

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud MAMMERI, Tizi-Ouzou



Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département d'Automatique

Mémoire de Fin d'Etudes

En vue de l'obtention du diplôme

Master académique en automatique

Option commande des systèmes

Thème

Filtrage numérique d'image
Par les transformées orthogonales

Présenté par :

KHABOU Ali

KEROUANE Samir

Dirigé par : **MESSAR Youcef**

Soutenu le : 02 / 07 / 2012

Promotion 2012

Remerciements

Nous commençons par dire louange à celui qui a fixé un terme à toute chose. Nous remercions le tout puissant pour nous avoir gratifiés de santé et de moyens, sans l'usage desquels, il serait impossible de mener à terme notre travail.

Nous tenons à remercier tout le corps professoral pour avoir ; contribué à notre formation, et veillé sur notre orientation pour le meilleur essor de nos études.

*Particulièrement, nous remercions monsieur **MESSAR YUCEFE** notre promoteur, pour avoir accepté de nous encadrer, pour son disponibilité qui nous a été précieux et pour tout son suivi et ces conseils sous lesquels nous avons pu mener à bien notre travail*

Nos sincères remerciements, sont destinés à tous les membres du jury, pour avoir répondu à notre demande d'évaluer ce travail.

Enfin, nous présentons nos très vifs et chaleureux à la fois remerciements à tous les étudiants et camarades de classe, à tous ceux et celles, qui de près ou de loin, ont contribué et prié à la réussite de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce travail :

A mes très chers parents et ma grande mère qui sont toujours mon soutien et ma force. Le joyau de ma vie, que dieu me les garde.

A mes frères et a ma chère sœur, pour leurs aides et leurs précieux conseils (Youcef, Hassen, Luiza.)

A mes ami(e)s, pour leurs amitiés sincères (Belaid, Nourdine, Tassadit, Siham, Dahbia.)

A tous mes collègues de notre promotion, particulièrement à mellal lyece, à tous les gens qui ont partagé mes moments de bonheur et de souffrances durant ce parcourt.

A toute personne qui m'apprécie.....

Samir

Dédicaces

Je dédie ce travail :

A mes très chers parents qui sont toujours mon soutien et ma force. Le joyau de ma vie, que dieu me les garde.

A mon promoteur monsieur Messar Youcef qui ma suivi durant ma construction de mon travail.

A ma chère future femme (Chili Samia)et à mes frères et ma chère sœur, pour leurs aides et leurs précieuxconseilles(Ahmed

Rabah,Froudja,Ahcen,Hamid,Hakim)

A mes ami(e)s, pour leurs amitiés sincères (Farid ,Khaled,Hamid,Rabah,Lyés ,Hayet,Lamia)

A tous mes collègues de notre promotion, particulièrement à mellal lyés,Bounini Farid, à tous les gens qui ont partagé mes moments de bonheur et de souffrances durant ce parcourt.

A toute personne qui m'apprécie.....

Ali

SOMMAIRE

Introduction Générale.....	1
-----------------------------------	----------

Chapitre I : Les transformées orthogonales

I. Introduction.....	3
II. Généralité sur l'image	3
II.1. Définition d'une image	3
II.2. Image numérique	3
II.3. Caractéristique d'une image numérique	4
II.3.1 Le pixel	4
II.3.2 La résolution	4
II.3.3 Le contour et la texture	4
II.3.4 Le bruit	4
III. Les transformées orthogonales	4
III.1 Définition	4
III.1.1 La transformée de Fourier	4
III.1.2 La transformée ondelette	5
III.1.3 L'ondelette de Haar	5
III.1.4 La transformée de Hadamard	5
IV. Transformée de Fourier continue	6
IV.1. Cas unidimensionnelle	6
IV.2. Cas bidimensionnelle	6
IV.2.1. La transformée de Fourier inverse	6
IV.2.2. Interprétation de la transformée de Fourier bidimensionnelle	6
IV.2.2.1. Interprétation d'une sinusoïde....	6
IV.2.2.2. Interprétation globale de l'image	8
IV.3. Propriétés de la transformée de Fourier bidimensionnelle.....	9
IV.4. Transformée de Fourier discrète	10
IV.4.1. Propriétés de la transformée de Fourier discrète.....	11
IV.5. Transformée de Fourier rapide bidimensionnelle	13
V. La transformée en cosinus	15
V.1. Définition	15

V.2.	Formules de la transformée en cosinus bidimensionnelle	16
VI.	Conclusion	16

Chapitre II : Filtrage Fréquentiel

I.	Introduction	17
II.	Systèmes linéaire	17
III.	Produit convolution	18
III.1.	Convolution d'une image dans l'espace continue	18
III.2.	Convolution d'une image dans l'espace discrète	19
III.4.	Propriétés de produit de convolution	20
IV.	Filtrage linéaire	21
IV.1.	Filtre passe-bas	22
IV.1.1.	Filtre idéal	22
IV.1.2.	Fenêtre gaussienne	23
IV.1.3.	Fenêtre de Hamming	23
IV.1.4.	Filtre de butterrworth	24
IV.1.5.	Filtre exponentiel	24
IV.1.6.	Filtre cosinus	25
IV.2.	Filtre passe-haut	26
IV.2.1.	Filtre idéal	26
IV.2.2.	Filtre de butterrworth	27
IV.2.3.	Filtre exponentiel	28
IV.2.4.	Fenêtre gaussienne	28
IV.2.5.	Filtre cosinus	28
IV.3.	Filtre passe bande	29
IV.4.	Filtre coupe bande	30
V.	Algorithme d'implémentation des filtres par le produit de convolution	31
V.1.	Les filtres passe-bas	31
V.2.	Les filtres coupe-bande	32
V.3.	Algorithme d'implémentation des filtres précédents par le produit de convolution	33
VI.	Conclusion	34

Chapitre III : Synthèses des filtres numériques

I.	Introduction	35
II.	Généralités sur les signaux bidimensionnels	35
II.1.	Echantillonnage et quantification	36
II.2.	Théorème d'échantillonnage bidimensionnel	37
II.3.	Brosse d'impulsions de Dirac	38
II.4.	Interprétation fréquentielle de l'échantillonnage	39
II.5.	Le repliement spectral dans le cas bidimensionnel	41
II.6.	Transformation en Z bidimensionnelle	41
II.6.1.	Définition	41
II.6.2.	Lien avec la transformée de Fourier bidimensionnelle	42
II.6.3.	La transformée inverse	43
III.	Le filtrage numérique	43
III.1.	Les filtres numériques unidimensionnels	44
III.1.1.	Filtres à réponse impulsionnelle finie	44
III.1.2.	Fonction de transfert de filtre RIF	45
III.1.3.	Propriétés	45
III.1.4.	Synthèses des filtres RIF par méthode des fenêtres	46
III.2.	Filtres à réponse impulsionnelle infinie	47
III.2.1.	Fonction de transfert	47
III.2.2.	Synthèse des filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII)	47
	III.2.2.1. Transformation standard ou méthode de l'invariance	
impulsionnelle		48
	III.2.2.2. Méthode de l'invariance indicielle	50
	III.2.2.3. Transformation homographique ou équivalence de	
l'intégration		51
IV.	Les filtres numériques bidimensionnels	52
IV.1.	Les filtres RIF bidimensionnelles	52
IV.2.	Méthodes de synthèse des filtres RIF	53
IV.2.1.	Méthode de transformation fréquentielle	54
IV.2.2.	Méthode des fenêtres	55
IV.3.	Les filtres à réponse impulsionnelle infinie bidimensionnelle	55
IV.3.1.	Propriété	57
IV.3.1.1.	Le problème de la causalité	57

IV.3.1.2.	Le problème de la stabilité	57
IV.3.2.	Synthèse des filtres RII bidimensionnelle	58
IV.3.2.1.	Transformation monodimensionnel au bidimensionnelle	59
IV.3.2.2.	Synthèse par la méthode de décomposition en valeur singulier	61
IV.3.2.3.	Synthèse dans le domaine spatial	62
IV.3.2.4.	Synthèse dans le domaine fréquentiel	64
V.	Exemple de filtre RII et son algorithme d'implémentation	64
VI.	Conclusion	67

Chapitre IV : Partie expérimentale

I.	Introduction	68
II.	Résultat d'application des filtres RIF sur l'image muscle	68
II.1.	Résultat pour les filtres passe-bas	69
II.1.1.	Filtre idéal	69
II.1.2.	Le filtre Butterwourth	71
II.1.3.	Le filtre gaussien	71
II.2.	Résultat pour les filtres passe-haut	72
II.2.1.	Filtre idéal	72
II.2.2.	Filtre Butterwourth	74
II.2.3.	Le filtre Gaussien	75
II.3.	Résultats pour le filtre passe bande	76
II.4.	Résultat pour le filtre coupe bande	77
III.	Résultat d'application des filtres RII sur l'image muscle	79
III.1.	Résultats pour les filtres passe	79
III.1.1.	Filtre idéal	79
III.1.2.	Le filtre betterwourth	81
III.1.3.	Le filtre Gaussien	82
III.2.	Résultats pour les filtres passe haut	82
III.2.1.	Filtre idéal	84
III.2.2.	Le filtre Butterworth	84
III.2.3.	Le filtre Gaussien	85
III.3.	Résultat pour le filtre RII passe bande	86
III.4.	Résultat pour le filtre RII coupe bande	86

IV.	Conclusion	87
	Conclusion générale	88

Liste des abbreviations

Liste des abéviations

T_e : Δt période d'échantillonnage.

F_e : fréquence échantillonnage.

F_{max} : fréquences maximale du signal.

$X(t)$: signal numérique monodimensionnelle.

K : nombre des échantillons.

$X(k)$: signal d'entrée échantillonné.

$Y(k)$: signal de sortie échantillonné.

$X(f)$: transformé de Fourier du signal $x(k)$.

θ : Pulsation du signal $X(f)$

$G(f)$: fonction de transfert du filtre en fréquence.

$Y(f)$: transformé de Fourier du signal $y(k)$.

$g(k)$: réponse impulsionnelle.

$G(z)$: fonction de transfert en z

N, M : nombre d'échantillons des signaux $Y(f)$ et $X(f)$ respectivement.

a_n, b_n : les coefficients du dénominateur et numérateur respectivement.

δ_1 : erreur d'approximation (bande de fréquence bloqué).

$\pm \delta_2$: erreur entre les deux bandes passante et bloqué.

z : la variable dans le plan des z .

C, D : les constantes.

$D(z), N(z)$: le dénominateur et le numérateur respectivement.

P_i : polynôme de système.

$Q(z)$: le polynôme caractéristique.

A, B, C, D : matrices de dimensions approprié.

λ_i : les valeurs propres.

RIF : filtre à réponse impulsionnelle fini.

RIF : filtre à réponse impulsionnelle infinie.

M : ordre de filtre RIF

Re , Im : partie réelle et imaginaire respectivement.

$w(t)$: signal fenêtre.

rect : fenêtre rectangulaire.

α, β, λ : paramètres fixes.

TFD : transformé de Fourier discrète.

TFR : transformé de Fourier rapide.

L : longueur de la réponse de filtre RIF.

ψ : la relation d'interpolation

J : critère à minimiser.

I : matrice identité.

$f(x,y)$: signal numérique deux dimensions.

$F(u,v)$: transformé de Fourier de $f(x,y)$.

u, v : les composantes en fréquences.

φ : la phase.

2D : deux dimensions.

$h(x,y)$: réponse impulsionnelle 2D.

$\delta(x,y)$: impulsion 2D.

$x(k,l)$: signal numérique 2D.

$d(k,l)$: impulsion unité 2D.

$u(k,l)$: échelon unité 2D.

TZ : transformé en z.

Liste des figures

Listes des figures

Figure 1.1 : La sinusoïde bidimensionnelle.

Figure 1.2 : Modification des paramètres d'une sinusoïde bidimensionnelle.

Figure 1.3: Les basses fréquences (ω petit) et les hautes fréquences (ω grand) dans une image.

Figure 1.4: Présentation habituelle des résultats de la transformée de Fourier discrète des signaux bidimensionnelle: les composantes basses fréquences sont éclatées aux quatre coins de l'image.

Figure 1.5: Présentation des résultats de la transformée de Fourier discrète des signaux bidimensionnelle: les composantes basses fréquences sont regroupées au centre de l'image

Figure 2.1: Schéma d'un système linéaire

Figure 2.2 : Schéma d'un système temps invariant.

Figure 2.3: Filtre circulaire passe bas idéal.

Figure 2.4: Filtre passe bas rectangulaire.

Figure 2.5 : Filtre gaussienne passe bas.

Figure 2.6 : Filtre Hamming passe bas.

Figure 2.7 : Filtre de Butterworth passe bas.

Figure 2.8: Filtre exponentiel passe bas.

Figure 2.9 : Filtre cosinus passe bas.

Figure 2.10 : Filtre passe haut circulaire.

Figure 2.11 : Filtre passe haut rectangulaire .

Figure 2.12: Filtre Butterworth passe haut .

Figure 2.13: Filtre exponentiel passe haut.

Figure 2.14: Réponse fréquentiel de filtre gaussienne passe haut.

Figure 2.15: Filtre cosinus passe haut.

Figure 2.16 : filtre passe bande.

Figure 2.17: Filtre coupe bande idéal.

Figure 3.1: Schéma de l'échantillonneur idéal.

Figure 3.1: Les représentations spatiales d'une image échantillonnée.

Figure 3.2: Illustration de l'échantillonnage dans le domaine des fréquences.

Figure. 3.3: Points du plan pour lesquels il faut connaître les conditions initiales afin de pouvoir calculer la réponse d'un filtre récursifs bidimensionnel.

Figure 3.4: Implémentation d'IIR par SVD.

Figure 3.5 : l'opération de filtrage.

Figure 4.1 : Image muscle

Figure 4.2 : Le spectre de Fourier de l'image muscle.

Figure 4.3 :Résultat du filtre passe bas circulaire sur l'image muscle avec les fréquences de coupures suivante : a) $s=0.05$ b) $s= 0.3$ c) $s= 0.4$

Figure 4.4 :Résultat du filtre passe bas rectangulaire sur l'image muscle pour:a) $S=0.05$ b) $S= 0.2$ c) $S=0.4$

Figure 4.5 : Résultat du filtre Betterwourth passe bas sur l'image muscle pour:a) $S= 0.05$ b) $S=0.3$ c) $S=0.45$

Figure 4.6 : Résultat du filtre Gaussian passe bas sur l'image muscle pour: a) $S= 0.05$ b) $S=0.3$ c) $S=0.45$

Figure 4.7 :Résultat du filtre passe haut circulaire sur l'image muscle pour les seuils :a) $s= 0.05$ b) $s= 0.3$ c) $s=0.45$

Figure 4.8 :Résultat du filtre passe haut rectangulaire sur l'image muscle pour:a) $S=0.05$ b) $S= 0.3$ c) $S=0.4$

Figure 4.10 : Résultat du filtre Gaussian passe haut sur l'image muscle pour:a) $S=0.05$ b) $S=0.35$ c) $S=0.45$

Figure 4.11 : Résultat du filtre passe bande circulaire sur l'image muscle pour a) $s_1=0.05$, $S_2=0.2$ b) $S_1= 0.15$, $S_2=0.3$ c) $S_1=0.15$, $S_2=0.45$

Figure 4.12 :Résultat du filtre passe bande rectangulaire sur l'image muscle pour:a) $S_1=0.05$, $S_2=0.1$ b) $S_1= 0.05$, $S_2=0.3$ c) $S_1= 0.1$, $S_2=0.45$

Figure 4.13 : Résultat du filtre coupe bande circulaire sur l'image muscle pour:a) $S_1=0.05$, $S_2=0.15$ b) $s_1=0.05$, $S_2=0.3$ c) $S_1=0.05$, $S_2=0.45$

Figure 4.13 : Résultat du filtre coupe bande circulaire sur l'image muscle pour:a) $S_1=0.05$, $S_2=0.1$ b) $s_1=0.1$, $S_2=0.3$ c) $S_1=0.4$, $S_2=0.45$

Figure 4.14: Résultat du filtre passe bas circulaire sur l'image muscle pour: a) $S1=0.05$, $S2=0.1$ b) $S1=0.25$, $S2=0.4$ c) $S1=0.05$, $S2=0.45$

Figure 4.15 : Résultat du filtre passe bas circulaire sur l'image muscle pour: a) $S1=0.15$, $S2=0.25$ b) $S1=0.35$, $S2=0.4$ c) $S1=0.4$, $S2=0.45$

Figure 4.16 : Résultat du filtre Butterworth sur l'image muscle pour: a) $S1=0.05$, $S2=0.1$ b) $S1=0.05$, $S2=0.3$ c) $S1=0.3$, $S2=0.45$

Figure 4.17: Résultat du filtre Gaussien sur l'image muscle pour: a) $S1=0.05$, $S2=0.2$ b) $S1=0.2$, $S2=0.35$ c) $S1=0.3$, $S2=0.45$

Figure 4.18 : Résultat du filtre passe haut circulaire sur l'image muscle pour: a) $S1=0.25$, $S2=0.4$ b) $S1=0.35$, $S2=0.45$ c) $S1=0.05$, $S2=0.45$

Figure 4.19 : Résultat du filtre passe haut circulaire sur l'image muscle pour: a) $S1=0.4$, $S2=0.45$ b) $S1=0.3$, $S2=0.4$ c) $S1=0.15$, $S2=0.2$

Figure 4.20: Résultat du filtre Butterworth passe haut sur l'image muscle pour: a) $S1=0.05$, $S2=0.1$ b) $S1=0.15$, $S2=0.35$ c) $S1=0.25$, $S2=0.45$

Figure 4.21 : Résultat du filtre Gaussien passe haut sur l'image muscle pour: a) $S1=0.05$, $S2=0.1$ b) $S1=0.2$, $S2=0.35$ c) $S1=0.3$, $S2=0.45$

Figure 4.22 : Résultat du filtre passe bande circulaire sur l'image muscle pour: a) $S1=0.05$, $S2=0.1$ b) $S1=0.2$, $S2=0.35$ c) $S1=0.3$, $S2=0.45$

Figure 4.23: Résultat du filtre RIIcoupe bande circulaire sur l'image muscle pour: a) $S1=0.05$, $S2=0.1$, $S3=0.15$, $S4=0.2$ b) $S1=0.075$, $S2=0.12$, $S3=0.25$, $S4=0.3$ c) $S1=0.15$, $S2=0.3$, $S3=0.4$, $S4=0.5$

Introduction Générale

Introduction générale

Introduction

Il est inutile de rappeler l'impact considérable du filtrage numérique dans les méthodes d'investigation en traitement d'image et ce, en exploitant les transformations orthogonales.

Les progrès de la technologie des appareils de prise de vue et la production d'émulsion photographique de plus en plus performants (sensibilité, rapidité, couleur etc.) ont donné au filtrage numérique un aspect indispensable en tant qu'outil performant pour le traitement et l'exploitation des images issues de différents capteurs.

L'image numérisée subit un ensemble de traitements dans le but d'une mise en forme de l'information qui sera finalement soumise à une analyse thématique dont l'objectif est l'extraction des entités significatives. C'est pourquoi, à travers cette étude, nous essayons d'explorer les techniques des transformations orthogonales qui fournissent un champ d'investigation riche en traitement d'image. Ces techniques de sélection d'information exploitant particulièrement, la transformation de Fourier permettront de mieux connaître et discriminer les phénomènes d'intérêt en montrant les difficultés d'accéder à ce niveau et ce, en étudiant particulièrement les filtres numériques. Ces derniers peuvent être en deux grandes familles: les filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) et les filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII).

Les filtres RII présentent plusieurs avantages par rapport aux filtres RIF, mais restent compliquer à la réalisation et à la conception car, ils nécessitent un grand nombre de coefficients dans la fonction de transfert.

Le but principal de ce mémoire est de présenter les synthèses des filtres à réponse impulsionnelle infinie et fini pour le cas unidimensionnelle et le cas bidimensionnelle. Pour cela, nous avons divisé notre mémoire en quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux généralités et aux définitions des transformations orthogonales, tout en privilégiant la transformée de Fourier dans le domaine continue et discret pour le cas unidimensionnel et particulièrement, bidimensionnelle. On abordera aussi la transformée de Fourier inverse et les interprétations nécessaires pour appréhender notre problématique.

Introduction générale

Dans le deuxième chapitre, on parlera sur le filtrage fréquentiel dans le plan des fréquences spatiales en abordant avec intérêt les notions de base du produit de convolution dans l'espace continu et discret avec leurs propriétés fondamentales. L'accent est mis sur le filtrage linéaire et les différents filtres utilisés avec des équations et des figures pour illustrer leurs caractéristiques essentielles.

Le troisième chapitre est dédié au filtrage numérique dans lequel nous illustrerons les différents types de filtres numériques et leurs relations fondamentales.

Le quatrième chapitre est consacré à une expérimentation de chaque filtre proposé sur des données images, ce qui va nous permettre de définir les champs d'application. Enfin, nous concluons sur les avantages et les inconvénients des différents filtres proposés dans la résolution du problème de filtrage d'informations en imagerie.

CHAPITRE I

Les transformées orthogonales

I. Introduction

Avec la parole, l'image constitue l'un des moyens les plus importants qu'utilise l'homme pour communiquer avec autrui. C'est un moyen de communication universel dont la richesse du contenu permet aux êtres humains de tout âge et de toute culture de se comprendre.

Pour faire l'analyse d'une image, il est souvent commode de définir une transformée inversible et adaptée à ce que l'on veut en faire, plutôt que d'opérer directement sur les niveaux de gris de l'image. Ces transformées sont appelées transformées orthogonales.

II. Généralités sur l'image

II.1. Définition d'une image

C'est un signal de 2D ou 3D en tenant compte de la profondeur de l'image ou du temps. L'image continue est associée à une fonction continue à deux variables $f(x, y)$, x et y étant des variables d'espace, par exemple coordonnées d'un point sur l'écran.

II.2. Image numérique

Contrairement aux images obtenues à l'aide d'un appareil photo analogique, ou dessinées sur papier, les images manipulées par un ordinateur sont numériques (représentées par une série de bits). L'image numérique est la représentation plane dont la surface est divisée en éléments de tailles fixes appelés cellules ou pixels, chacun ayant comme caractéristique un niveau de gris ou de couleurs prélevé à l'emplacement correspondant dans l'image réelle, ou calculé à partir d'une description interne de la scène à représenter.

La numérisation d'une image est la conversion de celle-ci de son état analogique (distribution continue d'intensités lumineuses dans un plan xOy), en une image numérique représentée par une matrice bidimensionnelle de valeurs numériques $f(x, y)$.

Où : x, y : Les coordonnées cartésiennes d'un point de l'image.

$f(x, y)$: niveau de gris en ce point, appelé aussi amplitude ou radiométrie.

II.3. Caractéristiques d'une image numérique

II.3.1. Le pixel

Un pixel mot abrégé de l'anglais picture element (élément d'image), la plus petite unité constitutive d'une image. Chaque pixel affiche une seule couleur. Le pixel est également employé comme unité de mesure de la taille et de la résolution d'une image.

II.3.2. La résolution

C'est la clarté ou la finesse de détails atteinte par un moniteur ou une imprimante dans la production d'images. Sur les moniteurs d'ordinateurs, la résolution est exprimée en nombre de pixels par unité de mesure (pouce ou centimètre). On utilise aussi le mot résolution pour désigner le nombre total de pixels affichables horizontalement ou verticalement sur un moniteur, plus ce nombre est grand, plus la résolution est meilleure.

II.3.3. le contour et la texture :

Les contours représentent la frontière entre les objets de l'image, ou la limite entre deux pixels dont les niveaux de gris représentent une différence significative. Les textures décrivent la structure de ceux-ci. L'extraction de contour consiste à identifier dans l'image les points qui séparent deux textures différentes.

II.3.4. Le bruit

Un bruit (parasite) dans une image est considéré comme un phénomène de brusque variation de l'intensité d'un pixel par rapport à ses voisins, il provient de l'éclairage des dispositifs optiques et électroniques du capteur [KADDOUR Chakib].

III. Les transformées orthogonales

III.1. Définition

III.1.1. La transformée de Fourier

C'est un outil qui permet de passer du domaine spatial au domaine fréquentiel

III.1.2. La transformation Ondelette

La transformée en ondelettes est une transformation adaptée à l'analyse des signaux non stationnaires d'énergie finie. Elle permet d'obtenir une représentation locale de l'information contenue dans le signal analysé.

III.1.3. L'ondelette de haar

L'ondelette de Haar est créée par Alfréd Haar en 1909]. On considère que c'est la première ondelette connue. Elle est la plus simple à comprendre et à implémenter. C'est une fonction dilatée (et /ou translatée) de la fonction mère ψ qui vaut :

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si Non} \end{cases} \quad (1.1)$$

III.1.4. La transformée de Hadamard

La transformée d'Hadamard est un exemple d'une classe généralisée d'une transformée de Fourier. Elle est nommée d'après le mathématicien français Jacques Hadamard et effectue une opération linéaire et involutive avec une matrice orthogonale et symétrique sur 2^m nombres réels (ou complexes, bien que les matrices utilisées possèdent des coefficients réels). Ces matrices sont des matrices de Hadamard.

La transformée de Hadamard peut être vue comme étant issue d'une transformée de Fourier discrète et s'avère être en fait, l'équivalent d'une transformée de Fourier discrète multidimensionnelle d'une taille de $2 \times 2 \times 2 \dots \times 2$. Elle décompose un vecteur arbitraire en entrée en une superposition de fonctions de Walsh.

Dans la suite de ce chapitre on va s'intéresser à la transformée de Fourier, qu'on va l'utiliser dans les prochains chapitres.

IV. Transformée de Fourier continue:**IV. 1. Cas unidimensionnelle**

Soit un signal certain $f(x)$, sa transformée de Fourier $F(u)$ est définie par la relation suivante :

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j2\pi ut} dt \quad (1.2)$$

Sa transformée inverse est définie comme suit :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{j2\pi ut} du \quad (1.3)$$

IV.2. Cas bidimensionnelle

La représentation fréquentielle des signaux bidimensionnelle est l'extension directe de celle des signaux monodimensionnels.

La transformée de Fourier $F(u, v)$ d'un signal bidimensionnelle $f(x, y)$ est [M.FRIKEL et G.BINET]:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)e^{-j(ux+vy)} dx dy \quad (1.4)$$

IV.2.1. La transformée de Fourier inverse:

La reconstitution de signal spatial se fait par addition des différentes fréquences spatiales pondérées par les amplitudes complexes ainsi calculées.

La formule suivante définit la transformée inverse de Fourier d'un signal bidimensionnelle:

$$F(u, v) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v)e^{j(ux+vy)} du dv \quad (1.5)$$

IV.2.2. Interprétation de la transformée de Fourier bidimensionnelle**IV.2.2.1. Interprétation d'une sinusoïde**

Le signal sinusoïdal temporel $e^{j\omega t}$ est caractérisé par la fréquence $\omega/2\pi$ donnant

(En Hertz) le nombre de vibrations du signal par unité de temps (en secondes). Dans le domaine fréquentiel, il est représenté par une impulsion de Dirac située à cette fréquence.

La fréquence spatiale (u, v) caractérisant $e^{j(ux+vy)}$ est une impulsion de Dirac de coordonnées (u, v) , c'est un couple de paramètres qui peut être interprété comme une fréquence du signal donner par : $\sqrt{u^2 + v^2}$ est un angle d'arrivée dont sa tangente est v/u . En effet, les points de même phase φ de la sinusoïde sont situés sur des droites parallèles entre elles et perpendiculaires au vecteur (u, v) .

$$ux + vy = \varphi + 2k\pi \quad (1.6)$$

Un signal sinusoïdal réel a pour transformée un couple d'impulsion de Dirac situées en (u, v) et $(-u, -v)$. Si la phase à l'origine est nulle, les deux impulsions de Dirac sont réelles et ont la même amplitude. Si la phase est $\pi/2$, leurs amplitudes sont imaginaires pures et opposées.

La partie réelle et la partie imaginaire de la sinusoïde spatiale apparaissent donc comme des tôles ondulées orientées dans la direction $y = -u.x/v$. Si on se déplace dans la direction $y = -u.x/v$, le signal est constant. Si on se déplace perpendiculairement à cette direction, on voit un signal monodimensionnel dont la pulsation est $\sqrt{u^2 + v^2}$. C'est dans cette direction (μ) que la fréquence paraît la plus élevée. Dans une autre direction Ψ , la fréquence apparente est $\sqrt{u^2 + v^2} \cos(\Psi - \theta)$. En particulier, un signal tel que $v = 0$ ne dépend pas de y : les points de phase constante de la tôle ondulée sont situés sur des parallèles à l'axe des ordonnées. L'impulsion de Dirac est alors située au point $(u, 0)$ du domaine des fréquences, c'est à dire sur l'axe des abscisses dans ce domaine [Joël Le Roux].

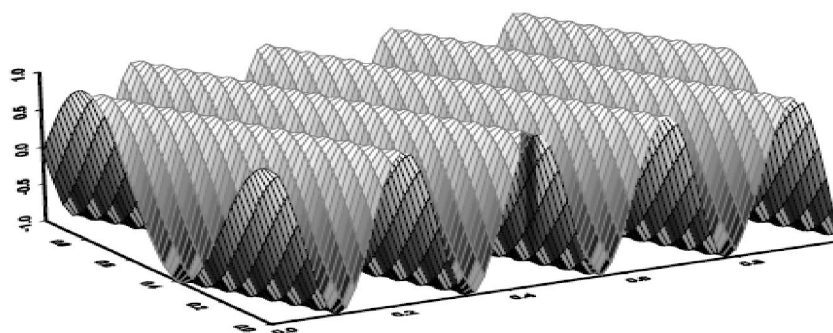


Figure 1.1: La sinusoïde bidimensionnelle

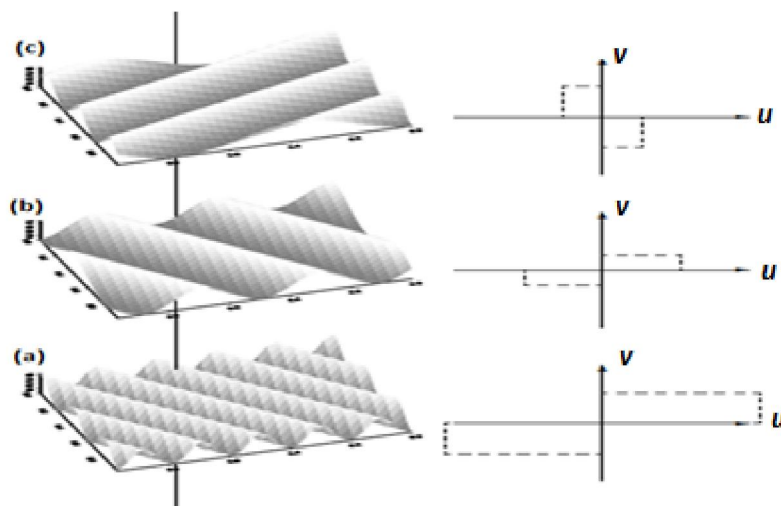


Figure 1.2: Modification des paramètres d'une sinusoïde bidimensionnelle: (a) $u = 2, v = 4$, (b) $u = 1, v = 2$, (c) $u = 2, v = 1$.

IV.2.2.2 Interprétation globale de l'image

Exactement comme dans le cas des signaux temporels, le module de la transformée de Fourier donne la répartition énergétique en fonction de la fréquence. Cette répartition énergétique se voit mieux en considérant la représentation en coordonnées polaires du plan des fréquences spatiales $(u, v) \rightarrow (\omega, \theta)$

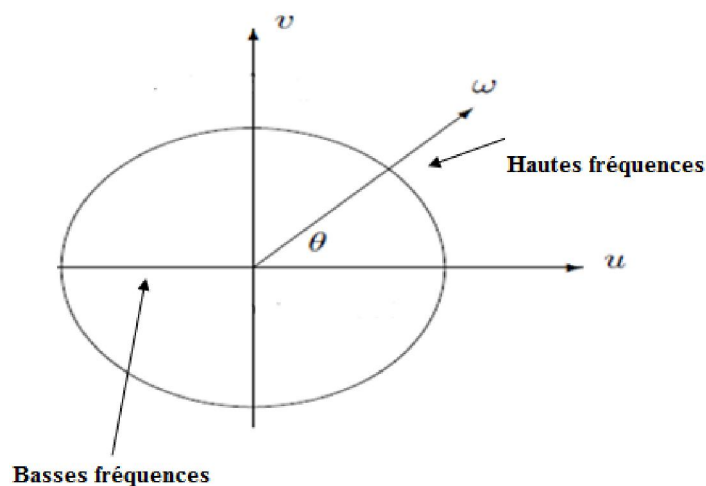


Figure 1.3: Les basses fréquences (ω petit) et les hautes fréquences (ω grand) dans une image

La valeur de $F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)$ pour un couple (ω, θ) donne l'amplitude d'une sinusoïde complexe de pulsation ω dans la direction θ . Pour de nombreuses images, la moyenne (au sens des probabilités) de l'amplitude est indépendante de la direction θ et décroît régulièrement en fonction de ω . Si on diminue l'amplitude des hautes fréquences (filtrage passe bas en fonction de ω pour toutes les valeurs de θ), l'image apparaît floue, les contours sont moins nets. Si au contraire on augmente l'amplitude aux hautes fréquences on rehausse les contours mais l'image paraît plus bruitée. La figure 1.3 illustre cette répartition dans le cas d'une image très simple: un disque de niveau constant auquel on a ajouté une fonction aléatoire.

IV.2.3 Propriétés de la transformée de Fourier bidimensionnelle

- **La symétrie :**

Soit $f(x, y)$ est une fonction réelle, sa transformée de Fourier vérifie :

$$F(u, v) = \overline{F(-u, -v)} \quad (1.7)$$

Si $f(x, y)$ est réelle et $f(x, y) = f(-x, -y)$, alors $F(u, v)$ est aussi réelle et $F(u, v) = F(-u, -v)$.

Si $f(x, y)$ est réelle et $f(x, y) = -f(-x, -y)$, alors $F(u, v)$ est imaginaire et $F(u, v) = -F(-u, -v)$.

- **La translation :**

Si $f(x, y)$ a pour transformée de Fourier $F(u, v)$, alors :

$$g(x, y) = f(x - x_0, y - y_0) \quad (1.8)$$

Sa transformée de Fourier est définie comme :

$$G(u, v) = F(u, v)e^{-j(ux_0 + vy_0)} \quad (1.9)$$

- **Homothétie dans une direction :**

On suppose que l'image $f(ax, by)$ correspond à l'image $f(x, y)$ qui est compressée dans l'espace par un facteur a dans la direction x et par un facteur b dans direction y , alors :

$$F(ax, by) = \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) \quad (1.10)$$

- **Convolution :**

La transformée de Fourier d'une convolution 2D s'écrit :

$$G(u, v) = F(u, v)H(u, v) \quad (1.11)$$

- **Séparabilité**

Si une fonction $f(x, y)$ peut s'écrire sous la forme $f(x, y) = g(x)h(y)$ alors :

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(y)e^{-j(ux+vy)} dx dy$$

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-j(ux)} [h(y)e^{-j(vy)} dy] dx \quad (1.12)$$

Elle est donc égale au produit des transformées de Fourier $G(u)$ et $H(v)$ de $g(x)$ et $h(y)$ respectivement.

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} [g(x)e^{-j(vx)} dx] \int_{-\infty}^{+\infty} [h(y)e^{-j(vy)} dy] \quad (1.13)$$

Finalement :

$$F(u, v) = G(u)H(v) \quad (1.14)$$

- **Translation fréquentiel:**

$$TF \{f(x, y) e^{(u_0 x + v_0 y)}\} = F(u - u_0, v - v_0) \quad (1.15)$$

IV.3 Transformation de Fourier discret

La transformée de Fourier unidimensionnelle discrète joue un rôle très important dans le domaine de traitement de signal. Elle est définie pour un signal $f(n)$ par :

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j2\pi \left(\frac{kn}{N}\right)} \quad (1.16)$$

Pour : $n=0$ à $N-1$.

Sa transformée inverse est définie par :

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{j2\pi \left(\frac{kn}{N}\right)} \quad (1.17)$$

Pour : $k=0$ à $N-1$.

La transformée de Fourier discrète bidimensionnelle est employée pour le traitement d'image. Si on considère l'image $f(m, n)$ de M ligne et N colonne sa transformée de Fourier discrète est définie par [Victor Musoko] :

$$F(k, l) = \frac{1}{M \cdot N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) e^{-j2\pi(\frac{mk}{M} + \frac{ln}{N})} \quad (1.18)$$

La transformée de Fourier inverse devient :

$$f(m, n) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} F(k, l) e^{j2\pi(\frac{mk}{M} + \frac{ln}{N})} \quad (1.19)$$

Où $F(k, l)$ est le spectre de l'image dans le domaine fréquentiel, pour $k=0$ à $N-1$, $l=0$ à $M-1$, $m=0$ à $N-1$, $n=0$ à $M-1$ pour tout les variables discrets.

IV.3.1 Propriétés de la transformée de Fourier discret

La transformée de Fourier discrète bidimensionnelle a beaucoup de propriétés qui sont utiles dans le traitement d'image, les plus intéressantes sont :

- **Translation :**

Un rapport simple qui peut être dérivé pour décaler une image dans un domaine ou dans l'autre. La paire de transformée de Fourier a les propriétés de translation suivantes :

$$f(m, n) e^{-j2\pi(\frac{mk_0}{M} + \frac{nl_0}{N})} \leftrightarrow F(k - k_0, l - l_0) \quad (1.20)$$

Et

$$f(m - m_0, n - n_0) \leftrightarrow F(k, l) e^{-j2\pi(\frac{mk_0}{M} + \frac{nl_0}{N})} \quad (1.21)$$

- **Homothétie :**

$$F(ak, bl) = \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{k}{a}, \frac{l}{b}\right) \quad (1.22)$$

- **Périodicités :**

La transformée de Fourier discrète est périodique :

$$F(k, l) = F(k + M, l) = F(k, l + N) = F(k + M, l + N) \quad (1.23)$$

Sa transformée inverse aussi :

$$f(m, n) = f(m + M, n) = f(m, n + N) = f(m + M, n + N) \quad (1.24)$$

- **Séparabilité :**

La 2-D transformée de Fourier est linéairement séparable c.-à-d, la transformée de Fourier d'une image bidimensionnelle est la transformée de Fourier des lignes suivies de la transformée de Fourier des colonnes en résultant (ou vice versa) comme il est montré ci-dessous :

$$\begin{aligned} F(k, l) &= \frac{1}{M \cdot N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) e^{-j2\pi \left(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N} \right)} \\ &= \frac{1}{M \cdot N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) e^{-j2\pi \left(\frac{mk}{M} \right)} e^{-j2\pi \left(\frac{nl}{N} \right)} \\ &= \left[\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} f(m, n) e^{-j2\pi \left(\frac{mk}{M} \right)} \right] \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) e^{-j2\pi \left(\frac{nl}{N} \right)} \right] \\ F(k, l) &= F(k)F(l) \end{aligned} \quad (1.25)$$

IV.4. Transformée de Fourier rapide bidimensionnelle

L'algorithme de calcul rapide de la transformée de Fourier (*FFT*) peut s'appliquer de la manière suivante. La transformée discrète correspond à une double sommation qu'on peut effectuer en deux temps; d'abord sur la variable m puis sur la variable n

$$F(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} f(m, n) e^{-2j\pi \frac{km}{N}} \right] e^{-2j\pi \frac{nl}{N}} \quad (1.26)$$

Dans la sommation sur m et n est fixés, on peut y reconnaître une transformée discrète monodimensionnelle sur chacune des lignes du tableau des $N \times N$ valeurs de $f(m, n)$. Cette transformée monodimensionnelle peut se calculer grâce à l'algorithme de transformée de Fourier rapide monodimensionnelle et transforme la ligne numéro n en une ligne de N éléments de la forme $G(e^{j2\pi u/N}, n)$ pour $u = 0$ à $N-1$.

$$G(k, n) = \sum_{m=0}^{N-1} f(m, n) e^{-2j\pi \frac{mk}{N}} \quad (1.27)$$

On peut maintenant calculer la transformée de Fourier de chacune des colonnes de ce tableau en appliquant une nouvelle fois un algorithme de transformée de Fourier rapide monodimensionnelle :

$$F(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} G(k, n) e^{-2j\pi \frac{nl}{N}} \quad (1.28)$$

On applique ainsi $2N$ fois l'algorithme de transformée de Fourier rapide. Cet algorithme nécessite de l'ordre de $2N \log_2 N$ calculs élémentaires. Le calcul de la transformée de Fourier bidimensionnelle se fait en effectuant de l'ordre de $2N^2 \log_2 N^2$ calculs élémentaires. C'est la même quantité de calculs que dans le cas où les N^2 valeurs seraient rangées en une colonne pour permettre le calcul d'une transformée monodimensionnelle mais les calculs ne sont pas identiques.

- **Remarque :**

A l'attention des lecteurs connaissant les mécanismes de l'algorithme de transformée de Fourier rapide monodimensionnelle.

Il est possible de réduire de N à $0.75N$ le nombre de calculs élémentaires en combinant les calculs en colonne et en ligne, la transformée rapide monodimensionnelle est une succession de $\log_2 N$ étapes élémentaires ($j = 1, 2, 4, \dots, N-1$). Dans la transformée bidimensionnelle, il est possible d'effectuer l'étape l sur la variable v immédiatement après l'étape sur la variable k , avant l'étape $j+1$ portant sur μ . Nommons $F_j(k, l)$, $F_j(k+j, l)$, $F_j(k, l+j)$, $F_j(k+j, l+j)$ les quatre données utilisées dans une étape élémentaire et $F_{2j}(k, l)$, $F_{2j}(k+j, l)$, $F_{2j}(k, l+l)$, $F_{2j}(k+j, l+j)$ les résultats de cette étape élémentaire. Si on effectue une étape de la transformée rapide sur les lignes, puis l'étape identique sur les colonnes, la séquence de ces deux opérations élémentaires (papillon) de la transformée peut s'écrire sous forme matricielle en posant

$$a = e^{j2\pi/N} :$$

$$\begin{bmatrix} F_{2j}(k, l) \\ F_{2j}(k+j, l) \\ F_{2j}(k, l+j) \\ F_{2j}(k+j, l+j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a^l & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a^l \\ 1 & 0 & -a^l & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a^l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a^k & 0 & 0 \\ 1 & a^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a^k \\ 0 & 0 & 1 & a^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_j(k, l) \\ F_j(k+k, j) \\ F_l(kl+j) \\ F_l(k+1, l+1) \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Ce qui nécessite quatre multiplications élémentaires. Si on effectue le produit des deux matrices avant d'effectuer le produit du vecteur de droite par une matrice, on obtient

$$\begin{bmatrix} F_{2l}(k, l) \\ F_{2l}(k+k, l) \\ F_{2l}(uv+l) \\ F_{2l}(u+1, v+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a^u & a^v & a^{u+v} \\ 1 & -a^u & a^v & -a^{u+v} \\ 1 & a^u & -a^v & -a^{u+v} \\ 1 & -a^u & -a^v & a^{u+v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_l(u, v) \\ F_l(u+u, l) \\ F_l(uv+l) \\ F_l(u+1, v+1) \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

V. La transformée en cosinus

V.1 Définition

Cette transformée est en fait une variante de la transformée de Fourier discrète qui transforme un signal réel en un signal réel (la notion de phase n'y apparaît pas). Elle est couramment utilisée en codage d'images à débit réduit (formats JPEG, MPEG2) : en effet, on a pu montrer qu'en général, pour les types d'images couramment transmises, la décroissance de l'énergie en fonction de la fréquence est rapide dans le cas de cette transformée. Il est donc possible de coder correctement une image en effectuant la transformation en cosinus de cette image puis en codant judicieusement les hautes fréquences : par exemple, le nombre de bits de codage de l'amplitude décroît linéairement de 6 à 0 en fonction de $u + v$, les amplitudes aux fréquences situées au delà d'une certaine valeur sont considérées comme nulles. La reconstitution de l'image se faisant par transformée de Fourier inverse.

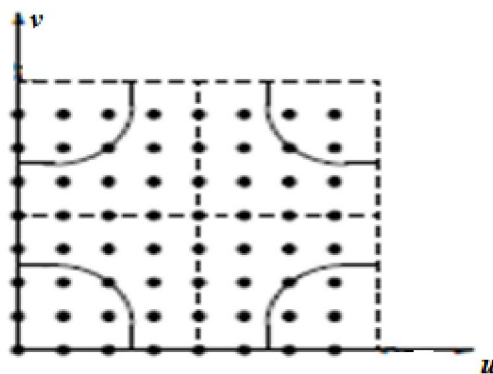


Figure 1.4: Présentation habituelle des résultats de la transformée de Fourier discrète des signaux bidimensionnelle: les composantes basses fréquences sont éclatées aux quatre coins de l'image.

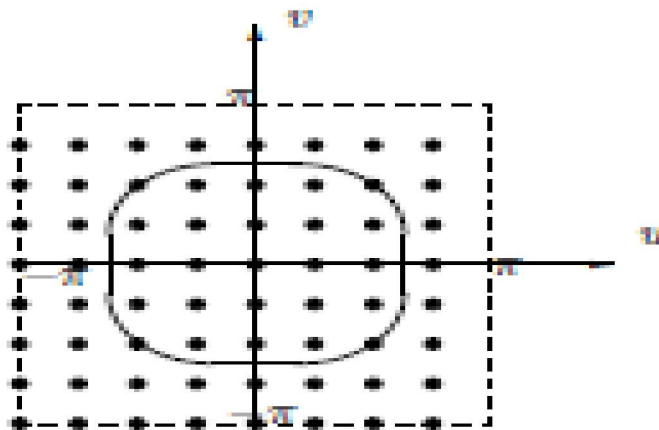


Figure 1.5: Présentation des résultats de la transformée de Fourier discrète des signaux bidimensionnelle: les composantes basses fréquences sont regroupées au centre de l'image

V.2 Formules de la transformée en cosinus bidimensionnelle

La transformée en cosinus discrète est donnée par :

$$F(k,l) = \frac{2}{N} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\delta(u)+\delta(v)} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) \cos \pi \left(\frac{(2m+1)k}{N} \right) \sin \pi \left(\frac{(2n+1)l}{N} \right) \quad (1.31)$$

Où $\delta(0)$ vaut zéro pour $k \neq 0$ et $\delta(l) = 0$.

La transformée inverse est donnée par :

$$f(m,n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\delta(u)+\delta(v)} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} F(k,l) \cos \pi \left(\frac{(2m+1)k}{N} \right) \sin \pi \left(\frac{(2n+1)l}{N} \right) \quad (1.32)$$

VI. Conclusion partielle

Le but de ce chapitre c'est de familiariser avec les transformations orthogonales et de tirer le lien existant entre l'image dans le domaine spatial et sa transformée. L'analyse d'une image par la transformée de Fourier permis de comprendre son comportement dans le plan des fréquences spatiales.

CHAPITRE II

Filtrage fréquentiel

I. Introduction

Il y a deux types de filtres, les filtres spatiaux et les filtres spectraux. Les filtres spatiaux restent dans le même domaine que l'image et travaillent directement sur celle-ci. Par contre, les filtres spectraux opèrent dans le domaine de la transformée de Fourier ou encore, le domaine des fréquences spatiales. La base des techniques de ce dernier est le théorème de convolution.

II. Système linéaire

Un rapport d'entrée-sortie s'appelle un système s'il y a un résultat unique pour n'importe quelle entrée donnée. Pour une entrée $x(m, n)$, un système G fournit un résultat $y(n, m)$ selon la formule suivante:

$$y(n, m) = G[x(m, n)] \quad (2.1)$$

Cette définition est très large. Sans aucune restriction, la caractérisation d'un système n'exige pas un rapport complet d'entrée-sortie. Le rendement d'un système pour une entrée spécifique, ne permet pas de déduire la sortie d'une autre entrée. Deux types de restriction qui simplifient considérablement la caractérisation et l'analyse d'un système qui sont: la linéarité et l'invariance dans le temps. Heureusement, dans la pratique, beaucoup de systèmes peuvent être rapprochés pour être linéaires et invariant dans le temps.

La linéarité d'un système est définie comme suit [JAE S. LIM.1990] :

$$G[ax_1(n, m) + bx_2(n, m)] = ay_1(n, m) + by_2(n, m) \quad (2.2)$$

Où: $G[ax_1(n, m)] = ay_1(n, m)$ et $G[bx_2(n, m)] = by_2(n, m)$, a et b deux constantes réelles.

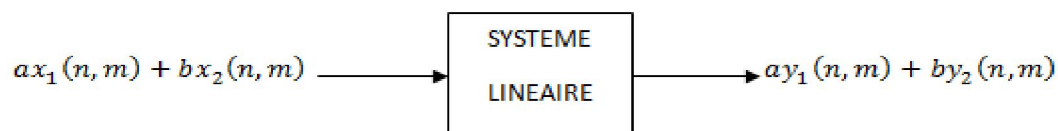


Figure 2.1: Schéma d'un système linéaire

L'invariance dans le temps est défini par :

$$G[x(n_1 - m_1, n_2 - m_2)] = y(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \quad (2.3)$$

Où : $y(n_1, n_2) = Gx(n_1, n_2)$ et m_1, m_2 sont deux entiers.

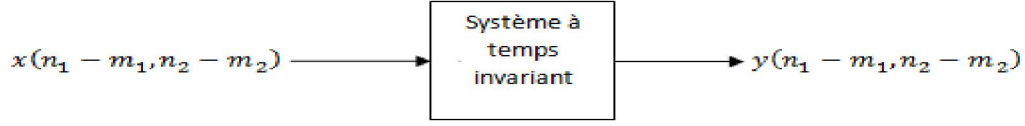


Figure 2.2: Schéma d'un système temps invariant.

Pour calculé la sortie d'un système linéaire, on utilise l'opérateur de convolution.

III. Le produit de convolution

Le théorème de convolution est l'un des plus importants résultats de la théorie de Fourier qui dit que la convolution de deux fonctions dans leur espace original est identique que leur produit simple dans le plan des fréquences spatiales :

$$f(x, y) * h(x, y) \leftrightarrow F(u, v) \cdot H(u, v) \quad (2.4)$$

Ce rôle est réversible, c.-à-d, la convolution de deux spectres complexes dans l'espace de Fourier est égale au produit de ces fonctions dans l'espace original [P. BONNET]:

$$f(x, y)h(x, y) \leftrightarrow \frac{1}{(2\pi)^2} F(u, v) * H(u, v) \quad (2.5)$$

Ce résultat est connu comme théorème de produit.

III.1. Convolution d'une image dans l'espace continu

Soit, f une image continue et g le résultat de la convolution de f par un filtre à réponse impulsionnelle h . Le produit de convolution $g = f * h$ est défini par :

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau, v) h(x - \tau, y - v) d\tau dv \quad (2.6)$$

III.2. Convolution d'une image dans l'espace discret

La convolution discrète est un outil permettant la construction de filtres linéaires ou de filtres de déplacements invariants, elle est définie mathématiquement par la relation [Joël Le Roux] :

$$g(x, y) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} f(\tau, v) \cdot h(x - \tau, y - v) \quad (2.7)$$

Dans le domaine fréquentiel on a :

$$G(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(ux+vy)} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau, v) \cdot h(x - \tau, y - v) d\tau dv \right] dx dy \quad (2.8)$$

En posant :

$$x' = x - \tau \quad \text{et} \quad y' = y - v$$

$$G(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(u(x'+\tau)+v(y'+v))} \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau, v) h(x', y') d\tau dv \right] dx' dy' \quad (2.9)$$

Ce qui peut s'écrire:

$$G(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau, v) e^{-j(u\tau+vv)} d\tau dv \right] \cdot h(x', y') e^{-j(ux'+vy')} dx' dy' \quad (2.10)$$

Où encore :

$$G(u, v) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau, v) e^{-j(u\tau+vv)} d\tau dv \right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x', y') e^{-j(ux'+vy')} dx' dy' \right] \quad (2.11)$$

Soient $F(u, v)$, la transformée de Fourier de $f(x, y)$ et $H(u, v)$, celle de $h(x, y)$, nous avons alors :

$$G(u, v) = F(u, v) \cdot H(u, v) \quad (2.12)$$

Tels que :

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau, v) \cdot e^{-j(u\tau + vv)} d\tau dv$$

$$H(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x', y') \cdot dx' dy' \quad (213)$$

Avec :

$g(x, y)$: l'image filtré dans le domaine spatial (espace original).

$G(u, v)$: l'image filtré dans le domaine fréquentiel.

$h(x, y)$: réponse impulsionnelle d'un filtre dans le domaine spatial.

$H(u, v)$: fonction de transfert du filtre.

Nous concluons que la transformée de Fourier transforme un produit de convolution, complexe à calculer en un produit simple dans le plan des fréquences spatiales.

La fonction H définie un filtre linéaire dans le domaine fréquentiel et elle s'appelle fonction de transfert de filtre et $h(x, y)$, sa réponse impulsionnelle.

III.3. Propriété de produit de convolution

Il y a quelques propriétés particulièrement importantes de l'intégrale de convolution.

Elles sont comme suit :

- **Commutativité :**

Soient f et h deux fonctions et F et H leur transformées de Fourier :

$$f(x, y) * h(x, y) = h(x, y) * f(x, y) \leftrightarrow F(u, v) * H(u, v) = H(u, v) * F(u, v) \quad (2.14)$$

- **Associativité :**

$$[f(x, y) * h(x, y)] * w(x, y) = f(x, y) * [h(x, y) * w(x, y)]$$

$$[F(u, v) * H(u, v)] * W(u, v) = F(u, v) * [H(u, v) * W(u, v)] \quad (2.15)$$

- **Distributivité :**

$$[f(x, y) + h(x, y)] * w(x, y) = f(x, y) * w(x, y) + h(x, y) * w(x, y) \quad (2.16a)$$

$$[F(u, v) + H(u, v)] * W(u, v) = F(u, v) * W(u, v) + H(u, v) * W(u, v) \quad (2.16b)$$

IV. Filtres linéaires

Le filtrage linéaire est une méthode fondamentale de traitement d'image dans laquelle, un filtre est appliqué à une image d'entrée pour produire une image de sortie selon la thématique et l'objectif recherchés.

Même s'il apparaît plus au moins limité dans ses performances, ce filtrage reste très utilisé par sa simplicité d'analyse et de mise en œuvre. Il constitue en général une référence à laquelle on compare les filtres non linéaires de structure plus complexe.

Un filtre linéaire est défini par le fait qu'il satisfait au principe de superposition. Il est décrit par les coefficients de sa réponse impulsionnelle h et par H , sa fonction de transfert ou encore, sa réponse fréquentielle. Les comportements souhaités sont:

- Les filtres passe-bas : L'application d'un filtre passe-bas sur une image permet de lisser les bruits et de conserver les formes grossières de celle-ci. Cela revient également à multiplier son spectre par une fenêtre qui ne laisse passer que les basses fréquences.
- Les filtres passe-haut : Il permet de faire ressortir les détails de l'image filtrée comme les contours ou les textures.
- Le filtre coupe bande : Résume les deux opérations précédentes.
- Le filtre passe bande : Il met en évidence que quelques structures de l'image.

Dans ce chapitre, on s'intéresse au filtre dans le domaine fréquentiel donc, dans tout ce qui suit, on présentera juste les fonctions de transferts des filtres qui sont liés par la relation :

$$D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

$D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2} < D_0$ pour les basses fréquences et $D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2} > D_0$ pour les hautes fréquences avec D_0 étant la fréquence de coupure.

.

La pulsation d'un signal $\omega = 2 * \pi * f$ (f : la fréquence). La pulsation maximale est égale à π quelque soit le signal. La fréquence maximale en u ou en v est égale à $\frac{1}{2}$ et ce, quelque soit la taille du filtre et de l'image.

IV.1. Filtre passe bas

Rappelons que l'application d'un filtre passe-bas sur une image permet de lisser les bruits et de conserver les formes grossières de celle-ci. Cela revient également à multiplier son spectre par une fenêtre qui ne laisse passer que les basses fréquences [Daniel Léonard].

IV.1.1. Filtre idéal

a) Filtre circulaire

La fonction de transfert $H(u, v)$ du filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure D_0 est donnée par [Nicolas Thome.2010]:

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (2.16)$$

Ce filtre supprime les *composantes* fréquentielles ayant une fréquence radiale $\sqrt{u^2 + v^2}$ supérieure à D_0

Dans le cas d'une image à n lignes et m colonnes, nous présenterons le filtre par la figure 2.3. Le centre a pour coordonnées $((n/2) + 1, (m/2) + 1)$.

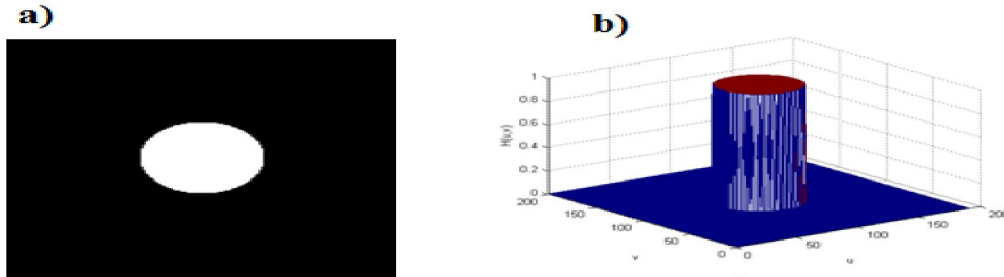


Figure 2.3: Filtre circulaire passe bas idéal { a) Section horizontale de filtre circulaire
b) Réponse fréquentiel

b) Filtre rectangulaire

La fonction de transfert $H(u, v)$ de ce filtre de longueur L et de largeur LR est définie par :

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } |u| < \frac{L}{2} \text{ et } |v| < \frac{LR}{2} \\ 0 & \text{si Non} \end{cases} \quad (2.17)$$

Dans le cas d'une image à n lignes et m colonnes, nous définissons le filtre par la figure 2.4. Le centre a pour coordonnées $((n/2) + 1, (m/2) + 1)$.

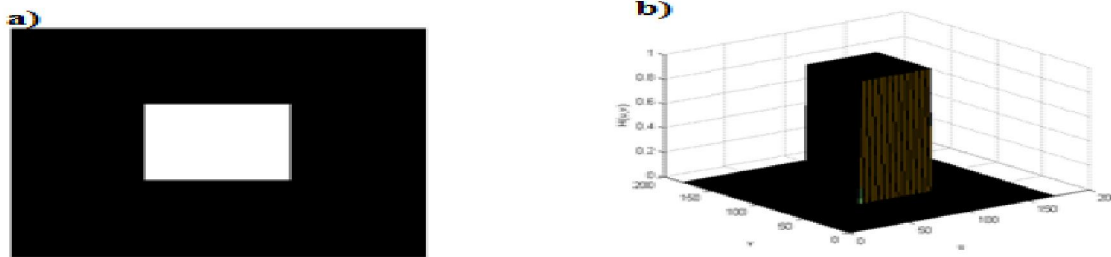


Figure 2.4: Filtre passe bas rectangulaire { (a) Section horizontale
(b) Réponse fréquentielle

IV.1.2. Fenêtre gaussienne

Forme de la fenêtre : circulaire.

La fonction de transfert de ce filtre est définie par [B.D.Venkatramana Reddy et Dr.T.Jayachandra Prasad]:

$$H(u, v) = FR(u, v) e^{\left(-\frac{D(u,v)^2}{2D_0^2}\right)} \quad (2.18)$$

Avec $FR(u, v)$: fenêtre rectangulaire de largeur T .

La réponse en fréquence pour $D_0 = 0.25$ ($u_0 = v_0 = 0.25$) de ce filtre est donné par la figure 2.5 :

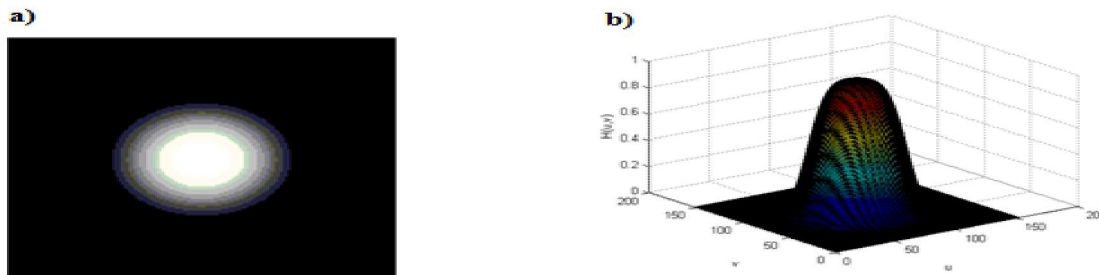


Figure 2.5: Filtre gaussien passe bas { a) Section horizontale.
b) Réponse fréquentielle.

IV.1.3. Fenêtre Hamming

Forme de la fenêtre : circulaire

La fonction de transfert de ce filtre est définie par [J Lasenby.2011] :

$$H(u, v) = FR(u, v) \cdot \left[\left(0.5 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi D(u, v)}{T}\right) \right) \right] \quad (2.19)$$

Avec :

$FR(u, v)$: fenêtre rectangulaire de largeur T .

T : Diamètre de la fenêtre.

La réponse en fréquence de filtre pour T=10 est donnée par la figure (2.6):

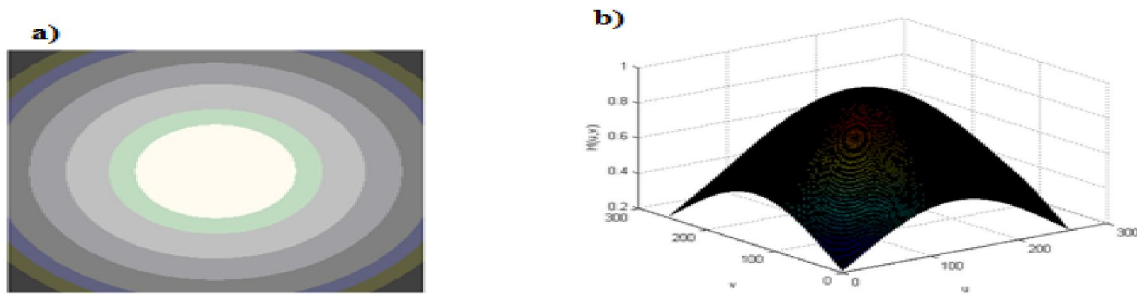


Figure 2.6: Filtre Hamming passe bas { a) Section horizontale
b) Réponse fréquentielle

IV.1.4. Filtre de Butterworth

Le filtre passe-bas de Butterworth d'ordre n est défini par par [Mr : SIDI MOHAMED FARSSI]:

$$H(u, v) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{D(u,v)}{D_0}\right)^{2n}\right]} \quad (2.20)$$

Dans laquelle $D(u, v)$ est la distance au centre du filtre et D_0 la fréquence de coupure. Le paramètre n représente l'ordre du filtre.

La réponse en fréquence de filtre Butterworth pour $n=1$, $D_0=0.20$ et sa section horizontale sont représentées par la figure 2.7 :

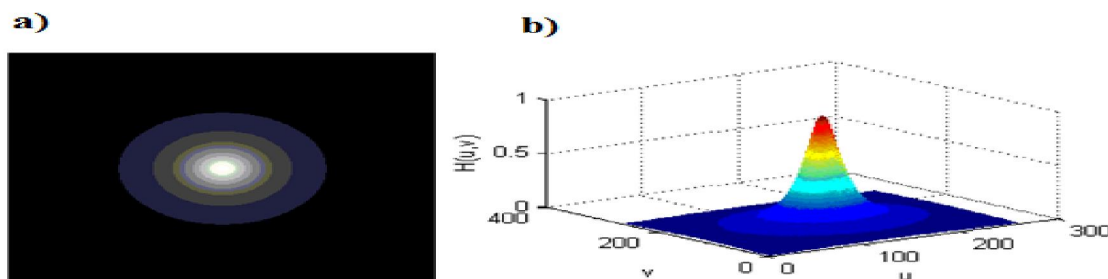


Figure 2.7: Filtre de Butterworth passe bas { (a) Section horizontale
(b) Réponse fréquentielle de filtre de Butterworth passe – bas

IV.1.5. Filtre exponentiel

Sa section de transfert est la suivante :

$$H(u, v) = \exp \left[\frac{-D(u, v)}{D_0} \right] \quad (2.21)$$

Sa réponse en fréquence pour $D_0=0.20$ et sa section horizontale sont représentées par la figure (2.8).

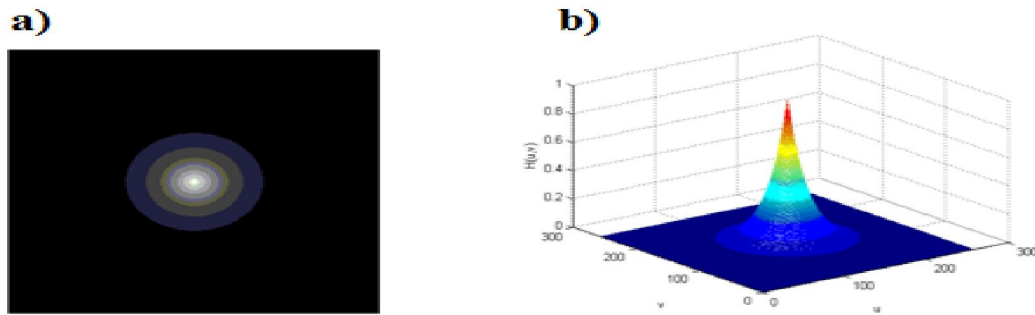


Figure 2.8: Filtrage exponentiel passe bas { a) Section horizontale
b) Réponse fréquentielle

IV.1.6. Filtrage Cosinus

Nous retenons le filtre dont la fonction de transfert est la suivante :

$$H(u, v) = [\cos(\pi u) \cdot \cos(\pi v)]^{10} \quad (2.22)$$

Pour $u=0$ et $v=0$, $H(u, v)=1$ de sorte que la fréquence spatiale $(0,0)$ ne subit pas d'altérations.

Pour $u=1/2$ et $v=1/2$, $H(u, v)=0$ de sorte que les fréquences spatiales élevées sont fortement atténuées.

L'élévation du produit de cosinus à la puissance 10 fait rapidement décroître la fonction de transfert de son maximum=1 à son minimum=0. Le filtre est représenté par la figure 2.9

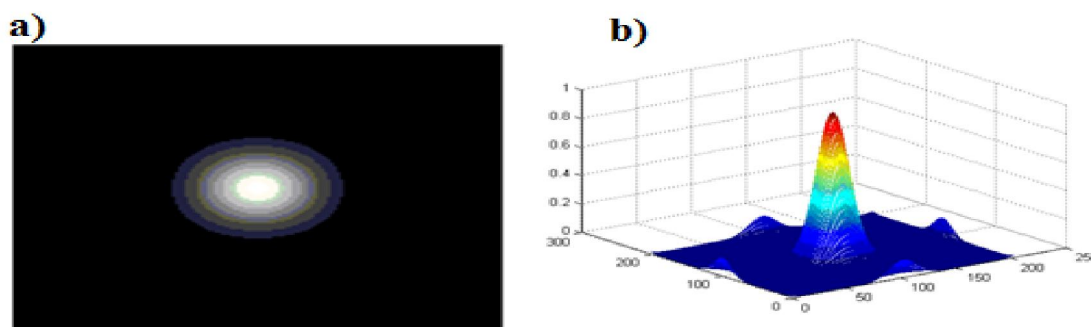


Figure 2.9: Filtrage cosinus passe bas { a) Section horizontale
b) Réponse fréquentielle

IV.2. Filtre passe haut

Un filtre passe-haut atténue les fréquences en dessous d'une fréquence déterminée, appelée fréquence de coupure, en proportion de l'éloignement de cette fréquence, laissant intactes les autres.

IV.2.1. Filtre idéal

a) Filtre circulaire

La fonction de transfert de filtre passe-haut circulaire idéal est définie comme suit en deux dimensions [Daniel Léonard]:

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{si } D(u, v) > D_0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Dans le cas d'une image à n lignes et m colonnes, nous définissons le filtre par la figure 2.10. Le centre a pour coordonner $((n/2) + 1, (m/2) + 1)$.

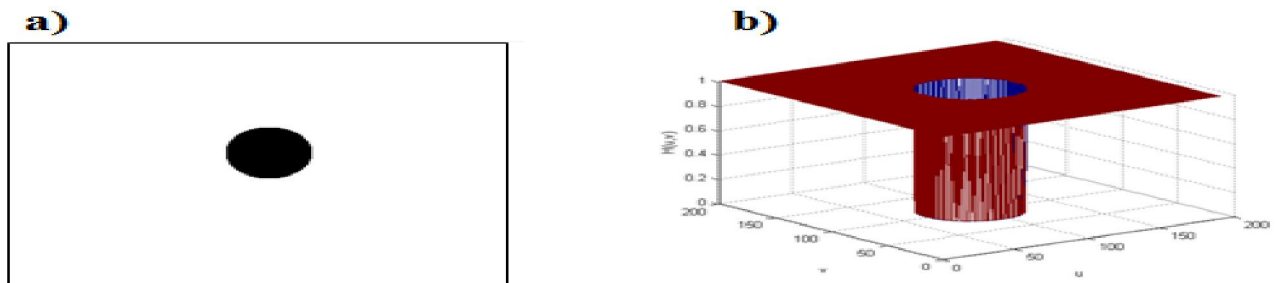


Figure 2.10 : Filtre passe haut circulaire { a) Section horizontale
b) Réponse fréquentielle

b) Filtre rectangulaire

La fonction de transfert $H(u, v)$ de ce filtre de longueur L et de largeur LR est définie par :

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } |u| < \frac{L}{2} \text{ et } |v| < \frac{LR}{2} \\ 1 & \text{si non} \end{cases} \quad (2.24)$$

L : Longueur de filtre.

LR : Largeur de filtre.

Dans le cas d'une image à n lignes et m colonnes, nous définissons le filtre par la figure 2.11, Le centre a pour coordonnées $((n/2) + 1, (m/2) + 1)$:

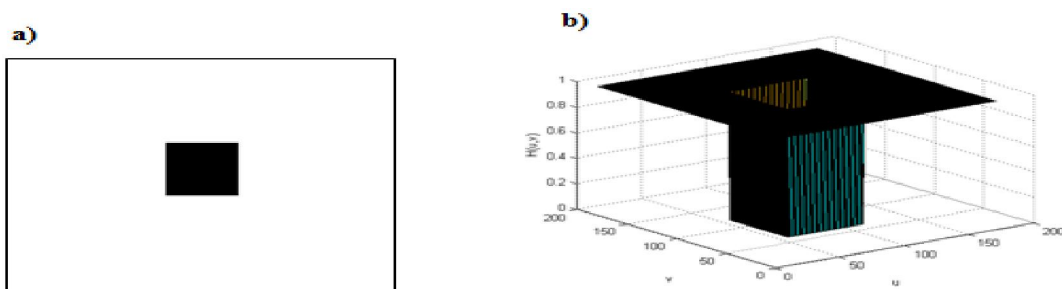


Figure 2.11 : Filtre passe haut rectangulaire { a) section horizontale
b) Réponse fréquentielle

IV.2.2. Filtre de Butterworth

Le filtre passe-haut de Butterworth est défini par l'équation :

$$H(u, v) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{D_0}{D(u, v)}\right)^{2n}\right]} \quad (2.25).$$

Dans laquelle $D(u, v)$ est la distance au centre du filtre et D_0 la fréquence de coupure. Le paramètre n représente l'ordre du filtre [Daniel Léonard].

La figure 2.12 représente ce filtre pour $n=1$ $D_0 = 0.20$.

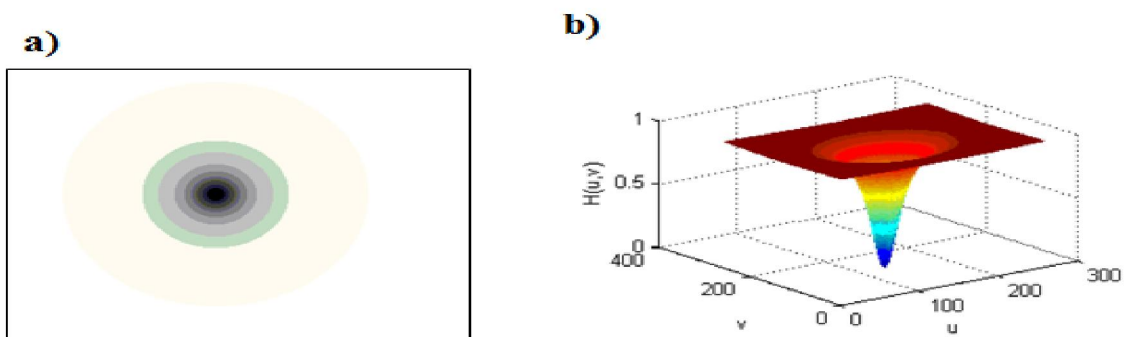


Figure 2.12: Filtre Butterworth passe haut { a) Section horizontale
b) Réponse fréquentielle

IV.2.3. Filtre exponentiel

La fonction de transfert de filtre exponentiel est de la forme suivante :

$$H(u, v) = \exp \left[-\frac{D(u, v)}{D_0} \right] \quad (2.26)$$

Pour $D_0 = 0.20$, ce filtre est représenté par la figure 2.13 :

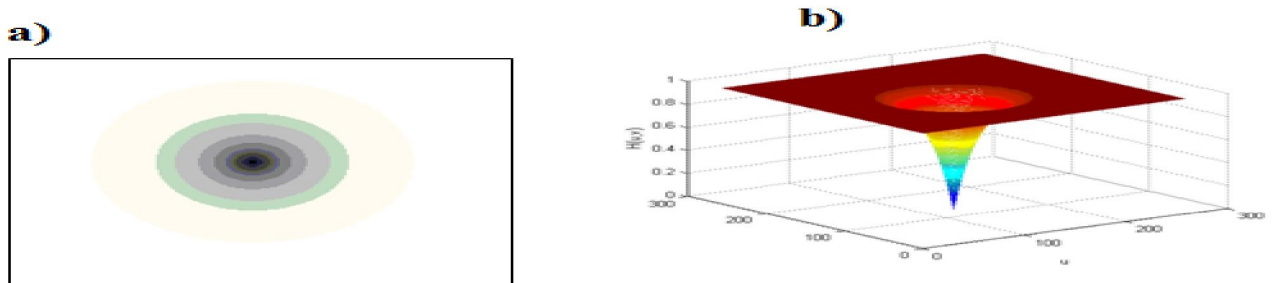


Figure 2.13: Filtre exponentiel passe haut { a) Section horizontal
b) Réponse fréquentielle

IV.2.4. Fenêtre gaussienne

Le filtre passe-haut gaussien en deux dimensions est défini par l'équation :

$$H(u, v) = 1 - FR((u, v) e^{\left(-\left(\frac{D(u, v)^2}{2D_0^2} \right) \right)} \quad (2.27)$$

Dans laquelle $D(u, v)^2$ est le carré de la distance au centre du filtre.

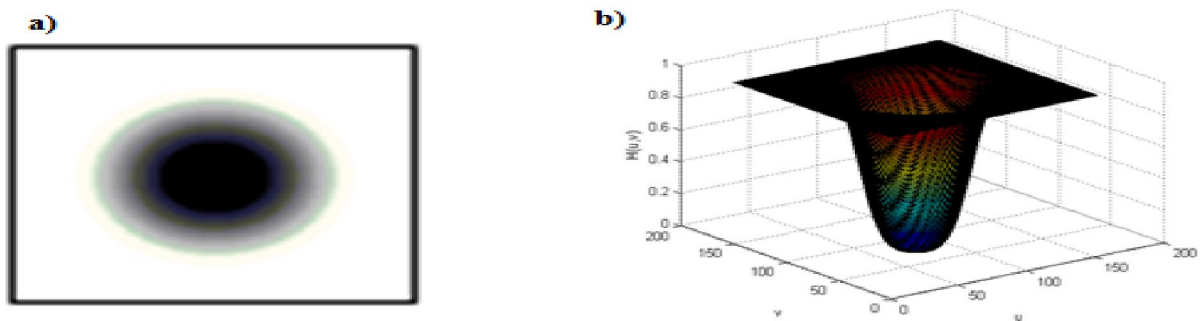


Figure 2.14: filtre gaussien passe haut. { a) Section horizontal
b) Réponse fréquentielle

IV.2.5. Filtre Cosinus

Par analogie au filtre passe bas, nous pouvons représenter ce filtre par :

$$H(u, v) = 1.5 - [\cos(\pi u) \cdot \cos(\pi v)] \quad (2.28)$$

Ce filtre atténue les fréquences basses et renforce les fréquences élevées, mais pas autant que possible.

Dans le cas où $h(u, v) = 2.0 - [\cos(\pi u) \cdot \cos(\pi v)]$, les basses fréquences sont plus nettement renforcées.

La réponse en fréquence de ce filtre et sa section horizontale est représentée sur la figure 2.15.

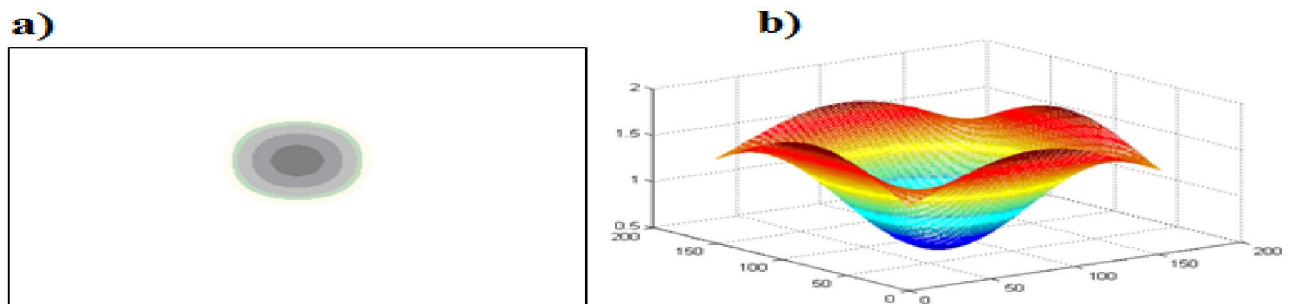


Figure 2.15: Filtre cosinus passe haut { a) Section horizontale
b) Réponse fréquentielle

IV.3. Filtre passe_bande

Un filtre passe-bande est un filtre ne laissant passer qu'une bande ou intervalle de fréquences compris entre une fréquence de coupure basse et une fréquence de coupure haute du filtre.

Sa fonction de transfert $H(u, v)$ se présente sous la forme suivante :

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } D(u, v) < D_0 \\ 0 & \text{si } D(u, v) > D_1 \\ K(u, v) & \text{si } D_0 \leq D(u, v) \leq D_1 \end{cases} \quad (2.29)$$

$K(u, v)$ est une fonction des fréquences u et v . Le filtre idéal passe-bande ($K(u, v) = 1$) est le plus utilisé.

Dans le cas d'une image à n lignes et m colonnes, nous définissons le filtre par la figure 2.16. Le centre a pour coordonnées $((n/2) + 1, (m/2) + 1)$:

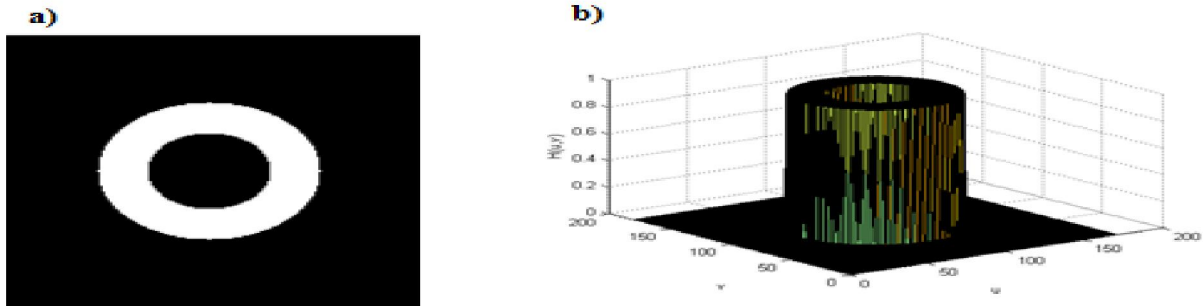


Figure 2.16 : filtre passe bande { a) Section horizontale
b) Réponse fréquentielle

IV.4. Filtre coupe_bande

Un filtre coupe-bande aussi appelé filtre réjecteur de bande ou filtre cloche est un filtre empêchant le passage d'un intervalle de fréquences .

Il est composé d'un filtre passe-haut et d'un filtre passe-bas dont les fréquences de coupure sont souvent proches mais différentes, la fréquence de coupure du filtre passe-bas est systématiquement inférieure à la fréquence de coupure du filtre passe-haut. Sa fonction de transfert $H(u, v)$ se présente sous la forme suivante :

$$H(u, v) = \begin{cases} K(u, v) & \text{si } D(u, v) < D_0 \\ 0 & \text{si } D_0 \leq D(u, v) \leq D_1 \\ K(u, v) & \text{si } D(u, v) > D_1 \end{cases} \quad (2.30)$$

$K(u, v)$ est une fonction des fréquences u et v .

La fonction de transfert et la section horizontale de ce filtre sont représentées par la figure 2.17 :

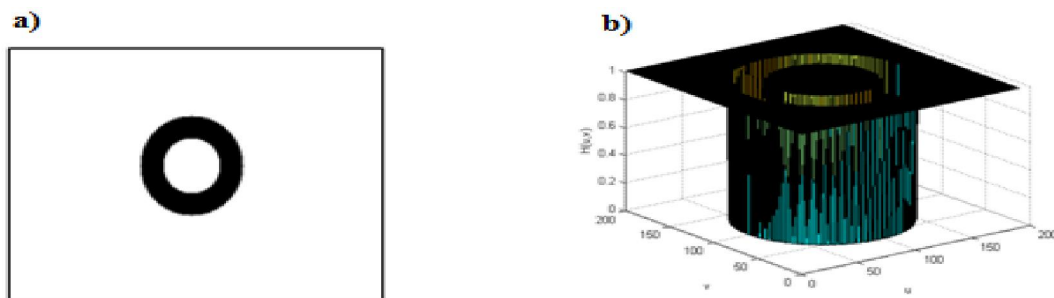


Figure 2.17: Filtre coupe bande idéal { a) Section horizontale
b) Réponse fréquentielle

V. Algorithmes d'implémentations des différents filtres

V.1. Les filtres passe-bas

a) Filtre passe bas circulaire

Toutes les filtres passe bas qu'on a présenté précédemment ont la forme de représentation suivantes :

$$H(u, v) = \begin{cases} W(u, v) & \text{si } D(u, v) < D_0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

D_0 : Fréquence de coupure.

$W(u, v)$ Est une fonction fréquentielle (u, v) pour arriver à programmer ce filtre, on a procédé a l'algorithme suivant :

nc, nl, i, j : Entiers ;

$H(u, v)$: Réels ;

Début

```

    Pour i allant de 0 à nl - 1 faire
        Pour j allant de 0 à nc - 1 faire
            Si  $D(u, v) < D_0$  alors  $H(u, v) = W(u, v)$  ;
            Sinon  $H(u, v) = 0$  ;
        Fin si
    Fin de pour
Fin de pour

```

Fin

c) Filtres rectangulaire

La forme des filtres passe-bas rectangulaire est la suivante :

$$H(u, v) = \begin{cases} w(u, v) & \text{si } |u| < \frac{L}{2} \text{ et } |v| < \frac{LR}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.17)$$

L'algorithme d'implémentation de filtre passe bas rectangulaire est le suivant :

$H(u, v, u, v, w(u, v))$: réel

i, j, LR, L : Entier

Début

```

    Pour  $i$  allant de 1 à  $L$  faire
        Pour  $j$  allant de 1 à  $LR$  faire
            Si  $\text{abs}(L/2-i) \leq u$  et  $\text{abs}(LR/2-j) \leq v$  alors  $H(u, v) = W(u, v)$  ;
            Sinon  $H(u, v) = 0$  ;
        Fin si
    Fin pour
Fin

```

- **Remarque**

Pour les filtres passe-haut, on les implémente de la même façon que les filtres passe-bas juste qu'on fait un changement au niveau des affectation pour la fonction $H(u, v)$ telles que au lieu de 0, cette fonction reçoit $W(u, v)$ et au lieu de $W(u, v)$ cette fonction reçoit 0 .

V.2. Les filtres coupes Bandes

a) Filtre coupe band circulaire

Ce filtre à pour effet de conserver seulement les hautes et les basse fréquences.

$$H(u, v) = \begin{cases} W(u, v) & \text{si } D(u, v) < D_0 \\ 0 & \text{si } D_0 \leq D(u, v) \leq D_1 \\ W(u, v) & \text{si } D(u, v) > D_1 \end{cases}$$

Avec D_0 et D_1 sont les fréquences de coupures réelle

nc, nl, i, j : Entiers ;

$H(u, v)$: Réels ;

Début

```

    Pour  $i$  allant de 0 à  $nl - 1$  faire
        Pour  $j$  allant de 0 à  $nc - 1$  faire
            Si  $D(u, v) < D_0$  alors  $H(u, v) = Wu, v)$  Fin si
            Si  $D(u, v) > D_1$  alors  $H(u, v) = W(u, v)$  Fin si
            Si  $D_0 \leq (u, v) \leq D_1$  alors  $H(u, v) = 0$  Fin si
        Fin pour
    Fin pour

```

Fin**b) Le filtre coupe bande rectangulaire**

L'algorithme d'implémentation de filtre coupe bande rectangulaire est le suivant :

$H(u, v)$, u , v , $k(u, v)$: réels

i , j , LR , L , LI , LRI : Entries

Début

```

    Pour  $i$  allant de 1 à  $L$  faire
        Pour  $j$  allant de 1 à  $LR$  faire
            Si  $abs(LI/2-i) \leq u$  et  $abs(LRI/2-i) \leq v$  alors  $H(u, v) = k(u, v)$  ;
            Si non si  $abs(L/2-i) \leq u$  et  $abs(LR/2-i) \leq v$  alors  $H(u, v) = k(u, v)$  ;
            Si non  $H(u, v) = 0$  ;
        Fin si
    Fin pour

```

Fin

$K(u, v)$: Une fonction fréquentielle vaut 1 dans le cas idéal.

V.3. Algorithme d'implémentation des filtres précédents par le produit de convolution :

L'algorithme de filtrage d'une image $F(u, v)$ avec le produit de convolution est procédé sous la forme suivante :

$$H(u, v), G(u, v), u, v: \text{Réels};$$

```

Pour tout point de l'image  $G(u, v)$  faire  $G(u, v) = 0$  ;
|
|   Pour  $i$  allant de 0 à  $nl-1$  faire
|   |
|   |   Pour  $j$  allant de 0 à  $nc-1$  faire
|   |   |
|   |   |    $G(u, v) = F(u + i, v + j).H(u, v) + G(u, v)$  ;
|   |   |
|   |   Fin pour
|   |
|   Fin pour
|
Fin pour

```

V. Conclusion partiel :

Après qu'on a défini le produit de convolution, nous avons présenté quelques filtres qui sont caractérisés par leur fonction de transfert et ayant des caractéristiques déférentes. Le principe de ces filtres est d'extraire l'information dans une image dans le plan des fréquences spatiales et par la suite, revenir à l'espace d'origine.

CHAPITRE III

Synthèses des filtres numériques

I. Introduction

Le filtrage est une opération plus classique en traitement du signal. Ceci reste vrai en traitement d'image où ce filtrage est bien souvent la première opération menée sur les données images brutes. Les deux principales utilisations sont la réduction de bruit (filtrage passe-bas) et le rehaussement ou détection de contours et de textures, voir classification (filtrage passe-bande et passe-haut). Nous présenterons dans ce chapitre les notions générales de filtrage numérique des signaux monodimensionnelles et bidimensionnelles (images) en évoquant les différentes méthodes et leurs synthèses.

II. Généralités sur les signaux bidimensionnels

Un signal bidimensionnel est une fonction réelle ou complexe de deux variables continues (signal continu) ou entière (cas d'un signal numérique) généralement indépendantes. Le domaine de variation des variables est appelé étendu ou support.

Pour pouvoir être manipulées en machine, les images analogiques sont transmises à un ensemble de processus qui en effectuent la discrétisation. Formellement, une image discrète se présente comme une matrice de points appelés les pixels $f(m, n)$:

$$f(m, n) = \begin{bmatrix} f(m_1, n_1) & \cdots & f(m_1, n_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(m_M, n_1) & \cdots & f(m_M, n_N) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Le signal bidimensionnel $f(m, n)$ est une fonction réelle ou complexe des deux variables m et n complètement indépendants. L'étendue de l'image représente le domaine de variation des variables entières définissant l'image.

Parmi les signaux bidimensionnels usuels, nous retrouvons :

L'impulsion unité bidimensionnelle est :

$$\delta(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases} \quad (3.2)$$

L'échelon unité bidimensionnelle peut s'écrire comme suit :

$$U(k, l) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \geq 0 \text{ et } l \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.3)$$

La porte bidimensionnelle discrète $rect_{m,nl}(m, n)$ définit un domaine rectangulaire de paramètres K et L . Par convention, l'origine en constitue le coin inférieur gauche :

$$rect_{m,n}(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq m \leq m-1 \text{ et } 0 \leq n \leq n-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.4)$$

II.1. Echantillonnage et quantification

Pour pouvoir être traitées par un ordinateur, les images analogiques doivent d'abord être échantillonnées et quantifiées. On traite ici du cas de l'échantillonnage idéal des images.

Le modèle de l'échantillonneur idéal est constitué par un simple produit de l'image initiale $f(x, y)$ par un peigne de Dirac bidimensionnel. Il en résulte une image échantillonnée $g(x, y)$ pour laquelle les valeurs correspondent aux luminances relevées sur une grille régulière de paramètres $\Delta x \Delta y$.

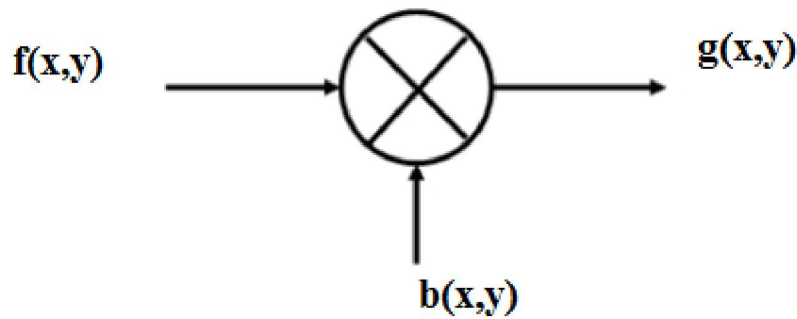


Figure 3.1: Schéma de l'échantillonneur idéal.

Expression de l'image échantillonnée :

$$g(x, y) = \sum_m \sum_n f(m\Delta x, n\Delta y) \delta(x - m\Delta x, y - n\Delta y) \quad (3.5)$$

Les poids $f(m\Delta x, n\Delta y)$ associés aux impulsions de Dirac sont les échantillons ou pixels de l'image. Le théorème de Shannon étendu à deux dimensions s'énonce de la même façon que dans le cas monodimensionnel.

II.2. Théorème d'échantillonnage bidimensionnel

Une image analogique $g(x, y)$ limitée aux fréquences spatiales X_{max} et Y_{max} , ne peut être reconstituée à partir de ces échantillons $f(m\Delta x, n\Delta y)$ que s'ils sont prélevés avec des périodes telles que :

$$\Delta x \leq \frac{1}{X_{max}} \text{ Et } \Delta y \leq \frac{1}{Y_{max}} \quad (3.6)$$

Pour comprendre la représentation fréquentielle de l'image échantillonnée, il faut d'abord calculer sa transformée de Fourier. Posons ainsi :

$$G(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) e^{-2\pi j(xu + yv)} dx dy \quad (3.7)$$

Le remplacement dans $G(u, v)$ de $g(x, y)$ par son expression aboutit à l'intégration d'une double somme qui par linéarité, conduit à permuter les signes sommes et l'intégrale double ce qui conduit à :

$$G(u, v) = \sum_m \sum_n f(m\Delta x, n\Delta y) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - m\Delta x, y - n\Delta y) e^{-2\pi j(xu + yv)} dx dy \quad (3.8)$$

Dans le terme intégral, on reconnaît la transformée de Fourier d'un Dirac translaté dans le plan des quantités $(m\Delta x, n\Delta y)$. En choisissant des valeurs unitaires pour $(\Delta x, \Delta y)$, il vient finalement,

$$G(u, v) = \sum_m \sum_n f(m, n) e^{-2\pi j(mu + nv)} \quad (3.9)$$

C'est la forme simplifiée de la transformée bidimensionnelle appliquée aux images.

II.3. Brosse d'impulsions de Dirac

Une impulsion de Dirac dans le plan est :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \delta(x,y) dx dy = f(0,0) \quad (3.10)$$

Ce qui correspond à :

$$\delta(x,y) = \delta(x) \delta(y) \quad (3.11)$$

On peut considérer que l'échantillonnage est obtenu en faisant le produit du signal par une brosse $b(x,y)$ d'impulsions de Dirac :

$$g(x,y) = f(x,y)b(x,y) = f(x,y) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\Delta x) \delta(y - n\Delta y) \quad (3.12)$$

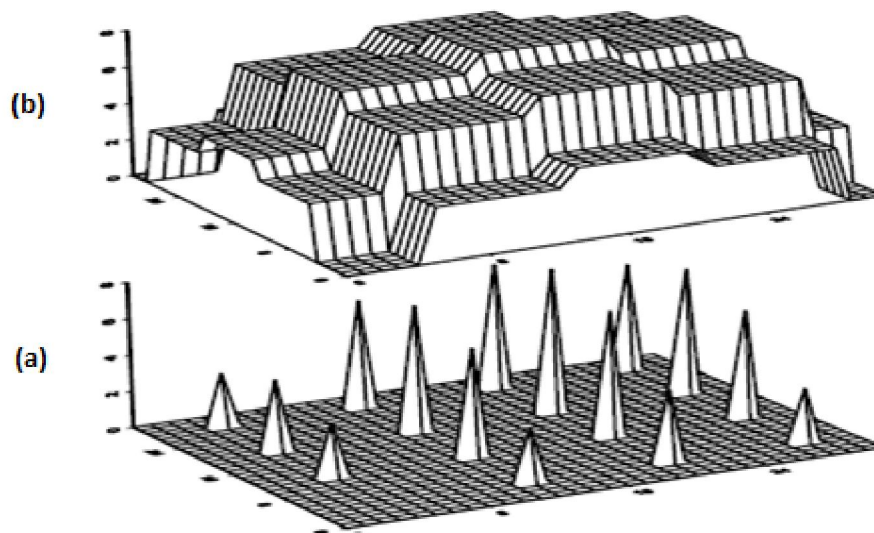


Figure 3.2: Les représentations spatiales d'une image échantillonnée.

a) Représentation sous forme d'impulsions en cohérence avec l'interprétation du théorème d'échantillonnage;

b) Représentation habituelle sous forme de pixels de niveau constant.

Cette brosse $b(x, y)$ peut être considérée comme le produit de deux peignes étendus l'un dans la direction ox soit, $p_x(x, y)$ de période Δx et l'autre dans la direction oy soit, $p_y(x, y)$ de période Δy .

$$p_x(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\Delta x) \quad (3.13a)$$

$$p_y(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(y - n\Delta y) \quad (3.13b)$$

$$b(x, y) = p_x(x, y) p_y(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\Delta x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(y - n\Delta y) \quad (3.14)$$

II.4. Interprétation fréquentielle de l'échantillonnage

Le peigne étendu $p_x(x, y)$ de période Δx a pour transformée de Fourier un peigne d'impulsions de Dirac $p_x(u, v)$ situés sur l'axe ou et de période $2\pi/\Delta x$, soit :

$$P_x(u, v) = \delta(v) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(u - \frac{k}{\Delta x}\right) \quad (3.15)$$

La Transformée de Fourier $P_y(u, v)$ de $p_y(x, y)$ est un peigne de période $2\pi/\Delta y$ situé sur l'axe ov est:

$$P_y(u, v) = \delta(u) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{l}{\Delta y}\right) \quad (3.16)$$

La Transformée du produit des deux peignes étendus (la brosse) est donc une convolution de deux peignes perpendiculaires, c'est-à-dire une brosse : La transformée de Fourier de $p(x, y)$ est la convolution de ces deux fonctions.

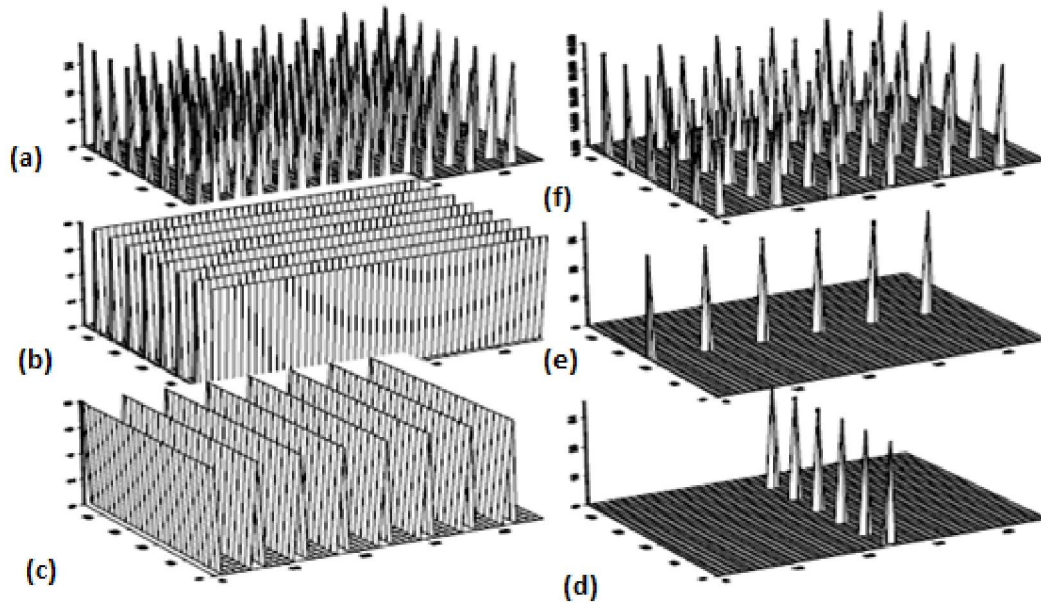


Figure 3.3: Illustration de l'échantillonnage dans le domaine des fréquences:

- a) Brosse d'échantillonnage dans le domaine spatial.
- b) Peigne étendu suivant l'axe des abscisses.
- c) Peigne étendu suivant l'axe des ordonnées.
- d) Peigne transformée du peigne étendu suivant l'axe des ordonnées.
- e) Peigne transformée du peigne étendu suivant l'axe des abscisses.
- f) Transformée de la brosse: c'est aussi une brosse obtenue par convolution des deux peignes dans le domaine des fréquences.

En effet, la convolution d'une fonction et d'une impulsion de Dirac située au point (u, v) est égale à la translation de cette fonction de l'origine au point (u, v) . La convolution d'une fonction définie uniquement sur l'axe ou et d'un peigne défini sur l'axe ov est donc la répétition de cette fonction par une suite de translations suivant ov . Si la fonction convoluée est un peigne suivant l'axe ou , le résultat de la convolution sera une suite de reproductions de ce peigne horizontal le long de l'axe vertical.

II.5. Le repliement spectral dans le cas bidimensionnel

La transformée de Fourier $G(u, v)$ de la fonction échantillonnée $g(x, y)$ est la convolution de la brosse (Transformée de la fonction d'échantillonnage) dans le domaine des fréquences et de $F(u, v)$ transformée de l'image avant l'étape de l'échantillonnage. C'est donc la somme des reproductions de $F(u, v)$ déduites de $F(u, v)$ par translation aux points de coordonnées $(2k\pi/\Delta x, 2l\pi/\Delta y)$. Il y a périodisation bidimensionnelle de la transformée de Fourier de l'image initiale.

$$G(u, v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F\left(u - \frac{k}{\Delta x}, v - \frac{l}{\Delta y}\right) \quad (3.17)$$

II.6. Transformation en Z bidimensionnelle

La transformée en Z est un outil largement utilisé pour l'étude des systèmes de traitement numérique du signal et d'images. Ce type de transformée permet de décrire aisément les signaux à temps discret et la réponse des systèmes linéaires invariants soumis à des entrées diverses. La transformée en Z est un outil permettant de dériver la réponse impulsionnelle d'un système linéaire invariant décrit par une équation aux différences finies. De plus, à l'opérateur de convolution dans le domaine temporel correspond l'opérateur multiplicatif dans le domaine de la transformée en Z [Olivier SENTIEYS].

II.6.1. Définition

On définit deux opérateurs de translation élémentaires de Δx et Δy suivant les directions $0x$ et $0y$ du plan. On associe à chacun de ces opérateurs une variable z_x et z_y . La valeur de la transformée en Z d'un échantillon d'amplitude $f(m, n)$ situé en un point de coordonnées m et n est alors, en prenant des pas d'échantillonnage Δx et Δy égaux à un dans les deux directions.

$$F(z_x, z_y) = f(m, n) z_x^{-m} z_y^{-n} \quad (3.18)$$

Dans le cas d'une fonction échantillonnée définie sur tout le plan, la transformée s'obtient par

Sommation [Joël Le Roux] :

$$F(z_x, z_y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} f(m, n) z_x^{-m} z_y^{-n} \quad (3.19)$$

Elle est définie dans un domaine où la somme converge, en général une couronne contenant le tore produit des deux cercles $z_x = z_y = 1$ de rayon un. Sur ce domaine, elle prend la forme d'une transformée de Fourier.

$$F(e^{ju}, e^{jv}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} f(m, n) e^{-j(ux+vy)} \quad (3.20)$$

Dans le cas d'une fonction séparable alors la fonction $f(x, y)$ peut s'écrire sous la forme d'un produit :

$$f(x, y) = h(x)g(y) \quad (3.21)$$

Alors la transformée $F(z_x, z_y)$ est séparable et elle s'écrit :

$$F(z_x, z_y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} h(x) z_x^{-m} \sum_{-\infty}^{+\infty} g(y) z_y^{-n} = H(z_x)G(z_y) \quad (3.22)$$

II.6.2. Lien avec la transformée de Fourier bidimensionnelle

Si on pose :

$$z_x = e^{ju} \text{ et } z_y = e^{jv}$$

La transformée en Z s'écrit :

$$F(z_x, z_y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} f(m, n) e^{-j(mu+nv)} \quad (3.23)$$

C'est la transformée de Fourier du signal échantillonné de la brosse d'impulsions de Dirac dont les amplitudes sont $f(x, y)$. Elle est donc périodique et obtenue par addition des répétitions de la transformée de Fourier du signal analogique. La périodicité est de 2π pour chacune des variables car on a choisi un pas d'échantillonnage entier dans les deux directions.

II.6.3. La transformée inverse

C'est la généralisation de la transformée de Fourier inverse.

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \oint \oint F(z_x, z_y) z_y^y \frac{dz_y}{z_y} z_x^x \frac{dz_x}{z_x} \quad (3.24)$$

Les intégrations se faisant sur un contour fermé autour de l'origine intérieur au domaine de définition de la transformée. On vérifie la validité de cette expression en la reportant dans la définition de la transformée en z .

Son utilisation pratique ne se fait que guère que dans le cas de la transformée de Fourier en posant :

$$z_x = e^{ju}, z_y = e^{jv}$$

Soit :

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(e^{ju}, e^{jv}) e^{ju} e^{jv} du dv \quad (2.25)$$

III. Le filtrage numérique

On appelle filtre numérique un système utilisé pour modifier la distribution fréquentielle d'un signal numérique selon des spécifications données. Un filtre numérique peut être vu comme un procédé de calcul permettant de transformer un signal numérique d'entrée en un signal numérique de sortie pour obtenir la modification voulue du signal. Le problème du filtrage numérique consiste donc à déterminer l'équation régissant cette transformation des signaux numériques qui d'une part doit représenter la réponse fréquentielle spécifiée et

d'autre part peut être effectivement réalisée. La transformation peut être implantée sous forme de logiciel (algorithme) ou matériel (circuits électroniques).

Les filtres numériques sont, pour les signaux échantillonnés, les équivalents des filtres analogiques pour les signaux continus. En raison du développement des circuits intégrés rapides, les filtres numériques deviennent plus intéressants que les filtres analogiques en apportant de nombreux avantages : précision, fiabilité, stabilité, adaptabilité et facilité de commande [Francis Cottet].

Les filtres sont classés en deux catégories : les filtres à réponse impulsionnelle finie RIF (en anglais FIR : Finite Impulse Response) et ceux à réponse impulsionnelle infinie (RII, IIR : Infinite Impulse Response).

III.1. Les filtres numériques unidimensionnels

III.1.1. Filtres à réponse impulsionnelle finie

Les filtres numériques à réponse impulsionnelle finie (RIF) sont des systèmes linéaires discrets invariants dans le temps définis par une équation selon laquelle un nombre de sortie, représentant un échantillon du signal filtré, est obtenu par sommation pondérée d'un ensemble fini de nombres d'entrée, représentant les échantillons du signal à filtrer. Les coefficients de la sommation pondérée constituent la réponse impulsionnelle du filtre et un ensemble fini d'entre eux seulement prennent des valeurs non nulles. Ce filtre est du type à mémoire finie, c'est-à-dire qu'il détermine sa sortie en fonction d'informations d'entrée d'ancienneté limitée.

Il est fréquemment désigné par filtre non récursif, en raison de sa structure, car il ne nécessite pas de boucle de réaction dans sa réalisation, comme c'est le cas pour une autre catégorie de filtres, celle des filtres à réponse impulsionnelle infinie [Préface de Pierre Aigrain].

III.1.2. Fonction de transfert de filtre RIF

La fonction de transfert en Z d'un filtre RIF à N coefficients est un polynôme de degré $N - 1$ qui s'écrit :

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{-i} \quad (3.26)$$

Ce polynôme possède $N - 1$ racines $z_i (1 \leq i \leq N - 1)$ dans le plan complexe et s'écrit sous la forme d'un produit de facteurs :

$$H(z) = a_0 \prod_{i=1}^{N-1} (1 - z_i z^{-1}) \quad (3.27)$$

Pour certains filtres RIF, on peut trouver une forme récursive équivalente au calcul de la série. Par exemple :

$$H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots + z^{-m+1} + z^{-m+2}$$

Donc :

$$H(z) = \frac{1 - z^{-m}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^{-m} - 1}{z^{-1}(z - 1)} \quad (3.28)$$

III.1.3. Propriétés

- **Causalité :**

Un filtre numérique est dit causal, si sa réponse impulsionnelle $h(n)$ est nulle pour $n < 0$. Sa transformée en Z converge alors à l'extérieur d'un cercle.

Un filtre numérique est dit anticausal, si sa réponse impulsionnelle $h(n)$ est nulle pour $n \geq 0$. Sa transformée en Z converge alors à l'intérieur d'un cercle [G.Baudoin et j-f.Bercher].

- **Stabilité des filtres RIF :**

On remarquera que les filtres RIF ont comme seul pôle $z=0$ et que ce pôle à l'intérieur de cercle unité, donc les filtres RIF sont toujours stables .C'est une raison pour lesquelles ils sont très utilisés en filtrage adaptatif. En effet, les coefficients d'un filtre adaptatif varient à chaque nouvelle échantillon il faut vérifier donc vérifier la stabilité de filtre à chaque nouvel échantillon .Mais pour un filtre RIF, cette vérification est inutile.

III.1.4. Synthèses des filtres RIF par méthode des fenêtres

Soit un filtre numérique idéal $H(e^{j\omega})$, périodique de période 2π . Il est décomposable en série de Fourier par sa réponse impulsionnelle [Olivier SENTIEYS] :

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot e^{-jn\omega} \quad (3.29)$$

Sa réponse impulsionnelle peut être exprimée en fonction de $H(e^{j\omega})$ par :

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H(e^{j\omega}) e^{-jn\omega} d\omega \quad (3.30)$$

Ce filtre est non causal et à réponse impulsionnelle infinie. La manière la plus simple d'obtenir un filtre RIF approchant $H(e^{j\omega})$ est de limiter $h(n)$ par :

$$h_1(n) = \begin{cases} h(n) & 0 \leq n < N \\ 0 & n < 0, n \geq N \end{cases} \quad (3.31)$$

On obtient dans ce cas un filtre numérique RIF approché $h_1(n)$ dont la réponse fréquentielle est modifiée par le phénomène de Gibbs, c'est à dire l'apparition d'ondulation dans les bandes passantes et atténuées d'amplitude convergente vers une valeur non nulle lorsque N tend vers l'infini. De manière plus générale, on peut représenter $h_1(n)$ comme le produit du filtre idéal $h(n)$ avec une fenêtre à durée finie $w(n)$.

$$h_1(n) = h(n) \cdot w(n) \quad (3.32)$$

Il existe plusieurs fenêtres usuelles dans cette synthèse tel que : Hamming , Han, Kaiser...ect.

III.2. Filtres à réponse impulsionnelle infinie

Les filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie sont des systèmes linéaires discrets invariants dans le temps dont le fonctionnement est régi par une équation de convolution portant sur une infinité de termes. En principe, ils conservent une trace des signaux qui leur ont été appliqués pendant une durée infinie, ils sont à mémoire infinie. Une telle mémoire est réalisée par une boucle de réaction de la sortie sur l'entrée, d'où la dénomination courante de filtre récursif. Chaque élément de la suite des nombres de sortie est calculé par sommation pondérée d'un certain nombre d'éléments de la suite d'entrée et d'un certain nombre d'éléments de la suite de sortie précédents.

III.2.1. Fonction de transfert

Par analogie avec les filtres analogiques, un filtre numérique peut être caractérisé par sa fonction de transfert en z est :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{j=0}^{N-1} b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{-i}} \quad (3.33)$$

III.2.2. Synthèse des filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII)

Le procédé le plus utilisé pour calculer la fonction de transfert d'un filtre numérique, consiste à transposer la fonction de transfert $H(p)$ de son homologue analogique du plan « p » dans le plan « z » par une règle de transformation reliant p à z . Pour réaliser cette transformation et déterminer la fonction de transfert $H(z)$ dans le plan z , il suffit de définir la relation $p = F(z)$, d'où :

$$H(z) = H(p) = H(F(z)) \quad (3.34)$$

La relation exacte entre p et z est donnée par la définition même de la transformée en z vue dans le paragraphe précédent :

$$z = e^{pT_e}$$

Soit :

$$p = \frac{1}{T_e} \ln(z) \quad (3.35)$$

Dans le domaine étudié des filtres linéaires invariants, $H(p)$ se présente sous la forme d'un quotient de deux polynômes en p . Mais si on réalise la transformation de $H(p)$ en $H(z)$ en utilisant la relation 3.35, la forme résultante de $H(z)$ ne sera pas un quotient de deux polynômes en z . Comme nous l'étudierons, cela conduit à des difficultés de réalisation. Aussi, il est nécessaire de rechercher une règle de transformation qui permet de conserver la forme ordinaire de ces deux polynômes. De nombreuses méthodes ont été développées pour réaliser cette transformation. Elles correspondent à différents types d'analogie dans le sens où une méthode va privilégier telle ou telle propriété : gain, réponse impulsionnelle, réponse indicielle, ...ect. Ainsi, les principales méthodes sont les suivantes [Francis Cottet].

III.2.2.1. Transformation standard ou méthode de l'invariance impulsionnelle

Par cette méthode, on obtient un filtre numérique dont la réponse impulsionnelle est égale à la réponse impulsionnelle échantillonnée du filtre analogique correspondant. En considérant la fonction de transfert $H(p)$ ou $H(u)$ et la réponse impulsionnelle $h(x)$ du filtre analogique, la réponse impulsionnelle, échantillonnée à la période T_e , s'exprime par :

$$h_e(x) = T_e \sum_{k=0}^{+\infty} h_e(kT_e) \delta(x - kT_e) \quad (3.36)$$

Le coefficient T_e correspond au fait que la réponse impulsionnelle étant échantillonnée, la fonction de transfert est périodisée avec la fréquence F_e .

Soit la relation :

$$H_e(u) = H(u) * P_{gnFe}(u) \quad (3.37)$$

D'où :

$$h_e(x) = h(x) [Te \text{ Pgn} Te(x)] n \quad (3.38)$$

Par conséquent $He(z)$, la transformée en z de $h_e(x)$ est donnée par :

$$He(z) = Te \sum_{k=0}^{+\infty} h_e(kT_e) z^{-k} \quad (3.39)$$

Exemple :

Prenons l'exemple d'un filtre passe-bas du premier ordre de fonction de transfert suivante :

$$H(p) = ai/(p - pi)$$

La transformée de Laplace inverse nous donne la réponse impulsionnelle du filtre analogique :

$$h(x) = a_i e^{p_i t} \quad (3.40)$$

La transformée en z du filtre numérique de réponse impulsionnelle $h_e(x)$, échantillonnée de $h(x)$, s'écrit donc :

$$He(z) = Te \sum_{k=0}^{+\infty} [a_i e^{p_i k T_e}] z^{-k} \quad (3.41)$$

La somme sur k est une progression géométrique dont la limite permet d'obtenir finalement l'expression de $He(z)$:

$$He(z) = Te \frac{a_i}{1 - e^{p_i k T_e} z^{-1}} \quad (3.42)$$

La transformation standard ou méthode de l'invariance impulsionnelle est caractérisée par :

- condition : la fréquence de coupure haute du filtre doit être très inférieure à la fréquence de

Shannon ;

- domaine d'application : ce type de synthèse de filtre numérique s'applique à des filtres passe-bas ou des filtres passe-bande ;
- inconvénient : le principal inconvénient réside dans le fait qu'il faille réaliser la décomposition en éléments simples pour calculer l'équation aux différences du filtre numérique.

III.2.2.2. Méthode de l'invariance indicielle

Par cette méthode, on obtient un filtre numérique dont la réponse indicielle est égale à la réponse indicielle échantillonnée du filtre analogique correspondant. La réponse indicielle $sind(x)$ s'obtient en utilisant la relation suivante [G.BINET]:

$$sind(x) = h(x) * u(x) \quad (3.43)$$

La fonction $u(x)$ est la fonction unité ou échelon d'**Heaviside**, qui a pour transformée de Laplace $1/p$. La transformée en z de cette fonction est très simple à établir [Francis Cottet] :

$$U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u(kT_e) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad (3.44)$$

Les transformées de Laplace et en z de l'équation donnant $sind(x)$ sont respectivement :

$$Sind(p) = H(p)U(p) = \frac{H(p)}{p} \quad (3.45)$$

Et :

$$Sind(z) = H(z)U(z) = H(z) \frac{z}{z-1} \quad (3.46)$$

En considérant que $[H(p)/p]$ peut être mis sous la forme d'une somme d'éléments simples du premier ordre, nous pouvons utiliser la transformation précédente (cf. équation 3.34). Mais à cette expression $[H(p)/p]$ correspond $[H(z) (z/1-z)]$, par conséquent, nous considérerons la transformation suivante :

$$\frac{a_i}{p - p_i} \rightarrow \frac{z - 1}{z} \frac{T_e}{1 - e^{p_i k T_e} z^{-1}} \quad (3.47)$$

Ainsi, pour un filtre quelconque s'exprimant sous la forme de r filtres du premier ordre en parallèle, nous avons la relation complète donnant $H(z)$:

$$H(p) = \sum_{i=0}^r \frac{a_i}{p - p_i} \rightarrow H(z) = T_e \frac{z - 1}{z} \sum_{i=0}^r \frac{a_i}{1 - e^{p_i k T_e} z^{-1}} \quad (3.48)$$

La transformation par la méthode de l'invariance indicielle est caractérisée par :

- condition : la fréquence de coupure haute du filtre doit être inférieure à la fréquence de Shannon ;
- domaine d'application : ce type de synthèse de filtre numérique s'applique à des filtres passe-bas ou des filtres passe-bande ;
- inconvénient : le principal inconvénient réside dans le fait qu'il faille réaliser la décomposition en éléments simples pour calculer l'équation aux différences du filtre numérique.

III.2.2.3. Transformation homographique ou équivalence de l'intégration

La transformation bilinéaire est une méthode intéressante pour passer du continu à un équivalent discret. Elle permet éventuellement de traiter des problèmes comme étant ceux du continu puis d'implanter la solution technique sur des outils travaillant en discret (ordinateurs, processeurs). Elle peut être aussi utilisée dans l'autre sens c'est à dire pour faire éventuellement le passage du discret à un équivalent continu. Dans ce cas bien sûr nous utilisons :

$$p \rightarrow \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (3.49)$$

La transformation bilinéaire ou encore appelée transformation homographique ou par équivalence à l'intégration est caractérisée par :

- domaine d'application: ce type de synthèse de filtre numérique s'applique à des filtres dont la caractéristique fréquentielle est constante dans des domaines de fréquences données ;
- avantage : le principal avantage de ce filtre est sa stabilité.

IV. Les filtres numériques bidimensionnels

IV.1. Les filtres RIF bidimensionnelles

Un filtre RIF à deux dimensions est défini par une relation entre la sortie $y(m, n)$ et l'entrée $x(m, n)$ qui s'écrit :

$$y(m, n) = \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} a_{ij} x(m-i, n-j) \quad (3.50)$$

L'ensemble des coefficients a_{ij} constitue une matrice $A_{N_1 N_2}$ de dimension $N_1 \times N_2$.

La fonction de transfert à deux variables correspondante, $H(Z_1, Z_2)$ s'exprime en fonction de cette matrice par [Francis Cottet] :

$$H(Z_1, Z_2) = \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} a_{ij} z_1^{-i} z_2^{-j} \quad (3.51)$$

Ou encore, sous forme vectorielle :

$$H(Z_1, Z_2) = \left[1, z_1^{-1}, \dots, z_1^{-(N_1-1)} \right] A_{N_1 N_2} \begin{bmatrix} 1 \\ z_2^{-1} \\ \vdots \\ z_2^{-(N_2-1)} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

La matrice des coefficients $A_{N_1 N_2}$ est aussi appelée le masque.

Le problème de la stabilité des filtres RIF ne se posent pas puisque la réponse impulsionnelle est existée seulement pendant un temps finie d'où la stabilité de $H(Z_1, Z_2)$ est garante, par conséquent :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |H(Z_1, Z_2)| < \infty$$

Pour toute valeur finie de N et M .

IV.2. Méthodes de synthèse des filtres RIF

Considérons un filtre bidimensionnelle d'ordres N et M impairs sous sa forme non-causal. Au moyen d'une traduction de sa réponse impulsionnelle il est possible d'obtenir sa forme causale. Ceci présente une limite linéaire de phase dans sa fonction de transfert. Par conséquent, la réponse en fréquence du filtre peut être écrite sous la forme :

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \sum_{k=-(M-\frac{1}{2})}^{M-\frac{1}{2}} \sum_{l=-(N-\frac{1}{2})}^{N-\frac{1}{2}} a_{nc} e^{-j(k\omega_1 + l\omega_2)} \quad (3.53)$$

De l'équation ci-dessus, si les coefficients (k, l) ayant la propriété de symétrie :

$$a_{nc}(k, l) = a_{nc}(k, -l) = a_{nc}(-k, -l) = a_{nc}(-k, l)$$

La réponse en fréquence est donnée par la formule suivante :

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \sum_{m=0}^{M-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{N-\frac{1}{2}} a(m, n) \cos(m\omega_1) \cos(n\omega_2) \quad (3.54)$$

Où:

$$a(0,0) = a_{nc}(0,0), a(m,0) = 2a_{nc}(m,0), m=1,\dots,\frac{M-1}{2}, a(0,n) = 2a_{nc}(0,n) \\ n=1,\dots,\frac{M-1}{2}, a(m,n) = 4a_{nc}(m,n), n=1,\dots,\frac{N-1}{2}, m=1,\dots,\frac{M-1}{2}.$$

Plusieurs différentes méthodes ont été proposées pour la synthèse, certains sont une généralisation directe de cas des filtres unidimensionnelle. Nous retrouvons les méthodes suivantes :

IV.2.1. Méthode de transformation fréquentielle

Une méthode de conception basée sur la transformation de la réponse de fréquence du filtre unidimensionnelle dans la réponse de fréquence du filtre bidimensionnelle. Nous considérons un filtre unidimensionnel à phase linéaire d'ordre N impair. La réponse en fréquence d'un tel filtre peut être écrite :

$$H(e^{j\omega_1}) = \sum_{m=0}^{N-1/2} a(m) \cos(m\omega_1) \quad (3.55)$$

Si pour ce qui précède, une transformation des variables données par :

$$\cos(\omega) = A\cos(2\omega_1) + B\cos(\omega_2) + C\cos(\omega_1)\cos(\omega_2) + D \quad (3.56)$$

Si on utilise les propriétés des fonctions trigonométrique et polynomial de **Tchebychev**, il est possible d'obtenir une fonction du type bidimensionnelle suivante :

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} \sum_{l=0}^{\frac{N-1}{2}} a(k,l) \cos(k\omega_1) \cos(l\omega_2) \quad (3.57)$$

Ceci signifie que le filtre peut être conçu dans le cas unidimensionnel et aussi peut être transformé en bidimensionnelle si A, B, C, D peut être choisi pour obtenir des découpes utiles de transformations [Seetharaman Swamamani].

IV.2.2. Méthode des fenêtres

Supposons que la réponse fréquentielle désiré $H_d(u, v)$ est donnée, la réponse impulsionnelle désiré peut être obtenue par la transformée de Fourier inverse de H_d .

L'idée de la méthode des fenêtres est de multiplier le filtre à support infini par une fonction $W(m, n)$ qui force les coefficients de la réponse impulsionnelle $h(m, n)$ à zéro pour $m, n \notin R_h$, R_h est la région désiré [J Lasenby].

$$h_d(m, n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H_d(u, v) e^{j(ux+vy)} du dv \quad (3.58)$$

Le filtre donc est :

$$h(m, n) = h_d(m, n)W(m, n) \quad (3.59)$$

Les formes des fenêtres utiliser sont présentées dans le chapitre précédent.

IV.3. Les filtres à réponse impulsionnelle infinie bidimensionnelle

Le filtre à réponse impulsionnelle infinie bidimensionnelle peut défini par une équation aux différences linéaires, sa forme générale est la suivante :

$$y(m, n) = \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} b_{ij} x(m-i, n-j) - \sum_{i=0}^{N_3-1} \sum_{j=0}^{N_4-1} a_{ij} y(m-i, n-j) \quad (3.60)$$

Où: $i+j \neq 0$ et $x(m, n)$, $y(m, n)$ sont les séquences d'entrées et de sorties respectivement [MAHMOOD R et al].

Cette équation peut s'écrit :

$$\sum_{i=0}^{N_3-1} \sum_{j=0}^{N_4-1} a_{ij} y(m-i, n-j) = \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} b_{ij} x(m-i, n-j) \quad (3.61)$$

La fonction de transfert de filtre RII décrite en employant la transformée en Z bidimensionnelle et peut être exprimée comme un rapport des deux polynômes variables comme suit :

$$H(Z_1, Z_2) = \frac{Y(Z_1, Z_2)}{X(Z_1, Z_2)} = \frac{\sum_0^{N_1} \sum_0^{N_2} b_{ij} Z_1^i Z_2^j}{\sum_0^{N_3} \sum_0^{N_4} a_{ij} Z_1^i Z_2^j} \quad (3.62)$$

Où: $a_{00} = 1$, a_{ij} et b_{ij} sont des coefficients réels. Pour tout signal d'entrée $X(Z_1, Z_2)$, la sortie $Y(Z_1, Z_2)$ peut s'écrire :

$$Y(Z_1, Z_2) = H(Z_1, Z_2)X(Z_1, Z_2) \quad (3.63)$$

En pratique, on utilise souvent un filtre à phase nulle (réponse impulsionnelle paire) ayant la forme suivante :

$$H(Z_1, Z_2) = H_0 \frac{\sum_{K_1=0}^N \sum_{K_2=0}^N b(K_1, K_2) Z_1^{-K_1} Z_2^{-K_2}}{\prod_{K=1}^N 1 + a_1(k)Z_1 + a_2(k)Z_1 + a_3(k)Z_1 Z_2} \quad (3.64)$$

Malgré que ce filtre ne soit pas causal (pour des applications on-line), il possède un nombre de coefficients plus réduit par rapport au filtre général. En outre, on peut facilement vérifier sa stabilité comme suit :

$$|a_1(k) + a_2(k)| < a_3(k) < 1 - |a_1(k) + a_2(k)| \quad k = 1, 2, 3, \dots, N$$

IV.3.1. Propriété

IV.3.1.1. Le problème de la causalité

Pour parler de filtre récursif, il faut calculer les échantillons présents et futurs en fonction des échantillons passé. Il faut donc définir un domaine du futur et un domaine du passé dans une image (le présent étant par exemple l'origine dans le plan). Un bon nombre de travaux où le futur incluant le présent est un quart de plan ($x \geq 0$ et $y \geq 0$) (et où le passé est donc formé des trois quart restants $x < 0$ ou $y < 0$). Or, cette définition de la causalité est trop restrictive: il y a par exemple des formes de filtres qui ne peuvent pas être synthétisés. La définition la plus générale de la causalité est donné par la notion de «demi-plan asymétrique», le présent est l'origine du plan; le futur est l'ensemble des lignes dont l'ordonnée est positive complété par les échantillons d'ordonnée nulle et d'abscisse positive, le passé est symétrique du futur par rapport à l'origine. Cette définition est compatible avec les applications vidéo où il y a balayage de l'image ligne par ligne au cours du temps

IV.3.1.2. Le problème de la stabilité

Après avoir calculé la fonction de transfert de filtre, l'étude de leur stabilité revient à étudier la nature de leurs pôles [H.farid]. La méthode la plus utilisé est basée sur le critère sortie liée par entrée liée. Ce critère déclare qu'un filtre bidimensionnelle est stable si est seulement si, sa réponse impulsionnelle satisfaire la condition suivante :

$$\sum_{z_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{z_2=-\infty}^{+\infty} |H(z_1, z_2)| < \infty$$

Cette condition signifiée que le filtre est stable si la somme des échantillons de sa réponse impulsionnelle est finie. Cela Ce n'est pas le cas pour les filtres RII.

- **Quelque théorème de stabilité des filtres RII**

a) **Théorème de Shanks, 1972** [Ed. Alexander D. Poularikas]:

- **Théorème 1:**

Le filtre $H(z_1, z_2)$ est stable si et seulement si $X(z_1, z_2) \neq 0$ pour chaque point (z_1, z_2) tel que :

$$|z_1| \geq 1 \text{ Ou } |z_2| \geq 1$$

- **Théorème 2:**

Le filtre $H(z_1, z_2)$ est stable si et seulement si, les conditions suivantes sont vraies :

a) $X(z_1, z_2) \neq 0, |z_1| \geq 1, |z_2| = 1.$

b) $X(z_1, z_2) \neq 0, |z_1| = 1, |z_2| \geq 1.$

c) **Théorème de Huang (1972):**

Le filtre $H(z_1, z_2)$ est stable si et seulement si, $A(z_1, z_2)$ satisfaire les conditions suivantes :

a) $X(z_1, z_2) \neq 0, |z_1| \geq 1, |z_2| = 1.$

b) $X(a, z_2) \neq 0, |z_1| \geq 1$, pour chaque a tel que $|a| \geq 1.$

$X(z_1, z_2)$:Dénominateur de filtre RII

IV.3.2. Synthèse des filtres RII bidimensionnelle

Les Filtres à réponse impulsionnelle infinie ont des fonctions de transfert résultant d'un ordre infini. En général, il est plus difficile de concevoir un filtre à réponse impulsionnelle infinie bidimensionnelle qu'un filtre à réponse impulsionnelle infinie monodimensionnelle. Les techniques monodimensionnelles dépendent normalement de la factorisation des polynômes d'une seule variable, ayant pour résultat des algorithmes simples pour l'essai de la stabilité et de la stabilisation des filtres dans le cas de l'instabilité. De telles techniques, malheureusement, ne sont pas généralisables pour le cas bidimensionnel [Seetharaman Swamamani].

D'après la fonction de filtre à réponse impulsionnelle infinie bidimensionnelle en

équation (3.62), on peut voir que les coefficients a_{ij} et de b_{ij} doivent être choisis pour rapprocher la réponse en fréquence désirée avec une exécution récursive stable. La stabilité est un problème important pour les filtres récursifs. IL existe différentes méthodes de conception de ces filtres. Nous pouvons évoquer les techniques suivantes.

IV.3.2.1 Transformation monodimensionnel au bidimensionnelle

Cette méthode se compose de la transformation monodimensionnelle au bidimensionnelle. Ceci comporte une opération traçante d'unidimensionnelle au bidimensionnelle, avec une opération de rotation. Donné, le filtre unidimensionnel continu sous la forme factorisée, sa fonction de transfert peut être vue en tant que filtre bidimensionnel changeant dans une direction seulement. Supposons le filtre unidimensionnel continu sous sa forme factorisée suivante :

$$H_1(s) = H_0 \left[\frac{\prod_{i=1}^m (s_2 - q_i)}{\prod_{i=1}^m (s_2 - p_i)} \right] \quad (3.65)$$

Où : H_0 est un gain constant et q_i et p_i sont les zéros et les pôles de filtre.

Le filtre donné dans l'équation (3.65) Peut également être vu comme filtre à deux dimensions qui varie dans une dimension seulement et pourrait c'écrire:

$$H(s_1, s_2) = H_1(s_2) = H_0 \left[\frac{\prod_{i=1}^m (s_2 - q_i)}{\prod_{i=1}^m (s_2 - p_i)} \right] \quad (3.66)$$

$$\text{Où: } s_1 = s'_1 \cos \beta + s'_2 \cos \beta \quad s_2 = -s'_1 \cos \beta + s'_2 \cos \beta$$

Remplaçons s_2 par sa valeur dans l'équation (3.66), nous arriverons à la forme suivante :

$$H(s'_1, s'_2) = H_0 \left[\frac{\prod_{i=1}^m (s'_2 \cos \beta - s'_1 \cos \beta - q_i)}{\prod_{i=1}^m (s'_2 \cos \beta - s''_1 \cos \beta - p_i)} \right] \quad (3.67)$$

Nous obtenons un filtre dont sa réponse en fréquence en fonction de deux variables s'_1 et s'_2 correspondant à une rotation par un angle $-\beta$. De cela, le filtre numérique peut être obtenu par l'application aux deux variables continues s'_1 et s'_2 , la transformée bilinéaire en z suivante :

$$s'_1 = \frac{2}{T_e} \frac{1 - z_1}{1 + z_1}$$

$$s'_2 = \frac{2}{T_e} \frac{1 - z_2}{1 + z_2}$$

.

Nous obtenons une fonction de transfert numérique suivante [José M. costa vela]:

$$H(z_1, z_2) = A \prod_{i=1}^M \left[\frac{b_{11}^i + b_{21}^i z_1 + b_{12}^i z_2 + b_{22}^i z_1 z_2}{a_{11}^i + a_{21}^i z_1 + a_{12}^i z_2 + a_{22}^i z_1 z_2} \right] \quad (3.68)$$

Où :

$$\left. \begin{aligned}
 &A = H_0 \left(\frac{T_e}{2} \right)^{n-m} \\
 &M = \max(n, m) \\
 &\left. \begin{aligned}
 b_{11}^i &= \cos \beta - \sin \beta - \frac{T_e}{2} q_i \\
 b_{21}^i &= \cos \beta + \sin \beta - \frac{T_e}{2} q_i \\
 b_{12}^i &= -\cos \beta - \sin \beta - \frac{T_e}{2} q_i \\
 b_{22}^i &= -\cos \beta + \sin \beta - \frac{T_e}{2} q_i
 \end{aligned} \right\} \text{pour } 1 \leq i \leq m \\
 &b_{11}^i = b_{21}^i = b_{12}^i = b_{22}^i = 1 \quad \text{pour } m < i \leq M \\
 &\left. \begin{aligned}
 a_{11}^i &= \cos \beta - \sin \beta - \frac{T_e}{2} p_i \\
 a_{21}^i &= \cos \beta + \sin \beta - \frac{T_e}{2} p_i \\
 a_{12}^i &= -\cos \beta - \sin \beta - \frac{T_e}{2} p_i \\
 a_{22}^i &= -\cos \beta + \sin \beta - \frac{T_e}{2} p_i
 \end{aligned} \right\} \text{pour } 1 \leq i \leq n \\
 &a_{11}^i = a_{21}^i = a_{12}^i = a_{22}^i = 1 \quad \text{pour } n < i \leq M
 \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

IV.3.2.2. Synthèse par la méthode de décomposition en valeur singulier

L'application de la décomposition en valeur singulière (SVD) dans la conception des filtres numériques a été étudiée par beaucoup de chercheurs. En général les filtres conçus utilisant cette méthode sont composés de M cascades parallèles de dimension z_1 et z_2 et d'ordre N pour chacune d'elle. La fonction de transfert du filtre conçu utilisant cette approche est de la forme :

$$H(z_1, z_2) = \sum_{i=1}^M F_i(z_1) G_i(z_2) \quad (3.70)$$

Où : $F_i(z_2)$ et $G_i(z_2)$ sont des fonctions de transfert de filtre RII unidimensionnelle.

Utilisons cette approche, la stabilité de filtre bidimensionnelle est assurée si le filtre unidimensionnel en z_1 et z_2 est stable. La figure suivante représentée la structure d'implémentation de filtre conçu par la méthode SVD :

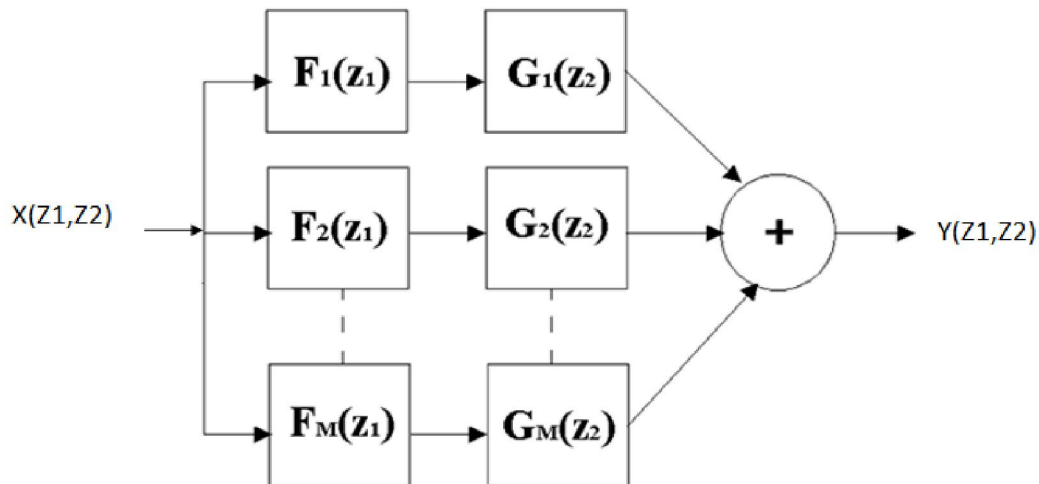


Figure 3-4: Implémentation d'IIR par SVD

Cette structure ramené la conception de filtre bidimensionnelle vers un filtre unidimensionnelle [T. Williams .al].

IV.3.2.3. Synthèse dans le domaine spatial

Dans la conception de filtre RII dans le domaine spatial, la réponse désiré ou idéale d'un système pour une entrée donnée supposée connue. Donc les coefficients du filtre sont estimés de telle manière que la réponse du filtre à entrée connue soit la plus proche de celle désiré.

Cette méthode est utilisée pour conserver les propriétés du domaine spatial désiré. L'entrée employée souvent dans la conception de filtre d'IIR est $\delta(m, n)$, et la réponse désiré est notée $h_d(m, n)$. La conception dans le domaine spatiale peut être vue comme un problème d'identification de système.

En termes d'identification, la modélisation des systèmes $H(z_1, z_2)$ est appelé (ARMA : *Auto-Regressive Moving_average*) .Dans le cas ou tous les coefficients b_{ij} sont à zéro à part b_{00} ainsi le numérateur reste constant, est appelé (AR : *Auto-Regressive* Ou bien all pôle

modeling). En fin si tous les a_{ij} sont nulles sauf a_{00} et le dénominateur est intacte est dit (MA : *Moving –Average*). La modélisation des filtres RII apparait alors comme étant une modélisation ARMA.

Le critère d'erreur, souvent utilisé dans la conception de filtre, est :

$$J = \sum_{(m,n) \in R_e} \sum e^2(m, n) \quad (3.71)$$

Avec :

$$e(m, n) = h_d(m, n) - h$$

$e(m, n)$: représente l'erreur spatial.

R_e est la région de support de la séquence d'erreur. Dans les meilleurs cas R_e contient toutes les valeurs possibles de (k, l) . Dans la pratique, il se prolonge seulement au-dessus d'une région finie de (k, l) , là où $h_d(m, n)$ a une énergie significative.

La minimisation du critère d'erreur par rapport à a_{ij} et b_{ij} est posé comme un problème d'optimisation non linéaire qui peut être résolu par des méthodes d'optimisations [JAE S. LIM.1990].

Exemple :

On considère le filtre donnée comme suit :a

$$H(z_1, z_2) = \frac{b}{1 + a_1 z_1^{-1} + a_2 z_2^{-1}} \quad (3.72)$$

Où : a_1, a_2 et b les coefficient a optimisés.

La relation d'entrée sortie est de la forme suivante :

$$y(m, n)(1 + a_1 z_1^{-1} + a_2 z_2^{-1}) = bx(m, n) \quad (3.73)$$

Alors :

$$y(m, n) = -a_1 y(m-1, n) - a_2 y(m, n-1) + b x(m, n) \quad (3.74)$$

Lorsque $x(m, n)$ est une entrée impulsionnelle alors on obtient $y(m, n) = h(m, n)$ qu'est la réponse impulsionnelle de filtre dont les valeurs :

$$h(0, 0) = b ;$$

$$h(1, 0) = -a_1 b ;$$

$$h(0, 1) = -a_2 b ;$$

$$h(1, 1) = 2a_1 a_2 b ;$$

Le critère d'erreur prend la forme non linéaire suivante :

$$J = (h_d(0, 0) - b)^2 + (h_d(1, 0) + a_1 b)^2 + (h_d(0, 1) + a_2 b)^2 + (h_d(1, 1) + 2a_1 a_2 b)^2 + \dots$$

IV.3.2.4. Synthèse dans le domaine fréquentiel

Dans le domaine fréquentiel la fonction de transfert de filtre à concevoir est connue, elle est donnée sous la forme fréquentiel $H_d(\omega_1, \omega_2)$ où ω_1 et ω_2 sont les pulsations (variables fréquentiels) tels que $\omega_1, \omega_2 \in [0, \pi]$. Le but de la synthèse est de déterminer les coefficients de filtre numérique $H(z_1, z_2)$ d'une manière à avoir $H(\omega_1, \omega_2)$ la plus proche possible de $H_d(\omega_1, \omega_2)$:

$$\text{Avec :} \quad H(z_1, z_2) = H(\omega_1, \omega_2) \Big|_{\substack{z_1 = e^{j\omega_1} \\ z_2 = e^{j\omega_2}}}$$

La fonction de transfert confédérer est donnée par :

$$H(z_1, z_2) = H_0 \frac{\sum_{K_1=0}^N \sum_{K_2=0}^N b(K_1, K_2) z_1^{-K_1} z_2^{-K_2}}{\prod_{K=1}^N (1 + a_1(k) z_1 + a_2(k) z_1 + a_3(k) z_1 z_2)} \quad (3.75)$$

Où : $b_{00} = 1$

Cette approximation peut être réalisée par la minimisation [H.Farid] et [Ioannis F. Gonos.et al] :

$$J = \sum_{m=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} \left[\left| H\left(\frac{\pi m}{N_1}, \frac{\pi n}{N_2}\right) - H_d\left(\frac{\pi m}{N_1}, \frac{\pi n}{N_2}\right) \right| \right]^\alpha \quad (3.76)$$

Où : $\omega_1 = \frac{\pi}{N_1} m$ et $\omega_2 = \frac{\pi}{N_2} n$ et α est entier positif pair ($\alpha = 2$ ou 4) et H_d : Réponse désiré.

Par conséquent, le but est de réduire au minimum la différence entre l'amplitude actuelle est celui désiré de filtre à $N_1 N_2$ points.

Puisque on traite des facteurs de premier degré dans le dénominateur alors les conditions de stabilités sont donnés par :

$$|a_1(k) + a_2(k)| - 1 < a_3(k) < 1 - |a_1(k) - a_2(k)|$$

Pour : $k = 1$ à k . k : est un entier positif.

Ainsi, la conception des filtres bidimensionnelle récursifs est équivalente au problème, contraint de minimisation suivant:

$$\min(J) = \sum_{m=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} \left[\left| H\left(\frac{\pi m}{N_1}, \frac{\pi n}{N_2}\right) - H_d\left(\frac{\pi m}{N_1}, \frac{\pi n}{N_2}\right) \right| \right]^\alpha \quad (3.77)$$

V. Exemple de filtre RII et son algorithme d'implémentation

Le filtre de référence est un RII passe bas, sa réponse fréquentielle $H(u, v)$ est donner par l'équation suivante [Ioannis F. Gonos.et al] :

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{u^2 + v^2} \leq 0.08.\pi \\ 0.5 & \text{si } 0.08.\pi \sqrt{u^2 + v^2} \leq 0.12.\pi \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (3.78)$$

L'algorithme d'implémentation de ce filtre est le suivant :

Réel : $H(u, v)$, u , v ;

Entier : i, j, nc, nl ; % nc : nombre de colonne, nl : nombre de ligne.

Début

Pour i allant de 0 à $nl-1$ faire

Pour j allant de 0 à $nc-1$ faire

Si $\sqrt{u^2 + v^2} \leq 0.08.\pi$ alors $H(u, v) =$

Si non si $0.08.\pi \leq \sqrt{u^2 + v^2} \leq 0.12.\pi$ alors $H(u, v) = 0.5$;

Si non $H(u, v) = 0$;

Fin si

Fin pour

Fin pour

Fin

Après avoir synthétisé le filtre, l'opération de filtrage d'une image fait selon les étapes illustrées dans la figure 3.5

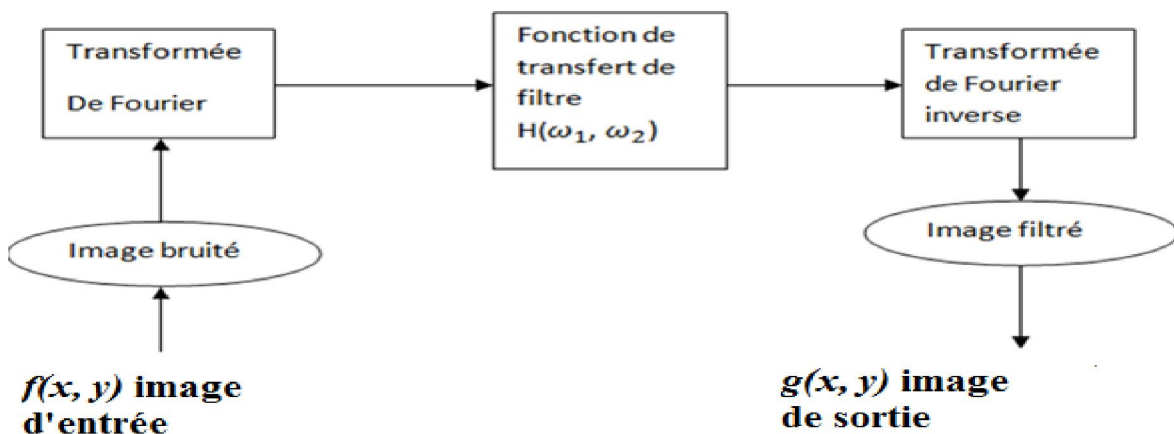


Figure 3.5 : l'opération de filtrage.

VI. Conclusion

Le filtrage numérique représente une des opérations les plus élémentaires et les plus essentielles réalisées dans le cadre du traitement des images. Afin de pouvoir effectuer de tels traitements dans un ordinateur, les images doivent auparavant être numérisées, ce qui implique à la fois un échantillonnage dans le domaine spatial et une quantification dans le domaine des luminances. L'échantillonnage spatial induit des périodicités dans les représentations fréquentielles associées aux images traitées qui permettent d'en restreindre la description sur un domaine précis.

Nous avons présentés dans ce chapitre les notions de base du filtrage numérique et quelques méthodes utilisées pour leur conception.

CHAPITRE IV

Partie expérimentale

I. Introduction :

Dans les chapitres précédents, nous avons donné les notions théoriques du filtrage linéaire. Dans ce chapitre, nous appliquerons ces filtres que nous avons programmés sous l'environnement visuel C++ sur une image médicale. En plus des programmes que nous avons développés, nous avons utilisé partiellement le logiciel Idrisi qui est doté de toutes les fonctions de base du traitement d'image.

II. Résultat d'application des filtres RIF sur l'image muscle :

L'image originale de muscle est représentée par la figure 4.1 :

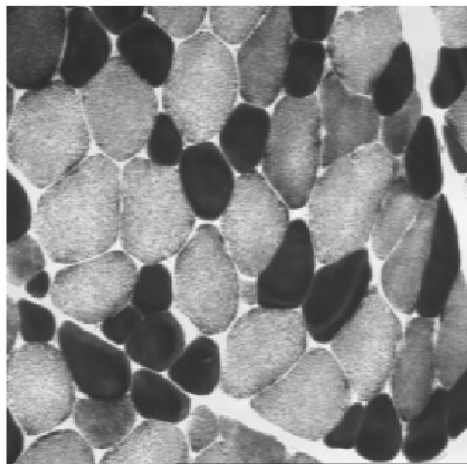


Figure 4.1 : Image muscle

Le spectre de Fourier de cette image est donnée par la figure 4.2 :

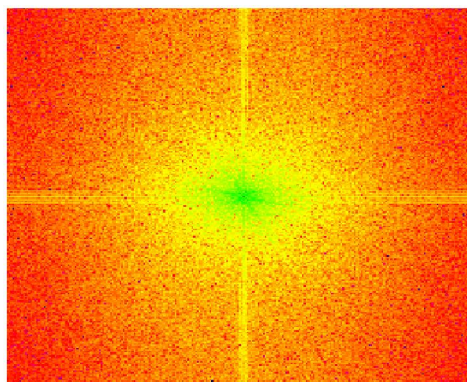


Figure 4.2 : Le spectre de Fourier de l'image muscle.

Nous pouvons remarquer que toutes les structures linéaires de l'image originale sont projetées dans la direction perpendiculaire dans l'espace des fréquences spatiales, en générale, sous forme d'harmonies (théorie des transformations orthogonales).

II.1. Résultat pour les filtres passe-bas :

II.1.1. Filtre idéal

a) Le filtre passe bas circulaire :

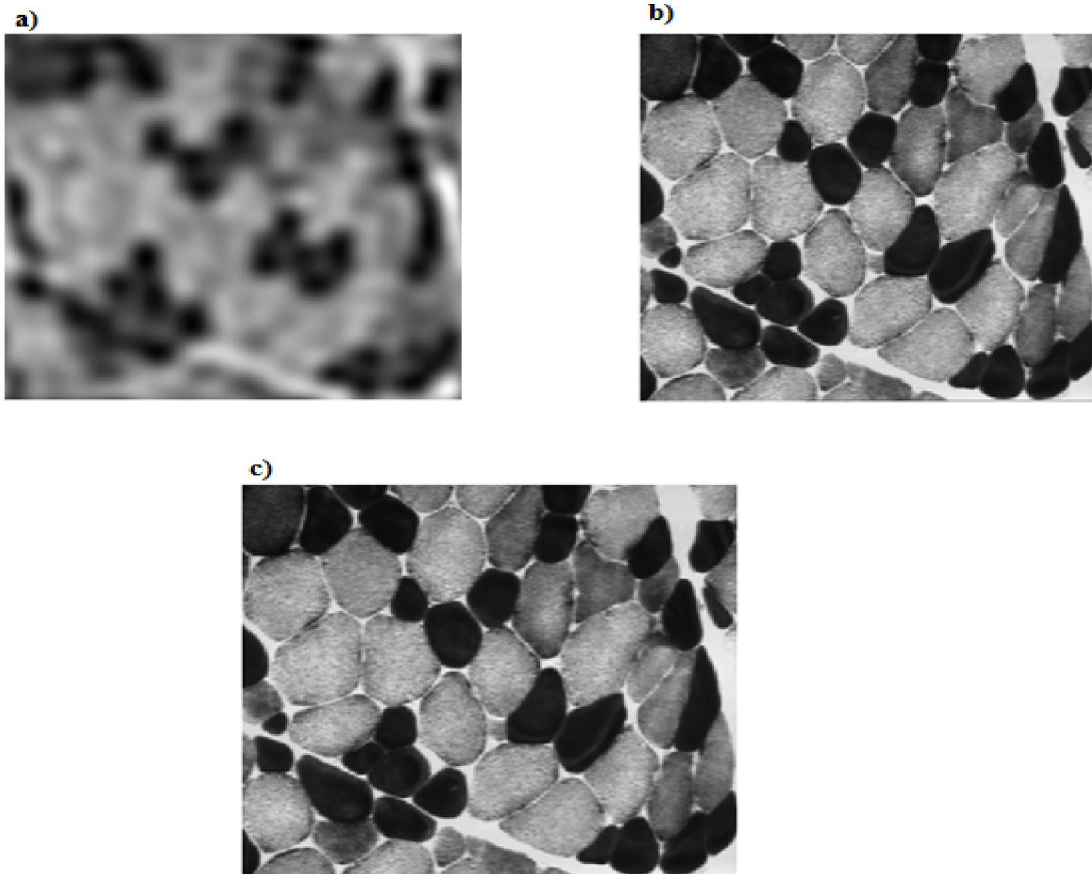


Figure 4.3 :Résultat du filtre passe bas circulaire sur l'image muscle avec les fréquences de coupures suivante : a) $s=0.05$ b) $s= 0.3$ c) $s= 0.45$

Nous remarquons que plus de la fréquence de coupure s'approche de 0 et plus, le filtre fusionne les classes et des textures grossières sont formées. Par conséquent, le seuil optimal est étroitement lié à l'objectif thématique recherché.

b) Le filtre passe bas rectangulaire :

Testé avec 03 fréquences de coupure croissantes, ce filtre agit comme le précédent, sauf qu'il présente l'avantage de s'intéresser aux structures directionnelles. Dans le cas où, les objets d'intérêts ont une structure horizontale, il est recommandé d'utiliser un filtre de structure horizontale et vice versa pour une structure verticale. Les résultats sont illustrés dans la figure 4.4 :

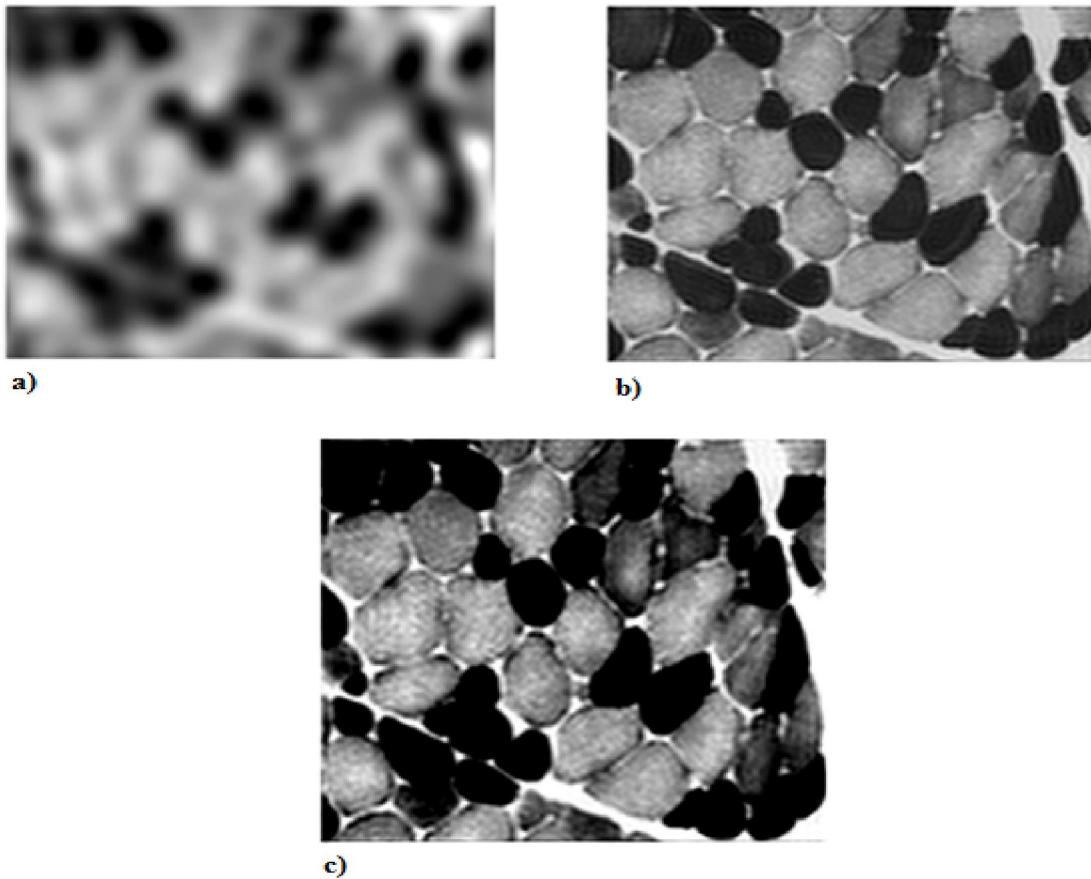


Figure 4.4 :Résultat du filtre passe bas rectangulaire sur l'image muscle pour:a) $S=0.05$ b) $S=0.2$
c) $S=0.4$

II.1.2. Le filtre Butterwourth

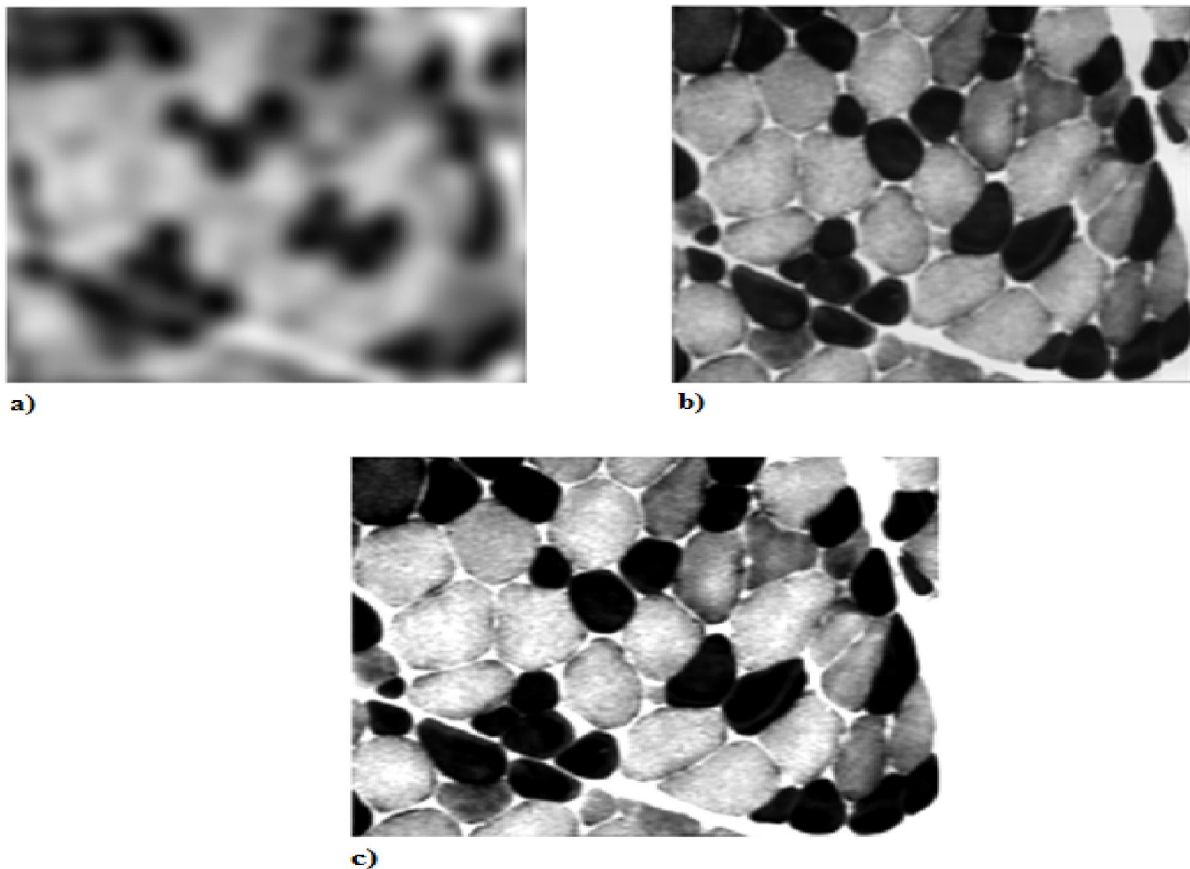


Figure 4.5 : Résultat du filtre Butterwourth passe bas sur l'image muscle pour: a) $S=0.05$ b) $S=0.3$ c) $S=0.45$

Ce filtre présente l'avantage de la mise en évidence des micro-objets au sein d'une même entité. Nous pouvons facilement remarquer la détection de micro-organismes dans une même cellule, claire ou sombre.

II.1.3. Le filtre gaussien

Testé avec les mêmes fréquences de coupures que le précédent, ce filtre a donné en grosomodo, les mêmes résultats que la fenêtre de Butterwourth. En effet, nous pouvons remarquer la même répartition des fréquences spatiales, sauf que la fenêtre Gaussienne présente plus de linéarité.

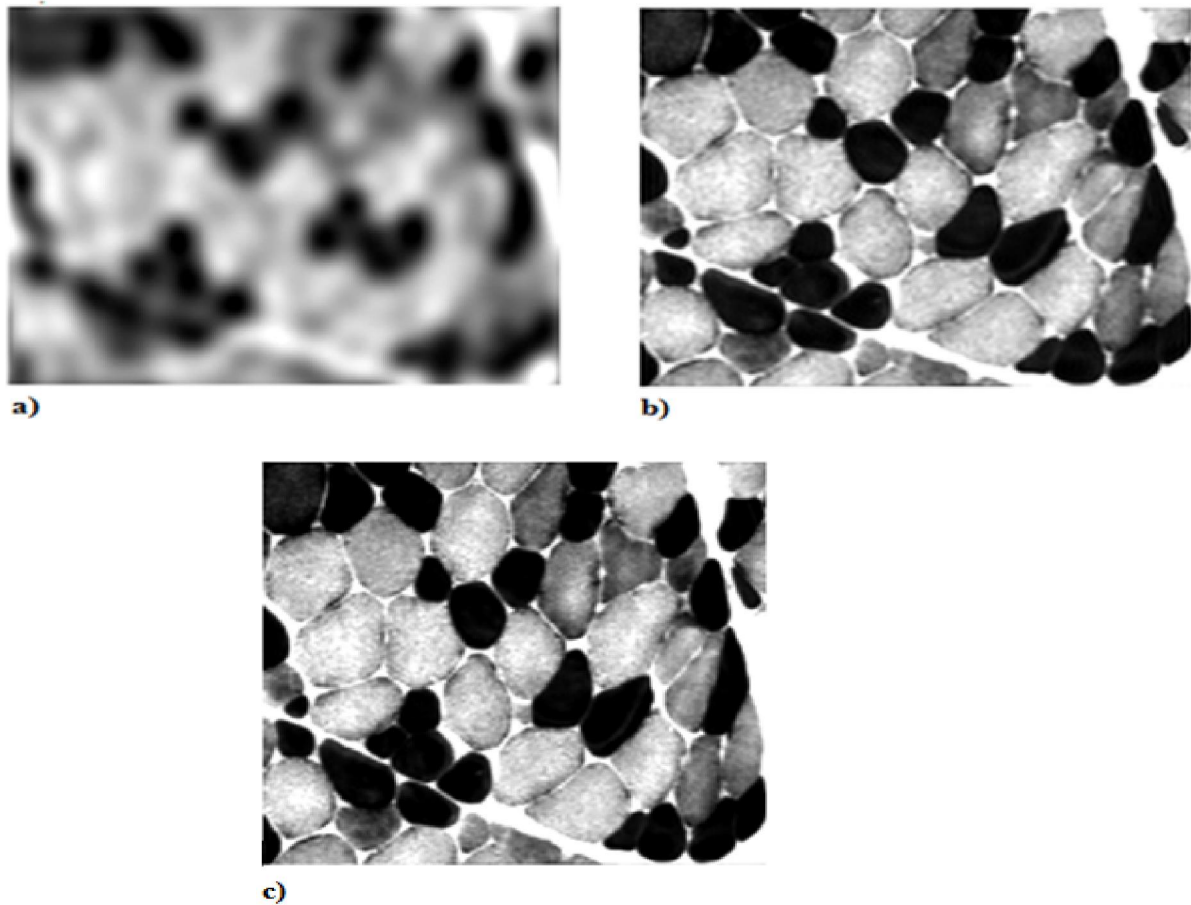
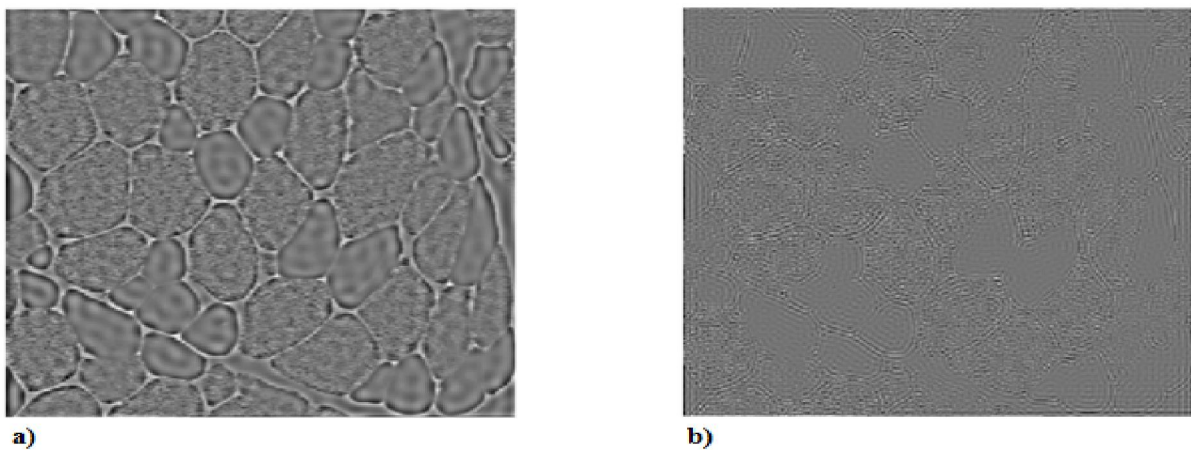


Figure 4.6 : Résultat du filtre Gaussien passe bas sur l'image muscle pour: a) $S = 0.05$ b) $S = 0.3$
c) $S = 0.45$

II.2. Résultat pour les filtres passe-haut :

II.2.1. Filtre idéal

a) Le filtre passe haut circulaire :



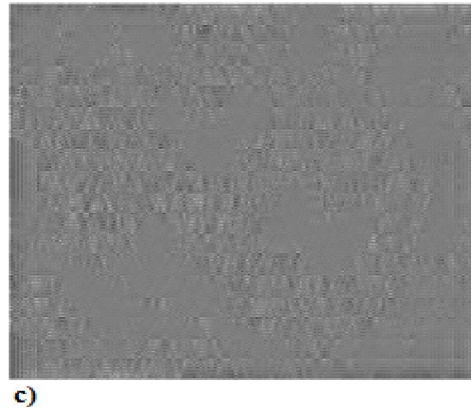
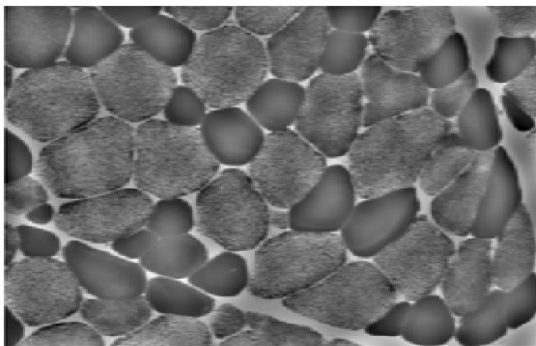


Figure 4.7 :Résultat du filtre passe haut circulaire sur l'image muscle pour les seuils :a) $s=0.05$ b) $s=0.3$ c) $s=0.45$

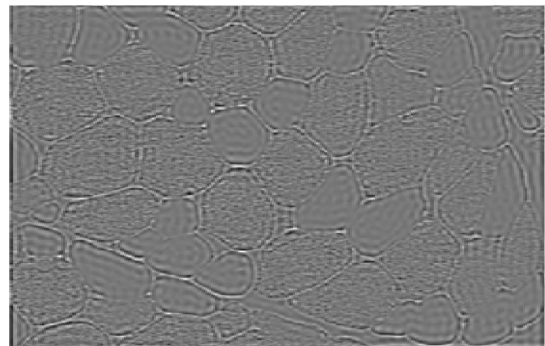
Quand la fréquence de coupure se rapproche de $\max=1/2$ (figure c), seulement les contours des macro-structures sont détectés. Les valeurs faibles ont détecté les contours des micro-objets.

b) Le filtre rectangulaire

Testé avec 03 fréquences de coupures croissantes, ce filtre permet de détecter les contours de micro-structure. Dans le cas où les fréquences de coupures sont petites donc la bande passante des hautes fréquences du filtre est très large, les points noirs de l'image (faibles radiométries) deviennent claires. Il s'agit des textures et des structures couvertes par la bande des faibles fréquences que nous avons éliminées.



a)



b)

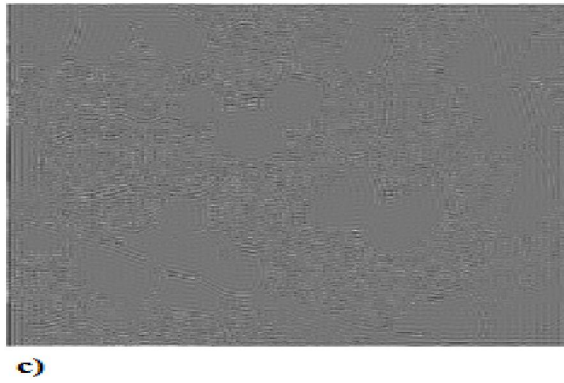
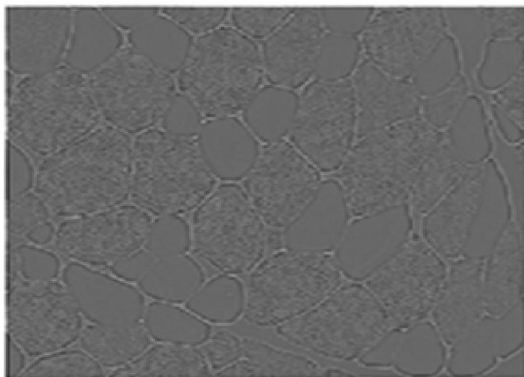
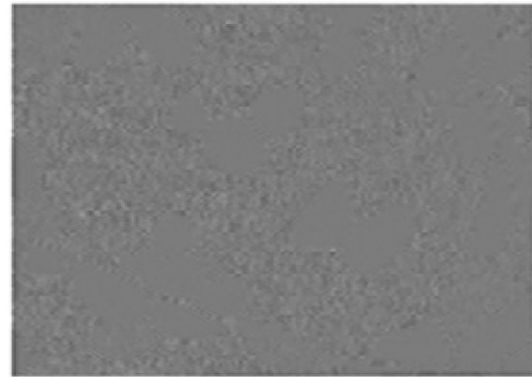


Figure 4.8 : Résultat du filtre passe haut rectangulaire sur l'image muscle pour: a) $S=0.05$ b) $S=0.3$
c) $S=0.4$

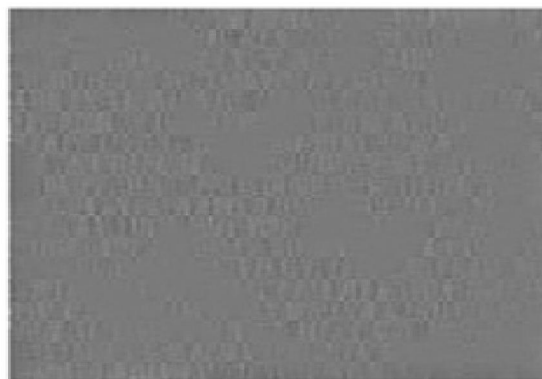
II.2.2. Filtre Butterworth :



a)



b)



c)

Figure 4.9: Résultat du filtre Butterworth passe haut sur l'image muscle pour: a) $S=0.1$ b) $S=0.35$
c) $S=0.45$

Une fréquence de coupure proche de 0, donc dans le cas où le filtre possède une bande passante large, nous remarquons que seulement les contours des objets d'intérêts qui ont des textures grossières sont détectés, et à chaque fois qu'on s'approche de la fréquence de coupure $\max=0.5$ (figure b et c), nous remarquons que se sont les contours des micro-structures qui sont mis en évidence.

II.2.3. Le filtre Gaussien :

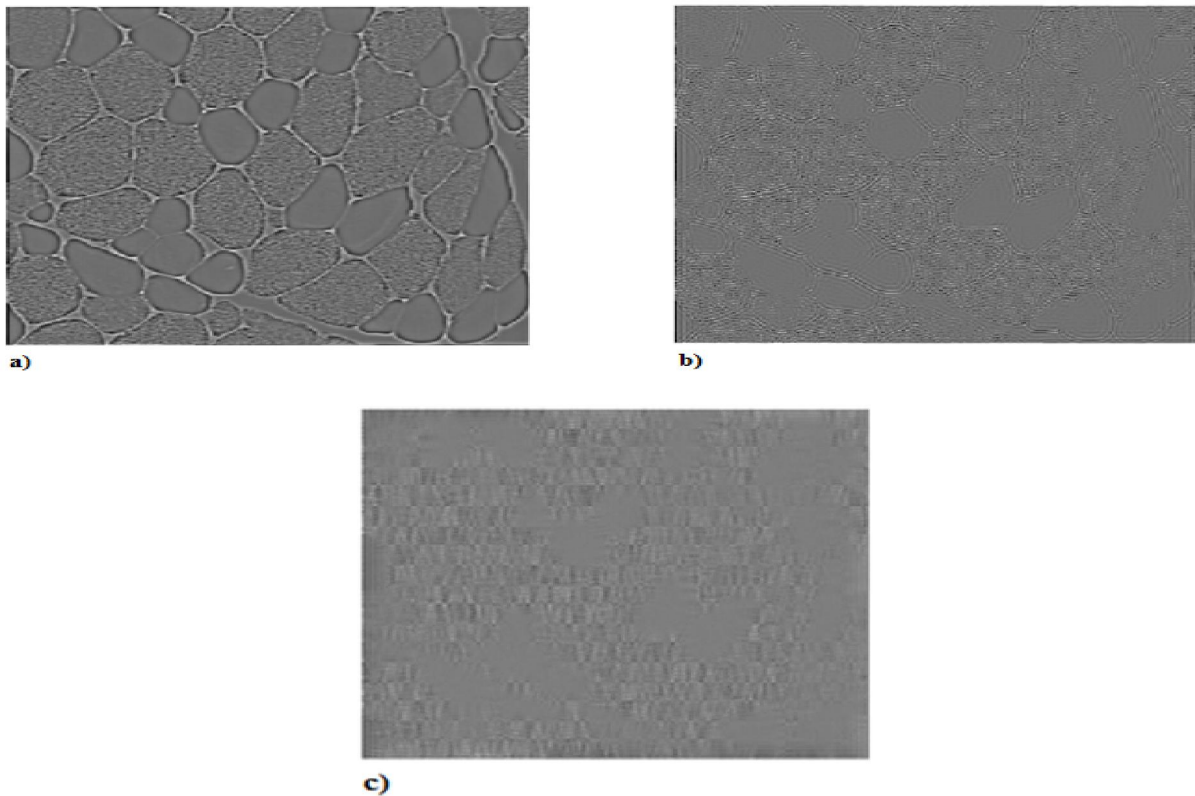
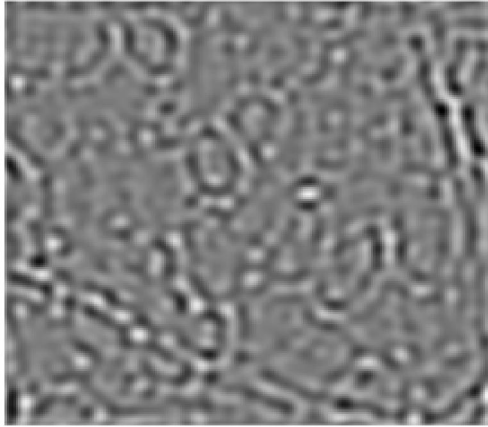
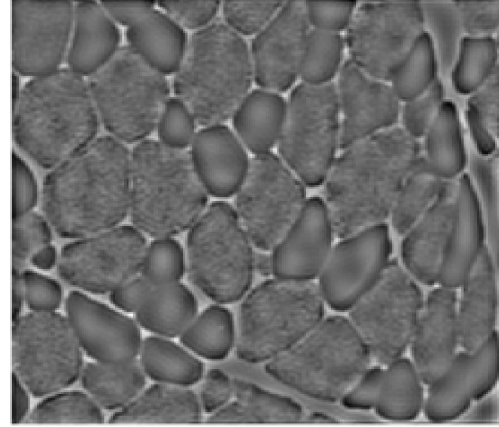
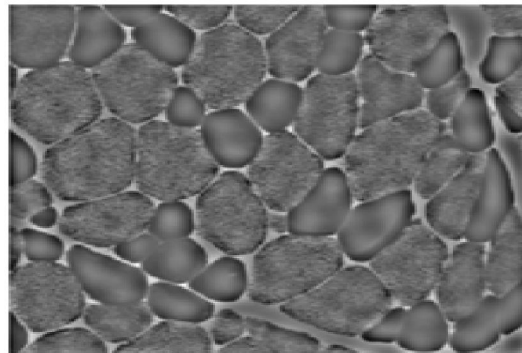


Figure 4.10 : Résultat du filtre Gaussien passe haut sur l'image muscle pour: a) $S=0.05$ b) $S=0.35$ c) $S=0.45$

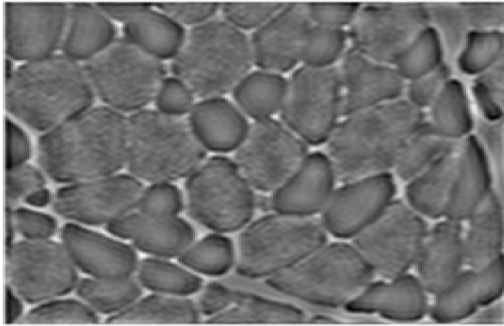
C'est la même interprétation que le filtre Butterworth.

II.3. Résultats pour le filtre passe bande :**a) Filtre circulaire :****a)****b)****c)**

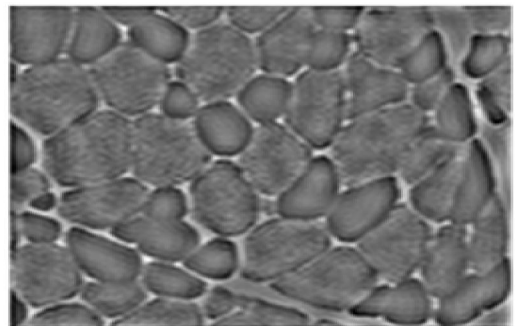
**Figure 4.11 : Résultat du filtre passe bande circulaire sur l'image muscle pour a) $s_1=0.05$, $S_2=0.2$
b) $S_1= 0.15$, $S_2=0.3$ c) $S_1=0.15$, $S_2=0.45$**

Si la différence entre les deux fréquences de coupure est faible, ce filtre permet de grossier les textures et de détecter les limites des micros-objets. Dans le cas contraire, le filtre nous aide à détecter les micro-structures à l'intérieur des différents objets d'intérêts.

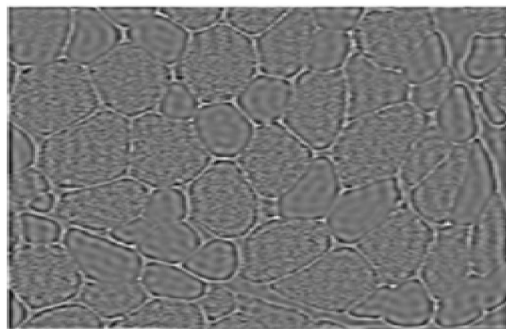
b) Le filtre passe bande rectangulaire :



a)



b)



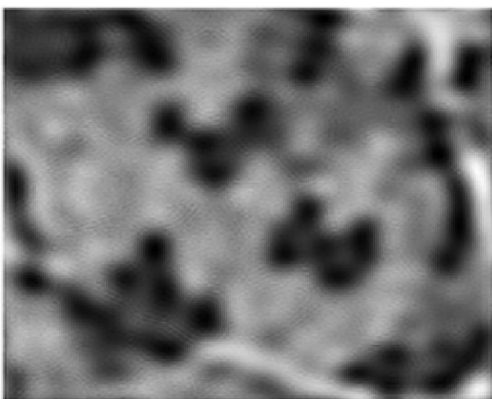
c)

Figure 4.12 : Résultat du filtre passe bande rectangulaire sur l'image muscle pour: a) $S1=0.05$, $S2=0.1$ b) $S1=0.05$, $S2=0.3$ c) $S1=0.1$, $S2=0.45$

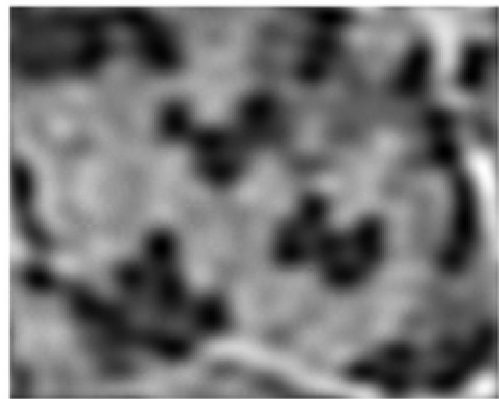
Même interprétation que le précédent juste que ce filtre peut se comporter beaucoup plus comme un filtre passe haut en agissant sur les fréquences de coupures.

II.4. Résultat pour le filtre coupe bande :

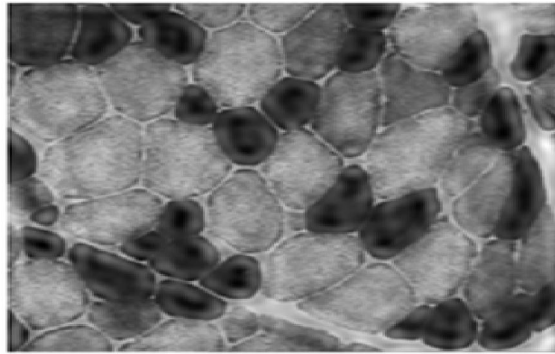
a) Le filtre circulaire :



a)



b)

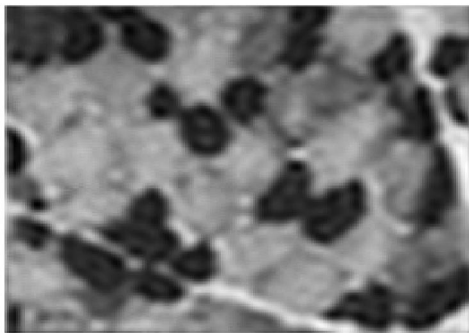


c)

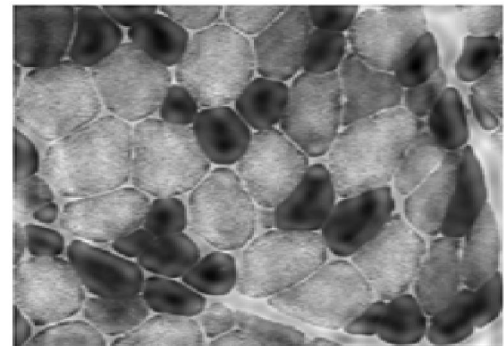
outilo

C'est très facile de voir que ce filtre est une combinaison des deux filtres passe-bas et passe-haut, de fait qu'il permet de détecter les contours de micro-structures et micro-objets, et il met aussi en évidence les textures de forme grossière.

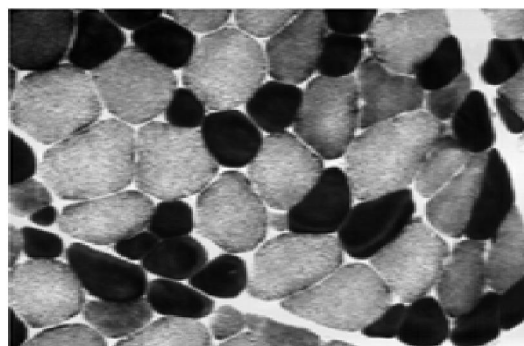
b) Le filtre rectangulaire :



a)



b)



c)

**Figure 4.13 : Résultat du filtre coupe bande circulaire sur l'image muscle pour: a) $S1=0.05$, $S2=0.1$
b) $s1=0.1$, $S2=0.3$ c) $S1=0.4$, $S2=0.45$**

Ce filtre agit comme le précédent sauf qu'il est comode d'appliquer selon la répartition des objets d'intérêt de l'image (direction horizontale ou verticale).

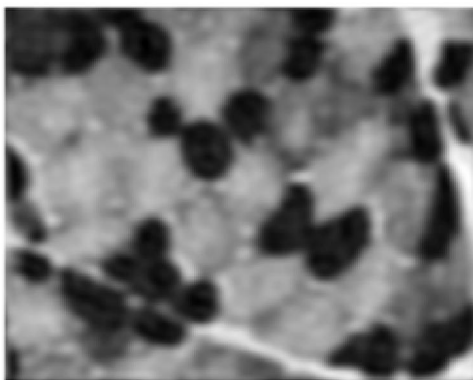
III. Résultat d'application des filtres RII sur l'image muscle

III.1. Résultats pour les filtres passe- bas

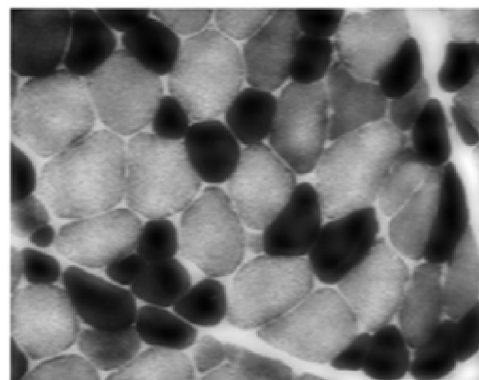
III.1.1 Filtre idéal

a) Filtre circulaire

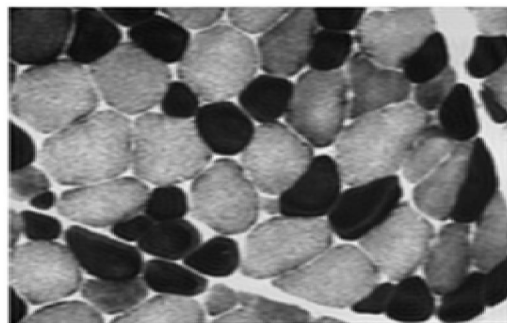
Testé avec 03 fréquences de coupure déférentes, nous pouvons voir que les textures de l'image sont mises sous formes grossières dans le cas où ces fréquences sont proches de 0, dans le cas contraire, nous voyons juste que l'image devienne un peu floue et prend l'allure du rôle de filtre qui fait passer que les fréquences inférieures à la fréquence de coupure .



a)



b)



c)

Figure 4.14: Résultat du filtre passe bas circulaire sur l'image muscle pour:a) $S1=0.05$, $S2=0.1$

b) $S1=0.25$ $S2=0.4$ c) $S1=0.05$, $S2=0.45$

b) Le filtre rectangulaire :

Meme résultat que le filtre précédent.

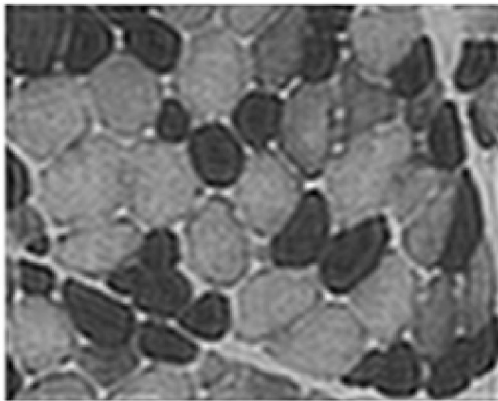
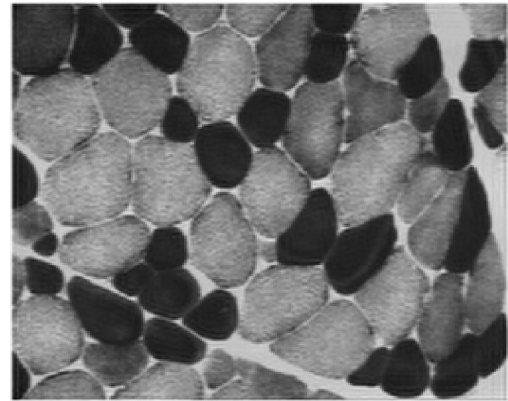
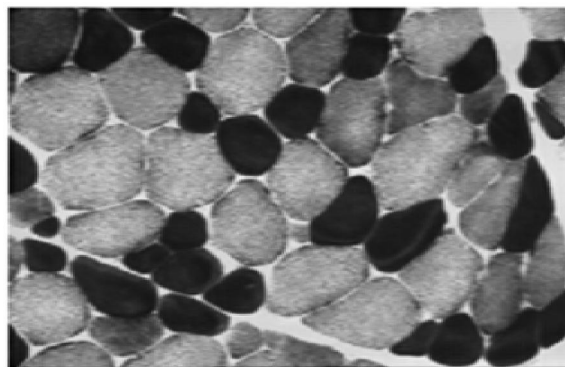
**a)****b)****c)**

Figure 4.15 : Résultat du filtre passe bas circulaire sur l'image muscle pour: a) $S1=0.15$, $S2=0.25$ b) $S1=0.35$, $S2=0.4$ c) $S1=0.4$, $S2=0.45$

Ce filtre agit de la même façon que le précédent, mais il nous permet de voir mieux les micro-structures claires ou sombres dans les objets d'intérêts.

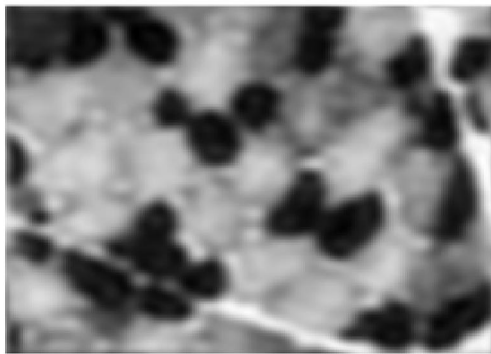
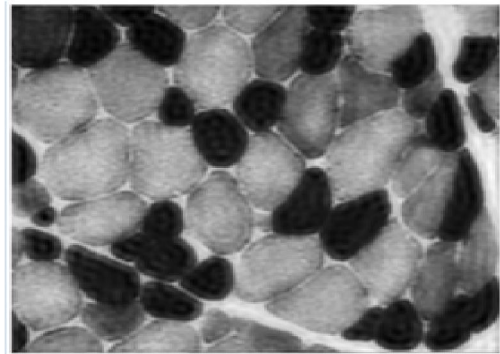
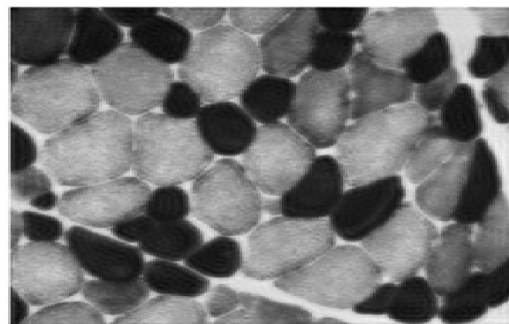
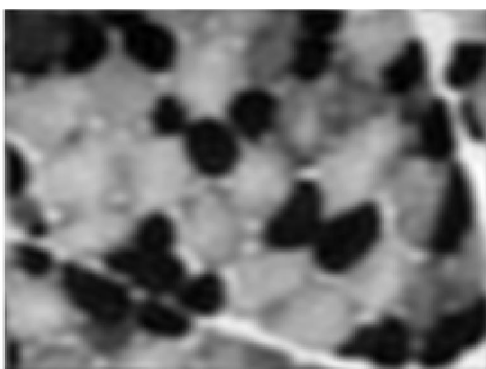
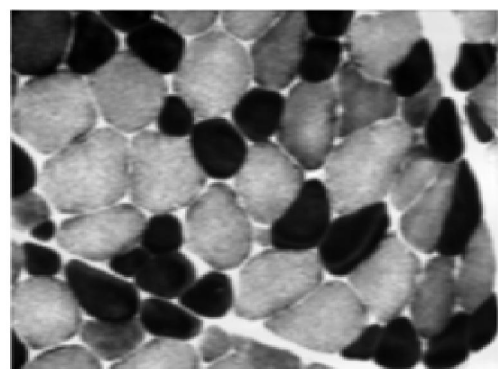
III.1.2. Le filtre betterwourth :**a)****b)****c)**

Figure 4.16 : Résultat du filtre Butterworth sur l'image muscle pour: a) $S1=0.05$, $S2=0.1$ b) $S1=0.05$, $S2=0.3$ c) $S1=0.3$, $S2=0.45$

Après filtrage, c'est très facile de voir les textures sous forme grossière qui sont formées et bien sûr, l'image prend la forme décontrastée.

III.1.3. Le filtre Gaussien :**a)****b)**

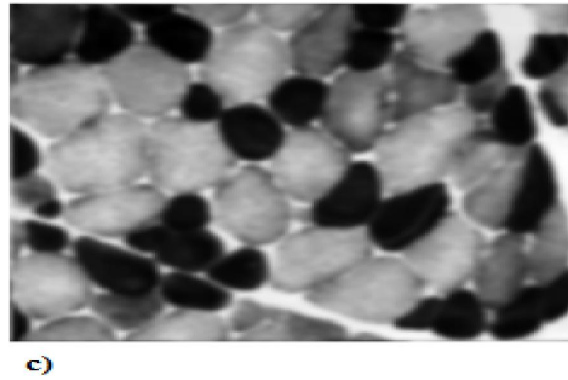


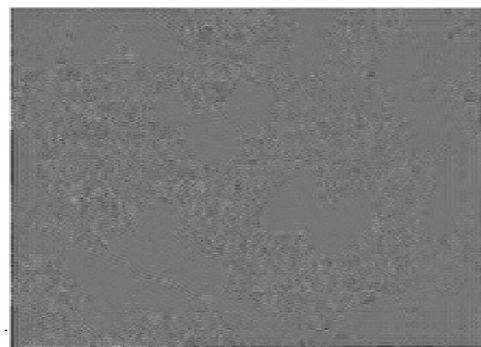
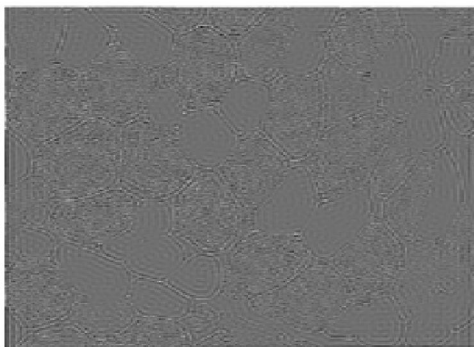
Figure 4.17: Résultat du filtre Gaussien sur l'image muscle pour: a) $S1=0.05, S2=0.2$ b) $S1=0.2, S2=0.35$
c) $S1=0.3, S2=0.45$

Ce filtre a mame effet que le filtre précédent.

III.2. Résultats pour les filtres passe haut :

III.2.1. Filtre idéal

a) Le filtre circulaire :



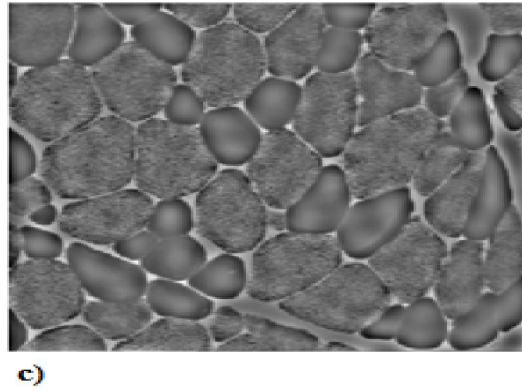
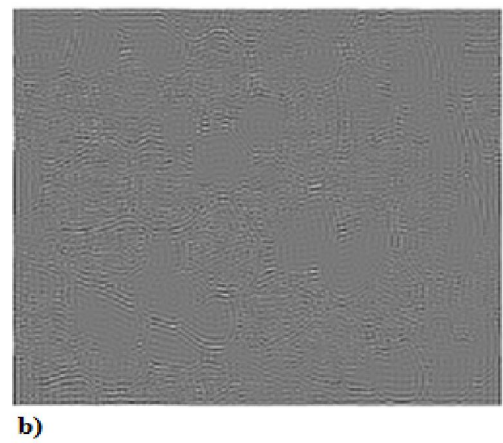
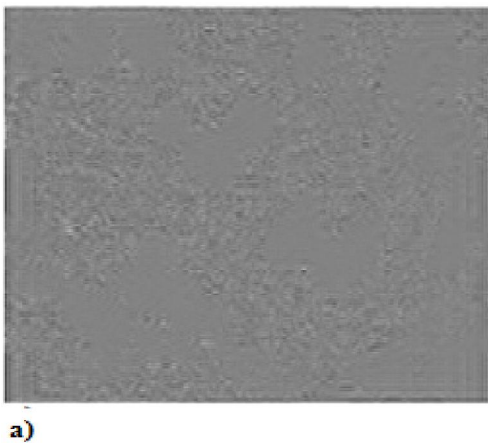


Figure 4.18 : Résultat du filtre passe haut circulaire sur l'image muscle pour: a) $S1=0.25$, $S2=0.4$
b) $S1=0.35$ $S2=0.45$ c) $S1=0.05$, $S2=0.45$

Ce filtre nous permet de détecter les contours de micro-structure si les fréquences de coupure s'approchent de $\max=0.5$. Dans le cas contraire, seulement les contours des micro-objets sont détectés. Il nous permet aussi de détecter les micro-structures sombres situées dans les micro-objets. Il offre la possibilité d'ajuster les fréquences de la bande passante.

b) Le filtre rectangulaire



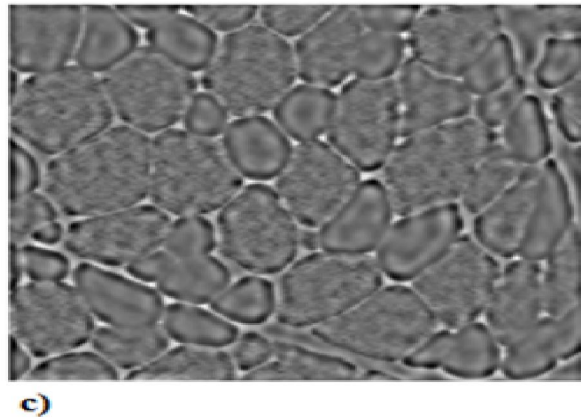


Figure 4.19 : Résultat du filtre passe haut circulaire sur l'image muscle pour: a) $S1=0.4$, $S2=0.45$ b) $S1=0.3$, $S2=0.4$ c) $S1=0.15$, $S2=0.2$

Testé avec 03 fréquences différentes, nous avons obtenu le même résultat que précédemment, juste on voit que les contours des micro-objets sont bien détectés.

III.2.2. Le filtre Butterworth

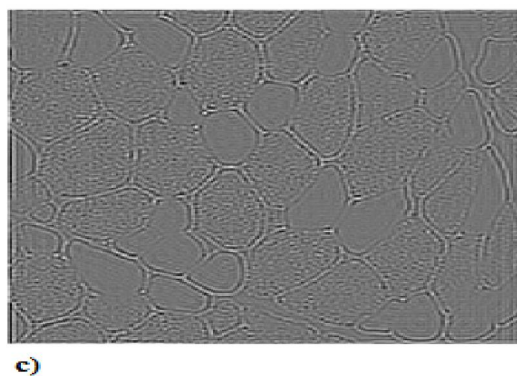
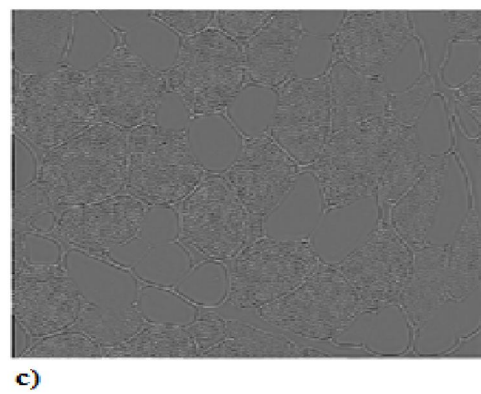
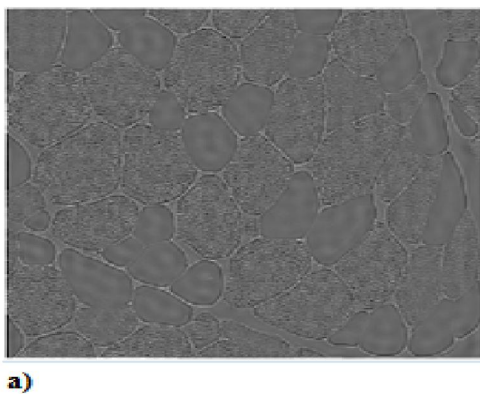


Figure 4.20 : Résultat du filtre Butterworth passe haut sur l'image muscle pour: a) $S1=0.05$, $S2=0.1$ b) $S1=0.15$, $S2=0.35$ c) $S1=0.25$, $S2=0.45$

A chaque fois qu'on s'approche de fréquence 0, les contours sont bien détectés et les objets d'intérêts de l'image sont bien séparés.

III.2.3. Le filtre Gaussien

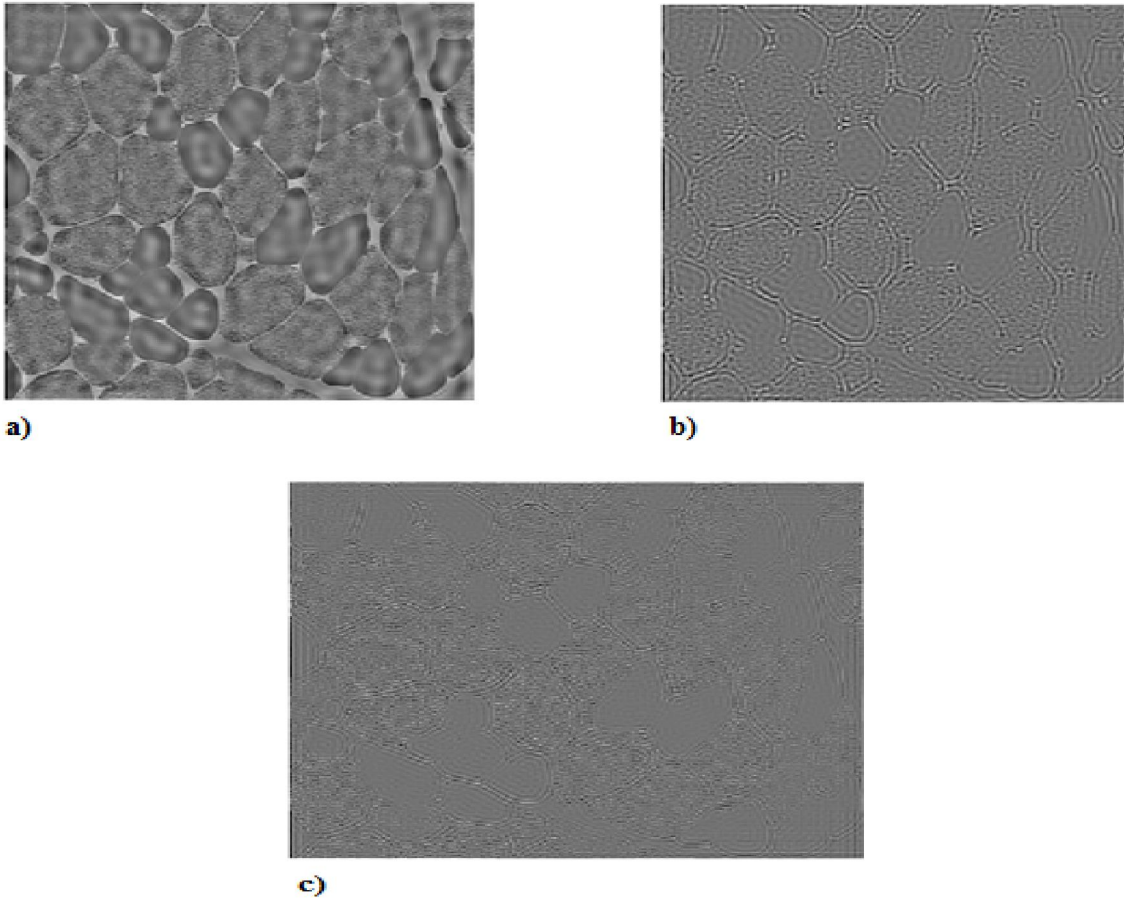


Figure 4.21 : Résultat du filtre Gaussien passe haut sur l'image muscle pour: a) $S1=0.05, S2=0.1$
b) $S1=0.2, S2=0.3$ 5 c) $S1=0.3, S2=0.45$

Les contours des microstructures sont détectés dans le cas où les fréquences de coupures s'approchent de $\max=0.5$. Dans le cas contraire, seulement les contours des micro-objets sont détectés.

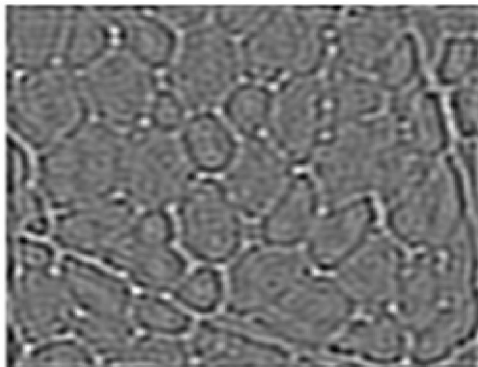
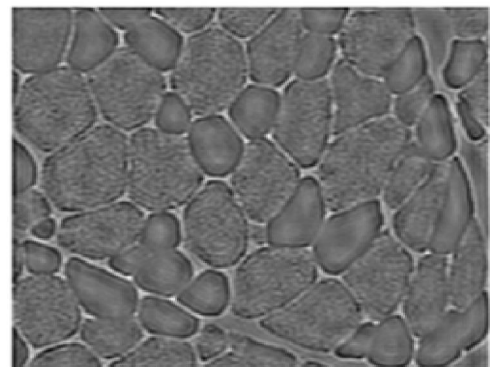
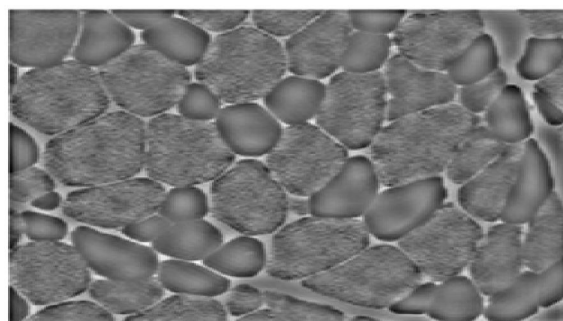
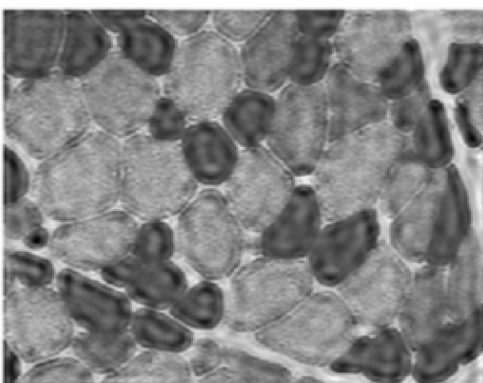
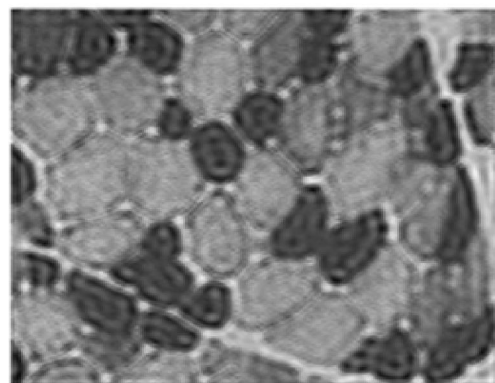
III.3. Résultat pour le filtre RII passe bande :**a) Le filtre circulaire :****a)****b)****c)**

Figure 4.22 : Résultat du filtre passe bande cerculaire sur l'image muscle pour: a) $S1=0.05$, $S2=0.1$
b) $S1=0.2$, $S2=0.3$ 5 c) $S1=0.3$, $S2=0.45$

III.4. Résultat pour le filtre RII coupe bande :**Le filtre circulaire :****a)****b)**

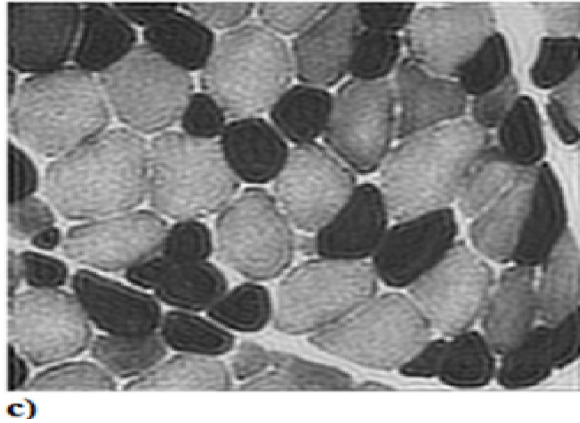


Figure4.23: Résultat du filtre RIIcoupe bande cerculaire sur l'image muscle pour: a) $S1=0.05$, $S2=0.1$, $S3=0.15$, $S4=0.2$ b) $S1=0.075$, $S2=0.12$, $S3=0.25$, $S4=0.3$ c) $S1=0.15$, $S2=0.3$, $S3=0.4$, $S4=0.5$

IV. Conclusion

Nous concluons que les filtres passes bas permet d'agrandir les textures et les filtres passes hauts de détecter les contours et les autres filtres combinent les deux résultats précédents.

Conclusion Générale

Conclusion générale

Conclusion générale

Le filtrage linéaire représente une des opérations les plus élémentaires et les plus essentielles réalisées dans le cadre du traitement des images. Afin de pouvoir effectuer de tels traitements sur un ordinateur par exemple, les images doivent auparavant être numérisées, ce qui implique à la fois, un échantillonnage dans le domaine spatial et une quantification dans le domaine fréquentiel. L'échantillonnage spatial induit des périodicités dans les représentations fréquentielles associées aux images traitées qui permettent d'en restreindre la description sur un domaine précis. L'opérateur de convolution spatial est la représentation mathématique associée au filtrage linéaire invariant. L'opération peut se résoudre dans le domaine spatial ou fréquentiel selon la nature et la complexité des filtres utilisés.

Ce mémoire traite le problème de la synthèse des filtres numériques en général et des filtres à réponse impulsionnelle infinie et finie en particulier. En essayant de se familiariser avec les différentes transformations orthogonales, nous avons donné quelques éléments relatifs au filtrage linéaire, principalement en ce qui concerne les différentes représentations et les techniques de mise en œuvre et ce, en utilisant la transformée de Fourier qui permet d'analyser l'image dans le plan des fréquences spatiales. Cette analyse a englobé quelques notions fondamentales du traitement de signal numérique qui représentent les bases du filtrage numérique (à réponse impulsionnelle finie et infinie), suivant les différentes opérations effectuées ainsi que les spécifications à assurer vis-à-vis de la stabilité, la causalité et la robustesse. A cet effet, un nombre élevé de filtres exprimant chacun un aspect particulier a été proposé : homogénéisation et regroupement des thèmes d'intérêt pour les filtres passe-bas, renforcement et détection des frontières pour les filtres passe-haut et un regroupement de classes pour les filtres coupe-bande.

L'utilisation de ces différents filtres dans des systèmes interactifs où l'utilisateur peut choisir l'extraction d'informations adaptée à ces besoins, montre que le recensement exhaustif et la création d'un répertoire dictionnaire de filtres est nécessaire afin d'approfondir l'exploitation de ces derniers.

Les traitements par différents filtres que nous avons effectués dans la partie expérimentation aboutissent souvent à des résultats dont l'interprétation nous indique une redondance d'informations, fenêtre Gaussienne et le filtre de Butterworth par exemple.

Conclusion générale

Les résultats de ces filtres connaîtront une amélioration certaine en exploitant d'autres sources de données.

Référence Bibliographie

[1] **Antoine, Manzanera** Traitement d'images et vision artificielle, Unité d'Électronique et d'Informatique. Cours ENSTA, D92

[2] **Bonnet, P** cours de traitement d'image. USTL .

[3] **B.D.Venkatramana Reddy et T.Jayachandra Prasad. (décembre 2010)** Frequency Domain Filtering of Colour Images using Quaternion Fourier Transforms.

[4] **Christian, JUTTEN. (novembre 2009)** Théorie du signal. Université Joseph Fourier - Polytech' Grenoble .

[5] **Daniel, Léonard** Architecture et filtres pour la détection des chenaux dans la glace de l'océan Arctique, Département d'informatique et de recherche opérationnelle, Faculté des arts et des sciences, Université de Montréal

[6] **Francis Cottet.(2009)** Traitement des signaux et acquisition de données. Dunod , Paris,

[7] **G Baudoin et J-E.Bercher. (Novembre 2001)** Transformé de Fourier discrète Ecole supérieur d'ingénieur en électrotechnique et électronique.

[8] **Graradji et Sadoun.** Filtrage de 'ECG par seuillage de coefficients d'ondelettes, mémoire de fin d'étude **UMMTO**.

[9] **G, Baudoin et J-E,Bercher. (septembre 1998)** Eléments du traitement du signal .Ecole supérieur d'ingénieur d'électrotechnique et d'électronique.

Ecole supérieur d'ingénieur en électrotechnique et électronique

[10] **H, Farid. (2010)** Mémoire de fin d'étude conception de filtre à réponse impulsionnelle infinie à base d'un algorithme d'optimisation par essaim de particules.

[11] Ioannis F. Gonos, Member, IEEE, Lefteris I. Virirakis, Nikos E. Mastorakis, Senior Member, IEEE, and

M. N. S. Swamy, Fellow. **(avril 2006)** Evolutionary Design of 2-Dimensional Recursive Filters via the Computer Language GENETICA.VOL. 53, NO. 4.

[12] **Jae S, Lim. (1990)** Two-dimensional, signal and image processing department of Electrical Engineering and Computer Science Massachusetts Institute of Technology. PRENTICE HALL PTR, Upper Saddle River, New Jersey 07458.

[13] **José M. costa vela. (septembre 1973)** « Design and realization of stable Tow-dimensional recursive filter, Department of electrical engineering.

[14] **Joël, Le Roux. (29 mars 2005)** Traitement Numérique des Signaux Bidimensionnels.

[15] **J.M.costa et A.N venetsanopoulos. (décembre 1974)** Desing of circulary-symmetric two-dimensional recursive filter, vol. ASSP-NO. 6, PP.432-443.

[16] **Kaddour, Chakib. (1999)** généralité sur le traitement d'image. file:///G:/pdf/chap1.htm.

[17] **Lasenby, J. (2011)** Image processing and Image coding. Signal Processing Group,Engineering Department, Cambridge, UK.

[18] **M,Frikel et G, Binet. (2008_2009)** Filtre à réponse impulsionnelle finie, filtre RIF ENSI Caen – Informatique 1A.

[19] **Milan Sonka et al., (2008)** Image Processing Analysis and Machine Vision, The University of Iowa, Iowa City

[20] **Maurice, Bellanger** Traitement numérique du signal (théorie et pratique).

[21]**Nicolas, Thome. (17 octobre 2011)** Bases du traitement des images.

[22] **Olivier, Sentieys. (15 septembre 2003)** Traitement Numérique du Signal . ENSSAT - Université de Rennes 1.

[23] **Poularikas A, D et Alexander D, Poularikas. (1999)** Two-Dimensionalv Z-Transform .The Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing. Boca Raton: CRC Press LLC,.

[24] **Sidi Mohamed, Farssi. (1997-1998)** Segmentation d'images par détection de région, de contour ou par morphologie mathématique, étude comparative et évaluation des performances» Faculté des sciences et technique, département de physique.

[25].**Silvio Montresor** Licence : <http://www.gnu.org/licenses/fdl.txt>.

[26] **Seetharaman, Swamamani. (juin 2000)** Study of Circularly Symmetrical Two-dimensional Digital Filters Possessing Separable Denominator Transfer Functions.Concordia University Montreal Quebec Canada.

[27] **T. Williams, M. Ahmadi, et W. C. Miller. (2007)** Design of 2D FIR and RII digital filters with canonical signed digit, coefficients using signaler value de composition and genetic algorithms, Birkhäuser Boston.

[28] Valérie Perrier et al., (1999) Ondelettes et Imagerie Médicale, Laboratoire de Modélisation et Calcul de l'IMAG, Institut National Polytechnique de Grenoble,

[29] Victor, Musoko. (Juillet 2005) . BIOMEDICAL SIGNAL AND IMAGE PROCESSING. Institute of Chemical Technology, Prague Department of Computing and Control Engineering.