



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI TIZI-OUZOU
FACULTE DU GENIE DE LA CONSTRUCTION
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME

MASTER 2 ACADEMIQUE

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Construction Mécanique

THEME

Analyse numérique, expérimentale et analytique des champs de contraintes dans le contact mécanique entre solides (rigide-déformable et déformable-déformable).

Proposé par

Mr BELDI. M

Présenté par

Manseur Tania

Bouksil Hadjira

2018/2019

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions Dieu, notre créateur de nous avoir donné la force, la volonté et le courage afin d'accomplir ce présent travail.

Nous tenons tout particulièrement à exprimer notre profonde gratitude à notre promoteur Mr BELDI MUSTAPHA pour nous avoir suivis de près tous au long de notre travail.

Nous remercions vivement le président et les membres de jury pour nous avoir honorés et acceptés d'examiner ce mémoire.

Aussi nos remerciement vont à tous ceux qui ont contribues, de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Sans oublier les enseignants qui ont contribués à notre formation. Nous leurs dirons merci pour les années de sacrifice et bien veillance.

DEDICACE

Nous sommes sages, intelligents et inventifs mais
Dieu est créateur, il est au-dessus de tous ;

Dieu est grand.

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents (Rachid et Karima).

Ma très chère grand-mère (Messaouda) et à la
mémoire de mon grand père(Amar) paix à son âme

Celui qui était toujours ma source de courage et de
bonheur mon Marie (ALI).

Mes très chers frères et ma sœur

Tous mes cousins et cousines et à toute ma famille
et ma belle famille Alouane
Et à tous mes amis(es).

Manseur Tania

DEDICACE

Nous sommes sages, intelligents et inventifs mais
Dieu est créateur, il est au-dessus de tous ;
Dieu est grand.

A mes chers parents, que nulle dédicace ne puisse
exprimer mes sincères sentiments,
Pour tous les sacrifices qu'ils ont faits à mon
égard.

Que ceci leurs soit une récompense et un
témoignage de ma profonde gratitude.

A mes frères et ma sœur, auxquels je souhaite tout
le bonheur et le succès dans la vie.

Qu'ils trouvent ici la récompense de leurs efforts et
un témoignage de mon profond amour.

A la mémoire de mon cousin « meziane » que dieu
l'accueille dans son vaste paradis.

Mes chers ami(e)s, pour leurs soutiens.

Et à toute ma famille et à tous ceux que j'aime.

Bouksil Hadjira.

Introduction Générale

Chapitre I

Etude Bibliographique

Chapitre II

Généralités Sur La Photoélasticimétrie

Chapitre III

La théorie d'Hertz et le contact mécanique

Chapitre IV

Partie expérimental

Conclusion Générale

Sommaire

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre I : Etude bibliographique

I.1 Le problème du contact en mécanique des solides.....	3
I.2 Quelques travaux réalisés dans le problème de contact.....	3
I.3 Méthode d'analyse des contraintes en photoélasticimétrie 2D.....	7
I.4 Méthodes d'analyse des contraintes en photoélasticimétrie 3D.....	9
I.4.1 Méthode de découpage optique.....	10
I.6 Conclusion.....	15

Chapitre II : Généralités sur la photoélasticimétrie

II.1 Introduction.....	16
II.2 Principe de la photoélasticimétrie	17
II.3 Intérêts et applications	18
II.3.1 Applications industrielles	18
II.3.2 Applications en architecture	18
II.3.3 Applications en biomécanique	18
II.4 phénomène de la biréfringence	18
II.4.1 La biréfringence naturelle.....	19
II.4.2 La biréfringence accidentelle	19
II.5 Les polaroids.....	20
II.5.1 Le polariseur.....	20
II.5.2 L'analyseur.....	20
II.6 Description de la réfraction	20
II.6.1 Définition du l'indice de réfraction.....	20
II.7. Constante de frange.....	21
II.8. Différents types de polariscopes.....	22
II.9. Eléments d'un polariscopes.....	23

II.9.1 Sources lumineuses.....	23
II.10 Notion de champ clair et de champ obscur.....	24
II.10.1 Polariseur plan	24
II.10.2 Polariscope circulaire	24
II.11. Les isoclines.....	24
II.11.1 Propriétés des isoclines	24
II.11.2 Elimination des isoclines	24
II.12. Point isotrope	26
II.13. Les isostatiques	26
II.14 Conclusion.....	27

Chapitre III : La théorie d’Hertz et le contact mécanique

III.1 Introduction.....	27
III.2 historique	27
III.3 Contraintes développées dans un contact d’hertz.....	28
III.3.1 Distribution des contraintes du contact cylindre sur cylindre.....	28
III.3.2 Contact cylindre sur plan	29
III.3.3 Contact poinçon sur plan.....	33
III.4 Application d’un effort tangentiel.....	34
III.4.1 Contact poinçon sur plan à l’aide d’un effort tangentiel.....	34
III.5 Conclusion.....	35

Chapitre IV: Partie Expérimentale

IV.1. Introduction.....	36
IV.2. Identification du modèle.....	36
IV.3. Vérification du modèle.....	37
IV.3.1 Définition des contraintes résiduelles.....	37
IV.4. Analyse expérimentale du contact dans le modèle.....	38
IV.4.1. Dispositif expérimental.....	38
IV.5. Détermination de la constante de frange.....	39
IV.5.1 Essai de flexion 4 points.....	39

IV.6. Analyse expérimentale des contraintes.....	43
IV.6.1. La variation de la contrainte de cisaillement maximale suivant l'axe [AB].....	43
IV.6.2. Visualisation du réseau d'isochromes sur le modèle en champ clair.....	44
IV.7 Calcul de la valeur τ_{max} suivant le segment [AB].....	45
IV.8. Les franges isoclines.....	47
IV.9. Analyse numérique des contraintes.....	48
IV.9.1. Calcul des champs de contraintes à l'aide du logiciel CASTEM.....	48
IV.9.2. Visualisation des franges isochromes.....	51
IV.9.3. Visualisation des isoclines.....	52
IV.9.4. La variation de la contrainte de cisaillement maximale le long de la droite [AB].....	53
IV.10.Méthode analytique	54
IV.10.1 Résultat obtenue avec MATLAB.....	55
IV.11. Comparaison des résultats.....	57
IV.11.1. Superposition des courbes.....	57
IV.11.2 Réseau d'isochromes.....	57
IV.11.3. Comparaison des isoclines.....	58
IV.11. Discussion des résultats.....	59
IV.12 Conclusion.....	60
Conclusion générale.....	61

NOMENCLATURE ET SYMBOLES

R: Rayon du cylindre [mm]

C: Constante optique relative du matériau biréfringent

C_0 : La vitesse de la lumière dans le vide

V : vitesse de la lumière dans le milieu considéré

E1: Module de Young de l'époxy [MPa]

E2: Module de Young de l'acier [MPa]

E_{eq} : Module de Young équivalent [MPa]

N: Ordre de frange du modèle

H : Point de Hertz

P_0 : Pression maximale [MPa]

U : Direction d'observation

V : Direction de propagation

X : Axe du polariseur

Y : Axe du l'analyseur

f : Constante de frange du modèle

e : épaisseur du modèle [mm]

b : Demi largeur de contact [mm]

σ_{xx} : Contrainte normale sur la face xx

σ_{zz} : Contrainte normale sur la face zz

σ_{xz} : Contrainte normale sur la face xz

σ_{xy} : Contrainte de cisaillement

τ_{max} : Contraintes de cisaillement maximales [MPa]

λ : Longueur d'onde

μ_1 : Coefficient de Poisson du modèle en époxy

μ_2 : Coefficient de Poisson du modèle en acier

I(x,y) : Intensité lumineuse

Liste des figures

N° de la figure	Nomination de la figure	N° de page
-----------------	-------------------------	------------

Chapitre I : Etude bibliographique

Figure I.1 : modèle maillé [1].....	4
Figure I.2 : Calculateur de conception [1].....	4
Figure I.3 : Relation entre les modules tangents et les contraintes pour différents Matériaux [1].....	4
Figure I.4 : Relation entre le module tangent et le diamètre de contact [1].....	5
Figure I.5 : Maillage raffiné au voisinage du contact [2].....	5
Figure I.6 : Sphère déformable pressée par un plan rigide [3].....	6
Figure I.7 : Sphère sous chargement normal et tangentiel [4].....	6
Figure I.8 : (a) modèle sphérique avant le contact, (b) pendant la déformation élastique, (c) et pendant la déformation plastique [5].....	7
Figure I.9 : Isochromes relevées Expérimentalement [6].....	8
Figure I.10 : Isochromes simulées et traitée avec SURFER [6].....	8
Figure I.11 : Isoclines obtenues sur le polariscope en lumière plane [7].....	9
Figure I.12 : Schéma de la méthode de Weller.....	10
Figure I.13 : Disque en compression a)Isostatique b) paramètre isochrome [9].....	11
Figure I.14 : Appui ponctuel sur un barreau de section carrée [10].....	12
Figure I.15 : Schémas des trois modèle utilisés (a) charge normale (cylindre sur demi espace), (b) charge normale et tangentielle, (c) charge axiale (poinçon cylindre sur plan) [11].....	13

Figure I.16 : Schéma décrivant le polariscope et le processus d'acquisition d'image [12]....	13
Figure I.17 : Images séquentielles obtenues en changeant L'angle du polariseur et de l'analyseur [12].....	14
Figure I.18: Image tridimensionnelle enregistrée et son spectre de fréquence suivant θ [12].....	14

Chapitre II : Généralités sur la photoélasticimétrie

Figure II.1 : Propagation d'une onde à travers une matière biréfringente [13].....	17
Figure II.2: Phénomène de biréfringence naturelle [7].....	19
Figure II.3. Modèle sous contraintes planes [14].....	21
Figure II.4. Polariscopes par réflexion [9].....	22
Figure II.5. Polariscopes rectilignes.....	22
Figure II.6. Polariscopes circulaires.....	23
Figure II.7. Tracé des isostatiques à partir des isoclines	25

Chapitre III : La théorie d'Hertz et le contact mécanique

Figure. III.1 Contact entre deux cylindres le long de leurs génératrices et distribution de la Pression dans la zone de contact [15].....	28
Figure III.2: Contrainte cylindre sur plan [16].....	30
Figure III.3: Contact de deux cylindres à axes parallèles. [15].....	31
Figure III.4: Franges isochromes en photoélasticimétrie bidimensionnelle [15].....	32
Figure III.5 : Isovaleurs des contraintes principales σ_1 et σ_2 et du cisaillement maximal τ_{max} [17].....	33

Figure III.6: Contact cylindre plan en présence d'un effort tangentiel [17].....	34
Figure III. 7: Champs de contraintes sous des conditions de glissement pur ($\mu = 0.25$).....	35

Chapitre IV : Partie Expérimentale

Figure. IV.1 : Les dimensions du modèle utilisé pour les trois méthodes.....	36
Figure. IV.2 : Forme de modèle utilisé par les trois méthodes.....	37
Figure. IV.3 : Observation des contraintes résiduelles sur le cylindre et la plaque déformables.....	38
Figure. IV.4 : Observation du modèle utilisé placé sur le polariscope plan.....	38
Figure IV.5 : Dispositif de chargement en flexion.....	39
Figure IV.6: Eprouvette de l'essai de flexion.....	39
Figure IV.7: Les franges isochromes obtenues en flexion.....	40
Figure IV.8: Diagramme du moment fléchissant.....	42
Figure IV.9 : relevé de l'ordre de frange au bord de l'éprouvette.....	42
Figure IV.10 : Réseau d'isochromes observé sur le polariscope	44
Figure IV.11 : Réseau d'isochromes observé sur le polariscope	45
Figure IV.12 : réseau d'isochromes observé sur le polariscope Pour la partie inférieure.....	45
Figure IV.13 : réseau d'isochromes observé sur le polariscope pour La partie supérieure.....	45
Figure IV.14: Evolution de τ_{max} relevée expérimentalement le long de la droite AB.....	47
Figure IV. 15: Relevée des isoclines par rotation par pas de 10°	47

Figure IV.16 : Représentation de la Surface maillée pour la partie supérieure Rigide-déformable.....	48
Figure IV.17 : Représentation de la Surface maillée pour la partie Inférieure déformable - déformable.....	48
Figure IV.18 : Représentation des déplacements imposés	49
Figure IV.19 : Représentation des contacts assurés	49
Figure IV.20 : Représentation des réactions sur le modèle	50
Figure IV.21: Extraction des efforts correspondant au déplacement imposé	50
Figure IV.22: Représentation de la déformation.....	51
Figure IV.23: Les franges isochromes simulées en champ clair.....	52
Figure IV.24: Tracés des isoclines par pas de 10 degrés	53
Figure IV.25: Evolution de τ_{max} relevée numériquement le long de la droite AB	53
Figure IV.26: Variation la contrainte de cisaillement maximale (τ_{max}) en 2D pour les deux cas du contact.....	55
Figure IV.27 : Isocontraintes obtenue analytiquement pour les deux cas de contact « charge 605.71 N ».....	56
Figure IV.28: Evolution de τ_{max} relevée analytiquement le long de la droite AB	56
Figure IV.29: Superposition des graphes numériques, expérimentaux et analytiques	57
Figure IV.29 : Isochromes relevées expérimentalement simulées à l'aide du logiciel CASTEM.....	58
Figure IV.31: Superposition des isoclines obtenues numériquement avec leurs correspondantes obtenues expérimentalement.....	59

Liste des tableaux

Chapitre II : Généralités sur la photoélasticimétrie

Tableau II.1 : Intensité lumineuse $I(x, y)$ pour les différentes configurations.....	24
--	----

Chapitre IV : Partie Expérimentale

Tableau IV.1 : Valeurs de la différence des contraintes principales relevées suivant le long [AB].....	47
Tableau IV.2 : Résultat obtenue avec MATLAB.....	56

INTRODUCTION GENERALE

L'analyse des champs de contraintes dans des pièces mécaniques est un problème fondamental dans l'industrie.

Dans les transmissions de couple ou de puissance plusieurs pièces mécaniques peuvent entrer en contact. Des contraintes sont alors développées dans les éléments en contact. Différentes structures analysées ont montré que leurs ruptures sont dues à ces contraintes. Il est donc très important pour les concepteurs de machines de connaître les contraintes et les déformations au voisinage et dans les zones de contact pour un bon dimensionnement des différents éléments.

Plusieurs types de contacts peuvent être rencontrés dans les transmissions mécaniques et les assemblages : contact cylindre sur cylindre, contact cylindre sur plan, contact poinçon sur plan et contact sphère sur plan. Les contraintes sont généralement concentrées au voisinage des zones de contact et diminuent rapidement en s'éloignant de ces zones. Ces contraintes sont régies par des équations aux dérivées partielles. Leur résolution peut être faite analytiquement, expérimentalement ou numériquement. La solution analytique est dans certains cas complexes et difficile à obtenir.

On peut alors faire recours à la solution numérique. Lorsque les moyens le permettent une solution expérimentale est recommandée pour validation.

Dans ce présent travail, un problème de contact entre des pièces mécanique a été résolu à l'aide de deux méthodes, une expérimentale et l'autre numérique. Cette étude a pour objectif de valider les résultats numériques par ceux obtenus expérimentalement et de montrer qu'on peut traiter des problèmes complexes de contact mécanique à l'aide de codes de calculs éléments finis sans avoir recours à chaque fois à l'expérience qui peut être coûteuse et qui prend beaucoup de temps.

La méthode expérimentale utilisée est la photoélasticimétrie, c'est une technique d'analyse des contraintes, basée sur la biréfringence acquise par certains matériaux soumis à des contraintes. Les franges isochromes et isoclines obtenues sur le polariscope permettent de retrouver les directions principales des contraintes et les valeurs du cisaillement maximal sur toute la surface du modèle par l'exploitation des franges isochromes et des franges isoclines.

La méthode des éléments finis est une méthode numérique qu'on peut utiliser pour analyser l'état de contrainte d'un contact mécanique. Une solution à l'aide du logiciel

« Castem » permettra de simuler les franges et les contraintes développées dans le modèle contraint, en particulier au voisinage de la zone de contact. une autre solution analytique faite à l'aide de la théorie de Hertz calculer par MATLAB qui permet d'évaluer les pressions maximales au voisinage du point du contact ainsi que la dimension de la bande du contact pour les deux types de contact

Dans le cadre de ce travail, pour étudier le problème du contact mécanique, un disque en époxy (déformable) a été écrasé entre deux plaques l'une en acier considérée comme solide (indéformable) et l'autre en époxy (déformable) ainsi on réalise deux types de contact mécanique déformable-rigide et déformable-déformable afin d'analyser les champs de contraintes développées au voisinage des zones de contact de notre modèle, ce disque a été analysé par les trois méthodes (expérimental, numérique et analytique).

Ce travail sera subdivisé en deux parties:

Partie 1 : simulation, comparaison et validation.

Partie 2 : analyse des champs des contraintes en incluant la théorie de Hertz (des contact rigide-déformable et déformable-déformable).

Des comparaisons seront faites entre les résultats expérimentaux ,les résultats numériques et les résultat analytique:

- la première comparaison entre les franges isochromes et isocline expérimentales et les franges Isochromes et isoclines simulées.
- La deuxième comparaison entre les valeurs expérimentales et celle simulées par « CASTEM » et par « MATLAB » de la contrainte de cisaillement maximale le long d'un axe défini à partir des points du contact.

Le travail effectué dans le cadre de ce mémoire est organisé en quatre chapitres.

Le premier chapitre consacré à la bibliographie traitera des différents travaux effectués dans les domaines de la mécanique de contact.

Le deuxième chapitre est consacré à quelques rappels important de la photoélasticimétrie et à la description du phénomène de la biréfringence.

Le troisième chapitre comporte quelques rappels sur la théorie de Hertz du contact mécanique.

Les différents essais réalisés, sont présentés dans la dernière partie de ce mémoire. Les différents réseaux d'isochromes et d'isoclines obtenus à l'aide de la photoélasticimétrie et de la méthode des éléments finis seront analysés et comparés pour valider la solution éléments finis.

Enfin on termine par une conclusion générale et perspective.

Chapitre I**Etude bibliographique****I.1 Le problème du contact en mécanique des solides**

Le contact mécanique demeure, encore aujourd'hui, le problème de mécanique des solides qui présente les non-linéarités les plus difficiles à prendre en compte.

Les phénomènes de contact impliquant des corps déformables abondent dans l'industrie, notamment dans les structures mécaniques : ils sont variés, fortement non linéaires et complexes. La problématique du contact est essentiellement de savoir comment réagissent les structures lorsqu'elles subissent des forces. Le caractère de ce contact peut jouer un rôle fondamental dans le comportement de la structure : sa déformation, son mouvement... Les problèmes de contact étant non linéaires, la modélisation des phénomènes de contact pose des difficultés.

Lorsque deux surfaces sont mises en contact, des sollicitations mécaniques sont imposées aux massifs et peuvent donner lieu à des dégradations. La détérioration de la surface du contact peut prendre différentes formes : déformation plastique, usure, fatigue de contact, etc. Pour assurer une bonne fiabilité du contact et en améliorer les performances il est nécessaire de déterminer la distribution des forces sur l'aire de contact et le champ des contraintes au voisinage de cette zone.

I.2 Quelques travaux réalisés dans le problème de contact

L'analyse de contact a été étudiée par Hertz depuis 1882, en étudiant le contact élastique entre deux lentilles de verre. La théorie de Hertz est limitée aux contacts sans friction normale entre élastique demi-espace avec une petite déformation. Le contact d'une sphère et d'un plat est un problème fondamental dans la mécanique de contact. Plusieurs travaux ont été dédiés à ce sujet.

S. Gandhi [1] a présenté une étude en considérant une analyse de contact élasto-plastique, d'une sphère rigide sur un plat déformable, en utilisant l'analyse par éléments finis. L'effet du module tangent sur le comportement du matériau dû à un frottement minime de contact élasto-plastique adhésif a été analysé à l'aide d'un logiciel d'éléments finis appelé ANSYS. Le résultat obtenu montre clairement que, pour différents modules tangents, le matériau subit différentes valeurs de contraintes.

Lorsque ce module tangent augmente la valeur de dureté du matériau augmente également. Avec l'augmentation du module tangent, l'écrouissage (résistance à la déformation d'un matériau) accroit et le matériau devient capable de supporter de grandes charges dans une zone de contact plus petite.

La figure (I.1) illustre le maillage du contact d'une sphère rigide sur un plat déformable en utilisant le logiciel ANSYS. La figure (I.2) montre un exemple de calculateur qui permet de calculer les influences des paramètres de contact. On introduit des données : le module de Young, le diamètre de la sphère et la charge appliquée.

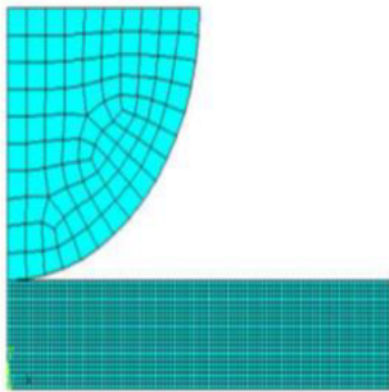


Figure I.1 : modèle maillé [1]

CONTACT PARAMETERS OF RIGID SPHERE WITH FLAT PLATE	
YOUNG'S MODULUS OF THE MATERIAL	21e5 N/mm ²
RADIUS OF THE SPHERE	50 mm
LOAD APPLIED	2000 N
RADIUS OF CONTACT	= 2.42642759326259 mm
CONTACT PRESSURE	= 1620.19006573146 N/mm ²
AREA OF CONTACT	= 18.480908348955 mm ²
MAXIMUM STRESS INDUCED	= 2742 N/mm ²
DEPTH OF PENETRATION	= 0.60660675800647 mm

Figure I.2 : Calculateur de conception [1]

La figure (I.3) montre la relation entre la contrainte et le module tangent. L'augmentation de la valeur du module tangent engendre d'augmentation de la contrainte du matériau $E/Y < 1000$ jusqu'à $0.5E$, après on observe que la contrainte décroît avec l'augmentation du module tangent. La contrainte augmente jusqu'à $0.3 E$ dans le matériau $E/Y > 1000$ on observe que la contrainte décroît avec l'augmentation du module tangent. De ce fait on constate que la plus grande contrainte se développe dans le matériau $E/Y < 1000$ avec l'écrouissage $H=1$ et $H=0.43$ pour le matériau $E/Y > 1000$.

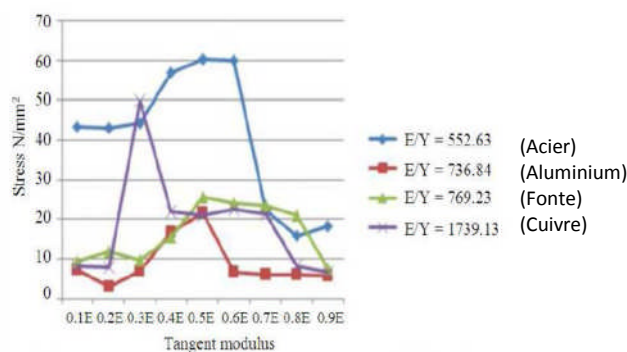


Figure I.3 : Relation entre les modules tangents et les contraintes pour différents Matériaux [1]

La figure (I.4) illustre la relation du module tangent et le diamètre de la surface du contact. Le module tangent augmente, le diamètre du contact diminue.

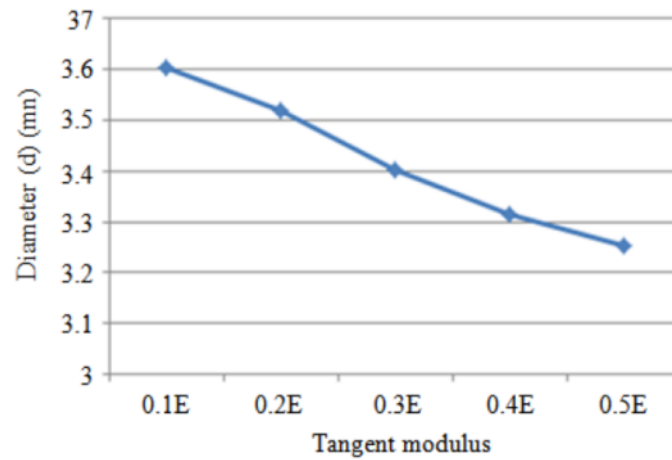


Figure I.4 : Relation entre le module tangent et le diamètre de contact [1]

Les conditions de contact sont sensibles à la géométrie des surfaces en contact, ce qui signifie que le maillage éléments finis à proximité de la zone de contact doit être hautement raffiné Figure (I.5).

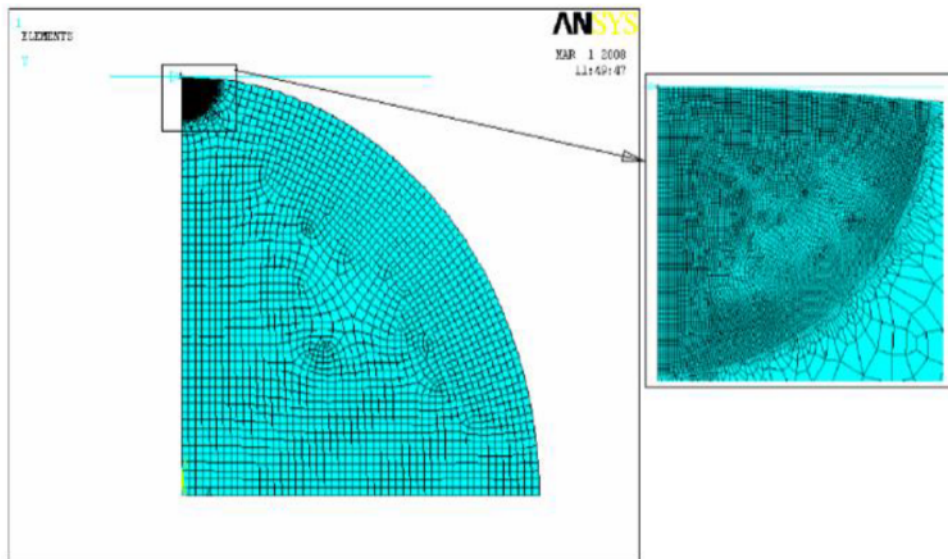


Figure I.5 : Maillage raffiné au voisinage du contact [2]

L. Kogut [3] a présenté un modèle élastique plastique par éléments finis pour un contact sans frottement d'une sphère déformable Figure (I.6), pressée sous chargement normal contre un plan rigide. Le contact élastique plastique d'une sphère sur un plan est d'une importance fondamentale dans la mécanique des contacts.

Le modèle donne les expressions de l'aire du contact ainsi que celle des pressions de contact. Kogut a déterminé, en utilisant le critère de Von Mises, la valeur critique de la déformation w_c de la sphère qui marque la transition de l'état élastique vers l'état élasto-plastique.

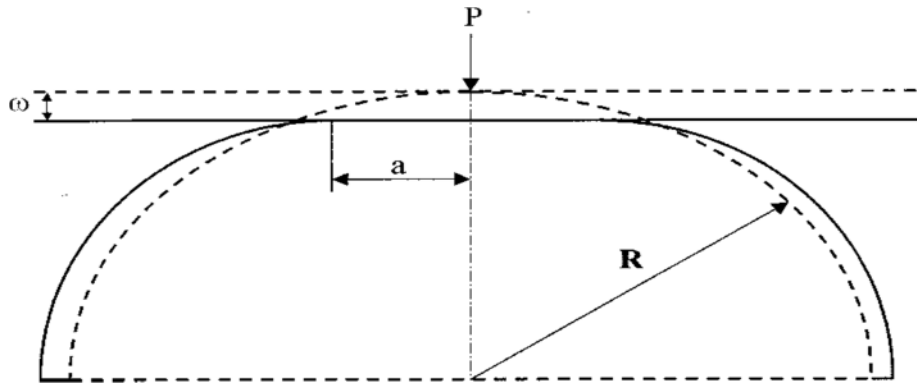


Figure I.6: Sphère déformable pressée par un plan rigide [3].

L'évolution du contact élastique plastique dans cette étude peut être divisée en trois étapes distinctes :

La première pour $1 \leq w/w_c \leq 6$ où la région plastique se développe au-dessous de la surface de la sphère, et la région du contact entière est élastique. La deuxième pour $6 \leq w/w_c \leq 68$ où la région du contact est élastique plastique, et la troisième étape pour $w/w_c > 68$ correspond à une région de contact complètement plastique.

Kogut [4] dans une autre étude, a présenté une analyse par éléments finis d'une sphère élastique parfaitement plastique sollicitée par un plan rigide, la charge maximale tangentielle que peut supporter le contact sphérique au commencement de glissement a été calculée, cette analyse a été combinée avec une solution analytique en utilisant une approche basée sur l'utilisation de lois de comportement appropriées à tout mode de déformation, que ce soit élastique ou plastique.

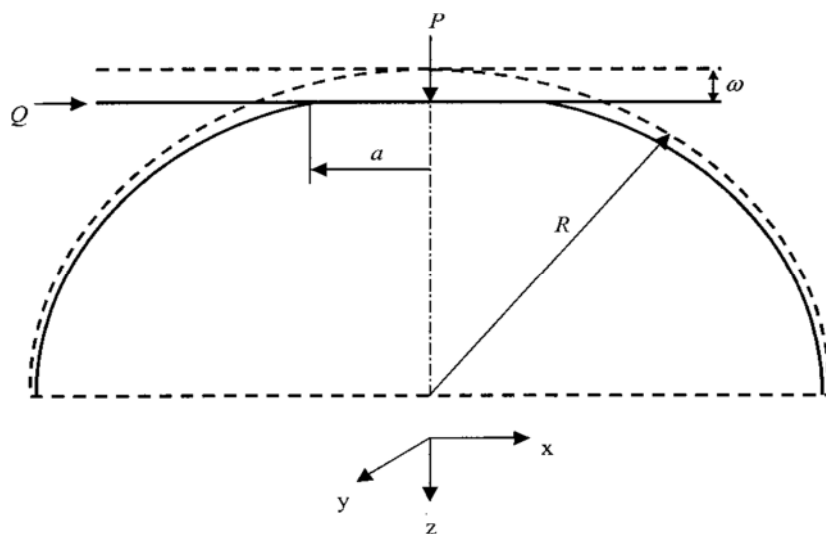


Figure I.7: Sphère sous chargement normal et tangentiel [4].

Dans cette étude, deux modes de rupture différents ont été identifiés en fonction de la nature de la charge normale initiale. Lorsque celle-ci est inférieure à la charge critique de Hertz, la rupture se produit sur l'aire du contact. Si la charge est supérieure à celle critique une défaillance se produit au-dessous de la zone de contact.

Robert L. Jackson [5], a présenté une étude par éléments finis d'une sphère élastique parfaitement plastique en contact sans frottement avec un plan rigide (fig.I.8).

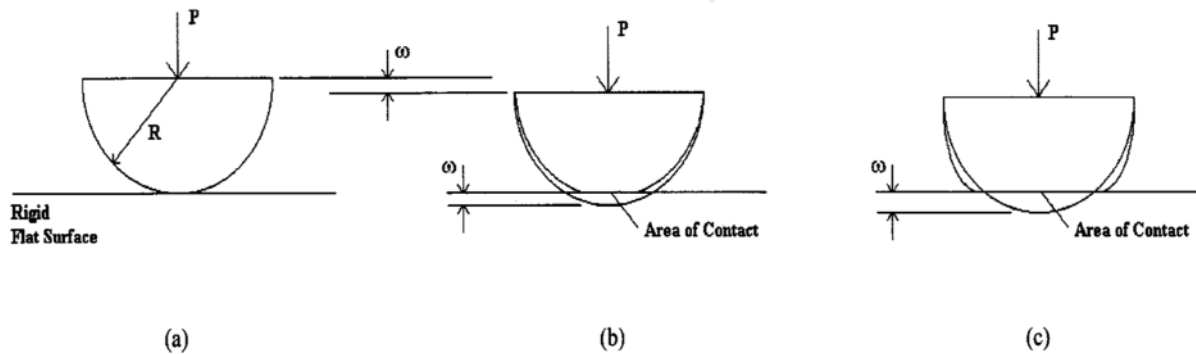


Figure I.8: (a) modèle sphérique avant le contact, (b) pendant la déformation élastique, (c) et pendant la déformation plastique [5].

La pression moyenne d'un contact complètement plastique, varie avec la géométrie déformée du contact, qui à son tour dépend des propriétés du matériau.

Ce travail révèle de grandes différences entre les modèles analytiques approchées et d'autres solutions numériques. Plus important encore, la zone du contact et la contrainte sont particulièrement en fonction de la géométrie déformée dans tous les régimes, et dépendent des propriétés du matériau.

I.3 Méthode d'analyse des contraintes en photoélasticimétrie 2D

La photoélasticimétrie est une méthode largement utilisée dans l'analyse expérimentale des contraintes en deux et trois dimensions. La méthode classique de détermination des paramètres en photoélasticité, basée sur une méthode manuelle de détermination des positions des franges isoclines et isochromes, est souvent longue. De nouvelles méthodes d'acquisition de données voient le jour. De nouvelles techniques d'analyse de franges isoclines et isochromes se développent et l'automatisation de ces méthodes devient évidente.

La photoélasticimétrie 2D peut s'appliquer uniquement dans le cas des matériaux transparents et biréfringents.

La photoélasticimétrie bidimensionnelle s'applique dans le cas où on a un problème plan où les contraintes ne varient pas suivant l'épaisseur du modèle étudié. Elle consiste à mettre un

modèle, que l'on peut considérer bidimensionnel (de petite épaisseur) sous chargement, dans un polariscope puis observer le phénomène de biréfringence qui se traduit par l'apparition franges sur l'image du modèle.

F. Djeddi [6] a utilisé la photoélasticimétrie et la méthode des éléments finis(CASTEM) pour l'étude du contact cylindre sur plan. La figure (I.9) représente les franges isochromes relevées expérimentalement. La figure (I.10) représente les franges isochromes calculées avec CASTEM et traitées avec SURFER.

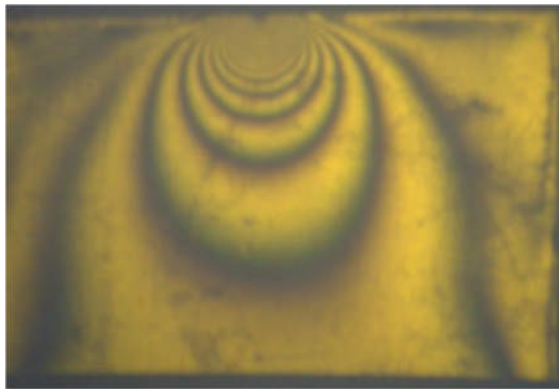


Figure I.9 : Isochromes relevées
Expérimentalement [6]



Figure I.10: Isochromes simulées et traitée
avec SURFER [6].

L'image expérimentale obtenue par photoélasticimétrie est semblable avec l'image donnée par CASTEM et traitée avec le logiciel SURFER.

A. Bilek[7], dans son étude d'un emmanchement forcé de deux pièces cylindriques, a déterminé expérimentalement le champ des contraintes développé dans les deux pièces sous l'application de la pression après assemblage. Le logiciel PHOTO2D est utilisé pour le traitement des images recueillies sur le polariscope. Les deux pièces emmanchées sont disposées sur le polariscope pour l'enregistrement des différentes images pour le traitement. Le logiciel permet de calculer le paramètre isocline et le paramètre isochrome (figure I.11). La valeur de la différence des contraintes principales est déterminée automatiquement le long d'une ligne quelconque appartenant au modèle. Les réseaux des isostatiques sont tracés automatiquement par simple clique de la souris sur toute la surface du modèle.

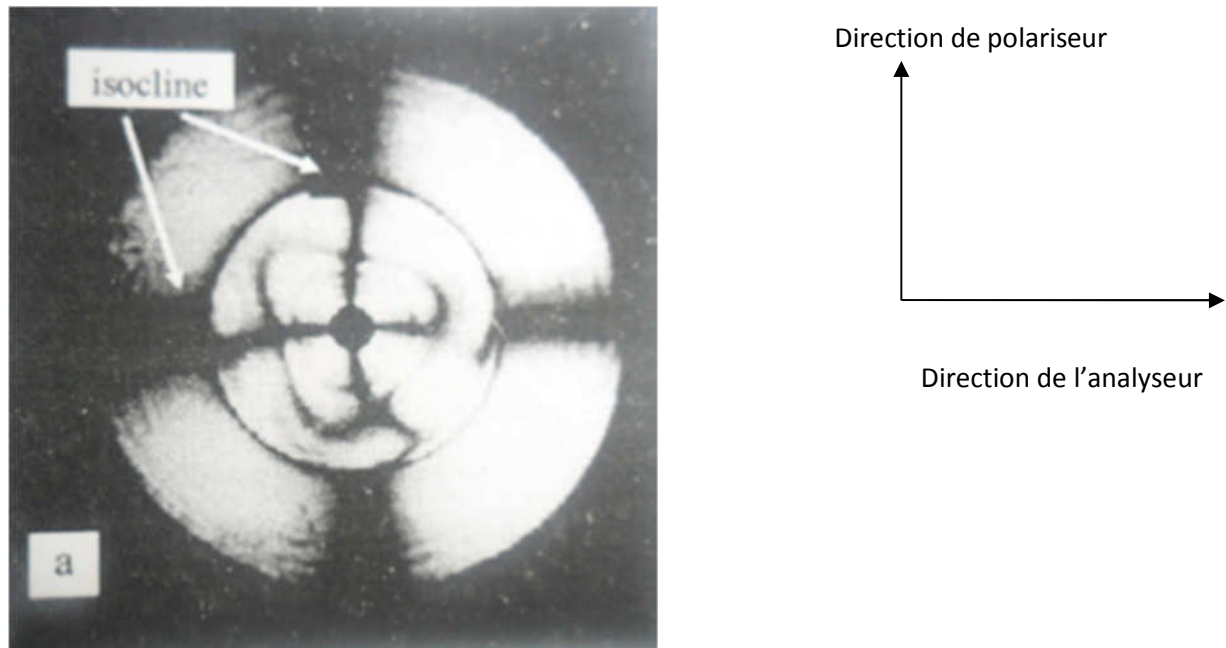


Figure I.11: Isoclines obtenues sur le polariscope en lumière plane [7].

I.4 Méthodes d'analyse des contraintes en photoélasticimétrie 3D

En photoélasticimétrie 2D, on place une éprouvette plane transparente entre deux polariseurs. On observe des franges mettant en évidence le phénomène de biréfringence dans l'éprouvette sous chargement. Les différences des contraintes principales doivent être constantes dans l'épaisseur, d'où l'analyse de modèle plan. Dans le cas d'une répartition 3D des contraintes, le phénomène de biréfringence est toujours présent mais il n'est plus possible de déterminer les paramètres de la même manière. Plusieurs approches ont été développées dans le but d'observer l'état de contrainte dans les modèles 3D.

Cependant, lors de l'étude de pièces épaisses ou à géométrie complexes, l'état des contraintes ne pourra plus être considéré plan, il varie en amplitude et en direction. De ce fait on ne pourra plus parler de différence de contraintes principales ($\sigma_1 - \sigma_2$), mais de différence des contraintes principales secondaires ($\sigma' - \sigma''$) car l'analyse de feuillet ne se fera pas nécessairement dans les axes principaux des contraintes. Quoique la biréfringence soit toujours présente dans les modèles 3D, la détermination des paramètres ne pourra plus se faire de la même manière que dans l'hypothèse 2D. Pour cela, différentes approches expérimentales ont été développées [8].

I.4.1 Méthode de découpage optique

La photoélasticimétrie 3D par découpage optique est une méthode à champ complet non destructive basée sur le principe de découpage optique développé par R. Desailly et A. Lagarde [7]. Cette technique consiste à isoler une tranche biréfringente à l'intérieur d'un modèle photoélastique par deux faisceaux lumineux plans.

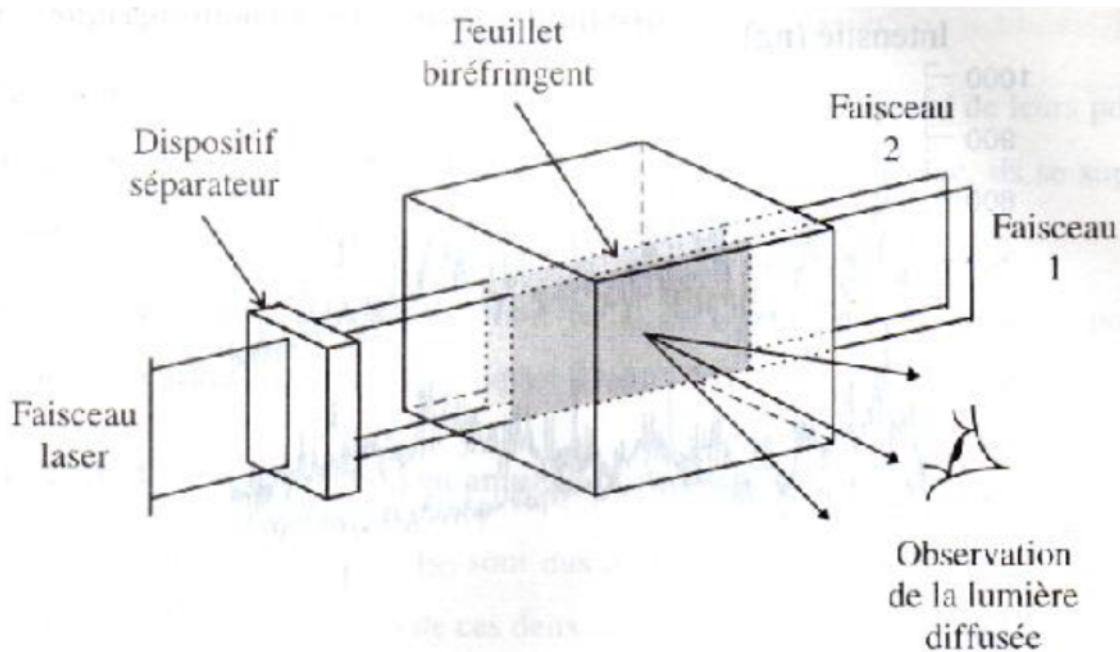


Figure I.12: Schéma de la méthode de Weller.

Lorsqu'un faisceau plan de lumière cohérente traverse un milieu diffusant, chaque point de la section éclairée se comporte comme une source lumineuse. Ces sources étant cohérentes entre elles, interfèrent et peuvent donner naissance à des régions d'intensités maximales ou minimales. La possibilité d'interférence des rayonnements de deux sections éclairées dépendent de la différence de chemin optique et donc de la biréfringence du feuillet isolé.

Cependant la visualisation directe de la biréfringence est impossible expérimentalement.

Pour extraire cette information, il faut étudier les caractéristiques de la lumière diffusées, R. Desailly a étudié ce phénomène et a développé une méthode qui permet d'obtenir d'une manière globale les paramètres isoclines et isochromes d'un feuillet plan isolé optiquement à l'intérieur d'un milieu photoélastique chargé. Cette méthode basée sur l'analyse statistique

effectuée sur le champ de granularité permet d'exprimer le facteur de corrélation qui donne accès aux paramètres photoélastiques du feuillet entre deux plans lasers.

D'autres travaux ont été réalisés en utilisant la photoélasticimétrie

N. Plouzenec a présenté une méthode de photoélasticimétrie qui fait appel à une analyse numérique, pour déterminer le champ d'isoclines et d'isochromes dans un modèle biréfringent ayant des contraintes figées. Elle réalise une étude numérique et expérimentale d'un disque diamétralement comprimé. Le modèle étudié est placé entre le polariseur et l'analyseur d'un polariscope. De simples manipulations du polariseur permettent d'obtenir une image des franges. Une caméra CCD reliée à un PC permet de recueillir les images et les traiter rapidement. Le paramètre isocline est calculé et corrigé, donnant la direction d'une des contraintes principales pour tous les points du modèle. Les lignes isostatiques sont tracées à partir des angles des isoclines [9].

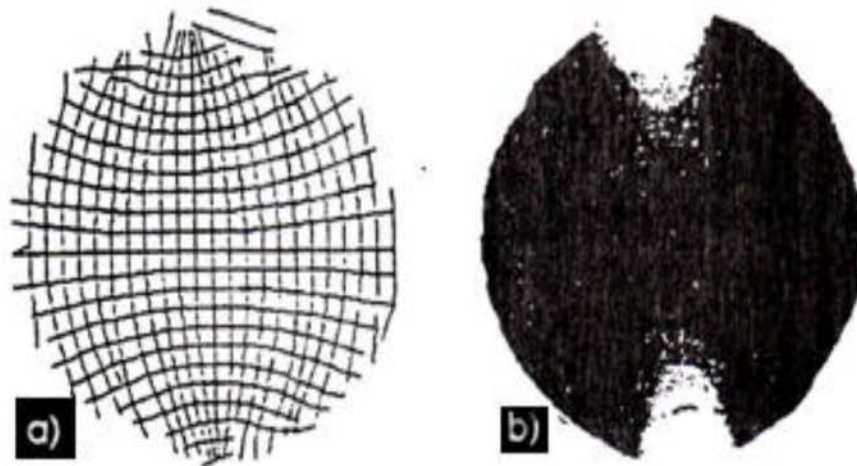


Figure I.13: Disque en compression
a) Isostatique b) paramètre isochrome [9]

J.C. Dupré et A. Lagarde [10] ont présenté une méthode de visualisation des franges isochromes et isoclines développées dans les solides en contact en utilisant le phénomène de diffusion et les propriétés de superposition de ces champs lumineux. Le modèle à analyser est découpé optiquement à l'aide de deux faisceaux lasers. Le champ de contraintes peut être ainsi analysé dans tout le volume des solides en contact. Pour illustrer la méthode une application a été faite sur un parallélépipède chargé par une force centrée en son milieu. L'évolution des franges le long de l'axe longitudinal (figure I .14) montre la variation des contraintes dans le volume de la pièce. On voit bien que les contraintes sont concentrées au voisinage immédiat de la zone de contact. Couplée avec une caméra CCD et un ordinateur, la

méthode de découpage optique nécessite quelques secondes pour obtenir les mêmes résultats que la méthode de figeage découpage qui nécessite plusieurs heures.

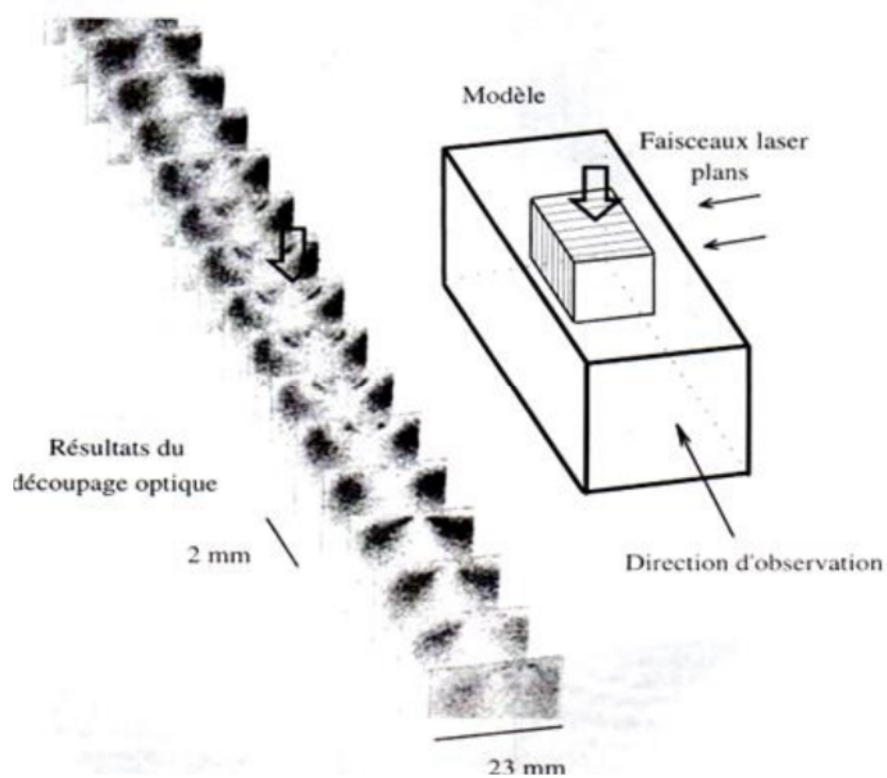


Figure I.14 : Appui ponctuel sur un barreau de section carrée [10].

R.L Burguete et E.A Paterson [11] ont utilisé la photoélasticimétrie 3D pour l'étude du contact cylindre sur plan. En utilisant la méthode de figeage découpage couplée avec un polariscope automatique relié à une caméra CCD monochromatique qui permet des prises de vue. Trois cas de chargement ont été étudiés (figure I.15) un cylindre reposant le long de sa génératrice supportant une charge perpendiculaire au plan, un cylindre reposant le long de sa génératrice supportant une charge perpendiculaire au plan et une charge tangentielle et finalement un cylindre reposant sur son extrémité sur un plan soumis à une charge de compression normale similaire donc à un poinçon. Les deux modèles analysés ont été fabriqués en résine époxy.

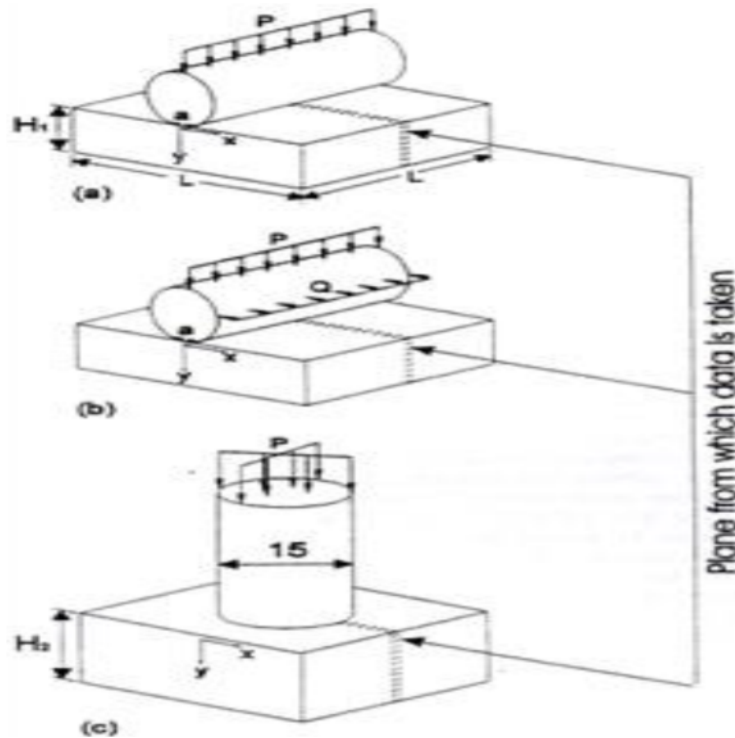


Figure I.15: Schémas des trois modèles utilisés (a) charge normale (cylindre sur demi espace), (b) charge normale et tangentielle, (c) charge axiale (poinçon cylindre sur plan) [11].

T.Hayashi et Y. Morimoto Jr [12] ont utilisé la méthode de la transformée de Fourier afin de séparer les isochromes et les isoclines. Une plaque en résine époxy de forme rectangulaire percée en son centre. Elle est chargée en traction et observée sur un polariscope plan (figure. I.16).

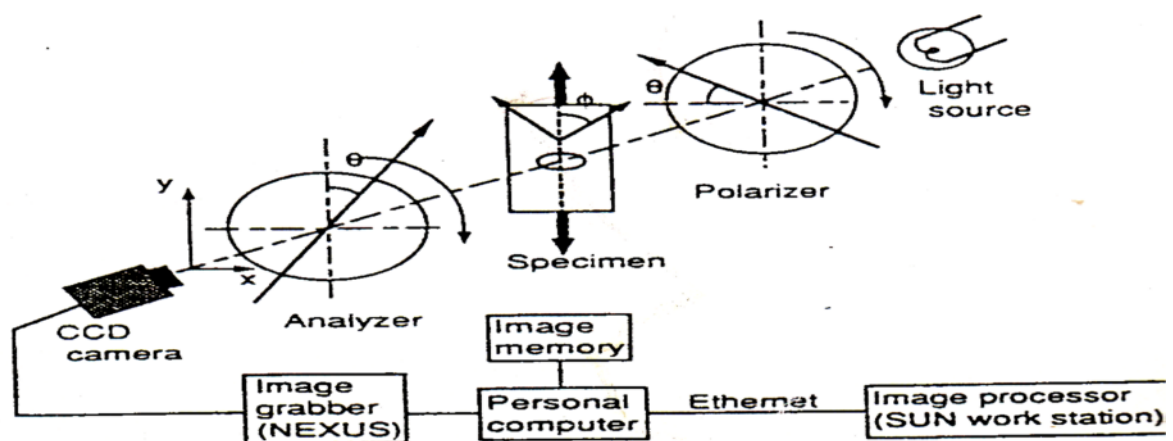


Figure I.16 : Schéma décrivant le polariscope et le processus d'acquisition d'image [12].

Avec une camera CCD, 90 images sont enregistrées pour une orientation des polariseurs variant entre -45° et 44° (figure I.17). Ces 90 images bidimensionnelles (x,y) sont traitées

comme une seule image tridimensionnelle (x,y,θ) figure (I.18.a). Cette image sert à calculer la transformation de Fourier par rapport à θ . Ils obtiennent une image tridimensionnelle (x,y,ω) figure (I.18.b).

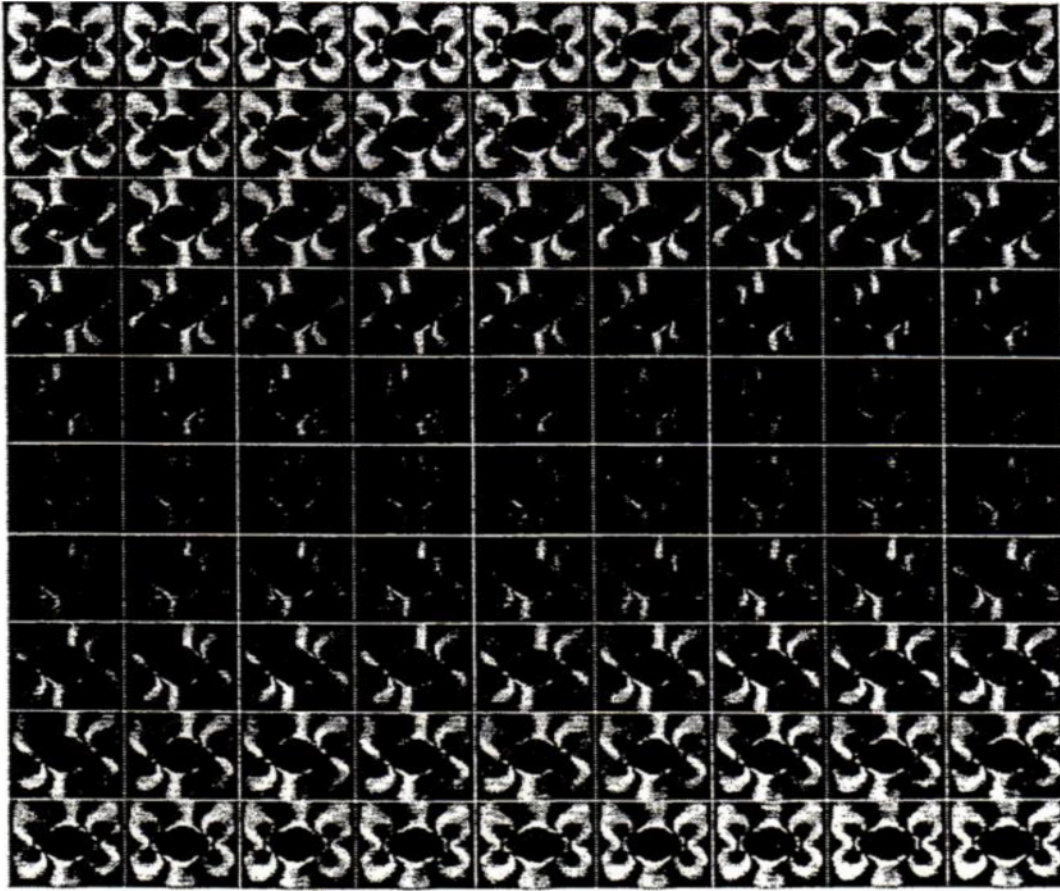


Figure I.17 : Images séquentielles obtenues en changeant l'angle du polariseur et de l'analyseur [12].

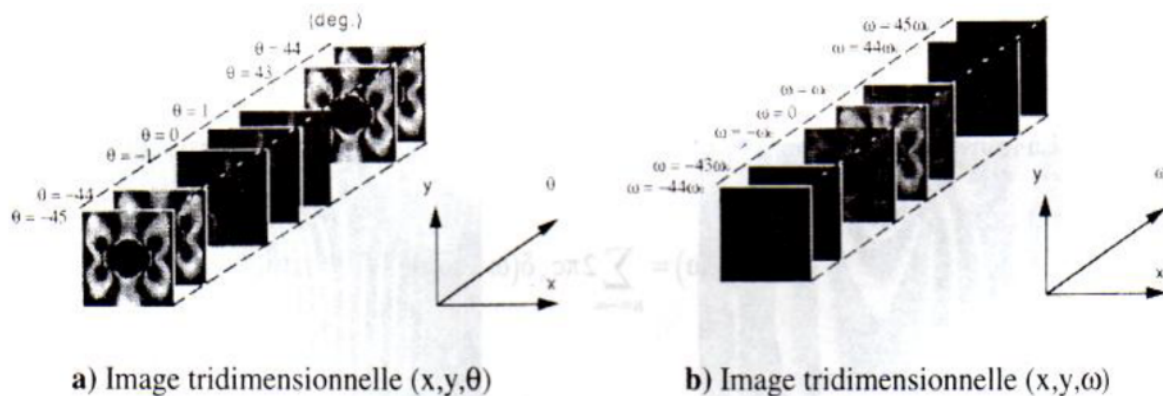


Figure I.18: Image tridimensionnelle enregistrée et son spectre de fréquence suivant θ [12].

Cette image tridimensionnelle leur a permis d'obtenir l'image bidimensionnelle correspondant à la fréquence $\omega = 0$, donc aux franges isochromes. Ainsi que l'image bidimensionnelle correspondant à la fréquence $0 \leq \omega = \pm\omega$, donc aux franges isoclines.

I.6 Conclusion

Hertz a établi les relations analytiques de la plupart des modèles de contact moyennant certaines hypothèses. Grâce au progrès de l'informatique et au développement des logiciels de simulations, le problème de contact mécanique peut être analysé numériquement. L'étude expérimentale prend en charge le problème de contact mécanique en utilisant la méthode de la photoélasticimétrie qui exploite le caractère biréfringent des modèles en époxy pour visualiser les réseaux d'isochromes et d'isoclines. Les images sont recueillies à l'aide d'un appareil photo numérique. Notre travail portera sur l'analyse des contraintes dans les contacts mécaniques à l'aide de la photoélasticimétrie et de la méthode des éléments finis.

Chapitre II

Généralités sur la photoélasticimétrie

II.1 Introduction

La photoélasticité est une méthode expérimentale qui permet l'analyse des contraintes dans le modèle qui vient compléter des méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis. C'est une méthode principalement optique qui se base sur la biréfringence acquise par les matériaux soumis à des contraintes on utilise généralement des modèles transparents en époxy pour analyser les contraintes dans les pièces mécaniques. Pour les résultats numériques en utilisant la méthode des éléments finis à l'aide du logiciel CASTEM.

Notre travail consiste principalement à étudier les problèmes de contact dans les pièces mécaniques à l'aide de la photoélasticimétrie bidimensionnelle utilisant les principes de la biréfringence. Les champs des contraintes dans les différents modèles en matière biréfringentes seront analysés dans le but de déterminer les isochromes et les isoclines à l'intérieur des modèles.

La photoélasticimétrie s'est développée au début du 20^{ème} siècle avec les travaux d'E.G FILON de l'université de Londres. C'est MAXWELL qui réalisa la première étude photoélasticimétrique plane. Jusqu'à l'apparition des matières plastique (car les modèles étaient en verre et l'on se contentait de simulation bidimensionnelles de pièces), avec cette matière, la réalisation des modèles devient très simples et peu coûteuses.

II.2 Principe de la photoélasticimétrie :

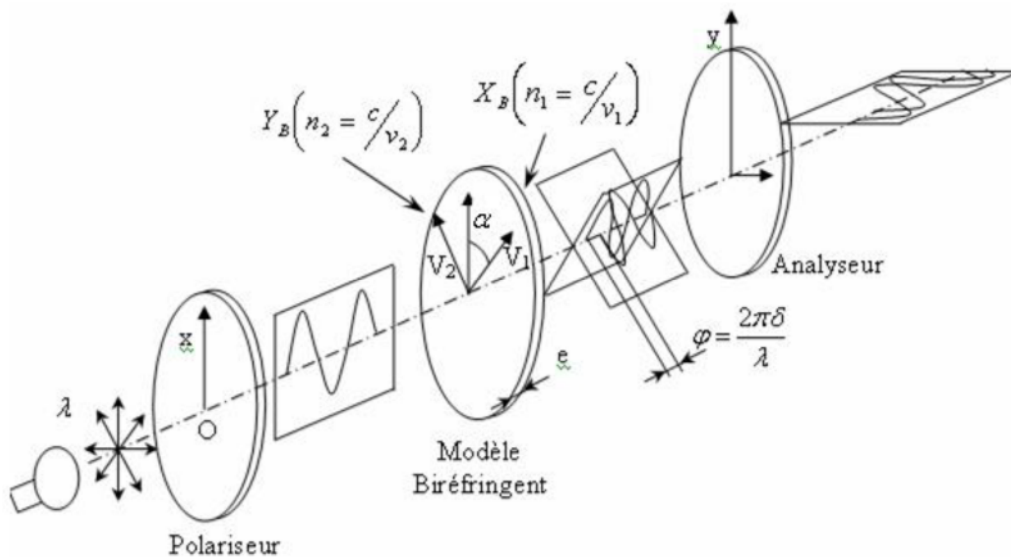


Figure II.1 : Propagation d'une onde à travers une matière biréfringente [13].

L'intensité I est donnée par la relation :

$$I = a^2 \sin^2(2\alpha) \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (\text{II.1})$$

- $\sin^2(2\alpha) = 0$ d'où $\alpha = N\pi/2$: les lieux d'extinction correspondent sont les isoclines.

- $\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0$ d'où le retard introduit par le matériau biréfringent est égal à $\varphi = 2N\pi$: les lieux d'extinction correspondants sont les isochromes.

Cette méthode est basée sur la biréfringence des matériaux acquise sous l'effet des contraintes. Cette biréfringence peut être étudiée en analysant la façon dont la polarisation de la lumière est transformée après le passage à travers le matériau. Par exemple, une onde lumineuse polarisée rectilignement pourra ressortir polarisée elliptiquement. Cela s'explique par le fait que les deux composantes de l'onde subissent un retard l'une par rapport à l'autre. Ce retard est directement relié aux contraintes présentes dans le matériau. On peut donc mesurer les contraintes grâce à cette modification de la polarisation.

Le retard entre les deux composantes de l'onde correspond à un déphasage qui dépend de la longueur d'onde, c'est-à-dire de la couleur. C'est pourquoi les images obtenues avec de la lumière blanche présentent des irisations colorées.

Expérimentalement, on peut simplement utiliser la méthode suivante : une lumière monochromatique est polarisée à l'aide d'un polariseur, envoyée sur l'échantillon à analyser, puis passe à travers un second polariseur. Une lentille convergente permet ensuite de faire l'image de l'échantillon sur un écran. Un rayon de lumière polarisée de façon rectiligne va subir une certaine biréfringence différente selon le trajet qu'il emprunte dans le matériau. Sa polarisation va alors être transformée différemment selon le trajet et le second polariseur va donc éteindre ou pas ces rayons. On verra ainsi apparaître des zones claires ou sombres.

De plus, en utilisant de la lumière blanche, chaque couleur éclaircirait des zones différentes, et on verrait apparaître des irisations colorées.

II.3 Intérêts et applications :

Les intérêts et les applications de la photoélasticimétrie sont nombreux. Pour comprendre l'utilité de cette méthode optique, citons parmi les plus utilisées :

II.3.1 Applications industrielles

La photoélasticimétrie permet analyser la répartition des contraintes, et de dimensionner en conséquence des composants qui seront sollicités mécaniquement. Elle permet également de détecter d'éventuelles contraintes résiduelles pouvant accidentellement se retrouver dans des pièces après usinage ou thermoformage. Ainsi, les industries automobile et aéronautique recourent à cette méthode, qui leur permet d'éprouver l'efficacité des protocoles de fabrication des pièces et de les contrôler.

II.3.2 Applications en architecture :

La construction d'édifices architecturaux ou de génie civil nécessite la connaissance fine des contraintes au sein de la structure, afin d'en prévenir de possibles ruptures. Par exemple, en réalisant une maquette miniature de l'édifice en matériau photoélastique, il est possible d'accéder à des données pour étudier et comparer a posteriori les méthodes de construction des cathédrales de Chartres et Bourges.

II.3.3 Applications en biomécanique :

La méthode apporte des éléments pertinents, notamment pour améliorer les systèmes de consolidation par plaques et vis dans le traitement des fractures complexes.

II.4 phénomène de la biréfringence :

La biréfringence est la propriété physique d'un matériau dans lequel la lumière se propage de façon anisotrope. Dans un milieu biréfringent, l'indice de réfraction n'est pas unique, il dépend de la direction de polarisation de l'onde lumineuse.

La biréfringence appelée aussi **double réfraction** par laquelle un rayon lumineux se pénètre dans un cristal se divise en deux rayons distincts autonomes se propageant à des vitesses différentes.

Cette propriété est exploitée en photoélasticimétrie pour mesurer les contraintes. Ce phénomène est caractéristique des milieux biréfringence a tel point que les termes « double réfraction » et « biréfringence » sont parfois confondues.

On distingue deux sortes de biréfringence :

II.4.1 La biréfringence naturelle

Un milieu est dit isotrope optiquement lorsqu'il possède les mêmes propriétés optiques quelque soit la direction d'observation. Lorsqu'un faisceau lumineux le traverse, il se propage avec la même vitesse dans toutes les directions. Dans un milieu cristallin, ou anisotrope, la vitesse de propagation varie suivant les directions propres du milieu. Ce phénomène est appelé biréfringence naturelle. La vitesse de propagation dans une direction donnée est inversement proportionnelle à l'indice de réfraction correspondant à cette direction.

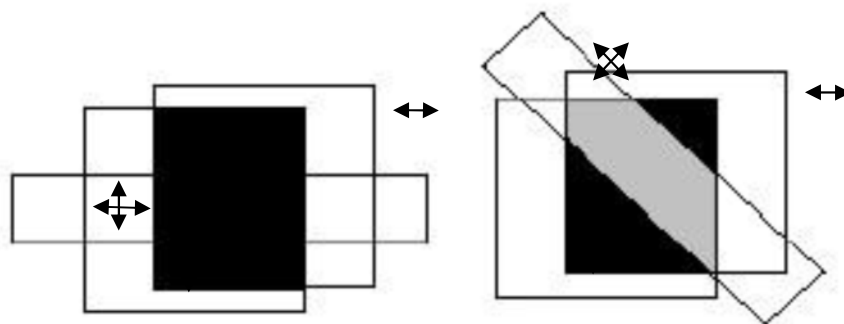


Figure II.2: Phénomène de biréfringence naturelle [7].

II.4.2 La biréfringence accidentelle

L'indice de réfraction « n » d'un milieu transparent est défini comme étant le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide et la vitesse de la lumière à l'intérieur du milieu. Un matériau isotrope, transparent, non chargé a la propriété de devenir biréfringent lorsqu'il est soumis à un état de contraintes. Ce milieu initialement est caractérisé par un indice de réfraction n_0 valable dans toutes les directions au repos. Le même matériau, lorsqu'il est sous chargement, est caractérisé par un ellipsoïde des indices. Ses directions principales coïncident avec les directions principales des contraintes.

II.5 Les polaroids**II.5.1 Le polariseur**

Un polariseur permet d'obtenir une lumière polarisée rectilignement dans une certaine direction. Dans ce cas, cette direction est appelée l'axe du polariseur. Les polariseurs sont présents et utilisés dans de nombreux instruments d'optique.

II.5.2 L'analyseur

L'analyseur est un filtre polarisant qui permet de déterminer le plan de polarisation d'une lumière incidente par extinction du faisceau sortant de l'analyseur.

Tout polariseur peut servir d'analyseur et vice et versa.

II.6 Description de la réfraction

La lumière est déviée lorsqu'elle passe d'un milieu transparent à un autre (par exemple : de l'air à l'eau, ou le contraire...). C'est ce phénomène qu'on observe lorsqu'on regarde une paille dans un verre : celle-ci paraît brisée. Cette fracture apparente est à l'origine du mot réfraction.

En physique des ondes, notamment en optique, acoustique et sismologie, le phénomène de réfraction est la déviation d'une onde lorsque la vitesse de celle-ci change entre deux milieux.

Typiquement, cela se produit à l'interface entre deux milieux, ou lors d'un changement d'impédance du milieu.

II.6.1 Définition du l'indice de réfraction

C'est le rapport entre la vitesse de la lumière c dans le vide et la vitesse de la lumière dans le milieu transparent.

$$n = \frac{c_0}{v} \quad (\text{II.2})$$

Où C_0 : vitesse de la lumière dans le vide et V : vitesse de la lumière dans le milieu considéré

Considérons un modèle en matériau isotrope sous un état de contraintes planes soumis aux

Contraintes principales σ_I et σ_{II} représentées sur la figure suivante :

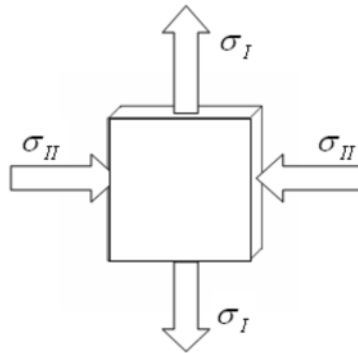


Figure II.3. Modèle sous contraintes planes [14].

II.7. Constante de frange

$$f = \frac{\lambda}{c} \quad (\text{II.3})$$

La constante de frange f est le rapport de la longueur d'onde et de la constante photoélastique

D'après l'équation de Maxwell :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N \cdot f}{e} \quad (\text{II.4})$$

Remarque

En champ obscur, les bandes noires correspondent aux ordres de frange entiers. En champ clair, les bandes noires quant à elles correspondent à des demi-ordres c'est-à-dire $(1/2, 3/2, \dots)$.

II.8. Différents types de polariscope

Il existe plusieurs types de polariscope dont on cite :

❖ Polariscopes par réflexion :

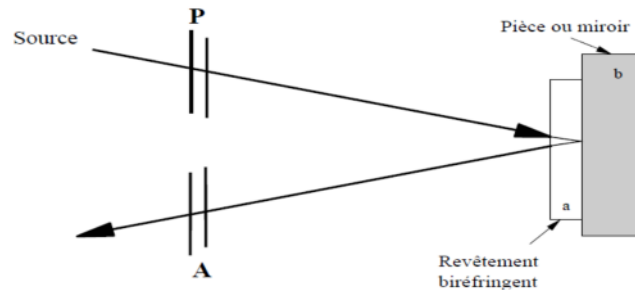


Figure II.4. Polariscopes par réflexion [9]

❖ Polariscopes plan à transmission

C'est un ensemble formé d'une source lumineuse de longueur λ , de deux polariscope (appelés polariseur pour le plus proche de source lumineuse l'analyseur pour le plus proche de l'observateur), d'un système de chargement, d'un appareil de prise d'images et enfin du modèle que l'on veut analyser (voir la figure I.8.)

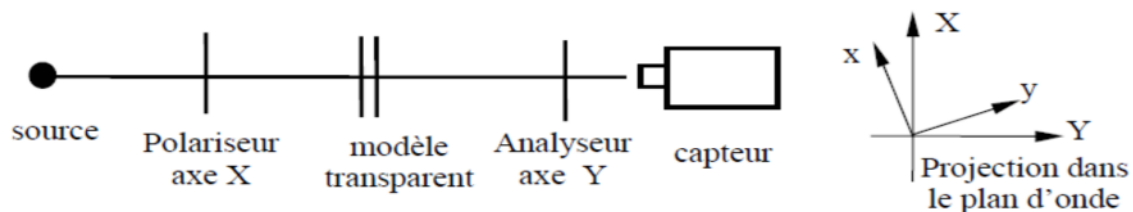


Figure II.5. Polariscopes rectiligne

❖ Polariscopes circulaire à transmission

Pour polariser circulairement une onde lumineuse, on utilise un polariseur classique et une lame quart d'onde. Ce type de polariscopes élimine les isoclines et ne laisse voir que les isochromes (très pratique pour mesurer les contraintes). En plus des filtres P et A, il comprend deux lames quart d'onde qui sont placées de part et d'autre du modèle selon le schéma suivant

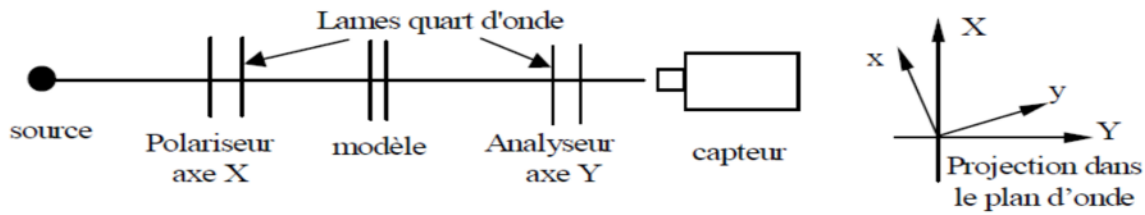


Figure II.6. Polariscopes circulaire

Décrivant l'évolution du rayon lumineux à travers le polariscope à lumière circulaire, Initialement, le faisceau lumineux est défini par :

$$E = \begin{Bmatrix} \alpha \sin \omega t \\ \alpha \cos \omega t \end{Bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

I.9. Eléments d'un polariscope

I.9.1 Sources lumineuses

La lumière se propage par ondes sinusoïdales, sous sa forme la plus simple, c'est une onde plane monochromatique représentée par deux grandeurs vectorielles sinusoïdales en phase et perpendiculaire. La lumière monochromatique est dite polarisée si chacun des vecteurs champs reste parallèle à une direction fixe.

Trois sortes de sources lumineuses sont utilisées pour ces études ; une source de lumière blanche, une source de lumière monochromatique et une lumière à vapeur de mercure.

❖ Source de lumière blanche

C'est une lampe ordinaire dont la lumière sert à l'observation des lignes isocline et ligne isochromatiques.

❖ Source de lumière monochromatique

Cette lumière est obtenue en filtrant la lumière blanche à l'aide de filtres monochromatiques.

Cette lumière permet l'observation aisée des isochromes avec la lumière circulaire, les isoclines étant éliminées

❖ Lumière à vapeur de mercure

Plus cohérente, cette lumière permet de visualiser nettement des ordres de frange élevée, quand l'ordre de frange (N) est supérieur à dix, il est préférable d'utiliser la lampe à vapeur de mercure.

Pour les différentes configurations du polariscope, voici un tableau résumant la valeur de l'intensité lumineuse.

Type de polariscope	Champ clair	Champ sombre
Rectiligne	$I(x, y) = I_0 - I_0 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2}$	$I(x, y) = I_0 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2}$
Circulaire	$I(x, y) = I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$	$I(x, y) = I_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$

Tableau II.1 L'intensité I pour les différentes configurations [3]

II.10 Notion de champ clair et de champ obscur

II.10.1 Polariseur plan :

- Polariseur et analyseur croisés = champ obscur (sombre).
- Polariseur et analyseur parallèles = champ clair.

II.10.2 Polariscopes circulaire :

- Polariseur et analyseur croisés et lames quart d'onde croisées on a un champ obscur.
- Polariseur et analyseur parallèles et lames quart d'onde croisées on a un champ clair.

II.11. Les isoclines

Ce sont les lieux des points où les directions principales qui sont parallèles aux axes des polaroids. Elles apparaissent en noir, lorsqu'on tourne simultanément l'analyseur et le polariseur, les isoclines se déplacent vers les points du modèle où les contraintes principales sont parallèles aux nouveaux axes. Les isoclines ne dépendent pas de la charge appliquée.

II.11.1 Propriétés des isoclines

- les isoclines ne se coupent jamais (sauf dans les points isotropes où les contraintes principales sont les mêmes dans toutes les directions).
- un contour libre d'une pièce est une isocline.
- un axe qui est symétrique simultanément à l'application de la charge et à la géométrie

De la pièce coïncide avec une isocline

II.11.2 Elimination des isoclines

Pour éliminer les isoclines, il suffit de placer entre le polariseur et le modèle d'une part, entre le modèle et l'analyseur d'autre part, deux lames quart d'onde dont les axes sont à $\alpha = \pi/4$ de ceux du polariseur.

Remarque

Les isoclines ne dépendent que de l'orientation des polaroids (β). Étant donné un point repéré, par exemple par une marque faite avec un crayon feutre, on tourne solidairement les polaroids jusqu'à ce que ce point devient noir. Les directions principales en ce point sont alors parallèles aux polaroids.

II.12. Point isotrope

- Un point isotrope est toujours représenté par une frange noire ;
- Dans un point isotrope, la différence des contraintes ($\sigma_{\max} - \sigma_{\min}$) = 0 ;
- Toutes les lignes isoclines passent par le point isotrope. Ceci implique que toutes les directions sont principales dans ce point ;
- Un point isotrope équivaut à une pression hydrostatique en mécanique des fluides ;
- Il existe deux formes possibles des isostatiques autour des points isotropes.

II.13. Les isostatiques

Ce sont des lignes de forces tangentes aux directions principales composées de deux familles orthogonales : une tangente à σ_1 et l'autre à σ_2 . Elles sont tracées à partir des isoclines. En un point B_2 de l'isocline Θ_2 , les directions principales des contraintes sont données par le dièdre incliné de Θ_2 . Les isostatiques sont donc tangentes à ce dièdre.

Pour tracer une isostatique passant par A_1 , on relie le point A_1 au point A_2 avec une droite inclinée de $(\Theta_1 + \Theta_2)/2$ et ainsi de suite.

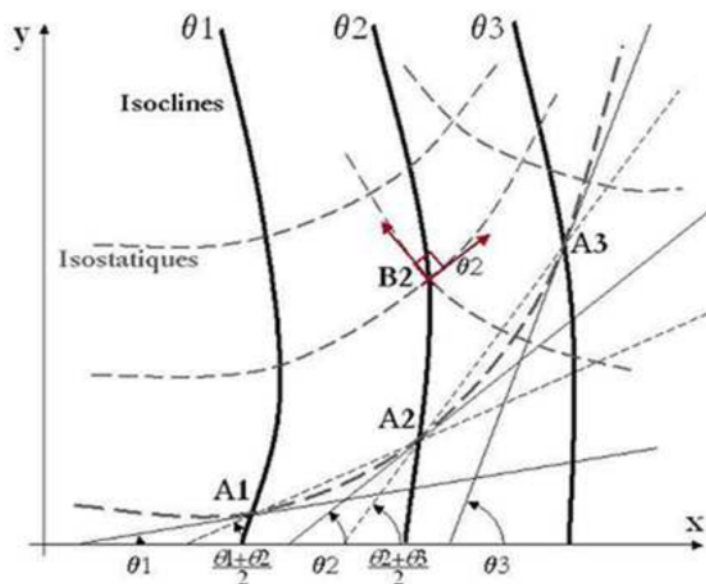


Figure II.7. Tracé des isostatiques à partir des isocline

II.14 Conclusion

Dans ce chapitre on a rappelé essentiellement le phénomène de biréfringence utilisé en photoélasticité bidimensionnelle pour analyser les contraintes dans les modèles sollicités. On a expliqué aussi le principe du polariseur qui permet d'utiliser ce phénomène de biréfringence en lumière plane ou en lumière circulaire. Les franges isoclines et les franges isochromes ainsi obtenues permettent de déterminer respectivement les directions des contraintes principales et les valeurs des contraintes de cisaillement maximales dans les modèles étudiés.

Chapitre III
La théorie d'Hertz et le contact
mécanique

III.1 Introduction

Dans les transmissions de couple ou de puissance plusieurs pièces mécaniques peuvent entrer en contact. Des contraintes sont alors développées dans ces éléments en contact. Différentes structures analysées ont montré que leurs ruptures sont dues à ces contraintes. Il est donc très important pour les concepteurs de machines de connaître les contraintes et les déformations au voisinage et dans les zones de contact pour un bon dimensionnement des différents éléments. Les contraintes sont généralement concentrées au voisinage des zones de contact et diminuent rapidement en s'éloignant de ces zones.

Plusieurs cas intéressants ont été étudiés: contact cylindre sur cylindre, contact cylindre sur plan, contact plan sur plan et contact sphère sur plan. Hertz a proposé des solutions analytiques permettant de déterminer la pression de contact et plus important encore les valeurs des contraintes principales et de la contrainte de cisaillement maximale à l'intérieur des modèles.

III.2 historique

La mécanique de contact débute en 1670 avec les travaux de Newton qui pressait des sphères de verre sur des plans métalliques. Ensuite la progression a été constante tant sur le plan des modèles que sur celui des outils de calcul [Hertz, 1886], [Johnson, 1985].

Plusieurs travaux ont été consacrés à l'analyse des problèmes de contact. Hertz, en 1882, a formulé les conditions qui doivent être satisfaites concernant le déplacement des surfaces. Il a posé comme hypothèse que chacun des deux corps peut être considéré comme un espace semi infini élastique chargé sur une surface elliptique relativement très faible devant les dimensions des solides en contact. Basé sur ces hypothèses, les contraintes sont analysées sur toute la surface du modèle, principalement au voisinage de la zone de contact. Ce n'est qu'environ cent ans plus tard, en 1985, que Johnson, Kendall, et Roberts trouveront une solution similaire pour le cas des contacts adhésifs (la théorie JKR).

III.3 Contraintes développées dans un contact d'hertz

III.3.1 Distribution des contraintes du contact cylindre sur cylindre

La connaissance de la distribution et de l'évolution des contraintes dans les contacts mécaniques est très importante, du fait qu'au voisinage de la surface du contact, des endommagements importants sont observés en surface par usure ou en surface par fissure et par fatigue. On considère deux cylindres élastiques, d'axes parallèles, de rayons R_1 et R_2 , de module d'élasticité E_1 et E_2 , de coefficient de Poisson ν_1 et ν_2 , de longueur infinie, chargé par une force W/L par unité de longueur perpendiculaire à leur plan tangent (Fig. III.1)

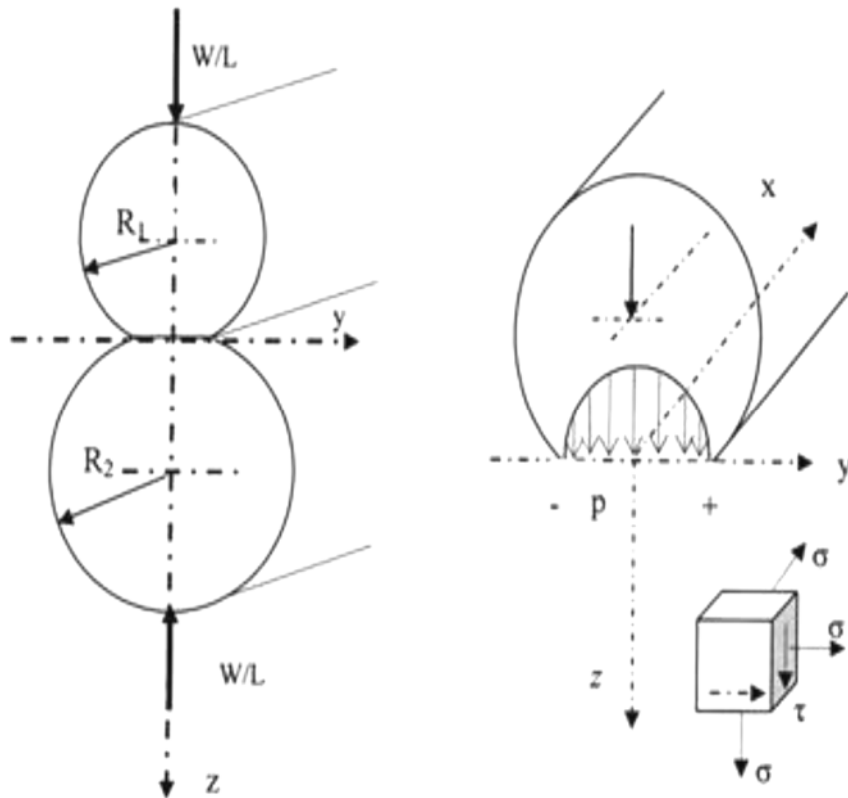


Figure. III.1 Contact entre deux cylindres le long de leurs génératrices et distribution de la Pression dans la zone de contact [15]

En posant :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (\text{III.1})$$

R_{eq} : Rayon de courbure équivalent

$$\frac{1}{E_{eq}} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (\text{III.2})$$

E Module d'élasticité équivalent

Le problème du contact cylindre sur cylindre est équivalent au problème du contact cylindre sur plan en faisant tendre le rayon d'un cylindre vers l'infini.

III.3.2 Contact cylindre sur plan

Une approche similaire peut être appliquée au contact cylindre-plan.

La théorie d'Hertz pour les contacts élastiques avec les hypothèses ci-dessous énumérées donne les relations de calcul ci-après pour le calcul de la pression, de la demi-largeur de contact et des contraintes développées à l'intérieur des modèles en contact.

Les hypothèses posées par Hertz :

- Les surfaces sont continuées et non-conformes
- Les allongements sont petits.
- Chacun des solides en contact peut être considéré comme un demi-espace élastique.
- Les surfaces sont sans frottement.

La répartition de pression sur l'aire de contact est alors donnée par [15] :

$$p(y) = p_0 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2} \quad (\text{III.3})$$

Où P_0 désigne la pression au centre du contact et b la demi-largeur de pression. Les valeurs de P_0 et b sont données par les relations suivantes où E_{eq} est le module d'élasticité équivalent et R_{eq} le rayon de courbure équivalent.

$$p_0 = \frac{2W}{\pi b L} \quad (\text{III.4})$$

$$b = 2 \sqrt{\frac{W R_{eq}}{\pi E_{eq} L}} \quad (\text{III.5})$$

w : effort appliqué.

L : épaisseur du modèle.

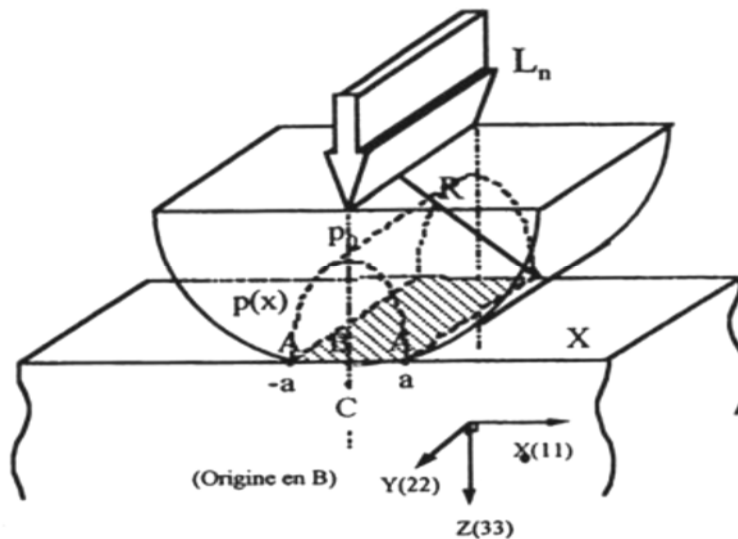


Figure III.2: Contrainte cylindre sur plan [16]

Champ de contraintes dues aux pressions hertziennes

Dans le cas du cylindre sur plan, le champ de contraintes à l'intérieur du volume du parallélépipède du aux pressions Hertziennes s'écrit alors :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= -\left(\frac{b^2+2y^2+2z^2}{b}Q - \frac{2\pi}{b} - 3yR\right) \\ \sigma_z &= -\frac{P_0}{\pi}z(bQ - yR) \\ \sigma_x &= \nu(\sigma_y + \sigma_z) \\ \sigma_{yz} &= -\frac{P_0}{\pi}z^2R \\ \tau_{xy} &= 0 \\ \tau_{xz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (III.6)$$

Ou il est posé :

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{\pi}{\omega\varepsilon}(1 - \varepsilon) \left[\varepsilon^2 + 2\varepsilon\left(1 - \frac{4b^2}{\omega}\right)^{1/2} \right] \\ Q &= \frac{\pi}{\omega\varepsilon}(1 + \varepsilon) \left[\varepsilon^2 + 2\varepsilon\left(1 - \frac{4b^2}{\omega}\right)^{1/2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (III.7)$$

Avec :

$$\omega = (b + y)^2 + z^2 \quad (III.8)$$

$$\varepsilon^2 = \frac{(b - y)^2 + z^2}{(b + y)^2 + z^2}$$

Sur l'axe oz, le champ des contraintes s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{P_0}{\pi}z\left(\frac{b^2+2y^2+2z^2}{b}Q - \frac{2\pi}{b}\right) \\ \sigma_z &= -\frac{P_0}{\pi}zbQ \\ \sigma_x &= \nu(\sigma_y + \sigma_z) \\ \tau_{yz} &= \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (III.9)$$

Sur l'axe oz, les axes x, y et z sont des axes principaux. La différence des contraintes principales est maximale pour $z = h_c = 0,78b$ (point de hertz) et la valeur de la contrainte tangentielle est égale à $0,3P_0$.

La figure (III.3) ci-dessous montre un exemple de contact entre deux cylindres à axes parallèles. Les contraintes développées au voisinage de la zone de contact à l'intérieur du modèle sont représentées sur la moitié gauche de la figure. On remarque qu'effectivement la contrainte de cisaillement maximale est nulle à l'origine puis augmente et atteint un maximum correspondant au point d'Hertz, étant la demi-largeur de contact. Sur la partie droite du

graphe on remarque les contours d'égales contraintes de cisaillement maximal. Ces contours sont comparables aux franges isochromes obtenues en photoélasticimétrie.

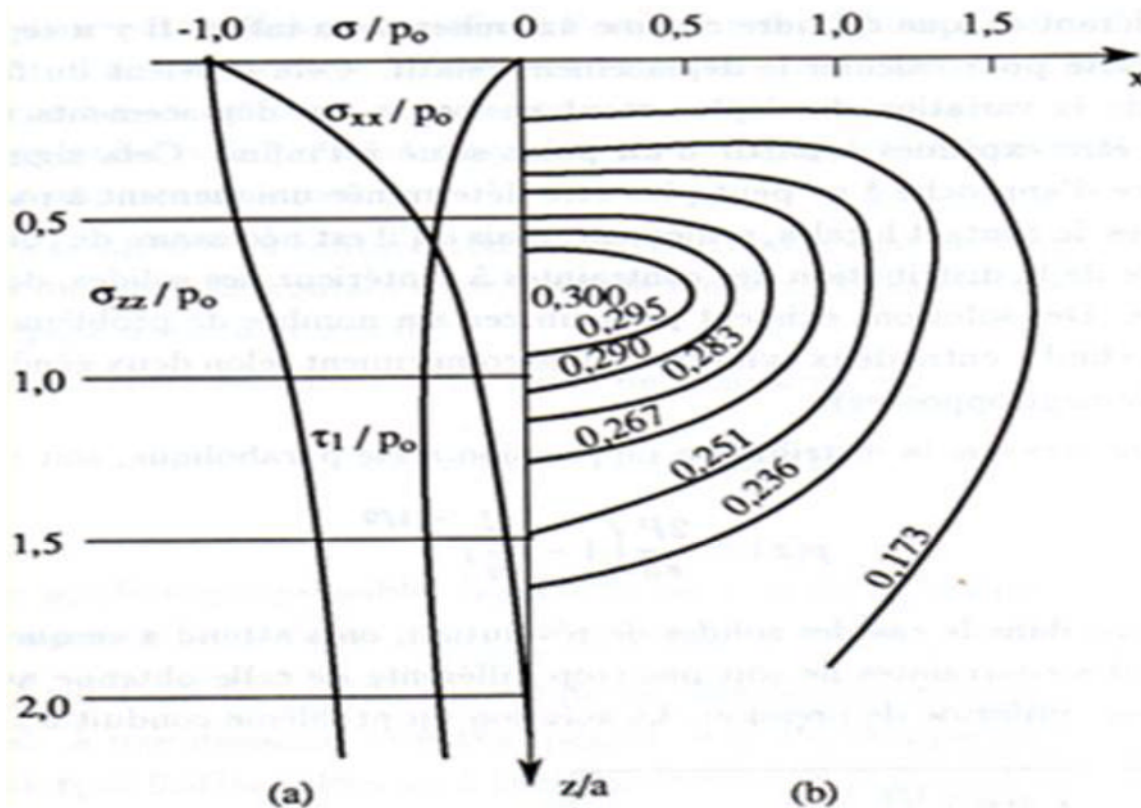


Figure III.3: Contact de deux cylindres à axes parallèles. [15]

(a) Contraintes le long de l'axe de symétrie z , (b) Contours d'égales contraintes de cisaillement maximales

La théorie de Hertz pour les contacts a été confirmée grâce à la photoélasticimétrie. La figure (III.4) montre les réseaux d'isochromes (lieu des contraintes maximales de cisaillement) pour les cas cités précédemment.

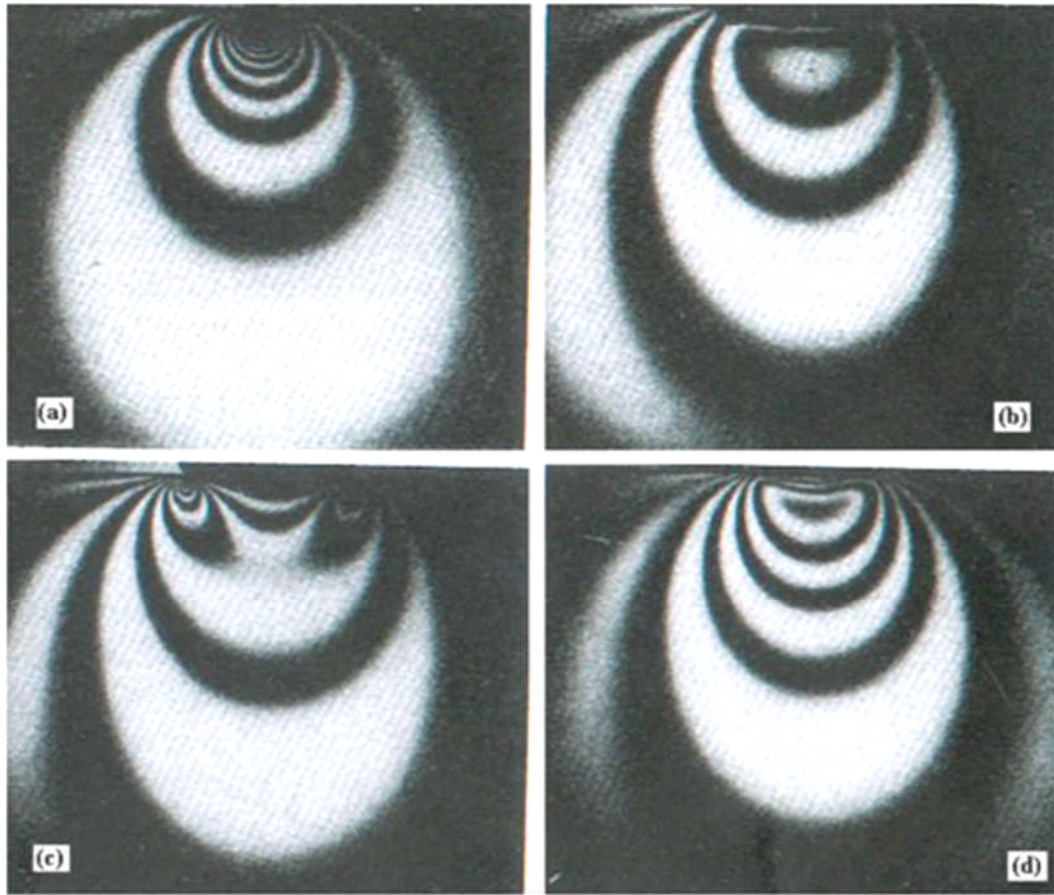


Figure III.4: Franges isochromes en photoélasticimétrie bidimensionnelle (Contours des contraintes de cisaillement maximales) pour (a) une charge ponctuelle, (b) une Pression uniforme, (c) un poinçon rigide plat et (d) un contact de deux cylindres [15].

Pour le premier cas de la charge ponctuelle (figure III.4.a), les franges isochromes sont concentrées au niveau du point d'application de la charge. Le deuxième cas utilisant une pression uniforme (figure III.4.b) se traduit par des franges presque horizontales dans la zone d'application de la charge. Pour le cas du poinçon rigide plat (figure III.4.c), on observe une concentration des contraintes sur les bords du poinçon.

Pour le dernier cas (figure III.4.d), contact cylindre-plan est similaire a notre travail.

III.3.3 Contact poinçon sur plan

Dans de nombreuses configurations industrielles on utilise le contact plan-plan sous pression normale ou plus exactement le contact poinçon-plan. Différentes formulations peuvent être considérées. Dans le cas d'une distribution uniforme de pression, correspondant au cas d'un

poinçon souple, on détermine les composantes du tenseur en différents points du massif à l'aide des relations suivantes [9].

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11}^N &= \frac{-P}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) - (\sin \theta_1 - \sin 2\theta_2)] \\ \sigma_{33}^N &= \frac{-P}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) + (\sin \theta_1 - \sin 2\theta_2)] \\ \sigma_{13}^N &= \frac{P}{2\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \\ \theta_1 &= \arctg \left(\frac{z}{x-a} \right) \\ \theta_2 &= \arctg \left(\frac{z}{x+a} \right) \\ \theta_{1,2} &= \arctg \left(\frac{z}{x \mp a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.10})$$

On calcul respectivement les valeurs principales :

$$\sigma_{12}^N = \frac{-P}{\pi} (\alpha_+ \sin \alpha) \quad \text{Et le cisaillement maximal } \tau_{max} = \frac{P}{\pi} \sin \alpha$$

Les isovaleurs des contraintes principales σ_1 et σ_2 et du cisaillement maximal τ_{max} sont décrites par la famille de cercles passant par les deux points du contact O_1 et O_2 (figure III.5).

La valeur maximale est obtenue pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ avec $\tau_{max} = \frac{P}{2}$

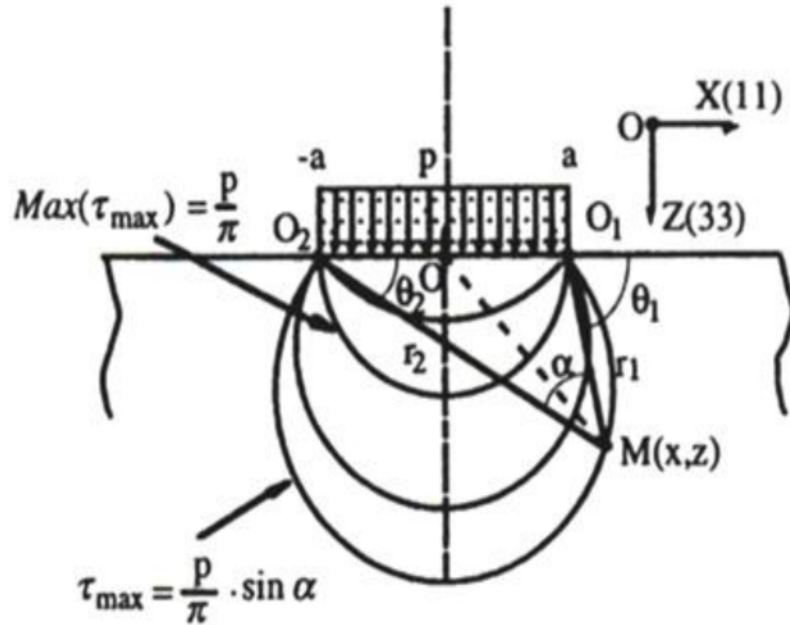


Figure III.5 : Isovaleurs des contraintes principales σ_1 et σ_2 et du cisaillement maximal τ_{max} [17].

III.4 Application d'un effort tangentiel

III.4.1 Contact poinçon sur plan à l'aide d'un effort tangentiel

Pour un contact poinçon sur plan sous l'effet d'un effort tangentiel, lorsqu'un déplacement relatif est imposé, le maintien parallèle des surfaces en contact plan est extrêmement difficile à obtenir. Une inclinaison apparaît, conduisant inmanquablement à des effets de coin. L'introduction de l'effort tangentiel, outre le fait qu'il induit un désalignement, accentue les discontinuités observées en bordure de contact pour un chargement normal simple. Dans le cas idéal d'un alignement parfait, pour un poinçon souple conduisant à une distribution homogène du champ de cisaillement.

On détermine les composantes du tenseur en différents points du solide à l'aide des relations suivantes [17].

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^T &= \frac{\mu P}{2\pi} \left[4 \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right) - (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \right] \\ \sigma_{33}^T &= \frac{\mu P}{2\pi} [(\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2)] \\ \sigma_{33}^N &= \frac{-\mu P}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) + (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)] \\ r_{1,2} &= [(X_{\pm}^2 \alpha^2 + z^2)^{1/2}]\end{aligned}\tag{III.11}$$

Contrairement au chargement purement normal qui présente toujours des valeurs finies, l'introduction du chargement tangentiel introduit une discontinuité infinie par la composante σ_{11}^T en bordures de contact.

Ainsi, aussi petite que soit la valeur de la force tangentiel associée, cette sur contrainte ne pourra être adaptée que par une accommodation irréversible du matériau et donc par plastification ou fissuration [17].

Aux composantes associées au chargement normal, on superpose celles induites par le chargement tangentiel pour obtenir l'état global de chargement.

III.5 Conclusion

Dans ce chapitre on a rappelé les différentes formulations du problème de contact à savoir un contact purement normal et contact en présence d'un effort tangentiel.

Les calculs montrent que, pour un contact normal d'un cylindre sur plan, la différence des contraintes principales est maximale pour $z = h_c = 0.78b$ (point de hertz) et la valeur de la contrainte tangentielle est égale à $0.3P_0$. Pour le cas du contact normal d'un poinçon sur plan, les calculs montrent que le cisaillement maximal, se trouve sur une isocontraintes repérée par un angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Chapitre IV

Partie Expérimentale

IV.1. Introduction

Objectif de cette partie porte sur analyse du contact mécanique par trois méthodes, expérimental, élément finie avec le logiciel « CASTEM » et analytique faite avec le logiciel « MATLAB » on utilisant la théorie de Hertz pour déterminer le champ de contraintes développées un disque en époxy à été écrasé le long de l'axe de symétrie entre deux plaque l'une en époxy et l'autre en acier. Ainsi deux type de contact ont été réalisés un contact entre un solide indéformable en acier et un disque en époxy, et d' autre part un contact entre deux solides déformables cylindre-plan en époxy biréfringent.

L'analyse des résultats se fera d'une part, par la comparaison des courbes de la variation de la contrainte maximale τ_{\max} , le long d'une droite passant par les points de contact, obtenue par les trois méthode et d'autre part, par la comparaison des franges isochromes relevées sur le polariscope avec celles simulées numériquement à l'aide du logiciel "CASTEM".

IV.2. Identification du modèle

Les matériaux utilisés sont époxy possédant les propriétés biréfringence nécessaire pour mener l'étude sur un polariscope et l'acier.

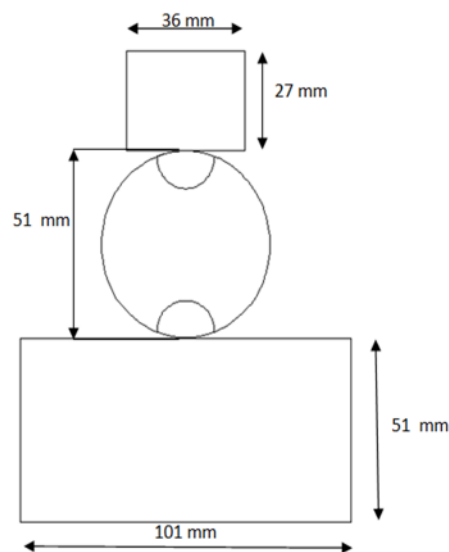


Figure. IV.1 : Les dimensions du modèle utilisé pour les trois méthodes.

❖ Les caractéristiques du la plaque rectangulaire en époxy (solide déformable) sont :

-Épaisseur $e = 7\text{mm}$.

-Module de Young $E = 3273\text{MPa}$

-Coefficient de poisson $\nu = 0.3$.

❖ Les caractéristiques du cylindre (solide déformable) en époxy sont :

-Epaisseur $e = 7\text{mm}$.

-Module de Young $E = 3273\text{MPa}$, -coefficient de poisson $\nu = 0.3$.

❖ Les caractéristiques du la plaque en Acier (solide indéformable) sont :

-Épaisseur $e = 16\text{mm}$.

-Module de Young $E = 210000\text{MPa}$, -coefficient de poisson $\nu = 0.37$.

Le modèle utilisé est chargé par une force $F = 605.71\text{ N}$.

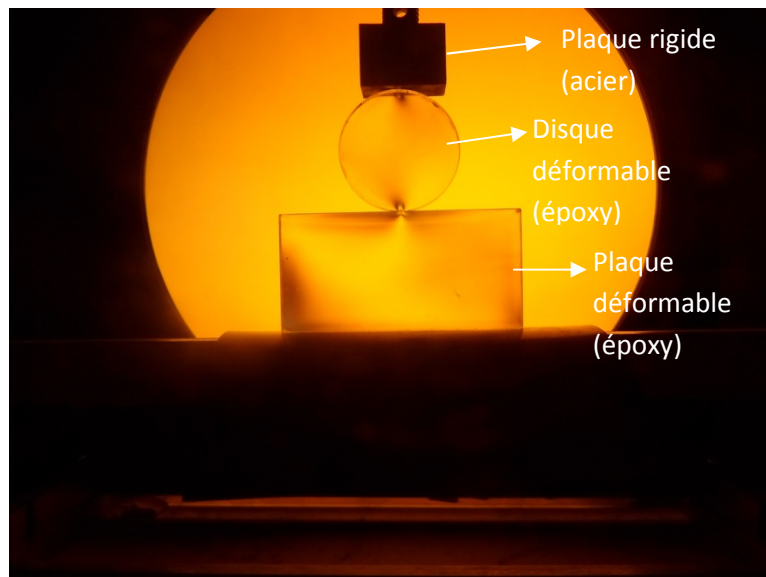


Figure. IV.2 :Forme de modèle utilisé par les trois méthodes.

IV.3. Vérification du modèle

Avant de procéder à l'observation et l'analyse du modèle sur le polariscope, on doit vérifier qu'il ne présente pas de contraintes résiduelles.

IV.3.1 Définition des contraintes résiduelles

Les contraintes résiduelles sont des contraintes multiaxiales statiques auto équilibrées existant dans un système isolé de température uniforme et en l'absence de tout chargement extérieur. Dans une section, la répartition des contraintes résiduelles résulte de l'équilibre mécanique entre la zone occupée par la source des contraintes résiduelles caractérisée par une fonction de distribution bien définie et le reste de la section déformée élastiquement. Elles sont également appelées contraintes internes ou contraintes initiales car elles s'équilibrent entre elles[17].

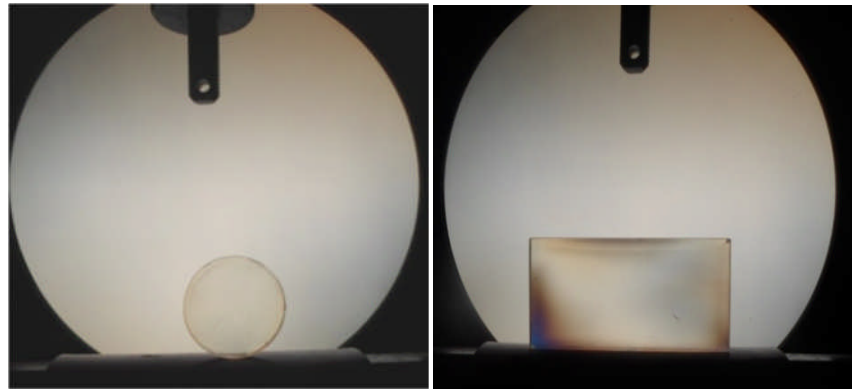


Figure. IV.3 : Observation des contraintes résiduelles sur le cylindre et la plaque déformables.

Après observation, on a constaté qu'il y a une très faible présence de contraintes résiduelles qui n'influenceront pas les résultats de l'expérience.

IV.4. Analyse expérimentale du contact dans le modèle

IV.4.1. Dispositif expérimental

L'analyse des contraintes dans le modèle se fera à l'aide d'un polariscope à transmission. Afin de réaliser un contact mécanique entre un solide indéformable et un disque, et d'une autre part un contact entre deux solide déformable disque-plan (fig.IV.4). On récupère les isochromes et les isoclines directement au niveau de l'analyseur du polariscope. L'exploitation de ces franges permet d'analyser le champ des contraintes développées dans le modèle.

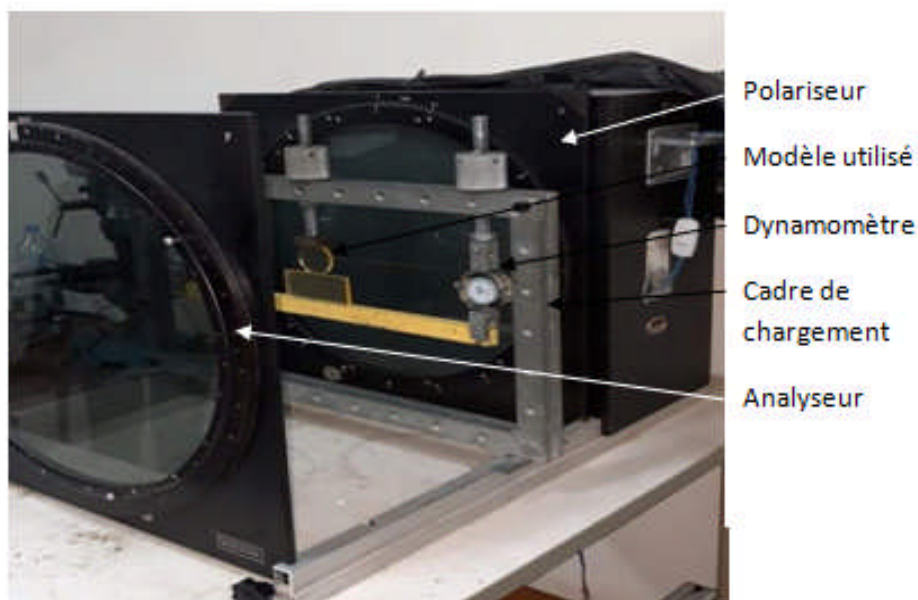


Figure. IV.4 : Observation du modèle utilisé placé sur le polariscope plan.

IV.5. Détermination de la constante de frange

Avant d'effectuer les essais; on doit d'abord retrouver la valeur exacte de la constante de frange f . Pour cela, on la détermine à l'aide de la méthode d'essai de flexion 4 points, la valeur obtenue sera la valeur de f utilisée pour l'analyse des contraintes dans le modèle.

IV.5.1 Essai de flexion 4 points

L'essai de flexion 4 points (fig.IV.5), permet de créer un moment fléchissant constant sur une éprouvette en matériau biréfringent.

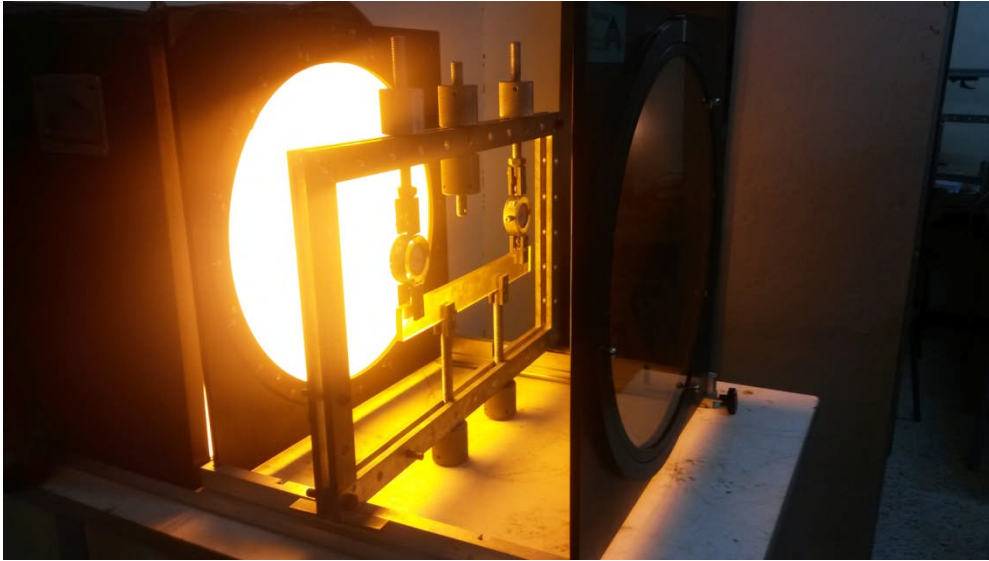


Figure IV.5 : Dispositif de chargement en flexion

Modèle utilisé

L'éprouvette ci-dessous sera soumise à un moment fléchissant en utilisant le banc d'essai sur la figure IV.5.

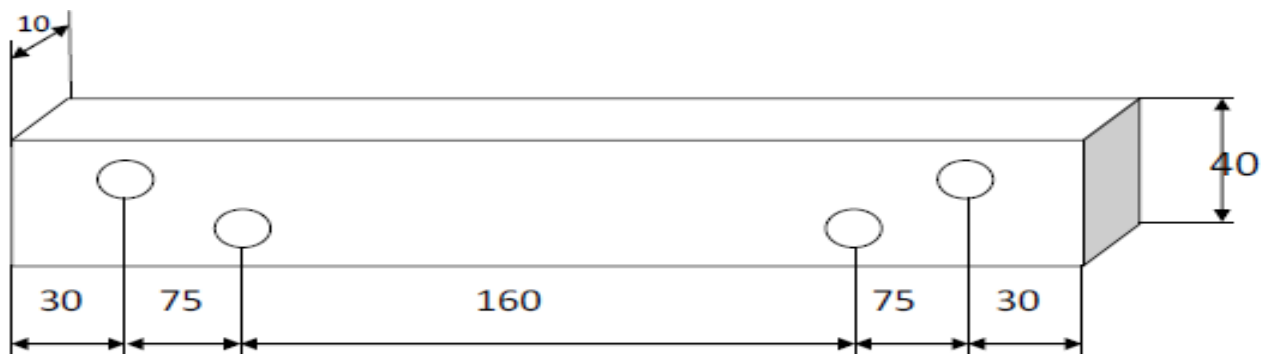


Figure IV.6: Eprouvette de l'essai de flexion

Principe et procédure de détermination de la constante de frange

Avant de commencer l'expérience, il est nécessaire de régler la disposition des polaroids qui donne la lumière circulaire avec élimination des isoclines.

En créant un moment fléchissant constant sur une certaine partie de l'éprouvette, une fois les franges isochromes visualisées (fig.IV.7). On relève leurs nombres afin de retrouver la valeur de l'ordre de frange au niveau du bord libre.

Le calcul de Mf permet de retrouver la valeur de la constante de frange.

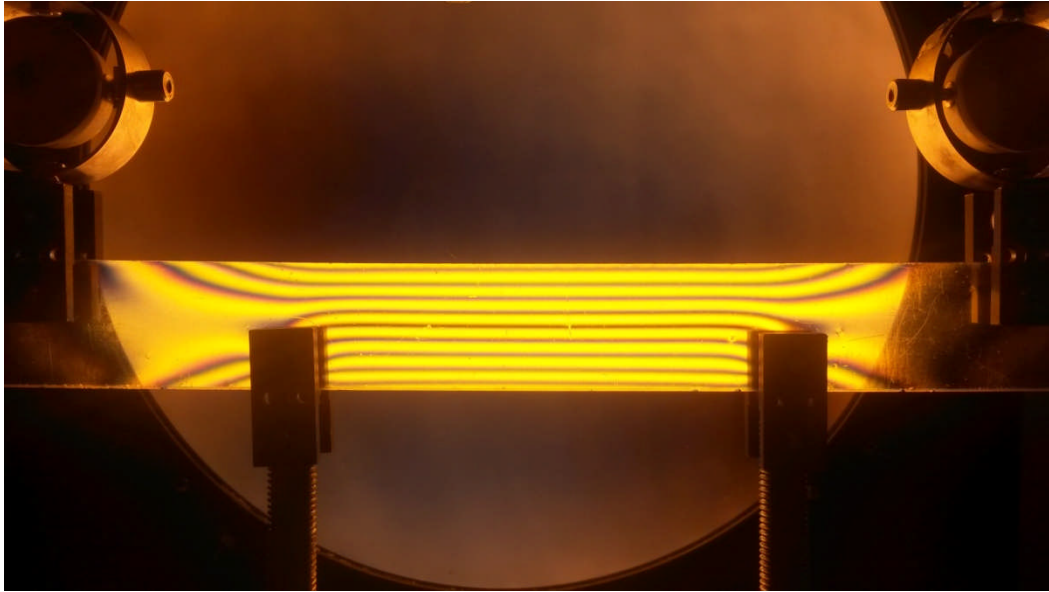


Figure IV.7: Les franges isochromes obtenues en flexion

Calcul de la constante de frange

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{Nf}{e} \quad (\text{IV.1})$$

Sur les bords de l'éprouvette nous avons: $\sigma_2 = 0$

Ce qui donne :

$$f = \frac{e \cdot \sigma_1}{N} \quad (\text{IV.2})$$

La contrainte σ nous est donnée par la formule suivante :

$$\sigma_1 = M_f / w_{xx} = M_f / I_{xx} \times y \quad (\text{IV.3})$$

Tel que : $w_{xx} = \frac{I_{xx}}{y}$

Où : I_{xx} est le moment d'inertie de la plaque qu'est donné par la relation :

$$I_{xx} = \frac{e.h^3}{12} \quad (\text{IV.4})$$

ϑ est la distance qui sépare la ligne neutre du bord de la distance qu'est donnée par la relation :

$$\vartheta = h/2 \quad (\text{IV.5})$$

En remplaçant (IV.3) dans la relation (IV.2) on aura :

$$f = 6 \frac{M_f}{Nh^2} \quad (\text{IV.6})$$

Calcul du moment fléchissant M_f

On applique aux points A et B, un effort F d'intensité égale à 154,5N.

A l'équilibre, on a:

$$\sum F = 0 \rightarrow 2F - R_B - R_C = 0$$

$$\sum M_{f/B} = F_A(AB) + R_B(BB) + R_C(CB) + F_D(DB) = 0$$

$$\rightarrow 160R_C - 235F_D + 75F_A = 0 \quad (\text{IV.7})$$

A partir de ces équations d'équilibre, on retrouve:

$$R_B = R_C = F = 154,5 \text{ N} \quad (\text{IV.8})$$

Le moment fléchissant entre A et B est

$$M_f = F.x \quad (\text{IV.9})$$

Le moment fléchissant entre B et C est

$$\begin{cases} M_f = F.x - R_B(x - 75) \\ M_f = F.x - F.x + 75.F \\ M_f = 75.F \end{cases} \quad (\text{IV.10})$$

De (IV.9) et (IV.10), on déduit le moment maximum :

$$M_f = 11587,5 \text{ N.mm}$$

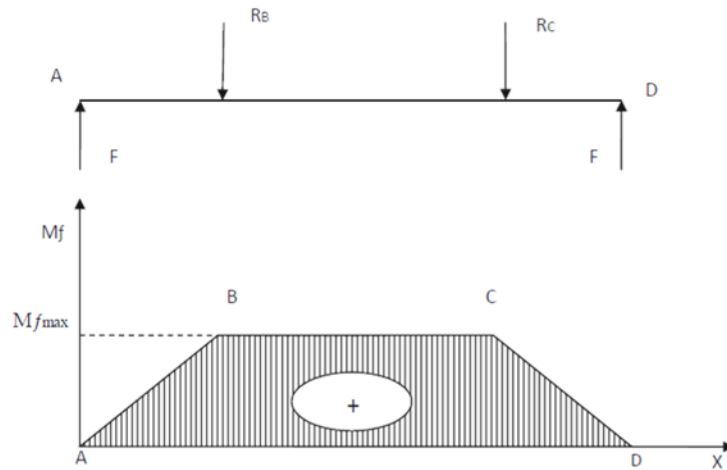


Figure IV.8: Diagramme du moment fléchissant

Après application des efforts, on relève sur la largeur de la poutre l'ordre de frange N^* correspondant au moment fléchissant appliqué sur le modèle.

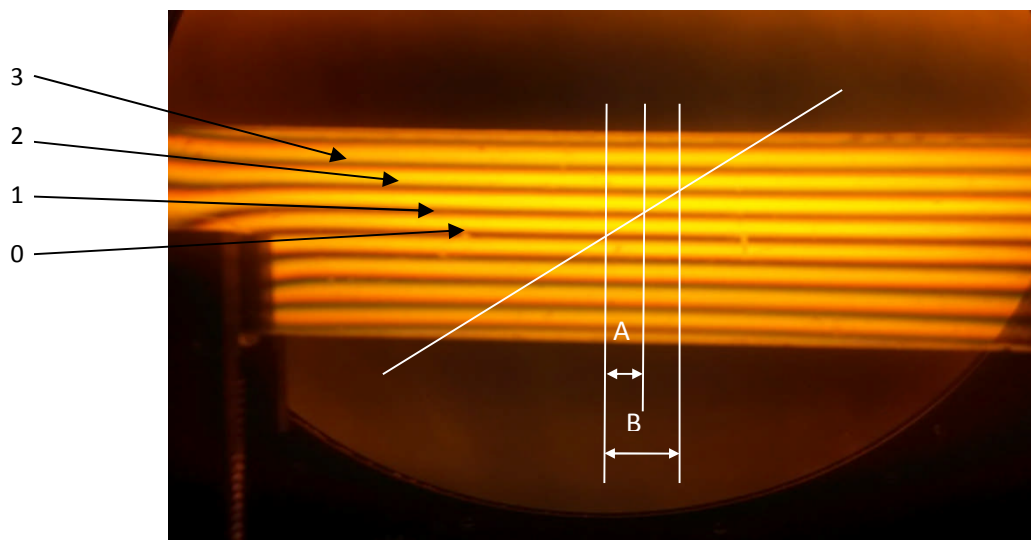


Figure IV.9 : relevé de l'ordre de frange au bord de l'éprouvette.

Sachant que l'ordre de frange au niveau de la ligne neutre est égale à zéro, à une distance A, on a l'ordre de frange égale à 2, l'ordre de frange N au bord de l'éprouvette, à une distance B sera donné avec : $N=2 (B/A)$

En mesurant les distances A et B à partir de la figure IV.9, on aura le rapport (B/A) égale à 2, ce qui donne $N=4$

$$N=N^*/2 \quad (IV.11)$$

En substituant équation (IV.11) dans équation (IV.9) on aura :

$$f = \frac{12Mf}{h^2 N^*} \text{(IV.12)}$$

Appelons celle-ci f faisant l'application numérique :

$$h = 40 \text{ mm}$$

$$Mf = 11587,5 \text{ N. mm}$$

$$N^* = 8$$

On trouve :

$$f = 10,87 \text{ N/mm. Ordre}$$

IV.6. Analyse expérimentale des contraintes

Pour analyser expérimentalement les contraintes agissant sur le modèle, on opte pour la méthode photoélasticimétrie.

IV.6.1. La variation de la contrainte de cisaillement maximale suivant l'axe [AB]

Pour la détermination de la variation de la contrainte de cisaillement maximale, on doit d'abord visualiser le réseau d'isochromes sur le polariscope, ici en lumière monochromatique et en champs clair. Après détermination des ordres de franges, la loi de Maxwell peut être alors utilisée pour déterminer l'intensité des contraintes. On définit un segment [AB] à partir du point de contact du modèle, où A et B désigne les points du contact.

Rappelons qu'en photoélasticimétrie : la différence des contraintes principales est donnée par la relation de MAXWELL :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{Nf}{e}$$

-la contrainte de cisaillement maximale est donnée par la relation suivante :

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

On aura donc à partir des relations ci-dessous :

$$\tau_{max} = \frac{N.f}{2.e}$$

e : étant l'épaisseur du modèle: $e=7\text{mm}$

On a calculé à l'aide des relations données, les valeurs de τ_{max} en un nombre déterminé de points pris sur le segment [AB]. En effet ces points sont repérés au niveau des intersections du segment [AB] avec les franges isochromes.

L'abscisse X et l'ordre de frange N sont relevés en chacun de ces points. Ces valeurs sont portées sur des tableaux à partir desquels seront tracés les graphes de l'évolution de la contrainte de cisaillement maximale le long du segment [AB].

IV.6.2. Visualisation du réseau d'isochromes sur le modèle en champ clair

Après chargement du modèle en lumière monochromatique polarisée circulairement, les franges isochromes en champ clair peuvent être distinguées et repérées par leur ordre d'apparition (fig.IV.10, fig.IV.11, fig.IV.12 et fig.IV.13). Nous pouvons compter les franges par demi-ordre croissant, jusqu'à 23.5 au voisinage du contact au point A, et jusqu'à 16.5 au voisinage du contact au point B.

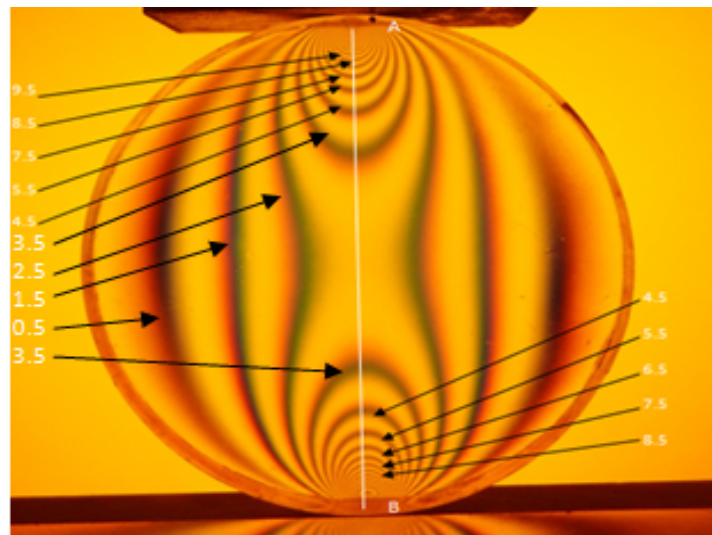


Figure IV.10 : Réseau d'isochromes observé sur le polariscope.

Les franges au voisinage du contact sont difficiles à distinguer, ce qui nous amène à agrandir cette zone pour pouvoir repérer ces franges (fig. IV.11 et IV.12). Les autres franges peuvent ensuite être repérées sur toute la surface du modèle.

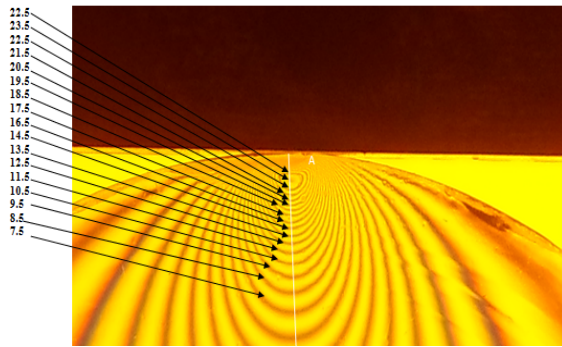


Figure IV.11 : réseau d'isochromes observé sur le polariscope pour La partie supérieure.

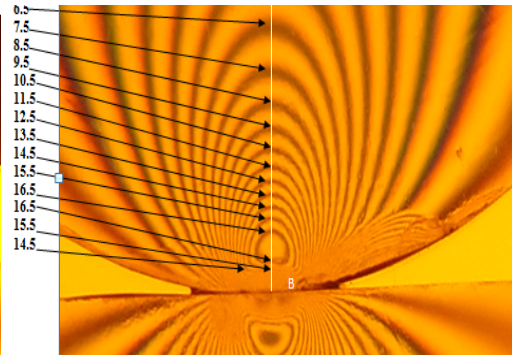


Figure IV.12: réseau d'isochromes observé sur le polariscope Pour la partie inférieure.

IV.7 Calcul de la valeur τ_{max} suivant le segment [AB]

A l'intersection du segment [AB] avec les franges isochromes, on relève les distances correspondantes par rapport aux points de contact.

Ordre de frange N	Distance sur image [mm]	Distance réel en [mm]	$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N \cdot f}{e}$ [mm]	$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ [MPa]
22.5	0.8	0.4	34.9	17.4
23.5	1.1	0.6	36.4	18.2
22.5	1.4	0.7	34.9	17.4
21.5	1.6	0.8	33.3	16.6
20.5	1.8	0.9	31.8	15.9
19.5	2.0	1.1	30.2	15.1
18.5	2.2	1.2	28.7	14.3
17.5	2.4	1.3	27.1	13.5
16.5	2.7	1.4	25.6	12.8
15.5	2.9	1.5	24.0	12.0
14.5	3.2	1.7	22.5	11.2
13.5	3.5	1.9	20.9	10.4
12.5	3.8	2.0	19.4	9.7
11.5	4.3	2.3	17.8	8.9
10.5	5.3	2.8	16.2	8.1
9.5	6.0	3.2	14.7	7.3
8.5	7.0	3.7	13.1	6.5
7.5	8.0	4.3	11.6	5.8
6.5	10.0	5.4	10.0	5.0
5.5	12.5	6.7	8.5	4.2
4.5	16.5	8.9	6.9	3.4
3.5	24.0	12.9	5.4	2.7
3.5	65.0	35.2	5.4	2.7
4.5	74.0	40.1	6.9	3.4
5.5	79.0	42.8	8.5	4.2
6.5	82.0	44.4	10.0	5.0
7.5	83.9	45.5	11.6	5.8
8.5	84.8	46.0	13.1	6.5
9.5	85.6	46.4	14.7	7.3
10.5	86.2	46.8	16.2	8.1
11.5	86.8	47.1	17.8	8.9
12.5	87.2	47.3	19.4	9.7
13.5	87.7	47.6	20.9	10.4
14.5	88.2	47.8	22.5	11.2
15.5	88.7	48.1	24.0	12.0
16.5	89.2	48.4	25.6	12.8
17.5	89.7	48.6	27.1	13.5
16.5	90.0	48.8	25.6	12.8
15.5	90.1	48.8	24.0	12.0

Tab.IV.1 : valeur de $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ relevée suivant le long [AB].

A chaque ordre de frange, l'ordre N correspond à une valeur de la contrainte de cisaillement maximale.

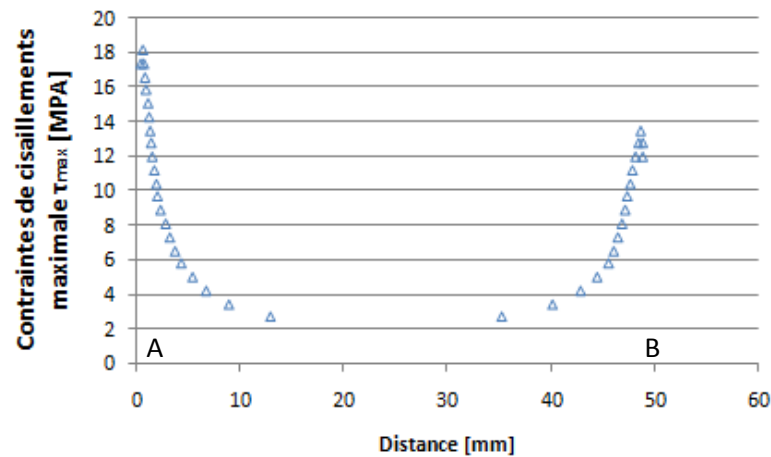


Figure IV.13: Evolution de τ_{max} relevée expérimentalement le long de la droite AB.

IV.8. Les franges isoclines

En faisant tourner les deux polaroids simultanément on visualise les différentes franges isoclines (fig.IV.14) qui apparaissent pour chaque valeur d'angle de rotation qui est de 10° , les franges isoclines qui sont les directions principales des contraintes apparaissent sous forme de franges obscures sur les images en fonction de la position des polaroids.

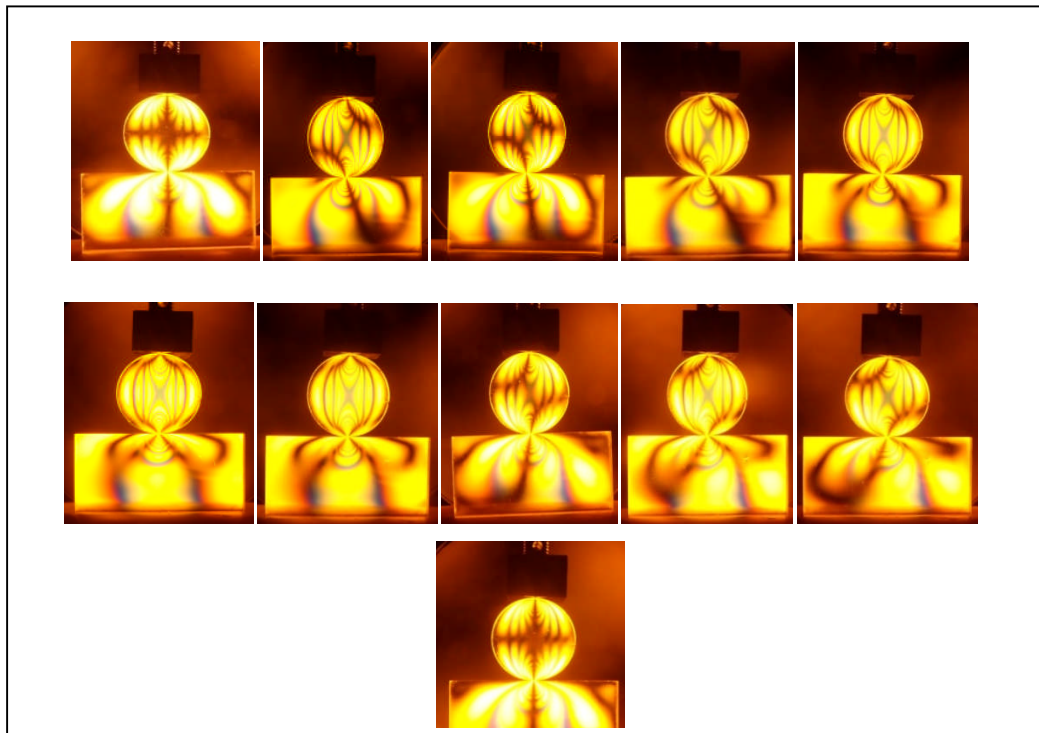


Figure IV. 14: Relevée des isoclines par rotation par pas de 10° .

IV.9. Analyse numérique des contraintes

Pour la méthode numérique, une simulation du modèle (disque écrasé entre deux plaques une déformable et l'autre indéformable) et à l'aide du logiciel de calcul par éléments finis CASTEM.

IV.9.1. Calcul des champs de contraintes à l'aide du logiciel CASTEM

Une étude par éléments finis conduite à l'aide du logiciel CASTEM a été utilisée pour obtenir le champ des contraintes développé dans le contact mécanique. La simulation du contact a été réalisée à l'aide d'un programme écrit sous CASTEM, elle est basée sur la configuration du montage expérimentale. Dans le calcul par éléments finis on a considéré le comportement du modèle isotrope purement élastique.

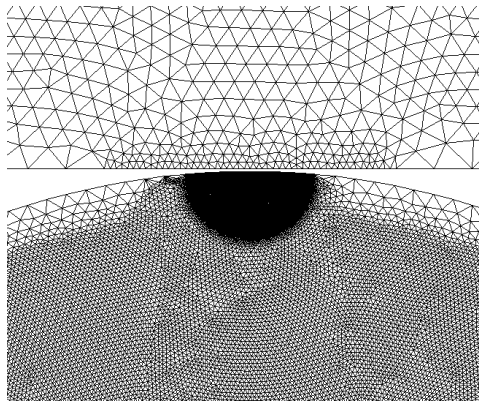


Figure IV.15 : Représentation de la Surface maillée pour la partie supérieure Rigide-déformable.

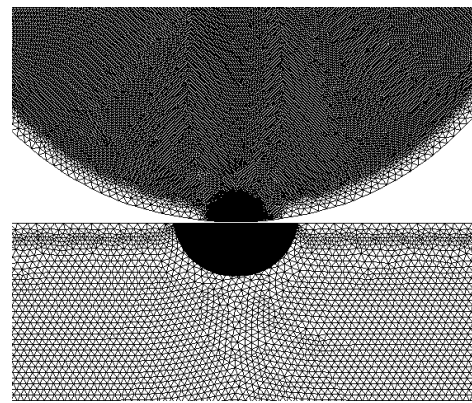


Figure IV.16: Représentation de la Surface maillée pour la partie Inférieure déformable-déformable.

Le maillage du modèle pour le calcul numérique a été raffiné au voisinage des zones de contact pour avoir une meilleure visualisation des franges. Le module de Young et le coefficient de poisson des pièces sont introduits dans le programme. Dans le contact entre les pièces mécanique il est plus facile d'imposer un déplacement pour réaliser un contact qu'un effort imposé.

Dans le programme on a choisi l'opérateur (DEPI); qui permet de déplacer la droite L7 suivant y. En revanche la droite L7 est bloquée en rotation et en déplacement. L'opérateur (IMPO) permet de créer un contact entre le disque déformable et la pièce indéformable, et un contact entre le disque et la pièce déformable.

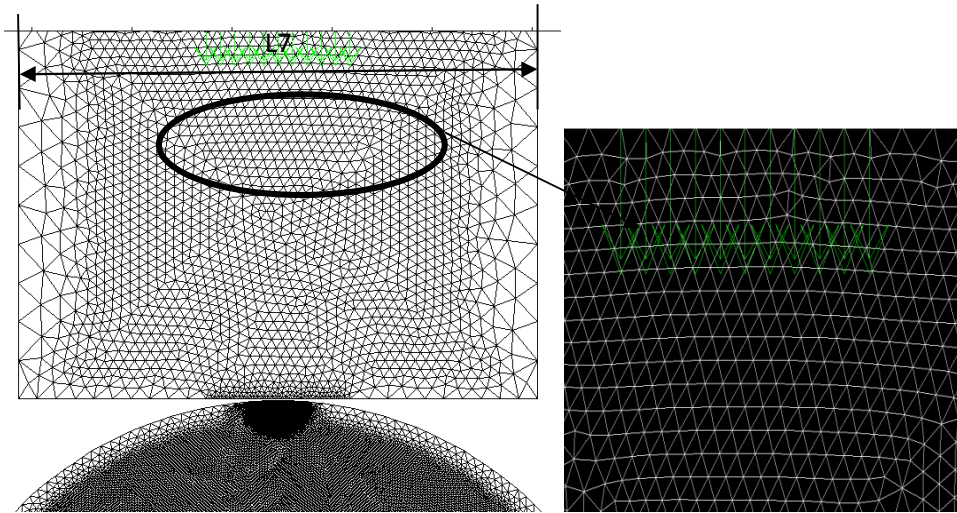


Figure IV.17: Représentation des déplacements imposés.

Le contact mécanique a été assurée en utilisant l'opérateur Impo(ser) pour les deux types de contact mécanique la figure (IV.18) représente les deux zones de contact en couleur rouge.

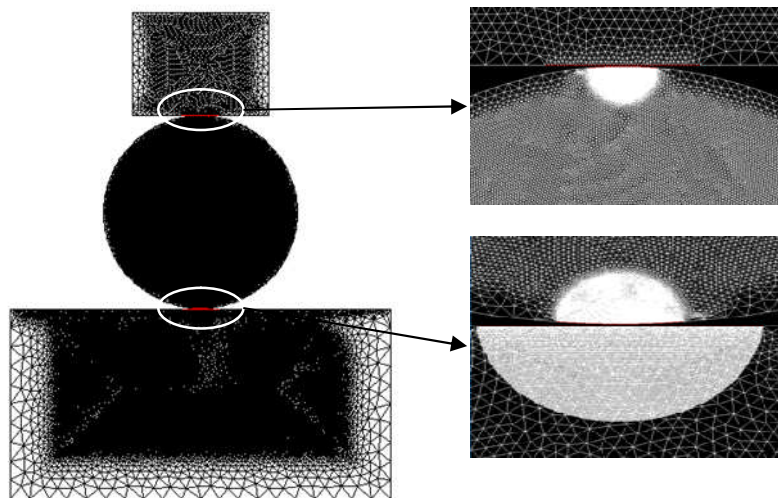


Figure IV.18 : Représentation des contacts assurés.

La valeur des efforts correspondant au déplacement imposé sur le segment [L7] est extraite sur ce dernier. La figure (IV.19) représente l'ensemble des réactions dues aux sollicitations imposées dans le contact.

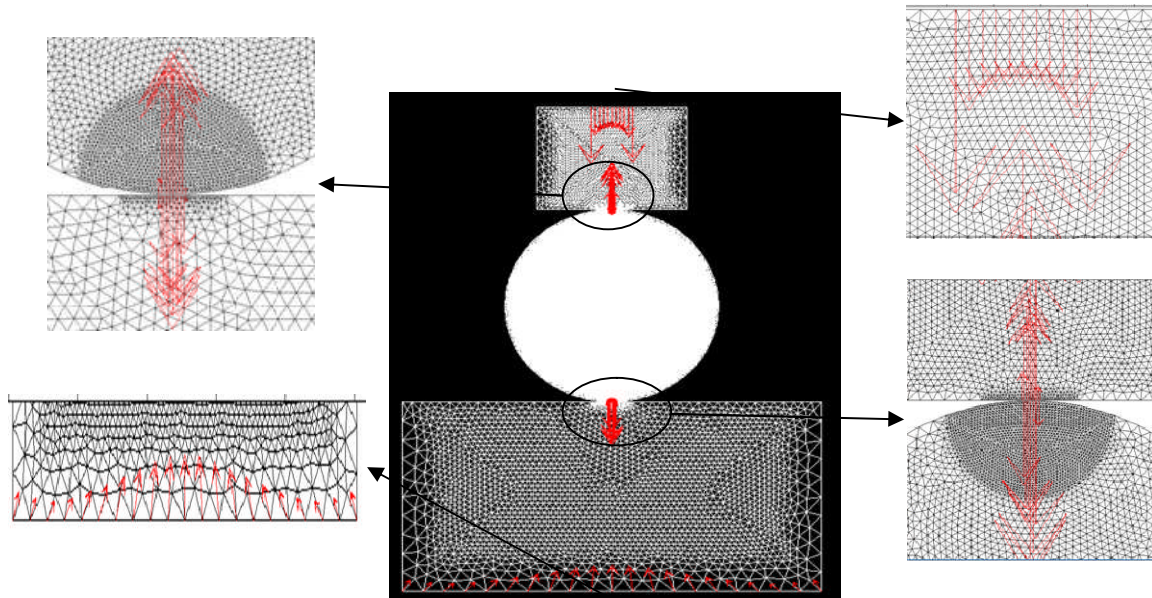


Figure IV.19: Représentation des réactions sur le modèle.

Le logiciel permet de récupérer les nœuds sur le segment [L7] pour extraire les efforts et leurs sommations: L'effort du premier nœud ($i=1$) est récupéré, puis l'effort du second nœud ($i=2$) qui sera additionné à celui du nœud précédent. Cette opération est répétée jusqu'au dernier nœud où il affiche la valeur de l'effort total appliqué, qui est de 86.694 N (fig.IV.20).

```

C:\ Sélectionner castem11 C:\Users\Hadjira-pc\Desktop\contact mecanique (1).txt
*
* FIN BlocSef;
*
* LIST seffY ;
*1 valant: 86.694
*
* suivY= (seffY )**2;
* *list suivY;
*
* RESUL=(suivY+suivY)**0.5;
* list RESUL;
*1 valant: 86.694
*
*
*
* =====
* calcul des contraintes
* =====
* MOT = MO EI MO2;
* MAT = MA EI MA2;
*
* CHACONTR=SIGM MOT MAT DEPL1;
* CHANOEUD=CHAN NOEUD MOT CHACONTR;
* CHANPOIN=CHAN CHPO MOT CHANOEUD;
*
* =====
* extraction des contraintes (SX,SY,SXY)
* =====
  
```

Figure IV.21: Extraction des efforts correspondant au déplacement imposé.

Cette valeur correspond approximativement à la charge imposée par unité d'épaisseur à la valeur expérimentale qui est de $605.71/7=86.53\text{N}$. Sachant que 7 mm est l'épaisseur du modèle.

Le logiciel CASTEM permet de construire la déformée de la structure à partir de la géométrie initiale et du champ de déplacement, le maillage initial en couleur verte et la déformée en couleur rouge. la figure (IV.21.a) représente la partie supérieure et la figure (IV.21.b) représente la partie inférieure.

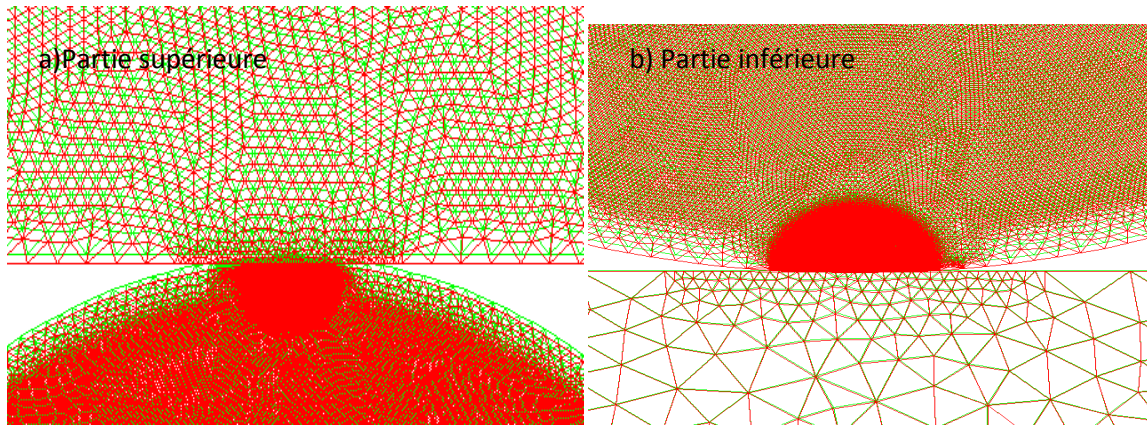


Figure IV.21: Représentation de la déformation.

IV.9.2. Visualisation des franges isochromes

La figure (VI.22) représente les franges isochromes en champ clair obtenues à l'aide d'un programme écrit sous CASTEM. Elles sont tracées avec une échelle de couleur . Les franges isochromes en champ clair représentent une intensité $I = 1 - \sin^2 \varphi / 2$.

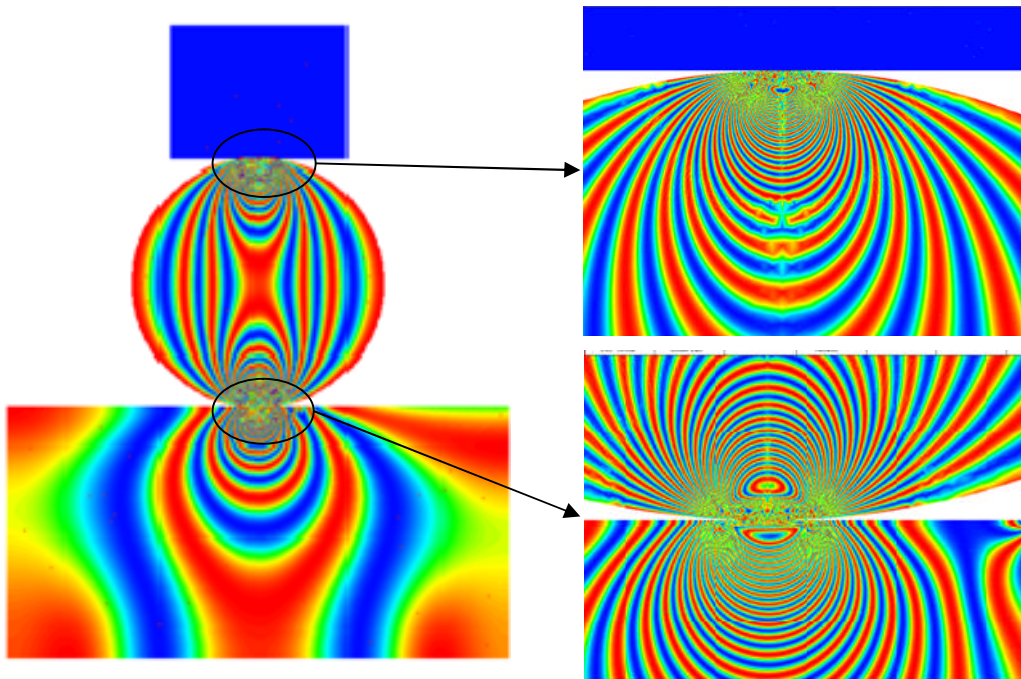


Figure IV.22: Les franges isochromes simulées en champ clair.

En pratique, en champs clair, la couleur noire qui représente les franges isochromes correspond au bleu sur les figures données par CASTEM et le rouge correspond aux franges claires.

IV.9.3. Visualisation des isoclines

Le programme donne la valeur de $\sin^2 2\alpha$ en chaque point du modèle; ce qui permet de tracer les isoclines correspondant à $\sin^2 2\alpha = 0$. On simule la rotation des polaroids en augmentant successivement l'angle isocline α de 10 degrés. La figure (IV.23) représente les différentes franges isoclines obtenues pour les différentes valeurs de l'angle isocline α .

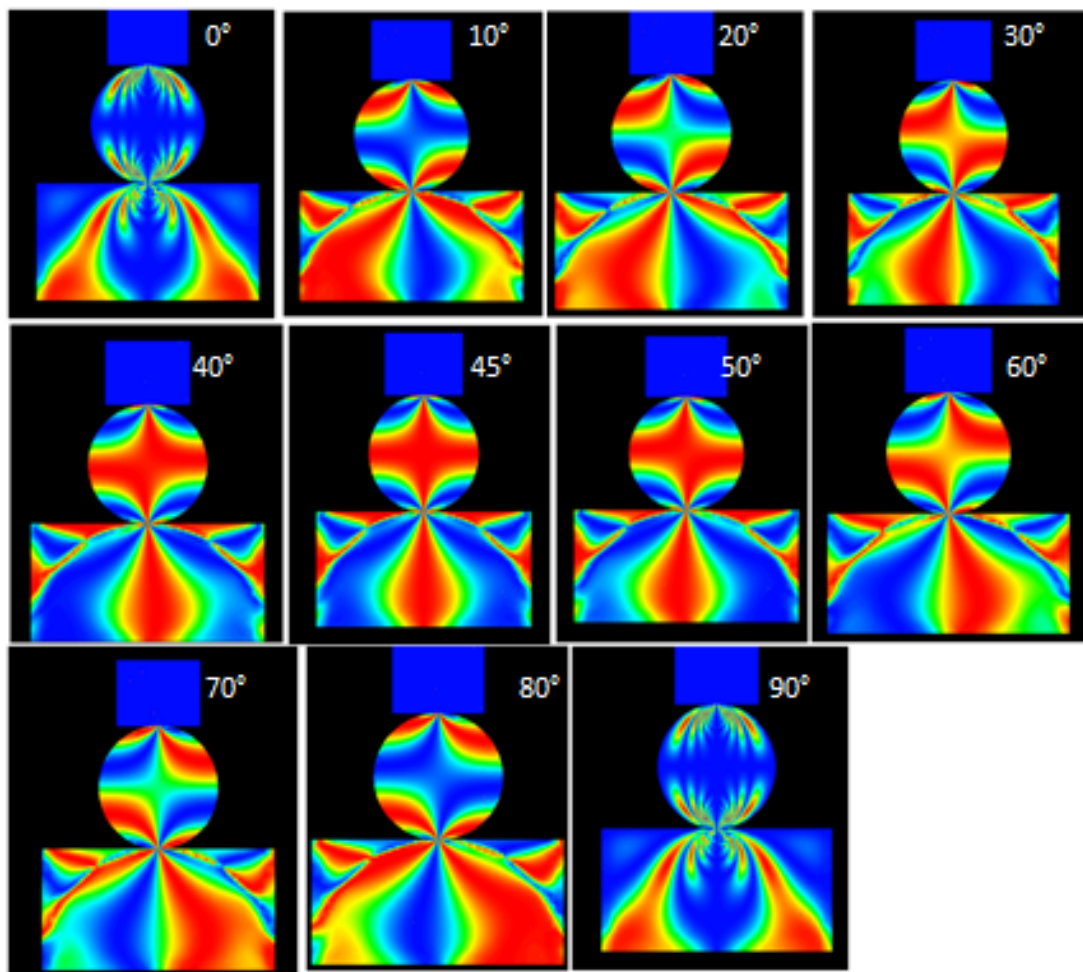


Figure IV.23: Tracés des isoclines par pas de 10 degrés.

IV.9.4. La variation de la contrainte de cisaillement maximale le long de la droite [AB]

Le graphe de la variation de la contrainte de cisaillement maximale le long de la droite [AB] est représenté sur la figure (IV.24).

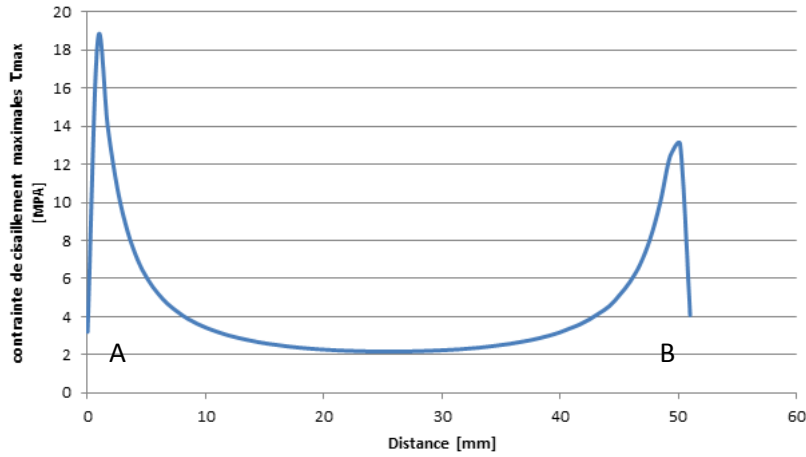


Figure IV.24: Evolution de τ_{max} relevée numériquement le long de la droite AB.

D'après la figure(IV.24). On constate que la contrainte au milieu de la zone de contact (points de Hertz) n'est pas nulle à l'origine, mais elle prend une valeur de 3.18MPa puis augmente progressivement jusqu'à une valeur de 18.49 MPa (point de Hertz) à une distance de 0,80 mm puis diminue progressivement et une autre fois augmente jusqu'à la valeur 13.12(2^{ème} point de Hertz)MPa à une distance de 50.2 mm.

Les différentes étapes suivies dans le programme CASTEM sont donné dans l'annexe1.

IV.10.Méthode analytique :

Afin d'effectuer un calcul théorique des champs de contraintes développés dans le modèle, Les relations données par Hertz (équation III.8) sont introduit dans le logiciel MATLAB pour obtenir les valeurs des différentes contraintes. Les résultats obtenus sont représentés sur les figures ci-après.

La différence des contrainte principale à été calculée par les relations de Hertz, ce qui a permet d'avoir le relevé de τ_{max} et b ainsi que P_0 .

$$p_0 = \frac{2W}{\pi bL} \quad (IV.13)$$

$$b = 2 \sqrt{\frac{WR_{eq}}{\pi E_{eq}L}} \quad (IV.14)$$

Avec :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (IV.15)$$

$$\frac{1}{E_{eq}} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (IV.16)$$

P_0 : pression maximale au centre de contact.

b : demi-largeur de pression.

w : effort appliqué.

L : épaisseur du modèle.

R_1 : rayon du cylindre.

R_2 : rayon des pièces plane $= \infty$.

R_{eq} : rayon de courbure équivalent.

E_{eq} : module d'élasticité équivalent.

ν : Coefficient de poisson.

Le programme calculé avec MATLAB se trouve dans annexe2 et annexe3.

IV.10.1 Résultat obtenue avec MATLAB :

	Déformable-rigide	Déformable-déformable
b [mm]	0.8678	1.2173
P_0 [MPa]	63.48	45.25
τ_{max} [MPa]	19.0597	13.5875

Tab.IV.2 : Résultat obtenue avec MATLAB.

- **Représentation en 2D de la contrainte de cisaillement maximale (τ_{max})**

La figure (IV.25) représente la distribution de la contrainte de cisaillement maximale (τ_{max}) en deux dimensions. (la figure « IV.25.a » pour le contact rigide-déformable, et la figure « IV.25.b » pour le contacte déformable-déformable.

On constate facilement que la contrainte de cisaillement maximum est 19.05 [MPa](pour rigide-déformable) et 13.58 [MPa] (pour déformable-déformable) du centre de contacte sur l'axe de symétrie vertical et il correspond au point de Hertz donné par la relation $H=0.78*b$ avec $b=0.8678$ [mm] et $b=1.2173$ [mm] pour rigide-déformable et déformable-déformable respectivement.

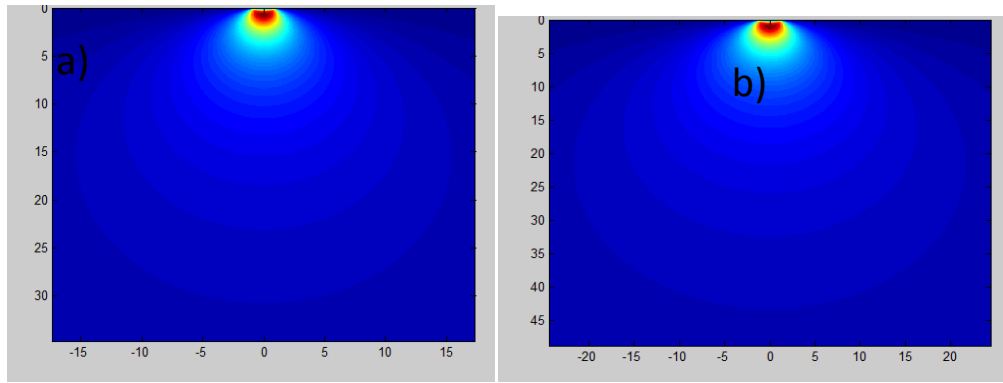


Figure IV.25: Variation la contrainte de cisaillement maximale (τ_{max}) en 2D pour les deux cas du contact.

- **Représentation des isocontraintes**

La représentation des isocontraintes qui sont les lignes pour lesquelles la contrainte de cisaillement maximum τ_{max} est constantes sont données par la figure (la figure « IV.26.a » pour le contact rigide-déformable, et la figure « IV.26.b » pour le contact déformable-déformable).

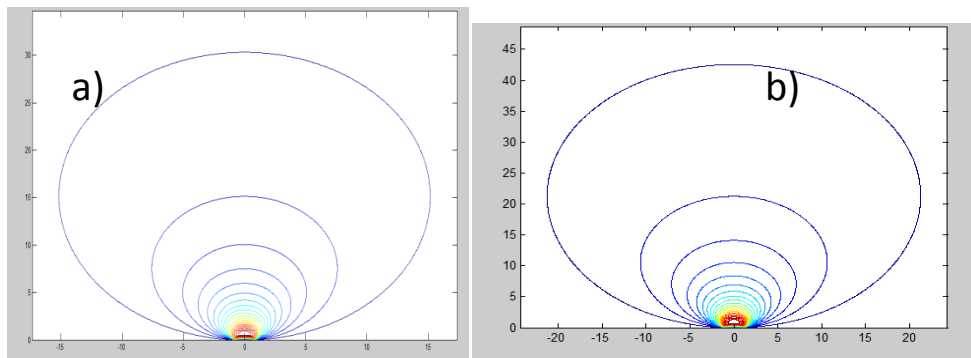


Figure IV.26 : Isocontraintes obtenue analytiquement pour les deux cas de contact.

On remarque que le point de Hertz se trouve bien à une profondeur $H=0.78*b=0.67$ mm (pour rigide-déformable) et 0.94 mm (pour déformable-déformable).

- **La variation de la contrainte de cisaillement maximale le long de la droite [AB]**

On obtient la courbe de la variation de la contrainte de cisaillement maximale (τ_{max}) le long de la droite [AB]. la contrainte de cisaillement maximale (τ_{max}) augmente rapidement à partir d'une valeur nulle au voisinage de la surface du contact pour atteindre son maximum à une distance de « 0.67 mm (pour rigide-déformable) et 0.94 mm (pour déformable-déformable) » de la surface de contact et qui correspond au point de Hertz puis diminue rapidement au bord supérieure et inférieure du modèle.

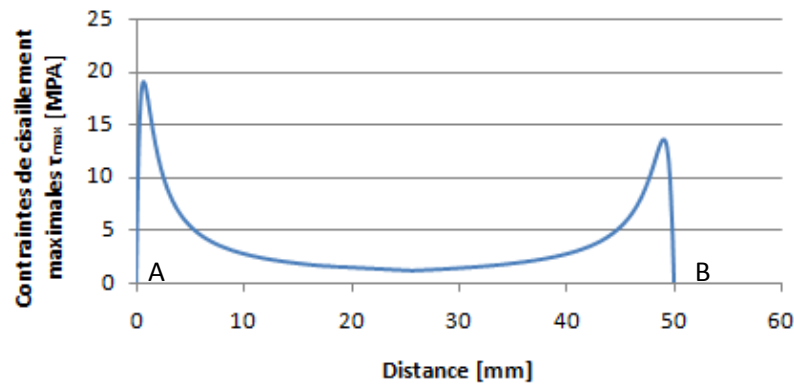


Figure IV.27: Evolution de τ_{max} relevée analytiquement le long de la droite AB.

IV.11. Comparaison des résultats

IV.11.1. Superposition des courbes

Une première comparaison peut se faire par la superposition de la courbe numérique et les points relevés expérimentalement et la courbe obtenue analytiquement. La figure (IV.28) montre que les trois graphes se rapprochent et qu'il y a une bonne concordance des résultats.

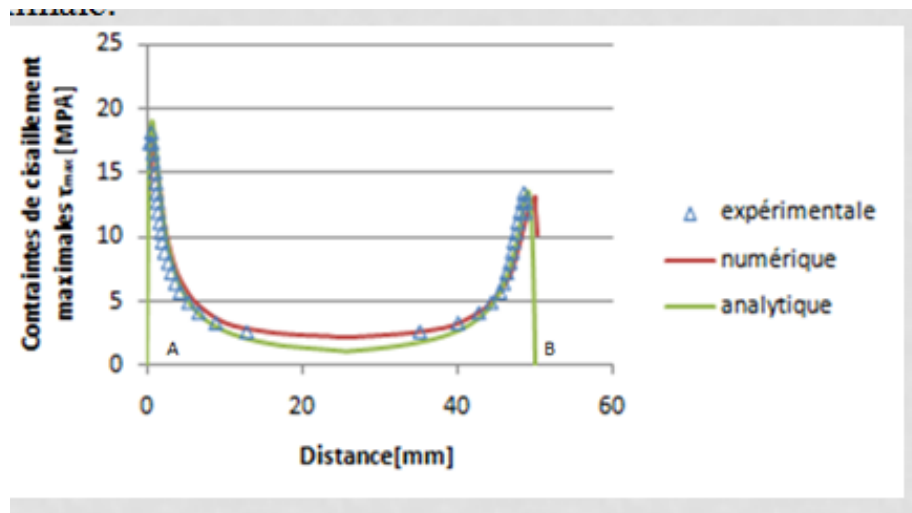


Figure IV.28: Superposition des graphes numériques, expérimentaux et analytiques .

IV.11.2 Réseau d'isochromes

Les images relevées expérimentalement sont comparées avec les images calculées numériquement avec CASTEM. D'après la figure (IV.29) on voit que ces images obtenues expérimentalement figure (IV.29.a) sont comparables avec les images obtenues sous CASTEM figure (IV.29.b).

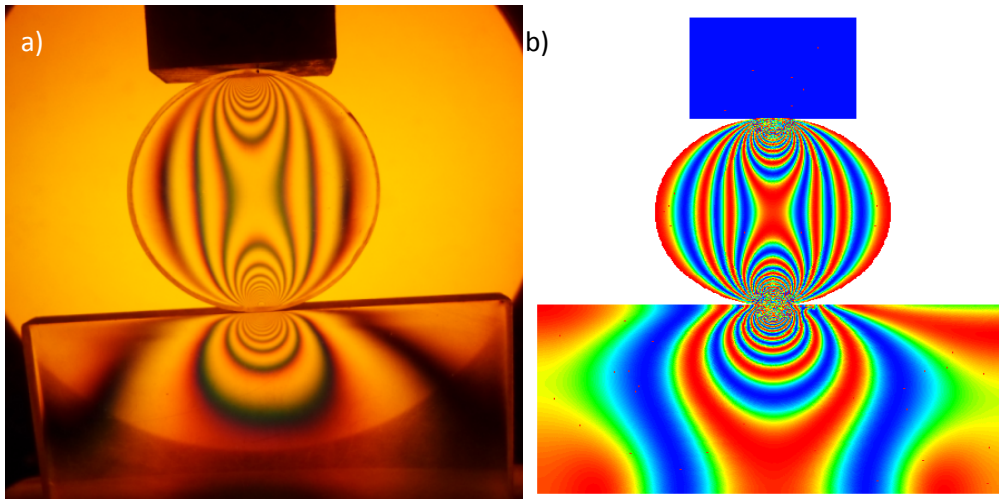


Figure IV.29 : Isochromes relevées expérimentalement simulées à l'aide du logiciel CASTEM.

IV.11.3. Comparaison des isoclines

Les franges isoclines obtenues numériquement peuvent être comparés aux franges isoclines obtenues par la photoélasticimétrie (fig.IV.30).

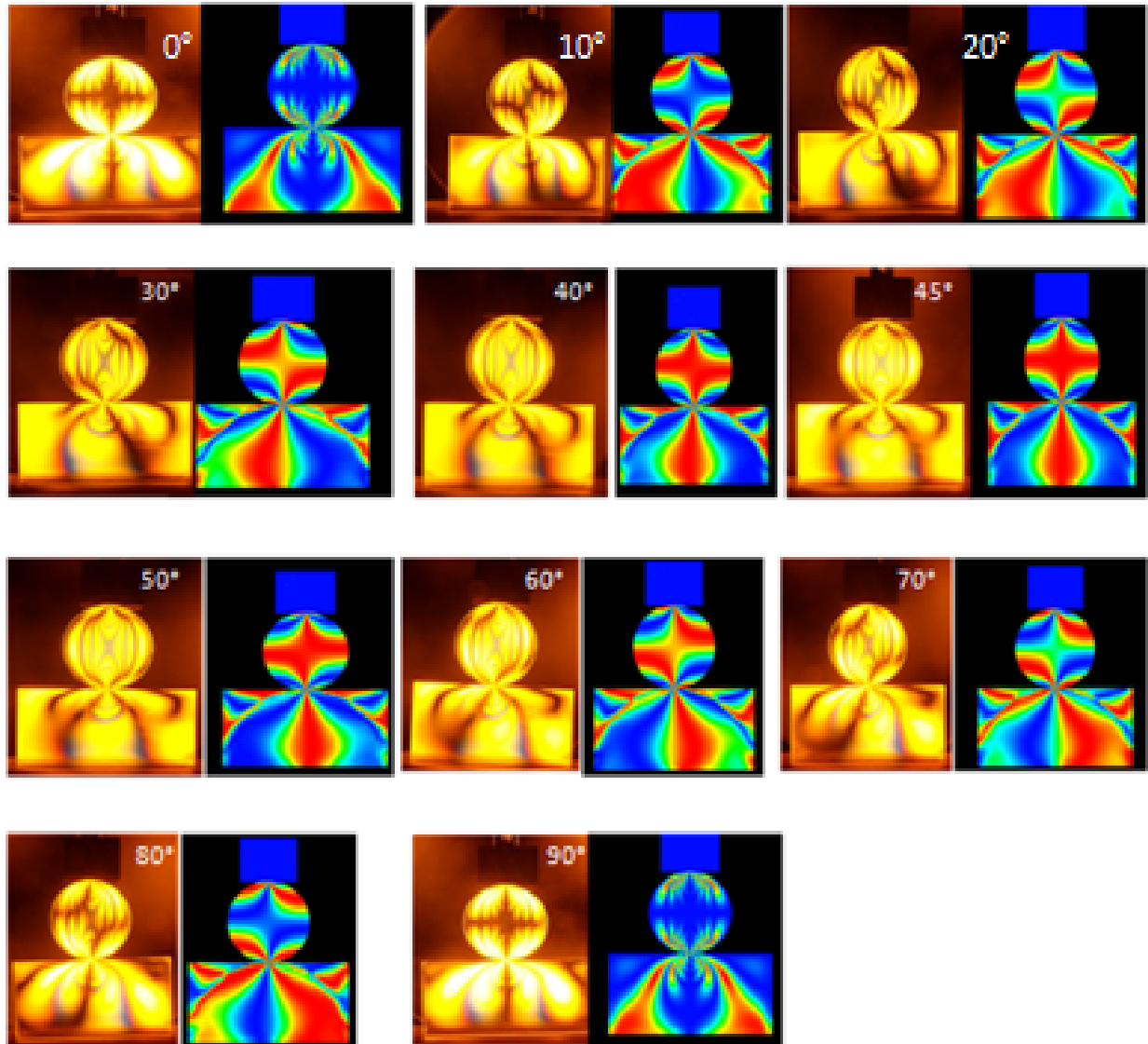


Figure IV.30: Superposition des isoclines obtenues numériquement avec leurs correspondantes obtenues expérimentalement.

Pour la comparaison des isoclines obtenues numériquement et expérimentalement pour les différentes rotations de l'angle α , la partie sombre de chaque image correspond à l'isocline, zone où l'une des directions principales est parallèle ou perpendiculaire à l'un des axes des polaroids.

La figure (IV.30), représente la superposition des isoclines obtenues numériquement (à gauche de chaque image) avec les isoclines correspondantes obtenues expérimentalement (à droite de chaque image). On remarque qu'il est impossible de séparer le réseau isochrome du réseau isocline dans les images obtenues expérimentalement. On remarque que les isoclines sur la partie gauche et la partie droite de chaque image sont semblables.

IV.12. Discussion des résultats

Après analyse expérimentale et numérique des champs de contraintes dans le modèle, les différents réseaux d'isochromes et isoclines relevés expérimentalement peuvent être comparés directement aux réseaux de franges obtenues numériquement.

La figure (IV.28) représente une superposition des trois courbes (expérimentale, numérique et analytique). Ces courbes sont obtenues par les tracés de l'évolution de la contrainte de cisaillement maximale τ_{max} suivant un segment [AB].

Nous pouvons remarquer que les trois courbes ont la même allure. Il existe une bonne concordance des résultats sauf dans certaines zones, notamment au voisinage du point de contact où il est difficile de relever les ordres de franges expérimentaux.

Nous constatons que τ_{max} est maximal aux points (A et B), qu'on appelle point de Hertz, et diminue à mesure qu'on s'éloigne de ces points.

Les différents types de contact (déformable-déformable et déformable-rigide) expliquent la différence entre les valeurs de la contrainte de cisaillement maximale τ_{max} relevées sur les courbes aux voisinages des points A et B. On remarque que p_0 pour le contact rigide déformable est supérieure à p_0 pour le contact déformable-déformable, la théorie de Hertz explique clairement la valeur augmentée de τ_{max} pour le contact rigide-déformable. Les relations de Hertz montrent que p_0 est proportionnel à la rigidité des solides en contact.

Contrairement la demi-largeur de la bande du contact celle-ci varie d'une manière inversement proportionnel avec la rigidité et la pression maximale (voir tableau IV.2) ce qui nous amène à dire que la diminution de la bande du contact augmente la concentration des efforts, ce qui augmente la pression maximale.

On note aussi qu'en photoélasticimétrie l'évolution de l'ordre de frange dans le cas du contact cylindre plan est difficile à ce niveau vu la mauvaise distribution des franges isochromes visualisées.

Sur les courbes numériques et analytiques, à une distance X_0 , qui correspond au point, à partir des points A et B, deux pics correspondent à la valeur maximale de la contrainte de cisaillement maximale. Ceci s'explique par la théorie de Hertz pour un contact cylindre-plan où X_0 est égal à $0.78 \cdot b$ et la valeur de $\tau_{max} = 0.3 P_0$.

IV.13 Conclusion

Dans cette partie nous avons montré que grâce au code de calcul élaboré par la méthode des éléments finis (programme écrit sous CASTEM) on peut traiter des problèmes complexes de contact sans avoir recours à l'expérience qui peut coûter très cher et qui peut prendre beaucoup de temps. L'analyse des différentes franges isochromes et isoclines obtenues a permis d'avoir une vue sur le champ des contraintes dans le cas bidimensionnel et de déterminer la zone de concentration des contraintes, dans notre cas c'est les zones de contact.

Une comparaison a été faite entre les franges isochromes et isoclines obtenues numériquement et expérimentalement. Une autre comparaison a été faite entre les graphes de la variation de la contrainte de cisaillement maximale le long d'une droite [AB] relevé numériquement, expérimentalement et analytiquement. Les résultats obtenus ont révélé relativement une bonne concordance entre les valeurs numériques, expérimentales et analytiques.

Conclusion générale

Le but de ce travail a été l'étude expérimentale, numérique et analytique des champs de contraintes développés dans des modèles en contact (disque déformable en époxy entre deux plaques une rigide en acier et l'autre déformable en époxy).

Après une recherche bibliographique traitant différents travaux réalisés sur le problème du contact mécanique, une étude des contraintes dans le contact entre les pièces mécaniques a été traitée expérimentalement à l'aide de la photoélasticimétrie, numériquement en utilisant la méthode des éléments finis et analytiquement à l'aide de la théorie de Hertz.

La photoélasticimétrie qui est une méthode expérimentale non destructive d'analyse des champs de contraintes sur un modèle biréfringent, après le chargement de modèle le relevé des isochromes a permis de calculer la variation de la contrainte de cisaillement maximale le long d'un segment choisi à partir des points de contact A et B.

Grace au développement des codes de calcul par éléments finis, on a développé un programme de calcul pour le contact entre les pièces mécaniques à l'aide du logiciel CASTEM, qui permet de simuler des franges isochromes et isoclines et aussi de déterminer la contrainte de cisaillement maximale.

Par ailleurs une étude analytique basée sur la théorie de Hertz a été menée ; les équations et formule de Hertz ont été résolues grâce au logiciel MATLAB, les contraintes analytiques sont ainsi déterminées.

En exploitant les résultats des trois méthodes, trois types de comparaison ont été faites : La première en comparant les isochromes et isoclines expérimentales avec les isochromes et isoclines simulées. La deuxième comparaison a été faite entre les valeurs de la variation de la contrainte de cisaillement maximale obtenues expérimentalement, numériquement et analytiquement. La troisième a été faite entre la pression maximale p_0 de contact rigide-déformable et celui de contact déformable-déformable, ce qui nous amène à dire que la rigidité est un paramètre qui peut influencer la pression maximale et on remarque que cette pression augmente lorsque la demi-largeur du contact diminue, et diminue lorsque cette demi-largeur augmente.

La comparaison des valeurs expérimentales, numériques et analytiques montre qu'il existe une bonne concordance des résultats, sauf dans certaines zones, particulièrement au voisinage des zones de contact où il est difficile de relever les ordres des franges dans l'étude expérimentale.

Comme perspective pour ce travail, à partir du modèle numérique validé et de l'analyse faite sur le contact rigide-déformable et déformable-déformable des travaux seront effectués afin de minimiser la pression maximale dans le modèle rigide-déformable.

Programme CAST3M pour le contact mécanique

Programme et analyse de la solution proposée

a) début du programme

**=====

***OPTION**

*=====

TITR 'Disque écrasé';

OPTI DIME 2 ELEM SEG2 'MODE' 'PLAN' 'CONT';

La directive **opti(on)** permet de déclarer les principaux paramètres du programme
(Ex :dimension du problème ,type d'éléments géométriques utilisés.....).

b) géométrie du modèle

*=====

*** LES POINTS**

*=====

R=25.5;

alpha = 10.;

C0=0. 0.;

P1=R 0.;

P2=0. R;

P3=(-1*R) 0.;

P4=0. (-1*R);

P5= (R * (sin alpha)) (R * (cos alpha));

P6= 0. (R * ((cos alpha) - (sin alpha)));

P7=(R * (sin(-1*alpha))) (R * (cos alpha));

C1= 0. (R * (cos alpha));

C2= 0. ((-1*R) * (cos alpha));

P8= (R * (sin alpha)) ((-1*R) * (cos alpha));

P9= 0. ((-1*R) * ((cos alpha) - (sin alpha)));
P11=(-1*R) 0.;
P12=0. R;
P13=(-1*R) 0.;
P14=0. (-1*R);
P15= ((-1*R) * (sin alpha)) (R * (cos alpha));
P16= 0. (R * ((cos alpha) - (sin alpha)));
P17=((-1*R) * (sin(-1*alpha))) (R * (cos alpha));
C11= 0. (R * (cos alpha));
C12= 0. ((-1*R) * (cos alpha));
P18= ((-1*R) * (sin alpha)) ((-1*R) * (cos alpha));
P19= 0. ((-1*R) * ((cos alpha) - (sin alpha)));
rh=8.;
rhh = RR+rh;
R1=R-15;
LAR=RR+(2*R);
C1=-18. 52.6;
C2=18. 52.6;
C3=18. RR;
C4=-18. RR;
C44=(-1*rh) RR;
C33=rh RR;
ch=0. RR;
chh=0. rhh;
PC1=2. 52.6;
PC2=-2. 52.6;
PCC1=rh (-1*RR);

PCC2=(-1*rh) (-1*RR);

C5=(-2*R) (-1*RR);

C6=(2*R) (-1*RR);

C7=(2*R) (-1*LAR);

C8=(-2*R) (-1*LAR);

cb=0. (-1*RR);

cbb=0. (-1*rhh);

*=====

***Les lignes**

*=====

Dr1= DROI 40 P2 P6;

Dr2= DROI 70 P6 P9;

Dr3= DROI 40 P9 P4;

L= Dr1 et Dr2 et Dr3;

trac (Dr1 et Dr2 et Dr3);

marc1=160;

marc2=180;

marc3=140;

arc1=CERC marc2 P5 C1 P6;

arc2=CERC marc1 p5 C0 P2;

arc3=CERC marc3 P5 C0 P8;

arc4=CERC marc2 P9 C2 P8;

arc5=CERC marc1 P8 C0 P4;

LC2=arc5 et arcc5;

D333=D3 ET D33;

LC1=arc2 et arcc2;

DCCC=DCC1 ET DCC;

Cont1 =ELIM 0.001 (Dr1 et arc2 et arc1);
trac cont1;
Cont2 =ELIM 0.001 (Dr2 et arc1 et arc3 et arc4);
trac cont2;
Cont3 =ELIM 0.001 (Dr3 et arc4 et arc5);
trac cont3;
cont0=ELIM 0.001 (cont1 et cont2 et cont3);
trac cont0;
cont4=arc2 et arc3 et arc5 et Dr3 et Dr2 et Dr1;
trac cont4;
sur1 = SURF cont1 'PLANE';
sur2 = SURF cont2 'PLANE';
sur3 = SURF cont3 'PLANE';
sect0 = ELIM 0.001 (sur1 et sur2 et sur3);
trac sect0;arcc1=CERC marc2 P15 C1 P16;
arcc2=CERC marc1 p15 C0 P12;
arcc3=CERC marc3 P15 C0 P18;
arcc4=CERC marc2 P19 C2 P18;
arcc5=CERC marc1 P18 C0 P14;
Contt1 =ELIM 0.001 (Dr1 et arcc2 et arcc1);
trac contt1;
Contt2 =ELIM 0.001 (Dr2 et arcc1 et arcc3 et arcc4);
trac contt2;
Contt3 =ELIM 0.001 (Dr3 et arcc4 et arcc5);
trac contt3;
contt0=ELIM 0.001 (contt1 et contt2 et contt3);
trac contt0;

contt4=arcC2 et arcc3 et arcc5 et Dr3 et Dr2 et Dr1;
trac contt4;
surr1 = SURF plan contt1 ;
surr2 = SURF plan DD3=D3 ET D33 ET D22;
DD5=D5 ET DCC1 ET DCC;contt2 ;
surr3 = SURF plan contt3 ;
sect1 = ELIM 0.001 (surr1 et surr2 et surr3);
trac sect1;
SURFACE1=sect0 et sect1;
trac SURFACE1;
LL=60;
LM=200;
LLL=100;
D1= D LL C1 PC2;
DC1= D LL PC2 PC1;
DC= D LL PC1 C2;
D2= D LL C2 C3;
D22=D LL C3 C33;
D33=D LM C33 ch;
D3= D LM ch C44;
D11= D LL C44 C4;
D4= D LL C4 C1;
GG=150;
arch1=CERC GG C33 chchh;
arch2=CERC GG C44 chchh;
LIG1=D1 ET D2 ET D22 ET D4 ET DC1 ET DC ET D11 et arch1 et arch2;

TRAC LIG1;

LId1=D33 ET D3 ET arch1 et arch2;

trac lid1;

D5= D LL C5 PCC2;

DCC1= D LM PCC2 cb;

DCC= D LM cb pcc1;

DCC2= D LL pcc1 C6;

D6= D LL C6 C7;

D7= D LLL C7 C8 ;

D8= D LL C8 C5;

arcb1=CERC GG PCC1 cb cbb;

arcb2=CERC GG PCC2 cb cbb;

LIG2=D5 ET D6 ET D7 ET D8 ET DCC2 et arcb1 et arcb2;

TRAC LIG2;

LID2=arcb1 et arcb2 et DCC1 ET DCC;

TRAC LID2;

*=====

***maillage des surfaces**

*=====

SURLIG1 = SURF plan LIG1;

SURLID1 = SURF plan LID1;

SURLIG1=SURLIG1 et SURLID1;

TRAC SURLIG1;

SURLIG2 = SURF plan LIG2;

SURLID2 = SURF plan LID2;

SURLIG2=SURLIG2 et SURLID2;

TRAC SURLIG2;

TRAC (SURLIG1 ET SURLIG2 ET SURFACE1);

SURFACE=SURLIG1 ET SURLIG2 ET SURFACE1;

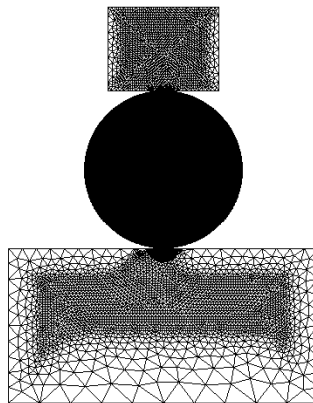
-l'opérateur **surf(ace)** nous permis de créer une surface à partir du contour fermé.

-l'opérateur trac(er) permet de tracer un objet de type maillage .on peut lui associer l'option **qual(ification)** qui permet d'afficher les noms des objets visualisés en post traitement.

*=====

Resultat après maillage du modèle

*=====



Tracé de la surface (SURFACES).

*=====

*CONDITION DU CONTACT

*=====

MCONT1 =(IMPO 'MAIL' ('INVE'LC1) ('INVE'D333)) 'COUL' 'ROUG';

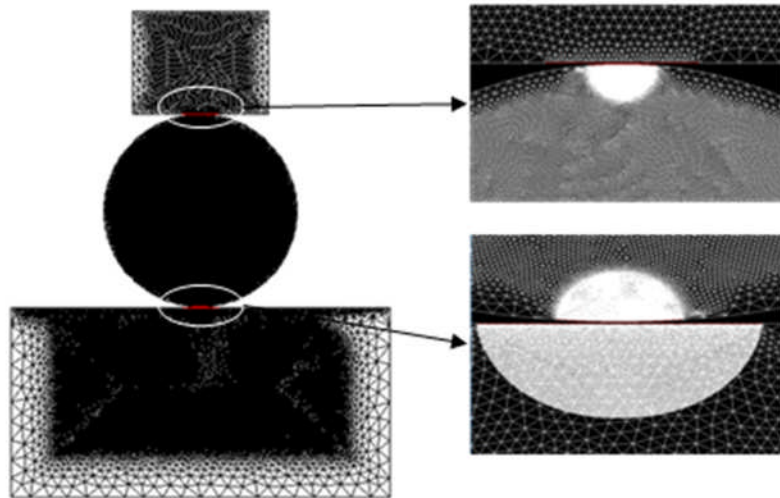
MCONT2 =(IMPO 'MAIL' ('INVE'LC2) ('INVE'DCCC)) 'COUL' 'ROUG';

*SI GRAPH ;

NBE = NBEL SURFACE ;

trac (SURFACE ET MCONT1 ET MCONT2) 'TITR'

(CHAI 'Maillage (' NBE ' éléments')) ;



Représentation des contacts assurés

c)Description du matériau /création de la rigidité /chargement

*=====

***Choix du comportement**

*=====

MO(DELE)=MODEL SURFACE MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE ;

L'opérateur **mod(ele)** sert a définir un type de comportement et une formulation élément finis

*=====

***DEFINITION DU MODELE ET DU MATERIAU**

*=====

MO = MODE SURFACE1 MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE;

MA = MATE MO YOUN 3273 NU 0.37;

RI = RIGI MO MA;

MO1 = MODE SURLIG1 MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE;

MA1 = MATE MO1 YOUN 210000 NU 0.3;

RI1 = RIGI MO1 MA1;

MO2 = MODE SURLIG2 MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE;

MA2 = MATE MO2 YOUN 3273 NU 0.37;

RI2 = RIGI MO2 MA2;

MOT=MO ET MO1 ET MO2;

MAT=MA ET MA1 ET MA2;

RIT=RI ET RI1 ET RI2;

MA(tériau) sert à définir les propriétés physique du matériau (module de Young ,coefficient de poisson ,...)pour un modèle donné.

L'opérateur **rigi(dité)** permet de construire la rigidité à partir du modèle et des caractéristiques.

*=====

*** cloquages - conditions aux limites**

*=====

CL1=BLOQU D7 'UY';

CL2=BLOQU DC1 'UX';

CL3=BLOQU DC1 'UY';

CL4=BLOQU L 'UX';

CL5=BLOQU D4 'UX';

CL6=BLOQU D2 'UX';

CL7=BLOQU D8 'UX';

CL8=BLOQU D6 'UX';

CL9=BLOQU DD3 'UX';

CL10=BLOQU DD5 'UX';

CL11=BLOQU D7 'UX';

CLTOT=CL1 ET CL2 ET CL3 ET CL7 ET CL8 ET CL10 ;

RI1=CLTOT ET RIT;

L'opérateur **bloq(uer)** construit la rigidité .qui sera ultérieurement à adjoindre à la rigidité de la structure.

*=====

*** forces/ déplacement imposés**

*=====

DEPL1*La valeur du déplacement imposé est MM

MM = -0.235;

DEPL1 = 'DEPI' CL3 MM ;

'TITR' 'Déplacement imposé ' ;

'TRAC' ('VECT' (DEPL1 'NOMC' 'UY') 10. 'UX' 'UY' 'VERT')

(SURFACE ET D3 ET D5) ;

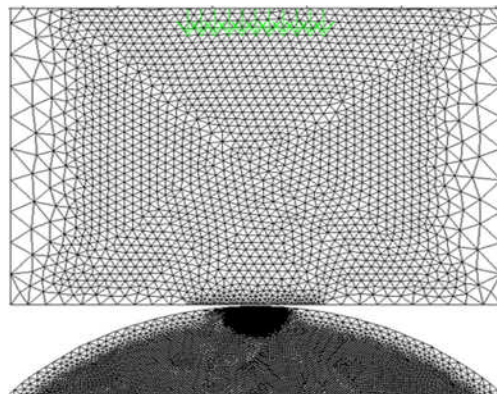
'FINS' ;

L'opérateur **Vect(eur)** nous permet de tracer le vecteur déplacement imposé

*=====

***Tracé du vecteur déplacement**

*=====



Tracé du vecteur déplacement

*=====

***chargements**

*=====

LTPS1 = 'PROG' 0. 1.;

LAMP = LTPS1 ;

EV1 = EVOL 'MANU' 'TEMPS (S)' LTPS1 'FORCE' LAMP ;

CHARU1 = CHAR 'DIMP' DEPL1 EV1 ;

CHAR0= CHARU1;

d) calculs et résolution

*=====

* calcul des déformations

*=====

* Construction de la table PASAPAS :

TAB1 = 'TABL' ;

TAB1 . 'TEMPS_CALCULES' = LTPS1 ;

TAB1 . 'MODELE' = MOT ;

TAB1 . 'CARACTERISTIQUES' = MAT ;

TAB1 . 'BLOCAGES_MECANIQUES' = CLTOT;

TAB1 . 'CHARGEMENT' = CHAR0 ;

TAB1 . 'CONTACT' = MCONT1 ET MCONT2 ;

TAB1 . 'GRANDS_DEPLACEMENTS' = FAUX ;

*=====

* Resolution :

*=====

TAB2 = PASAPAS TAB1 ;

TAB(le) le systèmes $\{f\}=[K]\{U\}$, les déplacement $\{U\}$, solution du problème, sont stockés dans depl

*=====

* Dépouillement

*=====

DEPL1 =TAB2 . 'DEPLACEMENTS'. 1 ;

*=====

* Déformée

*=====


```
DEFO0 = 'DEFO' (SURFACE1 'ET' SURFACE2) DEPL1 0. 'VERT' ;
```

```
DEFO1 = 'DEFO' (SURFACE1 'ET' SURFACE2) DEPL1 1. 'ROUG' ;
```

```
'TITR' 'Maillages non déformé (vert) et déformé (rouge).';
```

```
'TRAC' (DEFO0 'ET' DEFO1) ;
```

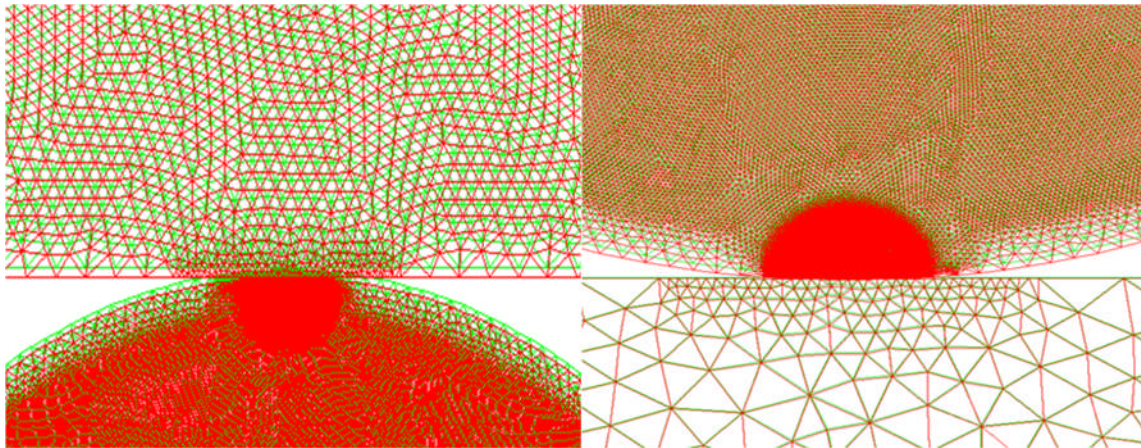
```
*'FINS' ;
```

L'opérateur **defo(rme)** construit la déformée de la structure à partir de la géométrie initiale et du champ de déplacement. On peut préciser que certain nombre d'options comme la couleur (Ici rouge).

```
*=====
```

*** Résultat après chargement du modèle**

```
*=====
```



Tracé de la déformée (DEFO et DEF1)

```
*=====
```

*** Visualisations des réactions**

```
*=====
```

```
'SI' GRAPH ;
```

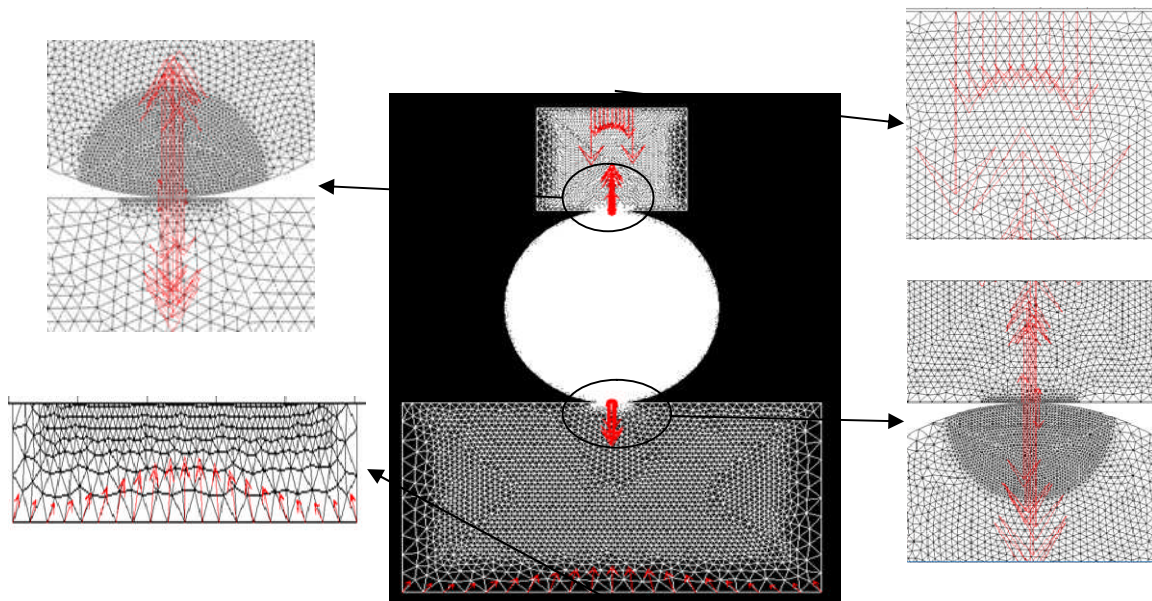
```
REAC1 = TAB2 . 'REACTIONS'. 1;
```

```
VR1 = 'VECT' REAC1 1. 'FX' 'FY' 'ROUG' ;
```

```
'TITR' 'Forces de réaction.' ;
```

```
'TRAC' VR1 (SURFACE'ET' D5) ;
```

```
'FINS' ;
```



Visualisation des réactions au voisinage de contact

*=====

*** Extraire des points en contact pour déterminer***

*** l'effort correspondant au déplacement imposé ***

*=====

base2=LC2;

base2 = MANU CHPO base2 3 UX 0 UY 0 UZ 0;

base2 = EXTR base2 'MAIL';

trac base2;

n = nbno base2;

mess 'nbno base2=' n;

i = 0;

PeC = TAB2 ;

REPETER BlocVn (NBNO base2);

i = i + 1;

PeC.i = base2 POIN i;

```
Fin BlocVn;

*LIST PeC;

i = 0;

EffY = TAB2;

REPETER BlocFor n;

i = i + 1;

EffY.i= EXTR REAC1 FY PeC.i;

LISTE EffY.i;

FIN BlocFor;

Seff = TAB2;

Seff.1 = EffY.1;

PoilT = TAB2;

PoilT.1 = PeC.1;

i = 1;

REPETER BlocSef( n - 1);

i = i + 1;

seffY = Seff.1 + EffY.i;

Seff.1 = seffY ;

FIN BlocSef;

LIST seffY ;

suivy= (seffY )**2;

*listsuivy;

RESUL=(suivx+suivy)**0.5;

list RESUL;
```

```

Sélectionner castem11 C:\Users\Hadjira-pc\Desktop\contact mecanique (1).txt
*
* FIN BlocSef;
*
* LIST seffY ;
* valant: 86.694
*
* suivY= <seffY > **2;
* =list suivY;
*
* RESUL= <suivX+suivY> **0.5;
* list RESUL;
* valant: 86.694
*
*
*
*
* =====
* * calcul des contraintes
* =====
*
* MOT = MO ET MO2;
* MAT = MA ET MA2;
*
* CHACONTR=SIGM MOT MAT DEPL1;
* CHANOEUD=CHAN NOEUD MOT CHACONTR;
* CHANPOIN=CHAN CHPO MOT CHANOEUD;
*
* =====
* * extraction des contraintes <SX,SY,SXY>
* =====

```

Extraction des efforts correspondant au déplacement imposé

e) calculs et résolution

*=====

* calcul des contraintes

*=====

MOT = MO ET MO2;

MAT = MA ET MA2;

CHACONTR=SIGM MOT MAT DEPL1;

CHANOEUD=CHAN NOEUD MOT CHACONTR;

CHANPOIN=CHAN CHPO MOT CHANOEUD;

L'opérateur **sigm(a)** calcule le champ des contraintes à partir d'un champ de déplacements.

*=====

* extraction des contraintes (SX,SY,SXY)

*=====

SY=EXCO CHANPOIN SMYY;

SX=EXCO CHANPOIN SMXX;

SXY= EXCO CHANPOIN SMXY;

L'opérateur **exco** crée à partir d'un champ, un champ de même type en extrayant une ou plusieurs composantes données.

DIFCONTR = (((SX-SY)**2)+(4*(SXY**2)))*0.5;

Sur le cercle de **Mohr** cette relation donne la différence des contraintes principales ($\sigma_1 - \sigma_2$) en fonction des contraintes σ_x , σ_y et τ_{xy} .

*=====

*** calcul du rapport I/I0 et traçage des isochromes**

*=====

f=10.87;

e= 7.;

phi=360*(1./10.87)*7.*DIFCONTR;

ISOC=(sin((phi)/2.))*2;

ISOCH =1-ISOC;

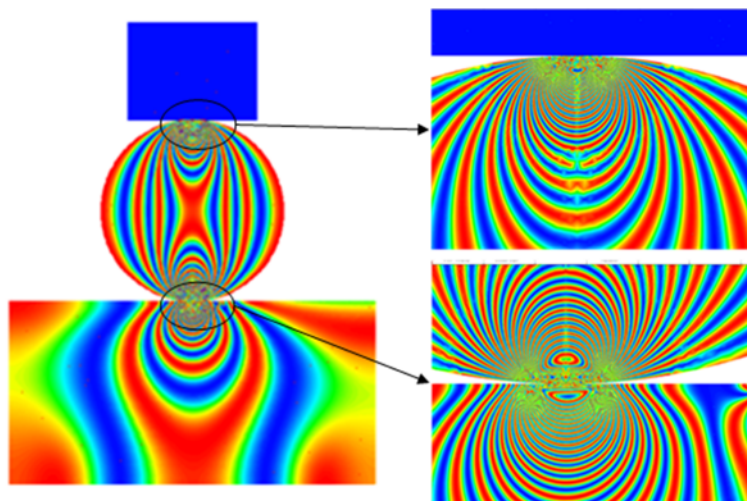
*=====

TRACER LES ISOCHROMES

*=====

*SURFACE =SURLIG1 ET SURLIG2 ET SURFACE1;

trac ECLA 0.0001 ISOCH SURFACE ;



Les franges isochromes simulées en champ clair.

L'ordinateur trace les isochromes avec une échelle de couleur par défaut. En pratique, en champ sombre, le noir qui représente les isochromes correspond ici au bleu. De même, les franges blanches correspondent au rouge.

*=====

***TRACER LES ISOCLINES**

*=====

SURFACE=SURLIG1 ET SURLIG2 ET SURFACE1;

term1= (2. * SXY);

term2= (SX- SY);

term3= (term1/term2);

ALPHA = (0.5) * (ATG term3);

ISOCL= sin(2. * ALPHA);

ISOCL= ISOC*(ISOCL ** 2);

trac ECLA 0.0001 isocl SURFACE1 ;

Le programme nous donne la valeur de $\sin^2(2\alpha) * (\sin((\phi)/2.))^{**2}$ en chaque point

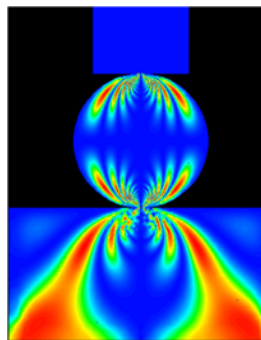
du modèle. Ceci permet de tracer l'allure des franges isoclines et isochromes superposées sur toute la surface de ce dernier.

Les franges isoclines concrétisées dans ce tracé sont celles correspondant à un $\sin^2(2\alpha)=0$, représentées par la couleur bleue (extinction en pratique). Ceci est dû au fait que les directions principales dans ces zones coïncident avec les axes (fixes) considérés par le programme.

*=====

*** Visualisation du réseau d'isoclines**

*=====



Tracé des isoclines à 0°

**=====

* Evolutions des contraintes SxSy suivant LIG20

*=====

TOM=DIFCONTR/2;

LIG20=P2 droi 60 P4;

COMPTOM=INT_COMP SURFACE1 TOM LIG20;

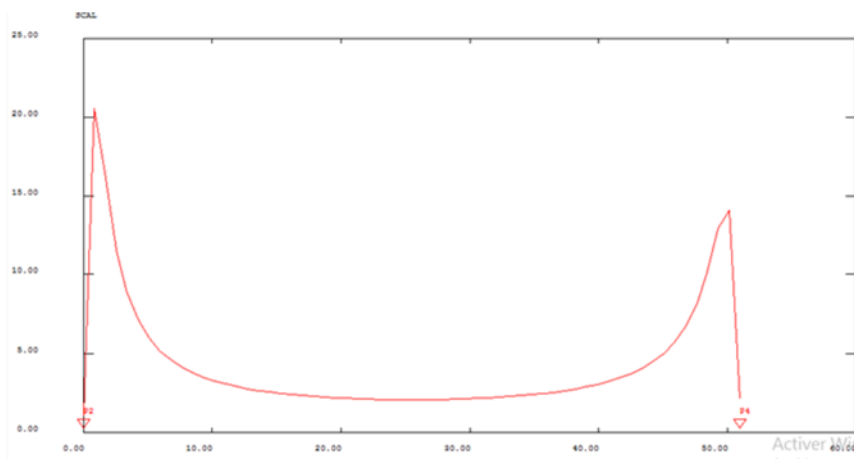
EVOL1= EVOL rouge'CHPO'LIG20 COMPTOM;

dess EVOL1;

L'opérateur **inter(polation)_comp(osante)** nous a permet l'interpolation de la contrainte de cisaillement maximale (**TOM ou τ_{max}**) du champ de contraintes sur le maillage.

L'opérateur **évol(ution)** nous a permet de définir l'évolution de la contrainte tangentielle maximale (TOM ou τ_{max}) le long du segment (LIG20).

dess EVOL1;



Tracé de l'évolution de τ_{max}

*=====

* fin du fichier

*=====

Fin ;


```

clear
p=605.71;
Req=25.5 ;nu1=0.3;nu2=0.37;E1=210000;E2=3273;
L=7;
Eetoile=1/((1-nu1^2)/E1+(1-nu2^2)/E2);
b=2*((p*Req)/(pi*Eetoile*L))^(1/2)
Po=(2*p)/(pi*b*L)
m=15;pas1=b/m;n=20;
    % m:nombre de pas définis dans [0, b]
    % n:borne définie sur l'axe y (délimite la zone ou on
    veut effectuer le calcul)

    for j=1:1:2*n*m+1
        y=-n*b+(j-1)*pas1;
        yc(j)=y;
        for k=2:1:2*n*m+1
            z=(k-1)*pas1 ;
            zc(k)=z;

            w=(b+y)^2 + z^2;
            e=((b-y)^2 + (z^2))/((b+y)^2 + (z^2))^(1/2);
            R=(pi/(w*e))*(1-e)*( e^2 + 2*e + (1-(4*b^2)/w))^(-1/2);
            Q =(pi/(w*e))*(1+e)*( e^2 + 2*e + (1-(4*b^2)/w))^(-1/2);

            sigmayy(j,k)=-(Po/pi)*z*(((b^2 + 2*y^2 + 2*z^2)*Q)/b)-
            (2*pi/b) -(3*y*R));
            sigmazz(j,k)=-(Po/pi)*z*((b*Q)-(y*R));
            sigmaxx(j,k)=0;
            tauyz(j,k)=-(Po/pi)*(z^2)*R; %verifier cette formule???
            tauxy(j,k)=0;
            tauxz(j,k)=0;
            Sigma=[sigmaxx(j,k) tauxy(j,k) tauxz(j,k); tauxy(j,k)
            sigmayy(j,k) tauyz(j,k);
            tauxz(j,k) tauyz(j,k) sigmazz(j,k)];
            [V,D]=eig(Sigma);

            %VP0(j,k)=max((D(3,3)), (D(2,2)));
            %VP1(j,k)=max((D(1,1)), (VP0(j,k)));
            %VP2(j,k)=min((D(1,1)), (D(2,2)));
            %VP3(j,k)=min((VP2(j,k)), (D(3,3)));
            %some(j,k)=D(1,1)+D(2,2)+D(3,3)-VP1(j,k)-VP3(j,k);
            princ1(j,k)=D(1,1);
            princ2(j,k)=D(2,2);

            dife(j,k)= (abs(princ1(j,k)-princ2(j,k)))/2;
        end
    end

figure(1)
imagesc(yc,zc,dife');
title ('dif cont principales');

```



```
shading interp;  
colormap(jet);
```

```
figure(2)  
contour(yc,zc,dife',20);  
title('difference des contraintes principales');  
shading interp;  
colormap(jet);
```

```
ind0=round(max(yc)/pas1+1);  
figure(3);  
plot(dife(ind0,:));
```

Annexe 3 programme MATLAB pour contact déformable-déformable

```
clear
p=605.71;
Req=25.5 ;nu1=0.37;nu2=0.37;E1=3273;E2=3273;
L=7;
Eetoile=1/((1-nu1^2)/E1+(1-nu2^2)/E2);
b=2*((p*Req)/(pi*Eetoile*L))^(1/2)
Po=(2*p)/(pi*b*L)
m=15;pas1=b/m;n=20;
    % m:nombre de pas définis dans [0, b]
    % n:borne définie sur l'axe y (délimite la zone ou on veut effectuer le calcul)

    for j=1:1:2*n*m+1
        y=-n*b+(j-1)*pas1;
        yc(j)=y;
        for k=2:1:2*n*m+1
            z=(k-1)*pas1 ;
            zc(k)=z;

            w=(b+y)^2 + z^2;
            e=((b-y)^2 + (z^2))/((b+y)^2 + (z^2))^(1/2);
            R=(pi/(w*e))*(1-e)*( e^2 + 2*e + (1-(4*b^2)/w))^(-1/2);
            Q =(pi/(w*e))*(1+e)*( e^2 + 2*e + (1-(4*b^2)/w))^(-1/2);

            sigmayy(j,k)=-(Po/pi)*z*(((b^2 + 2*y^2 + 2*z^2)*Q)/b)- (2*pi/b) -(3*y*R));
            sigmaz(z,j,k)=-(Po/pi)*z*((b*Q)-(y*R));
            sigmaxx(j,k)=0;
            tauyz(j,k)=-(Po/pi)*(z^2)*R; %verifier cette formule???
            tauxy(j,k)=0;
            tauxz(j,k)=0;
            Sigma=[sigmaxx(j,k) tauxy(j,k) tauxz(j,k); tauxy(j,k) sigmayy(j,k) tauyz(j,k);
                tauxz(j,k) tauyz(j,k) sigmaz(z,j,k)];
            [V,D]=eig(Sigma);

            % VP0(j,k)=max((D(3,3)),(D(2,2)));
            % VP1(j,k)=max((D(1,1)),(VP0(j,k)));
            % VP2(j,k)=min((D(1,1)),(D(2,2)));
            % VP3(j,k)=min((VP2(j,k)),(D(3,3)));
            %some(j,k)=D(1,1)+D(2,2)+D(3,3)-VP1(j,k)-VP3(j,k);
            princ1(j,k)=D(1,1);
            princ2(j,k)=D(2,2);

            dife(j,k)= (abs(princ1(j,k)-princ2(j,k)))/2;
        end
    end

figure(4)
imagesc(yc,zc,dife');
title ('dif cont principales');
shading interp;
colormap(jet);
```

Annexe 3 programme MATLAB pour contact déformable-déformable

```
figure(5)
contour(yc,zc,dife',20);
title('différence des contraintes principales');
shading interp;
colormap(jet);
```

```
ind0=round(max(yc)/pas1+1);
figure(6);
plot(dife(ind0,:));
```

References bibliographiques

- [1] Analysis of Elastic-Plastic Contact Performance of Rigid Sphere against a Deformable Flat-Effect of Strain Hardness 1Sathish Gandhi, V.C., 2S. Ramesh and 3R. Kumaravelan
Department of Mechanical Engineering, Anna University of Technology Tirunelveli
(Nagercoil Campus), Konam, Nagercoil- 629004, Tamilnadu, India 2012.
- [2] B. Chatterjee, “ Effect of Strain Hardening on Unloading of a Deformable Sphere Loaded against a Rigid Flat” A Finite Element Study Department of Mechanical Engineering,
Jadavpur University Kolkata 700032, India 2010.
- [3] Lior Kogut et Izhak Etsion «Elastic-Plastic Contact Analysis of a Sphere and a Rigid Flat», Journal of Applied Mechanics, september 2002, Vol. 69 (657-662).
- [4] Lior Kogut et Izhak Etsion «A Semi-Analytical Solution for the Sliding Inception of a Spherical Contact», Journal of Tribology, juillet 2003, Vol. 125 (499-506).
- [5] Lior Kogut et Izhak Etsion «A Semi-Analytical Solution for the Sliding Inception of a Spherical Contact», Journal of Tribology, juillet 2003, Vol. 125 (499-506).
- [6]F. Djeddi : « Détermination numérique et expérimentale de contraintes dans le problème de contact mécanique » Mémoire de Magister université de Tizi-Ouzou 2007.
- [7]BILEK Ali «Méthode non destructive de découpage optique en photoélasticimétrie tridimensionnelle. Application au problème fondamental du contact », Thèse de doctorat d'état, Université de Tizi-Ouzou 2007.
- [8] Gérald Zambelli Léo Vincent. Matériaux et contacts, Edition 1998, Presse Polytechniques et Universitaires Romandes.
- [9] N. Poluzennec, "Développement de processus d'analyse en photoélasticimétrie par un Feuille Plan

Obtenu par découpage mécanique et optique », Thèse de l'université de Poitier, Décembre 1996.

[10] J.C. Dupré and A.Lagarde, “photoelastic Analysis of a three Dimensional Specimen by optical Slising and Digital Image processing”, Experimental Mechanics Vol.37,no,4,December 1997,pp.393-397.

[11] R.L. Burguette and E.A., Patterson, “A photoelastic Study of Contact between a Cylinder and Halfspace”, Experimental Mechanic Vol.7, N°3 September 1997.

[12] Y.Morimoto,Jr.and T.Hayashi « SEPARATION OR ISOCHROMATICS AND ISOCLINICS USING FOURIER TRANSFORMATION»

[13] Mémoire de fin d'étude (ingéniorat) proposé par Broz Vaclav et présenté par Moustapha Toumi et Djamel Tiliuiune « la photoélasticimétrie, problème de concentration de contrainte » promotion 1989.

[14] Didier BELLET- Jean Jacques BARRAU, « Cours d'élasticité » (Photoélasticité) Éditions CEPADUES - Août 1990.

[15] K. L. Johnson, « Contact mechanics », edition Cambridge University press 1985.

[16] RESSOURCE internet, mot clé (Élasticité, photoélasticimétrie, point isotrope, castem, Éléments finis).

[17] thèse doctorat.Mr Xiaolai Zhou, « Etude paramétrique pour la détermination des contrainte résiduelles par la méthode ultrasonore ».Université de technologie de Troyes(UTT) promotion 2006.