

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE  
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

**Mémoire de Fin d'Etude  
De MASTER ACADEMIQUE**  
Spécialité : **Automatique**  
Option: **Commande des systèmes**

*Présenté par*

**SAM Manel  
TEKRANE Khalef**

Mémoire dirigé par MAIDI Ahmed

**Thème**

**Principe du minimum : identification des conditions initiales  
des variables adjointes en utilisant la méthode d'itération  
variationnelle**

*Mémoire soutenu publiquement le 07/07/ 2015 devant le jury composé de :*

**M Mohand achour TOUAT**  
MCB, UMMTO, Président

**M MAIDI Ahmed**  
MCA, UMMTO, Encadreur

**M MELLAH Rabah**  
MCA, UMMTO, Examineur

**M SALHI Boualem**  
MAA, UMMTO, Examineur

## ***Résumé***

Le principe du minimum de Pontriaguine est un classique de la commande optimale et se trouve souvent utilisé dans la résolution des problèmes de celle-ci. Cependant lors de son utilisation aux applications où les vecteurs adjoints sont indisponibles, son utilisation demeure délicate, En effet la difficulté vient de la condition initiale des variables adjointes on fait donc appel à une méthode itérative couramment utilisée qui est la méthode d'itération variationnelle, cette méthode nous permet d'avoir une solution approximative qui converge vers la solution exacte de l'équation Hamiltonienne et qui nous mène à identifier les variables adjointes.

# Remerciements

*A travers ce modeste travail, nous tenons à remercier vivement notre promoteur Mr Ahmed MAIDI pour l'intéressante documentation qu'il a mise à notre disposition, pour ses conseils précieux et pour toutes les commodités et aisances qu'il nous a apportés durant notre étude et réalisation de ce projet.*

*Nos remerciements les plus vifs s'adressent aussi aux messieurs le président et les membres de jury d'avoir accepté d'examiner et d'évaluer notre travail.*

*Nous exprimons également notre gratitude à tous les professeurs et enseignants qui nous guideront à travers notre parcours, sans omettre bien sûr de remercier profondément tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation du présent travail.*

*Et enfin, que nos chers parents et familles, et bien avant tout, trouvent ici l'expression de nos remerciements les plus sincères et les plus profonds en reconnaissance de leurs sacrifices, aides, soutien et encouragement afin de nous assurer cette formation dans les meilleures conditions.*

# *Dédicaces*

*« L'eau coule grâce à sa source*

*L'arbre pousse grâce à ses racines »*

*A*

*Mes parents*

*Pour les sacrifices déployés à mon égard ; pour leur patience  
Leur amour et leur confiance en moi*

*Ils ont tout fait pour mon bonheur et ma réussite.  
Qu'ils trouvent dans ce modeste travail, le témoignage de ma  
Profonde affection et de mon attachement indéfectible.  
Nulle dédicace ne puisse exprimer ce que je leur dois  
Que dieu leur réserve la bonne santé et une longue vie.*

*A Mes Sœurs*

*Qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de  
générosité.*

*A*

*Mes amis*

*En témoignage de mes sincères reconnaissances pour les efforts  
Qu'ils ont consentis pour me soutenir au cours de mes études.  
Que dieu nous garde toujours unis*

*A*

*Toute personne qui nous a aidé à faire ce projet.*

*Manel*

# *Dédicaces*

*« L'eau coule grâce à sa source*

*L'arbre pousse grâce à ses racines »*

*A*

*Mes parents*

*Pour les sacrifices déployés à mon égard ; pour leur patience  
Leur amour et leur confiance en moi*

*Ils ont tout fait pour mon bonheur et ma réussite.  
Qu'ils trouvent dans ce modeste travail, le témoignage de ma  
Profonde affection et de mon attachement indéfectible.  
Nulle dédicace ne puisse exprimer ce que je leur dois  
Que dieu leur réserve la bonne santé et une longue vie.*

*A Mes frères et à ma sœur*

*Qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de  
générosité.*

*A*

*Mes amis*

*En témoignage de mes sincères reconnaissances pour les efforts  
Qu'ils ont consentis pour me soutenir au cours de mes études.  
Que dieu nous garde toujours unis*

*A*

*Toute personne qui nous a aidé à faire ce projet.*

*Khalef*

## Sommaire :

<b>Introduction Générale</b> .....	01
------------------------------------	----

### *Chapitre I : Formulation d'un problème de commande optimale*

I.1 Introduction.....	3
I.2 Définition de la commande optimale .....	3
I.3 Formulation mathématique d'un problème de commande optimale.....	3
I.3.1 Mise en équation du système (Modèle du procédé).....	4
I.3.2 conditions terminales .....	4
I.3.3 contraintes physiques .....	5
I.3.3.1 Contraintes instantanées .....	5
I.3.3.2 Contraintes intégrales.....	5
I.3.4 critère de performance .....	6
I.4 principaux critères d'optimisation.....	6
I.4.1 commande en temps minimal .....	7
I.4.2 Commande terminale .....	7
I.4.3 Commande à énergie minimale .....	8
I.4.4 Commande à consommation minimale.....	8
I.4.5 Poursuite .....	8
I.4.6 Régulation.....	9
I.6 Méthodes de résolution .....	10
I.6.1 programmation dynamique.....	10
I.6.2 Principe du minimum de Pontriaguine .....	11
I.7 Exemple illustratif .....	12
I.8 Conclusion .....	14

### *Chapitre II: Principe du minimum*

II.1 introduction .....	15
II.2 Principe du minimum de Pontriaguine .....	15
II.3 Equation de Hamilton-Jacobi.....	16
II.3.1 Exemple II.1 .....	18
II.4 Résolution de l'équation de Hamilton Jacobi par la méthode des caractéristiques .....	19
II.4.1 Rappel sur la méthode des caractéristiques .....	19

II.4.2 Equations de Hamilton-Pontriaguine.....	20
II.4.3 ExempleII.2.....	22
II.3.3 Conditions aux limites .....	23
II.4 Conclusion.....	24

**Chapitre III :La méthode d'itération variationnelle**

III.1 Introduction .....	25
III.2 équations différentielles ordinaires (EDOs).....	25
III.2.2 Définition des équations différentielles ordinaires .....	25
III.3 Résolution numérique des équations différentielles ordinaires .....	26
III.3.1 Méthode analytique .....	26
III.3.2Méthodes Numériques.....	28
III.3.2.2 Méthode de Rung_Kutta .....	30
III.4 Description de la méthode d'itération variationnelle (VIM).....	31
III.5 Application de VIM pour les Equations différentielles ordinaires.....	32
III.5.1 Exemple illustratif (1) .....	32
III.5.2 Exemple illustratif (2) .....	35
III.6 Illustration graphique de la convergence de VIM .....	36
III.6.1 Graphes représentant la méthode numériqueet la méthode analytique.....	37
III.6.2Graphes représentant la méthode exacte et la méthode d'itération variationnelle (VIM).....	37
III.7 Conclusion .....	39

**Chapitre IV : Identification des variablesadjointes**

IV.1 Introduction .....	40
IV.2 Algorithme de résolution d'un problème de commande optimale par la méthode d'itération variationnelle .....	40
IV.3 Exemples d'applications .....	41
IV.4 Graphes représentant la méthode exacte des itérations de la méthode d'itérationvariationnelle (VIM) .....	53
IV.5 Conclusion.....	54
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>55</b>



La Nomenclature :

$t$	: Temps
$t_0$	: Instant initial
$t_f$	: Instant final
$T$	: Horizon
$x(t) \in R^n$	: Vecteur d'état
$x_0$	: Etat initial
$x_f$	: Etat final
$x^*(t)$	: Trajectoire optimale
$u(t) \in R^m$	: Vecteur de commande
$u^*(t)$	: Commande optimale
$U$	: Domaine admissible
q	: Contraintes instantanées
p	: Contraintes intégrales
$J$	: Critère de performance
$J^*$	: Coût optimal
R, B et Q	: Matrices symétriques définie positives
$H$	: Hamiltonien
$\lambda$	: Multiplicateur de lagrange
$\Omega$	: Vitesse angulaire
$C_m$	: Couple moteur
$V_m$	: Tension de l'induit
V	: Tension de la bobine
$R_m$	: La résistance de l'induit
K	: Prémontrés caractéristique du moteur
é	: contre-réaction.

$J$  : Inertie

$i$  : Intensité du courant d'induit.

$\Omega_0$  : Vitesse initiale

$\Omega_f$  : Vitesse final

Les études sur la commande optimale ont pour but de présenter les aspects théoriques et numériques de cette discipline, ainsi que des applications dans des domaines très divers. La théorie du contrôle (ou commande) analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard... Leurs origines sont très diverses : mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie...

L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal, ou commande optimale).

Dans les industries modernes où la notion de rendement est prépondérante, le rôle de l'automaticien est de concevoir, de réaliser et d'optimiser, tout au moins d'améliorer les méthodes existantes. Ainsi les domaines d'application sont multiples : aérospatiale, automobile, robotique, aéronautique, internet et les communications en général, mais aussi le secteur médical, chimique, génie des procédés, etc.

Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastiques, etc. Pour cette raison la théorie du contrôle est à l'interconnexion de nombreux domaines mathématiques. Les contrôles sont des fonctions ou des paramètres, habituellement soumis à des contraintes. Une fois le problème de contrôlabilité résolu, on peut de plus vouloir passer de l'état initial à l'état final en minimisant un certain critère ; on parle alors d'un problème de contrôle optimal. La théorie moderne du contrôle optimal a commencé dans les années 50, avec la formulation du principe du minimum de Pontriaguine.

L'obtention de lois de commandes optimales passe souvent par la résolution des équations d'Hamilton-Pontriaguine (principe du minimum) ou de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (programmation dynamique). On ne saurait surestimer l'importance du principe de minimum de Pontriaguine il est inconcevable de résoudre les équations de la commande

optimale sans celle-ci mais cette dernière est généralement non linéaire et sa solution analytique est souvent impossible. Pour surmonter cette difficulté, des méthodes numériques sont utilisées mais leur usage se voit limité vu la nature des équations et le couplage existant entre les différentes équations du problème final à résoudre.

L'objectif de ce travail consiste à présenter une approche pour synthétiser une loi de contrôle optimale pour un système dynamique donné basée sur la méthode d'itération variationnelle. Cette approche permet d'identifier les variables adjointes et de résoudre l'équation d'Hamilton de manière itérative ce qui permet d'avoir une solution approximée de la commande optimale.

Ainsi, le travail réalisé est réparti en quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à l'illustration de certains concepts de base relatifs à un problème de commande optimale en se focalisant sur sa formulation mathématique et aux méthodes contribuant à sa résolution.

Le second chapitre définit à son tour les notions mathématiques de base du principe du minimum de Pontriaguine.

Dans le troisième chapitre on présente des généralités sur les équations différentielles ordinaires et les méthodes de leur résolution (analytique et numérique) ainsi que le principe de méthode d'itération variationnelle qui peut résoudre des problèmes non-linéaires. Cette dernière est utilisée par la suite pour l'identification de l'initialisation des variables adjointes.

Le quatrième chapitre on présente une approche pour synthétiser une loi de commande optimale en passant par la résolution des équations d'Hamilton-Pontriaguine et en identifiant les conditions initiales des variables adjointes par la méthode d'itération variationnelle.

Ce travail se termine par une conclusion générale et des perspectives de continuité.

## ***1.1 Introduction***

Les problèmes de commande optimale se rencontrent dans la vie de tous les jours : comment arriver à destination le plus rapidement possible, comment minimiser sa consommation. Pour un système dynamique donné et dont les équations sont connues, le problème de commande optimale consiste alors à trouver la commande minimisant un critère donné. C'est sous cette forme que la commande optimale a été étudiée dès le 19<sup>ème</sup> siècle avec le calcul des variations. Une des grandes applications de la commande optimale a été l'application au lanceur Apollo dans les années 1960.

Notons néanmoins que les difficultés soulevées par ce genre de problème sont loin d'être complètement résolues et la commande optimale reste donc un sujet de recherche d'actualité.

Dans ce chapitre, On présente d'abord les concepts de base d'un problème de la commande optimale en se focalisant sur sa formulation mathématique et les différents éléments qui le définissent. Par la suite, on expose les méthodes de résolution de celle-ci et on termine par un exemple illustratif.

## ***1.2 Définition de la commande optimale***

Elle consiste à déterminer une commande admissible qui force le système à satisfaire des contraintes physiques qui minimise (ou maximise) un critère de performance.

## ***1.3 Formulation mathématique d'un problème de commande optimale***

La théorie de la commande optimale couvre toutes les activités dynamiques où une performance optimale est exigée. Les systèmes à commander peuvent donc être d'origine diverses : mécanique, électrique, électronique, biologie, chimie, économie,... Chaque problème de commande nécessite une description des propriétés dynamiques du processus à commander.

La commande optimale a été développée pour guider un système vers un objectif de manière optimale. Donc, on peut décrire le problème sous la forme mathématique de la manière suivante :

1. Décrire le modèle du système à commander ;
2. De vérifier les conditions terminales (Etats initiales et finales données) ;
3. De satisfaire les diverses contraintes imposées (les contraintes physiques) ;
4. D'optimiser un critère de performance qui doit être maximisé ou minimisé ;

Le problème étant posé, sa formulation est définie par les éléments décrits dans les sections suivantes.

### *1.3.1 Mise en équation du système (Modèle du procédé)*

Les systèmes étudiés dans le cas de la commande optimale sont décrits par des variables d'état, sous la forme suivante:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \quad (\text{I.1})$$

Où le vecteur d'état  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  et l'entrée de commande  $u(t) \in \mathbb{R}^m$   
(n : le nombre d'états et m : le nombre de commandes)

Cette équation est en général non linéaire de plus, la loi de commande doit appartenir à un certain ensemble de commandes admissibles

$$u(t) \in U(t) \quad (\text{I.2})$$

### *1.3.2 Conditions terminales*

Le système est soumis à des conditions terminales données par [1] :

$$K(x(t_0), t_0) = 0 \quad ; \quad l(x(t_f), t_f) = 0 \quad (\text{I.3})$$

Les conditions terminales caractérisent à la fois :

- ✓ **l'état initial** : c'est-à-dire l'instant où on commence à agir sur le processus
- ✓ **l'état final** : après action de la commande.

Par convention, l'instant initial est noté  $t_0$  et l'état initial  $x_0$ . De même, l'instant final est noté  $t_f$  et l'état final  $x_f$ .

Les conditions initiale et finale  $x_0$  et  $x_f$  prises aux instants respectifs  $t_0$  et  $t_f$  peuvent être fixées ou non. C'est-à-dire que l'état initial est toujours connu, l'état final peut être imposé ou libre ('imposé'  $x_f$  est connu, 'libre' une ou plusieurs variables d'états sont inconnus)

## I.3.3 Contraintes physiques

### I.3.3.1 Contraintes instantanées

Elles caractérisent en général les limitations physiques sur la commande ou sur l'état du processus, par exemple la limitation d'un débit, d'une pression ou d'une température, ou l'obligation pour un avion de rester dans un « tube » de l'espace prédéfini (couloir). Ce type de contraintes s'exprime par des inégalités de la forme [1]:

$$q(x(t), u(t), t) \leq 0, q \in R^{n_q} \quad (\text{I.4})$$

On peut également avoir des contraintes de type «**égalités**», comme faire varier la puissance fournie par une centrale tout en maintenant la tension constante ou faire évoluer un train qui doit nécessairement rester sur ses rails.

Les contraintes inégalités peuvent se ramener à des contraintes égalités en introduisant des variables supplémentaires.

En effet en notant  $v^2 = [v_1^2, v_1^2, \dots \dots v_{n_q}^2]^T$  il vient

$$q(x(t), u(t), t) \leq 0 \Leftrightarrow q(x(t), u(t), t) + v^2 = 0 \quad (\text{I.5})$$

### I.3.3.2 Contraintes intégrales

Elles sont le plus souvent liées à une limitation des ressources (par exemple un réservoir contient une quantité limitée de produit à utiliser) ou à une limitation des résultats de nos actions : le même réservoir ne peut pas être rempli au-delà de sa contenance ou il ya risque de débordement.

Ces contraintes s'expriment sous la forme :

$$\int_{t_0}^{t_f} p(x(t), u(t), t) dt \leq 0; \quad p \in R^{n_p} \quad (\text{I.6})$$

Comme dans le cas des contraintes instantanées, une contrainte inégalité peut être remplacée par une contrainte égalité. En posant  $w^2 = [w_1^2, w_1^2, \dots \dots w_{n_q}^2]^T$ , il vient :

$$\int_{t_0}^{t_f} p(x(t), u(t), t) dt \leq 0; \quad \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t_f} p(x(t), u(t), t) + w^2) dt = 0 \quad (\text{I.7})$$

### ***1.3.4 Critère de performance***

Il s'agit d'une grandeur mathématique désignée dans la littérature techniques selon le domaine : critère (en automatique), fonction coût (en économie), fonctionnelle (en mathématique). Dans ce qui suit, on utilise le mot **critère**.

#### **Remarque I.1 :**

Sur le plan pratique il n'est pas facile de déterminer un critère ; toutefois on peut toujours se ranger dans l'une des catégories suivantes :

- ✓ minimiser un temps ;
- ✓ optimiser une amplitude ;
- ✓ maximiser un profit où un revenu ;
- ✓ minimiser une erreur ;
- ✓ minimiser une consommation.

Pour la formulation des contraintes, il faut noter leur diversité lors de la commande d'un processus : soit sur le temps de simulation, sur la valeur de la commande, sur l'état du système,...

On peut citer :

- ✓ temps final fixe :  $T$  est donné ;
- ✓ temps final libre ;
- ✓ état initial fixe ;
- ✓ contrainte sur l'état  $X(T)$
- ✓ contrainte sur la commande  $U$ . Par exemple :  $-1 \leq U(t) \leq 1$

### ***1.4 principaux critères d'optimisation***

L'intérêt de la commande optimale découle de la nature même de sa définition : optimiser un critère de notre choix, tout en satisfaisant des conditions de fonctionnement données et des contraintes imposées.

# Chapitre I Formulation d'un problème de commande optimale

---

Les principaux critères utilisés sont le temps minimum, les critères quadratiques et les critères de type consommation.

- ✓ Les utilisations principales du critère temps minimum sont les problèmes de sécurité et la minimisation des coûts liés à la durée ; les applications principales se rencontrent dans les domaines de la production continue, de l'espace, de la défense et de la médecine.
- ✓ La mise en œuvre de critères quadratiques intervient dans les problèmes de minimisation de l'énergie, de stabilisation et de suivi de trajectoire ; elle concerne essentiellement les problèmes de régulation et d'asservissement en général, ainsi que les processus mettant en œuvre des énergies importantes. L'intérêt apparaît à la fois au niveau de la qualité, de la sécurité.
- ✓ L'utilisation de critères de type consommation concerne surtout les processus de production continue, dont on veut diminuer les coûts de fonctionnement, et les processus autonomes à ressources limitées dont on désire accroître la durée de fonctionnement

## ***1.4.1 Commande en temps minimal***

L'objectif est de conduire le système d'un état initial ( $x_0$ ) à l'état final ( $x_f$ ) en minimisant le temps.

Il est rencontré par exemple dans les problèmes de sécurité ou de fabrication. Le critère utilisé s'écrit alors :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt \quad (\text{I.8})$$

## ***1.4.2 Commande terminale***

Il s'agit dans ce cas de minimiser à l'instant final  $t_f$  une certaine fonction des variables d'état. On a donc :

$$J = [x(t_f) - x^d(t_f)]^T B [x(t_f) - x^d(t_f)] \quad (\text{I.9})$$

$$B=B^T \geq 0$$

On peut citer l'exemple d'un avion qui doit se positionner sur la piste d'atterrissage

### ***1.4.3 Commande à énergie minimale***

Dans ce cas l'objectif est de minimiser l'effort de commande en conduisant le système d'un état initial ( $x_0$ ) à l'état final ( $x_f$ ).

Mathématiquement, on a

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [u(t)]^T R u(t) dt \quad (\text{I.10})$$

avec

$$R = R^T > 0$$

Pour un système monovarié il vient :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [u(t)]^2 dt ; \quad R = 1 \quad (\text{I.11})$$

### ***1.4.4 Commande à consommation minimale***

Le problème est de trouver, lorsqu'elle existe, la commande permettant de faire évoluer le système de l'état  $x_0$  à l'instant  $t_0$  à l'état  $x_f$  à l'instant  $t_f$  fixé, en minimisant le critère

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[ \sum_{i=1}^m \beta_i |u_i(t)| \right] dt \quad ; \quad \beta_i \geq 0 \quad (\text{I.12})$$

Où  $\beta_i$  est un coefficient de pondération constant.

Pour un système monovarié, il vient

$$J = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt \quad ; \quad \beta = 1 \quad (\text{I.13})$$

### ***1.4.5 Poursuite***

Il s'agit de maintenir l'état  $x(t)$  très proche de l'état désiré  $x^d(t)$  dans l'intervalle de temps  $[t_0, t_f]$  Le critère correspondant est :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [x(t) - x^d(t)]^T Q [x(t) - x^d(t)] dt \quad (\text{I.14})$$

Avec :

$$Q = Q^T \geq 0$$

## I.4.6 Régulation

C'est un cas particulier de la poursuite, dans ce cas on a  $x^d(t) = 0$  avec  $t \in [t_0, t_f]$ . Le critère est donnée comme suit :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [x(t)]^T Q [x(t)] dt \quad (\text{I.15})$$

Avec

$$Q = Q^T \geq 0$$

### Remarque I.2

A partir de ces critères de base, on peut former d'autres critères selon les objectifs désirés par exemple :

- ✓ Poursuite + commande à énergie minimale

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [x(t) - x^d(t)]^T Q [x(t) - x^d(t)] dt + \int_{t_0}^{t_f} [u(t)]^T R u(t) dt$$

- ✓ Poursuite + commande à énergie minimale + commande terminale

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [x(t) - x^d(t)]^T Q [x(t) - x^d(t)] dt + \int_{t_0}^{t_f} [u(t)]^T R u(t) dt + \int_{t_0}^{t_f} [x(t_f) - x^d(t_f)]^T B [x(t_f) - x^d(t_f)] dt$$

## *1.6 Méthodes de résolution*

Il existe deux grandes classes de méthodes de résolution de problème de commande optimale :

1. La programmation dynamique de Bellman
2. le principe du minimum de Pontriaguine

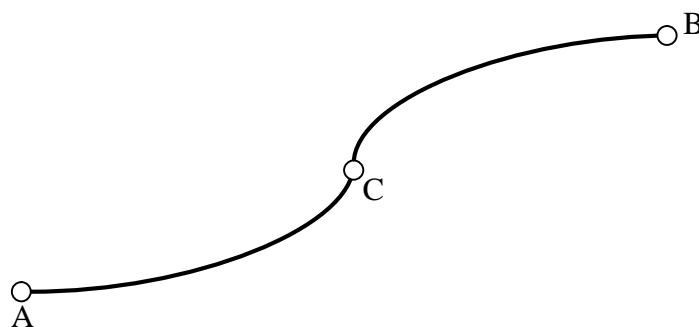
Ces deux méthodes sont des extensions des méthodes variationnelles classiques.

### *1.6.1 programmation dynamique*

La programmation dynamique repose sur le principe de Bellman, c'est l'une des méthodes utilisées pour calculer la loi de commande optimale en faisant des calculs simple.

Sous sa forme discrète ; la solution est obtenue en utilisant une équation fonctionnelle tandis que sous sa forme continue, il conduit à l'équation Hamilton-Jacobi et au principe du minimum (maximum) de Pontriaguine.

Le principe d'optimalité de Bellman est énoncé comme suit :<< Si C est un point intermédiaire de la trajectoire optimale allant de l'état A à l'état B, la portion terminale CB de cette trajectoire constitue la trajectoire optimale reliant l'état intermédiaire C à l'état final B (figure I.1) >>



*Figure I.1: Trajectoire optimale –principe de Bellman*

## *1.6.2 Principe du minimum de Pontriaguine*

Soit le système dynamique suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (\text{I.16})$$

avec le critère de performance suivant :

$$J = r_0(t_0, x_0, x_f, x_f) + \int_{t_0}^{t_f} Q(x(t), u(t), t) dt \quad (\text{I.17})$$

Soit  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_f$ , une commande admissible du problème (I.16) et (I.17), et  $x(t)$  la trajectoire correspondante à  $u(t)$ .

Pour que la commande  $u(t)$  et la trajectoire  $x(t)$  soient optimales, il est nécessaire d'introduire  $p(t)$  appelé le vecteur des variable adjointes et de l'intégrer dans le critère et de définir la nouvelle partie intégrale du critère comme suit :

$$H(x, u, p, t) = Q(t_0, x_0, x_f, x_f) + p^T f(x(t), u(t), t) \quad (\text{I.18})$$

Le principe du minimum de Pontriaguine énonce que la trajectoire optimale minimise le Hamiltonien du système

$$H^* = \min_u H \quad (\text{I.19})$$

Cette équation constitue l'expression du principe du minimum, généralement connu sous le nom de principe du maximum de Pontriaguine. Il est d'ailleurs facile de transformer le minimum en maximum en changeant le signe de l'Hamiltonien (I.18).

### **Remarque I.3**

Deux cas sont possibles en ce qui concerne la recherche du minimum de l'Hamiltonien

- a) le domaine  $\mathbf{U}$  des vecteurs de commandes admissibles contient un ou plusieurs minimums au sens mathématique du terme, c'est-à-dire tel que le gradient  $\nabla_u H$  de  $H$  par rapport à  $\mathbf{u}$  soit nul et que son jacobien soit défini positif

- b) Dans le cas contraire, il convient d'explorer la frontière du domaine U pour découvrir le minimum de H.

En faisant appel au calcul des variations, on définit un certain nombre d'équations permettant de résoudre le problème de commande optimale. Ces équations correspondent aux équations canoniques de Hamilton qui régissent les dynamiques de l'état et de l'état adjoint, et sont données par :

Pour l'état :

$$H_p = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{x} \quad (1.21)$$

Pour l'état adjoint :

$$H_x = \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p} \quad (1.22)$$

La solution de ces équations avec les conditions aux limites convenables, fournit la loi de commande optimale.

### ***1.7.Exemple illustratif :***

Afin d'utiliser toutes les étapes de la formulation mathématique d'un problème de commande optimale, citées auparavant, considérons l'exemple suivant

Soit un ward-léonard (Figure I.2) constitué d'une génératrice à courant continu G, entraînée à vitesse constante  $\Omega_0$ , qui alimente un moteur à courant continu M.

Le moteur entraîne une charge constituée en première approximation par une inertie pure J.L'inductance du moteur est alimenté sous une tension constante, et on négligera la réaction d'induit.

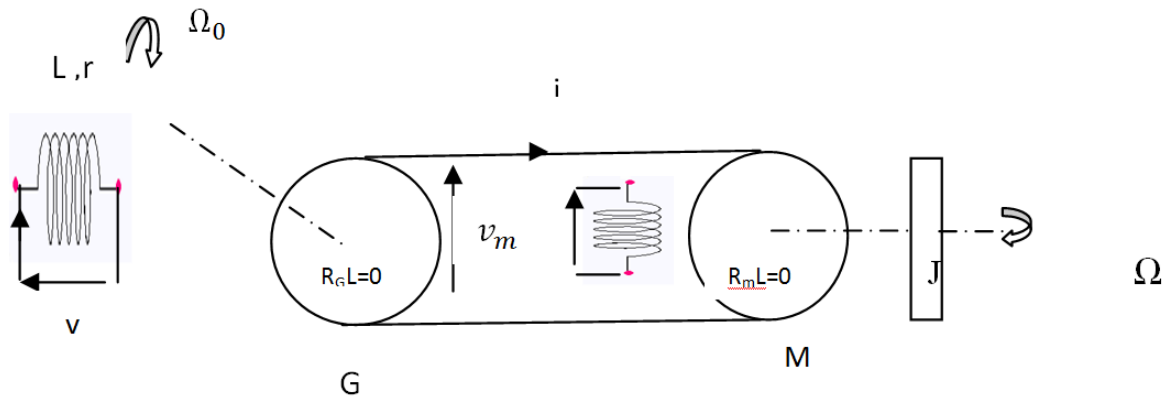


Figure I.2 ward-Leonard (moteur à courant continue indépendant)

On rappelle les équations régissant le fonctionnement du moteur et tenant compte des hypothèses simplificatrices :

- Equation électrique :  $v_m = R_m i + \epsilon$  ; avec  $R_m$  la résistance de l'induit, et  $\epsilon$  sa contre-réaction.
- Equation mécanique :  $J \frac{d\Omega}{dt} = C_m$  , où  $C_m$  est le couple moteur développé par la machine.
- $I$  : intensité du courant d'induit.
- $K$  : prémontrés caractéristique du moteur.

On suppose en premier opération que :

$$v_m = R_m i + \epsilon \dots \dots \dots (1)$$

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C_m \dots \dots \dots (2)$$

$$\epsilon = k\Omega$$

$$C_m = K i$$

Equation électrique :  $v_m = R_m i + \epsilon$

Devient :  $v_m = R_m i + k\Omega$

$$C_m = k i$$

avec

$$i = \frac{C_m}{K} = \left(\frac{J}{K}\right) \frac{d\Omega}{dt}$$

L'équation électrique devient :

$$v_m = \frac{(R_m \times J)}{K} \frac{d\Omega}{dt} + k\Omega$$

La commande

$$v_m(t) = v$$

1. Le modèle mathématique du système est :

$$\dot{\Omega} + \left( \frac{K^2}{(R_m \times J)} \right) \Omega = \frac{v_m \times (K)}{(R_m \times J)}$$

Sous forme d'état :

$$\dot{\Omega} = \frac{K^2}{(R_m \times J)} \Omega + \frac{K}{(R_m \times J)} v_m$$

2. Condition initiales :

Dans ce cas seul les conditions initiales sont imposées :

$$\Omega_0 = 0$$

Les contraintes :

$$0 < v_m < 220v$$

$$\Omega < 2000 \text{ rd/s}$$

3. Le critère imposé :

- poursuite + commande à énergie minimale

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [\Omega_f - \Omega]^T Q [\Omega_f - \Omega] dt + \int_{t_0}^{t_f} [v_m]^T R v_m dt$$

$$\Omega(0) = 0$$

## ***1.8 Conclusion***

Nous avons discuté dans ce chapitre de la commande optimale de manière générale. En effet on a mis en évidence la démarche à suivre pour la formulation du problème, de commande et les deux grandes méthodes utilisées pour la résolution du problème à savoir le principe de Bellman et le principe du minimum de Pontriaguine

Le chapitre suivant présentera de manière détaillé le principe du minimum de Pontriaguine.



### II.1 Introduction

Il existe deux grandes méthodes de résolution de problème de commande optimale :

- ✓ Le principe de minimum de Pontriaguine
- ✓ La programmation dynamique de Bellman.

Ces deux méthodes sont des extensions des méthodes variationnelles classiques.

Dans ce chapitre, on s'intéresse au principe du minimum énoncé par Pontriaguine en 1956, qui généralise les équations d'Hamilton- Pontriaguine et sa résolution par les méthodes des caractéristiques.

### II.2 Principe du minimum de Pontriaguine

La résolution du problème de commande optimale nécessite la résolution préalable d'un problème de maximum auxiliaire (d'où le terme principe de maximum (minimum)).

On considère toujours le problème énoncé dans (I.16)

Etant donnée un système décrit par l'équation d'état

$$\dot{x} = f(x, u, t) , \quad u \in U(t) \quad (\text{II.1})$$

Il s'agit de minimaliser la fonction de coût

$$J = \int_0^T q(x, u, t) dt \quad (\text{II.2})$$

Cependant en vertu du principe d'optimalité, nous devons avoir

$$\min_u \int_{\tau}^T q dt \quad 0 < \tau \leq T \quad (\text{II.3})$$

En désignant par  $\tau$  un instant intermédiaire quelconque, nous prendrons donc comme fonction de coût

$$J = \int_{\tau}^T q(x, u, t) dt \quad (\text{II.4})$$

Et noterons le coût minimal comme suit

$$J^*(x, \tau) = \min_u J \quad (\text{II.5})$$

On a, en particulier quelque soit  $x$  :

$$J^*(x, T) = 0, \quad \forall x \quad (\text{II.6})$$

Lorsque le principe d'optimalité est appliqué à un processus séquentiel pour lequel les étapes successives ont des durées infiniment courtes. Nous obtiendrons une équation aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi, dont la résolution au moyen de la méthode des caractéristiques nous conduira aux équations de Hamilton-pontriaguine. Ces dernières, assorties de conditions aux limites, permettent de déterminer la loi de commande optimale, soit seulement en fonction du temps (commande en boucle ouverte) soit en fonction du temps restant et de l'état actuel (commande en boucle fermée).

### ***II.3. Equation de Hamilton-Jacobi***

Considérons les deux intervalles de temps définis par les trois instants  $\tau$ ,  $(\tau + d\tau)$  et  $T$ . En vertu du principe de d'optimalité, nous devons avoir :

$$\begin{aligned} J^*(x, \tau) &= \min_u [q(x, u, \tau) d\tau + J^*(x + dx, \tau + d\tau)] \quad (\text{II.7}) \\ &= \min_u [q(x, u, \tau) d\tau + J^*(x, \tau) + dJ^*] \end{aligned}$$

Le second terme du crochet, qui ne dépend pas de  $u$  peut être extrait du crochet.

Il nous reste ainsi en divisant par  $d\tau$  :

$$0 = \min_u \left( q + \frac{dJ^*}{dt} \right). \quad (\text{II.8})$$

Soit encore

$$0 = \min_u \left( q + \frac{\partial J^*}{\partial \tau} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial J^*}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) \quad (\text{II.9})$$

Posant alors :

$$\frac{\partial J^*}{\partial \tau} = p_0 \quad \frac{\partial J^*}{\partial x_i} = p_i \quad (\text{II.10})$$

Les dérivées partielles  $p_i$  sont appelées variables adjointes et constituent les composantes du vecteur adjoint  $p$  qui n'est pas autre chose que le gradient de  $J^*$  par rapport au vecteur d'état :

$$p = \nabla_x J^* \quad (\text{II.11})$$

La dérivée partielle  $p_0$  ne dépend pas de  $u$  et peut donc être extraite de la quantité à minimiser, il vient ainsi :

$$\min_u \left( q + \sum_{i=1}^n p_i \dot{x}_i \right) + p_0 = 0 \quad (\text{II.12})$$

Suis encore :

$$\min_u (q + p^T \dot{x}) + p_0 = 0 \Rightarrow \quad (\text{II.13})$$

Cette équation aux dérivées partielles est appelée équation de Hamilton –Jacobi On peut encore simplifier l'écriture en définissant, par analogie avec la fonction Hamiltonienne de la mécanique analytique, la fonction appelée *Hamiltonien* ou fonction de Pontriaguine suivante :

$$H = q + p^T \dot{x} \Rightarrow \quad (\text{II.14})$$

Cet Hamiltonien est fonction de  $x$ ,  $p$  et  $u$ , et éventuellement de  $\tau$ .

L'équation de Hamilton-Jacobi est alors équivalente aux deux équations suivantes :

$$H^* = \min_u H \quad (\text{II.15})$$

$$H^* + p_0 = 0 \quad (\text{II.16})$$

### II.3.1 Exemple II.1

Considérons le double intégrateur décrit par [3] :

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u.$$

Prenons comme fonction de coût

$$J = \int_{\tau}^T (x_1^2 + \alpha u^2) dt, \quad \alpha > 0 \quad (\text{II.17})$$

En l'absence de contrainte sur  $u$ , l'Hamiltonien s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} H &= q + p_1 \dot{x}_1 + p_2 \dot{x}_2 \\ &= x_1^2 + \alpha u^2 + p_1 x_2 + p_2 u \end{aligned}$$

Il est minimale pour :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2pu + p_2 = 0 \quad (\text{II.18})$$

On vérifie en effet que la dérivée seconde est positive. La commande optimale est obtenue en résolvant l'équation (II.18) ce qui donne :

$$u^* = -\frac{p_2}{2\alpha} \quad (\text{II.19})$$

Après la résolution de l'équation de Hamilton –Jacobi, l'Hamiltonien minimal s'écrit :

$$H^* = x_1^2 + p_1 x_2 - \frac{p_2^2}{4\alpha} \quad (\text{II.20})$$

Cas d'une commande en temps minimal :

Considérons le même système avec le critère suivant :

$$J = \int_{\tau}^T 1 dt$$

Ce problème n'a de sens qu'en présence d'une contrainte telle que :

$$|u| \leq M$$

L'Hamiltonien s'écrit comme suit :

$$H = 1 + p_1 x_2 + p_2 u$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = p_2$$

Dans ce cas la commande est sur la frontière. Elle est donnée par :

$$u^* = -(\text{signe } p_2) M$$

On voit que, dans ce cas, la commande optimale est une commande par plus ou moins. Qui pourra être matérialisé au moyen d'un relais.

## ***II.4 Résolution de l'équation de Hamilton Jacobi par la méthode des caractéristiques***

### ***II.4.1 Rappel sur la méthode des caractéristiques***

Soit l'équation aux dérivées partielles [3] :

$$F(y, x_i, y_i) = 0 \quad (\text{II.21})$$

Avec

$$p_i = \partial y / \partial x_i \quad \text{avec} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (\text{II.22})$$

On démontre que  $y$ ,  $x_i$  et  $p_i$  satisfont le système différentiel ordinaire suivant :

$$\frac{dx_i}{\frac{\partial F}{\partial p_i}} = \frac{dy}{\sum_{j=0}^n p_j \frac{\partial F}{\partial p_j}} = \frac{-dp_i}{\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial y}} \quad (\text{II.23})$$

### II.4.2 Equations de Hamilton-Pontriaguine

Dans le cas de l'Equation (II.16), nous avons :

$$x_0 = \tau, \quad y = J^*, \quad F = H^* + p_0$$

On voit immédiatement que :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p_0} = 1 \quad (\text{II.24})$$

Explicitons alors  $x_0 = \tau$  et  $p_0$  :

$$d\tau = \frac{dx_i}{\frac{\partial F}{\partial p_i}} = \frac{-dp_i}{\frac{\partial F}{\partial x_i}} = \frac{dy}{p_0 + \sum_{j=0}^n p_j \frac{\partial F}{\partial p_j}} \quad (\text{II.25})$$

Pour calculer les dérivées partielles  $\partial F / \partial x_i$  et  $\partial F / \partial p_i$ , il convient de considérer  $H^*$  comme une fonction de  $x$ ,  $p$  et  $u^*$

$$H^* = H(x, u^*, p, t) \quad (\text{II.26})$$

Nous avons alors :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial H^*}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial H^*}{\partial u_j^*} \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \quad (\text{II.27})$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = \frac{\partial H^*}{\partial p_i} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial H^*}{\partial u_j^*} \frac{\partial u_j^*}{\partial p_i}$$

Montrons que les deux sommes sont nulles. En effet, de deux choses l'une :

a) Si  $u^*$  est à l'intérieur du domaine  $U$ , on a, pour tout  $j$  :

$$\partial H^* / \partial u_j^* = 0. \quad (\text{II.28})$$

b) Si  $u^*$  est sur la frontière de  $U$ , elle est constante ou fonction seulement du temps, de sorte que :

$$\partial u^* / \partial \bar{x}_j = \partial u^* / \partial p_i = 0 \quad (\text{II.29})$$

Dans les deux cas, les sommes figurant dans les dérivées partielles écrites plus haut sont nulles, et l'on peut écrire en particulier :

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H^*}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H^*}{\partial x_i} \quad (\text{II.30})$$

Soit encore, d'une manière plus condensée :

$$\dot{x} = \nabla_p H^* \quad , \quad \dot{p} = -\nabla_x H^* \quad (\text{II.31})$$

Ces équations constituent les équations de Hamilton-Pontriaguine. Leur solution, avec des conditions aux limites convenables, fournira la loi de commande optimale. Il est évident que la première n'est pas autre chose que l'équation d'état avec  $u = u^*$ .

$$\dot{x} = f(x, u^*, t)$$

Le systèmes (II.25) nous fournit encore les deux équations suivantes appelées équations complémentaires :

$$\dot{p} = -\frac{\partial H^*}{\partial \tau} - \sum_{j=1}^m \frac{\partial H^*}{\partial \bar{u}_j} u^* \quad (\text{II.32})$$

$$J^* = p_0 + \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial H^*}{\partial \bar{p}_j}$$

### II.4.3 Exemple II.2

Pour le système suivant :

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u$$

Avec le critère

$$J = \int x_1^2 + \alpha u^2 dt \quad (\text{II.33})$$

Nous avons trouvé plus haut que

$$H^* = x_1^2 + p_1 x_2 - \frac{p_2^2}{4\alpha}, \text{ et } u^* = -p_2 / 2\alpha \quad (\text{II.34})$$

D'où les équations de Hamilton-Pontriaguine suivantes :

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -p_2 / 2\alpha = u^* \quad (\text{II.35})$$

$$\dot{p}_1 = -2x_1, \quad \dot{p}_2 = -p_1 \quad (\text{II.36})$$

Et les équations complémentaires sont :

$$\dot{p}_0 = 0, \quad (\text{II.37})$$

$$J^* = p_0 + p_1 x_2 - p_2^2 / 2\alpha. \quad (\text{II.38})$$

### II.3.3 Conditions aux limites

Le système différentiel de Hamilton -Pontriaguine est d'ordre  $2n$  ( $n$  est l'ordre du système). Les  $2n$  conditions aux limites nécessaires à sa résolution se partagent entre l'instant initial et l'instant final.

#### 1-Etat initial :

Deux cas doivent être distingués :

- a) Dans un problème de commande en chaine ouverte, on connaît naturellement l'état initial  $x(0)$ .
- b) Dans un problème de commande en boucle fermée, on connaît l'état courant à tout instant  $x(t), 0 \leq t \leq T$ , que l'on suppose donc mesurable directement ou indirectement.

#### 2-Etat final :

Nous avons vu qu'à l'instant final :

$$J^*[x(T), T] = 0$$

Quel que soit l'état final  $x(T)$ , on a donc pour  $t=T$  :

$$\sum \frac{\partial J^*}{\partial x_i} dx_i = 0 \quad (\text{II.39})$$

Soit

$$\sum p_i dx_i = 0 \quad (\text{II.40})$$

.Deux cas sont alors à distinguer :

- ✓ **Etat final imposé** :  $dx_i = 0$ , de sorte que l'équation(II.40) est satisfaite.
- ✓ **Etat final libre** : pour satisfaire l'équation (II.40), on doit avoir :

$$p_i(t) = 0 \quad \text{Soit} \quad p(T)=0.$$

### *II.4 Conclusion*

Dans ce chapitre nous avons présenté le principe de minimum de Pontriaguine. Le principe du minimum consiste à résoudre un certain ensemble d'équations différentielles constituant les conditions d'optimalité.

Dans le chapitre suivant, on y trouve les définitions de quelques méthodes de résolution des équations différentielles ordinaires et on présente la méthode d'itération variationnelle permettant de résoudre itérativement une équation différentielle. Cette méthode sera exploitée par la suite pour l'identification des variables adjointes.





### ***III.1 Introduction***

La méthode d'itération Variationnelle (VIM) a été développée par le mathématicien chinois Ji-Huan He au début des années 1990. Cette méthode a été utilisée par beaucoup de chercheurs dans une variété de champs scientifiques et peut résoudre les problèmes non linéaires. Elle a été proposée la première fois pour résoudre des problèmes en mécanique quantique. La méthode est basée sur la détermination du multiplicateur de Lagrange de façon optimale par l'intermédiaire de la théorie de calcul de variations.

Le but de ce chapitre est de présenter la méthode des itérations variationnelle et l'utilisation de cette dernière pour la résolution des équations différentielles ordinaires.

### ***III.2 Equations différentielles ordinaires (EDOs)***

Une équation différentielle, en mathématique, est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de différenciation auquel une des fonctions inconnues a été soumise

Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques, biologiques, etc. Par conséquent, les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

#### ***III.2.2 Définition des équations différentielles ordinaires***

Une équation différentielle ordinaire, également noté EDO, D'ordre  $n$  est une relation entre une fonction inconnu (solution recherché)  $y(t)$  et ses dérivées  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  donnée par :

$$F(t, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\text{III.1})$$

Où  $F$  n'est pas indépendant de sa dernière variable  $y^{(n)}$ . On prendra  $t$  dans un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  ( $I$  peut être  $\mathbb{R}$  tout entier) et  $y$  une fonction de  $t$  c'est-à-dire

$$t \in I \subset \mathbb{R}$$

La résolution de cette équation permet de déterminer la fonction continue  $y(t)$  qui vérifie l'équation différentielle ordinaire.

Un bon exemple de l'équation différentielle ordinaire reste la *Relation Fondamentale de la Dynamique*, permettant de définir la position, la vitesse et l'accélération d'un corps solide indéformable dans un système Newtonien. Cette équation est donnée comme suit :

$$\frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \sum \vec{F}$$

Où

$m$ : Masse

$v$ : Vitesse

$\vec{F}$ : Force

### ***III.3 Résolution numérique des équations différentielles ordinaires***

Il existe plusieurs méthodes pour la résolution des équations différentielles : les méthodes analytiques et les méthodes numériques.

#### ***III.3.1 Méthode analytique***

Cette méthode est possible que pour certaines EDOs ayant une forme particulière. Par exemple, les équations différentielles du premier ordre ou de second ordre linéaires. La résolution consiste à faire des manipulations mathématiques suivies des intégrations ordinaires ou par partie.

**Exemple III.1**

a) soit l'équation différentielle du premier ordre  $-2y + \dot{y} = 0$

$$\dot{y} = 2y$$

$$\frac{\dot{y}}{y} = 2$$

$$\int \frac{\dot{y}}{y} dt = \int 2 dt$$

$$\ln y(t) = 2t + c$$

$$y(t) = e^{2t+c} = ke^{2t}$$

**Exemple III.2**

Cas des équations différentielles du deuxième ordre sans second membre

Soit l'équation différentielle de second ordre suivant :

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$$

Son équation caractéristique  $a\gamma^2 + b\gamma + c = 0$  (III.2)  $\Delta = b^2 - 4ac$

\*si  $\Delta=0$  donc (III.2) admet une seule solution  $\gamma$

Donc l'ensemble des solutions est de la forme  $f(x) = (\alpha x + b)e^{\gamma x}$   $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$

\*si  $\Delta > 0$  (III.2) admet deux solutions  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  donc l'ensemble des solutions est

de la forme  $f(x) = \alpha e^{\gamma_1 x} + \beta e^{\gamma_2 x}$   $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$  :

\*si  $\Delta < 0$  (III.2) admet deux solutions complexe  $\gamma_1 = \alpha + i\beta$  et  $\gamma_2 = \alpha - i\beta$

Donc l'équation admet pour ensemble de solution de la forme  $f(x) = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$

**Exemple III.3**

Soit l'équation différentielle  $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0$ . L'équation caractéristique est  $\eta^2 + 4\eta + 4 = 0 \Leftrightarrow \eta = -2$

D'où  $f(x) = (\alpha x + \beta)e^{-2x}$

Soit l'équation différentielle suivante :

$$2) \ddot{y} + 4y = 5e^x + 4x + 4$$

L'équation caractéristique  $\eta^2 + 4 = 0$  admet deux solutions complexes

$$\eta_1 = 2i \text{ et } \eta_2 = -2i$$

Donc  $f(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$

Cherchons une solution particulière  $f_0(x) = Ae^x + Bx + c$  donc  $\dot{f}_0(x) = Ae^x + B$

$$\ddot{f}_0(x) = Ae^x \quad \text{Donc } \ddot{f}_0(x) + 4f_0(x) = 5e^x + 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow Ae^x + B + 4e^x + 4Bx + 4c = 5e^x + 4x + 4 \text{ donne}$$

$$A=1 ; B=1 \text{ et } c=0$$

D'où  $f(x) = (A \cos 2x + B \sin 2x) + e^x + 1$

Les méthodes analytique ne sont pas suffisantes pour résoudre les problèmes d'équations différentielles et ne sont possibles que dans un nombre de cas très restreints.

La résolution de la plupart des équations différentielles requiert donc l'utilisation des méthodes numériques. Ces méthodes peuvent être appliquées à la résolution de la plupart des équations différentielles, parmi ces méthodes on citera quelques une dans ce qui suit.

**III.3.2 Méthodes Numériques****III.3.2.1 Méthode d'Euler**

En mathématiques, la méthode d'Euler, du mathématicien Leonhard Euler (1707-1783), est une procédure numérique pour résoudre par approximation des équations différentielles du premier ordre munie d'une condition initiale. C'est la plus ancienne et la plus simple des méthodes de résolution numérique des équations différentielles ordinaires. Toutefois, elle est relativement peu utilisée en raison de sa faible précision.

La résolution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Conduit au schéma suivant :

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h \\ y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

En pratique, la méthode d'Euler n'est pas utilisée car elle n'offre pas une précision suffisante. Cette méthode est convergente de 1<sup>er</sup> ordre car l'erreur de consistance (de troncature ou de discrétisation) est la différence entre la valeur discrétisée et la valeur exacte) vaut :

$$|y(t_i) - y_i| = \frac{1}{2} h^2 f'(c, y_i), \text{ Avec } c \in [t_{i-1}, t_i] \quad (\text{III.5})$$

Mais cette méthode dite explicite est souvent instable c'est le cas si la fonction est linéaire, par exemple :

$$\dot{y} = f(t, y) = -ay \text{ Avec } a > 0$$

Le schéma d'Euler est :

$$y_{i+1} = y_i - ah y_i = (1 - ah) y_i$$

Est instable dès que  $h > \frac{2}{a}$ , car dans ce cas  $y_i$  tend vers l'infini lorsque  $i$  tend vers l'infini.

### III.3.2.2 Méthode de Runge-Kutta

Carl Runge (1856-1927) et Martin Kutta (1867-1944) ont proposé de résoudre le problème de Cauchy suivant [5] :

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à la méthode de Runge-Kutta uniquement d'ordre 4.

Algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4

- i. Etant donné un pas de temps  $h$ , une condition initiale  $(t_0, y_0)$  et un nombre maximal d'itérations  $N$
- ii. Pour  $0 \leq i \leq N$  :

$$K_1 = hf(t_i, y_i)$$

$$K_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$K_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$K_4 = hf(t_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$t_{i+1} = t_i + h$$

Ecrire  $t_{i+1}$  et  $y_{i+1}$

- iii. L'itération se termine quand  $i + 1 = N$ .

**Remarque III.1**

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est très fréquemment utilisée car elle nous permet d'obtenir des résultats d'une grande précision. En fait plus l'ordre d'une méthode est élevée, plus elle devient plus précise.

**III.4 Description de la méthode d'itération variationnelle (VIM)**

Dans cette partie, on présente les différentes étapes à suivre pour illustrer les concepts de base de la méthode de VIM.

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$L(y) + N(y) = g(t) \quad (\text{III.6})$$

Où  $L$  est un opérateur Linéaire,  $N$  est un opérateur non linéaire et  $g(t)$  est une fonction connue.

Nous pouvons construire une correction fonctionnelle selon la méthode itérative variationnelle suivante : [6]

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau) \{ Ly(\tau) + N\tilde{y}_n(\tau) - g(\tau) \} d\tau, \quad (\text{III.7})$$

Avec  $\lambda$  est le multiplicateur général de Lagrange l'indice  $n$  représente la  $n^{ieme}$  approximation.

$\tilde{y}_n(\tau)$  est considéré comme une variation restreinte c'est-à-dire  $\delta\tilde{y}_n(\tau) = 0$  afin d'identifier approximativement le multiplicateur de Lagrange.

Ainsi, la variation de (III.7) est

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau) \{ Ly_n(\tau) + N\tilde{y}_n(\tau) - g(\tau) \} d\tau. \quad (\text{III.8})$$

Etant donné que le terme non linéaire  $\tilde{y}_n$  est considéré comme une variation restreinte  $\delta\tilde{y}_n(\tau) = 0$ , alors l'équation (III.8) devient

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau) \{Ly_n(\tau) - g(\tau)\} d\tau \quad (\text{III.9})$$

Les itérations sont exécutées jusqu'à ce qu'on atteigne la convergence

$$y_{n+1}(t) \approx y_n(t)$$

Cette extrême condition sur  $\delta y_{n+1}(t)$  exige que

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau) \{Ly_n(\tau) - g(\tau)\} d\tau = 0 \quad (\text{III.10})$$

En générale le multiplicateur de Lagrange peut être aisément identifié en utilisant les conditions stationnaires de l'équation précédente et cela après l'intégration par partie.

- Dans le cas d'une équation de premier et second ordre, l'intégration donne

$$\int \lambda(\tau) y_n'(\tau) d\tau = \lambda(\tau) y_n(\tau) - \int \lambda'(\tau) y_n(\tau) d\tau \quad (\text{III.11})$$

$$\int \lambda(\tau) y_n''(\tau) d\tau = \lambda(\tau) y_n'(\tau) - \int \lambda'(\tau) y_n'(\tau) d\tau + \int \lambda''(\tau) y_n(\tau) d\tau$$

Une fois le multiplicateur de Lagrange est identifié, on choisit une fonction sélective  $y_0(t)$  qu'on remplace dans la fonctionnelle (III.7) pour pouvoir calculer par la suite Les itérations successives  $y_{n+1}(t)$  pour  $n \geq 0$

### ***III.5 Application de VIM pour les Equations différentielles ordinaires***

#### **III.5.1 Exemple illustratif 1**

Considérons l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 suivante [6] :

$$y' + p(\tau)y = q(\tau)$$

$$y(0) = \alpha$$

La correction fonctionnelle selon VIM de cette équation donne :

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau) [y'_n(\tau) + p(\tau)\tilde{y}_n(\tau) - q(\tau)] d\tau \quad (\text{III.12})$$

Où  $\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange qui dans cette méthode peut être une constante ou une fonction.  $\tilde{y}_n(\tau)$  est une valeur restreinte d'où  $\delta\tilde{y}_n(\tau) = 0$ .

En considérant la variation des deux cotés de (III.12), on obtient

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau) [y'_n(\tau) + p(\tau)\tilde{y}_n(\tau) - q(\tau)] d\tau$$

Comme  $\delta\tilde{y}_n(\tau) = 0$  et  $\delta q(\tau) = 0$ , alors

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau) \dot{y}_n(\tau) d\tau$$

En intégrant, il vient :

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \delta \lambda y_n(t) - \delta \int_0^t \dot{\lambda} y_n(\tau) d\tau,$$

Qui est équivalente à

$$\delta y_{n+1} = \delta(1 + \lambda|_{\tau=x}) y_n - \delta \int_0^t \dot{\lambda} y_n(\tau) d\tau, \quad (\text{III.13})$$

La stationnarité d'un  $y_{n+1}$  exige que  $\delta y_{n+1} = 0$ . Cela veut dire que le coté gauche de (III.13) est égal à 0,

En conséquence le coté droit devrait être aussi 0. Cela donne les conditions de stationnarité:

$$\begin{cases} 1 + \lambda|_{\tau=x} = 0 \\ \dot{\lambda}|_{\tau=x} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

Qui donne  $\lambda = -1$ . Substituant cette valeur du multiplicateur de Lagrange dans (III.12) on obtient la formule itérative suivante :

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t [y'_n(\tau) + p(\tau)y_n(\tau) - q(\tau)] d\tau \quad (\text{III.15})$$

Etant donné  $y(0) = \alpha$ , nous pouvons prendre la première approximation de  $y_0 = \alpha$ . Nous obtenons les approximations successive suivantes :

$$y_0(t) = \alpha.$$

$$y_1(t) = y_0(t) - \int_0^t [y'_0(\tau) + p(\tau)y_0(\tau) - q(\tau)] d\tau.$$

$$y_2(t) = y_1(t) - \int_0^t [y'_1(\tau) + p(\tau)y_1(\tau) - q(\tau)] d\tau$$

$$y_3(t) = y_2(t) - \int_0^t [y'_2(\tau) + p(\tau)y_2(\tau) - q(\tau)] d\tau$$

⋮            ⋮

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) - \int_0^t [y'_n(\tau) + p(\tau)y_n(\tau) - q(\tau)] d\tau$$

Considérons  $p(\tau) = -1$ ,  $q(\tau) = e^x$ ,  $\alpha = 0$  et  $\lambda = -1$  et aussi  $y_0=0$ .

Alors nous avons les approximations successive suivantes :

$$y_0(t) = 0.$$

$$y_1(t) = y_0(t) - \int_0^t [y'_0(\tau) + y_0(\tau) - e^t] d\tau = e^t - 1.$$

$$y_2(t) = y_1(t) - \int_0^t [y'_1(\tau) + y_1(\tau) - e^t] d\tau = 2e^t - t - 2$$

$$y_3(t) = y_2(t) - \int_0^t [y'_2(\tau) + y_2(\tau) - e^t] d\tau = 3e^t - 2t - \frac{1}{2}t^2 - 3$$

$$y_4(t) = y_4(t) - \int_0^t [y'_3(\tau) + y_3(\tau) - e^t] d\tau = 4e^t - 3t - t^2 - \frac{1}{6}t^3 - 4$$

⋮            ⋮

Par l'utilisation de développement de Taylor de  $e^t$  au voisinage de zéro, la solution exacte de l'équation peut être obtenue à partir des solutions approximées  $y_0(t), y_1(t), y_2(t), \dots$  comme suit :

$$\begin{aligned}
 y(t) &= (e^t - 1) + (2e^t - t - 2) + \left(3e^t - 2t - \frac{1}{2} - 3\right) + \dots \\
 &= t(1 + t + \frac{1}{2!} t^2 + \frac{1}{3!} t^3 + \frac{1}{4!} t^4 + \dots)
 \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$y(t) = te^t$$

On remarque que la VIM permet de déterminer la solution exacte pour cette exemple.

### III.5.2 Exemple illustratif (2)

Soit l'EDO du premier ordre non linéaire suivante [1] :

$$\dot{y} + y^2 = 1$$

$$y(0) = 0$$

La fonctionnelle de correction de l'équation différentielle est

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau) (\dot{y}_n(\tau) + \tilde{y}_n^2(\tau) - 1) d\tau$$

Où  $\tilde{y}$  est une variable restreinte avec  $\delta\tilde{y}_n = 0$ .

$$\Rightarrow \delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau) (\dot{y}_n(\tau) - 1) d\tau$$

La condition de stationnarité de  $y_{n+1}$  exige

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \int_0^t \delta \lambda(\tau) (\dot{y}_n(\tau) - 1) d\tau = 0.$$

Après l'intégration par partie, on obtient les conditions de stationnarités suivantes

$$\begin{cases} 1 + \lambda(\tau)|_{s=x} = 0 \\ \lambda'(\tau) = 0 \end{cases}$$

La résolution de ces conditions donne

$$\lambda(\tau) = -1$$

En introduisant la valeur de  $\lambda(\tau)$  dans la fonctionnelle de correction, on obtient la formule

Itérative suivante :

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) - \int_0^t (\dot{y}_n + y_n^2 - 1) d\tau = 0$$

En prenant comme solution de départ la condition initiale

$$y_0(t) = y(0) = 0$$

Les approximations consécutives de la solution sont obtenues comme suit

$$y_1(t) = 0 - \int_0^t (\dot{y}_0(\tau) + y_0^2(\tau) - 1) d\tau = t$$

$$y_2(t) = t - \int_0^t (\dot{y}_1(\tau) + y_1^2(\tau) - 1) d\tau = t - \frac{1}{3}t^3$$

$$y_3(t) = t - \frac{1}{3}t^3 - \int_0^t (\dot{y}_2(\tau) + y_2^2(\tau) - 1) d\tau = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{1}{63}t^7$$

$$y_4(t) = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{1}{63}t^7 - \int_0^t (\dot{y}_3(\tau) + y_3^2(\tau) - 1) d\tau = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{1}{63}t^7$$

+.....

$$y_n(t) = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{1}{63}t^7 + \frac{62}{2835}t^9 + \dots$$

Par conséquent la solution exacte est

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = \tanh(t)$$

### ***III.6 Illustration graphique de la convergence de VIM***

Nous avons utilisé le logiciel MATLAB afin de comparer entre les trois (03) méthodes proposées dans ce chapitre et dans le but de montrer les capacités de la méthode d'itération variationnelle.

### III.6.1 Graphes représentant la méthode numérique et la méthode analytique

La figure III.1 donne les deux solutions obtenues analytiquement et numériquement en utilisant la méthode de Runge-Kutta. On remarque que la méthode de Runge-Kutta détermine la solution avec une très grande précision.

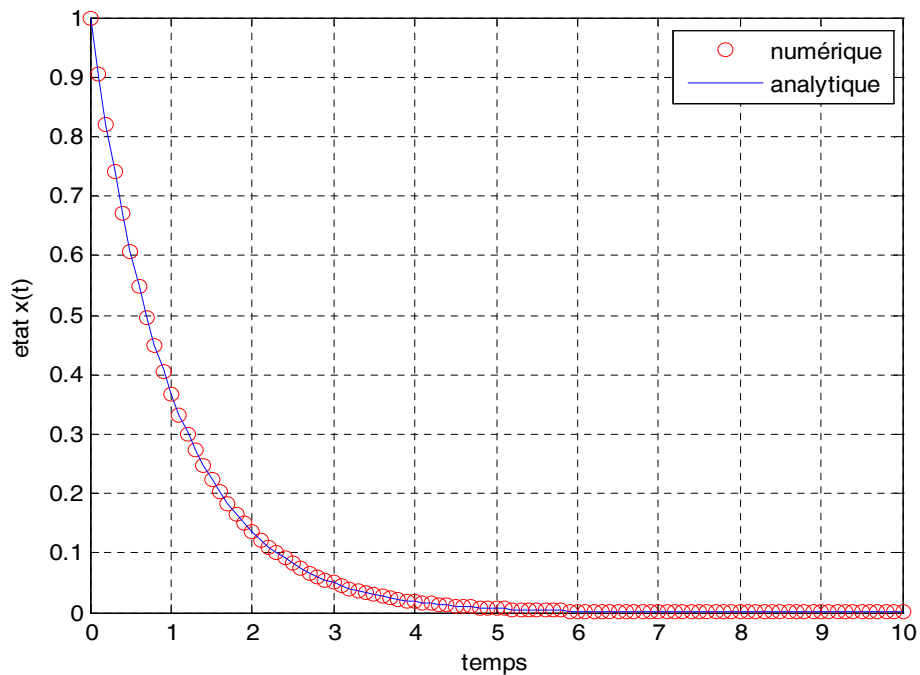
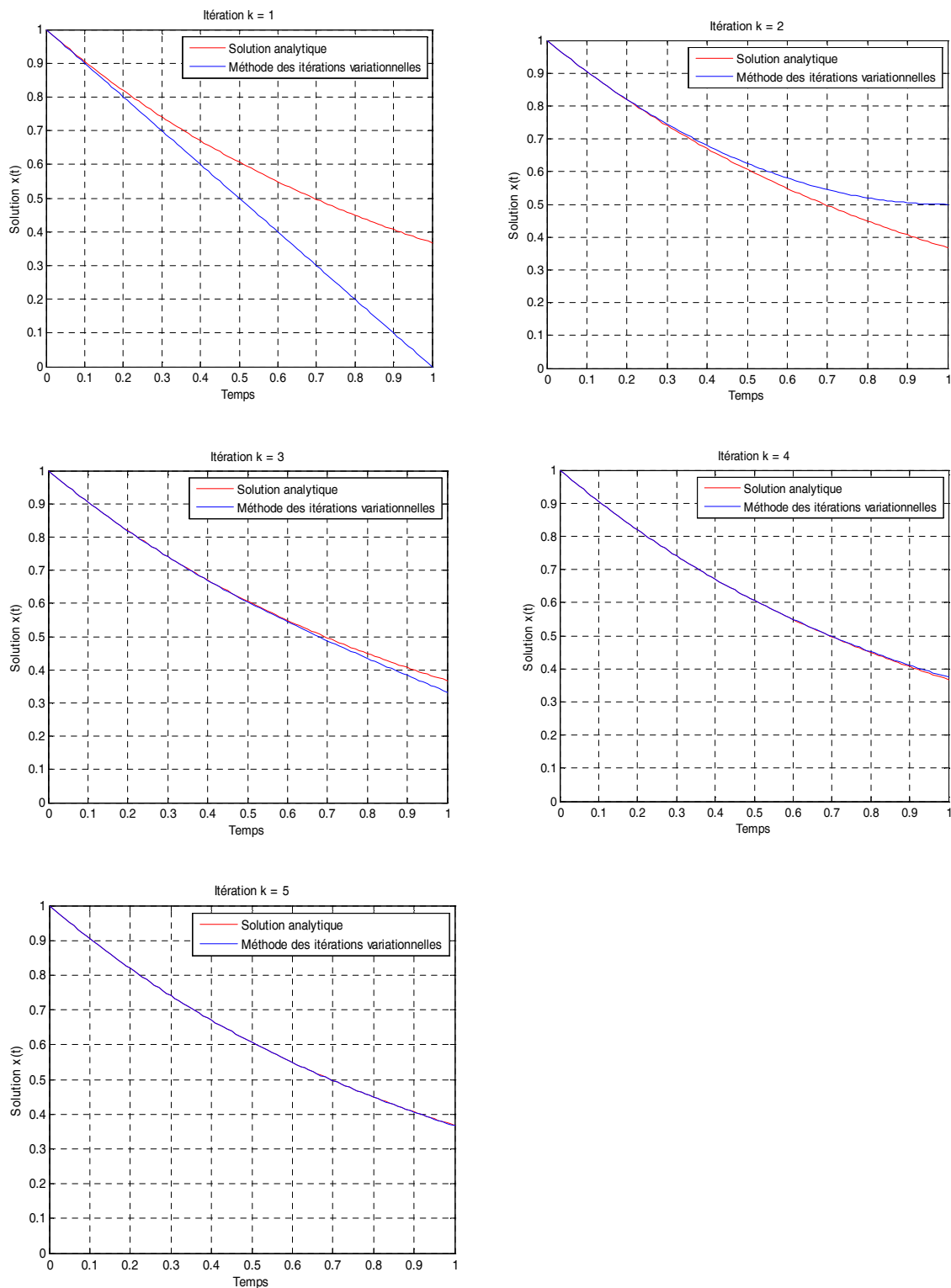


Figure III.1 : Comparaison entre la solution analytique et la solution numérique

### III.6.2 Graphes représentant la méthode exacte et la méthode d'itération variationnelle (VIM)

Dans ce test, on va calculer la solution avec VIM puis comparer avec la solution analytique. A chaque itération, on représente les deux solutions.



**Figure III.2 :** Comparaison entre la solution approximée trouvée par la méthode de VIM et la solution exacte trouvée analytiquement

La figure III.2 démontre que la solution approximée trouvée par la méthode d'itération variationnelle (VIM) à la 5<sup>ème</sup> itération correspond avec celle trouvée analytiquement.

### ***III.7 Conclusion***

Dans ce chapitre, on a présenté des généralités sur les équations différentielles ordinaires (EDO). Nous avons exposé par la suite le principe de la méthode d'itérations variationnelle, utilisée pour la résolution de ces équations en utilisant des formules itératives.

Le principe de cette méthode de résolution consiste à écrire une formule itérative, appelée fonctionnelle de correction, qui permet de calculer des solutions approximatives de la solution de l'équation différentielle. Cette méthode introduit un multiplicateur de Lagrange qui doit être identifié en écrivant les conditions de stationnarité de la fonctionnelle.

La méthode d'itération variationnelle a été illustrée par quelques exemples d'applications, Tous les exemples démontrent l'efficacité de la méthode dans la résolution de divers types d'équations différentielles ordinaires et sa convergence vers les solutions analytiques.

Dans le chapitre suivant, cette méthode sera adoptée pour la recherche de la solution d'un problème de commande optimale principalement l'initialisation du vecteur des variables adjointes.



### ***IV.1 Introduction***

Le principe du minimum de Pontriaguine est un classique de la commande optimale et se trouve souvent utilisé dans la résolution des problèmes de celle-ci, cependant lors de son utilisation aux applications où les vecteurs adjoints sont indisponibles son utilisation demeure délicate.

Dans ce chapitre, on propose d'utiliser la méthode VIM pour la résolution des problèmes de contrôle optimale en suivant l'approche proposée [10]. Il s'agit d'identifier les conditions initiales pour les variables adjointes. L'efficacité et la convergence de cette méthode seront illustrées par quelques exemples d'applications.

### ***IV-2 Algorithme de résolution d'un problème de commande optimale par la méthode d'itération variationnelle***

L'algorithme ci-dessous récapitule les étapes à suivre pour résoudre un problème de commande optimale par la méthode VIM en utilisant le principe de minimum [10]

**Etape 1** : Définir le Hamilton  $H(x(t), p(t), u(t), t)$  ;

**Etape 2** : déterminer l'expression de la loi de commande optimale  $u^*(t)$  ;

**Etape 3** : définir  $H^*(x(t), p(t), t)$  en remplaçant la loi de commande optimale  $u^*(t)$  obtenue ;

**Etape 4** : Définir les conditions d'optimalités  $\dot{x}(t)$  et  $\dot{p}(t)$  ;

**Etape 5** : Identifier les vecteurs du multiplicateur de Lagrange  $\lambda_x(t)$  et  $\lambda_p(t)$  ;

**Etape 6** : pour  $n = 0$ ,  $x^0(t) = x(0)$  et  $p^0(t) = \theta$  où  $\theta$  est un vecteur de constante inconnue à déterminer par une procédure d'itérations ;

**Etape 7 :** calculer  $x^{(n+1)}$  et  $p^{(n+1)}$ . Les intégrales peuvent être évaluées soit analytiquement ou numériquement en fonction de la complexité des équations de Hamilton – Pontriaguine.

**Etape 8 :** déterminer  $\theta = p^{(n)}(0)$  soit en imposant la condition selon la nature de l'état final, qui peut être fixe ou libre. Si il n'y a pas de solution pour  $\theta$  passez à l'étape 7, sinon passez à l'étape 9 ;

**Etape 9 :** Évaluer le critère de performance  $J^{(n)}$ , pour toutes les solutions possibles, et garder la solution qui donne la valeur minimal pour  $J$

### ***IV.3 Exemples d'applications***

Pour illustrer l'utilisation de la méthode de VIM pour la résolution d'un problème de commande optimale, on présente dans cette section quelques exemples illustratifs. Pour les exemples ayant une solution analytique, on utilise d'abord la méthode du principe du minimum pour déterminer la solution exacte puis de comparer le résultat avec celui trouvé avec VIM.

#### ***Exemple IV.1***

***Cas ou l'état final est imposé :***

Soit le problème de commande optimale suivant [10] :

$$\max_{u(t)} J = \frac{1}{2} \int_0^2 [x_1(t) + u(t)]^2 dt$$

Sujet à :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + u(t),$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad x(2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

✓ **Principe du minimum de Pontriaguine :**

On définit l'Hamiltonien comme suit :

$$H(x(t), u(t), \lambda(t)) = L(x(t), u(t)) + \sum_{i=0}^n p_i(t) \dot{x}_i(t)$$

On aura :

$$\begin{aligned} H(x(t), u(t), \lambda(t)) &= \frac{1}{2}(x_1(t) + u(t))^2 + p_1(t) \dot{x}_1(t) + p_2(t) \dot{x}_2(t) \\ &= \frac{1}{2}(x_1(t) + u(t))^2 + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)(x_1(t) + u(t)) \end{aligned}$$

La commande optimale

$$\nabla_{u(t)} H(x(t), u(t), p(t)) = -(x_1(t) + u(t)) + p_2(t) = 0$$

$$u^* = -x_1(t) + p_2(t)$$

En remplaçant l'équation de la commande optimale  $u^*(t)$  dans l'équation d'Hamilton, on aura

$$\begin{aligned} H^* &= H(x(t), u^*(t), p(t)) \\ &= \frac{1}{2}(x_1(t) + (-x_1(t) + p_2(t)))^2 + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)(x_1(t) + (-x_1(t) + p_2(t))) \\ H^* &= H(x(t), u^*(t), p(t)) = \frac{1}{2}p_2(t)^2 + p_1(t)x_2(t) \end{aligned}$$

Equations d'Hamilton- Pontriaguine

Equations d'états:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{\partial H^*}{\partial p_1(t)} = x_2(t) \quad (\text{IV.1})$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{\partial H^*}{\partial p_2(t)} = p_2(t) \quad (\text{IV.2})$$

Equations d'états adjointes:

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x_1(t)} = 0 \quad (\text{IV.3})$$

$$\dot{p}_2(t) = -\partial \frac{H^*}{x_2(t)} = -p_1(t) \quad (\text{IV.4})$$

Détermination de la solution analytiquement :

$$(\text{IV.3}) \Rightarrow p_1(t) = c_1$$

$$(\text{IV.4}) \Rightarrow p_2(t) = c_1 t + c_2$$

$$(\text{IV.2}) \Rightarrow x_2(t) = -\frac{c_1}{2} t^2 + c_2 t + c_3$$

$$(\text{IV.1}) \Rightarrow x_1(t) = -\frac{c_1}{6} t^3 + \frac{c_2}{2} t^2 + c_3 t + c_4$$

En imposant les conditions initiales, il vient

Pour  $t=0$

$$x_1(0) = c_4 = 0$$

$$x_2(0) = c_3 = 0$$

Pour  $t=2$

$$x_1(2) = -\frac{4}{3} c_1 + 2c_2 = 2$$

$$x_2(2) = -2c_1 + 2c_2 = 1$$

La résolution de ce système d'équation conduit à la solution suivante:

$$c_1 = \frac{3}{2} \text{ et } c_2 = 2$$

Par conséquent la commande optimale est :

$$u^* = 2 - \frac{3}{2} t - t^2 + \frac{1}{4} t^3$$

Résolution par la méthode VIM :

Les fonctions correctionnelles des équations d'Hamilton-Pontriaguine sont :

$$x_1^{(n+1)}(t) = x_1^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_x (\dot{x}_1^{(n)}(t) - x_2^{(n)}(t)) dt ,$$

$$x_2^{(n+1)}(t) = x_2^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_x (\dot{x}_2^{(n)}(t) + p_2^{(n)}(t)) dt ,$$

$$p_1^{(n+1)}(t) = p_1^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_p \dot{p}_1^{(n)}(t) dt$$

$$p_2^{(n+1)}(t) = p_2^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_p (\dot{p}_2^{(n)}(t) + p_1^{(n)}(t)) dt ,$$

Prenons la variation de ces équations précédente :

$$\delta x_1^{(n+1)}(t) = \delta x_1^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda_x (\dot{x}_1^{(n)}(t) - x_2^{(n)}(t)) dt ,$$

$$\delta x_2^{(n+1)}(t) = \delta x_2^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda_x (\dot{x}_2^{(n)}(t) + p_2^{(n)}(t)) dx ,$$

$$\delta x_1^{(n+1)}(t) = \delta p_1^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda_p \dot{p}_1^{(n)}(t) dt$$

$$x_1^{(n+1)}(t) = \delta p_2^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda_p (\dot{p}_2^{(n)}(t) + p_1^{(n)}(t)) dx$$

En intégrant par partie nous obtenons :

$$\delta x_1^{(n+1)}(t) = \delta x_1^{(n)}(t) + \lambda_x \delta x_1^{(n)}(t) - \int_0^t \lambda \delta x_1^{(n)}(t) dt - \int_0^t \lambda_1 \delta x_2^{(n)}(t) dt ,$$

$$\delta x_2^{(n+1)}(t) = \delta x_2^{(n)}(t) + \lambda_x \delta x_2^{(n)}(t) - \int_0^t \lambda \delta x_2^{(n)}(t) dt + \int_0^t \lambda_2 \delta p_2^{(n)}(t) dt ,$$

$$\delta p_1^{(n+1)}(t) = \delta p_1^{(n)}(t) + \lambda_p \delta p_1^{(n)}(t) - \int_0^t \lambda_3 \delta p_1^{(n)}(t) dt ,$$

$$\delta p_2^{(n+1)}(t) = \delta p_2^{(n)}(t) + \lambda_p \delta p_2^{(n)}(t) - \int_0^t \lambda_4 \delta p_2^{(n)}(t) dt + \int_0^t \lambda_4 \delta p_2^{(n)}(t) dt ,$$

D'où, de manière générale, les conditions de stationnarités sont les suivantes :

$$\begin{cases} 1 + \lambda_{x_i} \Big|_{s=x} = 0 \\ \lambda_{x_i} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \lambda_{p_i}|_{s=x} = 0 \\ \lambda_{p_i} = 0 \end{cases}$$

Puisque les quartes équations sont égales

On prend (i allons de 1 jusqu'a 2)

La résolution de ces conditions donne :

$$\lambda_{x_i} = -1$$

$$\lambda_{p_i} = -1$$

En introduisant la valeur de  $\lambda_{x_i} = -1$  et  $\lambda_{p_i} = -1$  dans les fonctionnelles de correction, on obtient les équations suivantes :

$$x_1^{(n+1)}(t) = x_1^{(n)}(t) - \int_0^t (\dot{x}_1^{(n)}(t) - x_2^{(n)}(t))dt ,$$

$$x_2^{(n+1)}(t) = x_2^{(n)}(t) - \int_0^t (\dot{x}_2^{(n)}(t) + p_2^{(n)}(t))dx ,$$

$$p_1^{(n+1)}(t) = p_1^{(n)}(t) - \int_0^t \dot{p}_1^{(n)}(t)dt$$

$$p_2^{(n+1)}(t) = p_2^{(n)}(t) - \int_0^t (\dot{p}_2^{(n)}(t) + p_1^{(n)}(t))dx ,$$

On a:

$$x^{(0)}(t) = x(0) = [0, 0]^T$$

$$x^{(n)}(t) = x(n) = [2, 1]^T$$

Pour les variables adjoints  $p^0(t)$  est inconnu, on pose

$$p^{(0)}(t) = \theta = [\theta_1, \theta_2]^T$$

Pour  $n = 0$  :

$$x_1^{(1)}(t) = 0 ,$$

$$x_2^{(1)}(t) = -\theta_2 t,$$

$$p_1^{(1)}(t) = \theta_1,$$

$$p_2^{(1)}(t) = -\theta_1 t + \theta_2,$$

Les solutions  $x_1^{(1)}(t)$  et  $x_2^{(1)}(t)$  ne satisfont pas la condition terminale  $x(t_f)$ , donc une nouvelle itération est nécessaire.

La deuxième itération donne :

$$x_1^{(2)}(t) = -\frac{\theta_2}{2} t^2$$

$$x_2^{(1)}(t) = -\frac{\theta_1}{2} t^2 - \theta_2 t,$$

$$p_1^{(2)}(t) = p_1^{(1)}(t) = \theta_1,$$

$$p_2^{(2)}(t) = p_2^{(1)}(t) = -\theta_1 t + \theta_2,$$

En imposant la condition terminale, il vient

$$x_1^{(2)}(t) = -2\theta_2 = 2,$$

$$x_2^{(2)}(t) = -2\theta_2 + 2\theta_1 = 1,$$

Qui conduit à :

$$\theta_1 = -1/2 \text{ Et } \theta_2 = -1$$

Par conséquent,

$$x_1^{(2)}(t) = \frac{t^2}{2},$$

$$u^{(2)}(t) = -\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + 1,$$

$$j^{(2)} = \frac{1}{2} \int_0^2 \left( x_1^{(2)}(t) + u^{(2)}(t) \right)^2 dt = 0.3333$$

De la même manière, on obtient :

$$x_1^{(4)}(t) = x_1^{(3)}(t) = \frac{\theta_1}{6} t^3 - \frac{\theta_2}{2} t^2$$

$$x_2^{(4)}(t) = x_2^{(3)}(t) = \frac{\theta_1}{2} t^2 - \theta_2 t,$$

$$p_1^{(4)}(t) = p_1^{(3)}(t) = \theta_1,$$

$$p_2^{(4)}(t) = p_2^{(3)}(t) = -\theta_1 t + \theta_2,$$

.....

$$x_1^{(3)}(2) = -2\theta_2 + \frac{4}{3} = 2,$$

$$x_2^{(3)}(2) = -2\theta_2 + 2\theta_1 = 1,$$

Qui conduit à :

$$\theta_1 = -3/2 \text{ Et } \theta_2 = -2$$

et

$$x_1^{(4)}(t) = x_1^{(3)}(t) = -\frac{t^3}{4} + t^2,$$

$$u^{(4)}(t) = u^{(3)}(t) = \frac{t^3}{4} - t^2 - \frac{3t}{2} + 2,$$

$$j^{(4)} = j^{(3)} = \frac{1}{2} \int_0^2 \left( x_1^{(3)}(t) + u^{(3)}(t) \right)^2 dt = 1$$

La valeur du critère ne change pas, donc la commande optimale est :

$$u^*(t) = u^{(4)}(t) = \frac{t^3}{4} - t^2 - \frac{3t}{2} + 2,$$

### **Exemple VI.2**

**Cas où l'état final est libre [10] :**

Soit le problème de commande optimale suivant :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = -\frac{1}{2} \int_0^{0,5} [x_1^2(t) + u^2(t)] dt$$

$$\dot{x}_1 = u(t)$$

$$x_1(0) = 1$$

On définit l'Hamilton comme suit :

$$H(x(t), u(t), p(t)) = L(x(t), u(t)) + \sum_{i=0}^n p_i(t) \dot{x}_1(t)$$

$$= -\frac{1}{2} (x_1^2(t) + u^2(t)) + p_1(t) \dot{x}_1(t)$$

$$= -\frac{1}{2} (x_1^2(t) + u^2(t)) + p_1(t) u(t)$$

Commande optimale

$$\nabla_{u(t)} H(x(t), u(t), p(t)) = -u(t) + p_1(t) = 0$$

$\Rightarrow$

$$u^*(t) = p_1(t)$$

$$H^*(x(t), u^*(t), p(t)) = -\frac{1}{2} (x_1^2(t) + p^2(t)) + p^2(t)$$

$$= -\frac{1}{2} x_1^2(t) + \frac{1}{2} p^2(t)$$

Equation d'Hamilton -Pontriaguine

$$\dot{x}_1(t) = \frac{\partial H^*}{\partial p_1(t)} = p_1(t) \quad (IV.5)$$

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x_1(t)} = x_1(t) \quad (IV.6)$$

Solution analytique :

En dérivant l'équation (IV.6), on obtient :

$$\ddot{p}_1(t) = \dot{x}_1(t)$$

Et d'après (IV.5), on aura:

$$\ddot{p}_1(t) = p_1(t) \Rightarrow \ddot{p}_1(t) - p_1(t) = 0$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$p_1(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t}$$

Pour déterminer les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  on utilise les conditions terminales. d'après (IV.6), on a

$$x_1(t) = \dot{p}_1(t) \Rightarrow x_1(t) = \alpha e^t - \beta e^{-t}$$

En imposant les conditions terminales, il vient :

Pour  $t=0$

$$x_1(0) = \alpha - \beta = 1$$

Pour  $t=2$  (état final libre  $p_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ):

$$p_1\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha e^{\frac{1}{2}} + \beta e^{-\frac{1}{2}} = 0$$

La résolution de système d'équation suivant :

$$\alpha - \beta = 1$$

$$\alpha e^{\frac{1}{2}} + \beta e^{-\frac{1}{2}} = 0$$

Donne

$$\alpha = \frac{1}{1+e}$$

$$\beta = \frac{e}{1+e}$$

Ce qui donne la commande optimale suivante :

$$u^*(t) = p_1(t) = \frac{1}{1+e} e^t - \frac{e}{1+e} e^{-t}$$

Application de la Méthode d'itération variationnelle (VIM)

$$x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_x(\dot{x}_1^n(t) - \nabla H^*(x^n, p^n, t)) dt$$

$$p_1^{(n+1)} = p_1^{(n)}(t) + \int_0^t \lambda_p(\dot{p}_1^n(t) + \nabla H^*(x^n, p^n, t)) dt$$

En appliquant la variation, on obtient :

$$\delta x_1^{(n+1)} = \delta x_1^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda_x(\dot{x}_1^{(n)}(t) - p_1^{(n)}(t)) dt$$

$$\delta p_1^{(n+1)} = \delta p_1^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda_p(\dot{p}_1^{(n)}(t) - x_1^{(n)}(t)) dt$$

Pour avoir :

$$\delta x_1^{(n+1)}(t) = 0 ;$$

$$\delta p_1^{(n+1)}(t) = 0 ;$$

Les conditions de stationnarité exigent :

$$\delta x_1^{(n+1)}(t) = \delta x_1^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda_x(\dot{x}_1^{(n)}(t) - p_1^{(n)}(t)) dt = 0$$

$$\delta p_1^{(n+1)} = \delta p_1^{(n)}(t) + \delta \int_0^t \lambda_p(\dot{p}_1^{(n)}(t) - x_1^{(n)}(t)) dt = 0$$

On fait une intégration par partie :

$$\begin{cases} 1 + \lambda_x(\tau)|_{s=x} = 0 \\ \dot{\lambda}_x(\tau) + \lambda_x(\tau)|_{s=x} = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_x(\tau) = -1$$

$$\begin{cases} 1 + \lambda_p(\tau)|_{s=x} = 0 \\ \dot{\lambda}_p(\tau) + \lambda_p(\tau)|_{s=x} = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_p(\tau) = -1$$

On le remplace dans les fonctionnelles, on obtient :

$$x_1^{(n+1)}(t) = x_1^{(n)}(t) - \int_0^t (\dot{x}_1^{(n)}(t) - p_1^{(n)}(t)) dt$$

$$p_1^{(n+1)}(t) = p_1^{(n)}(t) - \int_0^t (\dot{p}_1^{(n)}(t) - x_1^{(n)}(t)) dt$$

En appliquant La première itération, on obtient :

Pour  $n = 0$  : En prenant :

$$x_1^{(0)}(t) = 1 \quad \text{et} \quad p_1^{(0)}(t) = \theta,$$

$$x_1^{(1)}(t) = x_1^{(0)}(t) - \int_0^t (\dot{x}_1^{(0)}(t) - p_1^{(0)}(t)) dt$$

$$p_1^{(1)}(t) = p_1^{(0)}(t) - \int_0^t (\dot{p}_1^{(0)}(t) - x_1^{(0)}(t)) dt$$

$$p_1^{(1)}(t) = t + \theta$$

$$x_1^{(1)}(t) = \theta t + 1$$

Puisque  $x(t_f) = \frac{1}{2}$  est libre on doit supposer:

$$p_1^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

On obtient :

$$\theta = -\frac{1}{2}$$

$$x_1^{(1)}(t) = -\frac{1}{2}t + 1$$

$$p_1^{(1)}(t) = t - \frac{1}{2}$$

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau (IV.1)

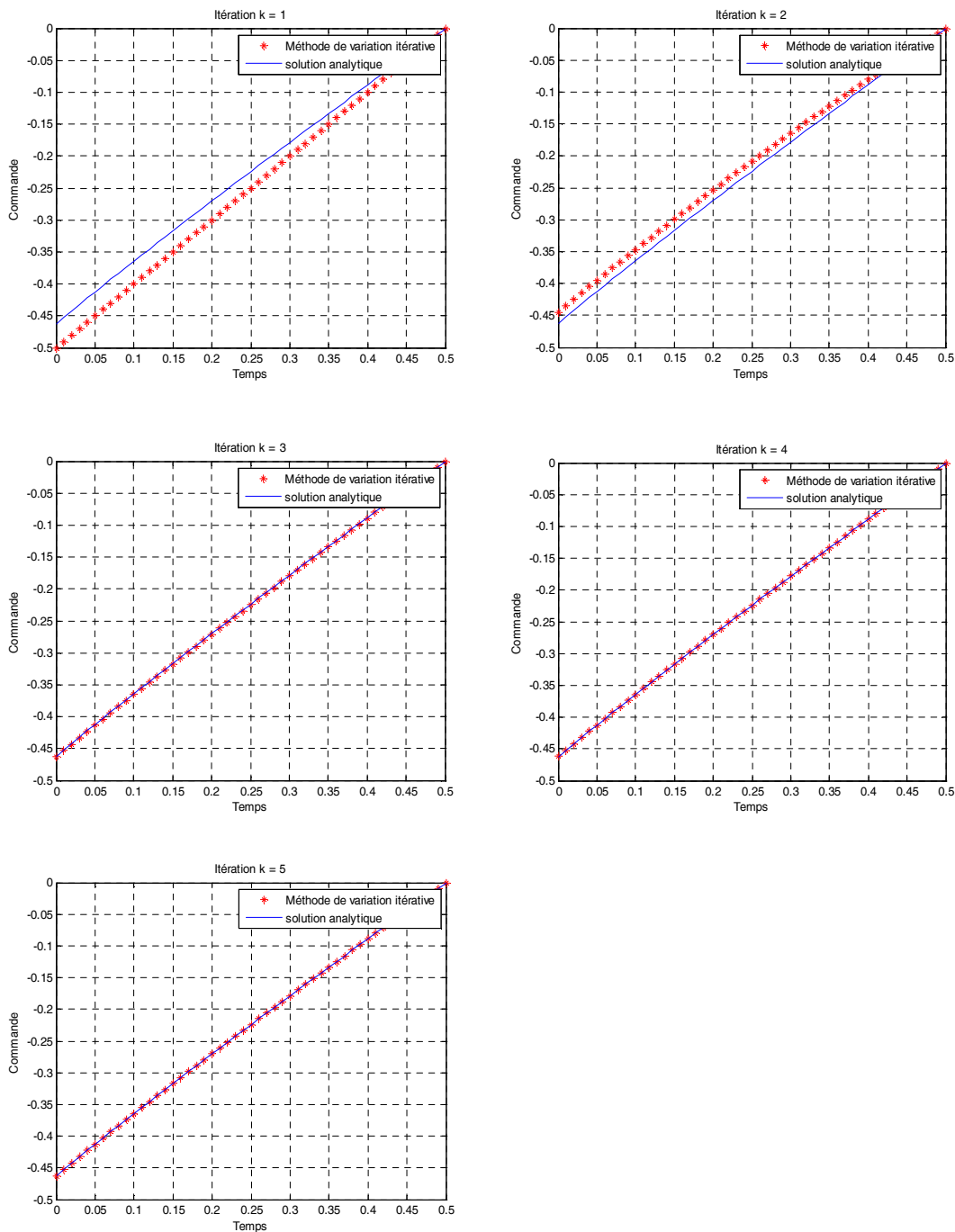
Nombre d'itérations	$\theta$	$p_1^{(n+1)}(t)$
1	-0.5000	$t - \frac{1}{2}$
2	-0.4444	$t - \frac{(2 * t^2)}{9} - \frac{4}{9}$
3	-0.4630	$\frac{t^3}{6} - \frac{(25 * t^2)}{108} + t - \frac{25}{54}$
4	-0.4619	$\frac{t^3}{6} - \frac{(25 * t^4)}{1299} - \frac{(100 * t^2)}{433} + t - \frac{200}{433}$
5	-0.4621	$\frac{t^5}{120} - \frac{(667 * t^4)}{34640} + \frac{t^3}{6} - \frac{(2001 * t^2)}{86} - \frac{2001}{4330}$

**Tableau IV.1 :Tableau désignant l'évolution des itérations**

Ainsi après 5 itérations on retrouve une solution qui converge vers la solution exacte. Les résultats de calculs obtenus sont résumés dans le tableau ci-dessus.

#### IV.4. Graphes représentant la solution exacte et la solution obtenue par la méthode d'itération variationnelle (VIM)

La figure IV.1 démontre que la solution approximée obtenue par la méthode de VIM à partir de la 3<sup>ème</sup> itération coïncide avec la solution analytique. (le système devient stable après la 3<sup>ème</sup> itération).



**Figure IV.1 :** comparaison entre la solution approximée trouvée par la méthode de VIM et la solution exacte troué analytiquement.

***IV.4 Conclusion :***

Dans ce chapitre on a utilisé la méthode d'itération variationnelle pour l'identification des conditions initiales des variables adjointes d'un problème de commande optimale. Les variables adjointes apparaissent dans les conditions d'optimalité obtenues par le principe du minimum. Ces conditions sont représentées d'Hamilton-Pontriaguine. L'approche étudiée permet de déterminer les conditions initiales en résolvant un système d'équations algébriques.

Les deux exemples étudiés montrent la convergence de la méthode étudiée.

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la commande optimale des systèmes dynamiques.

L'objectif de ce travail est de synthétiser une loi de contrôle optimale en utilisant l'équation d'Hamilton-Pontriaguine. Etant donnée que cette équation est fortement non linéaire et difficile à résoudre uniquement par le principe du minimum de Pontriaguine qui est un classique de la commande optimale. En effet la difficulté vient de condition initiale, des variables adjointes qui sont minimum, on fait donc appel à une méthode itérative couramment utilisé qui est la méthode d'itération variationnelle, cette méthode nous permet d'avoir une solution approximative qui converge vers la solution exacte de l'équation Hamiltonienne et qui nous mène à identifier les variables adjointes.

Nous avons commencé notre travail par les notions et concepts de base relatifs à un problème de contrôle optimale en se focalisant sur sa formulation mathématique. Par la suite nous avons présenté les méthodes de résolution d'un problème de commande optimale qui ont été présenté à savoir le principe du minimum (Hamilton-Pontriaguine) et le principe de la programmation dynamique de Bellman.

Dans le troisième chapitre, nous avons présentés quelques généralités des équations différentielles ordinaires et les méthodes qui permet de les résoudre à savoir les méthodes analytique et numérique, puis nous avons exposé le principe de la méthode des itérations variationnelles utilisées pour la résolution de ces équations en utilisant une formule itérative.

A la fin, la méthode des itérations variationnelles a été exploitée pour l'identification des variables adjointes pour l'obtention de la loi de commande optimale. Cette approche a été appliquée avec succès sur les applications présentés dans notre travail.

Les résultats obtenus de cette méthode démontrent la rapidité de la convergence, et la comparaison des résultats avec l'approche analytique a démontre la justesse de cette dernière. En effet celle-ci a permis de confirmer les résultats obtenu analytiquement,

A ce niveau, il est très important de mentionner que la méthode présente l'intérêt principal suivant :

- ✓ La convergence vers la solution exacte ; sinon elle fournit une solution approximée (la solution est toujours obtenue) ;

Comme perspectives du présent travail, il est intéressant de considérer la méthode d'itération variationnelle modifiée (MVIM) qui permet d'agrandir la zone de convergence des solutions approximative par conséquent, les solutions obtenues à l'aide de MVIM donnent de bonnes approximations pour un intervalle plus grand.

## ***Bibliographie***

[1] M<sup>elle</sup> Berkani Samira , Mansour Farida. « *Résolution d'un problème de commande optimale par la méthode d'itération variationnelle* ».Mémoire de fin d'étude de master en automatique, Université Mouloud Mammeri de tizi - Ouzou 2010.

[2] Pierre Born, Professeur en automatique à l'école centrale de L'ille et Frédéric Rotella , Professeur en automatique à l'école d'ingénierie de Tarbes. « *Commande Optimale* ».

[3] P.Nasl. in « *Théorie de la commande et conduite optimale* ».Edition Dunod , Paris, 1969.

[4] Mekki Ksouri et Pierre Borne “professeur a l'école centrale de Lille”. « *Régulation industrielle* ». *Edition technip* Paris ,1997.

[5] Jean – Pierre Corriou. « *Théorie et pratique pour l'ingénieur* » . Edition la voisier Paris , 2008 .

[6] Zellal Mohammed. « *Résolution des équations différentielles par les méthodes variationnelles et homotypiques* ». Mémoire de magister en mathématique appliquée et computationnelle. Université d'ORAN ,2013/2014.

[8] Equipe d'analyse. « *Equations différentielles méthodes de résolution numérique* », Université Pierre et Marie Curie –Paris6 ,2000/2001.

[9] D.D.Ganji, M .Nourolahi and E.Mohsani. « *Application of He's to non linear chemistry problems*», 2007.

[10] Ahmed Maida and Jean-Pierre Courriou. « *open-loop controller design Based on variational iteration method. Applied mathematics and computation*», Vol 219, N<sup>o</sup>16, pages 8632-8645, 2013.