

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

Mémoire de Fin d'Etudes de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Génie Electrique

Spécialité : Machines électriques

Présenté par
Massinissa TOUAT
Saliha ABBA

Thème

Stabilisation d'un pendule inversé par des contrôleurs utilisant la structure à deux degrés de liberté

Mémoire soutenu publiquement le 20 / 09 / 2016 devant le jury composé de :

M^r Salah HADDAD
Professeur, UMMTO, Président

M^r Rachid MANSOURI
Professeur, UMMTO, Encadreur

M^{me} Malika IMADOUCHE
Maitre assistant (A), UMMTO, Examineur

M^r Madjid SI BRAHIM
Maitre assistant (B), UMMTO, Examineur

*Tout d'abord, on remercie **Dieu** le tout puissant de nous avoir donné courage, patience et force durant toutes ces années d'étude.*

Nous remercions vivement Monsieur MANSOURI Rachid, Professeur à l'UMMTO d'avoir accepté de diriger ce travail et pour l'intérêt qu'il nous a porté, mais surtout pour la confiance qu'il nous a accordée, pour ses conseils, son positivisme et son aide précieuse.

Nous tenons à remercier tous les membres de jury pour le temps qu'ils ont consacré à l'évaluation de cette thèse :

- Monsieur HADDAD Salah, professeur à l'UMMTO

- Madame IMADOUCHE Malika, maître assistant classe (A) à l'UMMTO

-Monsieur SI BRAHIM Madjid, maître assistant classe (B) à l'UMMTO

Nous sommes également reconnaissants envers ceux qui ont contribué de loin ou de près dans la réussite de ce travail.

Un grand merci à tous les enseignants qui nous ont enseigné l'ELECTROTECHNIQUE, ainsi aux responsables de la FGEI qui veillent sur le bien être des étudiants et sur le bon déroulement de la pédagogie.

DEDICACES

Nous dédions ce modeste
travail à nos familles à
commencer par nos parents,
nos frères et sœurs nos amis(e)
et à tous qui nous sont chères.

Que dieu les bénisse

Amen

Sommaire

<i>Introduction générale</i>	01
------------------------------------	----

Chapitre I : Description et modélisation du pendule inversé

I-1 Introduction	03
I-2 Description et dispositif de contrôle et commande du système	05
I-3 Modélisation du système « chariot-pendule »	06
I-3-1 Calcule de l'énergie cinétique du système	07
I-3-2 Calcule de l'énergie potentielle du système.....	08
I-4 Modélisation du moteur à courant continu	10
I-4-1 Simulation du moteur à courant continu	12
I-5 Modélisation du système globale « moteur-chariot-pendule ».....	14
I-6 Modèle sous Matlab Simulink.....	16
I.7 Conclusion	23

Chapitre II : Redressement et stabilisation du pendule inversé

II-1 Introduction.....	24
II-2 Rappels	24
II-3 Principe de redressement d'un pendule inversé.....	25
II-4 Linéarisation du modèle autour des points d'équilibre.....	27
II-4-1 Linéarisation au tour du point d'équilibre instable ($\theta=0$)	27
II-4-2 Position d'équilibre stable ($\theta=\pi$).....	29
II-5 Commande par Modèle Interne	31
II-5-1 Structure IMC.....	31
II-5-2 Relation entre le contrôleur par modèle interne et le contrôleur standard.....	33
II-5-3 Synthèse de C(p) en utilisant le principe de la commande par modèle interne pour un système stable.....	35
II-5-4 Synthèse d'un contrôleur IMC pour un système instable.....	36
II-6 Commande à deux degrés de libertés.....	37
II-6-1 Commande de la position du chariot.....	38

II-6-1-1	Calcul du contrôleur stabilisant	39
II-6-1-2	Calcul du régulateur de suivi de consigne	42
II-6-2	Commande de stabilisation du pendule.....	45
II-7	Conclusion	49

Chapitre III : Implémentation et résultat expérimentaux

III-1	Introduction	50
III-2	Dispositif expérimentale	50
III-3	Dispositif de commande de puissance.....	51
III-4	Carte d'acquisition.....	52
III-5	Environnement de développement.....	53
III-6	Essais et résultats expérimentaux.....	55
III-7	Conclusion.....	59

	<i>Conclusion générale</i>	60
--	---	----

	<i>Annexe</i>	61
--	----------------------------	----

	<i>Références bibliographiques</i>	63
--	---	----

$\theta(t)$:	Angle de rotation du pendule,
$\ddot{\theta}$	Accélération angulaire du pendule,
\ddot{x} :	Accélération du chariot,
K_p :	Coefficient de la proportionnalité,
K_d :	Coefficient de la dérivée,
K_i :	Coefficient d'intégration,
T :	Constante de temps,
IMC :	Commande par modèle interne,
$C_r(t)$:	Couple résistant,
$C_m(t)$:	Couple électromagnétique du moteur,
f_m :	Coefficient de frottement visqueux,
K_b :	Constante électrique du moteur,
C :	Contrôleur,
K_m :	Constante mécanique,
d :	Coefficient de frottement de rotation du pendule,
b :	Coefficient de frottement des roues du chariot,
l :	Demi-longueur du pendule,
E_c :	Énergie cinétique du système,
E_p :	Énergie potentielle du système,
E_{cM} :	Énergie cinétique du chariot,
E_{cm} :	Énergie cinétique du pendule,
G_{bf} :	Fonction de transfert en boucle fermée,
H :	Filtre,
$e(t)$:	Force contre électro-motrice,
G :	Fonction de transfert réelle du système à commander,
G_0 :	Gain statique,
y_m :	Grandeur disponible à la sortie de l'organe de mesure,
L_a :	Inductance de l'induit,
g :	Intensité de la pesanteur,
I_a :	Intensité du courant,
L :	Lagrangien du système,
y_{ref} :	L'entrée de référence,

u:	L'entrée de commande,
d:	L'entrée de perturbation,
m:	Masse du pendule,
M:	Masse du chariot,
J:	Moment d'inertie du pendule,
J_m:	Moment d'inertie du moteur,
G_m :	Modèle de la fonction de transfert,
A:	Matrice d'état du système,
B:	Matrice de commande,
C:	Matrice de sortie,
r:	Nombre entier positif,
θ:	Position du pendule,
x:	Position du chariot,
r_c:	Position de centre de gravité du pendule,
τ_c:	Paramètre de synthèse,
α:	Paramètre,
R_a:	Résistance de l'induit,
r:	Rayon de la poulie,
C_s:	Régulateur stabilisant,
C_x :	Régulateur pour la position longitudinale du chariot,
C_θ :	Régulateur pour la position angulaire du pendule,
y:	Sortie du système à commander,
w:	Signal de rétroaction,
V_c:	Tension d'alimentation de l'induit du moteur,
$\dot{\theta}$:	Vitesse angulaire du pendule,
\dot{x}:	Vitesse du chariot,
v_c:	Vitesse de centre de gravité du pendule,
\vec{i}, \vec{j}:	Vecteurs unitaires du repère \mathbf{x}, \mathbf{y} ,
Ω_m:	Vitesse angulaire de l'arbre de moteur,
z:	Vecteur d'état,
p:	Variable de LAPLACE,

Introduction générale

La description du pendule inversé muni de son actionneur et ses capteurs ainsi que les divers phénomènes physiques présents lors du fonctionnement, montrent la forte complexité de son modèle à cause des nombreuses non linéarités ainsi que la difficulté à modéliser parfaitement la dynamique du système « pendule inverse -capteurs- actionneur ». Le contrôle du pendule inversé pour le redressement et la stabilisation devient ardue, car la connaissance du système se révèle imprécise et imparfaite [1]. Le problème de la commande du pendule inversé est fondamentalement le même que celui de la commande des systèmes tels que le lancement des fusées, la propulsion des missiles et la stabilisation des satellites. Mais le pendule inversé a toujours été utilisé pour tester les nouvelles méthodes de commande, car il possède plusieurs caractéristiques attrayantes: c'est un système non linéaire, couplé, intrinsèquement instable, sous actionné et il possède plusieurs applications pratiques [2].

La commande d'un pendule inversé se fait généralement en deux étapes. Dans la première étape, il s'agit de redresser le pendule depuis sa position basse vers sa position haute en utilisant des outils de la commande des systèmes non linéaires. La deuxième étape est de le maintenir dans sa position verticale instable en utilisant des lois de commande linéaires [1]. C'est dans le cadre de cette deuxième phase que s'inscrit ce projet de fin d'études, l'objectif étant de synthétiser des régulateurs par la commande à deux degrés de liberté et la commande par modèle interne, permettant d'un côté de maintenir le pendule stable dans la position haute et d'un autre côté de déplacer le chariot dans un endroit désiré sur le rail.

Nous devons, pour ce faire, utiliser deux régulateurs qui calculent des lois de commande qui peuvent être contradictoires. L'un permet de stabiliser le système qui est instable, et l'autre permet de faire suivre au chariot la consigne désirée. Les deux lois de commande délivrées par ces deux régulateurs doivent néanmoins être combinées pour n'en faire qu'une seule commande puisque le système pendule-chariot ne possède qu'une seule entrée de commande.

Le présent travail est constitué de trois chapitres :

Chapitre I

La première partie de ce chapitre est consacrée à la description du système pendule inversé. Par la suite, nous élaborons le modèle mathématique en utilisant le formalisme d'Euler-Lagrange. Sa modélisation sous l'environnement Matlab, en utilisant des outils non-

linéaires est aussi abordée. Les modèles ainsi obtenus sont utilisés pour permettre la simulation du système.

Chapitre II

Dans ce chapitre, après un rappel sur les systèmes linéaires et non linéaires, la méthode de commande de redressement du pendule inversé sera présentée, suivie d'une linéarisation autour des deux points d'équilibre possibles. Nous présenterons ensuite la méthode de synthèse des régulateurs en utilisant le principe de la commande par modèle interne. Les modèles linéaires permettant de contrôler la position du chariot et l'angle du pendule étant instables, nous utiliserons une autre structure de commande des systèmes instables : la commande à deux degrés de liberté.

Chapitre III

La première partie de ce chapitre est consacrée à la description précise des dispositifs de contrôle et commande du banc d'essai expérimental et de son interfaçage avec le PC. Ensuite, nous présenterons les résultats expérimentaux obtenus sur le pendule inversé disponible au laboratoire (L2CSP) à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

I-1 Introduction

Nous avons déjà presque tous un jour essayé l'expérience de stabiliser à la verticale un bâton sur notre index. Afin de maintenir ce bâton en équilibre, nous devons déplacer notre index de façon à contrecarrer en permanence son basculement. C'est exactement le même défi que propose le système du pendule inversé. Alors que cet exercice semble assez simple et instinctif pour l'homme, il sera nécessaire de définir des stratégies précises pour assurer le maintien automatisé du pendule inversé. Bien évidemment, les performances obtenues grâce à un système automatisé sont de loin supérieures à celles qui seraient obtenues par l'homme [4]. Depuis plus de 50 ans, le pendule inversé est considéré comme un outil didactique puissant utilisé dans le domaine du contrôle des systèmes. Nous pouvons d'ailleurs retrouver plusieurs recherches antérieures menées dans de nombreux services universitaires d'automatique ou de mécatronique [3].

Un pendule inversé est un pendule simple, cependant la masse est située en l'air. Le pendule présente une position d'équilibre instable que l'on cherche à stabiliser en utilisant un chariot mobile. Plus simplement, une application du pendule inversé est le jeu qui consiste à faire tenir un balai (sa tête vers le haut) dans la paume de la main.

L'étude du pendule inversé a plusieurs intérêts :

- L'homme est un pendule double inversé dont les deux axes de rotation principaux sont les chevilles et les hanches. Quand nous sommes en position debout, nos articulations travaillent sans arrêt pour nous y maintenir.
- Dans le même ordre d'idée, la robotique utilise ce genre de concept. On voit apparaître de moyens de locomotion dotés de deux roues montées sur un même axe sur lequel on est en position debout. On accélère en se penchant en avant et on ralentit en se penchant en arrière, le système est le même que le pendule inversé. [3]
- Dans le domaine de l'aérospatiale aussi, l'étude des pendules inversés a une grande importance. Par exemple, pour commander et stabiliser l'attitude du satellite, le lancement des fuséesetc [3].

Dans la première partie de ce chapitre nous allons d'abord aborder la description générale du pendule inversé et son intérêt dans le domaine de l'automatique. Par la suite, nous

développerons un modèle dynamique qui sera présenté sous forme d'équations différentielles déduites à partir du formalisme d'Euler-Lagrange qui constitue une approche systématique simple à mettre en œuvre. Ensuite, nous présenterons ce système dans deux circonstances; premièrement la force comme signal d'entrée, deuxièmement la tension comme signal d'entrée, lorsque la force est générée par un moteur électrique. Une implémentation de ces modèles sous *MATLAB/SIMULINK* sera également présentée ainsi que les différents résultats de simulation numérique de leurs comportements en boucle ouverte [1].

I-2 Description et dispositif de contrôle et commande du système

Ce système est un système multi variable, couplé, non linéaire, instable et sous actionné. Il existe beaucoup d'effets parasites comme le frottement, les modes élastiques de la tige et de l'axe, les effets contrecoup des vitesses et la ceinture, ainsi que la saturation d'entrée.

Le but de la commande du pendule inversé est de maintenir en équilibre vertical une tige en aluminium à l'extrémité de laquelle est montée une masse. Cette tige est fixée par une articulation pivotante sur un chariot qui peut se déplacer en glissant le long d'un rail de guidage horizontal [2].

Le mouvement de rotation d'un moteur électrique est transformé en mouvement de translation du chariot par l'intermédiaire d'une poulie et d'une courroie crantée. Le déplacement du chariot dans un sens ou dans l'autre assure par réaction l'équilibre vertical du bras du pendule. Le pendule est dit inversé car la masse du balancier est au dessus du chariot. La figure (I.1) montre les éléments mécaniques principaux du dispositif [2].

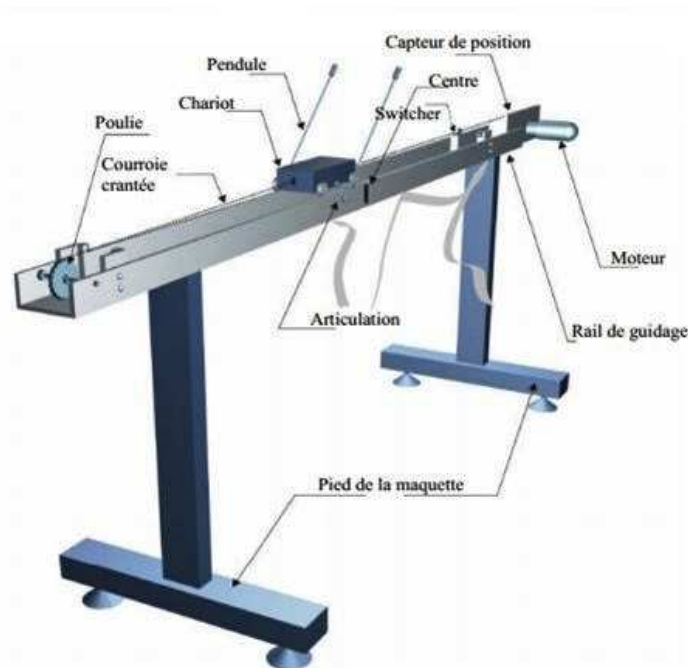


Fig. I-1 synoptique de banc d'essais du pendule inversé

Le principe de fonctionnement est très simple en théorie : quand le pendule penche vers la droite, le chariot doit le rattraper en effectuant un mouvement vers la droite et inversement. La difficulté c'est de régler l'intensité et la forme de la réaction du chariot en fonction de l'angle

que le pendule fait avec la verticale. Pour contrôler le mouvement du chariot un ensemble de capteurs est installé sur le banc d'essai.

I-3 Modélisation du système (chariot-pendule)

L'ensemble du chariot-pendule possède deux degrés de liberté dont les coordonnées généralisées sont respectivement : x pour le déplacement horizontal du chariot et θ pour la rotation du pendule [2].

La direction positive de x est le sens à droite en mètre et celui de l'angle est le sens des aiguilles d'une montre en radian (figure I.2).

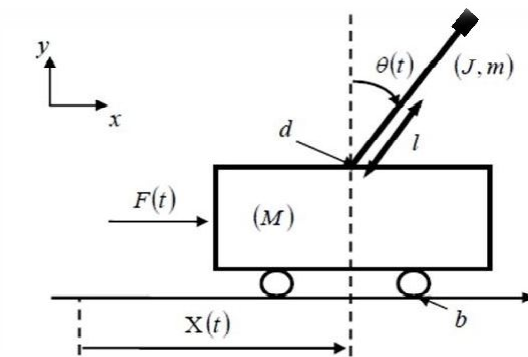


Fig. I-2 Schéma de l'ensemble chariot et pendule inversé

Les paramètres mécaniques du système chariot-pendule sont définis avec leur notion dans le tableau [A-1], voire l'Annexe.

Les équations du mouvement du pendule sont déterminées en appliquant le formalisme de Lagrange. Cette approche nécessite le calcul du Lagrangien en fonction des énergies cinétique et potentielle des différents composants du système en fonction des coordonnées généralisées, en se basant sur le principe de la conservation de l'énergie mécanique.

L'équation générale d'Euler-Lagrange est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_j} + \frac{\partial D_f}{\partial \dot{\xi}_j} = F_j \quad (\text{I.1})$$

ξ désigne les degrés de liberté. Dans le cas du pendule, ces deux degrés de liberté sont la position du chariot $x(t)$ et l'angle de rotation du pendule $\theta(t)$, D_f : désigne l'énergie dissipée par frottement, F : la force généralisée, L : représente le Lagrangien, il est donné par l'équation (1.2).

Le Lagrangien est défini comme étant la différence entre l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p du système, l'avantage de ce formalisme réside dans l'élimination des efforts d'interaction, Il s'exprime par :

$$L = E_c - E_p \quad (\text{I.2})$$

I-3-1 Calcul de l'énergie cinétique du système

Le système en mouvement comporte le chariot qui se déplace linéairement sur les rails et le pendule qui se balance sur son axe de rotation. L'énergie cinétique du chariot en mouvement est donnée par :

$$E_{cM} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (\text{I.3})$$

et l'énergie cinétique du pendule est exprimée par :

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.4})$$

La position du centre de gravité du pendule, notée r_c à partir de ces coordonnées est donnée par :

$$r_c = (x + l \sin \theta) \vec{i} + l \cos \theta \vec{j} \quad (\text{I.5})$$

\vec{i}, \vec{j} : étant les vecteurs unitaires du repère plan dans lequel se déplace le pendule.

La vitesse du centre de gravité du pendule est :

$$v_c = \frac{dr_c}{dt} = (\dot{x} + l \cos \theta \dot{\theta}) \vec{i} - l \sin \theta \dot{\theta} \vec{j} \quad (\text{I.6})$$

En substituant l'équation (1.6) dans l'équation (1.4), l'expression de l'énergie cinétique du pendule devient :

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x}l \cos \theta \dot{\theta} + l^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.7})$$

Comme: $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, le terme $l^2 \dot{\theta}^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = l^2 \dot{\theta}^2$ et l'équation (I.7) devient

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x}l \cos \theta \dot{\theta} + l^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.8})$$

L'énergie cinétique totale de l'ensemble chariot et pendule est exprimée par :

$$E_c = E_{cm} + E_{cM}$$

$$E_c = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x}l \cos \theta \dot{\theta} + l^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.9})$$

I-3-2 Calcul de l'énergie potentielle du système

Le chariot étant en mouvement sur un rail horizontal, son énergie potentielle est nulle, donc seul le pendule en mouvement possède une énergie potentielle. L'énergie potentielle du centre de gravité du pendule est donnée par

$$E_p = mgl \cos \theta \quad (\text{I.10})$$

Maintenant que les expressions de l'énergie cinétique E_c de l'ensemble chariot-pendule (Équation I.9) et l'énergie potentiel du système E_p (Équation I.10) sont établies, on utilise l'équation générale d'Euler-Lagrange pour déterminer les équations de mouvement de l'ensemble chariot pendule.

En substituant les équations (I.9) et (I.10) dans l'équation (I.2) on trouve

$$L = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x}l \cos \theta \dot{\theta} + l^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta \quad (\text{I.11})$$

Pour calculer le modèle dynamique de l'ensemble « chariot-pendule » on utilise le modèle (I-1) dans laquelle l'expression du Lagrangien est donnée par l'équation (I-11)

➤ Pour le degré de liberté $\xi(t) = x(t)$

Les énergies dissipées par frottements sont nulles ($D_f = 0$) et la force généralisée F_j est la différence entre la force (F) appliquée sur le chariot et les frottements. L'équation (I.12) représente le résultat obtenu,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F - b\dot{x} \quad (\text{I.12})$$

Où F : représente la force exercée sur le chariot et $b\dot{x}$: les frottements des roues sur le rail.

La dérivée partielle du lagrangien suivant \dot{x} et t s'écrit

$$\frac{d}{dt} (M\dot{x} + m\dot{x} + ml \cos \theta \dot{\theta}) - 0 = F - b\dot{x} \quad (\text{I.13})$$

donc, la première équation de Lagrange est

$$(M + m)\ddot{x} + ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 = F - b\dot{x} \quad (\text{I.14})$$

➤ Pour le degré de liberté $\xi(t) = \theta(t)$

Les énergies dissipées par frottements sont nulles ($D_f = 0$) et la force généralisée F_j représente les frottements de l'axe de rotation du pendule. L'équation (I.15) représente le résultat obtenu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -d\dot{\theta} \quad (\text{I.15})$$

La dérivée partielle du lagrangien suivant $\dot{\theta}$ et t s'écrit

$$\frac{d}{dt} (ml\dot{x} \cos \theta + ml^2\dot{\theta} + J\dot{\theta}) - (-ml\dot{x} \sin \theta \dot{\theta} + mgl \sin \theta) = -d\dot{\theta} \quad (\text{I.16})$$

Donc la deuxième équation de Lagrange est :

$$(ml^2 + J)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta - ml\dot{x} \sin \theta \dot{\theta} + ml\dot{x} \sin \theta \dot{\theta} - mgl \sin \theta = -d\dot{\theta} \quad (\text{I.17})$$

Finalement, le modèle de connaissance de l'ensemble « chariot-pendule » est donné par le système d'équations

$$\begin{cases} h\ddot{x} + b\dot{x} + ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 = F \\ ml\ddot{x} \cos \theta + N\ddot{\theta} + d\dot{\theta} - mgl \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

Où $N = ml^2 + J$, $h = M + m$

Le système d'équations (I.18) montre la dépendance qui existe entre l'accélération du chariot \ddot{x} et l'accélération angulaire du pendule $\ddot{\theta}$. Ainsi, lorsque $F = 0$ (pas de force extérieure), si on déplace le pendule de sa position d'équilibre, il ne sera soumis qu'à sa propre inertie, il se mettrait alors à osciller et, puisque le pendule est fixé sur le chariot, ce dernier commencerai également à se mouvoir [2].

Dans ce modèle nous avons supposé que le chariot peut être déplacé par une force externe. Celle-ci est générée par un moteur électrique à travers une poulie et une courroie.

I-4 Modélisation du moteur à courant continu

Comme le moteur utilisé pour entrainer le chariot est un moteur à courant continu à aimant permanent, le flux inducteur est constant. Le schéma électrique et mécanique équivalent de l'induit est donné par la figure (1-3)

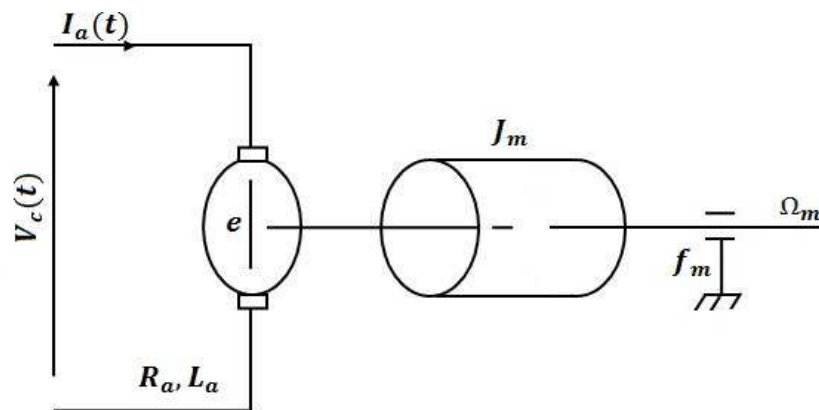


Figure I-3 Schéma électrique et mécanique de l'induit

La machine à courant continu peut être modélisée par le biais d'équations électrique, électromécanique et mécanique. Ces trois groupes d'équations permettront de mieux appréhender la machine à courant continu dans son fonctionnement réel.

➤ Du côté électrique nous pouvons dire que la machine à courant continu se définit par un circuit d'induit et un circuit inducteur (aimant permanent) ; l'induit peut être vu comme

une résistance R_a et une inductance L_a en série avec une source de tension commandée V_c proportionnelle à la vitesse Ω .

➤ Du côté mécanique, nous représentons la machine à courant continu par l'inertie de l'induit augmentée de celui de la charge entraînée.

Les paramètres de la machine sont définis avec leur notion dans le tableau (A-2), voire Annexe.

Les équations régissant le fonctionnement du moteur à courant continu à aimant permanent sont :

L'application de la loi d'Ohm donne l'équation électrique de l'induit

$$V_c(t) = R_a I_a(t) + L_a \frac{dI_a(t)}{dt} + e(t) \quad (\text{I.19})$$

La force contre électro-motrice est représenté par :

$$e(t) = K_b \Omega_m(t) \quad (\text{I.20})$$

Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire l'équation mécanique du moteur en rotation suivante :

$$J_m \frac{d\Omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t) - f_m \Omega_m(t) \quad (\text{I.21})$$

Finalement l'équation du couple s'écrit :

$$C_m(t) = k_m I_a(t) \quad (\text{I.22})$$

I-4-1 Simulation du moteur à courant continu

SIMULINK est l'extension graphique de MATLAB permettant de représenter les fonctions mathématiques et les systèmes dynamiques sous forme de schémas en blocs.

Les équations (I.19) et (I.21) permettent de construire le schéma bloc de la vitesse et du courant d'induit du moteur à courant continu sous matlab simulink. Les figures (I-4) et (I-5) présentent les schémas simulink de la vitesse et du courant d'induit suivant les grandeurs d'entrée et de sortie considérées.

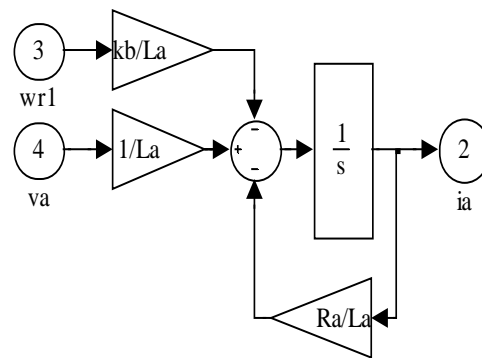
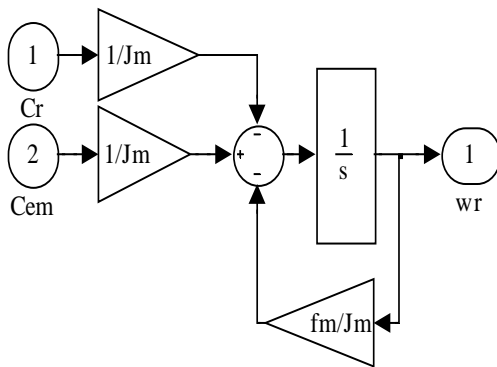


Fig. I-4 modèle simulink de la vitesse

Fig. I-5 modèle simulink du courant d'induit

En utilisant les schémas des figures (I-4) et (I-5) et sachant que $C_m = K_m I_a$, on obtient le schéma simulink de la machine à courant continu de la figure (I-6).

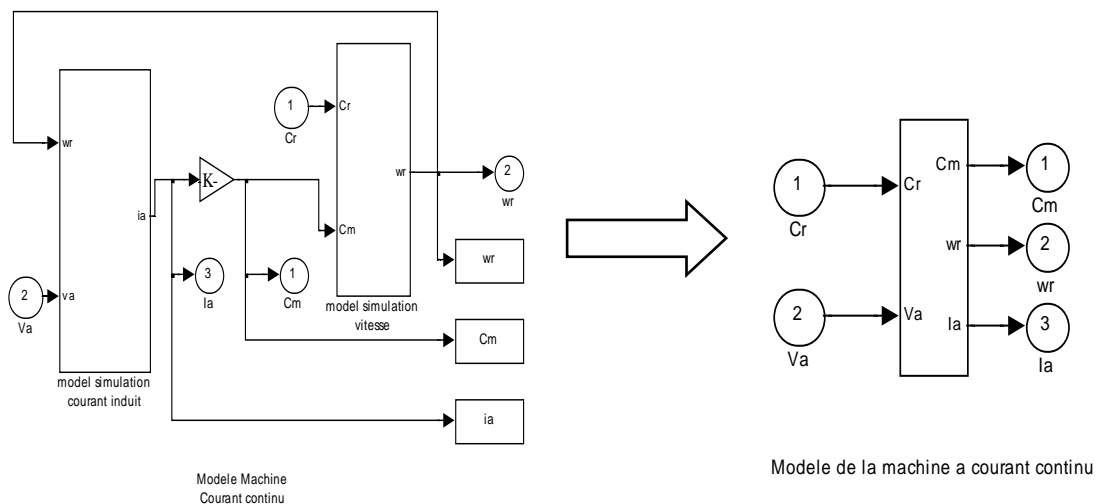


Figure I-6 modèle de la machine à courant continu

Les figures suivantes représentent les résultats obtenus après la simulation de la machine à courant continu avec un couple résistant nul.

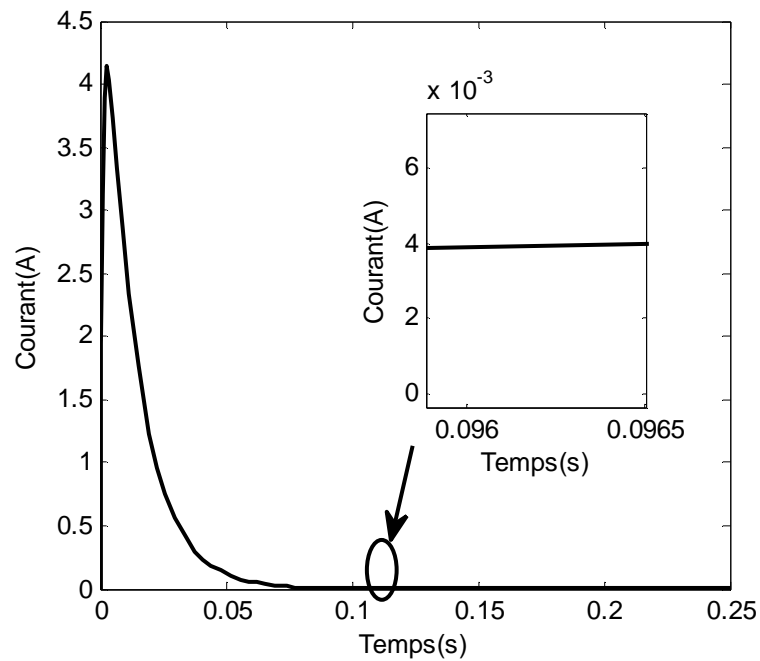


Figure I-7 Variation du courant d'induit en fonction du temps.

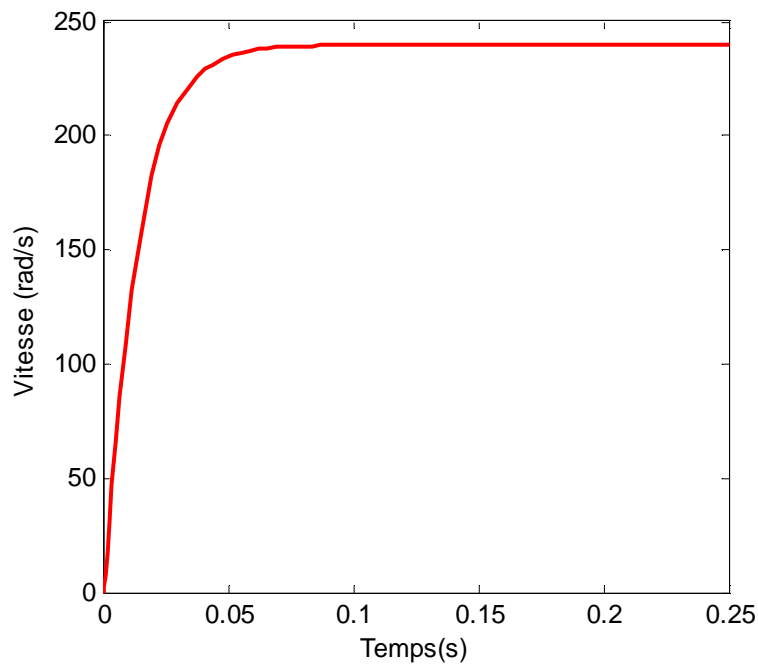


Figure I-8 Variation de la vitesse de rotation en fonction du temps

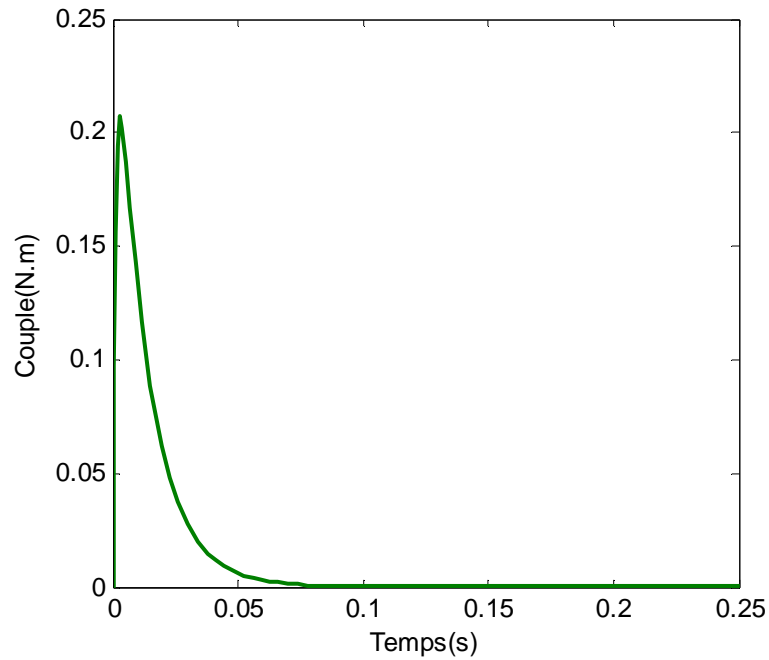


Figure I-9 Allure du couple moteur

Les figure (I-7), (I-8) et (I-9) montrent que :

Au démarrage du moteur le rotor absorbe une grande densité de courant pour faire tourner sa propre inertie, d'où l'apparition d'un pic de courant, et puis lorsque la machine atteint une certaine vitesse stable le courant diminue jusqu'à une valeur proche de zéro comme le montre la figure I-7.

Le moteur n'atteindra pas une vitesse constante directement après son démarrage, mais la vitesse passera par un régime transitoire avant de se stabiliser à une valeur constante.

I-5 Modélisation du système global (moteur-chariot-pendule)

Le modèle (I.18) décrit le régime transitoire de l'ensemble pendule-chariot lorsque l'entrée est une force extérieure F . Dans le banc d'essai que nous utilisons, la force F est développée par un moteur à courant continu. Le schéma de la figure (I-10) illustre la relation existante entre le moteur commandé par la tension V_c et la force F permettant l'entraînement du chariot donc le balancement du pendule [2].

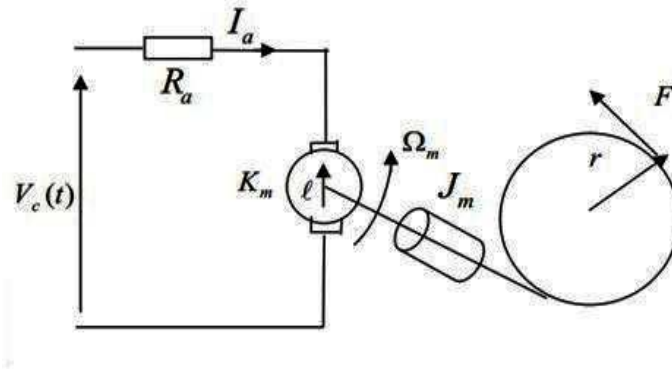


Figure I-10 Relation entre la force mécanique F et la tension V_c

Pour déterminer la relation entre la force mécanique F et la tension V_c et afin de ne pas rendre plus complexe le modèle global de l'ensemble pendule-chariot-moteur, on néglige la dynamique du moteur, par conséquent, l'équation électrique (I.19) devient, en tenant compte de l'équation (I.20) :

$$V_c = R_a I_a + K_b \Omega_m \quad (\text{I.23})$$

et comme la position angulaire d'un point quelconque située sur le périmètre de la poulie (θ_r) est transformée en un point linéaire x par la relation :

$$x = r \theta_r \quad (\text{I.24})$$

r étant, le rayon de la poulie ($r=0.027\text{m}$).

On obtient :

$$\frac{d}{dt} x(t) = r \frac{d}{dt} \theta(t) = r \Omega_m(t) \quad (\text{I.25})$$

La vitesse angulaire du moteur Ω_m s'exprime donc par rapport à la vitesse du chariot \dot{x} par la relation:

$$\Omega_m = \dot{x}/r \quad (\text{I.26})$$

En substituant l'équation (1.26) dans l'équation (1.23), l'expression du courant d'induit I_a s'écrit:

$$I_a(t) = \frac{V_c}{R_a} - \frac{K_b}{r R_a} \dot{x} \quad (\text{I.27})$$

Le couple produit à l'arbre du moteur (équation (I.22)) crée une force qui est donnée par

$$F = \frac{C_m}{r} = \frac{K_m I_a}{r} \quad (\text{I.28})$$

En remplaçant l'équation (1.27) dans l'équation (I.28), on obtient finalement :

$$F = \frac{K_m}{rR_a} V_c - \frac{K_m K_b}{r^2 R_a} \dot{x} \quad (\text{I.29})$$

I-6 Modèle sous Matlab Simulink

Afin de développer le modèle simulink de l'ensemble « moteur-chariot-pendule », nous utilisons les équations (I.18). Néanmoins, on doit exprimer les dérivées secondes de θ et x en fonction des autres grandeurs.

Après quelques manipulations mathématiques sur le système d'équations (I.18), on obtient les deux équations (I.30) et (I.31), où la grandeur de commande est la force. On a utilisé la première équation de (I.18) pour obtenir l'expression de \ddot{x} puis on la remplacé dans la deuxième équation, cette manipulation nous permet d'avoir la formule (I.30).

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = & \frac{mgl \sin\theta}{N - \frac{m^2 l^2}{h} \cos^2 \theta} - \frac{d}{N - \frac{m^2 l^2}{h} \cos^2 \theta} \dot{\theta} - \frac{ml \cos\theta}{h(N - \frac{m^2 l^2}{h} \cos^2 \theta)} F \\ & - \frac{m^2 l^2 \sin\theta \cos\theta}{h(N - \frac{m^2 l^2}{h} \cos^2 \theta)} \dot{\theta}^2 + \frac{bml \cos\theta}{h(N - \frac{m^2 l^2}{h} \cos^2 \theta)} \dot{x} \end{aligned} \quad (\text{I.30})$$

Pour obtenir la formule (I.31) il suffit juste de remplacer l'équation (I.30) dans la première équation du système (I.18) et on obtient :

$$\ddot{x} = \frac{1}{h} F - \frac{b}{h} \dot{x} - \frac{m^2 g l^2 \sin\theta \cos\theta}{h(N - \frac{m^2 l^2}{h} \cos^2 \theta)} - \frac{m l d \cos\theta}{h(N - \frac{m^2 l^2}{h} \cos^2 \theta)} \dot{\theta} - \frac{m^2 l^2 \cos^2 \theta}{h^2(N - \frac{m^2 l^2}{h} \cos^2 \theta)} F - \frac{m^3 l^3 \sin\theta \cos^2 \theta}{h^2(N - \frac{m^2 l^2}{h} \cos^2 \theta)} \dot{\theta}^2 + \frac{m^2 l^2 b \cos^2 \theta}{h^2(N - \frac{m^2 l^2}{h} \cos^2 \theta)} \dot{x} + \frac{m l}{h} \sin\theta \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.31})$$

Il suffit maintenant de réaliser les deux équations (I.30) et (I.31) sous matlab simulink. On peut utiliser pour ce faire, les blocs "matlab fonction" associés à un multiplexeur.

Dans notre cas, au lieu d'utiliser des "matlab fonction" qui sont très lentes à simuler, nous avons préféré utiliser des fonctions simples de matlab simulink pour lesquelles la simulation est très rapide.

En raison de la complexité des équations à simuler, nous procédons par la simulation des éléments individuels composant les équations (I.30) et (I.31). Pour illustrer la méthode que nous avons adoptée, considérons par exemple l'élément suivant :

$$\frac{m^2 l^2 \sin\theta \cos\theta}{h \left(N - \frac{m^2 l^2}{h} \cos^2 \theta \right)} \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.32})$$

Dans une première étape on le décompose en deux éléments : son numérateur, donnée par : $(m^2 l^2 \sin\theta \cos\theta) \dot{\theta}^2$ et son dénominateur $h \left(N - \frac{m^2 l^2}{h} \cos^2 \theta \right)$

Les figures (I.11) et (I.12) présentent les schémas simulink du numérateur et le dénominateur

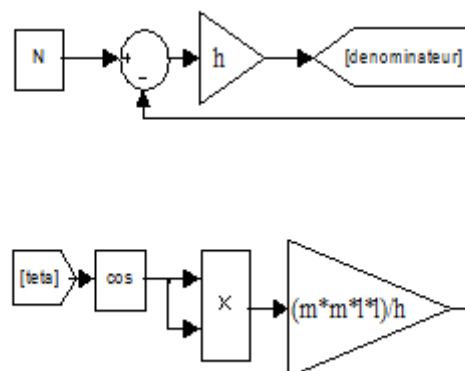


Figure I-11 Schéma simulink du dénominateur

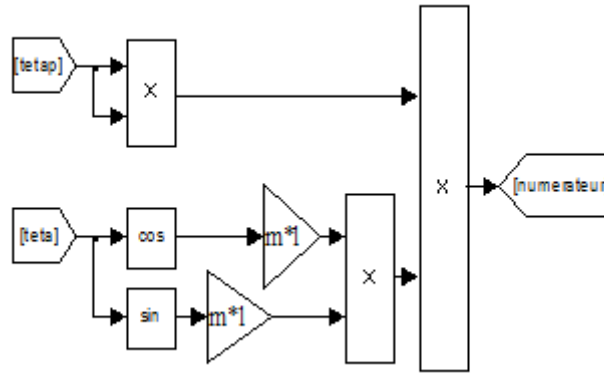


Figure I-12 Schéma simulink du numérateur

Le schéma final de l'équation mathématique (I.32) est :

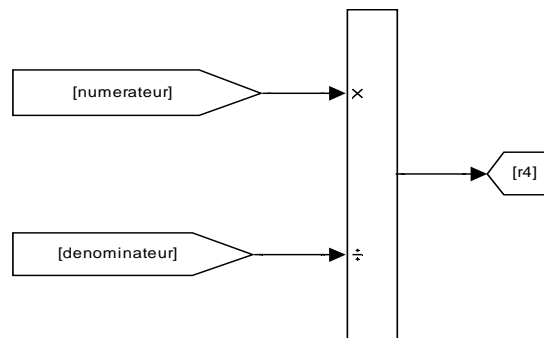


Figure I-13 Schéma simulink de l'équation (I.32)

On procède de la même manière pour réaliser les modèles de simulation de tous les termes constituant les équations (I.30) et (I.31). On obtient les schémas simulink des figures (I-14) et (I-15).

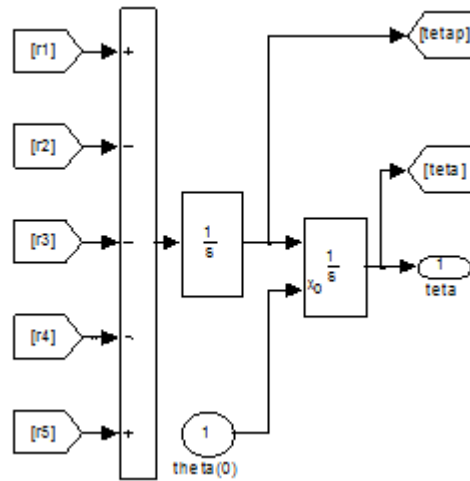


Figure I-14 Schéma simulink de l'équation (I.30)

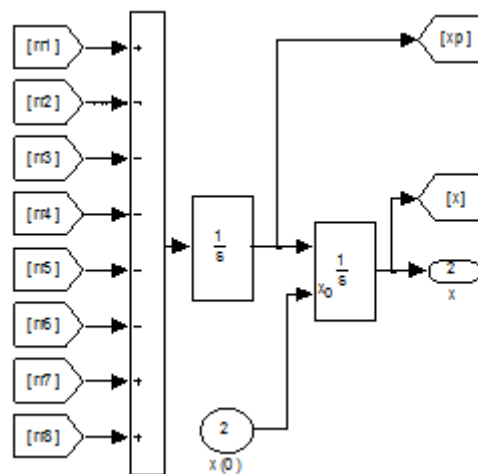


Figure I-15 Schéma simulink de l'équation (I.31)

La simulation des équations (I.30) et (I.31) et celle du moteur permettent d'obtenir le schéma simulink du modèle de l'ensemble « pendule-chariot-moteur », il est illustré par la figure (I-16).

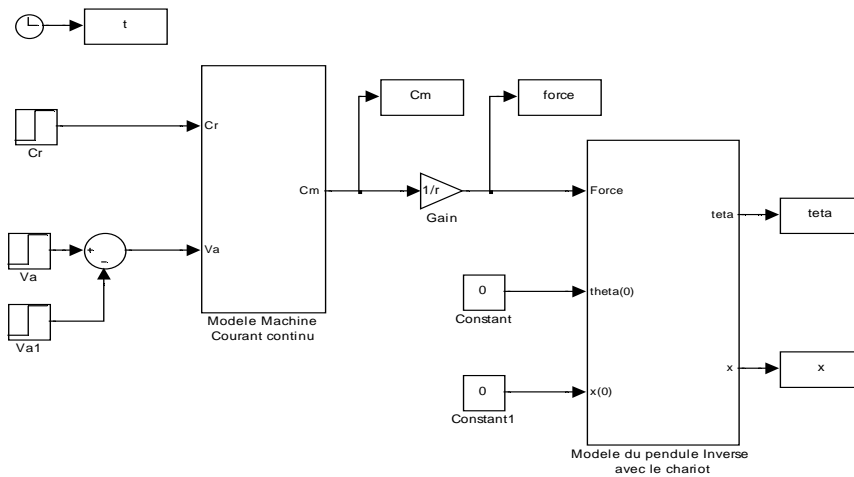


Figure I-16 Schéma de simulation du modèle de l'ensemble « pendule-chariot-moteur »

• Résultats de simulation

Les figures (I-17) et (I-18) montrent les résultats de simulation obtenus en appliquant à l'entrée une tension sous forme d'une impulsion d'amplitude 0.01v, de durée 0.1s, pour deux conditions initiales différentes : $[\theta_0, \dot{\theta}_0, x_0, \dot{x}_0] = [\pi, 0, 0, 0]$ et $[\theta_0, \dot{\theta}_0, x_0, \dot{x}_0] = [0, 0, 0, 0]$

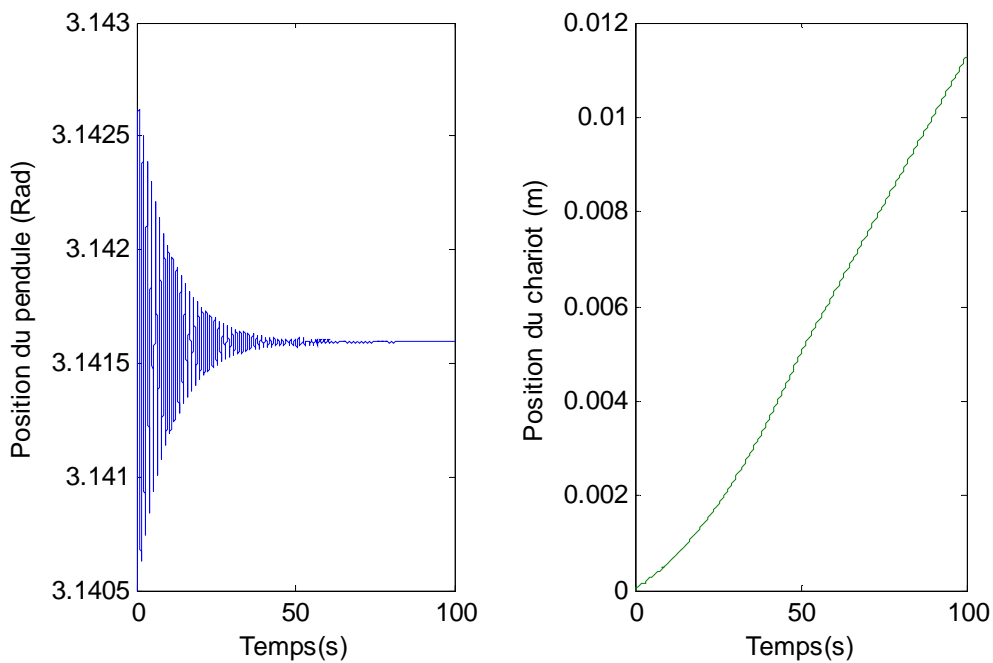


Figure I-17 Résultat de simulation du modèle non linéaire, avec les conditions initiales

$$[\theta_0, \dot{\theta}_0, x_0, \dot{x}_0] = [\pi, 0, 0, 0]$$

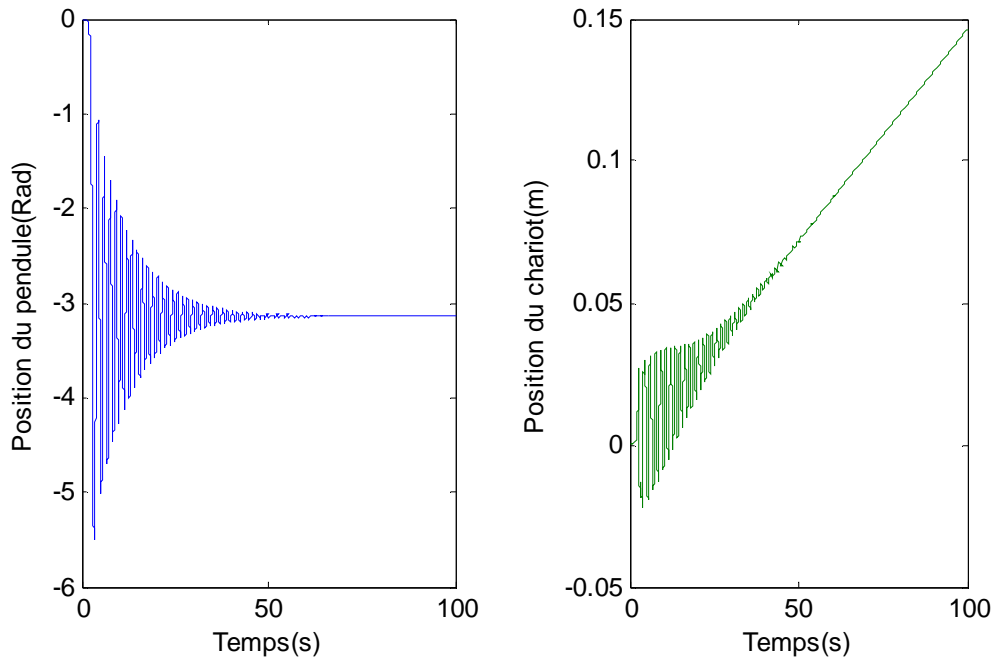


Fig. I-18 Résultat du simulation du modèle non linéaire, pour les conditions initiales

$$[\theta_0, \dot{\theta}_0, x_0, \dot{x}_0] = [0, 0, 0, 0]$$

Les résultats des figures (I-17) et (I-18) illustrent la complexité du modèle et elles montrent que $[\theta_0, \dot{\theta}_0, x_0, \dot{x}_0] = [\pi, 0, 0, 0]$ est le point d'équilibre stable. La figure (I-17) montre que lorsque le pendule est initialement dans sa position d'équilibre stable ($\theta = \pi$), lorsqu'il en est écarté grâce à la tension V_c , il y revient après le régime transitoire.

La figure (I-18) montre que lorsque le pendule est initialement en position instable haut ($\theta = 0$), il se stabilise après un régime transitoire dans sa position d'équilibre stable ($\theta = \pi$).

Ces résultats sont conformes à ce que l'on obtient en pratique. Il faut noter également une fois la barre en position ($\theta = \pi$), le chariot continue à évoluer dans les deux cas, quelque soit la position initiale du pendule, à cause de l'effet de balancement du pendule.

I.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le procédé sur lequel nous allons travailler c'est-à-dire le pendule inverse. On a utilisé pour ce faire le formalisme d'Euler-Lagrange. On a présenté ses composants, son fonctionnement et son intérêt important dans l'automatique. Puis on a développé le modèle mathématique non linéaire du système du pendule inversé en considérant le modèle dynamique du moteur.

La simulation avec une impulsion d'entrée a permis de constater la non linéarité et l'instabilité du système. Ces résultats illustrent la complexité de contrôler des systèmes sous-actionnés tel que le pendule inversé.

II-1 Introduction

Un des aspects qualitatifs les plus importants des systèmes dynamiques est leur comportement asymptotique, c'est-à-dire le comportement en régime permanent, ce concept étant directement lié à la stabilité [2]. Dans ce travail, on s'intéresse à la commande du pendule inversé qui consiste en deux phases: le redressement et la stabilisation. La phase de redressement consiste à redresser le pendule depuis sa position basse vers sa position haute en utilisant des outils de la commande des systèmes non linéaires. La méthode de commande basée sur l'énergie est utilisée dans ce cas pour balancer le pendule jusqu'à sa position supérieure instable. La deuxième phase consiste à maintenir le pendule dans sa position verticale instable, c'est la phase de stabilisation, on utilise pour ce faire des lois de commande linéaires.

On présente dans ce qui suit un aperçu général sur la commande par modèle interne. Cette méthode est proposée pour les processus stables et instables. Un avantage de la structure est que le suivi de consigne et de rejet de perturbation peuvent être conçu séparément. Dans ce travail, on s'intéresse à régler la structure IMC modifiée en mettant l'accent sur la robustesse de la structure. Certains processus instables retardés typiques montre que la structure de contrôle peut être réglée facilement et obtenir un bon compromis entre la performance dans le domaine temporel et de robustesse [8]. Des résultats de simulations sont également présentés.

II.2 Rappels

- **Définition d'un Système non linéaire**

Un système linéaire est un système dont le théorème de superposition est vérifié. Celui-ci est résumé par l'équation (II.1).

$$z = f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \quad (\text{II.1})$$

Où x et y sont des variables d'entrée, λ et μ sont des scalaires et f la fonction reliant les variables d'entrée x et y à la sortie z du système. Contrairement aux systèmes linéaires, pour les systèmes non linéaires, le théorème de superposition n'est pas vérifié [1]. En effet, soit l'exemple

$$z = f(x, y) = \sin(x) + y^2 \quad (\text{II.2})$$

$$f(\lambda x, \mu y) = \sin(\lambda x) + (\mu y)^2 \neq \lambda \sin x + \mu y^2 \quad (\text{II.3})$$

Cette exemple montre qu'à cause des termes de couplage entre les variables x et y , le théorème de superposition n'est pas applicable, il s'agit là d'un système non linéaire.

- **Définition d'un système linéaire continu**

En contrôle, un système est représenté par un bloc contenant le nom du système.

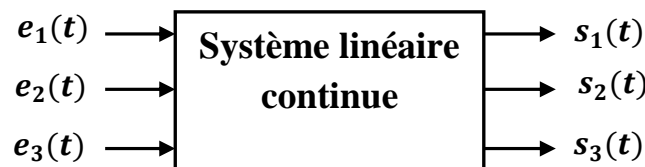


Figure. II.1 : Représentation d'un système linéaire continu

Un système est dit linéaire si la fonction qui décrit son comportement est elle-même linéaire. Cette dernière vérifie alors le principe de proportionnalité et de superposition.

Un système est continu, par opposition à un système discret, lorsque les variations des grandeurs physiques sont définies à chaque instant, elles sont caractérisées par des fonctions continues on parle aussi dans ce cas de système analogique [9].

- **Théorème de stabilité**

Un système linéaire continu à temps invariant est asymptotiquement stable si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert sont tous à partie réelle strictement négative.

II.3 Principe de redressement d'un pendule inversé

Comme on l'a écrit plus haut, la commande de redressement d'un pendule inversé consiste à balancer le pendule depuis sa position d'équilibre basse, jusqu'à ce qu'il se retourne et se met dans sa position inversée haute (d'où le nom).

La commande permettant de réaliser cela, est non linéaire et utilise souvent le théorème de l'énergie cinétique, comme c'est montré sur la figure (II.2).

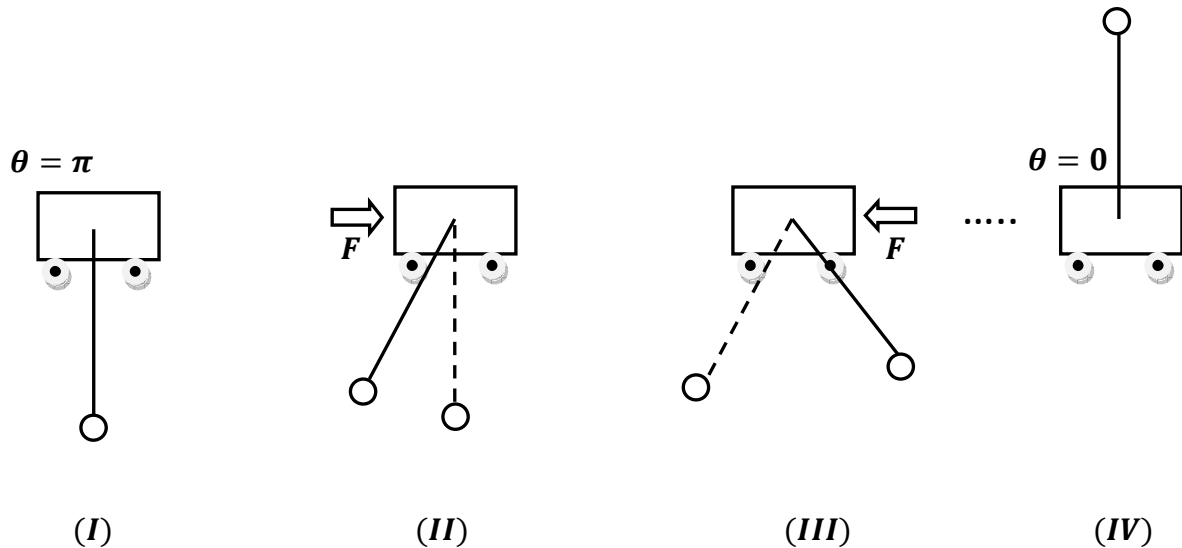


Figure. II.2 : Principe de redressement d'un pendule

Initialement le pendule est en position basse $\theta = \pi$ (I). En appliquant une force constante sur le chariot dans un sens le pendule bascule d'un certain angle (II). Quand l'angle est à son maximum, on applique la force sur le chariot mais dans l'autre sens (III). Le pendule va à nouveau basculer dans l'autre sens, avec un angle double de premier (III). Dès qu'il atteint le maximum on réinjecte la même force dans l'autre sens une nouvelle fois. On refait cela, jusqu'à ce que le pendule atteigne sa position verticale instable (IV).

Cette phase de commande du pendule ne sera pas abordée dans ce travail. On s'intéressera à la deuxième phase qui consiste à stabiliser le pendule dans sa position instable. On utilisera pour ce faire des régulateurs linéaires.

Néanmoins, le modèle du système pendule-chariot étant non linéaire nous aurons besoins de le linéariser, afin de calculer des régulateurs linéaires. C'est ce qui est présenté dans le paragraphe suivant.

II.4 Linéarisation du modèle autour des points d'équilibre

Nous avons vu dans le premier chapitre que le modèle de connaissance du système chariot-pendule est donné par le système d'équations :

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 = F \\ ml\ddot{x} \cos \theta + (ml^2 + I)\ddot{\theta} + d\dot{\theta} - mgl \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

Ce modèle est non linéaire en raison, d'un côté les fonctions trigonométriques qu'il contient, et d'un autre côté, en raison des produits de deux grandeurs comme le terme $ml \sin \theta \dot{\theta}^2$.

Pour calculer les fonctions de transfert $\frac{\theta(s)}{F(s)}$ et $\frac{x(s)}{F(s)}$ qui permettront de calculer des régulateurs linéaires, il faut que les relations entre θ et F d'un côté et x et F de l'autre côté soient linéaires. Donc, avant de procéder à l'analyse du modèle du système, on est obligé de rendre linéariser les équations différentielles (II.4). Le système chariot-pendule possède deux points d'équilibre: ($\theta = \pi$) point d'équilibre stable et ($\theta=0$) point d'équilibre instable. Pour des petites variations de θ autour du point d'équilibre θ_0 , le développement en série de Taylor du premier ordre d'une fonction non linéaire $f(\theta)$ en négligeant tous les $((\theta - \theta_0)^n, n \geq 2)$ est donné par :

$$f(\theta) \approx f(\theta_0) + (\theta - \theta_0) \left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta_0} \quad (\text{II.5})$$

II.4.1 Linéarisation autour du point d'équilibre instable ($\theta=0$)

Si on se limite aux petites variations de θ autour du point de fonctionnement $\theta_0 = 0$ correspondant à la position verticale du pendule, le développement limité du premier ordre donné par équations (II.5) des fonctions non linéaires sinus et cosinus donne :

$$\begin{cases} \cos \theta \approx \cos(0) + \theta[-\sin(0)] = 1 \\ \sin \theta \approx \sin(0) + \theta[\cos(0)] = \theta \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

En substituant ces linéarisations dans le système d'équation (II.2), on trouve le système d'équation linéaire :

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} = F \\ ml\ddot{x} + (ml^2 + I)\ddot{\theta} + d\dot{\theta} - mgl\theta = 0 \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

En appliquant la transformation de Laplace au système d'équation linéaire ainsi obtenu et en supposant que les conditions initiales $x(0)$, $\dot{x}(0)$, $\theta(0)$, $\dot{\theta}(0)$ sont nulles, on trouve :

$$\begin{cases} (M + m)p^2X(p) + bpX(p) + mlp^2\theta(p) = F(p) \\ mlp^2X(p) + (ml^2 + I)p^2\theta(p) + dp\theta(p) - mgl\theta(p) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

$X(p)$ et $\theta(p)$ sont respectivement les transformées de Laplace des grandeurs $x(t)$ et $\theta(t)$.

Finalement, on trouve les deux fonctions de transfert :

$$G_x(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{a_2p^2 + a_1p + a_0}{b_4p^4 + b_3p^3 + b_2p^2 + b_1p} \quad (\text{II.9})$$

$$G_\theta(p) = \frac{\theta(p)}{F(p)} = \frac{c_2p}{b_4p^3 + b_3p^2 + b_2p + b_1} \quad (\text{II.10})$$

Avec

$$\begin{aligned} a_2 &= ml^2 + I \\ a_1 &= d \\ a_0 &= -mgl \\ b_4 &= (M + m)(ml^2 + I) - m^2l^2 \\ b_3 &= (M + m)d + (ml^2 + I)b \\ b_2 &= -(M + m)mgl + db \\ b &= -mglb \\ c_2 &= -ml \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

En remplaçant ces paramètres par leurs valeurs numériques, on trouve :

$$G_x(p) = \frac{0.1288p^2 + 0.005p - 0.8123}{0.3319p^4 + 0.01959p^3 - 2.136p^2 - 0.04061p} \quad (\text{II.12})$$

$$G_\theta(p) = \frac{-0.0828p}{0.3319p^3 + 0.01959p^2 - 2.136p - 0.04061} \quad (\text{II.13})$$

Qui peuvent être factorisées sous la forme pôle -zéro suivante :

$$G_x(p) = \frac{0.38808 (p + 2.531) (p - 2.492)}{p(p + 2.557) (p - 2.517)(p + 0.01901)} \quad (\text{II.14})$$

$$G_\theta(p) = \frac{-0.24947p}{(p + 2.557)(p - 2.517)(p + 0.01901)} \quad (\text{II.15})$$

Nous constatons que la fonction de transfert de la position du chariot $G_x(p)$ présente un pôle instable $p = 2.517$ et un pôle à l'origine $p = 0$. Cela signifie que si on applique une force constante sur le chariot, il va se déplacer indéfiniment, c'est pour cela que les mouvements du chariot sont limités par des fins de course aux extrémités du rail.

La fonction de transfert de l'angle du pendule $G_\theta(p)$ présente également un pôle instable $p = 2.517$, et le signe négatif du numérateur représente le sens de l'angle du pendule, cela signifie que si on applique une force positive, l'angle du pendule va être négatif dans le sens contraire de la force. $G_\theta(p)$ possède aussi un zéro à l'origine, cela signifie qu'en régime permanent ($t \rightarrow \infty$) l'angle de pendule est égal à zéro, le pendule revient à sa position d'équilibre initiale, ($\theta = \pi$) lorsqu'il n'est pas soumis à une force extérieure.

II.4.2 Linéarisation autour de la position d'équilibre stable ($\theta = \pi$)

Pour ($\theta = \pi$), le développement limité du premier ordre de l'équation (II.5) est :

$$\begin{cases} \cos \theta \approx \cos(\pi) + (\pi - \theta)(-\sin \pi) = -1 \\ \sin \theta \approx \sin(\pi) + (\pi - \theta) \cos \pi = -\theta \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

La substitution de ces linéarisations dans le système d'équation (II.4), permet de trouver le système d'équation linéaire :

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - ml\ddot{\theta} = F \\ -ml\ddot{x} + (ml^2 + I)\ddot{\theta} + d\dot{\theta} + mgl\theta = 0 \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

Enfin, l'application de la transformation de Laplace au système d'équation linéaire (II.17) en supposant que toutes les conditions initiales sont nulles, se traduit par :

$$\begin{cases} (M + m)p^2X(p) + bpX(p) - mlp^2\theta(p) = F(p) \\ -mlp^2X(p) + (ml^2 + I)p^2\theta(p) + dp\theta(p) + mgl\theta(p) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

Finalement, on trouve les deux fonctions de transfert :

$$G_x(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{a_2p^2 + a_1p + e_0}{b_4p^4 + b_3p^3 + h_2p^2 + h_1p} \quad (\text{II.19})$$

$$G_\theta(p) = \frac{\theta(p)}{F(p)} = \frac{ep}{b_4p^3 + b_3p^2 + h_2p + h_1} \quad (\text{II.20})$$

Avec

$$e_0 = mgl$$

$$h_2 = (M + m)mgl + db$$

$$h_1 = mglb$$

$$e = ml$$

Les autres paramètres sont ceux donnés dans l'équation (II.11). En remplaçant ces paramètres par leurs valeurs numériques, on trouve :

$$G_x(p) = \frac{0.1288p^2 + 0.005p + 0.8123}{0.3319p^4 + 0.01959p^3 + 2.136p^2 + 0.04061p} \quad (\text{II.21})$$

$$G_\theta(p) = \frac{0.0828p}{0.3319p^3 + 0.01959p^2 + 2.136p + 0.04061} \quad (\text{II.22})$$

Qui peuvent être factorisées sous la forme pôle -zéro:

$$G_x(p) = \frac{0.38808 (p^2 + 0.03882p + 6.306)}{p(p + 0.01901) (p^2 + 0.04001p + 6.436)} \quad (\text{II.23})$$

$$G_\theta(p) = \frac{0.24947p}{(p + 0.01901)(p^2 + 0.04001p + 6.436)} \quad (\text{II.24})$$

Nous constatons que dans ce cas tous les pôles de $G_x(p)$ et $G_\theta(p)$ ont leur partie réelle négative, donc ces deux modèles sont stables. Nous constatons aussi que les pôles sont complexes caractéristique de basculement du pendule de sa position stable. De plus, $G_\theta(p)$ possède un zéro à l'origine qui montre qu'en régime permanent l'angle revient à sa position initiale ($\theta=\pi$), bien sur lorsqu'il n'est pas soumis à une force extérieure.

II.5 Commande par Modèle Interne

Le contrôle à modèle interne, ou IMC (Internal Model Control), est une structure de contrôle à rétroaction qui est une alternative aux structures classiques de rétroaction de la sortie. Son avantage principal réside dans le fait que la stabilité en boucle fermée est simplement assurée en choisissant un contrôleur IMC stable. De plus, les performances de la boucle fermée (comme le temps de montée) sont directement liées aux paramètres du contrôleur, ce qui permet un réglage très aisé [6].

II.5.1 Structure IMC

Le schéma bloc d'une boucle de régulation IMC est représenté par la figure (II.3) où, $G(p)$ représente la fonction de transfert réelle du système à commander et $G_m(p)$ représente le modèle de la fonction de transfert. $y(p)$ représente la sortie du système à commander, c'est la grandeur que l'on souhaite contrôler. $y_{ref}(p)$ représente l'entrée de référence, c'est la grandeur de référence que l'on souhaite faire suivre à la sortie $y(p)$. $u(p)$ représente l'entrée de commande, c'est la grandeur sur laquelle on peut agir pour modifier volontairement (librement) la sortie $y(p)$. $y_m(p)$ représente la grandeur disponible à la sortie du modèle, elle représente l'image de la grandeur à contrôler $y(p)$. $d(p)$ représente l'entrée de perturbation, c'est une grandeur qui modifie, de manière indésirable, la sortie du système. Le contrôleur $C_{IMC}(p)$ détermine la valeur de l'entrée (de l'actionneur) $u(p)$ et l'objectif de contrôle est donc de trouver $C_{IMC}(p)$ de manière à conserver $y(p)$ aussi proche que possible de la

consigne y_{ref} . Notez que le système de contrôle complet à implémenter est celui entouré en lignes pointillées, il englobe le contrôleur $C_{IMC}(p)$ et le modèle $G_m(p)$ [7].

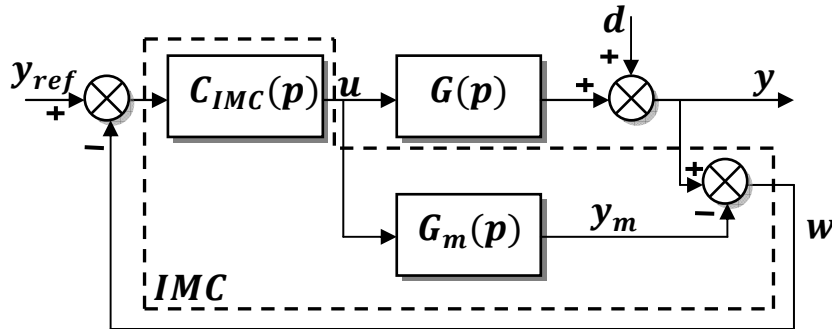


Figure II.3 : Structure de commande par modèle interne

Le signal de rétroaction est :

$$w(p) = (G(p) - G_m(p))u(p) + d \quad (\text{II.25})$$

Si le modèle est parfait ($G(p) = G_m(p)$) et qu'il n'y a pas de perturbation ($d = 0$), alors $w(p) = 0$. Ainsi, le système de contrôle fonctionne en boucle ouverte. Ceci montre que pour les systèmes stables en boucle ouverte, la rétroaction est uniquement nécessaire à cause des incertitudes ou de la perturbation. Le signal de rétroaction $w(p)$ exprime alors les incertitudes du processus [6].

La structure de commande par modèle interne permet ainsi d'associer la simplicité de la commande en boucle ouverte pour calculer la fonction de transfert du contrôleur et l'efficacité de la boucle fermée pour la régulation de la grandeur de sortie. C'est cette caractéristique qui est utilisée ici pour calculer la fonction de transfert $C(p)$ du contrôleur de la structure de commande classique en utilisant ce principe de la commande par modèle interne.

Les équations correspondantes au schéma de commande de la figure (II.3) sont :

$$\begin{aligned} w(p) &= y(p) - y_{ref}(p) \\ &= G(p)u(p) - G_m(p)u(p) \\ &= (G(p) - G_m(p))u(p) \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

Comme $u(p) = C_{IMC}(p) (y_{ref}(p) - \omega(p))$ donc

$$u(p) = C_{IMC}(p) (y_{ref}(p) - (G(p) - G_m(p))u(p)) \quad (\text{II.27})$$

$$u(p)[1 + C_{IMC}(p)(G(p) - G_m(p))] = C_{IMC}(p)y_{ref}(p) \quad (\text{II.28})$$

Par conséquent, la grandeur de commande s'exprime par

$$u(p) = \frac{C_{IMC}(p)}{1 + C_{IMC}(p)(G(p) - G_m(p))} y_{ref}(p) \quad (\text{II.29})$$

Finalement la grandeur de sortie $y(p)$ s'exprime en fonction de la grandeur de référence par la relation

$$y(p) = \frac{G(p)C_{IMC}(p)}{1 + C_{IMC}(p)(G(p) - G_m(p))} y_{ref}(p) \quad (\text{II.30})$$

Lorsque le modèle représente idéalement le système à commander ($G_m(p) = G(p)$), alors

$$y(p) = G(p)C_{IMC}(p)y_{ref}(p) \quad (\text{II.31})$$

Cette relation rappelle de la fonction de transfert entré-sortie obtenue lorsqu'on utilise la commande en boucle ouverte. C'est cette propriété qui a rendu cette commande par modèle interne célèbre et cette même relation qui est utilisée pour faire la synthèse de la fonction de transfert du contrôleur [7].

II-5-2 Relation entre le contrôleur par modèle interne et le contrôleur standard

Il s'agit ici de trouver la relation permettant de calculer la fonction de transfert $C(p)$ du contrôleur lorsqu'on utilise la structure de commande standard de la figure (II-4-a) et celle du contrôleur $C_{IMC}(p)$ lorsqu'on utilise la structure de commande par modèle interne de la figure (II-4-b).

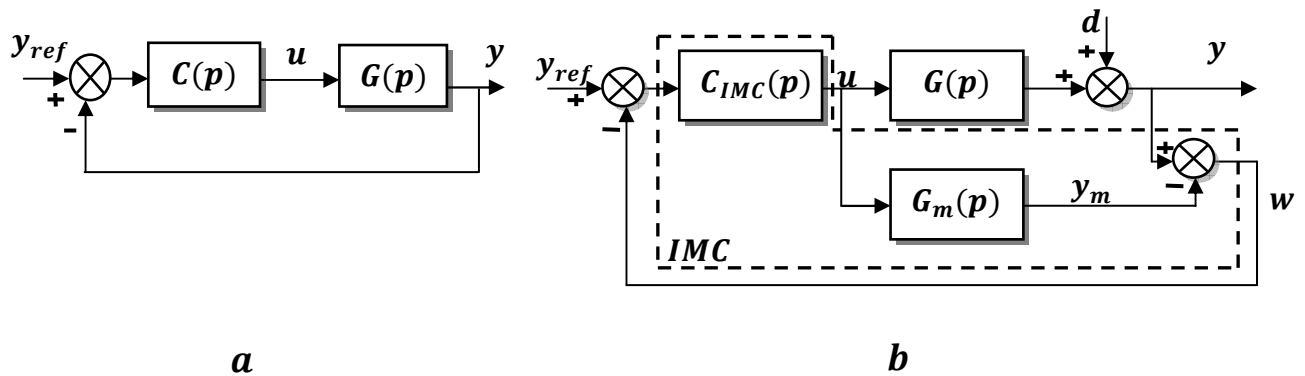


Figure II.4 : Structure de commande standard

En calculant la fonction de transfert en boucle fermée des deux structures de commande de la figure (II.4), on obtient

- Pour la structure de commande par modèle interne (en supposant que $G(p) = G_m(p)$)

$$\frac{y(p)}{y_{ref}(p)} = G(p)C_{IMC}(p) \quad (\text{II.32})$$

- Pour la structure de commande standard

$$\frac{y(p)}{y_{ref}(p)} = \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)} \quad (\text{II.33})$$

En égalant les relations (II.32) et (II.33), et en supposant que $G_m(p) = G(p)$, on obtient

$$C_{IMC}(p) = \frac{C(p)}{1 + C(p)G_m(p)} \quad (\text{II.34})$$

$$C(p) = \frac{C_{IMC}(p)}{1 - C_{IMC}(p)G_m(p)} \quad (\text{II.35})$$

Ce sont les équations (II.32) et (II.35) qui sont utilisées pour la synthèse du contrôleur $C(p)$ en utilisant la structure de commande par modèle interne [7].

II-5-3 Synthèse de $C(p)$ en utilisant le principe de la commande par modèle interne pour un système stable

L'objectif est de calculer la fonction de transfert $C(p)$ du contrôleur utilisant la structure standard à l'aide des équations régissant la structure de commande par modèle interne. Cette méthode de synthèse est très simple à mettre en œuvre. Elle se déroule en trois étapes [7].

Etape 1 : décomposer la fonction de transfert $G_m(p)$ du modèle selon la relation (II.36) afin de garantir la stabilité et la causalité du contrôleur $G_{IMC}(p)$

$$G_m(p) = G_m^+(p)G_m^-(p) \quad (\text{II.36})$$

Où la fonction de transfert $G_m^+(p)$ contient tous les zéros instables et l'élément de retard ($e^{-\tau p}$) de $G_m(p)$. $G_m^+(p)$ doit néanmoins avoir un gain statique égal à 1. $G_m^-(p)$ est la partie contenant les zéros stables et le dénominateur de $G_m(p)$. C'est cette fonction de transfert qui est utilisée pour la synthèse du contrôleur.

Etape 2 : En utilisant l'équation (II.32), l'expression du contrôleur par modèle interne est alors donnée par

$$C_{IMC}(p) = \frac{1}{G_m^-(p)} H(p) \quad (\text{II.37})$$

$H(p)$ est un filtre passe bas dont le gain statique est égal à 1. C'est le modèle général que l'on souhaite imposer au système en boucle fermée. Lorsque le système à commander est stable, $H(p)$ à la forme générale

$$H(p) = \frac{1}{(1 + \tau_c p)^r} \quad (\text{II.38})$$

τ_c est un paramètre de synthèse, il permet d'imposer la dynamique de la réponse indicielle et

r est un nombre entier positif, on le choisit de sorte que le contrôleur finalement obtenu soit causal.

Etape 3 : En utilisant l'équation (II.35), la fonction de transfert du contrôleur utilisant la structure standard est obtenue par la relation

$$C(p) = \frac{C_{IMC}(p)}{1 - C_{IMC}(p)G_m(p)} \quad (\text{II.39})$$

Il faut noter que dans cette relation, ce n'est pas la fonction de transfert $G_m^-(p)$ utilisée pour le calcul de $C_{IMC}(p)$ qui est utilisée mais celle du modèle complet $G_m(p)$ qui contient donc les zéros instables et les retards éventuels

La stabilité du contrôleur $C(p)$ est conditionnée par la stabilité du contrôleur $C_{IMC}(p)$ et du modèle $G_m(p)$. Ainsi selon [8], $C(p)$ est stable si seulement si :

1. C_{IMC} est stable
2. $C_{IMC}G$ est stable

II-5-4 Synthèse d'un contrôleur pour un système instable

Dans le cas de la commande d'un système instable, les étapes permettant de déterminer le contrôleur $C(p)$ pour un système stable peuvent être utilisées. Par contre, il faut respecter les conditions de stabilité suivante [8] :

1. C_{IMC} stable
2. $C_{IMC}G$ stable
3. $(1 - C_{IMC}G)G$ stable

Pour ce faire le filtre à utiliser dans ce cas n'est pas celui de l'équation (II.38) mais celui de l'équation (II.40). Ainsi, le choix de $H(p)$ et l'utilisation de l'équation (II.37) pour calculer le contrôleur $C_{IMC}(p)$, permettent de vérifier les conditions 1 et 2, le coefficient α de $H(p)$ est quant à lui utilisé pour vérifier la condition 3.

$$H(p) = \frac{1 + \alpha p}{(1 + \tau_c p)^r} \quad (\text{II.40})$$

Exemple

Soit à contrôler un processus instable ayant comme modèle la fonction de transfert

$$G(p) = \frac{1}{p - 1} \quad (\text{II.41})$$

Le contrôleur IMC permettant d'obtenir $H(p)$ de l'équation (II.40) est exprimé par

$$C_{IMC}(p) = (p - 1) \frac{\alpha p + 1}{(1 + \tau p)^2} \quad (\text{II.42})$$

Le contrôleur IMC est stable, donc la condition (1) est vérifiée.

Le paramètre α est calculé de sorte que le numérateur de $(1 - C_{IMC}G)$ annule la racine instables de G , à savoir

$$(1 - C_{IMC}G) \Big|_{p=1} = \left(1 - \frac{\alpha p + 1}{(1 + \tau p)^2}\right) \Big|_{p=1} = 0 \quad (\text{II.43})$$

Pour vérifier cette condition il faut que $\alpha = \tau^2 + 2\tau$. Dans ce cas, la condition 3, devient :

$$(1 - C_{IMC}G)G = \frac{\tau^2 p}{(1 + \tau p)^2} \quad (\text{II.44})$$

Cette fonction de transfert étant stable, donc la deuxième condition est vérifiée.

II-6 Commande à deux degrés de liberté

Lorsque le système à commander est instable au lieu d'utiliser la méthode IMC directe il est souvent préférable d'utiliser la structure de commande à deux degrés de liberté montrée par la figure (II.5) où le contrôleur $C_s(p)$ permet de stabiliser le système. Ensuite, lorsque le

système est stabilisé, on calcule le contrôleur $C(p)$ qui permet de faire suivre à la sortie y , la consigne y_{ref} .

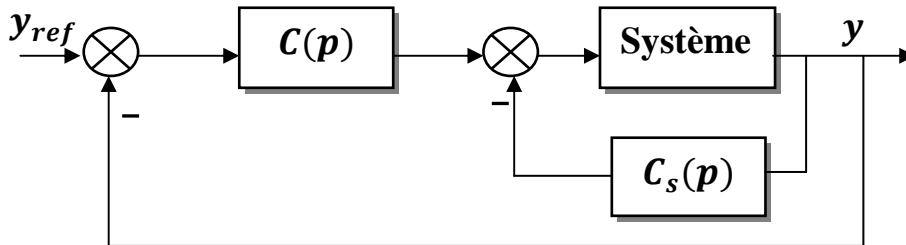


Figure II.5 : Système de commande à deux degrés de liberté

C'est cette structure qui est utilisée pour stabiliser le pendule inversé et contrôler la position du chariot.

II-6-1 commande de la position du chariot

La fonction de transfert reliant la position du chariot $X(p)$ à la force $F(p)$ qui lui est appliquée est donnée par l'équation (II.14) que nous rappelons ici pour les besoins de calcul du régulateur stabilisant.

$$G_x(P) = \frac{0.38808 (p + 2.531) (p - 2.492)}{p(p + 2.557) (p - 2.517)(p + 0.01901)}$$

Afin de simplifier le calcul du régulateur, on décompose $G_x(p)$ en deux termes. Un terme composé des pôles et zéro instables qui conservent le caractère instable de $G_x(p)$ et un second terme constitué de pôles et zéro stables qui sera approximé par un modèle d'ordre 1.

$$G_x(p) = \frac{(p - 2.492)}{p (p - 2.517)} \frac{0.38808 (p + 2.531)}{(p + 2.557) (p + 0.01901)} \quad (\text{II.45})$$

Afin, de déterminer les paramètres de ce modèle d'ordre 1, on trace la réponse indicielle du terme stable, elle donnée par la figure (II.6).

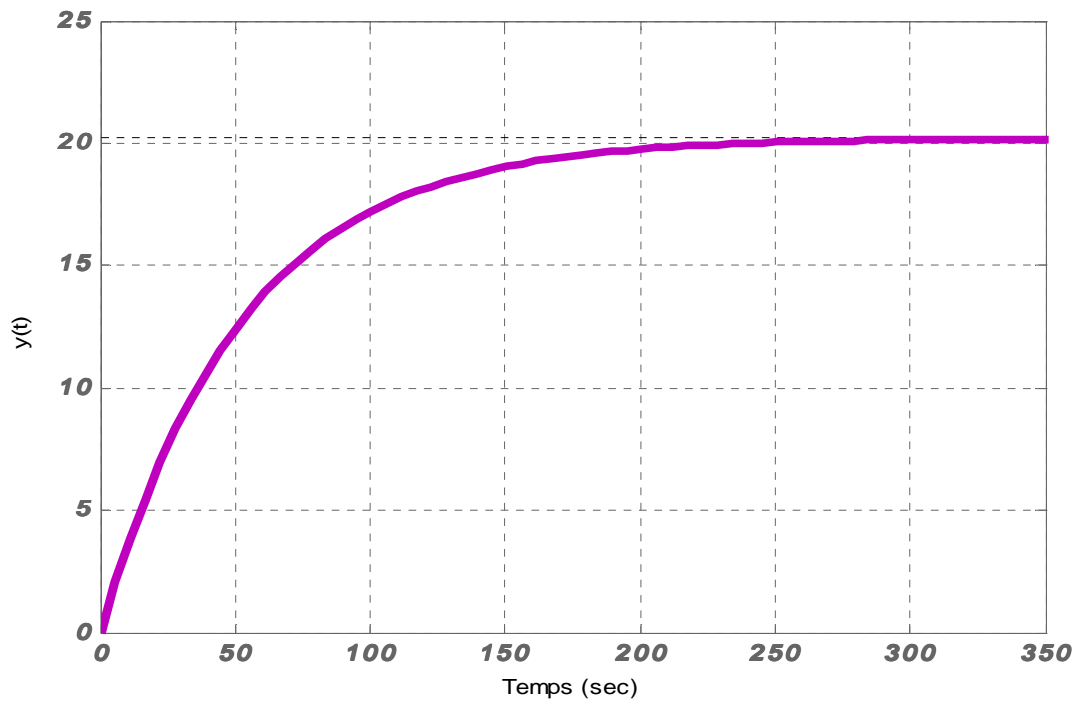


Figure. II.6 : Réponse indicielle de la partie stable de $G_x(p)$

Le gain statique, noté G_{x0} , et la constante de temps, notée T_x , sont déterminés à partir de la figure (II.6), on trouve : $G_{x0} = 20.181$ et $T_x = 52.25s$. La fonction $G_x(p)$ est donc approximée par :

$$G_x(p) = \frac{K_x(p - z)}{p(p - p_1)(p + p_2)} \quad (\text{II.46})$$

Avec :

$$K_x = \frac{G_{x0}}{T_x} = 0.38624$$

$$p_2 = \frac{1}{T_x} = 0.01914$$

$$p_1 = 2.517$$

$$z = 2.492$$

II-6-1-1 Calcul du contrôleur stabilisant

La fonction de transfert de la boucle interne de la figure (II.5), lorsque le système à stabiliser est représenté par le modèle $G_x(p)$ de l'équation (II.46) par un contrôleur, noté $C_{sx}(p)$, est donnée par :

$$G_{xbi}(p) = \frac{G_x(p)}{1 + G_x(p) C_{sx}(p)} \quad (\text{II.47})$$

En utilisant l'expression (II.46) de $G_x(p)$, l'expression de la fonction de transfert en boucle interne $G_{xbi}(p)$ est alors :

$$G_{xbi}(p) = \frac{K_x(p-z)}{p^3 + (p_2 - p_1)p^2 - p_1p_2p + K_x(p-z)C_{sx}(p)} \quad (\text{II.48})$$

Pour stabiliser $G_{xbi}(p)$, on doit donc introduire un régulateur qui puisse modifier les coefficients associés à p^2 et p . On choisit pour ce faire un régulateur ayant la forme :

$$C_{sx}(p) = K_{d2x}p^2 + K_{d1x}p + K_{px} \quad (\text{II.49})$$

Dans ce cas, $G_{xbi}(p)$ de l'équation (II.48), devient :

$$G_{xbi}(p) = \frac{b_0(p-z)}{p^3 + a_1p^2 + a_2p - a_3} \quad (\text{II.50})$$

Avec :

$$b_0 = \frac{K_x}{1 + K_x K_{d2x}}$$

$$a_1 = \left(\frac{p_2 - p_1 + K_x K_{d1x} - K_x K_{d2x} z}{1 + K_x K_{d2x}} \right)$$

$$a_2 = \left(\frac{K_x K_{px} - K_x K_{d1x} z - p_1 p_2}{1 + K_x K_{d2x}} \right)$$

$$a_3 = \frac{K_x K_{px} z}{1 + K_x K_{d2x}}$$

D'un autre côté, $G_{xbi}(p)$ étant d'ordre 3, on souhaite que son dénominateur soit écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \Delta(p) &= (p - p_{bf1})(p - p_{bf2})(p - p_{bf3}) \\ &= p^3 + \lambda_1 p^2 + \lambda_2 p + \lambda_3 \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

Le choix des trois pôles est :

$$\begin{aligned} p_{bf1} &= p_2 = -2.517 \\ p_{bf2} &= -p_1 = -0.01914 \\ p_{bf3} &= -p_1 = -2.517 \end{aligned} \quad (\text{II.52})$$

L'identification terme à terme, entre les équations (II.50) et (II.51) donne :

$$\lambda_1 = \frac{p_2 - p_1 + K_x K_{d1x} - K_x K_{d2x} z}{1 + K_x K_{d2x}} \quad (\text{II.53})$$

$$\lambda_2 = \frac{K_x K_{px} - K_x K_{d1x} z - p_1 p_2}{1 + K_x K_{d2x}} \quad (\text{II.54})$$

$$\lambda_3 = -\frac{K_x K_p z}{1 + K_x K_{d2x}} \quad (\text{II.55})$$

A partir des équations (II.55) et (II.54), on déduit les expressions de K_p et K_{d1x} respectivement, on trouve :

$$K_p = -\frac{\lambda_3 (1 + K_x K_{d2x})}{K_x z} \quad (\text{II.56})$$

$$K_{d1x} = \frac{K_x K_p - p_1 p_2 - \lambda_2 (1 + K_x K_{d2x})}{K_x z} \quad (\text{II.57})$$

En remplaçant les expressions de K_p et K_{d1x} dans l'équation (II.54), on déduit l'expression de K_{d2x} , elle est donnée par :

$$K_{d2x} = \frac{(p_2 - p_1)z^2 - \lambda_3 - p_1 p_2 z - \lambda_2 z - \lambda_1 z^2}{\lambda_3 K_x + \lambda_2 K_x z + K_x z^3 + \lambda_1 z^2 K_x} \quad (\text{II.58})$$

En remplaçant tous les paramètres intervenant dans les expressions (II.56) à (II.58), Les valeurs numériques des paramètres K_p , K_{d1x} et K_{d2x} sont :

$$\begin{aligned} K_p &= 0.0003 \\ K_{d1x} &= -0.0333 \\ K_{d2x} &= -2.5955 \end{aligned} \quad (\text{II.59})$$

Dans ce cas, l'expression de la fonction de transfert $G_{xbi}(p)$ finalement obtenue est :

$$G_{xbi}(p) = \frac{387.1845(1 - 0.4012p)}{p^3 + 5.0531 p^2 + 6.4316 p + 0.1213} \quad (\text{II.60})$$

II-6-1-2 Calcul du régulateur de suivi de consigne

Maintenant que la boucle interne est stabilisée par le régulateur $C_{sx}(p)$, on peut calculer le régulateur permettant de faire suivre à la position x du chariot une référence donnée. Pour ce faire, on utilise la fonction de transfert donnée par l'équation (II.60). Néanmoins, celle-ci étant d'ordre 3 et comme elle présente un zéro instable, on l'écrit sous la forme simplifiée

$$G_{xbi}(p) = \frac{G_{0bi}(1 - 0.4012p)}{1 + T_{bi}p} \quad (\text{II.61})$$

Les paramètres G_{0bi} et T_{bi} sont une nouvelle fois déterminés à partir de la réponse indicielle de $G_{xbi}(p)$ de l'équation (II.60) donnée par la figure (II.7).

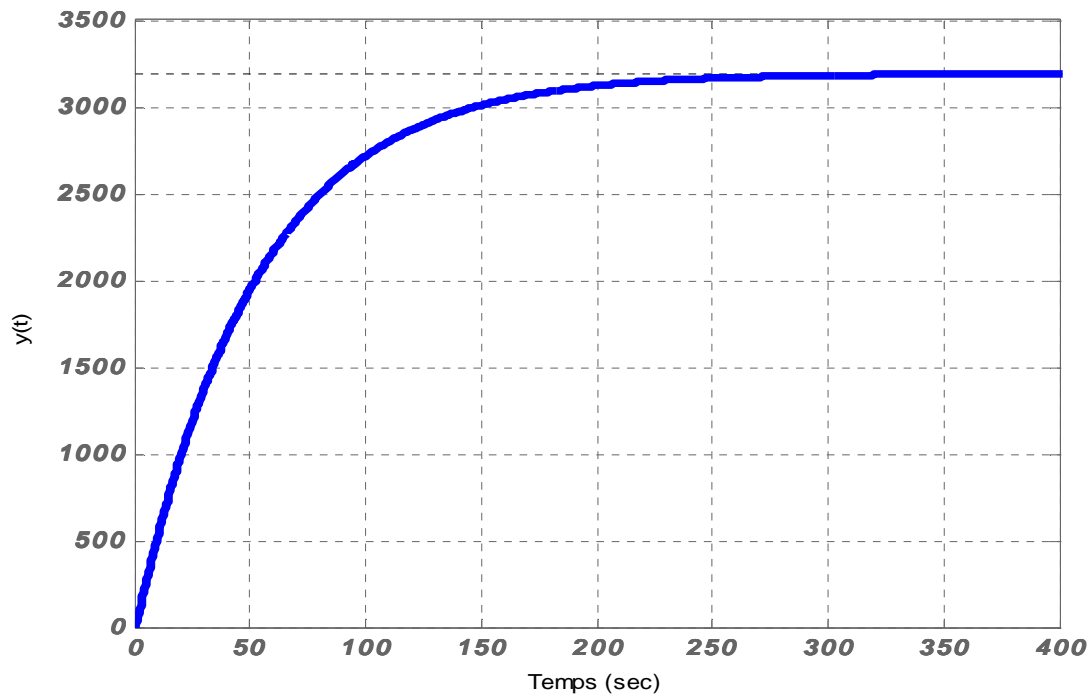


Figure. II.7: Réponse indicielle du système stabilisé $G_{x_{bi}}(p)$ de l'équation (II.60)

A partir de la figure (II. 7), les valeurs numériques de G_{0bi} et T_{bi} sont $G_{0bi} = 3195.2$
 $T_{bi} = 52.7s$. Finalement $G_{x_{bi}}(p)$ est approximée par :

$$G_{x_{bi}}(p) = \frac{3195.2(1 - 0.4012p)}{1 + 52.7p} \quad (\text{II.62})$$

C'est ce modèle qui est utilisé pour calculer le régulateur de suivi de consigne noté $C_x(p)$.

Le modèle de référence choisit est :

$$H(p) = \frac{1}{(1 + 50p)} \quad (\text{II.63})$$

Dans ce cas, le contrôleur $C_{IMC}(p)$ est donnée par

$$C_{IMC}(p) = \frac{(1 + 52.7p)}{3195.2(1 + 50p)} \quad (\text{II.64})$$

Donc l'expression du contrôleur $C_x(p)$ est exprimée par :

$$C_x(p) = \frac{1 + 52.7 p}{161042p} \quad (\text{II.65})$$

Le modèle du chariot $G_x(p)$ est représenté par le bloc de simulation suivant :

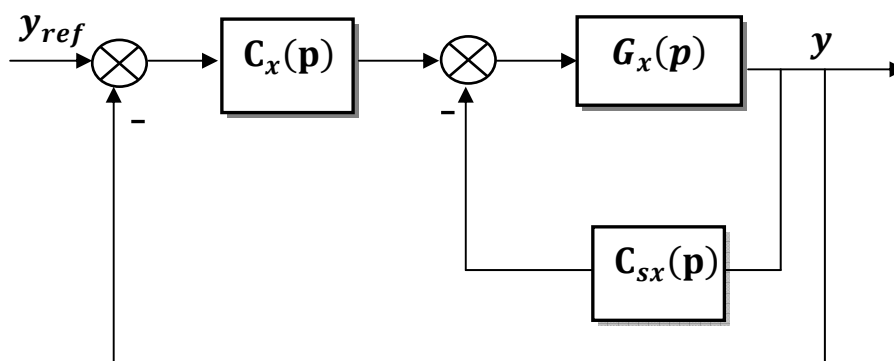


Figure. II.8: Schéma de simulation de la position de chariot

La réponse indicielle de l'association du modèle du chariot $G_x(p)$ de l'équation (II.14) avec les régulateurs $C_{sx}(p)$ et $C_x(p)$ des équations (II.49) et (II.65) est représentée par la figure (II.9) (très fort). Cette figure montre également la réponse indicielle du modèle du premier ordre (II.63) imposé au suivi de consigne (très en pointillées).

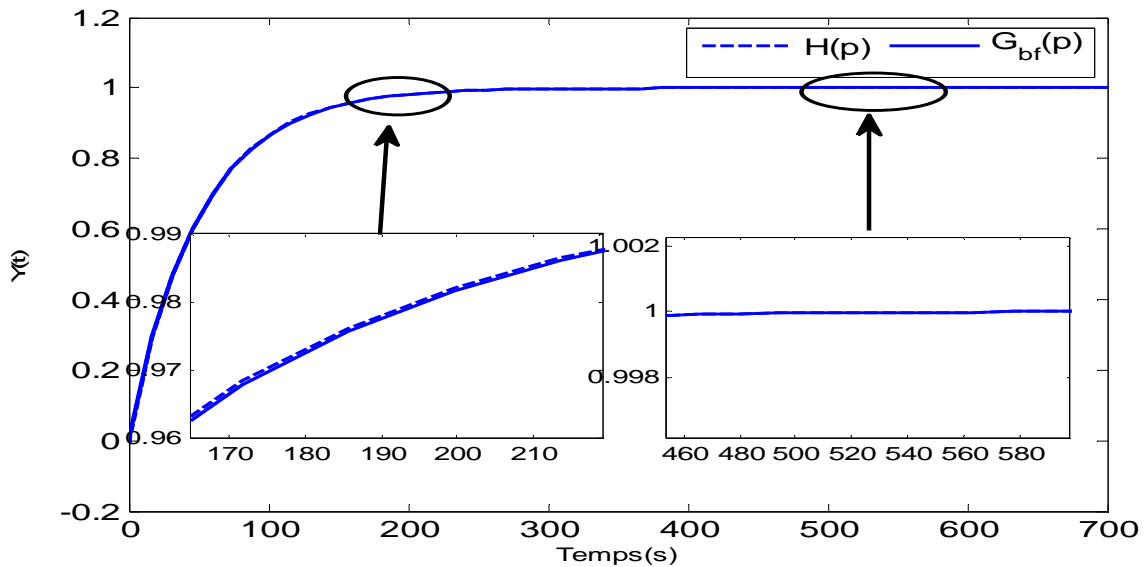


Figure II.9 : Réponses indicielles du système, en boucle fermée et du modèle de référence en fonction du temps

La figure (II.9) représente la réponse d'un système de premier ordre, on remarque que le système garde toujours le comportement d'un système de premier ordre, mais avec l'effet des deux régulateurs $C_{sx}(p)$ et $C_x(p)$ permet respectivement de stabiliser le système et de suivre la consigne.

II-7 Commande de stabilisation du pendule

Rappelons que le modèle qui relie la force à l'angle de rotation θ du pendule est donnée par :

$$G_{\theta}(p) = \frac{-0.24947p}{(p + 2.557)(p - 2.517)(p + 0.01901)} \quad (\text{II.66})$$

Dans ce cas aussi, pour simplifier le calcul du régulateur permettant de stabiliser le pendule on décompose $G_{\theta}(p)$ sous la forme :

$$G_{\theta}(p) = \frac{-p}{(p - 2.517)} \frac{0.24947}{(p + 2.557)(p + 0.01901)} \quad (\text{II.67})$$

La réponse indicielle de la partie stable est donnée par la figure (II. 10)

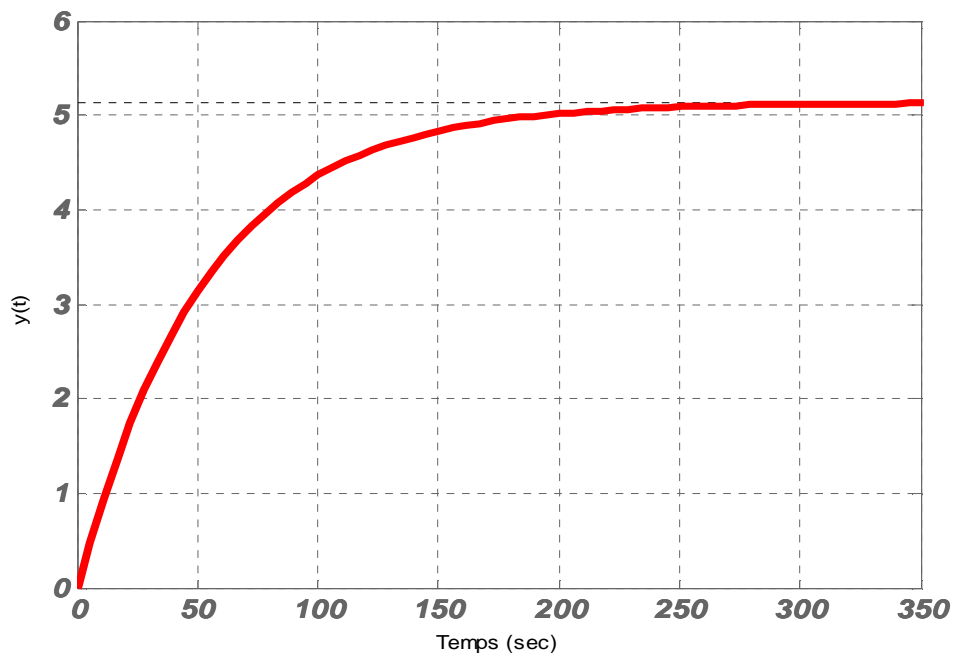


Figure. II.10: Réponse indicielle de la partie stable de $G_{\theta}(p)$ en fonction du temps

Dans ce cas aussi, cette réponse peut être approximée par un modèle du premier ordre dont le gain statique est $G_{\theta 0} = 5.1322$ et dont la constante de temps est $T_{\theta} = 50s$.

Donc le modèle simplifié qui représente $G_{\theta}(p)$ et donné par :

$$G_{\theta}(p) = \frac{-G_{\theta 0} p}{(p - p_1)(1 + T_{\theta} p)} \quad (\text{II.68})$$

La fonction de transfert en boucle fermée du système est :

$$G_{\theta bf}(p) = \frac{G_{\theta}(p)}{1 + G_{\theta}(p) C_{s\theta}(p)} \quad (\text{II.69})$$

En substitution l'équation (II.69) dans l'équation (II.68) on trouve

$$G_{\theta bf}(p) = \frac{-\frac{G_{\theta 0}}{T_{\theta}} p}{p^2 + \frac{(1 - p_1 T_{\theta})}{T_{\theta}} p - \frac{p_1}{T_{\theta}} - \frac{G_{\theta 0}}{T_{\theta}} p C_{s\theta}(p)} \quad (\text{II.70})$$

Puisque le terme $-\frac{G_{\theta 0}}{T_{\theta}} p C_{s\theta}(p)$ contient la variable de Laplace p , le régulateur $C_{s\theta}(p)$ doit contenir un intégrateur pour simplifier cette variable. Il doit également avoir un numérateur du premier ordre afin de pouvoir modifier les termes $\frac{(1 - p_1 T_{\theta})}{T_{\theta}}$ et $-\frac{p_1}{T_{\theta}}$ du dénominateur de $G_{\theta bf}(p)$.

Par conséquent, $C_{s\theta}(p)$ à la forme :

$$C_{s\theta}(p) = \frac{K_{p\theta} p + K_{i\theta}}{p} \quad (\text{II.71})$$

Avec :

$K_{p\theta}$: Coefficient de la proportionnalité

$K_{i\theta}$: Coefficient d'intégration

Dans ce cas, $G_{\theta bf}(p)$ de l'équation (II.70), devient :

$$G_{\theta bf}(p) = \frac{-\frac{G_{\theta 0}}{T_{\theta}} p}{p^2 + \left(\frac{(1 - p_1 T_{\theta}) - (G_{\theta 0} K_{p\theta})}{T_{\theta}} \right) p + \left(\frac{-p_1 - (G_{\theta 0} K_{i\theta})}{T_{\theta}} \right)} \quad (\text{II.72})$$

D'un autre côté, $G_{\theta bf}(p)$ étant d'ordre 2, on souhaite que son dénominateur soit écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \Delta(p) &= (p - p_{bf1})(p - p_{bf2}) \\ &= p^2 + \lambda_1 p + \lambda_2 \end{aligned} \quad (\text{II.73})$$

Le choix des deux pôles est le suivant :

$$p_{bf1} = -2.517 \quad (\text{II.74})$$

$$p_{bf2} = 50$$

L'identification terme à terme, entres le dénominateur de (II.72) et (II.73) donne :

$$\lambda_1 = \frac{(1 - p_1 T_\theta) - (G_{\theta 0} K_{p\theta})}{T_\theta} \quad (\text{II.75})$$

$$\lambda_2 = \left(\frac{-p_1 - (G_{\theta 0} K_{i\theta})}{T_\theta} \right) \quad (\text{II.76})$$

A partir des équations (II.75) et (II.76), on déduit les expressions de $K_{p\theta}$ et $K_{i\theta}$ respectivement, on trouve

$$K_{p\theta} = \frac{\lambda_1 T_\theta - 1 + T_\theta p_1}{-G_{\theta 0}} \quad (\text{II.77})$$

$$K_{i\theta} = \frac{\lambda_2 T_\theta + p_1}{-G_{\theta 0}} \quad (\text{II.78})$$

En remplaçant tous les paramètres intervenant dans les expressions (II.77) à (II.78), Les valeurs numériques des paramètres $K_{d\theta}$ et $K_{p\theta}$ sont

$$\begin{aligned} K_{p\theta} &= -535.9690 \\ K_{i\theta} &= -1.2266 \cdot 10^3 \end{aligned} \quad (\text{II.79})$$

Dans ce cas, l'expression de la fonction de transfert $G_{\theta bf}(p)$ finalement obtenue est :

$$G_{\theta bf}(p) = \frac{-5.132 p}{50 p^2 + 2626 p + 6293} \quad (\text{II.80})$$

Le modèle de stabilisation du pendule est représenté par le bloc de simulation suivant :

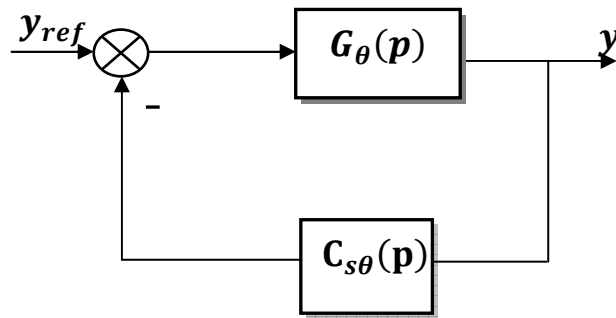


Figure. II.11: Schéma de simulation de la stabilisation du pendule

La réponse indicielle du système en boucle fermée est représentée par la figure (II.11).

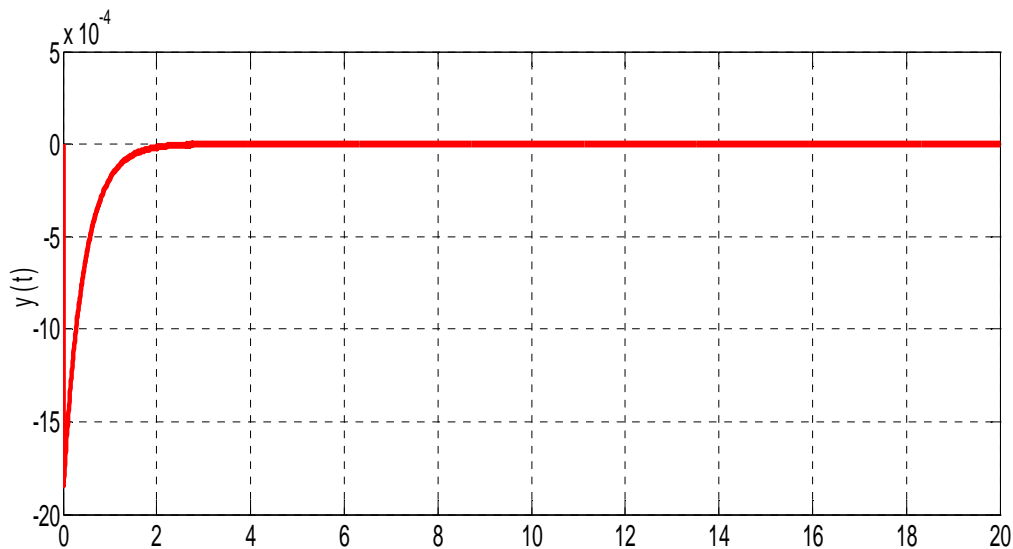


Figure. II.12: Réponse indicielle du système stabilisé $G_{\theta bf}(p)$ de l'équation (II.80)

D'après la figure (II.12), on remarque qu'initialement le pendule est à zéro. Lorsqu'une force extérieure (un échelon) est appliquée sur le chariot, l'angle du pendule en régime permanent est égal à zéro, cela signifie que le pendule revient à sa position initiale.

II-8 Conclusion

La première partie de ce chapitre a été consacrée à la présentation de la commande de redressement du pendule inversé, en utilisant des outils de la commande des systèmes non linéaires. Dans la deuxième partie, nous avons présenté la commande par modèle interne, ensuite nous avons donné les résultats de simulations obtenus, en utilisant cette méthode pour stabiliser le pendule inversé. L'intérêt de ces approches réside dans la simplicité de la synthèse des régulateurs et la commande à deux degrés de liberté.

Cette méthode est associée à la commande à deux degrés de liberté permettant de stabiliser les modèles instables du chariot et du pendule. Les différentes simulations effectuées ont permis de vérifier la validité de la méthode développée.

III-1 Introduction

Dans une démarche scientifique, chaque étude doit être évaluée expérimentalement en vue d'examiner ses performances. La synthèse d'une commande à deux degrés de liberté et la commande par modèle interne ont été développées d'un côté pour stabiliser le pendule inversé et contrôler la position du chariot, et l'autre côté l'angle de rotation du pendule.

Pour illustrer l'efficacité de ces commandes, des essais expérimentaux devaient être effectués sur un pendule inversé réel. Nous avons essayé d'implémenter les régulateurs que nous avons dimensionné dans le chapitre précédent mais malheureusement cette tâche n'a pas abouti. Néanmoins, nous avons utilisé les contrôleurs fournis par le constructeur.

Dans la première partie de ce chapitre, nous ferons une description du banc d'essai expérimental sur lequel seront effectués les essais. Ensuite, les résultats expérimentaux seront présentés.

III-2 Dispositif expérimental

Dans le premier chapitre, lors de la modélisation du système chariot-pendule inversé nous avons considéré que la grandeur de commande était la force appliquée sur le chariot, néanmoins, sur le banc d'essai cette force est fournie par un moteur à courant continu à aimant permanent commandé par l'induit. La commande du moteur est effectuée par un signal variant entre $-5V$ et $+5V$. Ce moteur est relié au chariot par l'intermédiaire d'une courroie et deux poulies, comme le montre la figure III.1.



Fig. III-1 Vue de l'entraînement : moteur, courroie

Comme on l'a mentionné dans le premier chapitre, pour détecter la position du pendule et celle du chariot, deux capteurs sont installés sur le banc d'essai. Un capteur permet de mesurer la position du chariot sur le rail. La valeur 0 du capteur indique que le chariot est au milieu du rail, il indique des valeurs positives lorsque le chariot se déplace à droite et des valeurs négatives lorsqu'il se déplace à gauche. Un deuxième capteur permet de mesurer l'angle de rotation du pendule. Il indique la valeur π lorsque le pendule est en position d'équilibre basse. Lorsque le pendule bascule dans le sens horaire le capteur indique des angles compris entre 0 et π , et lorsque le pendule bascule dans le sens anti-horaire il indique des angles compris entre π et 2π . Ainsi, lorsque le pendule arrive à la position d'équilibre instable haute le capteur indique 0 ou 2π .

Les informations délivrées par ces deux capteurs sont conditionnées par une électronique associée et les tensions de sortie varient dans une plage de -5V à +5V. On notera qu'un filtre passe-bas est intégré dans la chaîne de conditionnement de chaque entrée, ce filtre ayant pour fonction de limiter la largeur de bande des signaux de mesure et d'éviter le repliement du spectre qui risque de se produire lors de l'opération d'échantillonnage [1].

De plus, la course du chariot est limitée respectivement à gauche et à droite par deux butées mécaniques. Deux interrupteurs de fin de course sont placés en avant des butées mécaniques par sécurité pour le moteur d'entraînement du chariot. Le passage du chariot entraîne la fermeture d'un interrupteur provoquant la coupure de l'alimentation du moteur électrique.

III-3 Dispositif de commande de puissance

Il permet de délivrer une énergie de sortie à partir d'une énergie d'entrée plus faible et inversement. À l'arrière de l'armoire on trouve les différentes connectiques comme l'indique la figure(III.2):

- Connecteur ON / Off : fiche DIN pour connecter la boîte de l'intercepteur ON/OFF du moteur.
- Sélecteur 110/220 V
- Fiche d'alimentation 110/220 V

- Connecteur CN3 : il se branche avec le PL1 de la boîte d'adaptation, avec une large nappe 40 pistes. Les signaux sont ceux des deux capteurs, c'est des signaux digitaux sur 16 bits.
- Connecteur CN2 : il se branche avec PL3, avec une nappe 20 pistes. Les signaux sont les tensions de commande du moteur.
- Connecteur CN1 ; il se branche avec la partie mécanique. Les signaux sont ceux du moteur.

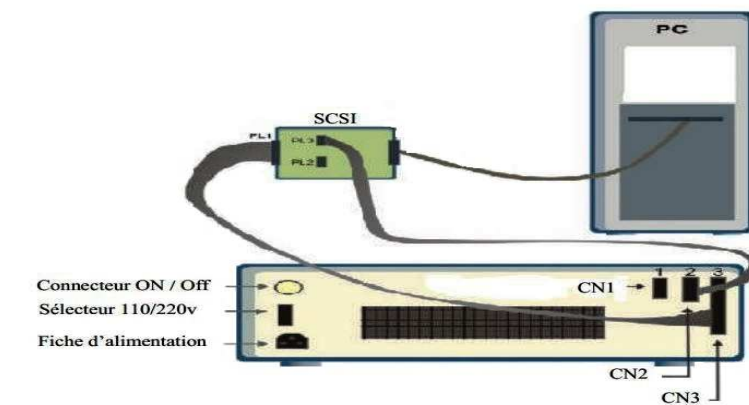


Figure III.2 Diagramme de connexion du dispositif de contrôle et de commande

III-4 Carte d'acquisition

C'est une carte d'acquisition universelle qui est installée sur le port PCI de la carte mère du PC de commande et dispose d'un câble de connexion relié au dispositif de commande de puissance. Il permet la commande digitale d'un système continu à travers un PC, en convertissant les signaux analogiques en numériques et vice-versa.

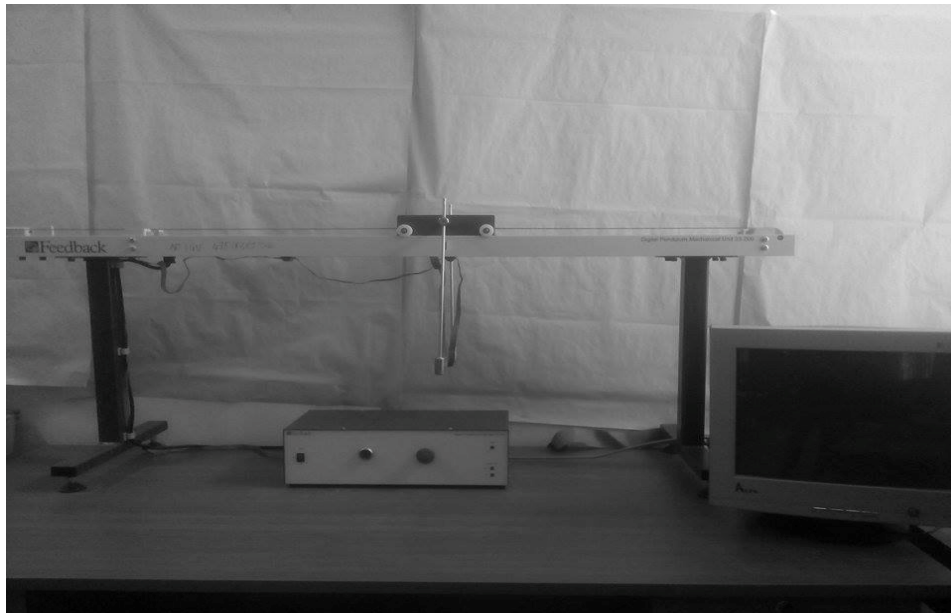


Figure III.3 Vue générale du banc d'essai

III-5 Environnement de développement

Ce banc d'essai utilise une approche novatrice d'implémentation, qui jouit d'une flexibilité accrue et d'une architecture totalement ouverte, cette approche est appelée HIL pour «Hardware-In the-Loop ». Ou bien « Rapid Prototyping ». Avec le « hardware-in the-loop », on peut tester directement le contrôleur qu'on a synthétisé en simulation sur le système physique réel, avec un simple PC de développement. En effet, le banc d'essai n'a besoin que d'un PC standard (pour le développement et pour la commande, d'une carte d'acquisition pour la conversion A/D et D/A, du système physique à commander ainsi que les logiciels nécessaires, les logiciels utilisés sont :

MATLAB:

Il joue le rôle de plateforme où tous les autres composants s'exécutent, il fournit plusieurs routines sophistiquées de calculs numériques.

SIMULINK:

C'est un langage de haut niveau graphique avec lequel on programme avec des objets ou blocks, ces objets peuvent être soit des blocks standards ou bien des blocks spécialisés écrit par l'utilisateur comme des S –fonctions.

REAL TIME WORKSHOP:

C'est le programme le plus important, qui génère automatiquement le code source C++, optimisé, à partir du modèle Simulink. De plus, ce code est paramétrable pour plusieurs targets (cible) d'implémentation.

COMPILATEUR C++:

Il compile le code généré par real time workshop de matlab et fait l'édition des liens pour générer un exécutable qui communique avec la cible d'implémentation (target), dans notre cas, le compilateur est VISUAL C++ 6.0 PRO.

REAL TIME WINDOWS TARGET:

Dans le cas d'un environnement WINDOWS, ce petit noyau est essentiel, son rôle est primordial, il assure le temps réel pour le régulateur. Car WINDOWS est un OS événementiel donc il n'est pas temps réel. Il s'exécute comme un service résident dans le niveau zéro (mode noyau) et intercepte les interruptions matérielles avant WINDOWS. Par la suite, il communique avec l'exécutable du régulateur et interface avec le système physique à travers la carte d'acquisition, en vue de contrôler le flux de données et de signaux du modèle (maintenant exécutable) vers le système physique et vice versa [1]. La figure III-4 illustre le schéma synoptique des différents éléments intervenant dans le banc d'essai.

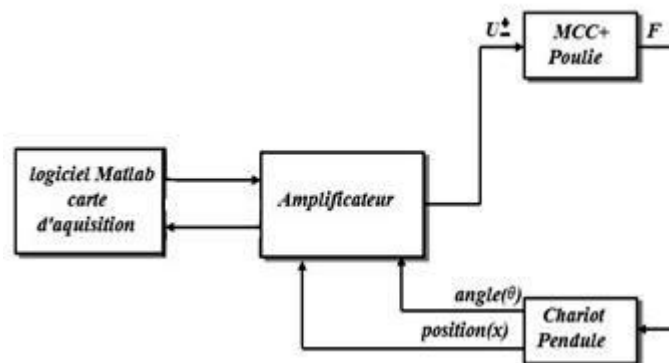


Figure III-4 Schéma illustratif des relations existantes entre les différents modules

Pour stabiliser le système pendule-chariot, on a utilisé des régulateurs de type proportionnel intégral et dérivé pour la position angulaire du pendule et la position longitudinale du chariot. Le signal de command $U(t)$ peut donc être considéré comme la somme de deux termes correspondant chacun aux boucles d'asservissement angulaire et

longitudinale. Le schéma fonctionnel correspondant à la description que nous venons de voir est donné par la figure (III-5).

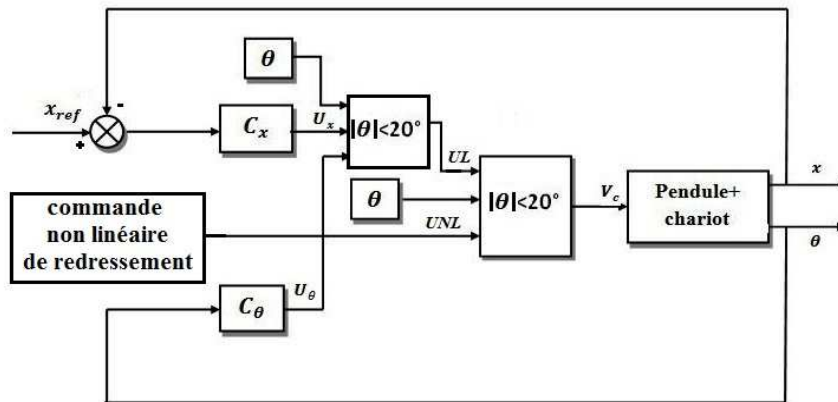


Figure III-5 Schéma fonctionnel de commande du système pendule-chariot

La commande de redressement non linéaire permet de ramener le pendule de sa position d'équilibre stable basse vers la position d'équilibre instable haute. Une fois que l'angle est dans l'intervalle de -20° à $+20^\circ$, on passe de la commande non linéaire à la commande linéaire en utilisant des contrôleurs C_x et C_θ . C_x : permet de contrôler la position longitudinale du chariot et C_θ : permet de contrôler la position angulaire du pendule à condition de maintenir l'angle θ aux environs de $|20^\circ|$. Le contrôleur C_θ interviendra si l'angle $|\theta| < 20^\circ$, dans ce cas on s'intéresse à la position du chariot tout en maintenant le pendule vertical.

Puisqu'on n'a pas pu mettre en pratique le contrôleur théorique, on va utiliser C_x et C_θ fournies par le matériel, dont les paramètres sont donnés par :

$$\begin{aligned} K_{xp} &= 7, & K_{xi} &= 0.5, & K_{xd} &= 4 \\ K_{\theta p} &= 25, & K_{\theta i} &= 0.2, & K_{\theta d} &= 1.5 \end{aligned}$$

III-6 Essais et résultats expérimentaux

Premier essai:

On positionne le chariot au milieu du rail et le pendule dans sa position d'équilibre stable basse, les conditions initiales sont donc : $[\theta_0, \dot{\theta}_0, x_0, \dot{x}_0] = [\pi, 0, 0, 0]$. On applique une

référence variable sous forme d'échelons d'amplitudes : (0.1m à l'instant $t=20$ s), (-0.1m à l'instant $t=30$ s) et (0 m à l'instant $t=40$ s). Les résultats obtenus sont illustrés par la figure (III-6).

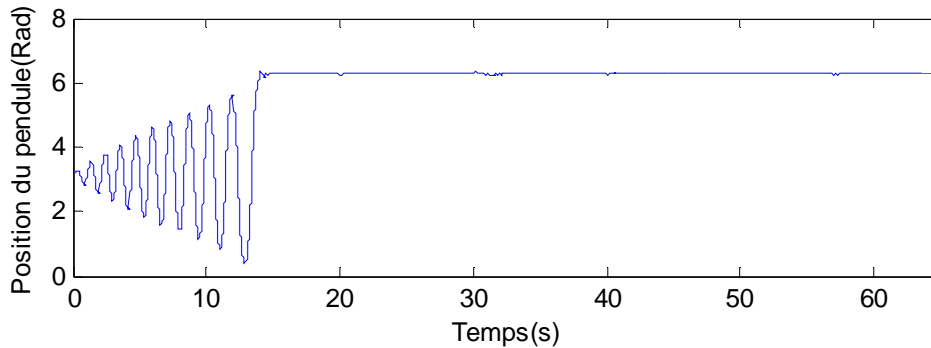


Figure III-6-a

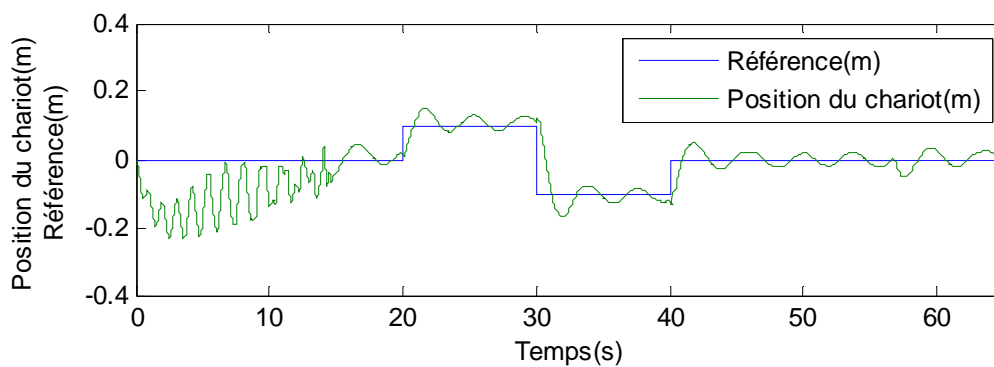


Figure III-6-b

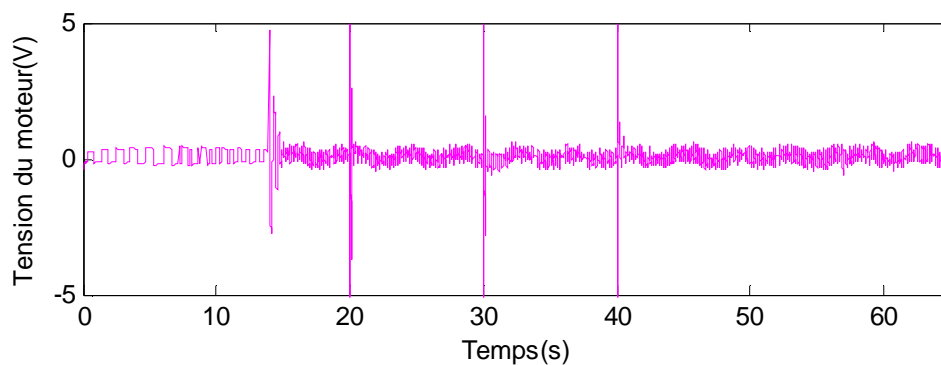


Figure III-6-c

Figure III-6 Résultats expérimentaux pour le redressement et la stabilisation du pendule avec une référence variable.

D'après les résultats obtenus dans la figure III-6, on constate qu'il y a deux phases de fonctionnement :

La première phase c'est le redressement qui commence à ($t=0s$) et qui finit aux environs de ($t=16s$). Dans cette phase on remarque que le balancement du pendule est basé sur un minimum d'énergie fournie par le moteur appliqué sur le chariot, ce qui permet au pendule de quitter sa position d'équilibre stable basse ($\theta = \pi$) vers la position d'équilibre instable haute ($\theta = 2\pi$) comme le montre la figure (III-6-a).

La deuxième phase c'est la phase de la stabilisation du pendule dans sa position d'équilibre instable ($\theta = 2\pi$), qui commence aux environs de ($t=16s$). Suite à la référence variable qui est appliquée, on remarque que le régulateur permet d'offrir une très bonne performance de poursuite comme le montre la figure (III-6-b) (le système suit parfaitement la référence variable souhaitée), tout en gardant le pendule autour de sa position d'équilibre instable haute comme le montre la figure (III-6-a). Concernant la commande, on remarque la présence de pics de tension qui sont dûs au déplacement du chariot aux instants ($t=20$), ($t=30$) et ($t=40$) (une variation brusque de la référence). Cette variation nécessite une commande de valeur importante, comme le montre la figure (III-6-c), afin de permettre au système de poursuivre la consigne.

Deuxième essai :

On positionne toujours le chariot au milieu du rail et le pendule dans sa position d'équilibre stable basse. Cette fois, on applique deux perturbations sous forme de force externe aux instants ($t=40s$) et ($t=45$), Les résultats sont donnés par la figure (III-7)

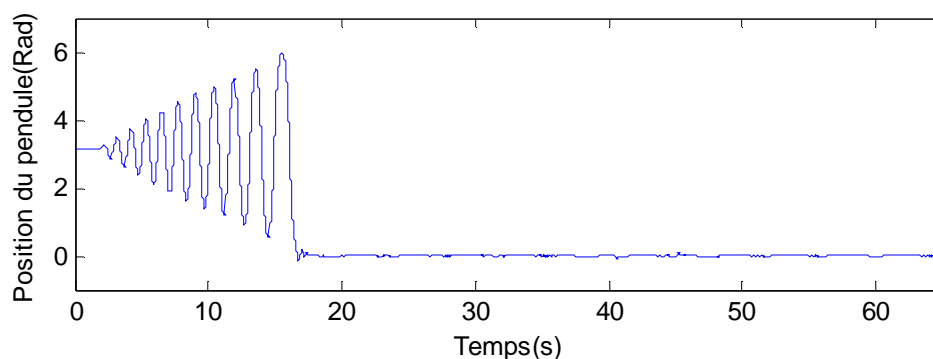


Figure III-7-a

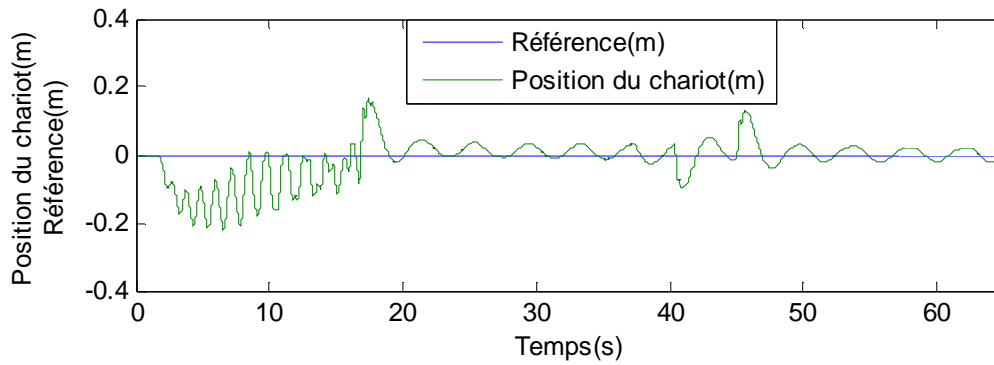


Figure III-7-b

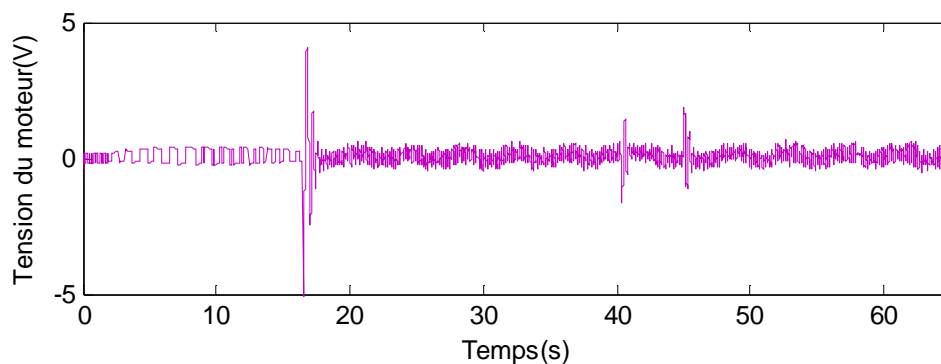


Figure III-7-c

Figure III-7 Résultats expérimentaux pour le redressement et la stabilisation avec deux perturbations externes aux instants $t=40s$ et $t=45s$.

Dans ce cas aussi, il y a deux phases de fonctionnement qui sont les mêmes que le premier essai :

On s'intéresse à la phase de la stabilisation du pendule dans sa position d'équilibre instable haute ($\theta = 0$), qui commence aux environs de ($t=18$). Comme le montre la figure (III-7-a). Suite aux deux perturbations sous forme de force externe qui sont appliquées en tapant légèrement sur le pendule aux instants ($t=40s$) et ($t=45$), on remarque que l'effet de ces perturbations se manifeste sous forme de pics sur toutes les courbes de la figure (III-7). Le régulateur réagit rapidement et corrige cette perturbation et stabilise le système après (2s) à la disparition de la perturbation. Ces résultats montrent que le régulateur est robuste par-rapport aux perturbations externes.

III-7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le procédé sur lequel nous avons travaillé, c'est à dire le pendule inversé disponible au laboratoire (L2CSP) ainsi que son interfaçage avec le PC. Ensuite, nous avons effectué des essais expérimentaux.

Les essais expérimentaux montrent que l'application de la commande à deux degrés de liberté sur le pendule inversé a permis de donner de bon résultats, notamment en terme de stabilité, rapidité et robustesse.

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire de fin d'études concerne la synthèse de lois de commande à deux degrés de liberté et la commande par modèle interne, l'objectif consiste à la stabilisation d'un système instable, non linéaire, SIMO, sous actionné, qui est le pendule inversé.

Le premier chapitre a été consacré à l'élaboration du modèle dynamique du pendule inversé. Le modèle obtenu est d'une complexité importante. En effet, c'est un système instable, non linéaire, SIMO. Cette caractéristique le qualifie d'un très bon exemple pour valider les commandes synthétisées.

Dans le deuxième chapitre, la méthode de la commande de redressement du pendule inversé a été présentée afin de balancer le pendule à une position supérieure. Elle est basée sur le théorème de l'énergie cinétique, ensuite nous avons présenté la méthode à deux degrés de liberté, et la commande par modèle interne pour les systèmes stable et instable afin de maintenir la stabilité du pendule en position haute.

Dans le troisième chapitre, nous avons beaucoup de difficultés à obtenir des résultats expérimentaux avec les régulateur que nous avons dimensionné dans le deuxième chapitre car le système est très compliqué et non linéaire. Mais, l'utilisation des contrôleurs fournis par le constructeur permet d'avoir des bons résultats notamment en terme de stabilité, rapidité et robustesse.

Annexe

Symbole	Quantité	Valeur	Unité
<i>M</i>	<i>masse du pendule</i>	0.2	<i>Kg</i>
<i>m</i>	<i>masse du chariot</i>	2.3	<i>Kg</i>
<i>l</i>	<i>Demi-longueur du pendule</i>	0.3	<i>m</i>
<i>d</i>	<i>Coefficient de frottement de rotation pendule</i>	0.005	<i>Nms/Rad</i>
<i>g</i>	<i>Intensité de la pesanteur</i>	9.81	<i>m/ s²</i>
<i>J</i>	<i>moment d'inertie du pendule</i>	0.0099	<i>Kg. m²</i>
<i>b</i>	<i>Coefficient de frottement des roues du chariot</i>	0.00005	<i>Ns/m</i>

Tableau A.1: Paramètres de l'ensemble pendule-chariot

Symbole	Quantité	Valeur	Unité
<i>R_a</i>	<i>Résistance de l'induit</i>	2.5	<i>H (Ω)</i>
<i>L_a</i>	<i>Inductance de l'induit</i>	$2.5 \cdot 10^{-3}$	<i>Henry</i>
<i>f_m</i>	<i>Frottement visqueux</i>	$1 \cdot 10^{-6}$	<i>Kg. m²/s</i>
<i>K_b</i>	<i>Constante électrique du moteur</i>	0.05	<i>N/A</i>
<i>K_m</i>	<i>Constante mécanique</i>	0.05	<i>Nm</i>
<i>J_m</i>	<i>Moment d'inertie du moteur</i>	$1.4 \cdot 10^{-5}$	<i>Kg. m²</i>
<i>r</i>	<i>Le rayon de la poulie</i>	0.027	<i>m</i>

Tableau A.2: paramètres de la machine

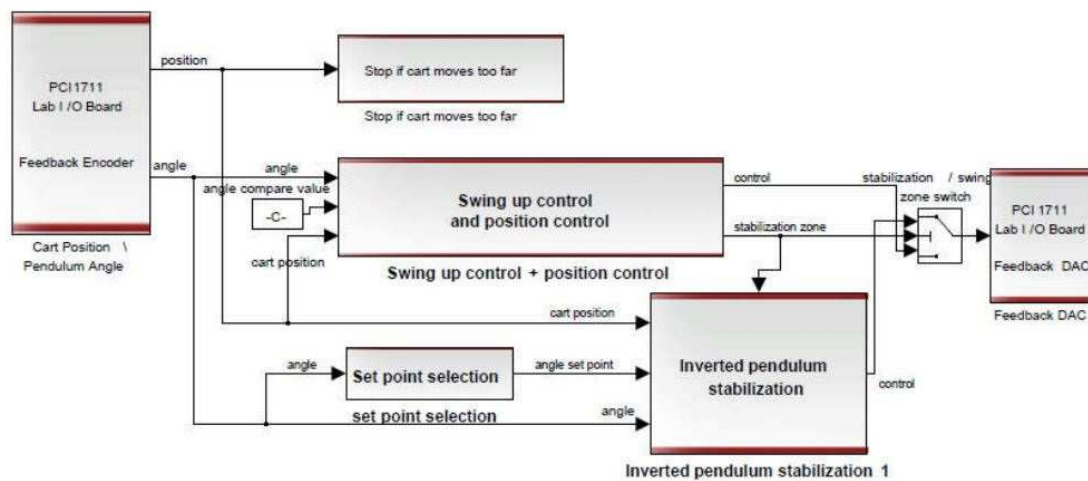


Figure A.I: Système complet de commande du pendule inversé

- [1] : **F. Lahouazi**, "Mise en œuvre d'une stratégie de commande neuro floue : Application à un pendule inversé". Mémoire de Magister UMMTO, Algérie. (2011).
- [2] : **C. Boussalem**, " Implémentation de régulateurs fractionnaires pour la stabilisation d'un pendule inversé ". Mémoire de Magister, Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, Algérie (2012).
- [3] : **D. Sahraoui**, " Identification paramétrique d'un pendule inversé simple par un algorithme génétique ". Mémoire de Master, université Mohamed Khider Biskra (2014).
- [4] : **O. Orban**, " Automatisation d'un pendule inversé ". Mémoire d'Ingénieur, Université Libre de Bruxelles Faculté des Sciences Appliquées (2006).
- [5] : **J. Ferreira**, " Cours de Mécanique Analytique ". Licence et Magistère de Physique Université Joseph Fourier (2008).
- [6] : **B. Minis**, " Modélisation, simulation et contrôle des installations du CERN". Thèse de Doctorat, École Doctorale « Sciences et Technologies de l'Information des télécommunications et des Systèmes », Paris. 2010.
- [7] : **R. Mansouri**, "Cours sur les systèmes asservis linéaires continus". Département d'électrotechnique, UMMTO faculté de génie Électrique et Informatique. 2013 /2014.
- [8]: **M. Morari, E. Zafiriou**, "Robust Process Control". Prentice Hall, Englewood, Cliffs, NJ. 1989.
- [9] : **N. Messoum, W. Khelfoun**, "Commande par modèle interne des systèmes linéaires continus", Mémoire de Master, Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, Algérie (2011).

Résumer :

L'objectif de ce mémoire de fin d'études consiste à la stabilisation d'un système instable, non linéaire, SIMO, sous actionné, qui est le pendule inversé. Le travail effectué dans ce mémoire concerne à la modélisation théorique, le développement sous Matlab Simulink, la synthèse de lois de commande à deux degrés de liberté, la commande par modèle interne et l'implémentation.

MOTS CLES: MATLAB, COMPILATEUR C++, SIMULINK, DEUX DEGRES DE LIBERTE, IMC

Abstract:

The objective of this graduation memory involves stabilizing an unstable system, nonlinear, SIMO, operated under, which is the inverted pendulum. Perform works in this paper relates to the theoretical modeling, development Matlab Simulink, the synthesis of control laws with two degrees of freedom, internal model control and implementation.

KEY WORDS: MATLAB, COMPILATEUR C++, SIMULINK, TWO DEGREES OF FREEDOM, IMC.