N°d'ordre: ....

République Algerienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la Recherche scientifique
Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Filière : Mathématiques
Spécialité : RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Par

Louli Sadia   Hamadache THeleli

système dynamique et application

Soutenue le 3 octobre 2022 devant le jury :

Rezki Fariza	MAA	UMMTO	Président du jury
Zidelmal Nacera	MAA	UMMTO	Examinateur
Mohemed Aiden	Professeur	UMMTO	Encadreur

Année Universitaire : 2021/2022

Remerciements

Nous remercions avant tout le bon dieu qui nous a donné courage et volonté pour réaliser ce travail et qui nous a éclairé les chemins par la lumière de son immense savoir .

*C'est avec un grand plaisir que nous exprimons nos gratitudes et nos sincères remerciements à notre promoteur, **Mr Aidene Mohamed** pour l'attention qu'il a porté et ses conseils constructifs tout au long de l'élaboration de ce mémoire*

Nous remercions vivement les membres du jury pour avoir accepté de juger notre travail .

Nous remercions également tous les enseignants du département Mathématiques qui ont donné des connaissances tout au long de notre cursus.

Enfin, un grand merci à nos chéres familles, particulièrement nos parents,et les personnes les plus proches pour leur encouragement, sans oublier de remercier nos chers amis, et camarades pour leurs aides.

Merci à tous .

DÉDICACE

C'est avec profond amour que je dédié ce modeste travail à :

Mes très chers parents pour tout leurs sacrifices, amour et soutien. Ils m'ont toujours poussé et motivé dans mes études. Ce projet fin d'étude représente donc l'aboutissement du soutien et des encouragements qu'ils m'ont prodigués tout au long de ma scolarité.Qu'ils en soient remerciés par cette trop modeste dédicace .

Mes fréres :Rafik ,yousef ,Rachid et Karim

Mes belles soeurs : Wissam , linda .

Toute ma famille de plus vieux jusqu'au plus jeune.

Ma binôme et à toute sa famille .

Mes ami(e)s et mes proches et ma promotion ,qui ont était
toujours présent pour apporter leurs aides durant tout ce temps.

Hamadache Theleli

...

DÉDICACE

C'est avec profond amour que je dédié ce modeste travail à :

Mes très chers parents pour tout leurs sacrifices, pour leur immense patience , leur amour, et surtout leur confiance en moi la chose qui ma donné depuis toujours la volonté pour réussir .

Mes frères : Jugurta et lunis

Ma belle soeur Rima .

Toute ma famille de plus vieux jusqu'au plus jeune.
Ma binôme et à toute sa famille .

Mes ami(e)s et mes proches et ma promotion , qui ont était
toujours présent pour apporter leurs aides durant tout ce temps.

Louli Sadia

...

Table des matières

Notation

$\forall$:Pour tout.
$\exists$:il existe.
$conv(A)$:enveloppe convexe de A.
max :Maximum.
min :minimum.
sup :borne supérieure.
inf :borne inférieure.
$\Re$: Ensemble des nombres réels.
$\Re^+$:Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\Re^n$:Espace vectoriel de dimension n.
f' : la dérivé de la fonction f du premier degré.
f'' : la deuxième dérivé de f .
N :ensemble des entiers naturels.
∇^2 :la matrice Hessienne .
Q : ensemble des nombres rationnels.
C^2 :classe du second ordre.
rg ou $rang$:rang.
$com(A)$: comatrice de la matrice A.
t :variable indiquant le temps.
t_0 : instant initiale .
T : dure de l'horizon.
$U(t)$: ensemble de vecteur de commande .
$u(t)$:forme continu de vecteur d'état.
J : fonction objectif ou critère.
H : l'hamiltonien.
$M_n(K)$:Ensemble des matrices carrées d'ordre n ,à coefficients dans K.
det :Déterminant.
$\exp(A)$:Exponentielle de la matrice A .
A^t : transposée de la matrice A .
x^t : Transposée du vecteur x .
∇f : gradient de f .
$A_{cc}(x_0, T)$: ensemble accessible en temps T depuis le point x_0.
∂A :frontière de A.

Introduction générale

L'optimisation est une branche des mathématiques et de l'informatique en tant que discipline.Elle intervient pratiquement dans tous les processus de modélisation actuels et joue un rôle très important dans beaucoup de domaines.Qu'il s'agisse de problème de la recherche opérationnelle, de mathématiques appliquées, d'analyse de statistiques, et de la théorie de contrôle.

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandes,c'est-a-dire :des systèmes sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle).Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. Pour le modéliser,on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux dérivées partielles, stochastiques, etc. Pour cette raison la théorie du contrôle est à l'interconnexion de nombreux domaines mathématiques. Les contrôles sont des fonctions ou des paramètre, habituellement soumis à des contraintes. En mathématiques, la théorie du contrôle optimal s'inscrit dans la continuité du calcul des variations. Elle est apparue après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique du vol. Historiquement, la théorie du contrôle optimal est très liée à la mécanique classique,en particulier aux principes variationnels de la mécanique(principe de Fermat,équations d'Euler-Lagrange).La point clé de cette théorie est le principe du maximum de Pontryagin,formulé par L.S.Pontryagin en 1956,qui donne une condition nécessaire d'optimalité et permet ainsi de calculer les trajectoires optimales .
Pour déterminer une trajectoire optimale joignant,un ensemble initial à une cible, il faut d'abord savoir si cette cible est atteignable c'est le problème de contrôlabilité .Pour les systèmes de contrôle linéaires en dimension finie,il existe une caractérisation très simple de la contrôlabilité,apparue dans les années soixante avec les travaux de R.E.Kalman ,et pour les systèmes non linéaires,le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus difficile.Ensuite,une fois le problème de contrôlabilité résolu,il faut chercher parmi toutes les trajectoires celle qui donne le coût minimum(ou maximum). Pour la résolution du problème de contrôle optimal,on dispose de deux grandes classes de méthodes à savoir :
Les méthodes directes :ces méthodes sont basées sur la discrétisation du problème .
Les méthodes indirectes : ces méthodes sont basée sur le principe du maximum de Pontryagin (PMP).

Notre mémoire est organisé de la manière suivante :
Le premier chapitre est une introduction au contrôle optimal,donc on va donner des notions de base et aussi l'objectif de cette théorie, on va définir les

systèmes de contrôle linéaire dans le cas autonome et non autonome et leur contrôlabilité.
Dans la deuxièmes partie de se chapitre on s'intéressera au système de contrôle non linéaire et leur contrôlabilité.
Dans la troisième partie de se chapitre on va parler de l'existence de trajectoire optimal et du problème en temps optimal.
A la quatrième partie on s'intéressera au principe du maximum et les différents cas (cas sans contrainte,principe de Pontryaguin et la condition de transversalité)
Le deuxième chapitre est une application : la gestion d'un château d'eau.
la premier partie position de problème ,dans la deuxiémes parite de se chapitre résolution avec P.M.P.La troisième partie est une application analytique .
On termine par la conclusion .

1 Théorie de contrôle optimal

1.1 Introduction

Dans ce chapitre on va présenter la théorie de contrôle optimal, ainsi que touts les définition essentiels liées à cette théorie et les différentes types de fonctionnelle d'un problème de contrôle optimal comme nous allons les différentes méthodes de résolution en partial nous allons intéresse au principe de maximum de Pontryagin.

Définition 1.1 *La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'un état initial donné à un certain état final,en respectant certains critères. Historiquement le contrôle optimal est le prolongement du calcul variationnelle.Les domaines d'application sont multiples :on dispose d'un système (robot,automobile...etc) dans l'évolution dans le temps est gouverné par un vecteur $x(t)$ (la position,la vitesse,...)qui lie ses variables d'état par un vecteur $u(t)$ (l'accélération,... etc).Pour le modéliser on peut avoir recours à des équations différentielles intégrales, fonctionnelles, dérivés partielles..etc.*

1.2 Position de problème

Un problème de contrôle optimal se formule comme suit :

$$J(u,x) = K(T,x(T)) + \int_0^T f_0(t,x(t),u(t))dt \to \min_{u(t)} \tag{1.1}$$

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)). \tag{1.2}$$

$$x(0) = x_0 \in M_0 \tag{1.3}$$

$$x(T) = x_1 \in M_1; \tag{1.4}$$

$$u(t) \in U, t \in I = [0,T], \tag{1.5}$$

M_0 :ensemble de départ.
M_1 :ensemble d'arrivée.
$x(0) = x_0$: la position initiale du système(1.2).
$x(T) = x_1$: la position terminale du système (1.2).

u(t) : La commande du système,et U est l'ensemble des application mesurables,localement bornée sur I à valeur dans $\Re^n$

$\dot{x}(t) = f(t,x,u)$: est la dynamique du système.
$J(x,u) = K(T,x(T)) + \int_0^T f_0(t,x(t),u(t))dt$:Est appelé le coût du contrôle ou fonction objectif,critère de qualité.

1.2.1 Critère de qualité

Cette fonctionnelle comporte deux parties :

$K(T,x(T))$:est le coût terminal,il a son importance lorsque T est libre,sinon il est constant, et

$\int_0^T f_0(t,x(t),u(t))dt$ dépend de tout le parcours du temps $t \in [0,T]$.

On peut classer les fonctions objectives en deux critères physiques de performance :
Temps optimal :
On parle d'un problème en temps optimal lorsque $f_0(t,x,u) = 1$,
$K(T,x(T)) = 0$ et le temps final T est libre dans l'expression :$\min_u \int_0^T 1dt$
Coût optimal
On parle d'un problème en coût optimal lorsque le temps final T est fixé dans l'expression :$\min_u K(T,x(T)) + \int_0^T f_0(t,x(t),u(t))dt$

1.2.2 Condition initial du système

La condition initiale du système,$x_0 = x(t_0)$ est un vecteur donné dans un plan de phase.En réalité les composantes de $x(t)$et de x_0 peuvent représenter physiquement :la position,la vitesse,la température ,et d'autres paramètres mesurables.

1.2.3 État du système

On suppose que les variables, nommées variables d'état seront notées $x_i, i = 1,...,n$
Le système évolue dans le temps ,donc les x_i sont des fonctions de $t; x_i(t)$.
Les n variables d'états vont être gouvernées par n équations différentielles du 1^{ere}ordre sur un intervalle de temps $I = [0,T]$ qui sont sous la forme suivante :
$\frac{\partial x_i(t)}{\partial t} = f_i(t,x_1,...,x_n;u_1,...,u_m), i = 1,...n$

1.2.4 Le but de la commande

Dans un problème de contrôle ,le but de la commande consiste à ramener l'objet ; de la position initiale $x_0 = x(t_0)(x_0 \in M_0)$ à une autre position $x_1 = x(T)(x_1 \in M_1)$ où M_0 est ensemble de départ et M_1 est ensemble d'arrivée.

1.3 Classe des commandes admissibles

U est l'ensemble des contrôles admissibles qui peut être non bornée,borné ou type Bang-Bang.

1.3.1 Commande borné

la commande $u_j(t)$ est dite commande bornée, si elle peut être minorée et majorée par des constantes notes a_j, b_j par la forme suivantes :
$a_j \le u_j \le b_j, j = 1...m, t \in [0,T]$
$u_j(t), j = 1...m$ sont les composantes du contrôle elles doivent être intégrables par rapport à t

1.3.2 Commande Bang-Bang

Un contrôle $u \in U$ est appelé contrôle Bang-Bang,si pour chaque instant, t et chaque indice $j = 1, ..., m$,on a $\mid u_j(t) \mid = 1$

1.4 Les différents types de fonctionnelle d'un problème de contrôle optimal :

1.4.1 Problème de Mayer

Ici c'est la fonctionnelle :
$J(u(t)) = K(T, x(T)) \to \min_u$

c'est-à-dire $f_0 \equiv 0$.

1.4.2 Problème de Lagrange :

C'est le problème dont le critère à minimiser s'écrit :
$J(u(t)) = \int_0^T f_0(x(t), u(t), t)dt \to \min_{u(t)}$

c'est-à-dire :$K \equiv 0$;T est fixe.

1.4.3 Problème de Mayer-Lagrange

$J(u(t)) = K(T, x(T)) + \int_0^T f_0(x(t), u(t), t)dt \to \min_{u(t)}$
$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)); x(0) = x_0 \in M_0;$
$x(T) = x_1 \in M_1;$
$u(t) \in U, t \in [0, T];$

Remarque 1.1 *Le problème de Lagrange peut être transformé en problème de Mayer en ajoutant une variable supplémentaire :*

$x_{n+1}(t) = \int_0^S f_0(s, x(s), u(s))ds$

$x_{n+1}(T) = \int_0^T f_0(t, x(t), u(t))dt$

donc $J(u(t)) = x_{n+1}(T) \to opt$

$\dot{x}(t) = f(x, u, t), x(t_0) \in M_0, x(T) \in M_1$

$\dot{x}_{n+1}(t) = f_0(x, u, t), x_{n+1}(t_0) = 0$

1.5 Contrôlabilité

La contrôlabilité est l'un des concepts centraux de la théorie du contrôle.C'est la possibilité d'influencer l'état du système (sortie) en manipulant les commandes (entrées).Existe-t-il un contrôle u tel que la trajectoire associé x conduit le système de $x_0 \in M_0$ *à* $x_1 \in M_1$ *en un temps fini ?*
La notion de la contrôlabilité a été introduite en 1960 par Kalman pour des systèmes linéaires de la forme $\dot{x}(t) = Ax + Bu$*.L'état x évolue dans un espace vectoriel réel E ,de dimension n.*
On dit que $\dot{x}(t) = Ax + Bu$ *est contrôlable, si l'on peut joindre deux points de l'espace d'état en un temps fini,c'est-à-dire ,étant donnée deux points* x_0,$x_1 \in E$ *et deux instants* t_0, t_1 *avec* $t_0 < t_1$*, il existe une commande u ,définie sur* $[t_0, t_1]$*telle que* $x(t_0) = x_0$,$x(t_1) = x_1$

1.5.1 Ensemble accessible

Définition 1.2 *L'ensemble accessible en temps T pour le système :*
$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), t \in [0, T]$*,noté* $A_{cc}(x^0, T)$ *est l'ensemble des extrémités au temps T des solutions du système partant de* x_0 *au temps* $t = 0$*.Autrement dit,c'est l'image de l'application entrée-sortie en temps .L'ensemble des points accessibles de* x_0 *en temps* $T > 0$ *est :*
$A_{cc}(x_0, T) = x_u(T)/u \in U$
Où U est l'ensemble des contrôles admissibles.

Théorème 1.1 *Trélat [2005] Soient les contrôles u appartenant à l'ensemble U des fonctions mesurables à valeurs dans un compact* $\Omega \in \Re^m, T > 0$ *et* $x_0 \in \Re^n$*. Alors l'ensemble* $A_{cc}(x^0, t)$ *est compact , convexe et varie continûment en t sur* $[0, T]$*.*

Démonstration. Trélat [2005] □

1.5.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires

On a le système de contrôle linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où I un intervalle de $\Re$ et soit A, B,et r trois applications intégrable sur I, à valeurs respectivement dans $M_n(\Re), M_{n,m}(\Re), M_{n,1}(\Re)$.
L'ensemble des contrôles U considérés est l'ensemble des applications mesurables et localement bornées sur I , tel que $I = [0, T]$ à valeurs dans le sous -ensembles $\Omega \subset \Re^m$.
Les théorèmes d'existence de solutions d'équations différentielles nous assurent pour tout contrôle u le système **M** admet une unique solution. Cette solution est égale à : :
$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds$
où $M(t)$ est la résolvante de ce système homogène $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ solution

du système :

$$\begin{cases} \dot{M}(t) = A(t)M(t) \\ M(t_0) = Id \end{cases}$$

Si $r = 0$ et $x_0 = 0$, la solutions de système s'écrit :

$x(t) = \int_0^t M(t)M(s)^{-1}B(s)u(s)ds.$
Elle est linéaire en u.

1.5.3 contrôlabilité des systèmes linaires autonomes

Cas sans contrainte sur le contrôle :Condition de Kalman

Théorème 1.2 Moussouni Dehbi [2012] *Le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$ est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice : $K = [B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B]$, est de $rang(K) = n$*
La matrice K est appelée matrice de Kalman ,et la condition $rang(K) = n$ est appelée condition de Kalman .

Démonstration. L'essentiel de la preuve est contenu dans le lemme suivant :

La matrice K est de $rangn$ si et seulement si l'application linéaire $\Phi : L^\infty([0,T], \Re^m) \to \Re^n$
$u \to \int_0^T \exp^{(T-t)A} Bu(t)dt.$
est surjective.
Supposons tout d'abord que $rang(K) < n$,et montrons qu'alors Φ n'est pas subjective.L'application K étant non subjective,il existe un vecteur $\psi \in \Re^n/0$,que l'on supposera être un vecteur ligne,tel que $\psi K = 0$.Par conséquent,

$\psi B = \psi AB = ... = \psi A^{n-1}B = 0.$
or d'après le théorème d'Hamilton-Cayley, il existe des réels $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ tels que
$A^n = a_0 I + ...a_{n-1}A^{n-1}.$
on en déduit par récurrence immédiate que ,pour tout entier n,$\psi A^n B = 0$
et donc ;pour tout $t \in [0, T]$;
$\psi \exp^{tA} B = 0$
Par conséquent ; pour tout contrôle u , on a :$\psi \int_0^T \exp^{(T-t)A} Bu(t)dt = 0.$
Ceci implique que ,pour tout $t \in [0, T]$:$\psi \exp^{T-t)A} B = 0$
En $t = T$ on obtient $\psi B = 0$.Ensuite ,en dérivant par rapport à t,puis en prenant $t = T$;on obtient $\psi AB = 0$.Ainsi ,par dérivations successives ,on obtient finalement
$\psi B = \psi AB = ... = \psi A^{n-1}B = 0$
donc $\psi K = 0$; et donc $rang(K) < n$.
Ce lemme permet maintenant de montrer facilement le théorème.
Si la matrice K est de rang n ,alors d'après le lemme l'application Φ est surjective,i.e $\Phi(L^\infty) = \Re^n$.Or ,pour tout contrôle u ,l'extrémité au temps T de la trajectoire associée à u est donné par :
$x(T) = \exp^{TA} x_0 + \int_0^T \exp^{(T-t)A}(Bu(t) + r(t))dt$
de sorte que lensemble accessible en temps T depuis un point $x_0 \in \Re^n$ est

$A_{cc}(T, x_0) = \exp^{TA} x_0 + \int_0^T \exp^{(T-t)A} r(t)dt + \phi(L^\infty) = \Re^n$.
ce qui montre que le système est contrôlable .
Réciproquement si le système est contrôlable ,alors il est en particulier contrôlable depuis x_0 défini par :$x_0 = -\exp^{-TA} \int_0^T \exp^{(T-t)A} r(t)dt$.
Or en ce point l'ensemble accessible en temps T s'écrit :$A_{cc}(T, x_0) = \phi(L^\infty)$ et le système étant contrôlable cet ensemble est égal à $\Re^n$. Cela prouve que Φ est surjective, et donc , d'après le lemme ,que la matrice K est rang n. □

Remarque

— Condition de Kalman ne dépend ni de T ni de x_0.Autrement dit ,si un système linéaire autonome est contrôlable en temps T depuis x_0,alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.

— K est appelée la matrice de Kalman à n lignes et m colonnes .

— La condition $rang(K) = n$ est appelée condition de Kalman.

Le contrôle dans le cas avec contrainte

Soit $b \in \Re^n$ et $U \in \Re$ un intervalle contenant 0 dans son intérieur.Considérons le système :$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$ avec $u(t) \in U$ .Alors tout point de $\Re^n$ peut être conduit à l'origine en temps finis si et seulement si la paire (A,b)vérifie la condition de Kalman et la partie réelle de chaque valeur propre de A est inférieur ou égale à 0.

Exemple 1.1 *considérons le système dynamique linéaire autonome suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = x_2 \\ \dot{x_2}(t) = u \end{cases}$$

Avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier la contrôlabilité de ce système ,il suffit de calculer le déterminant de la matrice de Kalman par conséquent, la matrice de K est donnée par :

$$K = [B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de K est égal à :$det(K) = -1 \neq 0$, *donc le* $rang(K) = 2$ *d'où le système est contrôlable.*

Exemple 1.2 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = x_1 + x_2 + u_1 \\ \dot{x_2}(t) = 2x_1 + 3x_2 + u_2 \end{cases}$$

Où

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = A.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

et

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

dans cette situation on à $n = 2$ *et* $m = 2$

Et on a

$$k = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}$$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Alors : $k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Nous avons $rang(k) = 2 = n$ *donc le système est contrôlable.*

1.5.4 Contrôlabilité du système linéaire non-autonome (instationnaire)

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité si le système est non autonome :

Théorème 1.3 *Trélat [2005] Le système* $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ *est contrôlable en temps* T *si et seulement si la matrice* $C(T) = \int_0^T M(t)^{-1}B(t)B(t)^T M(t)^{-1^T} dt$.

dite matrice de contrôlabilité,est inversible.

Démonstration. Trélat [2005] □

Remarque 1.2 *:*

— *Cette condition dépend de* T *,mais ne dépend pas du point initial* x_0*.Autrement dit, si un système linéaire non autonome est contrôlable en temps* T *depuis* x_0*,alors il est contrôlable en temps* T *depuis tout point.*

— *On a* $C(T) = C(T)^t$*,et* $x^t C(T) x \geq 0$ *pour tout* $x \in \Re^n$ *.i.e.*$C(T)$=$T_1 et T_2$ *estunmatricecarrssymtriquepositive.* *Silesystmeestautonome, onaM(t)=*$\exp^{tA}$*,et donc* $C(T) = \int_0^T \exp^{-sA} BB^T \exp^{-sA^T} ds$*.Dans ce cas ,*$C(T_1)$ *est inversible si et seulement si* $C(T_2)$*est inversible, et en particulier la condition de contrôlabilité ne dépend pas de* T *(ce qui est faux dans le cas instationnaire).*

Contrôlabilité de systèmes non-linéaires

Généralement le problème de contrôlabilités est difficile, pour étudier la contrôlabilité des systèmes non linéaires,on considérons le système suivant :

$$\begin{cases} x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = 0, u \in U, t \in [0, T] \end{cases}$$

Où $x(t)$ est le vecteur de $\Re^n$,A matrice dans $M_n(\Re)$,B : $\Re \to \Re^n$, du contrôle $u(.), x_0 \in \Re^n$ est l'état initial de système .

Le système de contrôle non linéaire, est plus compliqué pour étudier la contrôlabilité du fait qu'on ne peut pas utiliser la caractérisation de Kalman. On s'intéressera à l'étude de contrôlabilité locale du système .

Contrôlabilité local des systèmes non-linéaire :

$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(t) \in X, u(t) \in U, t \in [0, T]$

Un système est localement contrôlable au voisinage de x_1,en temps T depuis x_0, si $x_1 \in A_{cc}(x_0, T)$.Autrement dit, il existe un voisinage V dans $v(x)(A_{cc}(x_0, T)$.Il existe un temps fini T et contrôle admissible $u(.) : [0, T] \to U$ tel que $x(t) = x(t, x_0, u(.))$.

1.5.5 Existence de trajectoire au temps minimal

il faut d'abord formaliser ,l'ensemble $A_{cc}(x_0, t)$,la notion de temps minimal .

Considérons le système de contrôle optimal $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$,où les contrôles u sont à valeurs dans un compact d'intérieur non vide $\mathbf{U} \in \Re^m$.

Soient x_0 et x_1 deux points de $\Re^n$.Supposons que x_1 soit accessible depuis x_0,c'est-à-dire qu'il existe au moins une trajectoire reliant x_0,à x_1.Parmi toutes les trajectoires reliant x_0 à x_1,on aimerait choisir celles qui le font en temps minimal .

Si T est le temps minimal, alors x_1 sera accessible à partir de x_0 en temps inférieur (temps minimal).
Par conséquent,$T = \inf t > 0/x \in A_{cc}(x_0, t)$.

Ce temps T est bien défini d'après le théorème $A_{cc}(x_0, t)$ varie continûment avec t,donc l'ensemble $t > 0 \mid x_1 \in A_{cc}(x_0, t)$ est fermé dans $\Re$.En particulier cette borne inférieur est atteinte.

Le temps $t = T$ est le premier temps pour lequel $A_{cc}(x_0, t)$contient x_1.

Exemple 1.3 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = -x_2(t) + u(t)\cos t \\ \dot{x_2}(t) = x_1(t) + u(t)\sin t \end{cases}$$

Écriture matricielle du système est :

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x_1}(t) \\ \dot{x_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} * u(t)$$

On a

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

La résolvante de système $\dot{x}(t) = A(t)X(t)$*est donnée par la formule* $M(t) = \exp^{At}$.
Les valeurs propres de la matrice A sont$\pm i$.*Un calcul simple montre que :*

$$\exp^{tA} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\exp^{-it} + \frac{1}{2}\exp^{it} & \frac{1}{2}i\exp^{it} - \frac{1}{2}i\exp^{-it} \\ \frac{1}{2}i\exp^{-it} - \frac{1}{2}i\exp^{it} & \frac{1}{2}i\exp^{-it} + \frac{1}{2}i\exp^{it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$M(t)^{-1}B(t)B(t)^T(M(t)^{-1})^T$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}^T * \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos \end{pmatrix}^{-1^T}$$

=

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 t & \cos t \sin t \\ \cos t \sin t & \sin^2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t & 0 \\ \sin 2t & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice est contrôlable au temps T et alors :

$c(T) = \int_0^T \exp^{-sA} B(s)B(t)^T \exp^{-sA^T} ds.$

=

$$\int_0^T \begin{pmatrix} \cos 2t & 0 \\ \sin 2t & 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin 2T & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2T & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $c(T)$ n'est pas inversible ,donc le système n'est pas contrôlable .

1.6 Principe de maximum

Le principe du maximum est utilisé dans la théorie du contrôle optimal pour trouver la commande optimale .
Il a été formolé par le mathématicien Soviétique Lev.Semenovich Ponyryagin en 1956. Qui généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations et développé par la suite par ses élèves et collaborateurs(Pontryagin 1961)Le principe du maximum de Pontryagin est un principe qui donne une condition nécessaire d'optimalité pour les systèmes décrite par des équations différentielles ordinaires. Il a été établi à l'origine pour calculer la trajectoire en temps minimal pour l'envoi d'une fusée sur la lune .

1.6.1 Problème en temps optimal :

Parmi toutes les trajectoires reliant x_0 à x_1,on aimerait trouver celle qui le fait en temps minimal si $t < T, x_1(t) \in A_{cc}(x_0, T), T = \inf t > 0 / x_1 \in A_{cc}(x_0, t)$
$x(t) \in \partial A_{cc}(x_0, T) = F_r A_{cc}(x_0, T)$

Définition 1.3 *Soit $u(t), t \in [0, T]$ continue par morceaux u est dit extrémal si la trajectoire associée $x_u(t)$vérifie $x_u(T) \in \partial A_{cc}(x_0, T)$*

Théorème 1.4 Trélat [2005] *Considérons le système de contrôle linéaire :*
$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$,$x(t_0) = x_0$
où $u(t) \in U$ compact.Soit $T > 0$.
Le contrôle $u(t)$ est extrémal sur $[0, T]$ ssi :$\exists$une solution non triviale $p(t)$,($p(t \neq 0)$de l'équation $\dot{p}(t) = -p(t)A(t)$ tel que $p(t)B(t)u(t) = \max_{u \in U} p(t)B(t)u, t \in [t_0, T]$
Le vecteur $p(t) \in \Re^n$ est appelé vecteur adjoint .

Théorème 1.5 *Considérons le système contrôlé :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Soit $T > 0$ .Le contrôle $u \in C[0, I], I = [-1, 1]$ est optimal ssi :$u(t) = signe < \eta(t), B(t) >= \eta(t)B(t)$où $\eta(t) \in \Re^n$ est solution de l'équation $\dot{\eta}^t = -\eta^t A$,$\eta(0) = Id$.

1.7 Principe du maximum faible

1.7.1 Le problème de Lagrange

Soit le problème dynamique suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t), \tag{1.6}$$

Où les contrôles $u(.) \in U$ sont définis sur $[0, T]$ et les trajectoires associes doivent vérifier $x(0) = x_0$ et $x(T) = x_1$, le problème est de minimiser un coût de la forme suivante :

$$J(u(t)) = \int_0^T f_0(t,x,u)dt \tag{1.7}$$

où T est fixé.

1.7.2 Approche variationnel du P.M.P

On considére la résolution de quelques problèmes de commande optimale par la méthode variationnelle(c'est-à-dire le calcul des variations) qui est une branche des mathématique permettant la recherche de l'optimum d'une fonctionnelle,et ceci en utilisant l'équation d'Euler-Lagrange.

1.7.3 Position du problème

$J(u) = K(x,T) + \int_{t_0}^T f_0(x(t),u(t),t)dt \to \min$
$\dot{x} = f(x(t),u(t),t), x(0) = x_0$
$u(t) \in U$
Soit $\overline{u} = u + \varepsilon\eta$
$\overline{x} = x + \varepsilon\phi$,avec $\phi(t_0) = 0$ car $\overline{x}(t_0) =$
=x(t_0) $+ \varepsilon\dot{\phi}$
soit $H(x(t),p(t),u(t),t) = p_0 f_0(x(t),u(t),t) + pf(x(t),u(t),t)$
$J(u) = K(x(T)) + \int_{t_0}^T [\frac{1}{p_0}H(x(t),p(t),u(t),t) - \frac{p}{p_0}f(x(t),u(t),t)]dt$
$J(\overline{u}) = K(\overline{x}(T) + \frac{1}{p_0}\int_{t_0}^T [H(\overline{x}(t),p(t),\overline{u}(t),t) - p\dot{\overline{x}}(t)]dt$
$J(\overline{u}) - J(u) = K(\overline{x}(T) - K(x(T)) + \frac{1}{p_0}\int_{t_0}^T [H(\overline{x}(t),p(t),\overline{u}(t),t) - H(x(t),p(t),u(t),t)]dt -$
$\frac{1}{p_0}\int_{t_0}^T (p(t)(\dot{\overline{x}} - \dot{x})dt$
$=\frac{\partial K}{\partial x}(x(T))(\overline{x}(T) - x(T))dt + 0(x) + \frac{1}{p_0}\int_{t_0}^T [H(x(t),p(t),\overline{u},t) - H(x(t),p(t),u(t),t) +$
$\frac{\partial H}{\partial x}(x(t),p(t),\overline{u},t)\nabla x(t)dt + \int_{t_0}^T 0_1(\| \nabla x(t) \| dt - \frac{1}{p_0}\int_{t_0}^T p(t)\varepsilon\dot{\phi}dt$
$=\varepsilon\frac{\partial K}{\partial x}(x(T))\phi(T) + 0_1(\| \nabla x \|) + \frac{1}{p_0}\int_{t_0}^T [H(\overline{u}) - H(u)]dt + \frac{1}{p_0}\int_{t_0}^T \frac{\partial H}{\partial x}\varepsilon\phi(T)dt -$
$\frac{1}{p_0}\varepsilon\int_{t_0}^T p(t)\dot{\phi}dt$

$\int_{t_0}^T p(t)\dot{\phi}dt = p(T)\phi(T) - \int_{t_0}^T \phi(t)\dot{p}(t)$

$J(\overline{u}) - J(u) = \varepsilon\frac{\partial K}{\partial x}x(T)\phi(T) + \frac{1}{p_0}\int_{t_0}^T [H(\overline{u}) - H(u)]dt + \frac{1}{p_0}\varepsilon\int_{t_0}^T \frac{\partial H}{\partial x}\phi(t)dt +$
$\frac{2}{p_0}\int_{t_0}^T \phi(t)\dot{p}(t)dt - \frac{\varepsilon}{p_0}p(T)\phi(T) + 0_1(\| \nabla x \|) + \int_{t_0}^T 0_2(\| \nabla x(t) \|)dt$
$=\varepsilon(\frac{\partial K}{\partial x}(x(T)) - \frac{1}{p-0}p(T))\phi(T) + \frac{1}{p_0}\int_{t_0}^T [H(\overline{u} - H(u)]dt + \frac{\varepsilon}{p_0}\int_{t_0}^T [\frac{\varepsilon}{p_0}\int_{t_0}^T [\frac{\partial H}{\partial x} +$
$\dot{p}(t)]\phi(t)dt + 0_1(\| \nabla x \|) + \int_{t_0}^T 0_2(\| \nabla x \|)dt$
Comme ε est (quelconque) $)\Rightarrow, p(T) = p_0\frac{\partial K(T)}{\partial x}$
$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow$
$J(\overline{u}) - J(u) = \frac{1}{p_0}\int_{t_0}^T [H(\overline{u} - H(u)]dt + 0(\| \nabla x(T) \|)$
Si u est le minimum de $J(u)$ i.e
$J(\overline{u}) - J(u) = \frac{1}{p_0}\int_{t_0}^T [H(\overline{u}) - H(u)] \geq 0$
et H est le maximum, alors $p_0 = -1 si$ u$estlemaximumdeJ \Rightarrow onposep_0 = 1$
et H est le max.

1.7.4 Principe du maximum faible cas de Mayer-Lagrange

Théorème 1.6 *Si le contrôle u est optimal sur $[0, T]$ alors il existe une application*

$P : [0, T] \to \Re^n \setminus 0_{\Re^n}$ absolument continue,et un réel $p^0 \leq 0$,tels que le couple $(p(.), p^0)$ soit non trivial,et

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \tag{1.8}$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = 0 \tag{1.10}$$

où $H(t, x, p, p^0, u) =< p, f(t, x, u) > +p^0 f_0(t, x, u)$

Si de plus la cible M_1 est une sous-variété de $\Re^n$ alors il existe des réels $\lambda_1, ..., \lambda_p$, tels que l'on ait au point final (T, x_1)

$p(T) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla F_i + p^0 \frac{\partial K}{\partial x}$

De plus si le temps final n'est pas fixé dans le problème de contrôle optimal,et si u est continu au temps T, alors on a au temps final T

$H(T, x(T), p(T), p^0, u(T)) = -p^0 \frac{\partial K}{\partial t}(T, x(T))$

1.8 Principe du maximum de Pontryagin :

1.8.1 Énonce générale

Considérons le système de contrôle dans$\Re^n$:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \tag{1.11}$$

où$f; \Re \times \Re^n \times \Re^m \to \Re^n$est de classe C^1 et où les contrôles sont des applications mesurables et bornées définies sur intervalle $[0, t_e(u)[$ de $\Re^+$ et à valeurs dans$\Omega \in \Re^m$

soient M_0 et M_1 deux sous -ensembles de $\Re^n$

On note U l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_1 en temps $t(u) < t_e(u)$

Par ailleurs on définit le coût d'un contrôle u sur $[0, T]$

$J(t, u) = \int_0^T f_0(s, x(s), u(s)) ds + K(T, x(T))$

ou $f_0 : \Re \times \Re^n \times \Re^m \to \Re$ et $K : \Re \times \Re^n \to \Re$ sont C^1 ,et $x(.)$ est la trajectoire solution de (1.12) associée au contrôle u

O

n considère le problème de contrôle optimal suivant :déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 et minimisant le coût (1.11) .

Le temps final peut être fixé ou non .

Théorème 1.7 *Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $x(.)$ est optimal sur $[0, T]$,alors il existe une application $p(.) : [0, T] \to \Re^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint,et un réel $p^0 \leq 0$, tels que le couple $(p(.), p^0)$ soit non trivial, et tels que, pour presque tout $t \in [0, T]$*

$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t))$

$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t))$

— *On a la condition de maximisation presque partout sur $[0, T]$ et*

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{\nu \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, \nu) \tag{1.12}$$

où $H(t, x, p, p^0, u(t) =< p, f(t, x, u) > +p^0 f_0(t, x, u)$ est le hamiltonien du problème.

En particulier si le système augmenté est autonome ,i.e,si f et f_0 ne dépendent pas de t , alors H ne dépend pas de t, et on a :
$\forall t \in [0, T]$, $\max H(x(t), p(t), p^0, \nu) = cst$.

— *Si de plus le temps final T pour joindre la cible M_1,n'est pas fixé,on a la condition au temps final T*

$$\max_{\nu \in \Omega} H(T, x(T), p(T), p^0, \nu) = -p^0 \frac{\partial K}{\partial t}(T, x(T)) \tag{1.13}$$

Si de plus M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de $\Re^n$ ayant des espaces tangent en $x(0) \in M_0$ et $x(T) \in M_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux)

$$p(0) \perp T_{x_0} M_0 \tag{1.14}$$

$$p(T) - p^0 \frac{\partial K}{\partial x}(T, x(T)) \perp T_{x(T)} M_1 \tag{1.15}$$

Dans le cas où $\Omega = \Re^m$,i.e.Lorsqu'il n'y a pas de contrainte sur le contrôle , la condition de maximum ***(1.12)*** *devient $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, et on retrouve le principe du maximum faible.*

Remarque 1.3 *: Si $\Omega = [-a, a], a \in \Re^+$ positif, la condition* ***(1.17)*** *signifie que :$u(t) = a * signe(p(t)B(t))$*
p(t)B(t) : est appelée fonction de commutation.

1.9 Condition de transversalité

1.9.1 Condition de transversalité

Si le temps T (fixé ou non),peut donnée les conditions **(1.14) (1.15)**

1.9.2 Problème de Lagrange

Dans ce cas le coût s'écrit :$J(t,u) = \int_0^t f_0(s, x(s), u(s))ds$

i.e, $k \equiv 0$;les condition de transversalité **(1.14) (1.15)** devient :
$p(0) \perp T_{x(0)}M_0$

$p(T) \perp T_{x(T)}M_1$

Remarque 1.4 *Si par exemple $M_0 = x_0$, la condition* ***(1.14)*** *devient vide. Si au contraire $M_0 = \Re^n$,i.e, si le point initial n'est pas fixe .On obtient p(0)=0.*

De même, si $M_1 = \Re^n$, on obtient $p(T) = 0$. Autrement dit si le point final est libre alors le vecteur adjoint au temps final est nul .

1.9.3 Problème de Mayer

Dans ce cas le coût s'écrit :$J(t,u) = K(t, x(t))$

i.e, $f_0 \equiv 0$ le cas particulier important ou $M_1 = \Re^n$ le point final $x(T)$ est libre d'où la condition **(1.15)** devient :

$p(T) = p^0 \frac{\partial K}{\partial x}(T, x(T))$

Alors forcement $p^0 \neq 0$ on prend alors $p^0 = -1$.

Si de plus K ne dépend pas de temps,on a coutume d'écrire $p(T) = -\nabla g(x(T))$.

Condition de transversalité sur le Hamiltonien :

La condition**(1.13)** n'est valable que si le temps final pour atteindre la cible n'est pas fixé .Dans le cas ou la fonction K ne dépend pas de temps t et la condition de transversalité **(1.13)** sur le Hamiltonien devient alors :

$\max_{v \in \Omega} H(T, x(T), p^0, v) = 0$

Ou encore ,si u est continu au temps T :

$H(T, x(T), p(T), p^0, u(T)) = 0$

Remarque 1.5 *Si f et f_0 ne dépend pas de t ,alors on a le long d'une extrémale :$\forall t \in [0, T]$,$\max_{v \in \Omega} H(x(t), p(t), p^0, v) = 0$*

Exemple 1.4 ***considérons le problème suivant :***

$$\begin{cases} J(u,t) = -x_1(T) + T \rightarrow \min \\ \dot{x_1}(t) = x_2(t), x_1(0) = 0 \\ \dot{x_2}(t) = u(t), x_2(0) = x_2(T) = 0 \\ \mid u(t) \mid \leq 1,\ t \in [0,T] \end{cases}$$

1. ***L'hamiltonien du système est :***

   $H(t,x,p,u) = p^0 f_0(x,t,u) + p_1\dot{x_1} + p_2\dot{x_2}$

   $= p_1x_2 + p_2u$

2. ***La fonction adjoint :***

   $\dot{p_1}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1}(x,p,u,t) \Rightarrow p_1(t) = cst$, *on a*

   $p_1(T) = -\frac{\partial K(x(T),T)}{\partial x_1(T)} = -(\frac{\partial(-x_1(T)+T)}{\partial x_1(T)}) = -(-1) = 1$ *; d'où* $p_1(t) = 1$

   $\dot{p_2}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2(t)}(x,p,u,t) = -p_1 = -1$,*d'où* $p_2(t) = -t + c$

   Donc les fonctions d'adjoints sont : $p_1(t) = 1$

   $p_2(t) = -t + c$

3. ***Principe du maximum :***

   $\max_{|u(t)|\leq 1} H(x,p,u,t) = \max_{|u(t)|\leq 1}(p_1x_2 + p_2u)$

   $= p_1x_2 + \max_{|u(t)|\leq 1}(p_2u)$

   $\Rightarrow u(t) = signe(p_2(t))$

   $= signe(-t + c)$

   Donc on va étudier les différents cas :

   Cas 1 :$u(t) = 1, t \in [0,T]$

   Cas 2 :$u(t) = -1, t \in [0,T]$
   Cas 3 :u(t) :

   $$\begin{cases} -1, t \in [0,t_c] \\ 1, t \in [t_c,T] \end{cases}$$

Cas 4 :u(t) :

$$\begin{cases} 1, t \in [0, t_c] \\ -1, t \in [t_c, T] \end{cases}$$

Cas 1 :$u(t) = 1$ *pour* $t \in [0, T]$
$\dot{x_2}(t) = 1 \to x_2(t) = t + c$ *on a* $x_2(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ *donc* $x_2(t) = t$
d'autre part on a $x_2(T) = 0$ *donc* $x_2(T) = T = 0$ *impossible*

Cas 2 :$u(t) = -1$ *pour* $t \in [0, T]$
$\dot{x_2}(t) = -1 \to x_2(t) = -t + c$ *on a* $x_2(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ *donc* $x_2(t) = t$
$x_2(T) = T = 0$ *impossible .*

Cas 3 :u(t) :

$$\begin{cases} -1, t \in [0, t_c] \\ 1, t \in [t_c, T] \end{cases}$$

Sur $t \in [0, t_c] u = -1$
$\dot{x_2}(t) = -1 \to x_2(t) = -t + c$ *on a* $x_2(0) = 0 \Rightarrow c = 0$
donc $x_2(t) = -t$
$\dot{x_1}(t) = -t \Rightarrow x_1(t) = -\frac{t^2}{2} + c$ *on a* $x_1(0) = 0$
donc $x_1(t) = -\frac{t^2}{2}$
Sur $t \in [t_c, T] u = 1$
$\dot{x_2}(t) = u = 1 \Rightarrow x_2(t) = t + c$*, on a* $x_2(t) = t + c$
$x_2(T) = T + c = 0 \Rightarrow c = -T$
donc $x_2(t) = t - T$
d'autre part :$x_2(t_c) = t_c - T = -t_c \Rightarrow T = 2t_c$
$\dot{x_1}(t) = t - T \Rightarrow x_1(t) = \frac{t^2}{2} - Tt + c$
$x_1(t) = \frac{t_c^2}{2} - 2t_c^2 + c = -\frac{t_c^2}{2} \Rightarrow c = t_c^2$
donc $x_1(t) = \frac{t^2}{2} - tT + \frac{T^2}{4}$
D'où :$J(u(t)) = -x_1(T) + T = \frac{T^2}{4} + T = 0 \Rightarrow T(\frac{T}{4} + 1) = 0$ *donc* $T = 0$*impossible ou* $T = -4$ *impossible*
Cas 4 :u(t) :

$$\begin{cases} 1, t \in [0, t_c] \\ -1, t \in [t_c, T] \end{cases}$$

pour $t \in [0, t_c], u = 1$
$\dot{x_1}(t) = t \Rightarrow x_1(t) = \frac{t^2}{2} + c \Rightarrow x_1(t) = \frac{t^2}{2}$
$\dot{x_2}(t) = 1 \Rightarrow x_2(t) = t + c \Rightarrow x_2(0) = 0$ *donc* $x_2(t) = t$
pour $t \in [0, t_c], u = 1$

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{t^2}{2} \\ x_2(t) = t \end{cases}$$

pour $t \in [t_c, T], u = -1$
$x_2(t) = -1 \Rightarrow x_2(t) = -t + c$ *on a* $x_(t_c) = -t_c + c = t_c \Rightarrow c = 2t_c$
et on a aussi :$x_2(T) = -T + c = 0 \Rightarrow c = T$ *d'où* $c = T = 2t_c$
$x_1(t) = -t + T \Rightarrow x_1(t) = \frac{-t^2}{2} + Tt + c_3$
$x_1(t_c) = \frac{-t_c^2}{2} + t_c T + c_3 = \frac{t_c^2}{2}$
$= \frac{-t_c^2}{2} + 2t_c^2 + c_3 = t_c^2 \Rightarrow c_3 = -t_c^2$

Donc pour $t \in [t_c, T], u = -1$

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{-t^2}{2} + tT - \frac{T^2}{4} \\ x_2(t) = -t + t \end{cases}$$

$J(u(t)) = -x_1(T) + T = \frac{-T^2}{4} + T = 0 \Rightarrow T(\frac{-T}{4} + 1) = 0$ *donc* $T = 0$ *impossible ou* $T = 4$
Alors la solution $T = 4$*,* $x_1(T) = 4$

1.10 Méthodes numériques en contrôle optimal :

On distingue deux types de méthodes numériques en contrôle optimal :Les méthodes directes et les méthodes indirectes .Les méthodes directes consistent à discrétiser l'état et le contrôle ,et réduisent le problème à un problème d'optimisation non linéaire(programmation non linéaire).Les méthodes indirectes consistent à résoudre numériquement,par une méthode de tir ,un problème aux valeurs limites obtenu par application du principe du maximum de Pontryagin.

1.10.1 Les méthodes indirectes

La méthode de tir simple.

Le principe est le suivant .Considérons le problème de contrôle optimal :
$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0$
et
$J(T, u) = \int_0^T f_0(t, x_u(t), u(t))dt + K(T, x_u(t))$. *et supposons dans un premier temps que le temps final T est fixé .Le principe du maximum donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale . Si l'on est capable , à partir de la condition du maximum ,d'exprimer le contrôle extrémal en fonction de $(x(t), p(t))$ alors le système extrémal est un système différentiel de la forme $\dot{z}(t) = F(t, z(t))$,où $z(t) = (x(t), p(t))$,et les conditions initiales,finales ,les conditions de transversalité, se mettent sous la forme $R(z(0), z(T)) = 0$ .Finalement ,on obtient le problème aux valeurs limites :*

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t; z(t)) \\ R(z(0), z(T)) = 0 \end{cases}$$

Définition 1.4 *Notons $z(t; z_0)$ la solution du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t; z(t)) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

et posons $G(z_0) = R(z_0, z(T, z_0))$ la fonction de tir.Le problème (1.18)aux valeurs limites est alors équivalent à :
$G(z_0) = 0$
Ceci peut se résoudre par une méthode de Newton.

Dans le cas non contraint, ce problème est bien posé car le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues.

La méthode de tir multiple

La méthode de tir multiple découpe l'intervalle $[0, T]$ en N intervalles $[t_i, t_{i+1}]$, et se donne comme inconnues les valeurs $z(t_i)$ au début de chaque sous-intervalle.Il faut prendre en compte des conditions de recollement en chaque temps t_i (condition de continuité).L'intérêt est d'améliorer la stabilité de la méthode.De manière plus précise, considérons un problème de contrôle optimal général.L'application du principe du maximum réduit le problème à un problème limites du types valeurs

$$\begin{cases} F_0(t;z(t)) & si \quad t_0 \leq t \leq t_1 \\ F_1(t;z(t)) & si \quad t_1 \leq t \leq t_2 \\ \vdots & \\ F_s(t;z(t)) & si \quad t_s \leq t \leq T \end{cases}$$

Où $z = (x;p) \in \Re^{2n}$ (p est le vecteur adjoint), et $t_1, t_2, ..., t_s \in [t_0, T]$.

Remarque 1.6 *A priori le temps final T est inconnu, par ailleurs dans la méthode de tir multiple le nombre s de commutation doit être fixé, on le déterminé lorsque c'est possible par une analyse géométrique du problème.*
La méthode de tir multiple consiste à subdiviser l'intervalle $[0, T]$ en N sous-intervalles, la valeur de $z(t)$ au début de chaque sous-intervalle étant inconnue.Plus précisément,soit $t_0 < \sigma_2 < ... < \sigma_k < T$ une subdivision fixée de l'intervalle $[0, T]$ .En tout point σ_j la fonction z est continue.
On peut considérer σ_j comme un point de commutation fixé, en lequel on a :

$$\begin{cases} z(\sigma_j^+) = z(\sigma_j^-) \\ \sigma_j = \sigma_j^* \end{cases}$$

On définit maintenant les nœuds
$\tau_1, ..., \tau_m$=$t_0, t_f \bigcup \sigma_1, ..., \sigma_k \bigcup t_1, ..., t_s$
Finalement on est conduit au problème aux valeurs limites

$$\dot{z}(t) = F(t;z(t)) =$$

$$\begin{cases} F_0(t;z(t)) si \tau_0 \leq t \leq \tau_1 \\ F_1(t;z(t)) si \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ . \\ . \\ . \\ F_{m-1}(t;z(t)) si \tau_{m-1} \leq t \leq \tau_m \end{cases}$$

$\forall j \in 2, ..., m-1 r_j(\tau_j, z(\tau_j^-), z(\tau_j^-)) = 0$
$r_m((\tau_m), z(\tau_1), z(\tau_m)) = 0$
où $\tau_1 = 0$ est fixé ,$\tau_m = T$,et les r_j représentent les conditions intérieurs ou limites précédents .

Remarque 1.7 *On améliore la stabilité de la méthode en augmentant le nombre de nœuds.C'est la en effet le principe de la méthode de tir multiple, par opposition à la méthode de tir simple où les erreurs par rapport à la condition initiale évoluent exponentiellement en fonction de* $T - f_0$
Posons $z_j^+ = z(\tau_j^+)$*, et soit* $z(t, \tau_{j-1}, z_{j-1}^+)$ *la solution du problème de Cauchy.*
$\dot{z}(t) = F(t; z(t)), z(\tau_{j-1}) = z_{j-1}^+$
On a
$z(\tau_j^-) = z(\tau_j^-, \tau_{j-1}, z_{j-1}^+)$
Les condition intérieurs et frontières s'écrivent :

$$\forall j \in 2, ..., m-1 r_j(\tau_j, z(\tau_j^-, \tau_{j-1}, z_{j-1}^+), z_j^+) = 0 \tag{1.20}$$

$$r_m(\tau_m, z_1^+, z(\tau_m^-, \tau_{m-1}, z_{m-1}^+) = 0 \tag{1.21}$$

posons maintenant
$Z = (z_1^+, \tau_m, z_1^+, \tau_2, ..., z_{m-1}^+, \tau_{m-1}) \in \Re^{(2n+1)(m-1)}$
Alors les condition (1.22),(1.23) sont vérifiées si

$$G(Z) = \begin{cases} r_m(\tau_m, z_1^+, z(\tau_m^-, \tau_{m-1}, z_{m-1}^+)) \\ r_2(\tau_2, z(\tau_2^-, \tau_1, z_1^+), z_2^+) \\ . \\ . \\ . \\ r_{m-1}(\tau_m, z(\tau_{m-1}^-, \tau_{m-2}, z_{m-2}^+), z_{m-1}^+) \end{cases}$$

=*0* (1.22)

On s'est donc ramené à déterminer un zéro de la fonction G,qui est définie sur un espace vectoriel dont la dimension est proportionnelle au nombre de points de commutation et de points de la subdivision.L'équation $G = 0$ *peut alors être résolue itérativement par une méthode de Newton.*

Rappels sur les méthodes de newton

Il s'agit de résoudre numériquement $G(z) = 0$ *où* $G : \Re^p \to \Re^p$ *est une fonction de classe* C^1*.L'idée de base est la suivente .Si* z_k *est proche d'un zéro z de G alors :*
$0 = G(z_k) + dG(z_k)(z - z_k) + 0(z - z_k)$.
On est alors amené à considérer la suite définie par récurrence
$z_{k+1} = z_k - (dG(z_k))^{-1}.G(z_k)$.
Un point initial $z_0 \in \Re^p$ *étant choisi, et on espère que* z_k *converge vers le zéro z.Ceci suppose donc le calcul de l'inverse de la matrice jacobienne de G ,ce qui doit être évité numériquement .Il s'agit alors ,à chaque étape ,de résoudre l'équation* $G(z_k) + dG(z_k).d_k = 0$
où d_k *est appelé direction de descente, et on pose* $z_{k+1} = z_K + d_k$.

Sous des hypothèses générales,l'algorithme de Newton converge ,et la convergence est quadratique .Il existe de nombreuses variantes de la méthode Newton :méthode de descente,de quasi-newton, de newton quadratique...cette méthode permet,en général ,une détermination très précise d'un zéro Son inconvénient principal est la petitesse du domaine de convergence.Pour faire converger la méthode ;il faut que le point initial z_0 soit suffisamment proche de la solution recherche z.Ceci suppose donc que pour déterminer le zéro z il faut avoir au préalable une idée approximative de la valeur de z.Du point de vue du contrôle optimal,cela signifie que,pour appliquer une méthode de tir ,il faut avoir une idée a priori de la trajectoire optimale cherchée .Ceci peut sembler paradoxal,mais il existe des moyens de se donner une approximation ,même grossière ,de cette trajectoire optimale .Il s'agit la en tout cas d'une connaissance à priori (plus ou moins grossière) de la trajectoire optimale cherchée.

1.10.2 Méthode directe

La discrétisation totale (tir direct)

C'est la méthode la plus évidente lorsqu'on aborde un problème de contrôle optimal.En discrétisant l'état et le contrôle,on se ramène à un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie (ou problème de programmation non linéaire) de la forme :

$$\min_{Z \in C} F(Z) \tag{1.23}$$

Où$Z(x, ..., x_N, u_1, ..., u_N)$ *;et*

$$C = Z \mid g_i(Z) = 0, i \in 1...r, g_j(Z) \leq 0, j \in r+1...m, \tag{1.24}$$

Plus précisément, la méthode consiste à choisir les contrôles dans un espace de dimension finie,et à utiliser une méthode d'intégration numérique des équations différentielles. Considérons donc une subdivision $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$ *de l'intervalle* $[0, T]$*.Réduisons l'espace des contrôles en considérant (par exemple)des contrôles constants par morceaux selon cette subdivision.Par ailleurs, choisissons une discrétisation de l'équation différentielle, par exemple choisissons ici (pour simplifier) la méthode d'Euler explicite.On obtient alors,en posant* $h_i = t_{i+1} - t_i$.
$x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i)$

Définition 1.5 *Il existe une infinité de variantes.D'une part,on peut discrétiser l'ensemble des contrôles admissibles par des contrôles constants par morceaux ; ou affines par morceaux, ou des splines.D'autre part,il existe de nombreuses méthodes pour discrétiser une équation différentielle ordinaire : méthode d'Euler(explicite ou implicite),point milieu,Rung-Kutta.Le choix de la méthode dépend du problème abordé.La discrétisation précédente conduit donc au problème de programmation non linéaire :*
$x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i) i = 0...N-1$
$\min C(x, ..., x_N, u_1, ..., u_N)$
$u_i \in \Omega, i = 1, ..., N-1$
i.e. un problème du type (1.25) .

Remarque 1.8

Cette méthode est très simple à mettre en œuvre.De plus l'introduction d'éventuelles contraintes sur l'état ne pose aucun problème.
D'un point de vue plus général,cela revient à choisir une discrétisation des contrôles,ainsi que de l'état,dans certains espaces de dimension finie :
$u \in Vect(U_1, ..., U_N), i.e, u(t) = \sum_{i=1}^{N} u_i U_i(t), u_i \in \Re$
$x \in Vect(X_1, ..., X_N), i.e, x(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i X_i(t), x_i \in \Re$
Où les $U_i(t)$ et $X_i(t)$ représentent une de Galerkin .Typiquement ,on peut choisir des approximations polynomiales par morceaux .L'équation différentielle,ainsi que les éventuelles contraintes sur l'état ou le contrôle ,ne sont vérifiées que sur les pointes de la discrétisation.On se ramène bien à un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie de la forme (1.26)
La résolution numérique d'un problème de programmation non linéaire du type (1.25) est standard.Elle peut être effectuée, par exemple ,par une méthode de pénalisation,ou par une méthode SQP(séquential quadratic programming).
Dans ces méthodes , le but est de se ramener à des sous-problèmes plus simples,sans contraintes,en utilisant des fonctions de pénalisation pour les contraintes ,ou bien d'appliquer les conditions nécessaires de kuhn-Tucker pour des problèmes d'optimisation avec contraintes .Pour le problème (1.25) (1.26),les conditions de Kunhn-Tucker s'écrivent
$\nabla F(Z) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(Z) = 0$
Où les multiplicateurs de Lagrange λ_i vérifient :
$\lambda_i g_i(Z) = 0, i \in 1, ..., r$,*et* $\lambda_i \geq 0$, *et* $\lambda_i \in t+1, ..., m$
Les méthodes SQP consistent à calculer de manière itérative ces multiplicateurs de Lagrange, en utilisant des méthodes de quasi-newton pour estimer le Hessien du Lagrangien associé au problème de programmation non linéaire ;et on résout un sous-problème de programmation quadratique basé sur une approximation quadratique de Lagrange .

1.10.3 Quelle méthode choisir ?

Le tableau suivant résume les caractéristiques des méthodes directes et indirectes.

Méthodes directes	***Méthodes indirectes***
Mise en œuvre simple,sans connaissance a priori	*connaissance a priori de la structure d trajectoire optimale*
Peu sensibles au choix de la condition initiale	*très sensibles au choix de la condition initiale*
Facilité de la prise en compte de contraintes sur l'état	*difficulté théorique de la prise en compte de contraintes sur l'état*
Contrôles (globalement) optimaux en boucle fermée	*contrôles (localement) optimaux en boucle ouverte*
Précision numérique basse ou moyenne	*très grande précision numérique*
Efficaces en basse dimension	*efficaces en toute dimension*
Gourmandise en mémoire	*calculs parallélisables*
Problème des minima locaux	*petit domaine de convergence*

2

Application : gestion d'un château d'eau.

2.1 Application

On considère un réservoir d'eau dont la hauteur d'eau au temps t est notée $x(t)$ et qui subit une perte d'eau linéaire en temps et auquel on peut ajouter de l'eau au cours du temps . Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{x(t)}{10} + u(t) \\ x(0) = x_0 \in \Re, 0 < t < T \end{cases}$$

où T est l'horizon fini,x_0 est la hauteur d'eau au temps de départ $t \in [0, T]$ et la fonction mesurable $u : [0, T] \to \Re$ est le contrôle modélisant l'ajout d'eau on suppose que le coût d'ajout d'eau est donné par :

$J(x, t, u(.)) = \int_0^T u^2(t)dt \to \min$

On veut trouver une stratégie optimale de remplissage du réservoir jusqu'à la hauteur donnée $h \geq x_0$ minimisant ce coût.
Les 2 questions suivantes sont largement indépendantes :

1. *On suppose dans cette question que l'horizon Test donné et on veut que la hauteur finale du réservoir soit exactement $x(T) = h$.*

   — *Résoudre le problème en utilisant le principe du maximum de Pontryagin.*
2. *On suppose dans cette question que l'horizon T est libre et on veut que la hauteur finale du réservoir soit exactement $x(T) = h$.*
   — *Résoudre le problème en utilisant le principe du maximum de Pontryagin lorsque $t = 0$ et $x_0 = 0$.*

2.2 Résolution

1. *On suppose dans cette question que l'horizon T est donné et on veut que la hauteur finale du réservoir soit exactement $x(T) = h$*
   résoudre le problème en utilisant le principe du maximum de Pontryagin :

   — *La fonction Hamiltonienne :*

   $H(t) = pf(t, x, u) + p^0 f_0(t, x, u)$

   $= p(-\frac{x(t)}{10} + u(t)) - u^2(t)$

   — *L'équation adjoint :*

   $\dot{p}(t) = -(-\frac{p(t)}{10}) = \frac{p(t)}{10} \Rightarrow p(t) = \lambda \exp^{\frac{t}{10}}$

   — *Fonction de trajectoire :*

$\frac{\partial H(x,u,p,t)}{\partial u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H(x,u,p,t)}{\partial u} = -2u + p = 0$

$\Rightarrow u(t) = \frac{p(t)}{2}$

On a : $\dot{x}(t) = -\frac{x(t)}{10} + u(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = -\frac{x(t)}{10} + \frac{p(t)}{2}$

On a : $\dot{p}(t) = \frac{p(t)}{10} \Rightarrow p(t) = 2\dot{x}(t) + \frac{x(t)}{5}$

$\dot{\dot{x}}(t) = -\frac{\dot{x}(t)}{10} + \frac{\dot{p}(t)}{2}$

$\dot{\dot{x}}(t) = -\frac{\dot{x}(t)}{10} + \frac{p(t)}{10}\frac{1}{2}$

$\dot{\dot{x}}(t) = -\frac{\dot{x}(t)}{10} + \frac{1}{20}(2\dot{x}(t) + \frac{x(t)}{5})$

$\dot{\dot{x}}(t) = -\frac{\dot{x}(t)}{10} + \frac{\dot{x}(t)}{10} + \frac{x(t)}{100}$

$\dot{\dot{x}}(t) = \frac{x(t)}{100} \rightarrow \dot{\dot{x}}(t) - \frac{x(t)}{100} = 0$

Solution de l'équation différentielle :

$x(t) = \alpha_1 \exp^{\frac{t}{10}} + \alpha_2 \exp^{\frac{-t}{10}}$

pour $t = 0$ *,* $x(T) = h$ *,et* $\alpha_1, \alpha_2 \in \Re$

$\alpha_1 + \alpha_2 = x_0,\ \alpha_2 = x_0 - \alpha_1$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x_0 \Rightarrow \alpha_2 = x_0 - \alpha_1 \\ x(T) = \alpha_1 \exp^{\frac{T}{10}} + (x_0 - \alpha_1)\exp^{\frac{-T}{10}} = h \end{cases}$$

$\alpha_1 \exp^{\frac{T}{10}} + x_0 \exp^{\frac{-T}{10}} - \alpha_1 \exp^{\frac{-T}{10}} = h$

$\alpha_1(\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{\frac{-T}{10}}) + x_0 \exp^{\frac{-T}{10}} = h$

$\alpha_1 = \frac{h - x_0 \exp^{\frac{-T}{10}}}{\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{\frac{-T}{10}}}$

$\alpha_2 = \frac{x_0 \exp^{\frac{T}{10}} - h}{\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{\frac{-T}{10}}}$

Donc : $x(t) = \alpha_1 \exp^{\frac{t}{10}} + (x_0 - \alpha_1)\exp^{\frac{-t}{10}}$

— *le contrôle u(t) :*

On a : $u(t) = \frac{p(t)}{2} = \dot{x}(t) + \frac{x(t)}{10}$
$\frac{\alpha_1}{10}\exp^{\frac{t}{10}} - \frac{x_0}{10}\exp^{-\frac{t}{10}} + \frac{\alpha_1}{10}\exp^{-\frac{t}{10}} + \frac{\alpha_1}{10}\exp^{\frac{t}{10}} + \frac{x_0}{10}\exp^{-\frac{t}{10}} - \frac{\alpha_1}{10}\exp^{-\frac{t}{10}}$

$= \frac{\alpha_1}{5}\exp\frac{t}{10}$

— *le coût d'ajout d'eau J(t) :*

$J(u(t)) = \int_0^T \frac{\alpha_1^2}{25} \exp \frac{t}{5} dt$

$= \frac{\alpha_1^2}{25} [5 \exp \frac{t}{5}]_0^T = \frac{\alpha_1^2}{25} (5 \exp \frac{T}{5} - 5)$

$J(u(t)) = \frac{\alpha_1^2}{5} (\exp^{\frac{T}{5}} - 1)$

2. *On suppose dans cette question que l'horizon T est libre ,et on veut que la hauteur final du réservoir soit exactement x(T)=h.*

   Résoudre le problème en utilisant le principe de Pontryagin lorsque $x(0) = 0$

— *La fonction Hamiltonien :*

$H(x, u, p, t) = -u^2(t) + p(-\frac{x(t)}{10} + u(t))$

— *Équation adjointe :*

$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(-\frac{p(t)}{10}) = \frac{p(t)}{10}$

$p(t) = \lambda \exp^{\frac{t}{10}}$

— *Fonction de trajectoire :*

$\frac{\partial H(x,u,p,t)}{\partial u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H(x,u,p,t)}{\partial u} = -2u + p = 0$
$u(t) = \frac{p(t)}{2}$

$\dot{x}(t) = -\frac{x(t)}{10} + u(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = -\frac{x(t)}{10} + \frac{p}{2}$

$\ddot{x}(t) = -\frac{\dot{x}(t)}{10} + \frac{\dot{p}(t)}{2}$

$\ddot{x}(t) = -\frac{\dot{x}(t)}{10} + \frac{p(t)}{10} \frac{1}{2}$

$\ddot{x}(t) = -\frac{\dot{x}(t)}{10} + \frac{1}{20}(2\dot{x}(t) + \frac{x(t)}{5})$

$\ddot{x}(t) = -\frac{\dot{x}(t)}{10} + \frac{\dot{x}(t)}{10} + \frac{x(t)}{100}$

$\ddot{x}(t) = \frac{x(t)}{100} \to \ddot{x}(t) - \frac{x(t)}{100} = 0$

$x(t) = \alpha_1 \exp^{\frac{t}{10}} + \alpha_2 \exp^{-\frac{t}{10}}$*,avec* $\alpha_1, \alpha_2 \in \Re$

$x(0) = 0$

$x(0) = \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_1$

donc $x(t) = \alpha_1(\exp^{\frac{t}{10}} - \exp^{-\frac{t}{10}})$

On a $x(T) = h$

$x(T) = \alpha_1(\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{-\frac{T}{10}}) = h$

$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{h}{(\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{-\frac{T}{10}})}$

$\alpha_2 = \frac{h}{(\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{-\frac{T}{10}})}$

D'où la fonction de trajectoire :

$x(t) = \frac{h}{(\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{-\frac{T}{10}})}(\exp^{\frac{t}{10}} - \exp^{-\frac{t}{10}})$

$u(t) = \frac{p(t)}{2} = \dot{x} + \frac{x}{10} = \frac{\exp^{\frac{t}{10}} h}{10(\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{-\frac{T}{10}})} + \frac{\exp^{-\frac{t}{10}} h}{10(\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{-\frac{T}{10}})} + \frac{h \exp^{\frac{t}{10}}}{10(\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{-\frac{T}{10}})} - \frac{\exp^{-\frac{t}{10}} h}{10(\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{-\frac{T}{10}})}$

$u(t) = \frac{h \exp \frac{t}{10}}{5(\exp \frac{T}{10} - \exp \frac{-T}{10})}$

— *le contrôle modélisant l'ajout d'eau :*

$u(t) = \frac{h \exp^{\frac{t}{10}}}{5(\exp^{\frac{t}{10}} - \exp^{-\frac{t}{10}})}$

— *le coût d'ajout d'eau :*

$J(u) = \int_0^T \frac{h^2 \exp^{\frac{t}{5}}}{25(\exp^{\frac{t}{10}} - \exp^{-\frac{t}{10}})^2} dt$
$= \frac{h^2}{25(\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{-\frac{T}{10}})^2} \int_0^T \exp^{\frac{t}{5}}$
$= \frac{h^2}{25(\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{-\frac{T}{10}})^2} [5 \exp^{\frac{T}{5}} - 5] = \frac{h^2}{5(\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{-\frac{T}{10}})^2} (\exp^{\frac{T}{5}} - 1)$

2.3 Application Analytique

Soit le problème de coût optimal suivante : $J(x(t), u(t), t) = \int_0^{100} u(t)^2 dt \to \min$
.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{x(t)}{10} + u(t) \\ x(0) = x_0 \in \Re, 0 < t < T \end{cases}$$

On va résoudre le problème avec principe du maximum de Pontryagin

2.4 Résolution

1. *On veut trouver une stratégie optimal de remplissage du réservoir jusqu'à la hauteur donnée $h = 10$*
   On suppose que T donnée $T = 100$ est on veut que la hauteur finale du réservoir soit $x(100) = 10$ mètre

— *L'hamiltonien du système est :*
$H(t) = pf(t,x,u) + p^0 f_0(t,x,u)$

$= p(-\frac{x(t)}{10} + u(t)) - u^2(t)$

— *L'équation adjoint :*

$\dot{p}(t) = -(-\frac{p(t)}{10}) = \frac{p(t)}{10} \Rightarrow p(t) = \lambda \exp^{\frac{t}{10}}$

$\frac{\partial H(x,u,p,t)}{\partial u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H(x,u,p,t)}{\partial u} = -2u + p = 0$

$\Rightarrow u(t) = \frac{p(t)}{2}$

On a : $\dot{x}(t) = -\frac{x(t)}{10} + u(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = -\frac{x(t)}{10} + \frac{p(t)}{2}$

On a :$\dot{p}(t) = \frac{p(t)}{10} \Rightarrow p(t) = 2\dot{x}(t) + \frac{x(t)}{5}$

$\dot{\dot{x}}(t) = -\frac{\dot{x}(t)}{10} + \frac{\dot{p}(t)}{2}$

$\dot{\dot{x}}(t) = -\frac{\dot{x}(t)}{10} + \frac{p(t)}{10}\frac{1}{2}$

$\dot{\dot{x}}(t) = -\frac{\dot{x}(t)}{10} + \frac{1}{20}(2\dot{x}(t) + \frac{x(t)}{5})$

$\dot{\dot{x}}(t) = -\frac{\dot{x}(t)}{10} + \frac{\dot{x}(t)}{10} + \frac{x(t)}{100}$

$\dot{\dot{x}}(t) = \frac{x(t)}{100} \rightarrow \dot{\dot{x}}(t) - \frac{x(t)}{100} = 0$

Solution de l'équation différentielle :

$x(t) = \alpha_1 \exp^{\frac{t}{10}} + \alpha_2 \exp^{-\ \frac{t}{10}}$

pour $t = 0$ *,*$x_0 = 0$*;*$x(100) = 10$ *,et* $\alpha_1, \alpha_2 \in \Re$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 \\ x(100) = 10 \Rightarrow \alpha_1 \exp^{10} + (-\alpha_1)\exp^{-10} = 10 \Rightarrow \alpha_1(\exp^{10} - \exp^{-10}) = 10 \end{cases}$$

Donc :$\alpha_1 = \frac{10}{\exp^{10} - \exp^{-10}}$, $\alpha_2 = -\frac{10}{\exp^{10} - \exp^{-10}}$

— *Le contrôle u(t) :*

On a $u(t) = \frac{p(t)}{2} = \dot{x}(t) + \frac{x(t)}{10}$
$= \frac{\alpha_1 \exp^{\frac{t}{10}}}{10} + \frac{\alpha_1 \exp^{\frac{-t}{10}}}{10} + \frac{\alpha_1 \exp^{\frac{t}{10}}}{10} - \frac{\alpha_1 \exp^{\frac{-t}{10}}}{10} = \frac{\alpha_1}{5} \exp^{\frac{t}{10}}$

— *Le coût d'ajout d'eau :*
$J(u(t)) = \int_0^{100} \frac{\alpha_1^2}{25} \exp^{\frac{t}{5}} dt = \frac{\alpha_1^2}{25}[5\exp^{\frac{t}{5}}]_0^{100} = \frac{\alpha_1^2}{25}(5\exp^{20} - 5)$ $J(u(t)) = \frac{\alpha_1^2}{5}(\exp^{20} - 1)$ *avec* $\alpha_1 = \frac{10}{\exp^{10} - \exp^{-10}}$

2. *On suppose dans cette question que T est libre,et on veut que la hauteur final du réservoir* $x(T) = 10$
Résoudre le problème en utilisant le Principe de Pontryagin,lorsque $x(0) = 0$

— *Fonction Hamiltonien :*
$H(x, u, p, t) = -u^2(t) + p(-\frac{x(t)}{10} + u(t))$

— *Équation adjointe :*

$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(-\frac{p(t)}{10}) = \frac{p(t)}{10}$

$p(t) = \lambda \exp^{\frac{t}{10}}$

$\frac{\partial H(x,u,p,t)}{\partial u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H(x,u,p,t)}{\partial u} = -2u + p = 0$
$u(t) = \frac{p(t)}{2}$

$\dot{x}(t) = -\frac{x(t)}{10} + u(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = -\frac{x(t)}{10} + \frac{p}{2}$

$\dot{\dot{x}}(t) = -\frac{\dot{x}(t)}{10} + \frac{\dot{p}(t)}{2}$

$\dot{\dot{x}}(t) = -\frac{\dot{x}(t)}{10} + \frac{p(t)}{10}\frac{1}{2}$

$\dot{\dot{x}}(t) = -\frac{\dot{x}(t)}{10} + \frac{1}{20}(2\dot{x}(t) + \frac{x(t)}{5})$

$\dot{\dot{x}}(t) = -\frac{\dot{x}(t)}{10} + \frac{\dot{x}(t)}{10} + \frac{x(t)}{100}$

$\dot{\dot{x}}(t) = \frac{x(t)}{100} \rightarrow \dot{\dot{x}}(t) - \frac{x(t)}{100} = 0$

$x(t) = \alpha_1 \exp^{\frac{t}{10}} + \alpha_2 \exp^{-\frac{t}{10}}$,*avec* $\alpha_1, \alpha_2 \in \Re$

$x(0) = 0$

$x(0) = \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_1$

donc $x(t) = \alpha_1(\exp^{\frac{t}{10}} - \exp^{-\frac{t}{10}})$

On a $x(T) = 10$

$$x(T) = \alpha_1(\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{-\frac{T}{10}}) = 10$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{10}{(\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{-\frac{T}{10}})}$$

$$\alpha_2 = \frac{-10}{(\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{-\frac{T}{10}})}$$

— *Le contrôle u(t) :*

$$u(t) = \frac{p(t)}{2} = \dot{x} + \frac{x(t)}{10} = \frac{\exp^{\frac{t}{10}} 10}{10(\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{-\frac{T}{10}})} + \frac{\exp^{-\frac{t}{10}} 10}{10(\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{-\frac{T}{10}})} + \frac{10\exp^{\frac{t}{10}}}{10(\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{-\frac{T}{10}})} - \frac{\exp^{-\frac{t}{10}} 10}{10(\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{-\frac{T}{10}})}$$

$$u(t) = \frac{2\exp\frac{t}{10}}{\exp\frac{T}{10} - \exp\frac{-T}{10}}$$

— *Le coût d'ajout d'eau :*

$$J(u(t)) = \int_0^T \frac{4\exp^{\frac{2t}{10}}}{(\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{\frac{-T}{10}})^2} dt = \frac{4}{(\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{\frac{-T}{10}})^2} \int_0^T \exp^{\frac{t}{5}} dt$$

$$= \frac{4}{(\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{\frac{-T}{10}})^2} [5\exp^{\frac{t}{5}}]_0^T = \frac{4}{(\exp^{\frac{T}{10}} - \exp^{\frac{-T}{10}})^2} (5\exp^{\frac{T}{5}} - 5)$$

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons abordé la théorie du contrôle optimal ainsi que résolution d'un problème dynamique à système non linéaire.Dans le première partie nous avons présenté la théorie du contrôle . Nous avons donner quelques méthodes de résolution des problèmes de contrôle optimale (méthodes directes et les méthodes indirectes). Puis nous avons donné un aperçu sur le principe de maximum de Pontryagin dans tout sa généralité . Dans le 2ème parties nous avons traite un problème de contrôle optimal dans (l'hydraulique) (la gestion d'un château d'eau) en veut trouver une stratégie optimal de remplissage d'un réservoir jusqu'à la hauteur qui minimisant le coût et nous avons terminer par l'exemple analytique.

Bibliographie

Nacima Moussouni Dehbi. Contrôle optimal : optimisation d'une production céréalière. *PhD thesis, Orléans, 2012.*

Emmanuel Trélat. Contrôle optimal : théorie & applications, *volume 36. Vuibert Paris, 2005.*

A.chaban .Contrôle optimal d'une navette spatiale en phase de rentrée atmosphérique.Université mouloud mammeri de tizi-ouzou.

E.Trélat.Contrôle optimal.Notes de cours Master de Mathématiques, Université d'Orléans,2005.

E.Trélat Contrôle optimal Théorie et application Vuibert, Collection"Mathématique Concrètes,2005"

H.Fazia.Application de la programmation bi-niveaux au problème de contrôle optimal .Theme de magister.université mouloud mammeri de tizi- ouzou 2013

Melle K.Louadj.Résolution de problèmes paramétrés de contrôle optimal.Thèse de doctorat en recherche opérationnelle.Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.2012

Mlle Ouazna OUkacha ,Méthode directe d'optimisation de problème de contrôle . THESE DE DOCTORAT , universite Mouloud Mammeri ,TIZI OUZOU.

على نظام ديناميكي لمدخلات غير خطية

نقترح دراسة الاسس النظرية للتحكم الامثل (موضع المشكلةوالحالة الاولية للنظام ايضا هدف التحكم الامثل بالاضافة الى بعض مشاكل التحكم المثلىفئات الاوامر المقبولةو امكانية التحكم(النظام الخطي و الغير الخطي).درسنا ايضا نهج المتغير و مبدا في الحالة العرضية و بعده درسنا ديناميكيات برج الماء واخيرا توصلنا الى الاستنتاج العام.

Résumé

Nous nous proposons d'étudier les bases théoriques du contrôle optimal(position du problème,condition initiale du système,objectif de contrôle optimal ainsi que quelque problème de contrôle optimale,et la contrôlabilité des (systèmes linéaire et des systèmes non linéaire)et on a études aussi l'approche variationnelle et le principe du maximum cas contrainte sur contrôle(principe du maximum faible et le principe du maximum du Pontryagin ,la condition du transaversalité après on a étudiés la dynamique du château d'eau .Finalement on a fait conclusion générale.

Abstract

We propose to study the theorical bases of optimal control (problem position, initial condition of the system, optimal control objective as well as some optimal control problems, the classes of admissible commands ,and the controllability (linear and nonlinear system)and we also studied the varational approch and the principle of maximum (cascas without constraint on control,principles of maximum of pontryagin ,the condition of transeversality)and at the general conclusion.