

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

Mémoire de Fin d'Etudes de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Génie électrique

Spécialité : **Commande des systèmes**

Présenté par

Soumaya SELLAMI

Faiza ALLAL SABAOU

Thème

Optimisation globale des matrices de pondération d'une commande linéaire quadratique

Mémoire soutenu publiquement le 14/09/2015 devant le jury composé de :

M Redouane KARA

Grade, UMMTO, Président

M Ahmed MAIDI

Grade, UMMTO, Encadreur

M Achour TOUAT

Grade, UMMTO, Examineur

M Mourad ALLED

Grade, UMMTO, Examineur

Remerciements

Une pensée pieuse à Dieu qui a éclairé notre chemin et mené vers la concrétisation de ce modeste travail.

Nous tenons à remercier notre promoteur Monsieur A.MAIDI pour sa disponibilité, son aide précieuse et de nous avoir fait profiter de son expérience et de nous avoir encouragé tout au long de ce travail.

Nous tenons aussi à remercier le personnel de notre département, qui a veillés à nous donner une formation de haut niveau, commençons par notre cher Chef de Département Mr. BEN SIDHOUM.

Nous exprimons également notre gratitude à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation.

Nos remerciements s'adressent aussi aux membres de Jury qui nous ont fait l'honneur de juger ce modeste travail.

Enfin, nos remerciements les plus sincères à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la concrétisation de ce mémoire.

SELLAMI Soumaya
ALAL SABAOUI Faïza

Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail à ceux qui me pérenne la dignité,
l'honneur et la joie de ma vie mes très chers parents et je leurs dis
merci pour leurs patience, confiance et pour leur soutien
inconditionnel tout ou long de ces longues années d'études.*

A mes très chers frères, et à ma très chère sœur que j'aime beaucoup

Et surtout à mon très chère fiancé et toute ma belle famille

A ma binôme Faiza et toute sa famille

A mes tantes et oncles et leurs enfants

A mes amis (es) que je n'aurais jamais oublié

A toute la section AUTOMTIQUE

*A toute personne qui nous a aidés de près ou de loin pour réussir ce
modeste travail.*

SOU MAYA

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

- ♥ *A ma très chère Mère que j'aime énormément le soleil de ma vie et ma raison de vivre, celle qui ma toujours soutenu jusqu'à la fin.*
- ♥ *A mon chère et meilleur papa du monde qui ma consacré tout les moyen, et la confiance pour arrivée jusqu'au bout de mes rêve.*
- ♥ *A mes très chers frères.*
- ♥ *A ma sœur Lynda*
- ♥ *A mes très chers cousins et cousines*
- ♥ *A tout ma famille sans exception.*
- ♥ *A mes camarades de section.*
- ♥ *A mes chères et adorables ami Lynda, Djíjí, Soumaya et Lília.*
- ♥ *A mon adorable mari Ahmed.*
- ♥ *A ma belle famille.*

Faiza

A decorative scroll graphic with a black border and white floral patterns. The scroll is unrolled in the center, revealing the word "Indices" in a green, serif font. A faint, light green version of the word "Indices" is visible in the background behind the main text.

Indices

$e(t)$: Vecteur d'erreur.

$x^d(t)$: Vecteur d'état désiré.

$x(t)$: Vecteur d'état de dimension $n \times 1$

A : Matrice d'état de dimension $n \times n$

B : Matrice d'entrée de dimension $n \times m$

$u(t)$: Vecteur de commande de dimension $m \times 1$

n : Nombre d'état.

m : Nombre de commande.

$Q(x(t), u(t), t)$: Fonction de coût

$\frac{1}{2}$: N'a aucune signification physique, il représente simplement une commodité de calcul.

t_f : Temps final

$(.)^T$: Transposé

$(.)^{-1}$: L'inverse

M : Matrice de pondération sur l'écart

N : Matrice de pondération sur la commande

p^T : Vecteur adjoint

LQ : Linéaire quadratique

$H(x(t), u(t), p(t), t)$: Fonction d'Hamiltonien

$u^*(t)$: Commande optimale

$K(t)$: Solution de l'équation de Riccati

\bar{Q} : Coût minimal

∇ : Symbolise une dérivée partielle

\int : Symbolise une intégration

x^* : Optimum global

\hat{x} : Optimum local

min : Minimum

max : Maximum

i : Indice

j : Indice

$g_i(x)$: Contraintes de type égalité

$h_j(x)$: Contraintes de type inégalité

D : Domaine admissible

∇_x^2 : Matrice Hessienne

α^k : Pas de descente

$x^{(0)}$: Estimé de départ

μ_j : Paramètre de Kuhn Tucker

λ_i : Multiplicateur de Lagrange



Sommaire

SOMMAIRE

Introduction Générale.....	01
----------------------------	----

Chapitre I : Commande Linéaire Quadratique

I.1. Introduction.....	03
I.2. Formulation d'un problème linéaire quadratique.....	03
I.3. Résolution d'un problème linéaire quadratique.....	05
I.3.1. Problème de commande LQ à horizon fini.....	05
I.3.1.a. Problème de poursuite.....	05
I.3.1.b. Problème de régulation	08
I.3.2. Problème de commande LQ à horizon infini	09
I.4. Résolution de l'équation de Ricatti	09
I.4.1. Solution analytique de l'équation de Ricatti	09
I.4.2. Intégration numérique de l'équation de Ricatti, exemple	10
I.4.2.1. Horizon infini.....	12
I.4.2.2. Horizon fini	12
I.5. Calcul du coût minimal	14
I.6. Conclusion	15

Chapitre II : Méthodes d'Optimisation Statique

II.1. Introduction	16
II.2. Généralités sur l'optimisation	16
II.3. Classification des problèmes d'optimisation dans \mathfrak{R}	16
II.4. Formulation d'un problème d'optimisation	17
II.5. Condition d'optimalité	18
II.5.1 Condition du 1 ^{er} ordre	18
II.5.2 Condition du 2 ^{ème} ordre	19
II.6. Méthodes d'optimisation	19
II.6.1. Optimisation sans contrainte	20
II.6.1.1. Méthodes de recherche de l'optimum	20
a- Méthode analytique	20

b- Méthode graphique	20
c- Méthodes numériques	21
c-1. Méthode du gradient	21
c-2. Méthode du gradient conjugué	22
c-3. Méthode de Newton	22
c-4. Méthode de Newton modifiée	22
c-5. Méthode Quasi –Newton	22
II.7. Optimisation en présence de contraintes	23
II.7.1 Contrainte de type égalité	23
II.7.2 Contrainte de type inégalité	24
a- Méthode des variables d'écart	24
b- Méthode de Kuhn-Tucker	24
II.8. Optimisation globale	25
II.9. Méthodes de l'optimisation	25
II.9.1. Méthodes déterministes	25
II.9.2. Méthodes stochastiques	26
II.10. Méthode d'Alienor	27
II.11. Optimisation globale par la méthode d'Alienor	29
II.11.1 Autres transformations réductrices	29
II.12. Conclusion	32

Chapitre III : Etude de l'Influence des Matrices de Pondération

III.1. Introduction	33
III.2. Rappel	33
III.3. Rôle des matrices de pondération	34
III.3.1. Choix des matrices de pondération	34
III.3.2. Rôle des matrices de pondération	34
III.3.3. Illustration de l'influence des matrices de pondération	35
III.4. Conclusion	41

Chapitre IV : Optimisation du Choix des Matrices de Pondération d'une Commande**LQ**

IV.1. Introduction	42
IV.2. Position du problème	42
IV.3. Formulation du problème du choix des matrices de pondération sous forme d'un problème d'optimisation	43
IV.3.1. Variables de décision ou d'optimisation	43
IV.3.2. Fonction objectif	43
IV.3.3. Contraintes	43
IV.4. Résumer de problème d'optimisation	44
IV. 5. Exemple d'application	44
IV.5.1. Résolution du problème	45
IV.5.2. Fonction objectif	47
IV.5.3. Contraintes	47
IV.5.4. Résumé du problème	48
IV.5.5. Simplification du problème	48
IV.6. CONCLUSION	50
 Conclusion Générale	 51



Introduction Générale
Introduction Générale

La commande des processus constitue un objectif fondamental dans le domaine des sciences de l'ingénieur. Commander un processus consiste à déterminer les commandes à appliquer à ce dernier afin de lui assurer un comportement désiré.

Afin de définir des règles de détermination des commandes en vue d'un objectif fixé, il convient de définir un modèle mathématique de ce processus. Le choix de ce modèle s'avère donc primordial, il ne peut pas caractériser suffisamment le processus et ne représente qu'imparfaitement la réalité.

Le problème général de la détermination d'une commande optimale d'un processus peut se résumer comme suit :

Un processus étant donné et défini par son modèle, trouver parmi les commandes admissibles celle qui permet à la fois :

- de vérifier des conditions initiales et finales données ;
- de satisfaire diverses contraintes imposées ;
- d'optimiser un critère choisi.

La commande linéaire quadratique est une commande optimale par retour d'état minimisant un critère quadratique. Ce dernier intervient dans les problèmes de minimisation de l'énergie mise en œuvre, de stabilisation et de suivi de trajectoire. Son intérêt donc apparaît à la fois au niveau de la qualité, de la sécurité et des coûts de mise en œuvre.

Les paramètres de réglage d'une commande linéaire quadratique sont les matrices de pondération du critère à minimiser. Leur choix se fait généralement par essais-erreurs. Ces matrices influent directement sur la valeur finale du critère à minimiser, par conséquent leur choix est crucial pour assurer de bonnes performances.

L'objectif de ce mémoire consiste à optimiser le choix des matrices de pondération d'une commande linéaire quadratique à horizon infini. L'idée consiste à minimiser le critère par rapport aux éléments de ces matrices assumés comme des variables d'optimisation ou de décision. En utilisant la matrice de Riccati et la forme finale du critère, on formule un problème d'optimisation avec contraintes de types inégalités dont la résolution donne les matrices de pondérations optimales.

L'étude est répartie sur quatre chapitres dont les contenus sont comme suit :

Dans le chapitre I, nous allons exposer des notions sur la commande linéaire quadratique (LQ) dont l'objectif est la recherche d'une loi de commande minimise un critère quadratique. Nous allons se focaliser sur la résolution d'un problème de régulation dans le cas d'un horizon fini et infini,

Le chapitre II est consacré à l'optimisation classique. On commence d'abord par une introduction à la théorie d'optimisation dans laquelle on présente la forme générale d'un problème d'optimisation et les conditions d'optimalités. Puis on donne un résumé sur les différentes méthodes d'optimisation locale et globale.

Dans le chapitre III, on présente une étude sur l'influence des matrices de pondération sur les performances du système dont l'objectif est de montrer l'intérêt du choix des matrices de pondération.

Dans le chapitre IV, le choix de matrices de pondération est formulé sous forme d'un problème d'optimisation avec contraintes du type inégalités. La formulation est basée sur la matrice de Riccati et l'expression de la valeur finale du critère déduite suivant le principe u minimum. L'approche proposée est illustrée par un exemple d'application.

Enfin, on termine notre travail par une conclusion générale avec des perspectives de continuité.



Chapitre I
Commande linéaire quadratique
Chapitre I
Commande linéaire quadratique

I.1. Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la commande optimale des systèmes linéaires avec un critère quadratique illustrée par un exemple de simulation sous MATLAB. Ces systèmes sont d'une grande importance dans la pratique. En effet un coût quadratique est souvent très naturel dans un problème, par exemple lorsqu'on veut minimiser l'écart au carré par rapport à une trajectoire nominale (problème de poursuite). Par ailleurs même si les systèmes de contrôle sont en général non linéaires, on est très souvent amené à linéariser le système le long d'une trajectoire, par exemple dans des problèmes de stabilisation.

La commande linéaire quadratique (LQ) est une commande optimale par retour d'état calculé sur un modèle non bruité du système à asservir. Elle consiste à rechercher une matrice gain et d'une matrice de poursuite avec lesquelles la commande minimise un critère quadratique.

Ce chapitre introductif débute par la présentation des résultats principaux de la commande LQ permettant de résoudre un problème de poursuite ou de régulation.

Nous allons donc considérer un système de contrôle linéaire dans \mathfrak{R}^n .

I.2. Formulation d'un problème linéaire quadratique

Considérons le problème le plus générale de la poursuite dont le problème de la régulation constitue un cas particulier. Désignons par x^d l'état désiré et définissons l'erreur de poursuite

$$e(t) = x^d(t) - x(t) \quad (\text{I.1})$$

Soit de plus l'équation d'état :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{I.2})$$

Avec :

- $e(t)$: Vecteur d'erreur.
- $x^d(t)$: Vecteur d'état désiré.
- $x(t)$: Vecteur d'état de dimension $n \times 1$
- A : Matrice d'état de dimension $n \times n$
- B : Matrice d'entrée de dimension $n \times m$
- $u(t)$: Vecteur de commande de dimension $m \times 1$
- n : Nombre d'état.
- m : Nombre de commande.

Et la fonction de coût :

$$Q(x(t), u(t), t) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (e^T(t) M e(t) + u^T(t) N u(t)) dt \quad (\text{I.3})$$

Remarque I.1

$\frac{1}{2} N$ a aucune signification physique, il représente simplement une commodité de calcul.

Cette fonction de coût peut s'écrire aussi :

$$Q(x(t), u(t), t) = Q_e(x(t), t) + Q_u(u(t), t) \quad (\text{I.4})$$

Avec :

$$Q_e(x(t), t) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} e^T(t) M e(t) dt \quad (\text{I.5})$$

$$Q_u(u(t), t) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^T(t) N u(t) dt \quad (\text{I.6})$$

Le terme quadratique (I.5) est lié à la nature de régime transitoire obtenu par la minimisation de l'erreur existant entre l'état du système x et son état désiré x^d à l'instant t .

M est une matrice symétrique définie non négative ($e^T(t) M e(t) \geq 0$). C'est une matrice de pondération qui donne un poids différent à chaque composante de vecteur erreur dans le critère.

Le terme quadratique (I.6) correspond à la minimisation de l'énergie de commande.

N est une matrice symétrique définie positive ($u^T(t)Nu(t) > 0$). C'est une matrice de pondération de la commande qui affecte un poids différent à chaque composante du vecteur de commande.

I.3. Résolution d'un problème linéaire quadratique

Suivant l'état désiré ($x^d(t)$ est nul ou variant en fonction du temps) ; deux cas de problème sont présentés, le problème de la poursuite et le problème de la régulation.

I.3.1. Problème de commande LQ à horizon fini

Le temps final ' t_f ' est fixé à une valeur finie.

I.3.1.a. Problème de poursuite

Ce problème revient à calculer un retour d'état qui permet de stabiliser le système à l'état désiré x^d en minimisant l'énergie de commande.

Pour la résolution de ce problème, on commence par la détermination des conditions nécessaires d'optimalité à partir de la formulation de l'Hamiltonien :

$$\begin{aligned} H(x(t), u(t), p(t), t) &= Q(x(t), u(t), t) + p^T(t)\dot{x}(t) \\ &= \frac{1}{2}(e^T(t)Me(t) + u^T(t)Nu(t)) + p^T(t)Ax(t) + p^T(t)Bu(t) \end{aligned} \quad (\text{I. 7})$$

Où $P(t)$ est le vecteur adjoint composé des dérivées partielles du critère par rapport à la variable d'état.

Il est maximal pour :

$$\nabla_u H(x(t), u(t), p(t), t) = 0$$

On aura :

$$Nu(t) + B^T p(t) = 0 \quad (\text{I.8})$$

La commande optimale est alors donnée par :

$$u^*(t) = -N^{-1}B^T p(t) \quad (\text{I.9})$$

Les équations d'Hamilton-Pontriaguine sont données comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -\nabla_x H(x(t), u(t), p(t), t) \\ \dot{p}(t) &= -A^T p + M e \\ \dot{p}(t) &= -A^T p(t) + M (x^d(t) - x(t)) \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= +\nabla_p H(x(t), u(t), p(t), t) \\ \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

En remplaçant $u(t)$ par son expression (I.11), on obtient :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BN^{-1}B^T P(t) = Ax(t) - Sp(t) \quad (\text{I.12})$$

Avec :

$$S = B N^{-1} B^T \quad (\text{I.13})$$

Soit encore sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -S \\ -M & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + M \begin{bmatrix} 0 \\ x^d(t) \end{bmatrix} \quad (\text{I.14})$$

$$(\text{I.15})$$

Il en résulte que les vecteurs $x(t)$ et $p(t)$ sont liés par une transformation linéaire de la forme :

$$p(t) = K(t)x(t) - v(t) \quad (\text{I.16})$$

La matrice $K(t)$ et le vecteur $v(t)$ sont en général en fonction de la variable temps. La dérivée de $p(t)$ par rapport au temps s'écrit donc :

$$\dot{p}(t) = K(t)\dot{x}(t) + \dot{K}(t)x(t) - \dot{v}(t) \quad (\text{I.17})$$

En égalent les deux formes (I.17) et (1.15) de \dot{p} , il vient :

$$\begin{aligned} & K(t)\dot{x}(t) + \dot{K}(t)x(t) - \dot{v}(t) \\ = & -M(t)x(t) - A^T K(t)x(t) + A^T v(t) + Mx^d(t) \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

En remplaçant $\dot{x}(t)$ par sa valeur donnée par la relation (I.2), on obtient :

$$\begin{aligned} & K(t)(Ax(t) - SK(t)x(t) + Sv(t)) + \dot{K}(t)x(t) - \dot{v}(t) \\ = & -Mx(t) - A^T K(t)x(t) + A^T v(t) + Mx^d(t) \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

Exprimons le fait que cette égalité doit être satisfaite quel que soit x , il vient :

$$\dot{K}(t) + K(t)A + A^T K(t) - K(t)SK(t) + M = 0 \quad (\text{I.20})$$

$$\dot{v}(t) + (A^T - K(t)S)v(t) + Mx^d(t) = 0 \quad (\text{I.21})$$

Ces deux équations définissent $K(t)$ et $v(t)$. La relation (I.20) est appelée équation matricielle de Riccati.

La matrice $K(t)$ est l'inconnu à déterminer, lorsque on résout l'équation différentielle de Riccati, on détermine éventuellement plusieurs solutions mais on doit considérer celle qui est symétrique et définie positive.

On obtient alors :

$$u^*(t) = -N^{-1}B^T(K(t)x(t) - v(t)) \quad (\text{I.22})$$

$$\dot{x}(t) = (A - SK(t))x(t) + Sv(t) \quad (\text{I.23})$$

On remarque que $u(t)$ est exprimé en fonction de $x(t)$. Ce qui permet de construire un système à contre réaction.

La structure de la commande optimale est représentée par le schéma fonctionnel de la figure I.1.

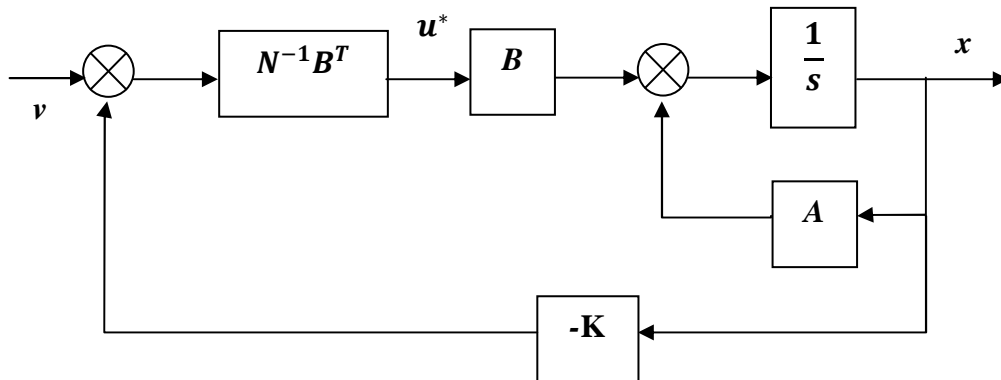


Figure I.1 Structure d'une commande LQ.

I.3.1.b. Problème de régulation

Ce problème est un cas particulier de la poursuite. Dans ce cas, l'état désiré est nul ($x^d(t) = 0$) et l'objectif est de ramener le système à son point de fonctionnement.

La forme matricielle représentant les équations Hamilton-Pontriaguine devient :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -S \\ -M & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} \quad (\text{I.24})$$

La relation liant les deux vecteurs $x(t)$ et $p(t)$ est :

$$p(t) = K(t)x(t) \quad (\text{I.25})$$

Puisque $x^d(t) = 0$ et le vecteur $v(t) = 0$. L'équation de $v(t)$ disparaît et il ne reste que l'équation différentielle de Riccati en $K(t)$.

$$\dot{K}(t) + K(t)A + A^T K(t) - K(t)SK(t) + M = 0 \quad (\text{I.20})$$

La matrice $K(t)$ est l'inconnu à déterminer.

I.3.2. Problème de commande LQ à horizon infini

Si les matrices A , B , M et N sont constantes et si t_f est infini, la loi de commande est invariante, puisque chaque instant est identique à l'instant suivant.

Il en résulte que la matrice K et le vecteur v sont constants et que $\dot{K} = 0$ et $\dot{v} = 0$. On obtient alors les deux équations algébriques suivantes :

$$KA + A^T K - KSK + M = 0 \quad (\text{I.26})$$

$$(A^T - KS)v + Mx^d = 0 \quad (\text{I.27})$$

L'équation (I.26) est appelée **l'équation algébrique de Riccati** où la matrice K est l'inconnu à déterminer

I.4. Résolution de l'équation de Riccati

L'équation matricielle de Riccati peut être résolue, soit analytiquement dans le cas les plus simples, soit par les méthodes d'intégration numérique.

I.4.1. Solution analytique d l'équation de Riccati

La résolution de l'équation matricielle

$$\dot{X} = M_1 X + X M_2 + X M_3 X + M_4 \quad (\text{I.28})$$

Dans lesquelles les matrices M_1 , M_2 , M_3 et M_4 peuvent être variables, et équivalente à celle du système linéaire

$$\dot{Y} = -M_2 Y - M_3 Z \quad (\text{I.29})$$

$$\dot{Z} = M_4 Y + M_1 Z \quad (\text{I.30})$$

Avec :

$$X = ZY^{-1} \quad (\text{I.31})$$

On le vérifie facilement par simple substitution. Nous avons en premier lieu :

$$\dot{X} = \dot{Z}Y^{-1} + Z\dot{Y}^{-1} \quad (\text{I.32})$$

Mais

$$\dot{Y}^{-1} = Y^{-1}\dot{Y}Y^{-1} \quad (\text{I.33})$$

D'où

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (M_4Y + M_1Z)Y^{-1} + Z(-Y^{-1})(-M_2Y - M_3Z)Y^{-1} \\ \dot{X} &= M_4 + M_1Z + XM_2 + XM_3X \end{aligned} \quad (\text{I.34})$$

I.4.2 Intégration numérique de l'équation de Riccati

Soit le problème de commande linéaire quadratique défini comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases} \quad (\text{I.35})$$

$$Q(x(t), u(t), t) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\eta x_1^2(t) + \mu x_2^2(t) + \lambda u^2(t)) dt \quad (\text{I.36})$$

L'équation matricielle d'état s'écrit :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Les matrices du problème sont les suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad N = \lambda \quad (\text{I.37})$$

$$2q = \eta x_1^2(t) + \mu x_2^2(t) + \lambda u^2(t) \quad (\text{I.38})$$

Le calcul de la matrice S donne

$$S = \frac{BB^T}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.39})$$

Posons d'autre part :

$$K = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \quad (\text{I.40})$$

Calculons alors :

$$KA = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad (\text{I.41})$$

$$A^T K = (KA)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \quad (\text{I.42})$$

$$KSK = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} b^2 & bd \\ bd & d^2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.43})$$

L'équation de Riccati s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} \dot{a} & \dot{b} \\ \dot{b} & \dot{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} - \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} b^2 & bd \\ bd & d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{I.44})$$

Elle est équivalente aux trois équations différentielles suivantes :

$$\dot{a} - \frac{b^2}{\lambda} + \eta = 0 \quad (\text{I.45})$$

$$\dot{b} + a - \frac{bd}{\lambda} = 0 \quad (\text{I.46})$$

$$\dot{d} + 2b - \frac{d^2}{\lambda} + \mu = 0 \quad (\text{I.47})$$

Le calcul se présente en suite de manière différente selon que l'horizon est fini ou infini.

I.1.2.1. Horizon infini

Nous avons alors

$$\dot{a} = \dot{b} = \dot{d} = 0 \quad (\text{I.48})$$

Le système algébrique qui en résulte a pour solution :

$$b^2 = \lambda\eta \quad (\text{I.49})$$

$$d^2 = \lambda(2\sqrt{\lambda\eta} + \mu) \quad (\text{I.50})$$

$$a^2 = \eta(2\sqrt{\lambda\eta} + \mu) \quad (\text{I.51})$$

La commande optimale est donnée par :

$$u^*(t) = -N^{-1}B^TKx(t) \quad (\text{I.52})$$

Or

$$B^TK = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = [b \quad d] \quad (\text{I.53})$$

D'où,

$$u^*(t) = -\frac{1}{\lambda}(bx_1(t) + dx_2(t)) \quad (\text{I.54})$$

I.4.2.2. Horizon fini

Pour la solution par intégration numérique, on considère les valeurs numériques suivantes pour les coefficients de la fonction de coût :

$$\lambda = \eta = 1, \quad \mu = 0 \quad (\text{I.55})$$

Le système à intégrer en temps inversé s'écrit :

$$\dot{a} = 1 - b^2 \quad (\text{I.56})$$

$$\dot{b} = a - bd \quad (\text{I.57})$$

$$\dot{d} = 2b - d^2 \quad (\text{I.58})$$

$$a(0) = b(0) = d(0) = 0 \quad (\text{I.59})$$

Intégrons par la méthode d'Euler améliorée, dont nous rappelons ci-dessous le principe. Soit à intégrer :

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = 0 \quad (\text{I.60})$$

On calcule de proche en proche :

$$x_1\left(KT + \frac{T}{2}\right) = x(KT) + \frac{T}{2}f[x(KT)] \quad (\text{I.61})$$

$$x_2\left(KT + \frac{T}{2}\right) = x(KT) + \frac{T}{2}f\left[x_1\left(KT + \frac{T}{2}\right)\right] \quad (\text{I.62})$$

Et ainsi de suite jusqu'à ce que les différences entre deux résultats consécutifs deviennent négligeables. Puis on calcule :

$$x[(K+1)T] = x_n\left(KT + \frac{T}{2}\right) + \frac{T}{2}f\left[x_n\left(KT + \frac{T}{2}\right)\right] \quad (\text{I.63})$$

Avec $T = 0,1$, on a trouvé les valeurs présentées dans le tableau **I.1**.

On constate que les valeurs limites sont égales aux valeurs théoriques trouvées pour un horizon infini.

t	a	b	d
0	0	0	0
0.5	0.498	0.124	0.042
1	1.954	0.466	0.310
1.5	1.231	0.833	0.808
2	1.297	0.991	1.206
2.5	1.297	0.997	1.377
3	1.312	0.965	1.394
3.5	1.351	0.962	1.388
4	1.383	0.975	1.391
4.5	1.402	0.987	1.399
5	1.410	0.995	1.406
5.5	1.414	0.999	1.412
6	1.414	1.000	1.414
6.5	1.414	1.000	1.414

Tableau I.1 : Résolution numérique de l'équation de Riccati.

I.5. Calcul du coût minimal

D'après le principe de Pontriaguine, nous avons

$$p = \nabla_x \bar{Q} = Kx - v \quad (\text{I. 64})$$

Il en résulte que le coût minimal \bar{Q} est de la forme :

$$\bar{Q} = \frac{1}{2} x^T K x - v^T x + K_0 \quad (\text{I. 65})$$

En portant cette expression dans l'équation de Hamilton-Jacobi, on obtient les mêmes équations que précédemment pour K et v

I.6. Conclusion

Dans ce chapitre, on a formulé et résolu le problème de la commande linéaire quadratique (LQ). Pour ce problème de commande, le système à commander est linéaire et le critère est quadratique.

L'expression de la commande optimale a été obtenue en utilisant le principe de minimum basé sur la résolution des équations d'Hamilton Pontriaguine.

L'intérêt de la commande linéaire quadratique(LQ) consiste à déterminer une loi de commande optimale qui est lié aux paramètres du système et aux choix des matrices de pondération M et N. Les valeurs de ces matrices influent sur la valeur finale du critère à optimiser dont le choix optimal est recommandé.

Le problème traité dans ce mémoire est le choix optimaux des matrices de pondérations M et N. Pour ce faire, on doit utiliser des méthodes d'optimisation dont un rappel est donné dans le chapitre suivant.



Chapitre II
Chapitre II
Optimisation globale
Optimisation globale

II.1. Introduction

Le domaine de l'optimisation est un domaine de recherche immense. L'optimisation occupe un domaine important dans les recherches mathématiques pures et appliquées.

Ce chapitre est consacré à des généralités sur l'optimisation, après la formulation d'un problème d'optimisation, on donne une classification des méthodes d'optimisation (méthodes locales et méthodes globales). Vers la fin on s'intéresse à la méthode globale d'Alineor.

II.2. Généralités sur l'optimisation

Avant d'accéder à la formulation d'un problème d'optimisation, on doit d'abord se rappeler de quelques notions sur l'optimisation.

Considérons une fonction scalaire $f(x)$ de plusieurs variables de décision (x_1, x_2, \dots, x_n) appelée fonction objectif ou critère. Le vecteur de variables de décision noté $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ doit appartenir à un domaine donné $D \in \mathcal{R}^n$. Ce dernier est définie par des relations de contrainte de type égalité [2]

$$g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (\text{II. 1})$$

Et/ou inégalité

$$h_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, q \quad (\text{II. 2})$$

II.3. Classification des problèmes d'optimisation dans \mathcal{R}

Suivant la nature de la fonction objective et des différentes contraintes qui définissent le domaine des solutions admissibles D , on distingue plusieurs types de programmation qui sont rassemblées dans le tableau **II.1**.

		Fonction objectif		
		Linéaire	Quadratique (convexe)	Non linéaire
Contraintes	Linéaire	Programmation linéaire	Programmation Quadratique	Programmation Non linéaire
	Quadratique (convexe)	Programmation Non linéaire	Programmation Convexe	Programmation Non linéaire
	Non linéaire	Programmation Non linéaire	Programmation Non linéaire	Programmation Non linéaire

Tableau II.1 : Classification des problèmes d'optimisation.

L'objectif de l'optimisation consiste à rechercher parmi les $x \in D$, un x particulier qui est appelé minimum absolu ou global.

- Les minimums **absolus ou globaux** x^* tel que :

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in D_1 \quad (\text{II. 3})$$

- Les minimums **relatifs** ou **locaux** \hat{x} tel que :

$$f(\hat{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in D_2 \quad (\text{II. 4})$$

Remarque II.1

Le minimum absolu n'est pas obligatoirement unique.

II.4. Formulation d'un problème d'optimisation

Nous présentons mathématiquement un problème d'optimisation comme suit :

$$\min_x f(x)$$

Sujet à :

$$\begin{cases} g_i(x) = 0, & i = 1, \dots, p \\ h_j(x) \leq 0, & j = 1, \dots, q \end{cases} \quad (\text{II. 5})$$

Remarque II.2

Un problème de maximisation peut se ramener à un problème de minimisation par la relation suivante :

$$\max_{x \in D} f(x) = - \left(\min_{x \in D} -f(x) \right) \quad (\text{II. 6})$$

II.5. Condition d'optimalité

Nous commençons dans cette section d'étudier ce que l'on appelle les conditions d'optimalité qui sont des caractérisations des points de minimum.

Pour que x soit un minimum de f , ce dernier doit satisfaire les conditions d'optimalité suivantes :

II.5.1 Condition du 1^{er} ordre

C'est une condition de stationnarité (relative au gradient de la fonction objectif) ; elle consiste l'annulation du gradient au point x^* qui est une solution du problème obtenue comme suit :

$$\nabla_x f(x^*) = 0 \quad (\text{II. 7})$$

Nous calculons le gradient de la fonction f comme suit :

$$\nabla_x f(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right] \quad (\text{II. 8})$$

II.5.2 Condition du 2^{ème} ordre

Condition pour un minimum (relative au Hessien de la fonction objectif) : La condition est d'avoir la matrice Hessienne définie positive.

Nous calculons la matrice Hessienne de f comme suit :

$$\nabla_x^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (\text{II. 9})$$

Cette dernière nous permet de préciser la nature des points critiques, comme est illustré dans le tableau II.2

Matrice	Commentaire	Nature de point critique
$\nabla_x^2 f(x^*) < 0$	Définie négative	Minimum
$\nabla_x^2 f(x^*) > 0$	Définie positive	Maximum
$\nabla_x^2 f(x^*) \leq 0$	Semi- définie négative	Point singulier
$\nabla_x^2 f(x^*) \geq 0$	Semi- définie positive	Point singulier
$\nabla_x^2 f(x^*) = 0$	Possède des valeurs propres négatives et positives	Point selle

Tableau II .2. Nature du point critique.

II.6. Méthodes d'optimisation

On distingue deux types d'optimisation : locale et globale. L'optimisation peut se faire avec ou sans contraintes. [3]

II.6.1. Optimisation sans contrainte

Un problème d'optimisation sans contrainte se formule comme suit :

$$\min_{x \in \mathfrak{R}^n} f(x) \quad (\text{II. 10})$$

Donc l'objectif est de trouver un $x \in \mathfrak{R}^n$ minimisant la fonction objectif $f(x)$ en absence de contraintes, c'est-à-dire $p = 0, q = 0$.

II.6.1.1. Méthodes de recherche de l'optimum

Les méthodes d'optimisation peuvent être sectionnées en trois classes

a- Méthode analytique

L'obtention de l'optimum analytiquement consiste à résoudre l'équation $\nabla_x f(x) = 0$. En général, les fonctions objectifs à minimiser sont pratiquement fortement non linéaires, donc il est impossible à résoudre l'équation précédente, alors on doit utiliser les méthodes numériques.

b- Méthode graphique

Cette méthode est utilisée dans le cas de problème d'optimisation avec deux variables de décision.

On peut toujours ramener un problème à n variables d'optimisation à un autre problème à deux variables par élimination de variables, par conséquent les contraintes. Les étapes à suivre sont :

- 1- Représenter le domaine admissible défini par les relations de contraintes inégalités.
- 2- Représenter les contours de la fonction objective.
- 3- Déterminer le point d'intersection entre la fonction objective et le domaine admissible dans le sens de l'optimisation.

Les directions d'optimisation sont données comme suit :

$$\min f(x) \rightarrow -\nabla_x f(x) \quad (\text{II. 11})$$

$$\max f(x) \rightarrow +\nabla_x f(x_k) \quad (\text{II. 12})$$

c- Méthodes numériques

La recherche numérique de l'optimum consiste à utiliser des méthodes itératives.

Le principe consiste à partir d'un estimé de départ de la solution $x^{(0)}$ puis déterminer la suite des valeurs $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ de tel sorte à avoir dans le cas d'un minimum.

$$f(x^{(0)}) > f(x^{(1)}) > f(x^{(2)}) \dots f(x^{(k)}) \quad (\text{II. 13})$$

Comme cette suite numérique est bornée inférieurement par $f(x^*)$ elle convergera vers l'optimum globale x^* s'il est unique. S'ils existent plusieurs minimums locaux elle converge vers l'un de ces minimums.

Remarque II.3

Structure générale d'un algorithme numérique [4]

- 1- Choisir $x^{(0)}$ et ε (tolerance)
- 2- $x^{k+1} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$
- 3- $\|\nabla_x f(x^{k+1})\| \leq \varepsilon$, si cette condition est vérifiée alors x^{k+1} est la solution du problème si non, allez à l'étape 2

Le plus souvent, on utilise dans ce cas les méthodes suivantes :

c-1. Méthode du gradient

L'algorithme de la Méthode du gradient est :

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k p(x^k) \quad (\text{II. 14})$$

$$p(x^k) = -\nabla_x f(x^k) \quad (\text{II. 15})$$

c-2. Méthode du gradient conjugué

La méthode de gradient conjugué est une variante améliorée de la méthode de la plus grande pente qui consiste à suivre la direction opposée au gradient. Cette méthode a l'inconvénient de créer des directions de recherche orthogonales, ce qui ralentit la convergence de l'algorithme. L'algorithme de la méthode du gradient conjugué est :

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k p(x^k) \quad (\text{II. 16})$$

$$p(x^k) = -\nabla_x f(x^k) + \beta^{(k)} p(x^{(k-1)}) \quad (\text{II. 17})$$

$$\beta^{(k)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } k = 0 \\ \frac{\|\nabla_x f(x^k)\|^2}{\|\nabla_x f(x^{k-1})\|^2} & \text{si } k \geq 1 \end{cases} \quad (\text{II. 18})$$

c-3. Méthode de Newton

L'algorithme de la Méthode de Newton est :

$$x^{k+1} = x^k - [\nabla_x^2 f(x^k)]^{-1} \nabla_x f(x^k) \quad (\text{II. 19})$$

c-4. Méthode de Newton modifiée

L'algorithme de la Méthode de Newton est :

$$x^k = x^{k+1} + \alpha^k p(x^k) \quad (\text{II. 20})$$

$$p(x^k) = -[\nabla_x^2 f(x^k)]^{-1} \nabla_x f(x^k) \quad (\text{II. 21})$$

c-5. Méthode Quasi –Newton

Les méthodes quasi-Newton consistent à imiter la méthode de Newton où l'optimisation d'une fonction est obtenue à partir de minimisations successive de son approximation au second ordre. Elles ne calculent pas le Hessien mais elles utilisent une approximation définie positive du Hessien qui peut être obtenue soit par l'expression proposé par Davidon-Fletcher-Powell (DFP), soit par celle proposée par Broyden-Fletcher- Goldfard-Shanno (BFGS). [5]

La mise à jour dans le cas de l'algorithme BFGS est définie comme suit :

$$H_k = H_{k-1} + \frac{y_{k-1}y_{k-1}^T}{y_{k-1}^T d_{k-1}} - \frac{H_{k-1}d_{k-1}d_{k-1}^T H_{k-1}}{d_{k-1}^T H_{k-1}d_{k-1}} \quad (\text{II. 22})$$

II.7. Optimisation en présence de contraintes

Le principe de l'optimisation sous contraintes consiste à transformer le problème posé avec contraintes en un autre problème sans contraintes. Elle consiste l'ajout des coefficients de pénalisation.

II.7.1 Contrainte de type égalité

Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} & \min_x f(x) \\ \text{Sujet à :} & \\ & g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (\text{II. 23})$$

Pour ce type de problème, on utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Le principe de cette méthode consiste à transformer le problème posé avec p contraintes en un problème sans contraintes en introduisant les multiplicateurs de Lagrange λ_i ($i = 1 \dots p$). Dans ce cas, on définit une nouvelle fonction objective appelée fonction de Lagrange comme suit :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(x) = 0 \quad (\text{II. 24})$$

A l'optimum x^* et λ^* :

$$\min_x f(x) = \min_{x, \lambda} L(x, \lambda) \quad (\text{II. 25})$$

Le problème devient donc à résoudre

$$\min_X L(X) \quad \text{avec} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \quad (\text{II. 26})$$

Pour le résoudre, on doit chercher les points critiques de $L(X)$ qu'on obtient comme suit :

$$\nabla_x L(X) = \begin{cases} \nabla_x L(X) = 0 \\ \nabla_\lambda L(X) = 0 \end{cases} \quad (\text{II. 27})$$

II.7.2 Contrainte de type inégalité

Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} & \min_x f(x) \\ \text{Sujet à :} & \end{aligned} \quad (\text{II. 28})$$

$$h_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, q$$

Pour ce problème, on a deux méthodes pour la résolution :

a- Méthode des variables d'écart

Consiste à transformer la contrainte de type inégalité à une contrainte de type égalité par ajout d'une variable positive nous obtenons donc la relation

$$L(\tilde{X}) = f(x) + \sum_{j=1}^q \lambda_j (h_j(x) + x_{n+j}^2) \quad (\text{II. 29})$$

b- Méthode de Kuhn-Tucker

Cette méthode donne directement les conditions suffisantes et nécessaires que doit vérifier une solution pour qu'il soit une solution du problème. Elle consiste à introduire des paramètres de Kuhn –Tucker notés $\mu_j (j = 1, \dots, q)$ et de définir la fonction de Lagrange comme suit :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^q \mu_j h_j(x) \quad (\text{II. 30})$$

Puis de vérifier les conditions de Kuhn-Tucker résumées dans le tableau 2.3.

	Minimum	Maximum
$h_j(x) \leq 0$	1- $\nabla_x L(x, \mu) = 0$ 2- $\nabla_\mu L(x, \mu) \leq 0$ 3- $\mu_j h_j(x) = 0$ 4- $\mu_j \geq 0$	1- $\nabla_x L(x, \mu) = 0$ 2- $\nabla_\mu L(x, \mu) \leq 0$ 3- $\mu_j h_j(x) = 0$ 4- $\mu_j \leq 0$
$h_j(x) \geq 0$	1- $\nabla_x L(x, \mu) = 0$ 2- $\nabla_\mu L(x, \mu) \geq 0$ 3- $\mu_j h_j(x) = 0$ 4- $\mu_j \leq 0$	1- $\nabla_x L(x, \mu) = 0$ 2- $\nabla_\mu L(x, \mu) \leq 0$ 3- $\mu_j h_j(x) = 0$ 4- $\mu_j \geq 0$

Tableau II.3 : Condition de Kuhn-Tucker.

II.8. Optimisation globale [6]

Minimiser $f(x)$ sous la contrainte $x \in D$ avec :

- $f(x)$ fonction objectif
- D le domaine réalisable (ou admissible)

Le but de l'optimisation globale c'est de trouver x^* tel que $f(x^*) < f(x)$, pour tout $x \in D$.

II.9. Méthodes de l'optimisation

Les méthodes d'optimisations sont classées, selon le mode de recherche de l'optimum, en deux grands groupes : les méthodes déterministes et les méthodes stochastiques.

II.9.1. Méthodes déterministes

Ces méthodes peuvent être subdivisées en plusieurs classes:

- ❖ Les méthodes heuristiques,
- ❖ les méthodes statistiques,

- ❖ les méthodes Branch & Bound,
- ❖ les méthodes mathématiques, et les méthodes d'apprentissage automatique.

Cette classification est illustrée par la figure II-1.

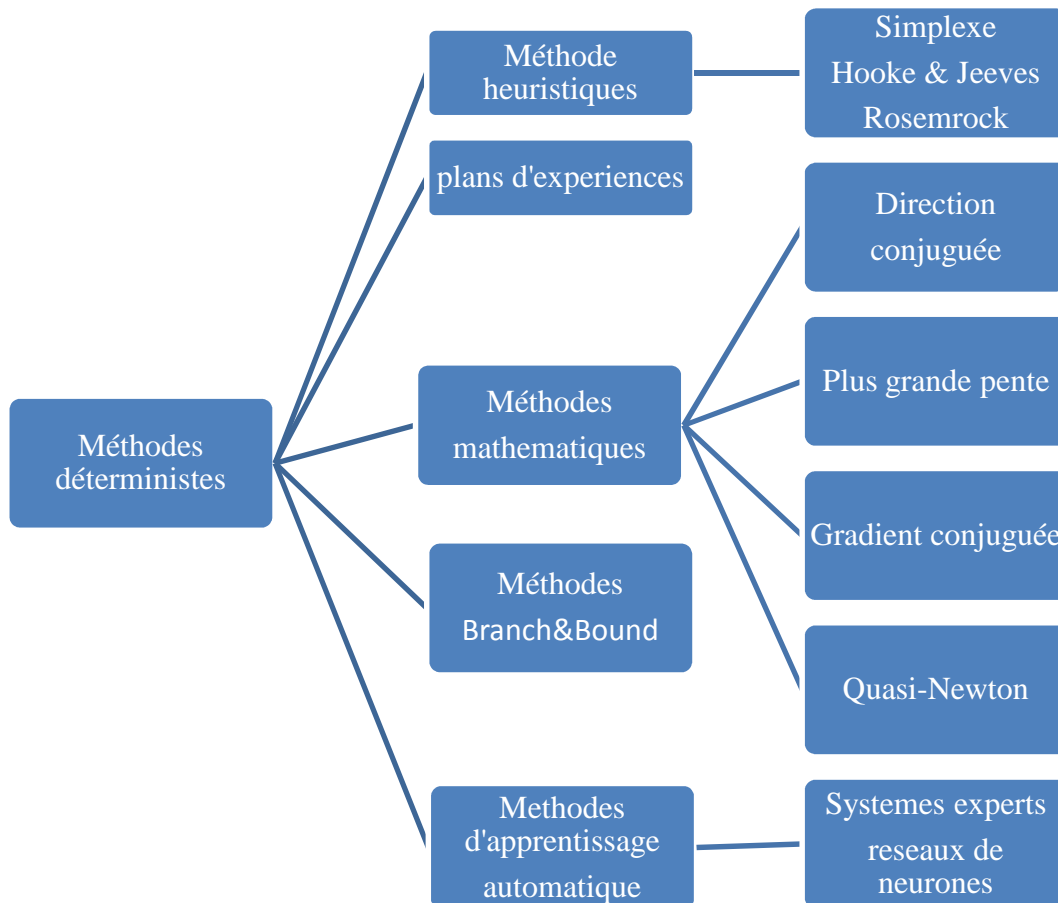


Figure. II-1 Méthodes d'optimisation déterministes.

II.9.2. Méthodes stochastiques

Les méthodes d'optimisation stochastiques s'appuient sur des mécanismes de transition probabilistes et aléatoires. Cette caractéristique indique que plusieurs exécutions successives de ces méthodes peuvent conduire à des résultats différents pour une même configuration initiale d'un problème d'optimisation. Ces méthodes ont une grande capacité à trouver l'optimum global du problème.

Contrairement à la plupart des méthodes déterministes, elles ne nécessitent ni point de départ, ni la connaissance du gradient de la fonction objectif pour atteindre la solution

optimale. Elles sont d'ordre zéro. Cependant, elles demandent un nombre important d'évaluations de la fonction objectif. La figure II.2 présente les méthodes stochastiques les plus utilisées.

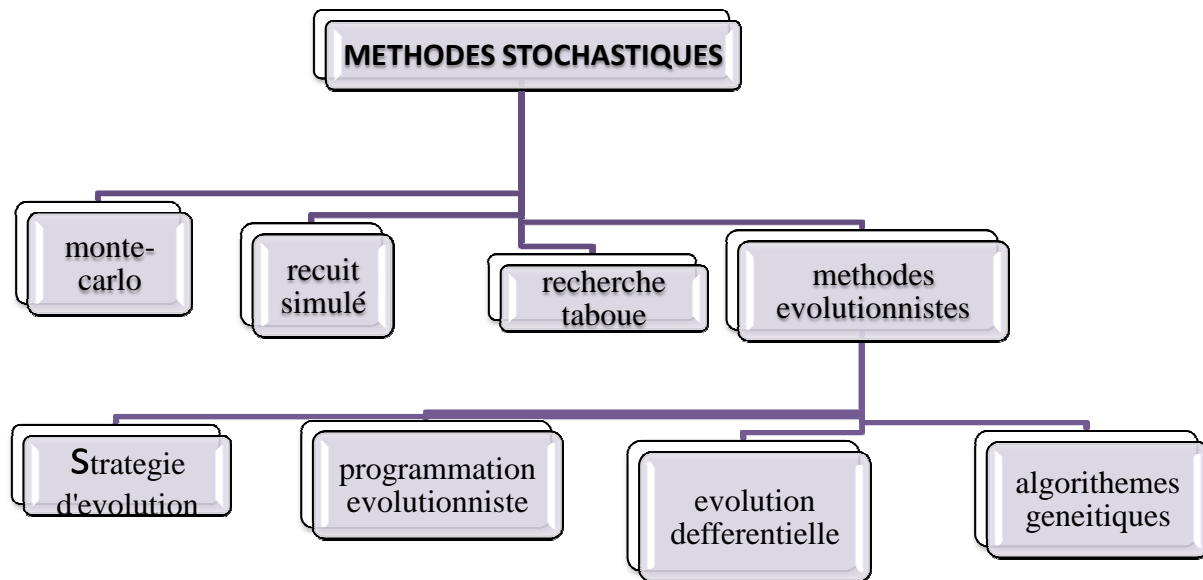


Figure. II-2 Méthodes d'optimisation stochastiques

II.10. Méthode d'Alienor [7]

Dans cette section, on présente une méthode d'optimisation globale déterministe. La méthode d'Aliénor permet de ramener les fonctions de plusieurs variables à des fonctions d'une seule variable. Elle a été développée par Cherruault et Arthur Guillez en utilisant la première transformation réductrice basée sur la spirale d'Archimède.

Soit le point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nous allons d'abord passer en coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (\text{II. 31})$$

Puis on relie r et θ par la spirale d'Archimède : $r = a\theta$, avec

$$\begin{cases} a \text{ est un paramètre fixé} \\ a \geq 0 \text{ Déstiné à tendre vers } 0 \end{cases} \quad (\text{II. 32})$$

Ainsi les relations deviennent :

$$\begin{cases} x = a\theta \cos \theta \\ y = a\theta \sin \theta \end{cases} \quad (\text{II. 33})$$

Par conséquent, elles permettent d'exprimer x et y en fonction de la variable unique variable $\theta \geq 0$.

Pour trois variables x, y, z on relie d'abord x et y par une spirale d'Archimède d'angle θ_1 :

$$\begin{cases} x = a\theta_1 \cos \theta_1 \\ y = a\theta_1 \sin \theta_1 \end{cases} \quad (\text{II. 34})$$

Puis on relie les deux variables θ_1 et z par une spirale d'Archimède d'angle θ :

$$\begin{cases} \theta_1 = a\theta \cos \theta \\ z = a\theta \sin \theta \end{cases} \quad (\text{II. 35})$$

Il est clair que x, y, z s'expriment à l'aide de θ . Ainsi, on obtient une courbe paramétrée $h(\theta) = (h_1(\theta), h_2(\theta), h_3(\theta))$ sous la forme :

$$\begin{cases} h_1(\theta) = a^2\theta \cos \theta \cos(a\theta \cos \theta) \\ h_2(\theta) = a^2\theta \cos \theta \sin(a\theta \cos \theta) \\ h_3(\theta) = a\theta \sin \theta \end{cases} \quad (\text{II. 36})$$

D'une façon générale pour n variables x_1, x_2, \dots, x_n , on relie deux à deux les variables par des spirales d'Archimède d'angle θ_i et on aboutit à des relations

$$x_i = h_i(\theta), \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{II. 37})$$

II.11. Optimisation globale par la méthode d'Alienor

Considérons une fonction f continue sur \mathfrak{R}^n vérifiant la condition de croissance à l'infini

$$\lim_{x_1^2 + \dots + x_n^2} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \infty \quad (\text{II. 38})$$

Soit à résoudre le problème suivant :

$$\text{Glob} \min_{x_1, \dots, x_n \in \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{II. 39})$$

La transformation permet de remplacer la fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ par la nouvelle fonction $f^*(\theta)$ donnée comme suit :

$$f^*(\theta) = f(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_n(\theta)) \quad (\text{II. 40})$$

Qui est une fonction d'une seule variable

Le problème d'optimisation devient :

$$\text{Glob. Min } f^*(\theta) \quad (\text{II. 41})$$

Qui est un problème de minimisation à une seule variable. On peut le résoudre simplement à condition de définir $\theta \in [0, \theta_{max}]$.

II.11.1 Autres transformations réductrices

La transformation 1

Plutôt de transformer deux à deux les variables, on peut envisager des transformations réductrices du type :

$$x_i = a\theta \sin \alpha_i \theta, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{II. 42})$$

a Constante fixée.

Pour que cette transformation soit α dense il suffit de choisir une suite $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ très lentement croissante avec un dernier terme α_n vérifiant :

$$\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = \rho \leq \frac{\alpha}{\pi\sqrt{n}} \quad (\text{II. 43})$$

La transformation 2

$$\sin \alpha_i \theta \text{ ou } \cos \alpha_i \theta \quad (\text{II. 44})$$

Les paramètres $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ sont très proches les un des autres tout en constituant une suite croissante

$$(\alpha_{i+1} = \alpha_i + \varepsilon) \quad (\text{II. 45})$$

Le paramètre $\varepsilon > 0$ est choisi très petit. Le paramètre α_n est choisit comme suit :

$$\alpha_n = \frac{\pi\sqrt{n-1}\alpha_{n-1}}{\alpha} \quad (\text{II. 46})$$

La transformation 3

$$x_i = \cos(m^i \pi \theta) \quad (\text{II. 47})$$

Avec $m > 1$

La transformation 4

$$x_i = \cos(\omega_i \theta + \varphi_i) \quad (\text{II. 48})$$

Où

- $\omega_i > 0$ forment une suite croissante, c'est-à-dire $\omega_i < \omega_{i+1}$.

- $\varphi_i > 0$ croissants et proches les uns des autres.

II.12. Conclusion

Dans ce chapitre, on a donné un aperçu général sur l'optimisation statique des fonctions à plusieurs variables. Nous avons présenté les deux types d'optimisation (locale et globale). Dans le cas de l'optimisation locale, on a cité les différentes méthodes pour la recherche de l'optimum.

Concernant l'optimisation globale, on s'est contenté de la classification des différentes méthodes en deux grands groupes : déterministes et stochastiques. Comme exemple de méthode d'optimisation globale on a présenté la méthode d'Alienor. Cette méthode repose sur une suite de transformations réductrices qui permet de ramener toute fonction de plusieurs variables à une fonction d'une seule variable.

Dans le chapitre suivant, on va s'intéresser à l'étude de l'influence des matrices de pondérations sur la valeur finale du critère à optimiser. Cette étude justifie le recours à l'optimisation globale pour définir ces matrices.



Chapitre III
Chapitre III
Etude de l'Influence des Matrices de Pondération
Etude de l'Influence des Matrices de Pondération

III.1. Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'influence des matrices de pondération M et N sur la valeur finale du critère.

La matrice de pondération associée au vecteur de commande N est une matrice symétrique définie positive. Elle est liée au terme d'énergie défini comme suit :

$$u^T(t) Nu(t) > 0, \forall u \neq 0;$$

$$u^T(t) Nu(t) = 0 \text{ pour } u(t) = 0 \text{ uniquement}$$

La matrice M , quant à elle, est une matrice symétrique, semi-définie positive. Elle est liée au terme de poursuite défini comme suit dans le cas de la régulation :

$$x^T(t) M x(t) \geq 0, \quad \forall x \rightarrow x^T(t) M x(t) \text{ peut être nulle pour } x \neq 0$$

Les coefficients de pondération (élément des matrices de pondération) reflètent l'influence de chaque composante du vecteur auquel la matrice correspondante est associée.

On commence par un rappel sur la commande linéaire quadratique et la forme finale du critère, puis on montre l'influence des matrices de pondération sur la valeur du critère à travers deux exemples illustratifs.

III.2. Rappel

La commande linéaire quadratique consiste à rechercher une matrice gain K (matrice de Riccati) définie positive. Cette dernière dépend des matrices de pondérations M et N . Dans ce cas, le retour d'état $u(t) = -Kx(t)$ stabilise le système et minimise un critère quadratique c'est-à-dire la somme de l'écart de poursuite et de l'énergie de commande. Dans ce qui suit, on suppose que la condition initiale est non nulle, i.e.

$$x(0) \neq 0 \tag{III. 1}$$

III.3. Rôle des matrices de pondération

III.3.1. Choix des matrices de pondération

Les matrices de pondération sont généralement choisies diagonales. Au départ, ces matrices (M et N) doivent être choisies comme des matrices identités $I_{N \times N}$. En suite, par simulation on cherche les bons poids de pondération de chaque composant de vecteur soit de l'erreur ou de commande pour avoir une poursuite et une régulation souhaitée.

Pour faire une évaluation initiale raisonnable de M et N , l'utilisateur se base sur le calibrage physique des entrée-sortie correspondants, en prenant [8] :

$$n_i = \left[\frac{1}{\text{sup}(u_i)} \right]^2 \quad (\text{III. 2})$$

$$m_i = \left[\frac{1}{\text{sup}(y_i)} \right]^2 \quad (\text{III. 3})$$

Cette règle est appelée méthode de Bryson [8].

Il pourra ensuite raffiner le choix du paramètre par essai et erreur en simulation.

Une autre méthode consiste à générer des matrices de pondération qui placent des pôles en boucle fermée dans une région imposée du plan complexe et, ce en évitant que les déplacements des pôles de la boucle ouverte à la boucle fermée ne soit trop important. Dans cette optique, Philippe De Larminat a proposé un choix simple pour l'obtention des matrices de pondération

$$M_x = \left[T_c \int_0^{T_c} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \right] \quad (\text{III. 4})$$

$$N = 1$$

Avec T_c spécifie l'ordre de grandeur de la constante du temps dominant du système en boucle fermée. On vérifie aussi que quelque soit T_c les valeurs propres en boucle fermée se trouvent alors pratiquement toutes à gauche d'une verticale d'abscisse $\frac{1}{T_c}$.

III.3.2. Rôle des matrices de pondération

Le rôle des matrices de pondérations est généralement contradictoire, la recherche d'une erreur faible impose de prendre des valeurs importantes pour la matrice M et des valeurs

faibles pour N . Par contre la recherche de faibles amplitudes pour les commandes est réalisée par un choix inverse.

- ✓ La matrice de pondération M a comme rôle de donner à chaque état x , dans le cas de la régulation, ou à chaque erreur e , dans le cas de la poursuite, des poids (coefficients) ;
- ✓ Le rôle des matrices de pondération de la commande N est d'affecter un poids à chaque élément de vecteur de la commande u ;
- ✓ Le terme $e^T(t)Me(t)$ est lié à la nature du régime transitoire obtenu par la minimisation de l'erreur $e(t) = x^d(t) - x(t)$ entre l'état du système à l'instant t et l'état désiré ;
- ✓ Le terme $u^T(t)Nu(t)$ est lié à la minimisation de l'énergie de commande ou la recherche d'une commande d'amplitude minimale.

III.3.3. Illustration de l'influence des matrices de pondération

Exemple 1

Soit le problème linéaire quadratique (LQ) suivant :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} Mx^2(t) + Nu^2(t) dt \quad (\text{III. 5})$$

Sujet à :

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{2}x(t) + u(t) \quad (\text{III. 6})$$

On suppose que la condition initiale est $x(0)=1$.

Pour illustrer l'influence des matrices de pondération, on donne différentes valeurs pour M et N et on calcule la valeur du critère en utilisant la formule suivante :

$$J = \frac{1}{2}x^T(0)Kx(0) \quad (\text{III. 7})$$

$$x(0) = 1 \quad (\text{III. 8})$$

Comme l'horizon de commande est infini et les matrices du modèle et de pondérations du critère sont constantes, alors l'équation de Riccati est algébrique dont la forme est

$$A^T K + KA - KBN^{-1}B^T K + M = 0 \quad (\text{III.9})$$

Par conséquent, l'équation de Riccati est :

$$-N^{-1}K^2 - K + M = 0 \quad (\text{III.10})$$

Par exemple pour $M = 6$ et $N = 1$, l'équation de Riccati (III.10) admet deux solutions : $K = 2$ et $K = -3$. Comme la solution à retenir doit être définie positive, alors on prend $K = 2$. Dans ce cas la valeur du critère, d'après (III.7), est :

$$J = 2$$

Pour illustrer l'influence des matrices de pondération sur la valeur du critère, on a considéré plusieurs valeurs pour M et N , les résultats obtenus sont résumés dans le tableau III.1.

M	N	K	J
2	2	1	0.5
	4	1.464	0.732
4	5	2.623	1.311
	8	2.928	1.464
6	1	2	1
	4	3.291	1.645

Tableau III.1 Influence des matrices de pondération.

D'après les résultats du Tableau III.1, on constate que le choix des matrices M et N influe sur la valeur du critère finale qu'on peut utiliser comme une mesure de performance.

Exemple 2

Soit le problème de la commande optimale suivant :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) \int_0^T (\eta x_1^2(t) + \mu x_2^2(t) + \lambda u^2(t)) dt \quad (\text{III.11})$$

Avec $\lambda > 0$

Sujet à :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) & \text{(III. 12)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = u(t) & \text{(III. 13)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{(III. 14)} \end{cases}$$

Sous forme matricielle, le problème s'écrit comme suit :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left(\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + u^T(t) \lambda u(t) \right) dt \quad \text{(III. 15)}$$

Sujet à :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad \text{(III. 16)}$$

Comme l'horizon est fini, l'équation de Riccati est:

$$\dot{K} + KA + A^T K - KSK + M = 0 \quad \text{(III. 17)}$$

On pose

$$K(t) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \quad \text{(III. 18)}$$

La matrice S est :

$$S = \frac{BB^T}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(III. 19)}$$

Calculons alors les différents termes de l'équation de Riccati :

$$KA = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad \text{(III. 20)}$$

$$A^T K = (KA)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \quad \text{(III. 21)}$$

$$KSK = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} b^2 & bd \\ bd & d^2 \end{bmatrix} \quad \text{(III. 22)}$$

L'équation de Riccati s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} \dot{a} & \dot{b} \\ \dot{b} & \dot{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} - \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} b^2 & bd \\ bd & d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{III. 23})$$

Elle est équivalente aux trois équations différentielles suivantes :

$$\dot{a} - \frac{b^2}{\lambda} + \eta = 0 \quad (\text{III. 24})$$

$$\dot{b} + a - \frac{bd}{\lambda} = 0 \quad (\text{III. 25})$$

$$\dot{d} + 2b - \frac{d^2}{\lambda} + \mu = 0 \quad (\text{III. 26})$$

Le calcul se présente ensuite de manière différente selon que l'horizon est fini ou infini.

Puisque les performances dynamiques du système ne deviennent intéressantes que lorsqu'on résout le problème de commande LQ à horizon infini, ainsi que les notions de régime transitoire et permanent ne peuvent avoir de signification que lorsque cet horizon est infini. Alors, l'équation de Riccati est algébrique, c'est-à-dire :

$$KA + A^T K - KSK + M = 0 \quad (\text{III. 27})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} - \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} b^2 & bd \\ bd & d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{III. 28})$$

Le système algébrique qui en résulte a pour solution :

$$b^2 = \lambda\eta \quad (\text{III. 29})$$

$$d^2 = \lambda(2\sqrt{\lambda\eta} + \mu) \quad (\text{III. 30})$$

$$a^2 = \eta(2\sqrt{\lambda\eta} + \mu) \quad (\text{III. 31})$$

A partir de ces trois équations, on obtient les résultats suivants :

$$a = \mp \sqrt{\eta(2\sqrt{\lambda\eta} + \mu)} \quad (\text{III. 32})$$

$$b = \mp \sqrt{\lambda \eta} \quad (\text{III. 33})$$

$$d = \mp \sqrt{\lambda(2\sqrt{\lambda \eta} + \mu)} \quad (\text{III. 34})$$

Les solutions possibles sont :

$$K_1(t) = \begin{bmatrix} +\sqrt{\eta(2\sqrt{\lambda \eta} + \mu)} & +\sqrt{\lambda \eta} \\ +\sqrt{\lambda \eta} & +\sqrt{\lambda(2\sqrt{\lambda \eta} + \mu)} \end{bmatrix} \quad (\text{III. 35})$$

$$K_2(t) = \begin{bmatrix} -\sqrt{\eta(2\sqrt{\lambda \eta} + \mu)} & -\sqrt{\lambda \eta} \\ -\sqrt{\lambda \eta} & -\sqrt{\lambda(2\sqrt{\lambda \eta} + \mu)} \end{bmatrix} \quad (\text{III. 36})$$

Les résultats obtenus pour certains choix des matrices de pondération sont résumées dans le tableau III.2

M	N	K	J
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	1	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	3
		$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ (définie négative donc rejetée)	-3
$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$	2	$\begin{bmatrix} 5.166 & 2.449 \\ 2.449 & 4.218 \end{bmatrix}$	7.141
		$\begin{bmatrix} -5.166 & -2.449 \\ -2.449 & -4.218 \end{bmatrix}$ (définie négative donc rejetée)	-7.141
$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$	6	$\begin{bmatrix} 11.212 & 6.480 \\ 6.480 & 10.381 \end{bmatrix}$	17.276
		$\begin{bmatrix} -11.212 & -6.480 \\ -6.480 & -10.381 \end{bmatrix}$ (définie négative donc rejetée)	-17.276
$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$	8	$\begin{bmatrix} 11.710 & 6.928 \\ 6.928 & 13.522 \end{bmatrix}$	19.544
		$\begin{bmatrix} -11.710 & -6.928 \\ -6.928 & -13.522 \end{bmatrix}$ (définie négative donc rejetée)	-19.544

Tableau III.2 Influence des matrices de pondération

On constate d'après les résultats obtenus que la valeur du critère dépend des matrices de pondérations choisies.

Ces deux exemples montrent que le choix des matrices de pondérations est important et influe sur les performances en boucle fermée. Alors, on peut penser à un choix optimal de ces matrices. Ce problème constitue la problématique traitée dans ce mémoire.

III.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que le choix des matrices de pondération influe directement sur la valeur finale du critère quadratique à optimiser. En effet, le critère dépend de la solution de l'équation de Riccati et cette dernière dépend à son tour des éléments des matrices de pondération. Des exemples illustratifs ont été donnés pour corroborer ce constat.

Dans le chapitre suivant, on propose de formuler le problème de choix des matrices de pondération sous forme d'un problème d'optimisation.



Chapitre IV
Optimisation du Choix des Matrices de Pondération d'une Commande LQ
Chapitre IV
Optimisation du Choix des Matrices de Pondération d'une Commande LQ

IV.1. Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que la valeur du critère final à obtenir dans le cas d'une commande linéaire quadratique dépend implicitement des matrices de pondération du critère. Les exemples étudiés ont montré que le choix de ces matrices est important et influe directement sur la qualité des performances.

Dans ce chapitre, nous allons formuler le problème du choix des matrices de pondération sous forme d'un problème d'optimisation ce qui permettra de déterminer des valeurs des matrices de pondération M et N d'une manière optimale.

IV.2. Position du problème

Soit le problème de commande linéaire quadratique formulé comme suit

$$\min_{u(t)} Q(x(t), u(t), t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} x^T(t) M x(t) + u^T(t) N u(t) dt \quad (\text{IV.1})$$

Sujet à :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

On démontre facilement en utilisant le principe du minimum que la loi de commande optimale est donnée comme suit

$$u^*(t) = -N^{-1} B^T K x(t) \quad (\text{IV.3})$$

Avec K est la solution de l'équation algébrique de Riccati suivante

$$KA + A^T K - KSK + M = 0 \quad (\text{IV.4})$$

On a montré dans le chapitre précédent que le choix des matrices de pondération M et N influe sur la valeur du critère final. Dans la section suivante, on va formuler le problème du choix de ces matrices sous forme d'un problème d'optimisation pour faire un choix optimal.

IV.3. Formulation du problème du choix des matrices de pondération sous forme d'un problème d'optimisation

Pour formuler un problème d'optimisation, on doit préciser :

1. Les variables de décision ou d'optimisation,
2. Le critère (fonction objectif) à minimiser en fonction des variables d'optimisation,
3. Les contraintes à satisfaire en fonction des variables d'optimisation.

IV.3.1. Variables de décision ou d'optimisation

Le problème consiste à chercher les matrices de pondérations M et N , par conséquent les variables d'optimisation sont les éléments des matrices de pondération M et N

IV.3.2. Fonction objectif

Rappelons que la valeur final du critère J est donnée par

$$J = \frac{1}{2} x^T(0) K x(0) \quad (\text{IV.5})$$

avec K est la solution de l'équation algébrique de Riccati, par conséquent d'après l'équation (IV.5), le critère sera en fonction des éléments des matrices de pondération M et N , donc

$$K = F(M, N) \quad (\text{IV.6})$$

IV.3.3. Contraintes

On sait bien que l'équation de Riccati admet plusieurs solutions mais la solution à retenir doit être définie positive, par conséquent on doit imposer

$$K = F(M, N) \geq 0 \quad (\text{IV. 7})$$

IV.4. Résumer de problème d'optimisation

En résumé, le problème du choix optimal des matrices de pondération est formulé comme suit

$$\min_{M, N} F(M, N) \quad (\text{IV. 8})$$

Sujet à

$$F(M, N) > 0 \quad (\text{IV. 9})$$

C'est un problème d'optimisation avec des contraintes du type inégalités qui peut être résolu par la méthode de Kuhn-Tucker ou la méthode des variables d'écart. Généralement, la solution analytique est difficile à obtenir donc on procède de manière numérique en utilisant des méthodes itératives d'optimisation.

IV. 5. Exemple d'application

Soit le problème de commande linéaire quadratique suivant :

$$Q(x(t), u(t), t) = \frac{1}{2} \int_0^T (\eta x_1^2(t) + \mu x_2^2(t) + u^2(t)) dt \quad (\text{IV. 10})$$

Sujet à :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases} \quad (\text{IV. 11})$$

Avec l'état initial

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV. 12})$$

IV.5.1. Résolution du problème

L'identification des matrices du système et du critère conduit aux matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad N = 1$$

Ce qui donne

$$S = BN^{-1}B^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV. 13})$$

Pour la solution de l'équation de Riccati, on pose :

$$K = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \quad (\text{IV. 14})$$

Les calculs conduisent aux résultats suivants:

$$KA = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad (\text{IV. 15})$$

$$A^T K = (KA)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \quad (\text{IV. 16})$$

$$KSK = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} b^2 & bd \\ bd & d^2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV. 17})$$

Puisque l'horizon de commande est infini, alors l'équation de Riccati est algébrique donnée comme suit :

$$KA + A^T K - KSK + M = 0 \quad (\text{IV. 18})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b^2 & bd \\ bd & d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{IV.19})$$

Ce qui est équivalent aux trois équations algébriques suivantes :

$$b^2 + \eta = 0 \quad (\text{IV.20})$$

$$a - bd = 0 \quad (\text{IV.21})$$

$$2b - d^2 + \mu = 0 \quad (\text{IV.22})$$

On considère le calcul sur l'horizon infini. Nous avons alors

$$\dot{a} = \dot{b} = \dot{d} = 0 \quad (\text{IV.23})$$

Le système algébrique qui en résulte a pour solution :

$$b^2 = \eta \quad (\text{IV.24})$$

$$d^2 = (2\sqrt{\eta} + \mu) \quad (\text{IV.25})$$

$$a^2 = \eta(2\sqrt{\eta} + \mu) \quad (\text{IV.26})$$

La résolution de ces équations par rapport aux éléments de la matrice de Riccati donne

$$a = \sqrt{\eta(2\sqrt{\eta} + \mu)} \quad (\text{IV.27})$$

$$b = \sqrt{\eta} \quad (\text{IV.28})$$

$$d = \sqrt{(2\sqrt{\eta} + \mu)} \quad (\text{IV.29})$$

Alors

$$K = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\eta(2\sqrt{\eta} + \mu)} & \sqrt{\eta} \\ \sqrt{\eta} & \sqrt{(2\sqrt{\eta} + \mu)} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.30})$$

Pour déterminer les paramètres optimaux pour les matrices M et N, on formule le problème d'optimisation comme suit :

IV.5.2. Fonction objectif

La valeur du critère à minimiser qui représente la fonction objective est

$$J = \frac{1}{2} x_0^T K x_0 \quad (\text{IV.31})$$

$$J = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\eta(2\sqrt{\eta} + \mu)} & \sqrt{\eta} \\ \sqrt{\eta} & \sqrt{(2\sqrt{\eta} + \mu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.32})$$

$$J = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\eta(2\sqrt{\eta} + \mu)} + \sqrt{\eta} \quad \sqrt{\eta} + \sqrt{(2\sqrt{\eta} + \mu)} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.33})$$

$$J = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\eta(2\sqrt{\eta} + \mu)} + 2\sqrt{\eta} + \sqrt{(2\sqrt{\eta} + \mu)} \right] \quad (\text{IV.34})$$

IV.5.3. Contraintes

La solution de l'équation de Riccati doit être définie positive, par conséquent les déterminants de K pris en chaînes doivent être positifs

$$K = \begin{bmatrix} \sqrt{\eta(2\sqrt{\eta} + \mu)} & \sqrt{\eta} \\ \sqrt{\eta} & \sqrt{(2\sqrt{\eta} + \mu)} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.35})$$

Les déterminants pris en chaînes sont

$$\left| \sqrt{\eta(2\sqrt{\eta} + \mu)} \right| = \sqrt{\eta(2\sqrt{\eta} + \mu)} \geq 0 \quad (\text{IV.36})$$

$$\left| \begin{array}{cc} \sqrt{\eta(2\sqrt{\eta} + \mu)} & \sqrt{\eta} \\ \sqrt{\eta} & \sqrt{(2\sqrt{\eta} + \mu)} \end{array} \right| = \sqrt{\eta(2\sqrt{\eta} + \mu)}\sqrt{(2\sqrt{\eta} + \mu)} - \eta \geq 0 \quad (\text{IV.37})$$

On impose $x_1 = \eta$ et $x_2 = \mu$, les deux contraintes deviennent :

$$h_1(x) = \sqrt{x_1(2\sqrt{x_1} + x_2)} \geq 0 \quad (\text{IV.38})$$

$$h_2(x) = \sqrt{x_1(2\sqrt{x_1} + x_2)}\sqrt{(2\sqrt{x_1} + x_2)} - x_1 \geq 0 \quad (\text{IV.39})$$

IV.5.4. Résumé du problème

Ainsi, le problème d'optimisation final à résoudre est donné comme suit

$$\min_{x_1, x_2} J = \frac{1}{2} \left[\sqrt{x_1(2\sqrt{x_1} + x_2)} + 2\sqrt{x_1} + \sqrt{(2\sqrt{x_1} + x_2)} \right]$$

Sujet à :

$$\begin{cases} h_1(x) = \sqrt{x_1(2\sqrt{x_1} + x_2)} \geq 0 \\ h_2(x) = \sqrt{x_1(2\sqrt{x_1} + x_2)}\sqrt{(2\sqrt{x_1} + x_2)} - x_1 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{IV.40})$$

On remarque que le problème d'optimisation obtenu est fortement non linéaire sa résolution analytique est très difficile don on propose de le faire numériquement. Néanmoins avant de procéder à la résolution, on propose de simplifier le problème en faisant un changement de variables.

IV.5.5. Simplification du problème

Pour simplifier le problème d'optimisation initial, on propose de faire le changement de variables suivant :

$$\sqrt{x_1} = y_1 \quad (\text{IV.41})$$

$$\sqrt{2\sqrt{x_1} + x_2} = y_2 \quad (\text{IV. 42})$$

Et le problème prend la forme :

$$\min_{y_1, y_2} J = \frac{1}{2} [y_1 y_2 + 2y_1 + y_2] \quad (\text{IV. 43})$$

Sujet à :

$$\begin{cases} h_1(y) = -y_1 y_2 \leq 0 \\ h_2(y) = -y_1 y_2^2 + y_1^2 \leq 0 \end{cases}$$

Ce problème d'optimisation a été résolu avec MATLAB en utilisant la fonction **fmincon** et les résultats obtenus sont :

$$y_1 = -5.5287e - 008 \quad (\text{IV. 44})$$

$$y_2 = -3.1189 \quad (\text{IV. 44})$$

A partir de (IV.41) et (IV.42), on déduit

$$x_1 = y_1^2 = (-5.5287e - 008)^2 \quad (\text{IV. 45})$$

$$x_2 = y_2^2 = (-3.1189)^2 \quad (\text{IV. 46})$$

$$\eta = x_1 = 1.5914e - 031 \quad (\text{IV. 47})$$

$$\mu = x_2 = 9.7274 \quad (\text{IV. 48})$$

En résumé, les matrices de pondération sont :

$$M = \begin{bmatrix} 1.5914e - 031 & 0 \\ 0 & 9.7274 \end{bmatrix} \quad (\text{IV. 49})$$

$$N = 1 \quad (\text{IV. 50})$$

$$K = \begin{bmatrix} 1.2441e - 15 & 3.9892e - 16 \\ 3.9892e - 16 & 3.1188 \end{bmatrix} \quad (\text{IV. 51})$$

Chapitre IV Optimisation du Choix des Matrices de Pondération d'une Commande LQ

À partir de ces résultats, la valeur du critère est :

$$J = \frac{1}{2} x_0^T K x_0 \quad (\text{IV.52})$$

$$J = \frac{1}{2} [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1.2441e - 15 & 3.9892e - 16 \\ 3.9892e - 16 & 3.1188 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.53})$$

$$J = +1.5594 \quad (\text{IV.54})$$

IV.6. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons modélisé le problème du choix des matrices de pondération d'une commande linéaire quadratique sous forme d'un problème d'optimisation.

On a montré que le problème du choix des matrices de pondération peut se ramener à un problème d'optimisation avec contraintes inégalités. La résolution analytique de ce problème est difficile vu sa nature non linéaire. On a proposé de simplifier le problème en faisant un changement de variables. Cette démarche permet de réduire la difficulté du problème d'optimisation et simplifie sa résolution par des algorithmes numériques.

L'approche proposée pour déterminer ces matrices a été illustrée par un exemple d'application.

A decorative scroll graphic with a black border and a white interior. The scroll is unrolled in the center, with the text 'Conclusion Générale' written on it. The scroll has a slight shadow and a 3D effect.

Conclusion Générale

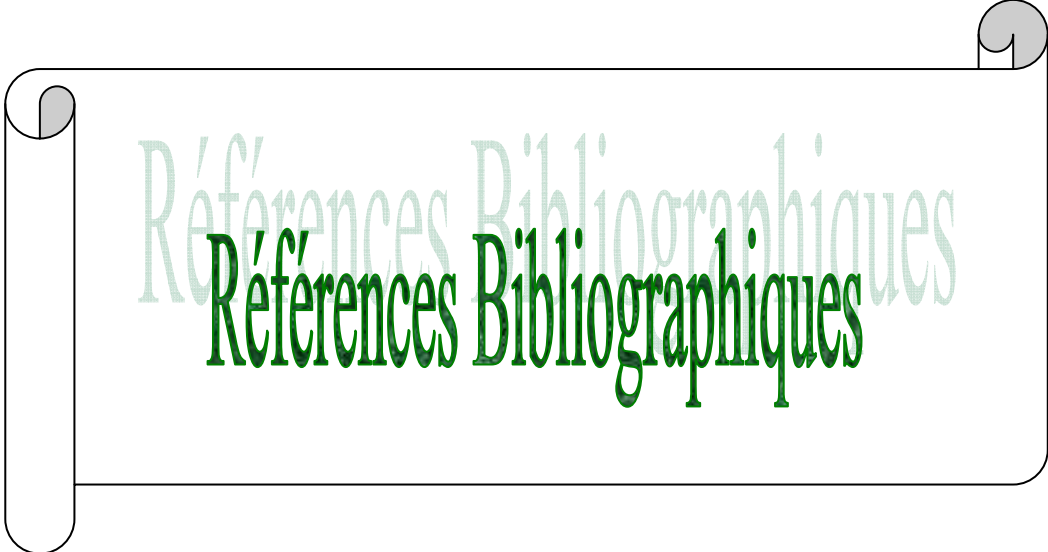

Le travail réalisé dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la commande optimale des systèmes linéaires. On s'est intéressé particulièrement à la commande linéaire quadratique dont l'objectif est d'optimiser le choix des matrices de pondération du critère pour améliorer les performances en boucle fermée.

Ainsi, après avoir présenté des généralités et les résultats importants sur la commande linéaire quadratique, nous avons présenté un aperçu général sur les techniques d'optimisation statique. Puis, on a axé l'étude sur l'intérêt du choix des matrices du critère quadratique. Des exemples ont été présentés pour montrer l'influence de ces matrices sur la valeur finale du critère, par conséquent sur les performances. A la fin, nous avons proposé de formuler le problème du choix des matrices de pondération sous forme d'un problème d'optimisation statique. L'approche proposée a été illustrée par exemple d'application dont la solution du problème d'optimisation a été effectuée numériquement.

En effet, il a été démontré que la valeur finale du critère quadratique, dans le cas de conditions initiales nulles, peut être exprimée en fonction des éléments de la solution de l'équation de Riccati. Comme cette solution est en fonction des éléments de matrice de pondération, l'idée consiste à minimiser ce critère par rapport à ces éléments tout en imposant la positivité de la solution. Ceci conduit à un problème d'optimisation avec des contraintes de type inégalité. Ce problème d'optimisation fortement non linéaire peut être résolu numériquement en utilisant des méthodes d'optimisation adéquates.

L'approche proposée a été illustrée par un exemple d'application. Ainsi, on peut conclure que le choix des matrices de pondération peut être simplifié en le formulant sous forme d'un problème d'optimisation pour lequel il faut chercher la solution globale.

L'approche proposée peut être améliorée en considérant d'autres contraintes de performances (temps de réponse et dépassement maximal) ou de robustesse.



Références Bibliographiques
Références Bibliographiques

Références Bibliographiques

- [1] JP. BABARY. *Commande optimale des systèmes continus déterministe*. Editions MASSON, Paris, 1985
- [2] G. IDIRI. *Commande prédictive des systèmes non linéaires dynamiques*. Mémoire de Magister, UMMTO, 2011.
- [3] F. BAKIRI, K. TITOUCHE et L. YAHMI. *Identification des systèmes dynamiques par optimisation globale*. Mémoire de magister, UMMTO, 2010.
- [4] Cour de M^r. MAIDI, *Commande optimale*, Master II académique, spécialité commande des systèmes, UMMTO, 2014/2015.
- [5] M. BIERLAIRE. *Introduction à l'optimisation différentiable*. Presses Polytechnique et Universitaire Romandes, Lausanne, 2006.
- [6] H. OMESSAD. *Contribution au développement de méthodes d'optimisation stochastiques. Application à la conception des dispositifs électrotechniques*. Thèse docteur, UST de Lille, 2003.
- [7] Yves cherruault et Gaspar Mora. *Optimisation globale : théorie des courbes α dense*. Economica, 2005.
- [8] N.NMALLEK et S. LABRAOUI. *Commande Linéaire Quadratique d'un Système Parabolique*. Projet de fin d'étude d'ingénieur d'état en Automatique, UMMTO, 2004.