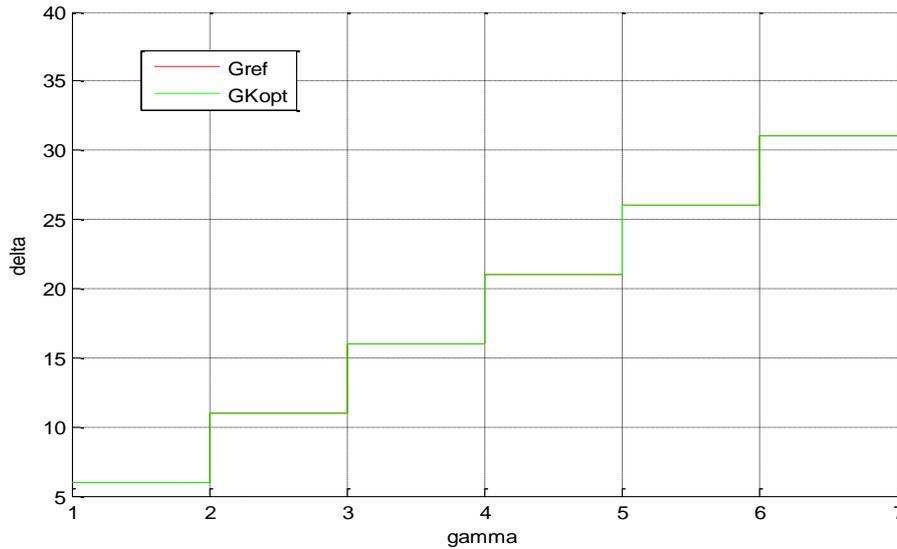


Figure 3.18 : représentation du transfert G_{Kopt} et G_{ref}

D'après les figures (3.17) et (3.18), on montre clairement que $G_{Fopt} \approx G_{Kopt}$, c'est à dire le correcteur de type retour d'état avec observateur est plus performant que celui avec retour de sortie.

3.7. Conclusion :

Dans cette partie nous avons vu une conception d'observateur. On a considéré que l'état d'estimation en présence de perturbation est basé sur l'observateur de Luenberger, et l'efficacité de cette méthode est illustrée par les résultats de simulation donnée par l'utilisation de scilab.

Par la suite nous avons présenté une synthèse d'un contrôleur de type retour d'état avec observateur et un correcteur de type retour de sortie dans le but d'avoir le comportement du système commander aussi proche que possible du modèle de référence. Et nous avons montré que pour un GET il est possible de préserver son propre transfert et cela avec un contrôleur de type retour d'état qui est plus performant qu'un contrôleur de type retour de sortie.

Conclusion générale

Les systèmes dynamiques à événements discrets mettant en jeu des phénomènes de synchronisations et de délais, sont représentés par des Graphes d'événements temporisés (GET), qui constituent une sous classe de réseaux de Petri (RDP), dont chaque place n'admet qu'une transition en amont et une transition en aval. Leur comportement peut être décrit par des équations linéaires dans les algèbres de type $(max, +)$ ou $(min, +)$. Cette propriété a motivé l'élaboration de ce que l'on appelle la théorie des systèmes linéaire dans les dioïdes. Cette théorie présente de nombreuses analogies avec la théorie conventionnelle des systèmes linéaires continus et permet notamment d'aborder des problèmes de synthèse d'observateur et de commande.

Dans un premier lieu, nous avons présenté les outils algébriques nécessaires à l'étude des Graphes d'événements temporisés dans les dioïdes. Une grande importance a été donnée à la théorie de la résiduation, qui fournit une réponse au problème d'inversion d'application dans les dioïdes. Ensuite, une partie est consacrée à la représentation des GET dans l'algèbre des dioïdes (représentation aux dateurs et aux compteurs). A partir de ces équations, une représentation d'état linéaire peut être obtenue. A l'image de la transformée en z des systèmes échantillonnés, les systèmes $(max, +)$ linéaires sont dotés de la transformée en γ, δ , qui permet de représenter les systèmes par leur fonction de transfert.

L'objectif de ce mémoire est la synthèse d'observateur de Graphe d'événement temporisé représenté dans le dioïde $M_{in}^{ax+}[\gamma, \delta]$, ainsi que la commande par retour d'état avec observateur. Afin de reconstruire l'état d'un Graphes d'événement temporisés nous avons adoptés la même démarche que celle suggérée lors de la synthèse d'observateur pour les systèmes classiques. Néanmoins, dans le dioïde $M_{in}^{ax+}[\gamma, \delta]$, le problème est résolu en utilisant la théorie de la résiduation, deux cas ont été considéré, le premier sans perturbation, et deuxième en présence de perturbation. Les résultats de simulations sur Scilab, ont montré l'efficacité de l'approche utilisée.

Ensuite, un correcteur de type retour d'état avec observateur est calculé dans l'objectif de la poursuite de modèle. Partant d'un modèle nominal d'un GET et d'une spécification entrée-sortie donné (modèle de référence), un observateur peut être utilisé pour estimer l'état nécessaire à la mise en place d'un correcteur de type retour d'état. Notons que les correcteurs de type retour de sortie et de type retour d'état sont liés, un contrôle de type retour de sortie avec observateur, dans le but de s'approcher au mieux du comportement d'un modèle de référence, a été aussi évoqué. On a constaté que le contrôle par retour d'état avec observateur

Conclusion générale

est plus performant que le contrôle par retour de sortie, c'est-à-dire qu'il engendre une commande plus grande et un système corrigé plus proche du modèle de référence. Cela peut se remarquer dans le cas où la dynamique du système est modifiée. Dans notre étude nous avons considéré le modèle de référence et le modèle nominal sont les mêmes, c'est-à-dire que notre objectif est de laisser le comportement entrée/sortie du système inchangé.

Bibliographie

- [1] Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J.-P., and Viot, M. *Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioïdes. Rapport de recherche 191, INRIA, Le Chesnay, France, 1983.*
- [2] Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J.-P., and Viot, M. *A linear system theoretic view of discrete event processes and its use for performance evaluation in manufacturing. IEEE Trans. On Automatic Control, 1985.*
- [3] Houssin, L. *Contribution à l'étude des systèmes à événements discrets dans l'algèbre des dioïdes. Applications aux systèmes de transport. Rapport de stage de DEA, DEA Automatique et Informatique Appliquée, Nantes-Angers, France, 2003.*
- [4] Le Boudec, J.-Y. and Thiran, P. *Newtork Calculus. SpringerVerlag, 2001.*
- [5] Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G., and Quadrat, J. *Synchronisation and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems. John Wiley and Sons, New York, 1992.*
- [6] Gaubert, S. *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, Paris, 1992.*
- [7] Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J., and Viot, M. *Algebraic Tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems. IEEE Proceedings: Special issue on Discrete Event Systems, 1989.*
- [8] Cohen, G. *Two-dimensional domain representation of timed event graphs. In Summer School on Discrete Event Systems, Spa, Belgium, 1993.*
- [9] Cottenceau, B. *Contribution à la commande des systèmes à événements discrets : synthèse de correcteurs pour les graphes d'événements temporisés dans les dioïdes. Thèse de doctorat, ISTIA - Université d'Angers, 1999*
- [10] Laurent, H., Carlos, A.M., Bertrand, C. and Mehdi, L. *Observer design for (max, +) linear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, VOL.55, 2010*
- [11] Luenberger, D G. *Observers for multivariable Systems, IEEE Trans. on Automatic Control , Vol. AC-II,NO.2, pp.190-197, April 1966.*
- [12] Cohen, G. *Résiduation and Applications. In Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique : Ecole de printemps d'informatique théorique, Noirmoutier : INRIA, 1998.*
- [13] Davey, B. and Priestley, H. *Introduction to lattices and order. Cambridge University press, 1990.*
- [14] Menguy, E. *Contribution à la commande des systèmes linéaires dans les dioïdes. Thèse de doctorat, LISA, Université d'Angers, 1997.*
- [15] Grätzer, G. *General Lattice Theory. Birkhäuser Verlag, 2003.*
- [16] Tarski, A. *A lattice theoretical fixed point theorem and its applications. Pacific Journal of Mathematics, 1955.*

- [17] Lahaye, S. *Contribution à l'étude des systèmes linéaires non stationnaires dans l'algèbre des dioïdes*. Thèse de doctorat, ISTIA - Université d'Angers, 2000.
- [18] Houssin, L., Lahaye, S., and Boimond, J. L. *Just-in-time control of constrained (max, +)-linear systems*. *Journal of Discrete Event Dynamic Systems* (à paraître), 2007.
- [19] R. David et H. Alla. *Du grafctet aux réseaux de Petri*. Editions Hermès, Paris, 1992.
- [20] T. Murata. *Petri Nets: Properties, Analysis and Applications*. In *IEEE Proceedings: Special issue on Discrete Event Systems*, volume 77, 1989.
- [21] M. Lhommeau. *Étude de systèmes à événements discrets dans l'algèbre (max, +) : 1. Synthèse de correcteurs robustes dans un dioïde d'intervalles. 2. Synthèse de correcteurs en présence de perturbations*. PhD thesis, LISA - Université d'Angers, 2003.
- [22] Cohen, G. *Théorie algébrique des systèmes à événements discrets*. Polycopié de cours de l'École des Mines de Paris, 1995.
- [23] J.M. Proth. *Les réseaux de Petri pour la conception et la gestion des systèmes de production*. Edition MASSON, 1995.
- [24] Houssin, L., Lahaye, S., and Boimond, J. L. *Control of constrained (max, +)-linear systems minimizing delays*. In *Proceedings of INCOM'2006, Saint-Etienne, France*, 2006.
- [25] Laurent, H. *sur la commande des systèmes (max, +) linéaires*. DEA automatique et informatique appliquée, Angers. 2008.
- [26] Amari. S. *commande des graphes d'évènements temporisés sous contraintes temporelle*, thèse doctorat, institut de recherche en communication et cybernétique de Nantes, 2005.

Annexes

A. MinMaxGD : librairie de calcul dans le dioïde $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$.

La librairie MinMaxGD [25] se présente comme un ensemble d'instructions écrites en C++, liées au logiciel Scilab. Cette librairie permet de manipuler des séries rationnelles dans le dioïde $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

Dans la suite de cette annexe, on trouvera l'ensemble des scripts Scilab utilisés pour effectuer les différents calculs.

Tout d'abord, nous allons découvrir l'utilisation de la MinMaxGD dans Scilab à travers un exemple. L'exemple traité dans la suite correspond à notre système de production illustre à la figure (3.3).

=====

Scilab-3.1.1

Copyright (c) 1989-2005

Consortium Scilab (INRIA, ENPC)

=====

Startup exécution:

Loading initial environment

Commençons par charger la librairie dans l'environnement Scilab

```
-->scipad ('C:\PROGRA~1\SCILAB~1.1\MINMAX~1.1\loader.sce');
```

```
-->shared archive loaded
```

```
MACROS =
```

```
C:\Program Files\scilab-3.1.1\minmaxgd1.1\macros\
```

La commande $A = \text{smatrix}(m, n)$ permet de déclarer une matrice (notée A) de m lignes et n colonnes. Après la déclaration, tous les termes de la matrices sont initialisés à ε .

L'initialisation s'effectue à l'aide de la commande `series`. Par exemple pour initialiser l'élément (1,2) de la matrice A à une série $A(1,2) = \gamma^5 \delta^{33}$

La syntaxe serait la suivante :

$$A(1,2) = \text{series}(\text{eps}, [5 \ 33], e)$$

Le calcul de la fonction de transfert du système $H = CA^*B$. Dans Scilab ce calcul est donné par l'instruction suivante :

$$H = C * \text{stargd}(A) * B$$

Syntaxe générale

MinMaxGD reconnaît les types élémentaires suivants : type série (noté séries) et le type matrice (noté smatrix) correspondant au dioïde $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$. MinMaxGD reconnaît les opérations algébriques de base suivantes (soit deux éléments a et $b \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$)

| Opération | syntaxe |
|---|-----------------|
| \oplus (somme) | $a + b$ |
| \otimes (produit) | $a * b$ |
| \oslash (résiduation à droite) | a/b |
| \oslash (résiduation à gauche) | $a \setminus b$ |
| $*$ (étoile de Kleene) | $Stargd(a)$ |
| Pr_+ (projection dans les causaux) | $Parcaus(a)$ |

Script Scilab

```
Clc

//initialisation des matrices

A=smatrix(7,7); //matrice d'état

B = smatrix(7,2)

C = smatrix(1,7)

//affectation des valeurs des matrices

//la matrice d'état:

    A(1,2)=series(eps,[1 0],e);

    A(1,7)=series(eps,[5 4],e);

    A(2,1)=series(eps,[0 1],e);

    A(2,3)=series(eps,[2 0],e);

    A(3,2)=series(eps,[0 3],e);

    A(3,4)=series(eps,[2 0],e);

    A(4,3)=series(eps,[0 10],e);

    A(4,5)=series(eps,[2 0],e);

    A(5,4)=series(eps,[0 10],e);

    A(5,6)=series(eps,[3 0],e);

    A(6,5)=series(eps,[0 3],e);

    A(6,7)=series(eps,[1 0],e);

    A(7,1)=series(eps,[2 0],e);
```

```
A(7,6)=series(eps,[0 2],e);
```

```
//la matrice de commande:
```

```
B(1,1)=series(eps,[0 0],e);
```

```
B(7,2)=series(eps,[0 0],e);
```

```
//la matrice d'observation:
```

```
C(1,7)=series(eps,[0 0],e);
```

```
// calcul du la fonction de transfert
```

```
At = stargd(A)
```

```
H=C*At*B
```

```
//calcul de Lopt
```

```
Lopt = CA \ H / H
```

```
Lopt=prcaus(Lopt)
```

```
//calcul de X(system)
```

```
Xsys = AA*B*U
```

```
Y=C*Xsys
```

B. Principe d'un observateur :

Un observateur fait deux phases : la première est une étape d'estimation et la seconde est une étape de correction, l'estimation se fait par le calcul des grandeurs d'états à l'aide des modèles proches du système, la correction se fait par l'addition ou la soustraction de la différence entre les états estimés et ceux mesurés (erreur d'estimation) que l'on multiplie par un gain L . ce gain régie la dynamique et la robustesse de l'observateur.

Son objectif est de reconstruire des grandeurs dont on ne peut ou on ne désire pas mesurer l'état par une méthode directe.

Classification des observateurs :

Il existe de nombreuses techniques d'observation différentes selon :

La nature du système et enfin la dimension du vecteur d'état à estimer.

✓ En fonction de la nature du système :

- Observateurs pour les systèmes linéaires :

Ce sont les observateurs dont la construction du gain est basée sur une matrice L du système qui est statique, linéaire.

Pour les problèmes de l'estimation de l'état du système linéaire une solution optimale a été évoluée par Luenberger dans le cadre déterministe.

- observateurs pour les systèmes non linéaires :

Ce type d'observateurs malheureusement ne présente pas de bonne propriété de convergence, pour cette raison leurs conception pose problèmes où les projets de recherche restent intensif, on cite parmi eux :

- Observateurs où les gains de correction sont calculés à partir d'une analyse par la méthode de Lyapunov.
- Observateurs à structure variables (modes glissants).

- Observateurs à grand gain.

✓ En fonction de la dimension du vecteur d'état deux catégories se manifestent :

- Observateurs d'ordre complet :

Ces observateurs présentent les informations sur les quatre variables d'états, Ils se caractérisent par le fait que son temps d'exécution est fortement long.

