

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI, TIZI-OUZOU

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MÉMOIRE DE MASTER

SPECIALITE: MATHEMATIQUES

OPTION: RECHERCHE OPERATIONNELLE ET OPTIMISATION

Présenté par:

M^{lle}. Samira CHIKHOUN
et M^{lle}. Djamila BELHADEF

Sujet:

Conception de contrôleurs pour les systèmes linéaires sous incertitude

Devant le jury d'examen composé de:

M. AMIROU;	MCB;	U.M.M.T.O;	Président
M. LESLOUS. F;	MAA;	U.M.M.T.O;	Examinatrice
M. MERAKEB. A;	MCA;	U.M.M.T.O;	Encadreur

Soutenu le: 01/10/2015

Remerciements

Nous tenons à témoigner notre reconnaissance à DIEU tout puissant, de nous avoir donné le courage et la force de mener ce mémoire à terme, qui nous a ouvert les portes du savoir.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et sincères remerciements à notre promoteur M. Abdelkader MERAKEB pour l'honneur qu'il nous a fait en assurant la direction et le suivi scientifique et humain, pour sa contribution à l'aboutissement de ce présent mémoire. Nous vous remercions pour vos orientations et votre enthousiasme envers notre travail. Les judicieux conseils que vous nous avez prodigué tout au long de ce travail nous ont permis de progresser.

Nous vous remercions d'avoir cru en nos capacités et nous avoir fourni d'excellentes conditions nous permettant d'aboutir à la production de ce mémoire qui n'aurait vu le jour sans votre confiance et votre générosité. Nous vous remercions très vivement pour votre gentillesse, hospitalité et disponibilité.

Nous remercions vivement le président et les membres du jury d'avoir accepté de juger notre travail.

Sans oublier de remercier tous nos professeurs qui ont contribué à notre formation depuis notre premier pas à l'école, qu'ils trouvent ici l'expression de toute notre gratitude.

Enfin, nous nous inclinons respectueusement devant les deux êtres les plus chers, à qui nous devons l'existence, nos parents à qui nous dédions ce travail. Nous leurs exprimons nos hauts et profonds signes de reconnaissances pour tous les efforts qu'ils nous ont fournis et tous les sacrifices qu'ils ont généreusement faits, pour que nous grandissons dans de parfaites conditions d'affection, d'amour, d'épanouissement et de satisfaction, nous vous remercions nos chers parents qui sans vous, nous n'aurions pu arriver jusqu'où nous sommes aujourd'hui.

Nous terminions cet avant propos en remerciant nos frères et soeurs, nos belles familles et nos amis pour le soutien et encouragements qu'ils nous ont fait le long de la réalisation de ce mémoire.

Samira CHIKHOUN
Djamila BELHADEF

Table des matières

Introduction	3
1 Généralités sur les inégalités matricielles linéaires	7
1.1 Introduction	7
1.2 Rappels historiques : de la commande classique aux LMI	7
1.3 Inégalités Matricielles Linéaires	10
1.3.1 Qu'est-ce qu'une LMI?	10
1.3.2 Où peuvent-elles être utilisées?	12
1.3.3 Quels sont les intérêts des LMIs?	13
1.3.4 Les théorèmes classiques	15
1.3.5 Aspects informatiques	15
2 Contrôlabilité, Stabilisation et stabilité au sens de <i>Lyapunov</i>	19
2.1 Introduction	20
2.2 Systèmes contrôlés	20
2.2.1 Enoncé général du problème de Cauchy	21
2.3 Systèmes différentiels linéaires	25
2.4 Analyse de la stabilité au sens de <i>Lyapunov</i>	27
2.4.1 Systèmes à temps continu	28
2.4.2 Fonction de Lyapunov pour les systèmes linéaires	30
2.5 Contrôlabilité	31
2.5.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires	32
2.6 Stabilisation	36
2.6.1 Stabilisation des systèmes de contrôle linéaires	38
3 Méthode de stabilisation basée sur l'observateur pour les systèmes linéaires sous incertitude	41

3.1	Introduction	41
3.2	Formulation du problème	43
3.3	Résultat principal: Nouvelle méthodologie de conception	47
3.3.1	Les systèmes sans paramètres incertains	47
3.3.2	Systèmes avec paramètres incertains	49
3.3.3	Sur les conditions nécessaires de la faisabilité de (3.25)	50
3.3.4	Conclusion	53
	Conclusion	54
	Bibliographie	55

Introduction

Préambule

L'automatique moderne a développé des outils puissants d'un point de vue théorique (espace d'état, inégalités matricielles affines, etc ...) pour intégrer des contraintes physiques (prise en compte des incertitudes dans la commande robuste, gestion et optimisation des performances, etc ...). Elle a aussi intégré les aspects informatiques (résolution numérique, optimisation convexe, logiciels d'aide à la commande de type Matlab ou Scilab de plus en plus nombreux). L'utilisation de ces nouveaux outils paraît donc intéressante dans des domaines où des performances sévères sont souvent requises, dans le milieu industriel notamment. Le problème se pose dans la méthodologie mathématique à mettre en œuvre pour parvenir à exploiter ces nouveaux outils. Un des besoins les plus répandus des industriels, est le concept de la stabilisation des systèmes. Rappelons que la notion de stabilisation consiste à maintenir un système stable via un contrôleur qui est calculé généralement en fonction de l'état. Lorsqu'il n'est pas possible de mesurer directement l'état, et c'est pour des raisons physiques ou financières, on a recours à un système dynamique auxiliaire, appelé "observateur d'état". Ce dernier a le rôle d'estimer l'état du système en question. De plus, il convient de préciser que le fonctionnement du système est souvent soumis à des perturbations dues à des facteurs divers tels que des erreurs ou des bruits de mesure, des variations des paramètres internes ou externes, ou bien un vieillissement du système. Dans ce cas, le problème de stabilisation se ramène à une synthèse d'un contrôleur robuste assurant la stabilité, en dépit des perturbations qui peuvent affecter le fonctionnement du système.

Notons que la négligence des perturbations affectant un système stable peut le rendre instable et dégrader ses performances. C'est pourquoi, avant de choisir la méthodologie à mettre en œuvre, il convient de faire une bonne représentation du système physique

réel avec une précision suffisante et un modèle de structure simple. Ainsi, pour assurer un meilleur compromis du modèle vis-à-vis du processus réel et l'adéquation de celui-ci à une forme mathématique exploitable, plusieurs types de modèles de systèmes ainsi que des formes d'incertitudes ont été conçus.

Les méthodologies à mettre en oeuvre sont en constante évolution. Néanmoins, malgré les avancées significatives, le problème de la commande des systèmes incertains reste un sujet de recherche ouvert et très actif. Il suscite de plus en plus l'intérêt de la communauté automatique. Contrairement au problème de synthèse pour les systèmes linéaires sans incertitudes où l'on dispose d'une stratégie bien déterminée présentée par *Kalman* et *Luenberger*, il n'existe pas de méthodes de synthèses universelles quand le système est affecté par des incertitudes paramétriques. La principale difficulté de la conception réside dans la nature non convexe du problème. Diverses activités de recherches ont été élaborées pour aboutir à des résultats de stabilisation de différentes classes de systèmes.

En outre, il existe des approches considérables dans la littérature traitant le problème de la conception de contrôleur en utilisant directement des conditions sous forme d'inégalités matricielles bilinéaires (BMI). Toutefois, il est bien connu que la résolution d'une BMI est un problème NP-difficile. Dans le but de réduire le conservatisme des approches citées en préambule, nous avons travaillé sur la synthèse de la commande basée sur un observateur des systèmes incertains via l'approche des inégalités matricielles linéaires "LMI". Ce choix de l'approche LMI est motivé par le désir d'asseoir le problème de synthèse de la commande sur des bases numériques. De telles possibilités sont devenues envisageables grâce au développement d'outils numériques de résolution efficaces. L'avancée récente des outils informatiques et mathématiques basés sur les programmes d'optimisation convexe permettent de résoudre une classe importante de problèmes d'analyse et de commande des systèmes dynamiques. Grâce à l'utilisation de la théorie de *Lyapunov* et d'un maniement judicieux des inégalités de *Young*, ainsi que quelques transformations algébriques, nous avons dérivé des conditions de stabilisation de différentes classes de systèmes. Ces résultats sont fournis en termes d'inégalités matricielles linéaires, sans l'ajout de contraintes égalité, ni de restriction sur le domaine des variables.

Enfin, après l'analyse de stabilité de *Lyapunov* du système augmenté, et quelques transformations algébriques, nous parvenons à dériver des conditions de stabilisation sous formes d'inégalités matricielles linéaires.

Structure du mémoire

- Les chapitres 1 et 2 sont consacrés à la présentation de quelques préliminaires utiles sur les inégalités matricielles linéaires (LMIs), les systèmes dynamiques, la stabilité et théorie de *Lyapunov* ainsi que la contrôlabilité et la stabilisation des systèmes linéaires, qui sont munis de quelques définitions et lemmes utiles pour mieux comprendre le manuscrit.
- Le chapitre 3 présente des résultats de stabilisation des systèmes linéaires incertains via un contrôleur basé sur un observateur avec des incertitudes structurées bornées en norme. En se basant sur la théorie de *Lyapunov* et le maniement judicieux de l'inégalité de *Young*, une nouvelle condition suffisante exprimée sous forme d'inégalité matricielle linéaire (LMI) garantissant la stabilité asymptotique du système en boucle fermée a été obtenue. L'étude a été complétée, d'une part, par une application de l'approche à un exemple réel qui permet de valider les résultats théoriques, il s'agit de la stabilisation d'un robot à bras flexible et d'autre part, par des comparaisons théoriques et numériques. Ainsi, la réduction du conservatisme apportée par cette approche a été démontrée à travers les points suivants :
 1. Il a été montré analytiquement que pour une classe particulière importante de systèmes, la condition nécessaire pour la faisabilité de la LMI obtenue est équivalente à la stabilisabilité/déTECTABILITÉ du système considéré.
 2. Une évaluation numérique du conservatisme a été effectuée. Les résultats obtenus montrent que la condition LMI est faisable pour tous les systèmes.

*La vie n'est bonne qu'à étudier et à
enseigner les mathématiques.*

Chapitre 1

Généralités sur les inégalités matricielles linéaires

” Le plus grand défi face à un contrôle, ou encore toute autre technologie moderne, est de savoir comment organiser et rendre accessibles de manière interactive la quantité importante et croissante de la connaissance objective formelle qui est disponible, de faire la connaissance utilisable par les praticiens, à leur fournir un outil puissant et de relier la connaissance à la réalité, à des recherches expérimentales et pratiques. ” A.J.G.Farlane

1.1 Introduction

Une grande quantité de problèmes d'automatique concernant les performances et la robustesse peuvent se traduire sous la forme d'une optimisation convexe avec des contraintes inégalités. Auparavant, on faisait appel à la résolution d'équations de *Riccati* basées sur des contraintes égalités. Plus récemment, les progrès effectués dans le domaine de l'optimisation convexe et l'introduction des LMIs par Yakubovich dans la commande des systèmes ont permis de franchir une nouvelle étape qui combine les possibilités mathématiques avec la puissance de calcul informatique. Depuis, un répertoire de nombreux problèmes font appel aux LMIs.

1.2 Rappels historiques : de la commande classique aux LMI

L'objet de cette section n'est pas de donner une vue exhaustive des différentes méthodes de commande, mais de présenter succinctement les différents courants historiques de la

commande robuste. Nous pouvons considérer que l'Automatique, en tant que science relativement jeune, et plus particulièrement la commande des systèmes, a traversé trois grandes périodes.

1. La période classique (1930-65).

Dans ses débuts, la théorie de la commande avait pour objectif l'élaboration d'outils d'analyse et de synthèse de régulateurs utilisés dans l'industrie. Avec la progression de la théorie, il s'est avéré que les outils développés pouvaient s'appliquer à une large classe de systèmes. La préoccupation première a toujours été la stabilité qui fut introduite par *Routh* et *Hurwitz* dès le 19ème siècle puis explorée en détail par *Lyapunov*, dont les travaux sont toujours très utilisés de nos jours. La théorie de la stabilité fut revisitée vers la fin des années 1920 par *Black*. Quelques années plus tard, *Nyquist* améliore l'approche précédente en énonçant un critère fréquentiel qui porte désormais son nom.

Outre, la stabilité, un système asservi se doit de satisfaire divers objectifs de performance. Cette période marque l'apparition des concepts de marges pour les systèmes monovariables avec la commande PID. L'approche proposée permet de ramener le problème de l'analyse à quelques critères fréquentiels et graphiques et celui de la synthèse au choix de paramètres simples à interpréter. La simplicité de cette méthode en fait une des techniques les plus utilisées dans l'industrie. Les progrès technologiques et l'apparition de systèmes complexes ont motivé l'effort de recherche vers des méthodes de commande plus générales et plus performantes.

2. La période moderne (1965-80).

Pour faire face aux limitations introduites par la commande PID qui montre ses limites en matière de systèmes multivariables, l'effort de recherche s'est porté vers la commande optimale LQG dès les années 1960. Cette époque charnière est caractérisée par l'apparition de l'approche par variables et représentations d'état des systèmes. Les concepts de commandabilité et d'observabilité sont dus aux travaux de *Kalman*. Cette approche conduit à la commande LQG qui revient à minimiser un critère sur l'espérance quadratique (norme H_2 pondérée) reflétant un compromis entre la précision et l'effort de la commande. L'approche LQG a fourni un cadre théorique très puissant pour de nombreux problèmes de commande des systèmes dynamiques, y compris non linéaires. De plus, elle a débouché sur une méthode de synthèse simple à appliquer numériquement par l'intermédiaire d'algorithmes de résolution d'équations de *Riccati* dépendant de la représentation d'état du système. La difficulté principale

réside dans le choix des matrices de pondération du critère de manière à refléter au mieux le cahier des charges. Cependant, cette approche théorique n'a pas fourni les résultats pratiques qu'elle laissait espérer car la robustesse aux incertitudes n'est pas prise en compte. A la fin des années 70, une prise de conscience des limites de la théorie actuelle de la commande optimale conduit *Safonov* et *Athans* à définir des garanties en terme de marges de phase et de gain pour la commande LQ suivis par *Doyle* et *Stein* avec la commande LQG/LTR .

3. La période post-moderne (1980-99).

Le début des années 80, avec l'apparition du terme de robustesse, a marqué le début de la "suprématie" de la commande robuste. Pourtant, les bases de cette révolution théorique avaient été posées depuis près de 20 ans par *Zames* qui avait défini la notion du petit gain comme l'un des concepts-clef des marges de robustesse en multi-variable. A la fin des années 70, la commande H_∞ apporte des solutions intéressantes, par le biais des valeurs singulières, au problème de robustesse. Les incertitudes sont modélisées dans une sphère de norme H_∞ et la performance de l'asservissement est calculée comme une fonction du rayon de cette sphère. Plusieurs approches sont développées, basées sur le lemme borné réel (LBR), les jeux différentiels ou bien la méthode du "pire cas" qui consiste à stabiliser un système et à minimiser l'influence de la "pire" perturbation . La résolution du problème peut s'effectuer par l'utilisation de l'algorithme dit *Glover-Doyle* qui permet de synthétiser un correcteur H_∞ obtenu par résolution de deux équations de *Riccati* couplées, mais en introduisant des contraintes de rang et de zéros invariants. Malheureusement, cette méthode ne permet pas de prendre en compte des informations sur la structure des perturbations et elle repose sur le choix d'un critère unique sensé refléter à lui seul l'ensemble des spécifications imposées. Bien que la μ -synthèse ait permis de diminuer le conservatisme induit par l'approche H_∞ , sa mise en œuvre s'avère délicate par manque d'algorithmes suffisamment sûrs. On s'est alors orienté vers une jonction des deux approches (optimale et robuste) qui s'est faite par le biais de la commande mixte H_2 / H_∞ , sans toutefois négliger les aspects concernant la réduction d'ordre du correcteur. Comme les problèmes deviennent par nature multicritères, il est préférable de considérer le problème de commande comme un problème de faisabilité, et non plus de minimisation de critère. La plupart des approches faisait appel à l'optimisation non linéaire différentiable et n'offre aucune garantie de convergence vers un minimum global, les gradients sont alors très difficiles à calculer. Plus récemment, les progrès

effectués dans le domaine de l'optimisation convexe et l'introduction des LMIs par *Yakubovich* dans la commande des systèmes ont permis de franchir une nouvelle étape qui combine les possibilités mathématiques avec la puissance de calcul informatique. Depuis, de nombreux travaux ont montré qu'un grand nombre de problèmes qui apparaissaient difficiles voire impossible à résoudre de manière analytique, pouvaient se formuler et se résoudre par l'approche LMI. Encouragés par l'émergence de " solveurs " de plus en plus rapides et mieux adaptés, d'énormes progrès, non seulement théoriques mais également sur le plan de la simulation, ont été réalisés en utilisant le développement toujours grandissant des logiciels (en particulier les solveurs de LMI tels que LMITOOL (sous MATLAB ou bien SCILAB).

1.3 Inégalités Matricielles Linéaires

1.3.1 Qu'est-ce qu'une LMI?

Une inégalité matricielle linéaire est une expression de la forme

$$F(x) := F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_m F_m \prec 0 \quad (1.1)$$

Où

- $x = (x_1, \dots, x_m)$ est un vecteur de m nombres réels appelés "*variables de décision*".
- F_0, \dots, F_m ce sont les matrices symétriques, i.e, $F_j = F_j^T$, pour $j = 0, \dots, m$.
- L'inégalité $\prec 0$ dans (1.1) signifie "définie négative". C'est-à-dire, $u^T F(x) u \prec 0$ pour tout vecteur u non nul. Parce que toutes les valeurs propres de la matrice symétrique réelle sont réelles, (1.1) est équivalent à dire que toutes les valeurs propres $\lambda(F(x))$ sont négatives. De façon équivalente, la valeur propre maximale $\lambda_{max}(F(x)) \prec 0$.

Définition 1.1. Une inégalité matricielle linéaire LMI est une inégalité

$$F(x) \prec 0 \quad (1.2)$$

où F est une fonction affine d'un espace vectoriel \mathcal{X} de dimension finie et soit $S^n(\mathbb{R}) = \{N \in \mathbb{R}^{n \times n}, N = N^T\}$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n .

Remarque 1.1. La LMI non stricte est une inégalité matricielle linéaire où \prec dans (1.1) et (1.2) est remplacé par \preceq .

Pour les fonctions affines $F, G : \mathbb{R}^m \rightarrow S^n(\mathbb{R})$, les contraintes $F(x) \succ 0$ et $F(x) \prec G(x)$ avec F et G sont aussi des LMIs, car elles peuvent être réécrites sous la forme $-F(x) \prec 0$ et $F(x) - G(x) \prec 0$.

Remarque 1.2. Nous rencontrerons souvent des problèmes dans lesquels les variables sont des matrices, par exemple, l'inégalité matricielle de *Lyapunov*

$$F(X) = A^T X + X A + Q \prec 0$$

Où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont deux matrices constantes données et la variable $X = X^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice inconnue. Nous allons expliquer dans ce qui suit comment se ramener de cette inégalité matricielle à une LMI de la forme (1.1).

Soit E_1, E_2, \dots, E_m une base de $S^n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles. Pour tout $X \in S^n(\mathbb{R})$, il existe $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ tels que $X = \sum_{i=1}^m x_i E_i$. L'inégalité de *Lyapunov* devient:

$$\begin{aligned} F(X) &= F\left(\sum_{i=1}^m x_i E_i\right) = A^T \left(\sum_{i=1}^m x_i E_i\right) + \left(\sum_{i=1}^m x_i E_i\right) A + Q \\ &= Q + x_1(A^T E_1 + E_1 A) + \dots + x_m(A^T E_m + E_m A) \prec 0, \end{aligned}$$

qui n'est rien d'autre qu'une LMI particulière.

Une autre LMI souvent rencontrée en commande est l'inégalité de *Riccati*

$$A^T P + P A + P B R^{-1} B^T P + Q \prec 0,$$

où $R > 0$, $Q = Q^T$, $R = R^T$, $P = P^T$.

Cette dernière s'exprime comme une LMI en P .

1.3.2 Où peuvent-elles être utilisées?

Comme nous le verrons, de nombreux problèmes d'optimisation dans le contrôle, l'identification et le traitement des signaux peuvent être formulés (ou reformulés) en utilisant les inégalités matricielles linéaires. De toute évidence, il n'a de sens que pour la distribution de ces problèmes dans un cadre LMI si ces inégalités peuvent être résolues d'une manière efficace et fiable. Étant donné que l'inégalité matricielle linéaire $F(x) \prec 0$ définit une contrainte convexe sur la variable x , des problèmes d'optimisation impliquant la minimisation (ou la maximisation) d'une fonction de la performance $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\mathbb{E} := \{x \mid F(x) \prec 0\}$ appartiennent à la classe des problèmes d'optimisation convexe.

Supposons que $F : \mathcal{X} \rightarrow S^n(\mathbb{R})$ est affine. Il y a deux problèmes génériques liés à l'étude des inégalités matricielles linéaires:

1. **Faisabilité:** La question est de savoir s'il existe ou non, des éléments $x \in \mathcal{X}$ tels que $F(x) \prec 0$ est appelée un problème de faisabilité. La LMI $F(x) \prec 0$ est dite faisable si un tel x existe, sinon elle est dite non-faisable.
2. **Optimisation:**
 - (a) Minimiser $c^T x$ par rapport à $F(x) \prec 0$; où $c \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, et F est une matrice symétrique et affine en x , est appelé un programme semi-défini (semi-definite program SDP). Le vecteur c définit l'objectif du problème et $x \in \mathbb{R}^m$ représente la variable de décision.
 - (b) Minimiser les valeurs propres généralisées. Il s'agit ici de déterminer le minimum d'un paramètre λ tel que le problème LMI soit vérifié:

$$\begin{cases} C(x) < 0 \\ B_j(x) > 0, & \forall j \in \{1, 2, \dots, p\} \\ A_j(x) > \lambda B_j(x), & \forall j \in \{1, 2, \dots, p\} \end{cases}$$

où x correspond à l'ensemble des inconnues de l'inégalité matricielle, C , B_j , A_j sont des matrices.

L'avantage majeur des SDP est que leur complexité est polynômiale, c'est-à-dire qu'il existe des algorithmes qui permettent de calculer l'optimum global (pour une décision fixée a priori) en un temps de calcul polynômial par rapport à la taille du problème.

1.3.3 Quels sont les intérêts des LMIs?

L'intérêt des LMIs est résumé dans les quatre points décrits ci-dessous.

1. *Convexité*: La LMI (1.1) définit une contrainte convexe en x . En effet, $\forall \{x, y\} \in \mathbb{E}$, $\mathbb{E} := \{x \mid F(x) \prec 0\}$, alors

$$F(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha F(x) + (1 - \alpha)F(y), \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

où $F(x)$ est donnée par (1.1). L'intérêt de la convexité provient du fait qu'un grand nombre de problèmes peuvent s'écrire comme ce type de contrainte.

2. *Concaténation*: Un système qui comprend des LMIs et des contraintes supplémentaires affines en x peut s'écrire sous la forme d'une seule LMI. Par exemple le système

$$\begin{cases} F(x) \prec 0, \\ x = ay + b \end{cases} \quad \text{avec } y \text{ quelconque,}$$

est équivalent à $\bar{F}(y) \prec 0$. En effet, posons $x_i = ay_i + b_i$. En utilisant la propriété d'ensemble convexe, nous aurons

$$\begin{aligned} F(x) &:= F_0 + a \sum_{j=1}^n y_j F_j + \sum_{j=1}^n b_j F_j \\ &= \bar{F}_0 + \sum_{j=1}^n y_j \bar{F}_j = \bar{F}(y) \end{aligned}$$

avec $\bar{F}_0 = F_0 + \sum_{j=1}^n b_j F_j$ et $\bar{F}_j = a F_j$.

Des LMIs multiples peuvent se ramener en une seule. En effet, résoudre les deux LMIs $F_1(x) \prec 0$ et $F_2(x) \prec 0$ est équivalent à résoudre $\bar{F}(x) \prec 0$ avec $\bar{F} = \mathbf{diag}(F_1, F_2)$.

Un autre exemple sur la concaténation est fourni dans la définition 1.2.

3. *Algorithmes*: Les algorithmes utilisés pour résoudre les contraintes LMI sont efficaces: une bonne initialisation garantit la convergence de l'algorithme, cette convergence étant à temps polynômial.
4. *Applications*: De nombreuses conditions classiques en automatique (stabilité quadratique, calcul de la norme \mathcal{H}_2, \dots) peuvent se formuler sous la forme de problèmes LMI.

De plus, il est possible de convertir certaines inégalités non linéaires (notamment de *Riccati*) en LMI par l'utilisation du lemme de *Schur*.

Définition 1.2. (Système de la LMI) Un système d'inégalités matricielles linéaires est un ensemble fini d'inégalités matricielles linéaires

$$F_1(x) \prec 0, \dots, F_k(x) \prec 0. \tag{1.3}$$

L'intersection des ensembles possibles de chacune des inégalités (1.3) est convexe. En d'autres termes, l'ensemble des x qui satisfont (1.3) est convexe. La question se pose maintenant de savoir si ou non cet ensemble peut être représenté comme la faisabilité d'une autre LMI. La réponse est oui.

En effet, $F_1(x) \prec 0, \dots, F_k(x) \prec 0$ si et seulement si

$$F(x) := \begin{pmatrix} F_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2(x) & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_k(x) \end{pmatrix} \prec 0$$

La dernière inégalité permet en effet de sens que $F(x)$ est symétrique pour tout x . En outre, puisque l'ensemble des valeurs propres de $F(x)$ est tout simplement l'union des valeurs propres de $F_1(x), \dots, F_k(x)$, tout x qui satisfait $F(x) \prec 0$ satisfait également le système de la LMI de (1.3) et vice versa. Concluent que plusieurs contraintes LMI peuvent toujours être convertis en une seule contrainte de la LMI.

Définition 1.3. (Bilinear Matrix Inequality). Une contrainte BMI est une contrainte sur $x \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^r$ qui est de la forme

$$F(x,y) := F_{0,0} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r x_i y_j F_{i,j} \prec 0;$$

avec $F_{0,0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $F_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Il s'agit de la généralisation de la notion de LMI. Une grande variété de problèmes d'automatique peuvent se formuler comme des BMIs. Cependant, les BMIs ne sont pas convexes, ce qui génère des difficultés dans leur résolution.

1.3.4 Les théorèmes classiques

La difficulté n'est donc pas de résoudre une LMI. En effet les difficultés rencontrées proviennent de la transformation de ses contraintes non linéaires en formulation LMI.

Pour cela, nous disposons des lemmes suivants:

La transformation basée sur le complément de *Schur* est la méthode la plus simple et la plus fréquemment utilisée pour transformer des contraintes non linéaires en des contraintes LMI. Cette transformation est la suivante:

Lemme 1.1. (*Complément de Schur*) Soient trois matrices $Q(x)$, $S(x)$ et $R(x)$ affines par rapport à la variable x , les matrices $Q(x)$ et $R(x)$ étant symétriques. La LMI

$$F(x) = \begin{pmatrix} R(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{pmatrix} \prec 0$$

est équivalente aux inégalités suivantes:

$$\begin{cases} R(x) \prec 0 \\ Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T \prec 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Une autre transformation est décrite dans le lemme suivant:

Lemme 1.2. Pour toutes matrices A , $P_0 > 0$ et $P_1 > 0$, l'inégalité

$$A^T P_1 A - P_0 < 0$$

est équivalente à l'existence d'une matrice Y telle que:

$$\begin{bmatrix} -P_0 & A^T Y^T \\ Y A & -Y - Y^T + P_1 \end{bmatrix} \prec 0.$$

1.3.5 Aspects informatiques

"Les principaux défis pour la communauté de contrôle sont d'acquérir une meilleure compréhension de la complexité du système, ce qui est, et ce qui n'est pas traitable et ce qui peut, et ne peut pas être fait. Il est clair que la science de la commande et de la communauté d'ingénierie auront à se rapprocher de l'informatique et de l'ingénierie, mais sans (je l'espère) la perte de foi dans la formulation du problème rigoureuse ou de renoncer à

la synthèse formelle.” W.M. Wonham

Les méthodes algorithmiques de résolution des problèmes d’optimisation convexe mènent naturellement à l’utilisation de la puissance informatique aujourd’hui à notre disposition. L’outil informatique est une interface d’utilisation mais son évolution ne doit pas être négligée pour autant. En effet, la résolution de certains problèmes passe aussi par une amélioration ou une personnalisation des ”solveurs LMI”.

Cette section permet de clarifier certaines notions. Nous allons énoncer brièvement les différents concepts utiles.

Définition 1.4. (*Calculabilité*). Un problème est dit calculable lorsque sa résolution est prouvée être faisable par un algorithme en un nombre fini d’étapes.

Cette notion est en général étendue à une résolution dont le temps de calcul est acceptable en relation avec la taille et la finalité du problème. En effet, si le temps de résolution est une fonction de type n^{100} , avec n la taille du problème, celui-ci est donc résolvable en temps polynômial, mais peut difficilement être qualifié de calculable. Ceci nous amène à définir la notion de *Complexité*.

Définition 1.5. (*Complexité*) La complexité est définie comme la fonction qui lie le temps de résolution de l’algorithme à la taille du problème. Ce temps de résolution peut être une fonction exponentielle ou polynômiale de la taille du problème.

Pour illustrer ce fait, considérons le tableau suivant où n représente le nombre de variables du problème.

n	5	10	20	22	23	30	40
2^n	32	1024	$1.05 \cdot 10^6$	$4.2 \cdot 10^6$	$8.4 \cdot 10^6$	$1.1 \cdot 10^9$	$1.1 \cdot 10^{12}$
n^5	3125	10^5	$3.2 \cdot 10^6$	$5.1 \cdot 10^6$	$6.4 \cdot 10^6$	$2.4 \cdot 10^7$	$1.0 \cdot 10^8$

Tableau 1.1: Complexité d’un problème

Dans le tableau 1.1, il est montré qu’un algorithme dont la complexité est une fonction de type 2^n est plus rapide qu’un algorithme de complexité n^5 avec $n < 23$. Par contre, lorsque $n > 23$, le temps de résolution augmente très vite pour un algorithme de complexité 2^n .

Ceci nous amène à définir les notions de *temps polynômial* et de problème *NP-difficile*.

Définition 1.6. (*Temps polynômial*). Un problème est dit résolvable en un temps polynômial lorsqu'il existe un algorithme de résolution dont le temps de calcul requis est une fonction polynômiale de la taille du problème. La taille d'un problème en général définie comme le nombre de variables mis en jeu dans la résolution ainsi que la place mémoire qu'elle nécessite.

Définition 1.7. (*NP-difficile*). Un problème est dit NP-difficile lorsque le temps de calcul requis est une fonction de type a^n avec $a > 1$ et n la taille du problème.

Remarque 1.3. Un problème de type BMI est un exemple de problème *NP-difficile* tandis qu'un problème LMI ne l'est pas car il est résolvable en temps polynômial. Toutefois un grand nombre de problèmes en automatique est par nature de type BMI. Pour les résoudre, on doit donc se ramener à une formulation de type LMI, ce qui introduit un *conservatisme*.

Définition 1.8. (*Conservatisme*). Une condition ou une contrainte est dite conservative lorsqu'elle est trop contraignante ou pessimiste par rapport au problème considéré.

Le dilemme entre complexité et conservatisme intervient constamment et influence les choix (autant théoriques et pratiques) dans la résolution d'un problème. En effet, afin d'obtenir une synthèse de correcteur la moins conservative possible, on augmente le nombre de spécifications du problème. Le problème devient NP-difficile. Pour le résoudre, c'est-à-dire diminuer la complexité de ce problème, on est amené soit à approximer soit à supprimer certaines des spécifications.

*Les mathématiques consistent à prouver
une chose évidente par des
moyens complexes.*

Chapitre 2

Contrôlabilité, Stabilisation et stabilité au sens de *Lyapunov*

Notations:

Certaines notations seront utilisées tout au long de ce chapitre que nous listons ci-dessous :

- \mathbb{R} : ensemble des nombres réels.
- \mathbb{R}^n : espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.
- $[a,b]$: intervalle fermé de \mathbb{R} d'extrémités a et b .
- $]a,b[$: intervalle ouvert de \mathbb{R} d'extrémités a et b .
- $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$: ensemble des fonctions continûment différentiables.
- $|\cdot|$: valeur absolue ou module.
- $\|\cdot\|$: norme sur \mathbb{R}^n .
- $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$: vecteur d'état.
- $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$: dérivée temporelle.
- x^T : transposée du vecteur x .
- A^T : transposée de la matrice A .
- $\|A\|$: norme euclidienne de A .
- I_d : matrice identité dans $\mathbb{R}^{n \times n}$.
- M^{-1} : inverse de la matrice M .
- \det : déterminant.
- tr : trace.
- $Re(\lambda_i)$: partie réelle de la valeur propre λ_i .

- $\exp(A)$ ou e^A : exponentielle de la matrice A .
- $L^p_{loc}(\omega, K)$: ensemble des applications mesurables de ω dans K , de puissance p intégrable.
- L^∞ : espace vectoriel de fonctions bornées sur un intervalle donné.
- $Acc(x_0, T)$: ensemble accessible en temps T depuis le point x_0 .
- $B(a, \varphi) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - a\| \leq \varphi\}$: la boule de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $\varphi > 0$.

2.1 Introduction

Cette section a essentiellement pour objectif de présenter quelques rappels sur les systèmes dynamiques. Nous fournissons au début de cette section un rappel sur la résolution des systèmes différentiels en se rappelant de la version générale du théorème de *Cauchy-Lipschitz* adaptée à la théorie de contrôle, qui établit sous certaines conditions: l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation différentielle.

2.2 Systèmes contrôlés

Un système non linéaire contrôlé (ou commandé) est un système différentiel de la forme

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t \in [0, +\infty[, \quad x(t) \in M, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad (2.1)$$

En général, le vecteur des états $x(t)$ appartient à une variété différentielle M de dimension n (on supposera ici que M est un ouvert connexe de \mathbb{R}^n), les contrôles $u(\cdot)$ appartiennent à un ensemble admissible \mathcal{U} , qui est un ensemble de fonctions localement intégrables définies sur $[0, +\infty)$ à valeurs dans $U \subset \mathbb{R}^m$, et $f(.,.,.)$ est une fonction non linéaire à valeur dans \mathbb{R}^n qu'on supposera régulière, (on précisera cette régularité ultérieurement). L'entier naturel n est l'ordre du système. Un cas particulier que nous considérons dans notre mémoire pour de tels systèmes, est le système linéaire de la forme:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (2.2)$$

avec $A(t)$ une fonction matricielle de dimension $n \times n$, appelée matrice d'état, et $B(t)$ une fonction matricielle de dimension $n \times m$, appelée matrice de commande.

Nous n'expliquerons pas dans ce mémoire comment obtenir le modèle (2.1), étant donné qu'il serait alors nécessaire de couvrir un très grand nombre de disciplines connexes : chimie, physique, mécanique du solide, électrotechnique, etc., chacune ayant une théorie de la modélisation propre conduisant à des équations différentielles ordinaires susmentionnées. On peut faire une première classification entre les systèmes qui ne dépendent pas explicitement du temps et ceux qui en dépendent :

Définition 2.1. Le système (2.1) est dit autonome si f ne dépend pas explicitement de t . Dans ce cas, on l'écrira

$$\dot{x} = f(x, u). \tag{2.3}$$

Dans le cas contraire, on dira qu'il est non autonome.

On peut noter qu'un système autonome peut devenir non autonome si le contrôle dépend explicitement du temps, c'est à dire si par exemple $u = g(x, t)$. Dans le cas où l'on peut écrire la commande comme une fonction de l'état, soit $u = g(x)$, le système (2.3) se ramène en un système autonome,

$$\dot{x} = f(x, g(x))$$

que nous écrivons par abus d'écriture

$$\dot{x} = f(x). \tag{2.4}$$

2.2.1 Enoncé général du problème de Cauchy

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et V un ouvert de \mathbb{R}^n . On appelle problème de *Cauchy*, le problème

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

où f est une fonction de $I \times V$ à valeurs dans \mathbb{R}^n , $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

On suppose que :

$$f(.,x) : I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ est mesurable pour chaque } x \text{ fixé.} \quad (H1)$$

et

$$f(t,.) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ est continue pour chaque } t \text{ fixé.} \quad (H2)$$

Ces deux conditions assurent la mesurabilité de l'application $t \rightarrow f(t, \xi(t))$, pourvu que la fonction $t \rightarrow \xi(t)$ soit continue. En effet, si ξ est une fonction étagée sur I , càd,

$\xi(t) = \sum_{i=1}^k x_i \mathcal{X}_i(t)$, où \mathcal{X}_i est la fonction indicatrice de l'intervalle I_i et $(I_i)_{1 \leq i \leq k}$ une partition de I , alors

$$f(t, \xi(t)) = \sum_{i=1}^k f(t, x_i) \mathcal{X}_i(t)$$

f est donc mesurable comme somme et produit de fonctions mesurables.

Si maintenant ξ est continue, il existe une suite $(\xi_n)_n$ de fonctions étagées convergente simplement vers ξ (uniformément sur les parties compactes de I), comme f est continue par rapport à sa deuxième composante (hypothèse $(H2)$), on obtient la convergence simple de $(f(., \xi_n(.)))_n$ vers $f(., \xi(.))$. D'où la mesurabilité de $t \rightarrow f(t, \xi(t))$. Cette dernière conclusion justifie l'existence de l'intégrale donnée dans la formule (2.6).

Le théorème de *Cauchy-Lipschitz* usuel affirme l'existence et l'unicité d'une solution maximale à condition que f soit continue et localement Lipschitzienne par rapport à x .

Mais en théorie de contrôle ces conditions doivent être affaiblies car on est amené à considérer des contrôles non continus (au mieux, continus par morceaux) et par conséquent la continuité du second membre n'est plus assurée. En particulier la solution si elle existe, n'est pas en général dérivable partout et il faut redéfinir de manière adéquate le concept de solutions, c'est l'objet du paragraphe suivant :

Définition 2.2. (Absolue continuité) Soit $A = [a, b]$ un intervalle. On dit que la fonction F est absolument continue sur A si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que, pour toute suite $([a_n, b_n])_n$ de sous intervalles de A d'intérieurs disjoints.

$$\sum_{n \geq 0} (b_n - a_n) \leq \delta \Rightarrow \sum_{n \geq 0} |F(b_n) - F(a_n)| \leq \varepsilon.$$

Nous avons la caractérisation suivante de l'absolue continuité : F est absolument continue sur l'intervalle $[a,b]$ si et seulement s'il existe une fonction intégrable (au sens de *Lebesgue*) sur l'intervalle $[a,b]$ telle que pour tout $x \in [a,b]$

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt.$$

Autrement dit, F est absolument continue si et seulement s'il existe une fonction f (*Lebesgue* intégrable) qui soit presque partout égale à la dérivée de F .

Définition 2.3. (Solution du problème (2.5)) On appelle solution du problème (2.5) tout couple $(J,x(.))$, où J est un intervalle de I contenant t_0 , $x(.)$ est une fonction absolument continue de J dans V vérifiant, pour tout $t \in J$,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,x(s))ds. \tag{2.6}$$

ou, de façon équivalente

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,x(t)) & \text{p.p sur } J \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Une solution $(J,x(.))$ est dite maximale, si pour toute autre solution $(\bar{J},\bar{x}(.))$, nous avons $\bar{J} \subset J$ et $x(.) = \bar{x}(.)$ sur \bar{J} .

On a le théorème suivant:

Théorème 2.1. (Théorème de Cauchy-Lipschitz) On suppose que la fonction:

$$f : I \times V \rightarrow V$$

vérifie les hypothèses suivantes:

1. f est localement lipschitzienne par rapport à x au sens suivant:
 - $\forall x \in V; \exists r > 0, B(x,r) \subset V, \exists \alpha \in L^1_{loc}(I, \mathbb{R}^+)$

$$- \forall t \in I; \forall y, z \in B(x, r) \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq \alpha(t) \|y - z\|.$$

2. f est localement intégrable par rapport à t , i.e.:

$$\forall x \in V; \exists \beta \in L^1_{loc}(I, \mathbb{R}^+); \forall t \in I, \|f(t, x)\| \leq \beta(t).$$

Alors pour toute donnée initiale $(t_0, x_0) \in I \times V$ il existe une unique solution maximale $(J, x(\cdot))$ du problème de Cauchy (2.5).

Remarque 2.1. On n'a pas forcément $J = I$; considérons par exemple le problème de *Cauchy*:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases} .$$

La solution générale de l'équation homogène $\dot{x}(t) = x^2$ est donnée par $\frac{-1}{t+c}$, l'unique solution vérifiant la condition initiale est $x(t) = \frac{x_0}{1-x_0t}$, définie sur les intervalles ne contenant pas $\frac{1}{x_0}$ (dans le cas où $x_0 \neq 0$). L'intervalle J est donné en fonction du signe de x_0 :

- Si $x_0 = 0$, on a $J = \mathbb{R}$ et $x(\cdot) \equiv 0$.
- Si $x_0 > 0$, on a $J =]-\infty, \frac{1}{x_0}[$ et $x(t) = \frac{x_0}{1-x_0t}$.
- Si $x_0 < 0$, on a $J =]\frac{1}{x_0}, +\infty[$ et $x(t) = \frac{x_0}{1-x_0t}$.

Remarque 2.2. Si f est seulement continue, on n'a pas unicité de la solution en général, par exemple considérons le problème de *Cauchy*:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

avec $J = \mathbb{R}$. La fonction identiquement nulle est solution, ainsi que

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{t^2}{4} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Une version globale du théorème de *Cauchy-Lipschitz* est donnée par le théorème ci-dessous.

Théorème 2.2. *Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, on suppose de plus que $V = \mathbb{R}^n$ et que f est globalement lipschitzienne par rapport à x , i.e.*

$$\exists \alpha \in L^1_{loc}(I, \mathbb{R}^+), \forall t \in I; \forall y, z \in \mathbb{R}^n, \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq \alpha(t) \|y - z\|.$$

Alors $J = I$.

2.3 Systèmes différentiels linéaires

Considérons le problème de *Cauchy* dans \mathbb{R}^n

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.7)$$

où les applications

$$\begin{aligned} t &\mapsto A(t) \in M_n(\mathbb{R}) \\ t &\mapsto B(t) \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

sont localement intégrables sur l'intervalle I considéré.

Définition 2.4. On appelle résolvante du problème (2.7), la solution du problème de *Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t}(t, t_0) = A(t)R(t, t_0), \\ R(t_0, t_0) = I_d \end{cases}$$

où $R(t, t_0) \in M_n(\mathbb{R})$.

La résolvante possède les propriétés suivantes:

1. $R(t_2, t_0) = R(t_2, t_1)R(t_1, t_0)$.

2. Si $\Delta(t, t_0) = \det R(t, t_0)$, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta}{\partial t}(t, t_0) = \operatorname{tr} A(t) \Delta(t, t_0) \\ \Delta(t_0, t_0) = 1 \end{cases}$$

3. La solution du problème de *Cauchy* (2.7) est donnée par

$$x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t R(t, s)B(s)ds.$$

4. Lorsque $t_0 = 0$, on note plutôt $M(t) = R(t, 0)$. La solution du problème de *Cauchy* (2.7) se reformule de la façon suivante:

$$x(t) = M(t)x_0 + M(t) \int_0^t M(s)^{-1}B(s)ds.$$

Remarque 2.3. Dans le cas des systèmes autonomes, le problème de *Cauchy* dans \mathbb{R}^n est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

où $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors, dans ce cas, la résolvante est l'application $M : t \mapsto \exp(tA)$, et la solution de ce problème est

$$x(t) = \exp(tA)x_0.$$

L'exponentielle $\exp(tA)$ est définie par la série

$$\exp(tA) = I_d + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n + \dots$$

Cette série est normalement convergente dans l'espace de *Banach* $M_n(\mathbb{C})$, vu que

$$\left\| \sum_{n=p}^{n=q} \frac{t^n}{n!} A^n \right\| \leq \sum_{n=p}^{n=q} \frac{|t|^n}{n!} \|A\|^n \leq \exp\|tA\|.$$

Exemple 1: Considérons l'équation autonome

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

Comme les valeurs propres $\mp i$ de la matrice A sont distinctes, A est diagonalisable, de plus,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(it) & 0 \\ 0 & \exp(-it) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et la solution du système est donnée par

$$x(t) = (\exp(tA))x_0$$

Pour toute donnée initiale $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

2.4 Analyse de la stabilité au sens de *Lyapunov*

La notion de stabilité possède un large éventail de définitions dans la littérature. Dans notre cas, nous nous focaliserons sur la stabilité au sens de *Lyapunov*, qui constitue un outil puissant dans l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre.

2.4.1 Systèmes à temps continu

Considérons le système autonome invariant dans le temps suivant

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{2.8}$$

où $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n$ est une fonction Lipschitzienne et Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n . Les points d'équilibre de (2.8) sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Définition 2.5. Un point d'équilibre x^* du système (2.8) est dit

- stable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que

$$\|x(0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x^*\| < \varepsilon; \forall t \geq 0,$$

- asymptotiquement stable si x^* est stable et si il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x(0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*,$$

- globalement asymptotiquement stable si x^* est stable et $\forall x(0) \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*.$$

- localement exponentiellement stable s'il existe trois nombres réels positifs c, K et λ tels que

$$\forall \|x(0) - x^*\| < c \Rightarrow \|x(t) - x^*\| \leq K \|x(0) - x^*\| e^{-\lambda t},$$

- instable s'il n'est pas stable.

Sans perte de généralité, nous considérons dans la suite $x^* = 0$. La théorie de *Lyapunov* est un outil important, permettant de conclure sur la stabilité d'un point d'équilibre du système. Elle repose sur l'existence de fonctions, vérifiant certains critères, et qui représentent d'une certaine manière l'énergie du système. Ce qui suit donne plus de détails sur de telles fonctions et sur la stabilité au sens de *Lyapunov*.

Définition 2.6. Une fonction $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continûment différentiable est dite définie positive dans une région Ω autour de l'origine si :

$$\begin{aligned} &\bullet V(0) = 0 \\ &\bullet V(x) > 0 \text{ pour tout } x \in \Omega - \{0\} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Si (2.9) est remplacée par $V(x) \geq 0$ alors la fonction est dite semi-définie positive.

Remarque 2.4. Une classe de fonctions souvent utilisée pour l'analyse des systèmes est celle des fonctions quadratiques $V(x) = x^T P x$ où P est une matrice symétrique réelle.

Définition 2.7. Une fonction quadratique $V(x) = x^T P x$ est dite définie positive (respectivement semi-définie positive) si toutes les valeurs propres de la matrice P sont strictement positives (respectivement positives).

Théorème 2.3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ une région incluant l'origine. L'état d'équilibre $x^* = 0$ est:

– localement stable s'il existe une fonction continûment dérivable $V(x)$ telle que :

$$\begin{aligned} &\bullet V \text{ est définie positive et } V(0) = 0, \\ &\bullet \frac{dV(x)}{dt} \leq 0, \forall x \in \Omega - \{0\}. \end{aligned}$$

– localement asymptotiquement stable s'il existe une fonction continûment dérivable $V(x)$ telle que :

$$\begin{aligned} &\bullet V \text{ est définie positive et } V(0) = 0, \\ &\bullet \frac{dV(x)}{dt} < 0, \forall x \in \Omega - \{0\}. \end{aligned}$$

– globalement asymptotiquement stable s'il existe une fonction continûment dérivable $V(x)$ telle que :

- V est définie positive et $V(0) = 0$,
- $\frac{dV(x)}{dt} < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.
- $V(x) \rightarrow \infty$, lorsque $\|x\| \rightarrow \infty$.

La fonction $V(x)$ est appelée fonction de *Lyapunov*.

Dans le cas particulier des systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI) s'écrivant

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{2.10}$$

l'origine est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative.

Théorème 2.4. *Le point d'équilibre $x^* = 0$ est asymptotiquement stable si et seulement si, pour toute matrice $Q = Q^T > 0$, il existe une matrice $P = P^T > 0$ vérifiant l'équation de Lyapunov*

$$A^T P + P A + Q = 0 \tag{2.11}$$

2.4.2 Fonction de Lyapunov pour les systèmes linéaires

Considérons le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \tag{2.12}$$

Lorsque toutes les valeurs propres de A vérifient $Re(\lambda_i) < 0$, alors A est dite matrice de *Hurwitz* ou matrice de stabilité. Supposons que la matrice A est inversible, cela, nous garantirait l'unicité du point d'équilibre $x^* = 0$. Rappelons que l'origine du système (2.12) est asymptotiquement stable si et seulement si la matrice A est de *Hurwitz*. On peut également caractériser la stabilité asymptotique en utilisant la méthode de *Lyapunov*. Considérons la fonction de *Lyapunov* suivante

$$V(x) = x^T P x$$

où P est une matrice réelle symétrique définie positive. La dérivée de V au long des trajectoires du système (2.12) est donnée par

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (PA + A^T P)x = -x^T Q x$$

où Q est la matrice symétrique donnée par

$$Q = -(PA + A^T P). \tag{2.13}$$

L'équation (2.13) est dite équation de *Lyapunov*.

Le théorème suivant caractérise la stabilité asymptotique de l'origine en terme de solution de l'équation de *Lyapunov*.

Théorème 2.5. *Une matrice A est de Hurwitz si et seulement si pour toute matrice symétrique définie positive Q donnée, il existe une matrice P symétrique définie positive vérifiant l'équation de Lyapunov (2.13). Si de plus A est de Hurwitz, alors P est l'unique solution de l'équation (2.13).*

Remarque 2.5. L'équation (2.13) est une équation linéaire algébrique qui peut se résoudre en la réécrivant sous la forme $Mx = y$, où x et y sont deux vecteurs constitués des éléments de P et Q .

Notons que la plupart des logiciels de programmation des systèmes de contrôle contiennent des commandes pour la résolution de l'équation de *Lyapunov*.

2.5 Contrôlabilité

La contrôlabilité fait partie des propriétés dites structurelles qui caractérisent les systèmes, et éventuellement permettent de les classer, par leurs propriétés algébriques et géométriques. Elle est indispensable dans les applications pour qu'un système puisse être convenablement commandé et permet de construire des lois de commande de façon effective.

Cette section aborde la contrôlabilité, après de courtes définitions, nous parlerons en détail des systèmes linéaires, autonomes et non autonomes. Leur contrôlabilité est caractérisée par le critère de *Kalman*. Pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus difficile.

Le concept de la stabilité est fortement lié au concept de l'existence d'une loi de commande

pour un système donné qui pourra rendre le système en boucle fermée asymptotiquement stable autour d'un point d'équilibre. Pour les systèmes linéaires, la contrôlabilité implique la stabilité du système.

Nous aborderons dans la section suivante le problème de la stabilisation par retour d'état statique.

Contrôlabilité

Le problème de la contrôlabilité est le suivant : étant donnés deux états $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, existe-t-il un temps T et un contrôle admissible u tels que la trajectoire $x_u(t)$ associée à ce contrôle joigne $x_0 = x(0)$ à $x_1 = x(T)$? On peut poser le même problème avec le temps T fixé.

L'objet de la sous section suivante est de caractériser la contrôlabilité des systèmes linéaires, on verra qu'il existe une caractérisation algébrique de la contrôlabilité d'un système linéaire due à *Kalman*.

2.5.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires

Considérons le système de contrôle linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & t \in I \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.14)$$

On suppose que

- les applications $t \mapsto A(t), B(t)$ sont L^∞ sur I ,
- la commande u est mesurable et localement bornée sur I , à valeurs dans \mathbb{R}^m .

Les théorèmes d'existence de solutions d'équations différentielles nous assurent l'existence sur I d'une unique application $t \mapsto x(t)$ absolument continue telle que

$$\forall t \in I, x(t) = M(t)x_0 + M(t) \int_0^t M(s)^{-1}B(s)u(s)ds. \quad (2.15)$$

où $M(t)$ est la résolvante du système linéaire homogène $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

Ensemble accessible

Définition 2.8. L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $T^* > 0$ est

$$\begin{aligned} Acc(x_0, T^*) &= \{x_1 \in \mathbb{R}^n, \exists u \in L_{loc}^\infty([0, T^*], \mathbb{R}^m), \exists x : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \text{ p.p. sur } [0, T^*], \\ x(0) &= x_0, x(T^*) = x_1. \end{aligned}$$

Autrement dit, $Acc(x_0, T^*)$ est l'ensemble des extrémités des solutions du système (2.14) en temps T^* , lorsqu'on fait varier le contrôle u .

Définition 2.9. Le système (2.14) est dit contrôlable (ou commandable) en temps T si $Acc(x_0, T^*) = \mathbb{R}^n$, autrement dit pour tout $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée relie x_0 à x_1 en temps T . i.e.:

$$\begin{aligned} \forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n, \exists u \in L_{loc}^\infty([0, T^*], \mathbb{R}^m), \exists x : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \text{ p.p. sur } [0, T^*], \\ x(0) &= x_0, x(T^*) = x_1. \end{aligned}$$

Le système (2.14) est dit contrôlable (en temps quelconque) depuis x_0 si

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{T \geq 0} Acc(x_0, T).$$

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où A et B ne dépendent pas de t , elle est dite condition de *Kalman*.

Théorème 2.6. *Le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est dit contrôlable en temps T si et seulement si : la matrice $C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ est de rang égal à n . La matrice C est appelée matrice de Kalman. La condition rang $C = n$ est appelée condition de Kalman.*

Exemple2: Le système suivant:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = Ax + Bu$$

est contrôlable car la matrice de *Kalman*. $C = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang $2 = n$.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante dans le cas non autonome (instationnaire). i.e. dans le cas où les matrices A et B ne dépendent pas du temps t .

Théorème 2.7. *Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ est contrôlable en temps T^* si et seulement si la matrice*

$$C(T^*) = \int_0^{T^*} M(t)^{-1} B(t) B^T(t) (M(t)^{-1})^T dt \quad (2.16)$$

est inversible.

La matrice $C(T^*)$ est appelée matrice de contrôlabilité. On a $C(T^*) = C^T(T^*)$, et $x^T C(T^*) x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, i.e. $C(T^*)$ est une matrice symétrique positive.

Remarque 2.6. 1. La condition (2.16) dépend de T^* mais ne dépend pas de la condition initiale x_0 , autrement dit, si un système linéaire instationnaire est contrôlable en temps T^* depuis x_0 alors il est contrôlable en temps T^* depuis tout point.

2. Si le système est autonome, on a $M(t) = \exp(tA)$, et donc

$$C(T^*) = \int_0^{T^*} \exp(-sA) B B^T \exp(-sA^T) ds.$$

Dans ce cas, $C(T_1)$ est inversible si et seulement si $C(T_2)$ est inversible, i.e. la condition de contrôlabilité ne dépend pas de T^* (ce qui n'est pas le cas pour le système instationnaire).

Exemple3: Soit le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) + u(t) \cos t \\ \dot{y}(t) = x(t) + u(t) \sin t \end{cases}$$

L'écriture matricielle du système est

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} u(t)$$

On posera

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

La résolvante du système $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ est donnée par la formule $M(t) = \exp(tA)$. Les valeurs propres de la matrice A sont $\pm i$. Un calcul simple montre que

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-it} + \frac{1}{2}e^{it} & \frac{1}{2}ie^{it} - \frac{1}{2}ie^{-it} \\ \frac{1}{2}ie^{-it} - \frac{1}{2}ie^{it} & \frac{1}{2}e^{-it} + \frac{1}{2}e^{it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} & M(t)^{-1}B(t)B(t)^T(M(t)^{-1})^T \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}^T \left[\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}^{-1} \right]^T \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 t & \cos t \sin t \\ \cos t \sin t & \sin^2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2t & 0 \\ \sin 2t & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice de contrôlabilité au temps T^* est alors

$$C(T^*) = \int_0^{T^*} \exp(-sA)BB^T \exp(-sA^T)ds$$

$$= \int_0^{T^*} \begin{pmatrix} \cos 2s & 0 \\ \sin 2s & 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin 2T^* & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2T^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que la matrice $C(T^*)$ n'est pas inversible, donc le système donné n'est pas contrôlable.

2.6 Stabilisation

Considérons à nouveau le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x, u). \tag{2.17}$$

où f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Ce système est dit en boucle ouverte et est représenté par la figure 2.1

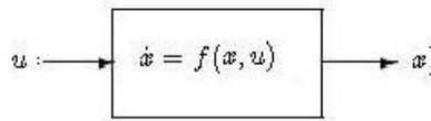


FIG. 2.1 – *Système en boucle ouverte*

Un contrôle en boucle ouverte est une application d'un intervalle de temps dans l'espace des contrôles admissibles.

Définition 2.10. Un contrôle u en boucle fermée, appelé aussi une rétroaction, ou un bouclage, ou encore un feedback, est une application $x \rightarrow u = \gamma(x)$ définie sur l'espace d'état $M = \mathbb{R}^n$ à valeurs dans l'ensemble des contrôles admissibles \mathcal{U} .

Le problème de stabilisation (ou régulation) du système (2.17) consiste à maintenir ce système près d'un point d'équilibre x^0 . Il s'agit donc de construire une loi de contrôle $u = \gamma(x)$ telle que x^0 soit un équilibre asymptotiquement stable du système en boucle

fermée (voir la figure 2.2).

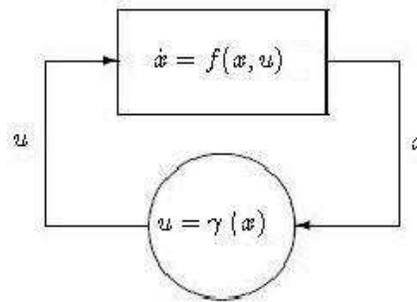


FIG. 2.2 – *Système en boucle fermée*

Définition 2.11. (Stabilisation) Soit (x^0, u^0) un point d'équilibre du système (2.17). On dit que ce système est (localement) (\mathcal{C}^1) stabilisable autour de (x^0, u^0) , s'il existe une fonction de classe \mathcal{C}^1

$$\gamma : \Xi_0 \rightarrow \mathcal{U}, \gamma(x^0) = u^0 \tag{2.18}$$

définie sur un certain voisinage Ξ_0 de x^0 pour laquelle le système en boucle fermée (à espace d'état Ξ_0).

$$\dot{x} = f(x, \gamma(x)). \tag{2.19}$$

est (localement) asymptotiquement stable au point d'équilibre x^0 . Si $\Xi_0 = \mathbb{R}^n$ et le système est (2.19) est globalement stable, on dit que le système (2.17) est globalement \mathcal{C}^1 stabilisable. Dans le cas où la fonction γ est simplement continue, on dira que le système (2.17) est stabilisable.

La loi de contrôle donnée par la formule (2.18) est appelée *bouclage statique* et la stabilisation donnée par la définition précédente est dite *stabilisation par bouclage statique*.

Dans beaucoup de situations pratiques, une partie seulement de l'état du système, appelée la sortie ou la variable observée, est mesurée. Un système commandé-observé est par définition un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x,u) \end{cases}$$

où le vecteur x est le vecteur des états du système, le vecteur u celui des contrôles (entrées) et le vecteur y celui des variables observées (sorties). (u et y sont des fonctions connues du temps). Ce système est dit en boucle ouverte et est représenté par la figure 2.3.

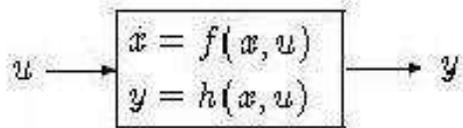


FIG. 2.3 – Système contrôlé-observé

2.6.1 Stabilisation des systèmes de contrôle linéaires

Définition 2.12. Le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est dit stabilisable (par retour d'état linéaire, ou par feedback linéaire, ou aussi par régulateur linéaire) s'il existe une matrice $K \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ tel que le système bouclé par le feedback $u(t) = Kx(t)$, i.e.

$$\dot{x}(t) = (A + BK) x(t), \tag{2.20}$$

soit asymptotiquement stable, i.e., la matrice $(A + BK)$ est de *Hurwitz*. La matrice de feedback K s'appelle matrice de gains.

Le théorème suivant donne une condition suffisante de stabilisation d'un système linéaire autonome en terme de commandabilité.

Théorème 2.8. *Si la paire (A,B) est commandable, on peut choisir la matrice de K pour placer arbitrairement les valeurs propres de la matrice $A + BK$, en d'autres termes, pour tout polynôme réel unitaire de degré n , il existe $K \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ tel que le polynôme caractéristique de $A + BK$ est égal à P .*

Ce résultat, connu sous le nom du théorème de placement des pôles, montre que l'on peut choisir la matrice K de telle sorte que la matrice $A + BK$ soit de *Hurwitz* et que l'origine du

système bouclé (2.20) soit asymptotiquement stable. Donc tout système linéaire contrôlable est stabilisable (globalement).

*Si l'esprit d'un homme s'égaré, faites-lui étudier les mathématiques
car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte,
il sera obligé de recommencer.*

Chapitre 3

Méthode de stabilisation basée sur l'observateur pour les systèmes linéaires sous incertitude

Résumé: Ce chapitre traite le problème de la stabilisation basée sur l'observateur pour les systèmes linéaires avec des paramètres incertains. Une nouvelle méthodologie de conception est proposée grâce à une utilisation judicieuse de la célèbre relation de *Young*. Cette dernière conduit à un état de synthèse moins restrictive, exprimée en terme d'inégalité matricielle linéaire. Un exemple numérique est fourni afin de montrer la validité de la méthode proposée.

3.1 Introduction

Il est bien connu que dans de nombreux systèmes de contrôle pratiques, le système présente presque certaines incertitudes et perturbations car il est très difficile d'obtenir un modèle mathématique exacte en raison de bruits de l'environnement, des erreurs de données, le vieillissement des systèmes, des variables de paramètres incertains ou lents, etc. La présence d'incertitudes peut causer l'instabilité et de mauvaises performances sur un système contrôlé. Par conséquent, des efforts considérables ont été affectés à la stabilité et à la stabilisation des systèmes linéaires avec le paramètre d'incertitude robuste.

Dans de nombreux modèles réels, le contrôle de la rétroaction de l'état pourrait ne pas garantir la stabilisabilité lorsque certains des états du système ne sont pas mesurables. Ceci est la raison pour laquelle un observateur d'état est obligatoire et inclus dans le contrôle de rétroaction. Les contrôleurs basés sur les observateurs sont souvent utilisés pour sta-

biliser les systèmes instables ou améliorer les performances du système. Néanmoins, pour les systèmes d'incertitude, il n'y a pas d'algorithme générique. De considérables activités de recherche ont été développées dans les dernières années pour les systèmes linéaires et non linéaires avec des paramètres incertains. Cependant, les méthodes abouti restent conservatrices. Motivés par les discussions ci-dessus, et dans le but d'obtenir des résultats moins conservateurs, une nouvelle méthodologie de conception est proposée. En utilisant la méthode de la fonction de *Lyapunov* combinée avec une utilisation judicieuse de la relation de *Young*, nous obtenons une nouvelle méthodologie de synthèse de la LMI. Cela conduit à une condition LMI assez simple qui est numériquement traitable avec tout logiciel LMI. Il est important de souligner que la condition de la LMI proposée est dérivée sans conditions restrictives supplémentaires, à savoir le choix a priori de la matrice de *Lyapunov* et de la contrainte d'égalité. Cette approche peut trouver ses applications sur un robot à liaison souple, dans le but de fournir des comparaisons et de montrer la pertinence de la nouvelle méthodologie de conception proposée.

Notations: Tout au long de ce chapitre, nous utilisons les notations suivantes:

- (\star) est utilisé pour les blocs induits par symétrie;
- A^T représente la matrice transposée de A .
- $\mathbb{R}^{n \times m}$ est l'ensemble des matrices de tous les réels n par m ;
- I est une matrice identité de dimension approximative et I_r représente une matrice identité de dimension r .
- La valeur 0 désigne une matrice nulle de dimension approximative, et $\mathbb{O}_{\mathbb{R}^{n \times m}}$ représente une matrice nulle avec la dimension n par m .
- Pour une matrice carrée S , $S > 0$ ($S < 0$) signifie que cette matrice est définie positive (respectivement définie négative).
- $A \leq B$ signifie que la matrice $B - A$ est symétrique semi-définie positive.

Avant de donner la formulation de notre problème, rappelons les résultats de base suivants que nous utiliserons dans la preuve de nos principaux résultats:

Lemme 3.1. (Inégalité de Young): Pour les matrices données X et Y avec des dimen-

sions appropriées, nous avons pour toute matrice inversible S et scalaire $\varepsilon > 0$.

$$X^T Y + Y^T X \leq \varepsilon X^T S X + \frac{1}{\varepsilon} Y^T S^{-1} Y. \quad (3.1)$$

Lemme 3.2. (Lemme de Schur) Soient Q_1, Q_2 et Q_3 trois matrices de dimensions appropriées telles que $Q_1 = Q_1^T$ et $Q_3 = Q_3^T$. Alors,

$$\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix} < 0$$

si et seulement si $Q_3 < 0$ et $Q_1 - Q_2 Q_3^{-1} Q_2^T < 0$.

3.2 Formulation du problème

Dans cette section, nous introduisons la classe des systèmes linéaires avec des paramètres incertains qui doivent être étudiés et le contrôle proposé basé sur l'observateur. Considérons un système linéaire continu et incertain de la forme

$$\dot{x} = (A + \Delta A(t)) x + B u \quad (3.2)$$

$$y = (C + \Delta C(t)) x + D u \quad (3.3)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $y \in \mathbb{R}^p$ est la mesure de la production (ou sortie mesurée) et $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée de commande.

A, B, C et D sont des matrices constantes de dimensions adéquates.

Premièrement, nous considérons l'hypothèse suivante:

Hypothèse: Supposons que:

- La paire (A, B) et (A, C) sont respectivement stabilisables et détectables;
- Il existe des matrices $M_i, N_i, F_i(t)$, $i = 1, 2$, de dimensions appropriées pour que les

$$\Delta A(t) = M_1 F_1(t) N_1, \quad \Delta C(t) = M_2 F_2(t) N_2 \quad (3.4)$$

où les matrices inconnues $F_i(t)$ satisfont la condition

$$F_i^T(t) F_i(t) \leq I, \quad \text{pour } i = 1, 2. \quad (3.5)$$

Pour stabiliser le système (3.2)-(3.3), *Lien* à fait appel à une commande basée sur l'observateur que nous considérons dans ce papier se trouve sous la forme:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} - Du) \quad (3.6)$$

$$u = -K\hat{x} \quad (3.7)$$

où $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est l'estimation de x , $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est le gain du contrôleur, $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ est le gain d'observateur. Par conséquent, nous pouvons écrire

$$\dot{x} = (A - BK + \Delta A(t))x + BK\varepsilon \quad (3.8)$$

$$\dot{\varepsilon} = (\Delta A(t) - L\Delta C(t))x + (A - LC)\varepsilon \quad (3.9)$$

ou de façon équivalente, la stabilisation du système (3.2)-(3.3) via la commande basée sur l'observateur (3.6)-(3.7) se ramène à l'étude de la stabilité asymptotique du système augmenté ci-dessous

$$\overbrace{\begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix}}^{\dot{}} = \begin{bmatrix} (A - BK + \Delta A(t)) & BK \\ (\Delta A(t) - L\Delta C(t)) & (A - LC) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

où $\varepsilon = x - \hat{x}$ représente l'erreur d'estimation de l'état du système.

Maintenant, considérons la fonction candidate de *Lyapunov*

$$V \left(\begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} = x^T P x + \varepsilon^T R \varepsilon. \quad (3.11)$$

Notons que la fonction de *Lyapunov* (3.11) est bien connue dans la littérature pour ce problème, qui est la principale motivation de ce chapitre. En effet, la contribution principale de cette note consiste à développer une nouvelle méthodologie de conception que nous comparons efficacement avec d'autres méthodes de conception. Or, après le calcul de la dérivée de V le long des trajectoires de (3.10), nous avons:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & x^T \left[(A - BK)^T P + P (A - BK) \right] x \\ & + \varepsilon^T \left[(A - LC)^T R + R (A - LC) \right] \varepsilon + 2x^T P B K \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +x^T [(\epsilon_1 + \epsilon_2)N_1^T N_1 + \epsilon_3 N_2^T N_2 + \frac{1}{\epsilon_1} P M_1 M_1^T P] x \\
 & +\epsilon^T [\frac{1}{\epsilon_2} R M_1 M_1^T R + \frac{1}{\epsilon_3} R L M_2 M_2^T L^T R] \epsilon \\
 & = \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sum_{11} & PBK \\ (\star) & \sum_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

où

$$\sum_{11} = \left[(A - BK)^T P + P (A - BK) \right] + [(\epsilon_1 + \epsilon_2)N_1^T N_1 + \epsilon_3 N_2^T N_2 + \frac{1}{\epsilon_1} M_1 M_1^T P] \tag{3.13}$$

$$\sum_{22} = \left[(A - LC)^T R + R (A - LC) \right] + [\frac{1}{\epsilon_2} R M_1 M_1^T R + \frac{1}{\epsilon_3} R L M_2 M_2^T L^T R] \tag{3.14}$$

et $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ sont des constantes réelles positives.

Notons que $\dot{V} < 0$, $\forall \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix} \neq 0$ si l'inégalité matricielle ci-dessous est effective.

$$\begin{bmatrix} \sum_{11} & PBK \\ (\star) & \sum_{22} \end{bmatrix} < 0 \tag{3.15}$$

La condition de stabilisation (3.15) a été obtenue en appliquant le théorème 2.3 au système augmenté (3.10) avec la fonction candidate de *Lyapunov* (3.11).

Notons que la présence du terme PBK fait de l'inégalité (3.15) une BMI. Afin de contourner cet obstacle, *Lien* a imposé un choix particulier de la matrice P , qui est $P = I$.

L'utilisation du lemme de *Schur* permet de linéariser la BMI (3.15) et d'aboutir à la condition LMI ci-dessous:

Théorème 3.1. ([9]) *Le système (3.2)-(3.3) est asymptotiquement stabilisable par (3.6)-(3.7) s'il existe des constantes positives $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, une matrice définie positive $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, et $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\hat{L} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ telles que*

$$\begin{bmatrix} X_{11} & BK & M_1 & 0 & 0 \\ (\star) & X_{22} & 0 & R M_1 & \hat{L} M_2 \\ (\star) & (\star) & -\epsilon_1 I & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\epsilon_2 I & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\epsilon_3 I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.16}$$

où

$$X_{11} = A^T + A - K^T B^T - BK + (\epsilon_1 + \epsilon_2)N_1^T N_1 + \epsilon_3 N_2^T N_2$$

$$X_{22} = A^T R + RA - \hat{L}C - C^T \hat{L}^T.$$

Les gains de contrôle de stabilisation basés sur l'observateur sont donnés par K et $L = \hat{R}^{-1} \hat{L}$.

Tenant de réduire le conservatisme lié au choix particulier de la matrice P , *Lien* a proposé une approche alternative où il a introduit une nouvelle variable \hat{P} qui se doit de satisfaire la contrainte égalité $PB = B\hat{P}$. Il suffit alors d'un simple changement de variable $\hat{K} = \hat{P}K$ pour contourner le problème du terme bilinéaire PBK , qui devient $PBK = B\hat{P}K = B\hat{K}$, qui est linéaire par rapport à la nouvelle variable \hat{K} . Cette approche alternative a donné lieu à la condition de stabilisation formulée dans le théorème ci-dessous:

Théorème 3.2. ([9]) *Le système (3.2)-(3.3) est asymptotiquement stabilisable par (3.6)-(3.7) s'il existe des constantes positives $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, deux matrices définies positives $P, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, et les matrices $\hat{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\hat{L} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\hat{P} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ telles que*

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & B\hat{K} & PM_1 & 0 & 0 \\ (\star) & Y_{22} & 0 & RM_1 & \hat{L}M_2 \\ (\star) & (\star) & -\epsilon_1 I & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\epsilon_2 I & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\epsilon_3 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.17)$$

$$PB = B\hat{P} \quad (3.18)$$

où

$$Y_{11} = A^T P + PA - \hat{K}^T B^T - B\hat{K} + (\epsilon_1 + \epsilon_2) N_1^T N_1 + \epsilon_3 N_2^T N_2$$

$$Y_{22} = A^T R + RA - \hat{L}C - C^T \hat{L}^T.$$

Les gains de contrôle de stabilisation basés sur l'observateur sont donnés par $K = \hat{P}^{-1} \hat{K}$ et $L = \hat{R}^{-1} \hat{L}$.

Même si le théorème 3.2 offre une condition de synthèse moins restrictive que celle du théorème 3.1, elle reste prudente (conservative) en raison de la présence de la contrainte d'égalité (3.18). Pour surmonter cette difficulté, de nombreuses activités de recherche ont récemment été proposées dans la littérature, mais celles-ci concernent les systèmes dans le

cas en temps discret. Dans la section suivante, nous présentons une nouvelle méthodologie de conception de systèmes en temps continu. Nous vous proposons une manière pour surmonter l'obstacle de la *PBK* de couplage sans aucune contrainte égalité.

3.3 Résultat principal: Nouvelle méthodologie de conception

3.3.1 Les systèmes sans paramètres incertains

Pour la simplicité de la présentation et comprendre facilement le principal résultat proposé, nous considérons d'abord les systèmes linéaires sans paramètres incertains, en posant $\Delta A(t) = \mathbb{O}_{\mathbb{R}^{n \times n}}$ et $\Delta C(t) = \mathbb{O}_{\mathbb{R}^{p \times n}}$. La technique est basée sur l'utilisation de la relation de *Young* avec une manière élégante afin d'obtenir une nouvelle méthodologie de synthèse de la LMI. A ce stade, nous pouvons énoncer le théorème principal suivant:

Théorème 3.3. ([9]) *Le système (3.2)-(3.3) est asymptotiquement stabilisable par (3.6)-(3.7) si, pour un scalaire fixe $\epsilon > 0$, il existe deux matrices définies positives, $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, et les matrices $\hat{K} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\hat{L} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ sont de sorte que la condition LMI suivante est faisable:*

$$\left[\begin{array}{cc} \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{P}_1(\mathcal{P}, \hat{K}) & 0 \\ 0 & \mathbb{P}_2(R, \hat{L}) \end{bmatrix}}^{\mathcal{Q}_1} & \overbrace{\begin{bmatrix} B\hat{K}^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}^{\mathcal{Q}_2^T} \\ \overbrace{\begin{bmatrix} \hat{K}B^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}^{\mathcal{Q}_2} & \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{\epsilon}\mathcal{P} & 0 \\ 0 & -\epsilon\mathcal{P} \end{bmatrix}}^{\mathcal{Q}_3} \end{array} \right] < 0 \quad (3.19)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_1(\mathcal{P}, \hat{K}) &= \mathcal{P}A^T - \hat{K}B^T - A\mathcal{P} - B\hat{K}^T \\ \mathbb{P}_2(R, \hat{L}) &= A^TR - C^T\hat{L} + RA - \hat{L}^TC. \end{aligned}$$

Par conséquent, les gains de contrôle basés sur l'observateur de stabilisation sont donnés par $K = \hat{K}^T\mathcal{P}^{-1}$ et $L = \hat{R}^{-1}\hat{L}^T$.

Preuve: L'objectif consiste à linéariser l'inégalité bilinéaire (3.15). Tout d'abord, notons que de la technique de la congruence, nous avons:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & PBK \\ (\star) & \Sigma_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.20)$$

est équivalent à

$$\overbrace{\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & PBK \\ (\star) & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}}^{\Sigma_{equiv}} < 0. \quad (3.21)$$

Détaillant les calculs et en posant $\mathcal{P} = P^{-1}$, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \Sigma_{equiv} &= \begin{bmatrix} \Sigma_{equiv}^{11} & BK \\ (BK)^T & \Sigma_{equiv}^{22} \end{bmatrix}, \\ \Sigma_{equiv}^{11} &= \mathcal{P} (A - BK)^T + (A - BK) \mathcal{P}, \\ \Sigma_{equiv}^{22} &= (A - LC)^T R + R (A - LC) \end{aligned}$$

qui peuvent être réécrits sous la forme appropriée suivante:

$$\mathcal{Q}_1 + \overbrace{\begin{bmatrix} BK \\ 0 \end{bmatrix}}^{X^T} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}}^Y + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}}^{Y^T} \overbrace{\begin{bmatrix} (BK)^T & 0 \end{bmatrix}}^X \quad (3.22)$$

avec

$$\mathcal{Q}_1 = \begin{bmatrix} \Sigma_{equiv}^{11} & 0 \\ 0 & \Sigma_{equiv}^{22} \end{bmatrix}$$

De la relation de *Young*, on en déduit que

$$\sum_{equiv} \leq \mathcal{Q}_1 + \epsilon X^T S X + \frac{1}{\epsilon} Y^T S^{-1} Y. \quad (3.23)$$

L'idée clé pour récupérer la variable $\hat{K} = \mathcal{P}K^T$ et d'éliminer la variable K isolée, consiste à remplacer dans la relation de *Young* la matrice S par \mathcal{P} . Par conséquent, à partir du

lemme de *Schur* et $S = \mathcal{P}$, l'inégalité $\sum_{equiv} < 0$ est effective si la condition suivante est remplie.

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{Q}_1 & \overbrace{\begin{bmatrix} B(K\mathcal{P}) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}^{\mathcal{Q}_2^T} \\ \hline \overbrace{\begin{bmatrix} (K\mathcal{P})^T B^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}^{\mathcal{Q}_2} & \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{\epsilon}\mathcal{P} & 0 \\ 0 & -\epsilon\mathcal{P} \end{bmatrix}}^{\mathcal{Q}_3} \end{array} \right] < 0. \quad (3.24)$$

Notons que (3.24) est identique à (3.19) en utilisant le changement de variables $\hat{K} = \mathcal{P}K^T$, $\hat{L} = L^T R$. Cela étant, sous la condition LMI (3.19) du théorème 3.1, nous avons $\sum < 0$, ce qui signifie que le vecteur $\begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ est asymptotiquement stable. Ceci termine la preuve.

3.3.2 Systèmes avec paramètres incertains

Théorème 3.4. ([9]) *Le système (3.2)-(3.3) est asymptotiquement stabilisable par (3.6)-(3.7) si, pour des scalaires fixes $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$ et $\epsilon_4 > 0$, il existe deux matrices définies positives, $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, et les matrices $\hat{K} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\hat{L} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et un scalaire positif ϵ_3 afin que la condition LMI (3.25) soit réalisable. Par conséquent, les gains de stabilisation de contrôle basés sur l'observateur sont donnés par $K = \hat{K}^T \mathcal{P}^{-1}$ et $L = \hat{R}^{-1} \hat{L}^T$.*

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \overbrace{\begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 0 & \gamma_{22} \end{bmatrix}}^{\mathcal{Q}_1} & \overbrace{\begin{bmatrix} [B\hat{K}^T & 0] & [\mathcal{P}N_1^T & \mathcal{P}N_2^T & M_1] & [0 & 0] \\ [0 & I] & [0 & 0 & 0] & [RM_1 & \hat{L}^T M_2] \end{bmatrix}}^{\mathcal{Q}_2^T} & \\ \hline \overbrace{\begin{bmatrix} [\hat{K}B^T & 0] \\ [0 & I] \end{bmatrix}}^{\mathcal{Q}_2} & \overbrace{\begin{bmatrix} [-\frac{1}{\epsilon_4}\mathcal{P} & 0] & 0 & 0 \\ [0 & -\epsilon_4\mathcal{P}] & 0 & 0 \\ 0 & [-\frac{1}{\epsilon_1+\epsilon_2}I & 0 & 0] \\ & [0 & -\frac{1}{\epsilon_3}I & 0] \\ & [0 & 0 & -\epsilon_1 I] \\ 0 & 0 & 0 & [-\epsilon_2 I & 0] \\ & & & [0 & -\epsilon_3 I] \end{bmatrix}}^{\mathcal{Q}_3} & \\ \hline \overbrace{\begin{bmatrix} [0 & M_1^T R] \\ [0 & M_2^T \hat{L}] \end{bmatrix}} & & \end{array} \right] < 0 \quad (3.25)$$

où

$$\begin{aligned}\Upsilon_{11} &= \mathcal{P}A^T - \hat{K}B^T + A\mathcal{P} + B\hat{K}^T \\ \Upsilon_{22} &= A^TR - C^T\hat{L} + RA - \hat{L}^TC.\end{aligned}$$

Preuve: Nous exploitons la relation de *Young* exactement comme dans la démonstration du théorème 3.3. Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}\Sigma_{equiv} &= \begin{bmatrix} \mathcal{P}\Sigma_{11}\mathcal{P} & BK \\ (\star) & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \\ &\leq \begin{bmatrix} \mathcal{P}\Sigma_{11}\mathcal{P} & 0 \\ (\star) & \Sigma_{22} \end{bmatrix} + \epsilon_4 \begin{bmatrix} BK \\ 0 \end{bmatrix} \mathcal{P} \begin{bmatrix} BK \\ 0 \end{bmatrix}^T + \frac{1}{\epsilon_4} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \mathcal{P}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T\end{aligned}\quad (3.26)$$

où Σ_{11} et Σ_{22} sont définies respectivement dans (3.13) et (3.14). Maintenant, en utilisant le changement de variables $\hat{K} = \mathcal{P}K^T$, $\hat{L} = L^TR$, le côté droit de (3.26) peut être réécrit sous la forme

$$\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_2\mathcal{Q}_3^{-1}\mathcal{Q}_2^T$$

où \mathcal{Q}_1 , \mathcal{Q}_2 et \mathcal{Q}_3 sont donnés dans (3.25). Par conséquent, à partir du lemme de *Schur*, l'inégalité $\Sigma_{equiv} < 0$ est effective si la condition LMI (3.25) est réalisable.

3.3.3 Sur les conditions nécessaires de la faisabilité de (3.25)

Cette partie est consacrée à quelques remarques au sujet de la faisabilité de la condition suffisante LMI proposée. Une discussion sur les conditions nécessaires de la faisabilité de (3.25) est fournie. Il faut remarquer que la condition nécessaire à la faisabilité de la LMI (3.25) est $\mathcal{Q}_1 < 0$, ce qui est équivalent à la stabilisabilité et à la détectabilité du système (3.2). Toutefois, dans le théorème 3.1 et le théorème 3.2, la condition nécessaire de la faisabilité de (3.16) et (3.17) est plus forte que la stabilisabilité de (A,B). En effet, pour linéariser la BMI (3.15), *Chang-Hua* et *Lien* ont choisi de prendre des solutions particulières, à savoir $P = I$ dans (3.16) et la forte contrainte supplémentaire de l'égalité (3.18)

dans le théorème 3.2. En effet, prenons l'exemple suivant:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \ 0], \quad D = 0,$$

$$M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \quad N_1 = 0, \quad N_2 = 0.$$

Si la contrainte égalité $PB = B\hat{P}$ est vérifiée, nous obtenons alors $B^\perp PB = 0$, où $B^\perp = [0 \ 1]$ est la matrice orthogonale de B . Posons $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$ et $K = [k_1 \ k_2]$.

Tant que $B^\perp PB = p_{12} = 0$, alors la matrice de *Lyapunov* P doit être diagonale.

Maintenant, supposons que la LMI (3.17) est satisfaite. Cela conduit évidemment à l'inégalité $Y_{11} < 0$, à partir de laquelle on déduit que

$$(A - BK)^T P + P (A - BK) < 0 \tag{3.27}$$

En développant le calcul, nous obtenons

$$P (A - BK) = \begin{bmatrix} -p_{11}(1 + k_1) & p_{11}(2 - k_2) \\ 2p_{22} & 3p_{22} \end{bmatrix}.$$

Par conséquent

$$(A - BK)^T P + P (A - BK) = \begin{bmatrix} -2p_{11}(1 + k_1) & \mathbf{(1.2)} \\ \mathbf{(1.2)}^T & 6p_{22} \end{bmatrix} < 0$$

où

$$\mathbf{(1.2)} = 2p_{22} + p_{11}(2 - k_2)$$

et par conséquent, $p_{22} < 0$, ce qui contredit la définition de $P > 0$. D'autre part, la LMI (3.16) n'est pas résoluble puisque la matrice de *Lyapunov* choisie par l'auteur est $P = I_n$, qui est en diagonale. Sinon, en utilisant Matlab LMI toolbox, notre LMI (3.25) est résoluble en choisissant $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10$ et $\epsilon_4 = 100$, et nous obtenons les solutions suivantes:

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 2.2124 & -0.2815 \\ -0.2815 & 0.0951 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 25.7343 & -7.6906 \\ -7.6906 & 0.0951 \end{bmatrix},$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 53.7083 \\ 1.7287 \end{bmatrix}, \hat{L} = [35.68 \quad 12.60], \epsilon_3 = 134.62,$$

Les gains K et L sont respectivement donnés par

$$K = [42.65 \quad 144.48], L = \begin{bmatrix} 12.69 \\ 37.84 \end{bmatrix}.$$

Maintenant, considérons un cas plus général. On prend un système de telle sorte que

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La contrainte égalité $PB = B\hat{P}$ mène à $P_{12} = B^\perp PB = 0$ avec $B^\perp = [0 \quad I]$, ce qui signifie que la matrice de *Lyapunov* P est diagonale. D'autre part, la LMI (3.17) signifie que

$$(A - BK)^T P + P (A - BK) = \begin{bmatrix} \text{(1.1)} & \text{(1.2)} \\ \text{(1.2)}^T & \text{(2.2)} \end{bmatrix} < 0$$

où

$$\begin{aligned} \text{(1.1)} &= P_{11}(A_{11} - B_1 K_1) + (A_{11} - B_1 K_1)^T P_{11}, \\ \text{(1.2)} &= A_{21}^T P_{22} + P_{11}(A_{12} - B_1 K_2), \\ \text{(2.2)} &= A_{22}^T P_{22} + P_{22} A_{22}. \end{aligned}$$

Par conséquent, A_{22} doit être stable par *Schur* pour garantir

$$A_{22}^T P_{22} + P_{22} A_{22} < 0. \quad (3.28)$$

Notons également que la faisabilité de la LMI (3.16) exige

$$A_{22}^T + A_{22} < 0 \quad (3.29)$$

et, en particulier, nous avons $P_{22} = I$.

Pour résumer, pour ce type de systèmes, en plus de la stabilisabilité et la détectabilité, la condition nécessaire à la faisabilité de (3.16) et (3.17) - (3.18) est la stabilité de *Schur* de A_{22} dans le sens de (3.28) et (3.29), respectivement. Ceci montre la pertinence de la méthode de conception proposée.

3.3.4 Conclusion

Dans cette partie, les nouvelles conditions suffisantes pour construire des contrôleurs basés sur les observateurs pour les systèmes linéaires incertains à temps continu sont proposées. Le principal avantage de notre méthodologie de conception réside dans la sélection simultanée de gains de régulation basée sur l'observateur via la réalisation d'une seule condition BMI qui devient une LMI en gelant certains scalaires. Un tel avantage de transformer une BMI en une LMI entraîne la difficulté de calcul du choix "a priori" de ces scalaires. Cependant, divers résultats de simulation ont montré que l'approche proposée s'insère très bien par rapport à toutes les principales méthodes disponibles dans la littérature.

Conclusion

Par ce travail, nous estimons avoir contribué à l'étude du problème de la commande basée sur un observateur pour les systèmes dynamiques incertains. La commande pour les systèmes linéaires à paramètres incertains, est un sujet difficile quand il s'agit d'un retour par un observateur. En effet, la présence des paramètres incertains rend le problème de la stabilisation complexe. La littérature est abondante et de différentes méthodes et techniques ont été proposées. Néanmoins, le problème est loin d'être résolu dans sa totalité; il reste beaucoup de pistes à explorer pour améliorer les méthodes actuelles. Dans le cadre de ce mémoire, nous nous focalisons sur le problème de la stabilisation en utilisant les approches basées sur des LMIs. Celles-ci ont l'avantage de fournir des solutions par des algorithmes de programmation convexe. Par conséquent, naturellement les résultats obtenus dans ce mémoire se focalisent autour de cette approche et les efforts se sont concentrés sur l'établissement de nouvelles conditions LMI moins contraignantes vu le conservatisme des méthodes LMI actuelles qui obéissent à des contraintes fortes difficiles à vérifier (contraintes égalités).

En guise de conclusion, le but de ce mémoire était de développer des méthodes de synthèse LMI nouvelles dans le contexte de la stabilisation des systèmes dynamiques linéaires incertains. Différentes conditions de synthèse sous forme LMI ont été obtenues grâce à l'utilisation de la technique de congruence et de la fameuse inégalité de *Young* d'une manière judicieuse. Ces dernières s'avèrent moins contraignantes comparées aux méthodes LMI existantes dans la littérature.

Bibliographie

- [1] Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron, and Venkataramanan Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15 of SIAM Studies in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, USA, 1994.
- [2] Carsten Scherer and Siep Weiland. *Linear Matrix Inequalities in Control*. Delft Center for Systems and Control, Delft University of Technology, Department of Electrical Engineering, Eindhoven University of Technology. The Netherlands.
- [3] Khailath T. *Linear systems*. Englewoodcliffs, USA, 1980.
- [4] Richard J.P. *Algèbre et analyse pour l'automatique*. Hermès Science, France, 2001.
- [5] Bonnas, F. and Rouchon, P.; *Analyse et Commande des Systèmes Dynamiques*, Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique, septembre 2003.
- [6] Brockett, R. W. *Asymptotic stability and feedback stabilization*. Differential Geometric Control Theory. (R. W. Brockett, R.S. Millman and H.J. Sussman, Eds.), Boston, USA. pp. 181-191, 1983.
- [7] D. Henrion, *Stabilité des Systèmes Linéaires Incertains à Commande Contrainte*. PhD thesis, Institut National des sciences appliquées, 1999.
- [8] Roberto Tempo Petersen, Ian R. *Robust control of uncertain systems: classical results and recent developments*. Automatica, pages 1315-1335, 2014.

-
- [9] C.H. Lien. *Robust observer-based control of systems with state perturbations via LMI approach*. IEEE Transactions on Automatic Control, 49(8): 1365-1370, 2004.
- [10] David G. Luenberger. *An introduction to observers*. IEEE Trans. Automat. Control, ac16(6): 596-602, 1971.
- [11] A. Trofino C. A. R. Crusius. *Sufficient LMI conditions for output feedback control problems*. IEEE Trans. Automat. Control, 44: 1053-1057, 1999.
- [12] Z.G. Li, C.Y. Wen, and Y.C. Soh. *Observer-based stabilization of switching linear systems*. Automatica, 39(3): 517-524, 2003.
- [13] Chang-Hua, Lien. *An efficient method to design robust observer-based control of uncertain linear systems*. Appl. Math. Comput., 158(1):29-44, 2004.
- [14] J. Daafouz, P. Riedinger, and C. Iung. *Stability analysis and control synthesis for switched systems : a switched Lyapunov function approach*. IEEE Trans. on Automatic Control, 47(11):1883-1887, 2002.
- [15] E. Trélat. *Contrôle optimale: Théorie et applications*. Université d'Orléans, 2007.
- [16] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. *Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty*. IEEE Transactions on Automatic Control, 41(3): 436-442, Mar 1996.
- [17] F. Bedouhene H. Kheloufi, A. Zemouche and M. Boutayeb. *A new observer-based stabilization method for linear systems with uncertain parameters*. European Control Conference (ECC), 2013.
- [18] H. Kheloufi, A. Zemouche, F. Bedouhene, and M. Boutayeb. *On LMI conditions to design observer-based controllers for linear systems with parameter uncertainties*. Automatica, 49(12): 3700-3704, 2013.

- [19] Kheloufi Houria. *Contribution à la commande basée sur un observateur pour les systèmes dynamiques incertains*. Thèse de doctorat, Université Mouloud Mammeri, Tizi-ouzou, 2015.

Bibliographie

- [1] Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron, and Venkataramanan Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15 of SIAM Studies in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, USA, 1994.
- [2] Carsten Scherer and Siep Weiland. *Linear Matrix Inequalities in Control*. Delft Center for Systems and Control, Delft University of Technology, Department of Electrical Engineering, Eindhoven University of Technology. The Netherlands.
- [3] Khailath T. *Linear systems*. Englewoodcliffs, USA, 1980.
- [4] Richard J.P. *Algèbre et analyse pour l'automatique*. Hermès Science, France, 2001.
- [5] Bonnas, F. and Rouchon, P.; *Analyse et Commande des Systèmes Dynamiques*, Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique, septembre 2003.
- [6] Brockett, R. W. *Asymptotic stability and feedback stabilization*. Differential Geometric Control Theory. (R. W. Brockett, R.S. Millman and H.J. Sussman, Eds.), Boston, USA. pp. 181-191, 1983.
- [7] D. Henrion, *Stabilité des Systèmes Linéaires Incertains à Commande Contrainte*. PhD thesis, Institut National des sciences appliquées, 1999.
- [8] Roberto Tempo Petersen, Ian R. *Robust control of uncertain systems: classical results and recent developments*. Automatica, pages 1315-1335, 2014.

-
- [9] C.H. Lien. *Robust observer-based control of systems with state perturbations via LMI approach*. IEEE Transactions on Automatic Control, 49(8): 1365-1370, 2004.
- [10] David G. Luenberger. *An introduction to observers*. IEEE Trans. Automat. Control, ac16(6): 596-602, 1971.
- [11] A. Trofino C. A. R. Crusius. *Sufficient LMI conditions for output feedback control problems*. IEEE Trans. Automat. Control, 44: 1053-1057, 1999.
- [12] Z.G. Li, C.Y. Wen, and Y.C. Soh. *Observer-based stabilization of switching linear systems*. Automatica, 39(3): 517-524, 2003.
- [13] Chang-Hua, Lien. *An efficient method to design robust observer-based control of uncertain linear systems*. Appl. Math. Comput., 158(1):29-44, 2004.
- [14] J. Daafouz, P. Riedinger, and C. Iung. *Stability analysis and control synthesis for switched systems : a switched Lyapunov function approach*. IEEE Trans. on Automatic Control, 47(11):1883-1887, 2002.
- [15] E. Trélat. *Contrôle optimale: Théorie et applications*. Université d'Orléans, 2007.
- [16] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. *Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty*. IEEE Transactions on Automatic Control, 41(3): 436-442, Mar 1996.
- [17] F. Bedouhene H. Kheloufi, A. Zemouche and M. Boutayeb. *A new observer-based stabilization method for linear systems with uncertain parameters*. European Control Conference (ECC), 2013.
- [18] H. Kheloufi, A. Zemouche, F. Bedouhene, and M. Boutayeb. *On LMI conditions to design observer-based controllers for linear systems with parameter uncertainties*. Automatica, 49(12): 3700-3704, 2013.

- [19] Kheloufi Houria. *Contribution à la commande basée sur un observateur pour les systèmes dynamiques incertains*. Thèse de doctorat, Université Mouloud Mammeri, Tizi-ouzou, 2015.

Bibliographie