

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D' INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D' AUTOMATIQUE

Mémoire de Fin d'Etudes de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Automatique

Spécialité : Automatique et Systèmes

Présenté par

Farida BACHENE

Thème

Commande prédictive généralisée d'un système à retard

Mémoire soutenu publiquement le/07/ 2018 devant le jury composé de :

M Prénom NOM

Grade, Lieu d'exercice, Président

M Ahmed MAIDI

Grade, Lieu d'exercice, Encadreur

M Prénom NOM

Grade, Lieu d'exercice, Co-Encadreur

M Prénom NOM

Grade, Lieu d'exercice, Examineur

M Prénom NOM

Grade, Lieu d'exercice, Examineur

Remerciements

Je remercie Dieu, le tout puissant, pour m'avoir donné la santé, la patience et surtout la volonté pour continuer mes études.

Je remercie tout le corps formateur du département Automatique et Monsieur Ahmed MAIDI pour avoir assuré l'encadrement de ce travail.

J'exprime ma profonde reconnaissance à mes défunts parents, à mes frères et sœurs ainsi qu'à toute ma famille pour leur soutien et encouragement qui m'ont permis l'accomplissement de ce travail.

Enfin, je ne saurais remercier suffisamment tous ceux et toutes celles qui ont participés, de près ou de loin, à la concrétisation de ce mémoire.

Table des matières

Introduction générale	5
1 Généralités sur la commande prédictive	7
1.1 Introduction	7
1.2 Bref historique sur la commande prédictive	9
1.3 Principe de la commande prédictive	9
1.4 Différents types d'horizon	10
1.5 Formulation d'un problème de commande optimale	11
1.5.1 Modèle du système à commander	11
1.5.2 Conditions terminales	12
1.5.2.1 Etat initial $x(t_0)$	12
1.5.2.2 Etat final $x(t_f)$	12
1.5.3 Contraintes	12
1.5.3.1 Contrainte instantannée	12
1.5.3.2 Contrainte intégrale	12
1.5.4 Critère à optimiser	13
1.5.4.1 Commande en temps minimal	13
1.5.4.2 Commande à énergie minimale	13
1.5.5 Exemple d'application	13
1.6 Eléments de la commande prédictive	16
1.6.1 Modèle de prédiction	17
1.6.1.1 Représentation des systèmes discrets :	17
1.6.1.2 Modèle du système avec perturbation	19
1.6.2 Problème d'optimisation	20
1.6.3 Contraintes	20
1.6.4 Conception de la loi de commande	21
1.7 Différents types de la commande prédictive	22
1.7.1 Commande dynamique matricielle DMC	22
1.7.2 Commande prédictive généralisée GPC	22
1.8 Conclusion	22

2	Commande prédictive généralisée GPC	23
2.1	Introduction	23
2.2	Formulation du problème	23
2.2.1	Modèle numérique de prédiction	24
2.2.2	Calcul du prédicteur optimal	25
2.2.3	Critère à minimiser	27
2.2.4	Calcul de la loi de commande	28
2.3	Choix des paramètres de réglage de la GPC	28
2.4	Exemple d'application	29
2.5	Conclusion	33
3	Application de la GPC pour la commande d'un bac de stockage	34
3.1	Introduction	34
3.2	Systèmes à retards	34
3.3	Définition du système à modéliser	35
3.3.1	Mise en équation du modèle monovariante	36
3.3.2	Application de l'algorithme GPC	37
3.3.2.1	Interprétation des résultats de simulation	47
	Conclusion générale	48

Table des figures

1.1	Schéma fonctionnel de la commande prédictive.	8
1.2	Diagramme temporel de la prédiction à horizon fini.	8
1.3	Schéma de principe de la commande prédictive	10
1.4	Système dynamique (masse avec ressort).	14
1.5	Stratégie de la commande prédictive.	16
1.6	Schéma-bloc d'un modèle de prédiction.	17
2.1	Principe de fonctionnement de la GPC.	24
2.2	Modèle C ARIMA.	25
2.3	Evolution de la sortie $y(t)$	32
2.4	Evolution de la commande à appliquer	32
3.1	Illustration de la provenance des retards dans une boucle de commande. . .	35
3.2	Bac de stockage.	35
3.3	Evolution de la sortie.	41
3.4	Evolution de la commande.	41
3.5	Evolution de la sortie $y(t)$ pour un horizon de prédiction $N_p = 2$	42
3.6	Signal de la commande pour $N_u = 2$	43
3.7	Evolution de la sortie pour $N_p = 5$	44
3.8	Evolution de la commande pour $N_u = 5$	44
3.9	Sortie du système.	45
3.10	Signal de commande.	45
3.11	Evolution de la sortie.	46
3.12	Evolution de la commande.	46
3.13	Evolution de la sortie.	47
3.14	Evolution de la commande.	47

Liste des tableaux

Introduction générale

Par apprentissage, ou par expérience, on sait que telle action sur l'accélérateur ou sur le volant modifie, après un certain temps, la vitesse et la position du véhicule. Analyser l'état de la route, ou encore prédire le comportement futur, relève donc d'un concept intuitif et naturel, de sorte que la commande prédictive est en fait présente dans bon nombre d'activités humaines. De façon plus scientifique, cette conception consiste à prendre en compte, à l'instant présent, le comportement futur, en utilisant un modèle numérique du système afin de prédire la sortie dans le futur sur un horizon fini [1],

La commande prédictive (ou correction anticipatrice) est une technique de commande avancée de l'automatique. Elle a pour objectif de commander des systèmes industriels complexes. Le principe de cette technique est d'utiliser un modèle dynamique du processus afin d'anticiper le futur comportement du procédé. Elle peut être utilisée pour commander des systèmes complexes comportant plusieurs entrées et sorties où le simple régulateur PID est insuffisant [2].

Cette technique est particulièrement intéressante lorsque les systèmes possèdent des retards importants et de nombreuses perturbations. Les principaux utilisateurs de la commande prédictive sont les raffineries de pétroles, l'industrie chimique et agro-alimentaire, la métallurgie et l'aérospatiale.

...

La commande prédictive généralisée, proposée par Clarke en 1985, est devenue l'un des algorithmes de commande prédictive les plus répandus. Elle a été très tôt implémentée, avec succès, dans nombreuses applications industrielles, et a montré de bonnes performances et un certain degré de robustesse [1, 4]

L'idée à la base de la commande GPC est de calculer une séquence de commandes future de telle façon qu'une fonction de coût à plusieurs composantes soit minimale sur un certain horizon de prédiction. Le critère à optimiser est une fonction quadratique qui mesure l'écart entre la sortie prédite du système et une séquence de référence, plus une fonction quadratique qui mesure l'effort de commande.

Notre travail consiste à appliquer la commande prédictive généralisée sur un système hydraulique (un bac de stockage), en vue de montrer la simplicité de la mise en oeuvre de cette méthode.

Pour ce faire notre mémoire est réparti comme suit :

Le premier chapitre consiste à présenter les principes généraux de la commande prédictive, détaillant en particulier les algorithmes MPC. Comme l'optimisation est un élément essentiel de la commande prédictive, nous passons en revue les étapes de la commande optimale suivi d'un exemple illustratif.

Dans le deuxième chapitre, une étude théorique de la commande prédictive généralisée (GPC) est présentée et illustrée par un exemple d'application.

Le troisième chapitre est consacré à l'application de la commande GPC sur un bac de stockage avec une alimentation retardée.. Des simulations seront présentées afin d'illustrer les résultats de la méthode GPC.

Enfin nous terminons notre travail par une conclusion générale et des perspectives.

Chapitre 1

Généralités sur la commande prédictive

1.1 Introduction

La commande prédictive, dans toutes ses variantes, fait partie de l'ensemble des techniques de commande les plus utilisées dans le milieu industriel. Notamment, en raison de la facilité avec laquelle les contraintes imposées peuvent être prises en considération dans la formulation du problème de contrôle. Le but étant de répondre à un besoin en matière de performance pour la commande des systèmes complexes.

Diverses applications de la commande prédictive dans différents secteurs industriels se sont révélées concluantes. Ce qui a contribué à sa large popularité.

La commande prédictive constitue un domaine ample et varié qui intègre des disciplines comme la commande optimale, la commande multivariable...

Un schéma-bloc pouvant caractériser une commande prédictive à base de modèle est représenté sur la Figure 1.1

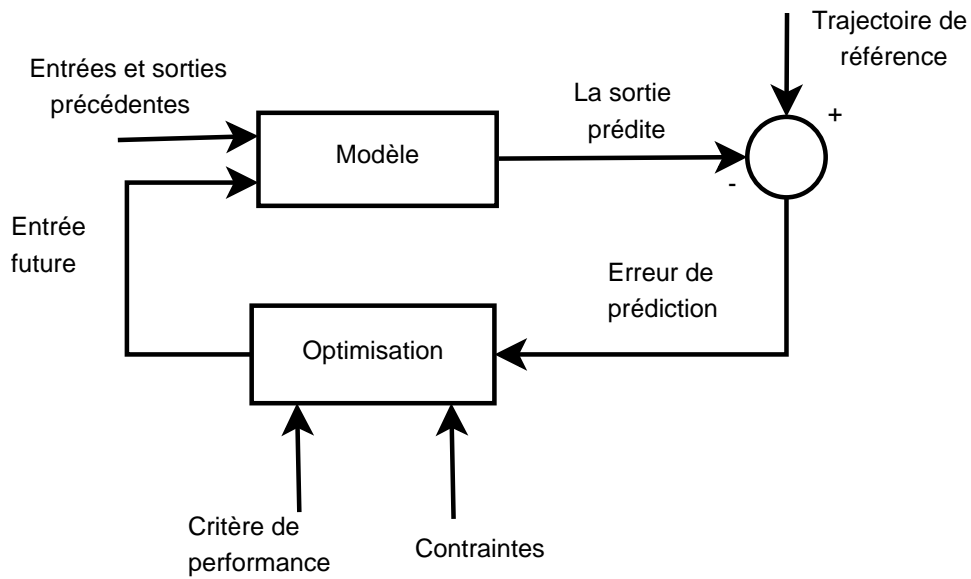


FIGURE 1.1 – Schéma fonctionnel de la commande prédictive.

Cette conception consiste à prendre en compte, à l’instant présent, le comportement futur, en utilisant le modèle du système, afin de prédire la sortie dans le futur, sur un horizon fini, en accord avec le diagramme temporel de la Figure 1.2.

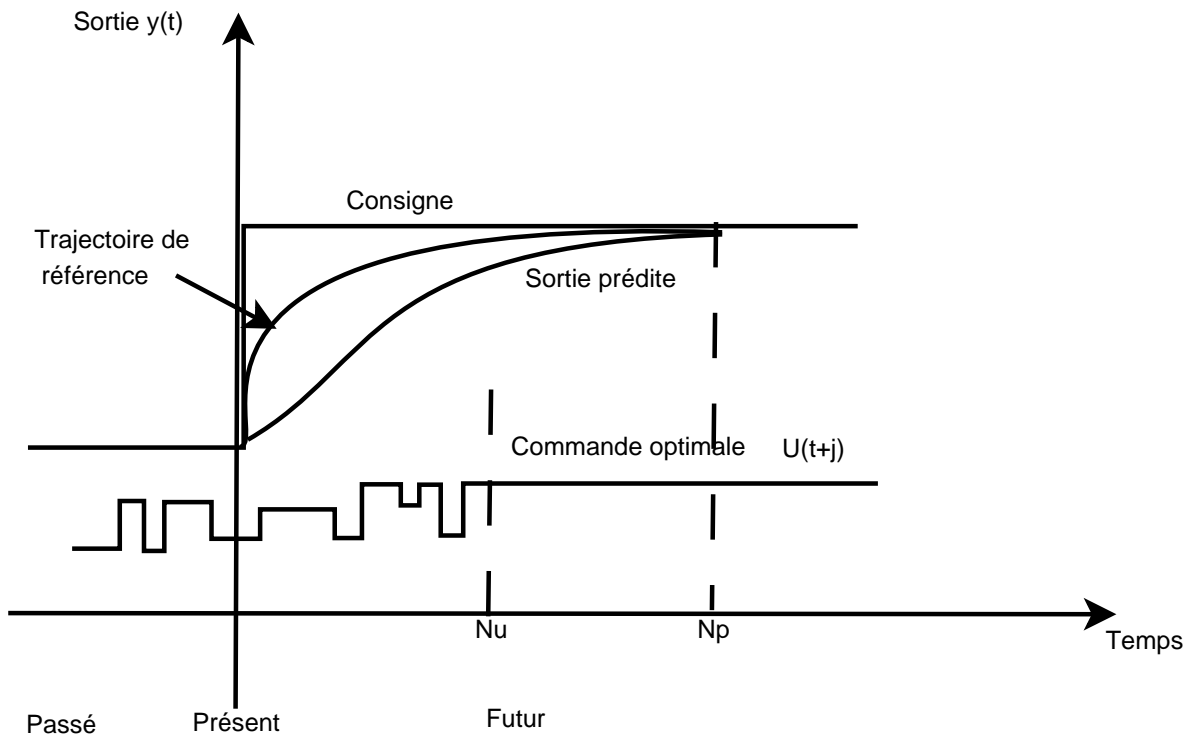


FIGURE 1.2 – Diagramme temporel de la prédiction à horizon fini.

1.2 Bref historique sur la commande prédictive

La commande prédictive est une technique relativement récente, qui n'a connu un réel essor que depuis années 80, grâce aux travaux de D.W. Clarke et de son équipe à Oxford. Toutefois cette technique de commande que l'on peut rattacher à la famille des commandes prédictives par modèle MPC (Model Predictive Control) suscite un intérêt dans le domaine industriel depuis la fin des années 70. En effet en 1978, J. Richalet publie les premiers résultats obtenus dans des applications industrielles et en 1979 des ingénieurs de la Shell, C.R Cutler et D.M. Prett font part de leur expérience sur un craqueur catalytique. En 1985, D.W. Clarke présente la première version de la commande prédictive généralisée GPC. Il faut attendre 1987, pour voir publier les premiers résultats obtenus par J. Richalet sur des systèmes électro-mécanique rapides, tels que des commandes d'axes d'un robot.

La commande prédictive a connu très tôt un vif engouement dans le secteur de l'industrie chimique et pétrolier, une des raisons tient en partie au fait que cette technique fournit une méthodologie susceptible de prendre en compte d'une façon systématique les contraintes lors de la conception et de l'implantation de la loi de commande.

1.3 Principe de la commande prédictive

Le principe de la commande prédictive consiste à résoudre numériquement un problème de commande optimale sur un certain horizon appelé horizon de prédiction.

La méthodologie de cette commande à base de modèle se caractérise par les étapes suivantes :

1. A chaque instant t , la sortie future du procédé est prédite sur un horizon de prédiction. Cette prédiction est réalisée à partir d'un modèle mathématique de la dynamique du procédé. Elle va dépendre non seulement du passé du procédé, mais aussi du scénario de contrôle que nous envisageons pour le futur.
2. A partir des différentes solutions possibles pour le scénario de contrôle, on sélectionne celle qui ramène la sortie du procédé à la valeur de consigne d'une façon optimale au sens d'un objectif de contrôle défini.
3. Le scénario choisi est ensuite appliqué au procédé réel, mais seule sa valeur, à l'instant présent, est réellement appliqué sur le système. A la période d'échantillonnage suivante, une nouvelle sortie est mesurée et la procédure complète est répétée. Ce procédé repose sur le principe de l'horizon fuyant.

La Figure 1.3 résume le principe de la commande prédictive dans le cas général d'un problème de commande optimale sous contraintes sur un horizon glissant.

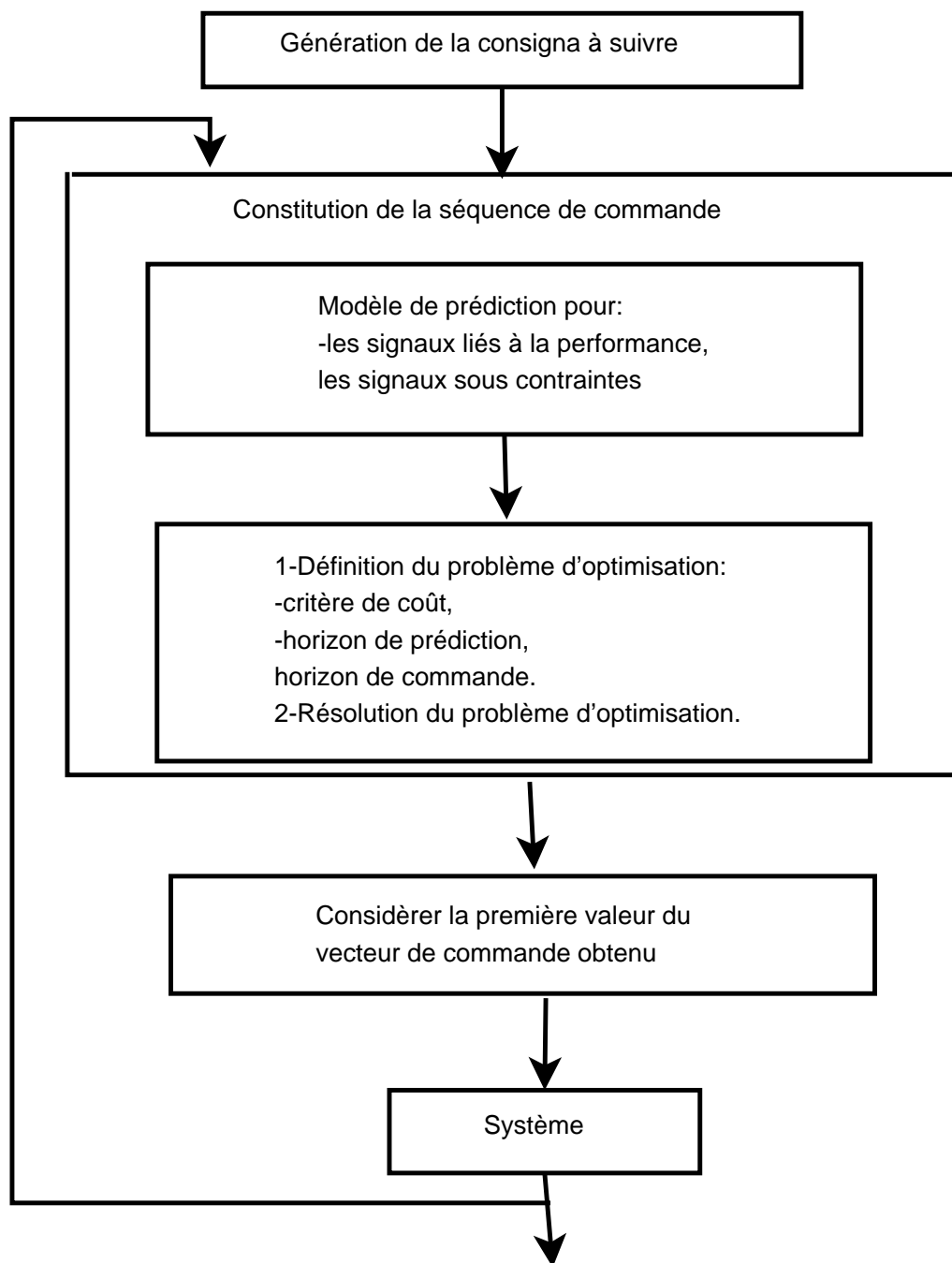


FIGURE 1.3 – Schéma de principe de la commande prédictive

1.4 Différents types d'horizon

Une idée importante de la commande prédictive est la notion d'horizon :

- L'horizon de commande N_u est le nombre d'actions successives sur l'entrée du procédé (ou variable manipulée) que l'on s'autorise à faire pour amener la sortie à la valeur désirée.
- L'horizon de prédiction N_p est l'horizon sur lequel on prédit la sortie du procédé et

sur lequel on cherche à lui faire suivre une consigne donnée, et ceci en faisant N_u actions sur la variable d'entrée. L'évolution du procédé au-delà de N_p pas de temps n'est pas prise en compte dans le critère à minimiser pour le calcul de l'action à effectuer.

1.5 Formulation d'un problème de commande optimale

La détermination de la loi de commande prédictive se fait par résolution d'un problème de commande optimale à horizon fini.

La théorie de la commande optimale permet de déterminer la commande d'un système qui optimise (minimise ou maximise) un critère de performance éventuellement en présence de contraintes.

Pour mettre le problème de commande optimale sous la forme mathématique, on doit spécifier les éléments suivants :

- Modèle du système à commander,
- Conditions terminales (conditions initiales et finales),
- Contraintes physiques à respecter,
- Le critère de performance à optimiser..

1.5.1 Modèle du système à commander

Un système dynamique peut être modélisé par différents modèles (équations différentielles, représentation d'état, fonction de transfert. . .). Généralement, en commande optimale, on utilise le modèle d'état de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) \end{aligned} \tag{1.1}$$

où

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ vecteur d'état, n dimension du système,
- $y(t) \in \mathbb{R}^q$ vecteur de sortie, q nombre de sorties,
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ vecteur de commande, m nombre d'entrées,
- t variable temps.

Lorsque le système est linéaire :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{1.2}$$

où

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrice d'état,
- $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrice de commande,
- $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ matrice de sortie,
- $D \in \mathbb{R}^{q \times m}$ matrice de transmission directe.

1.5.2 Conditions terminales

1.5.2.1 Etat initial $x(t_0)$

C'est l'état du système à l'instant t_0 . Il correspond au moment où on applique la commande sur le système. Il est toujours connu.

1.5.2.2 Etat final $x(t_f)$

C'est l'état du système à l'instant t_f , il peut être libre ou spécifié. Le temps $T = t_f - t_0$ est appelé l'horizon de commande, il peut être fini si t_f est fini ou infini si l'état final est infini.

1.5.3 Contraintes

Ce sont des conditions qu'on doit respecter lors de la résolution d'un problème de commande optimale, on distingue deux types de contraintes :

1.5.3.1 Contrainte instantannée

C'est une contrainte qui doit être respectée à chaque instant. Elle est exprimée comme suit :

$$q(x(t), u(t), t) = 0 \tag{1.3}$$

Exemple : dans la commande d'un moteur électrique, la vitesse instantannée ne doit pas dépasser une certaine valeur maximale :

$$v(t) \leq v_{max}$$

1.5.3.2 Contrainte intégrale

C'est une contrainte qui doit être satisfaite sur un horizon de commande T et ne doit pas dépasser une certaine valeur. Elle est exprimée comme suit :

$$\int_{t_0}^{t_f} p(x(t), u(t), t) dt \leq 0 \quad (1.4)$$

Exemple ; un réservoir ne peut pas être rempli au delà de sa contenance ou il y a risque de débordement.

1.5.4 Critère à optimiser

Ce critère est choisi selon les exigences d'un cahier des charges et les performances désirées. Son expression générale est de la forme :

$$J(u(t)) = \Psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) dt \quad (1.5)$$

où

- $\psi(x(t_f), t_f)$: est la partie terminale,
- $\int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) dt$: est la partie intégrale.

Parmi les critères à optimiser, on peut citer :

1.5.4.1 Commande en temps minimal

Elle consiste à transférer l'état d'un système d'un état initial vers un état final dans un minimum du temps possible, son expression mathématique est donnée sous la forme suivante :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt \quad (1.6)$$

1.5.4.2 Commande à énergie minimale

Elle consiste à transférer l'état d'un système d'un état initial vers un état final en minimisant l'effort de la commande. Le critère à minimiser est de la forme :

$$(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} u(t)^T R u(t) dt \quad (1.7)$$

avec

$$R = R^T, R > 0$$

1.5.5 Exemple d'application

Soit le système dynamique décrit sur la Figure 1.4 :

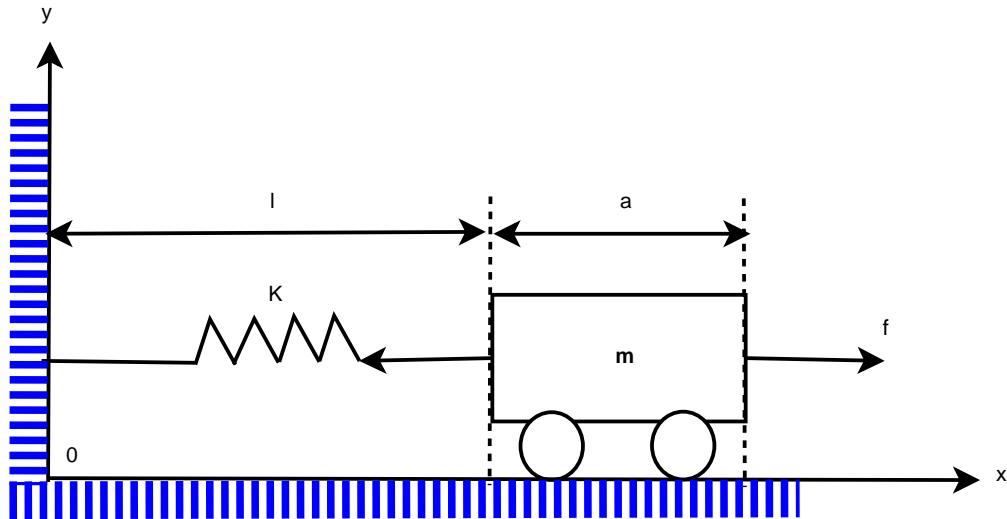


FIGURE 1.4 – Système dynamique (masse avec ressort).

On désire concevoir une loi de commande $f(t)$ pour déplacer la masse m à une position égale au double de sa position initiale $x(t_0)$.

Le transfert doit se faire avec un minimum d'énergie et pour protéger le ressort, la vitesse de la masse ne doit pas dépasser une valeur limite V_{max} .

On considère le repère $(\vec{O}, \vec{X}, \vec{Y})$ de la Figure (1.3).

Modèle mathématique

On applique la loi de Newton :

$$m \ddot{x}(t) = \sum \overrightarrow{forces} \quad (1.8)$$

Pour ce système, nous avons deux forces :

- $f(t)$: la force qu'on applique pour tirer la masse m ,
- $f_k(t)$: la force appliquée par le ressort sur la masse m ;

La loi de Newton s'écrit alors :

$$m \ddot{x}(t) = f(t) - f_k(t) \quad (1.9)$$

avec

- $f_k(t) = kx(t)$
- k : : constante de raideur,

— $x(t)$: la position de la masse m .

Donc :

$$m\ddot{x}(t) = f(t) - kx(t) \quad (1.10)$$

Sous la forme d'état, on aura :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{m}x_1(t) + \frac{1}{m}f(t) \end{aligned} \quad (1.11)$$

où

- $x_1(t)$ est la position de la masse m ,
- $x_2(t)$ est la vitesse de la masse m .

Conditions terminales

- Conditions initiales : à $t = 0$, on a la position initiale de la masse est $x_1(0) = l + \frac{a}{2}$ et sa vitesse $x_2(0) = 0$ donc à $t = 0$, on a :

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l + \frac{a}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

- Condition finale : à $t = t_f$, la masse m doit atteindre le double de sa position initiale : $x_1(t_f) = 2(l + \frac{a}{2})$ et sa vitesse $x_2(t_f) = 0$, donc on a :

$$x(t_f) = \begin{bmatrix} x_1(t_f) \\ x_2(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2l + a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Contraintes

La masse m doit être déplacée avec une vitesse $x_2(t) \leq V_{max}$

Critère à optimiser

Le transfert doit se faire en minimisant l'énergie mise en oeuvre, le critère correspondant est :

$$J(f(t)) = \int_0^{t_f} f^2(t) dt \quad (1.14)$$

(Cas monovariable, $R = 1$ et $u(t) = f(t)$).

Ainsi, le problème de commande optimale se résume comme suit :

$$\min_{f(t)} J(f(t)) = \int_0^{t_f} f^2(t) dt \quad (1.15)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m}x_1(t) + f(t) \end{cases} \quad (1.16)$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} l + \frac{a}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

$$x(t_f) = \begin{bmatrix} 2l + a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2(t) - V_{max} \leq 0 \quad (1.18)$$

1.6 Éléments de la commande prédictive

Tous les algorithmes de la commande prédictive possèdent les mêmes éléments (Figure 1.5) et différentes options peuvent être considérées pour chaque élément, ce qui donne une multitude d'algorithmes.

Ces éléments sont :

- Modèle de prédiction,
- Problème d'optimisation (fonction objectif, contraintes),
- Conception de la loi de commande.

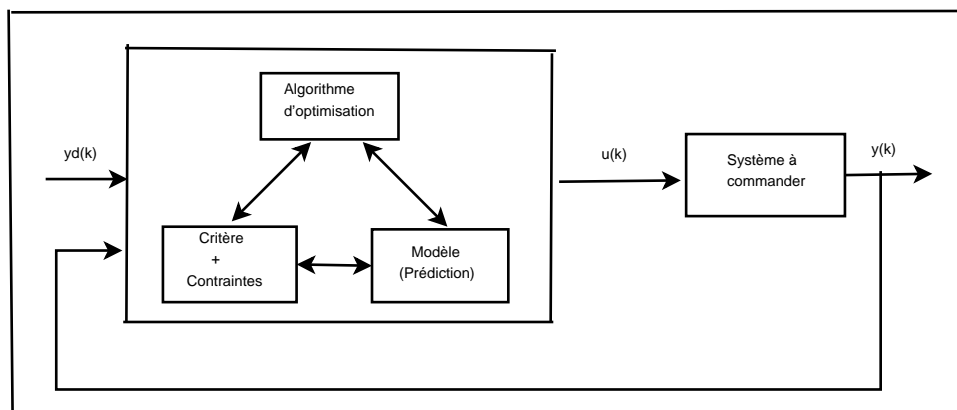


FIGURE 1.5 – Stratégie de la commande prédictive.

Pour l'implémentation de la commande prédictive, la structure de base de la Figure 1.5 est mise en oeuvre. Un modèle sert à prédire les futures sorties du système, grâce aux valeurs courantes et passées de la commande et aux commandes optimales futures. Ces dernières sont calculées par une méthode d'optimisation, qui prend en compte la fonction de coût (qui dépend aussi des consignes futures), et éventuellement des contraintes. Donc,

Le modèle du système à commander joue un rôle central dans la commande prédictive. Le modèle choisi doit être capable de prendre en compte la dynamique du processus pour prédire précisément les sorties futures.

1.6.1 Modèle de prédiction

Le modèle de prédiction intervient directement dans la stratégie de commande prédictive. Il traduit l'évolution prévisible du comportement du procédé en fonction des entrées appliquées.

Il comprend généralement deux parties, le modèle du système et le modèle de perturbation.

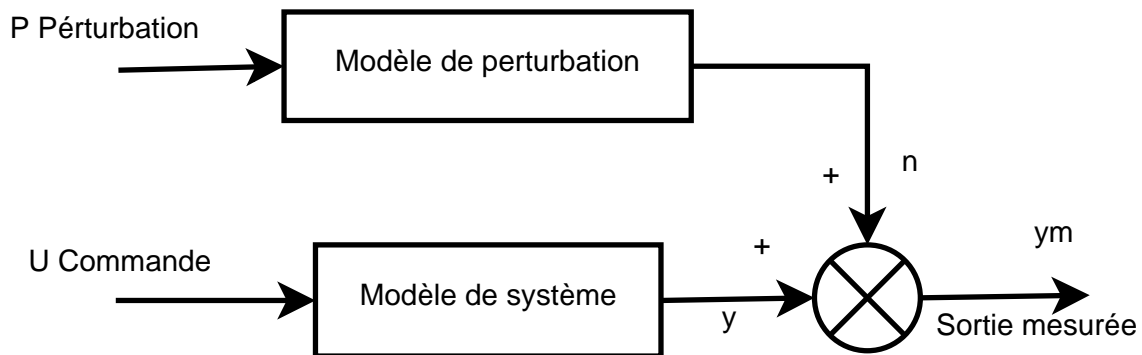


FIGURE 1.6 – Schéma-bloc d'un modèle de prédiction.

Le modèle du système représente les relations entrées/sorties et le modèle de perturbation est utilisé pour représenter la perturbation ou pour approximer les erreurs de modélisation.

Comme la commande prédictive est une commande numérique, le modèles utilisé est donc de nature discrète.

Suivant la façon dont la perturbation est supposée intervenir, on obtient de très nombreux structures de modèles. On se limite dans ce qui suit, à la présentation de la structure la plus couramment utilisée en commande prédictive, le modèle CARIMA.

1.6.1.1 Représentation des systèmes discrets :

Un système linéaire discret monovariante peut être décrit sous les formes suivantes :

Représentation par convolution discrète

- Réponse impulsionnelle : c'est la réponse d'un système par rapport à une impulsion unitaire appliquée à son entrée.

$$u(k) = \begin{cases} 1 & \text{Si } k = 0 \\ 0 & \text{Si } k \neq 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

La relation liant la sortie $y(k)$ à l'entrée $u(k)$ est donnée par :

$$y(k) = \sum_{i=0}^N h_i u(k-i) = \sum_{i=0}^N u(i) h_{k-i} \quad (1.20)$$

où

- N est l'ordre du troncature de la réponse impulsionnelle,
- k est un entier désignant l'instant d'échantillonnage.

- Réponse indicielle : elle correspond à la réponse d'un système à un échelon appliqué à son entrée.

$$u(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

La relation liant la sortie $y(k)$ à l'entrée $u(k)$ est donnée par :

$$y(k) = \sum_{i=1}^N g_i \Delta u(k-i) \quad (1.22)$$

où

- $g_i = y(i)$ sont les coefficients de la réponse indicielle,
- $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$

Représentation par fonction de transfert discrète.

En utilisant la transformée en z , on peut définir une fonction de transfert $G(z)$ liant la sortie $Y(z)$ d'un système à son entrée $U(z)$ donnée par la relation suivante :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (1.23)$$

La fonction de transfert $G(z)$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$G(z) = \frac{\sum_{i=1}^{n_B} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{n_A} a_i z^{-i}} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (1.24)$$

Avec $a_0 \neq 0$

Remarque 1.1

Si le système continu est représenté par la fonction de transfert (où s représente la variable de Laplace) :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (1.25)$$

On obtient le modèle discret en calculant la transformée en z du système avec bloqueur d'ordre zéro, soit :

$$G(z) = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{G(s)}{s} \right] \quad (1.26)$$

Représentation par modèle d'état discret

A partir du modèle d'état continu donnée par l'équation (1.10), le système peut être représenté sous une représentation d'état discrète :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_d x(k) + B_d u(k) \\ y(k) &= C x(k) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Avec

- $A_d = \exp(AT_e)$,
- $B_d = \int_0^{T_e} \exp(At) dt B$,
- T_e période d'échantillage.

1.6.1.2 Modèle du système avec perturbation

Avec un régulateur prédictif, il est possible de prendre en compte une perturbation mesurable dans le calcul de la commande. Pour ce faire, la première étape est de construire un modèle de l'effet de la perturbation mesurée, qui peut être considérée, dans le cas linéaire, comme s'ajoutant sur la sortie (Figure 1.6).

La sortie du procédé peut alors s'écrire :

$$y(k) = y(0) + \sum_{i=1}^{i=N_p} a_i \Delta u(k-i) + \sum_{i=1}^{i=N_p} b_i \Delta p(k-i) \quad (1.28)$$

où $p(k)$ est la valeur de la perturbation mesurée.

A partir de ce modèle, on peut prédire la sortie du système en fonction des actions et des perturbations futures.

Bien que ces perturbations ne sont pas connues dans le futur, il est donc nécessaire

de construire un prédicteur pour la perturbation mesurable. En général, elle est supposée constante.

1.6.2 Problème d'optimisation

Le problème de commande prédictive revient à déterminer la loi de commande qui permet de minimiser le critère de performance J appelé également fonction objectif ou fonction coût. Pour ce critère, l'objectif est :

- d'assurer la poursuite : faire coïncider la sortie prédite à la consigne désirée sur un horizon futur fini,
- de minimiser l'effort (énergie) nécessaire pour l'application de la commande.

L'expression générale de la fonction coût contient les erreurs quadratiques entre la consigne future désirée et les prédictions sur un horizon de prédiction ainsi que la variation de la commande. Cette fonction est donnée par :

$$J = \sum_{j=1}^{N_p} Q(j)(\hat{y}(t+j/t) - y^d(t+j))^2 + \sum_{j=1}^{N_u} R(j)(\Delta u(t+j-1))^2 \quad (1.29)$$

avec

- Q et R sont des matrices de pondération symétriques définies positives,
- N_p horizon de prédiction,
- N_u horizon de commande,
- y^d consigne désirée,
- \hat{y} sortie prédite.

On peut calculer analytiquement la séquence optimale de commande mais dans ce cas les contraintes ne sont pas prises en compte. C'est pourquoi on préfère résoudre ce problème grâce à un algorithme de programmation quadratique qui minimise cette fonction en prenant en comptes différents types de contraintes sur les différentes variables.

Remarque 1.2 Pour simplifier le problème d'optimisation, on suppose que la commande est constante à partir de l'instant N_u donc $\Delta u(t+j) = 0$ pour $j \geq N_u$

1.6.3 Contraintes

Dans la pratique, les processus sont sujets à des contraintes qui doivent être prises en compte dans le problème d'optimisation afin d'obtenir des commandes admissibles. Les techniques de la commande prédictive intègrent les contraintes pendant la phase de synthèse et d'implantation du contrôleur, permettant à l'utilisateur de présenter les

contraintes d'une façon directe de sorte que l'algorithme trouve automatiquement la meilleure solution admissible.

Le système de commande, particulièrement dans le cas de la commande prédictive avec des grands horizons de prédiction, doit prévoir la violation des restrictions et corriger avec une forme appropriée. Bien que les restrictions à l'entrée et à la sortie du processus se traitent de la même manière, les implications de chaque type de contraintes sont différentes.

Les restrictions en sortie sont principalement dues à des raisons de sécurité opérationnelles, et doivent être contrôlées à l'avance puisqu'elles peuvent endommager les équipements physiques et causer des pertes dans la production.

Dans le cas des variables d'entrée, elles peuvent toujours être bornées dans leurs limites permises en fonction des mécanismes de saturation.

En pratique, il est habituel d'employer le GPC standard pour calculer le signal $u(k)$, sans contraintes, puis, de le saturer à ses limites permises.

La proposition principale du GPC, qui est d'appliquer la meilleure action de commande possible en vue de minimiser la fonction objective, ne sera pas atteinte de cette façon.

Les contraintes généralement imposées sont :

- Contraintes sur les amplitudes des commandes : *pour* $j = 1, \dots, N_u$: $u_{min} \leq u(t + j) \leq u_{max}$
- Contraintes sur la variation de la commande *pour* $j = 1, \dots, N_u$ $\Delta u_{min} \leq \Delta u(t + j) \leq \Delta u_{max}$
- Contraintes sur la sortie prédite *pour* $j = 1, \dots, N$: $y_{min} \leq \hat{y}(t + j) \leq y_{max}$

1.6.4 Conception de la loi de commande

Dans la commande prédictive, le modèle est utilisé pour prédire l'évolution future des sorties du système. Ces prédictions seront utilisées par la suite pour la résolution de la fonction coût (1.29) et la détermination de la loi de commande, puis on applique au système uniquement la première composante de $\Delta u(t)$ avec $u(t) = u(t - 1) + \Delta u(t)$

Remarque 1.3 On distingue deux types de prédictions :

- La réponse libre $\hat{y}_l(t + j)$, elle correspond à la réponse du système lorsque la com-

mande est maintenue constante à sa valeur actuelle $u(t)$ le long de l'horizon de prédiction N_p .

- La réponse forcée $\hat{y}_f(t+j)$ qui dépend des commandes futures $u(t+j)$, $j = 1, \dots, N_p$

1.7 Différents types de la commande prédictive

La commande prédictive est un terme général qui englobe un ensemble de méthodes différentes. Néanmoins, toutes ces techniques utilisent la même philosophie de contrôle et le même principe de fonctionnement. Dans ce paragraphe, on présentera deux méthodes, la DMC et la GPC.

1.7.1 Commande dynamique matricielle DMC

La DMC (Dynamic Matrix Control) qui a été proposée par Cutler et Ramaker en 1979, est un algorithme basé sur le modèle de la réponse indicielle dont l'objectif est d'amener la sortie à se rapprocher de la consigne désirée. La perturbation est considérée constante. L'erreur de poursuite et l'effort sont minimisés en spécifiant un critère de performance quadratique.

L'un des inconvénients de la DMC est qu'elle est utilisée pour des systèmes stables sans intégrateurs. Cet inconvénient est dû au fait que seuls les N premiers coefficients de la réponse indicielle sont pris en compte pour modéliser le système.

1.7.2 Commande prédictive généralisée GPC

La GPC (Generalized Predictive Control) a été présentée en 1985 par Clark et Moh-tadi. Elle est basée sur un modèle de type CARIMA (Controller Auto-Regressive Integrated Moving Average) et permet la prise en considération des contraintes sur les entrées et les sorties.

Le détail de cette méthode fera l'objet du deuxième chapitre.

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté des généralités sur la commande prédictive. Après avoir introduit le principe de cette technique de commande, nous avons passé en revue le problème de la commande optimale qui constitue une étape essentielle dans la commande prédictive. Ensuite, nous avons détaillé les différents éléments de cette commande.

Chapitre 2

Commande prédictive généralisée GPC

2.1 Introduction

L'amélioration des performances des systèmes commandés présente un souci constant menant à des techniques de commande de plus en plus évoluées.

La commande prédictive généralisée (GPC Generalized Predictive Control) est considéré comme étant la plus populaire des méthodes de prédiction, particulièrement pour les processus industriels. Elle consiste à prendre en compte le comportement futur d'un système grâce à un modèle numérique de prédiction.

Dans ce chapitre, nous exposons la description et l'analyse théorique de l'algorithme GPC, depuis le modèle mathématique jusqu'à l'obtention de la loi de commande.

2.2 Formulation du problème

L'idée de base de la GPC est de calculer une séquence de commandes futures de telle façon qu'une fonction de coût à plusieurs composantes soit minimale sur un certain horizon de prédiction.

Le critère à optimiser est une fonction quadratique qui mesure la distance entre la sortie prédite du système et une entrée de référence, plus une fonction quadratique qui mesure l'effort de commande.

Le principe de fonctionnement de la commande prédictive généralisée est représenté par la Figure 2.1. La GPC est souvent utilisée avec une adaptation en ligne du modèle

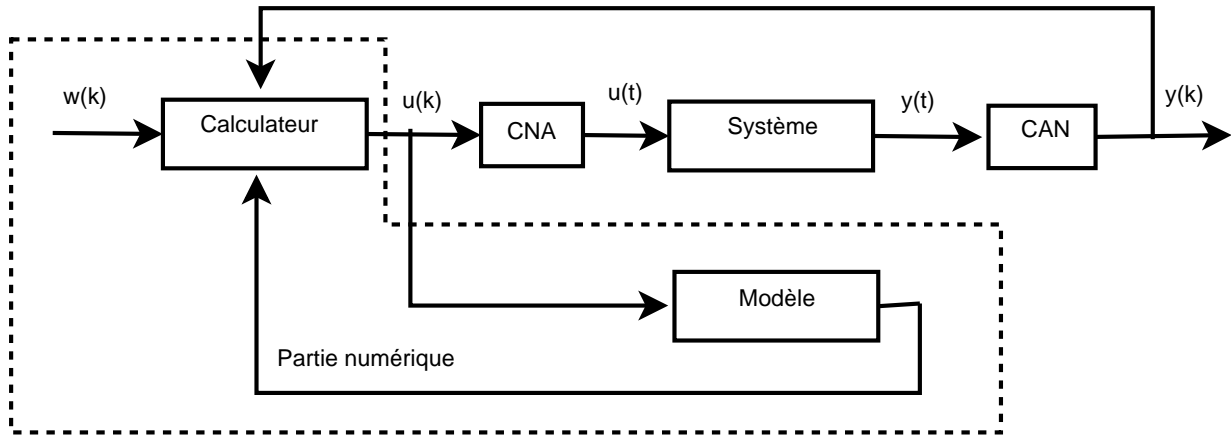


FIGURE 2.1 – Principe de fonctionnement de la GPC.

pour réaliser les prédictions.

$W(k)$ représente la consigne et $\hat{Y}(k)$ la sortie prédite obtenue grâce à un modèle numérique du système.

2.2.1 Modèle numérique de prédiction

La présence d'un modèle numérique est une condition nécessaire pour le fonctionnement de la GPC, puisqu'il permet de calculer la sortie prédite sur un horizon fini.

Pour l'étape de prédiction, le modèle utilisé est le modèle CARIMA (Controlled Autoregressive and Integrated Moving Average)

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k-1) + \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}e(k) \quad (2.1)$$

où

- z^{-1} est l'opérateur retard tel que $z^{-1}u(k) = u(k-1)$,
- $D(z^{-1}) = \Delta = 1 - z^{-1}$,
- $C(z^{-1})$ est un polynôme dit de perturbation : $C(z^{-1}) = 1 + c_1z^{-1} + \dots + c_{nc}z^{-nc}$,
- $e(k)$ est un bruit blanc gaussien,
- $A(z^{-1})$ et $B(z^{-1})$ sont des polynômes définis par :

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{nA}z^{-nA}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_{nB}z^{-nB}$$

Ce modèle traduit l'influence combinée de l'entrée maîtrisée $u(k)$ et du bruit $e(k)$, son utilisation permet d'avoir deux avantages essentiels :

- L'amélioration de la qualité de l'identification des paramètres de processus à contrôler ;
- L'effet d'éliminer l'influence des oscillations de perturbations non désirées.

Le schéma fonctionnel d'un tel modèle est illustré sur la Figure 2.2 :

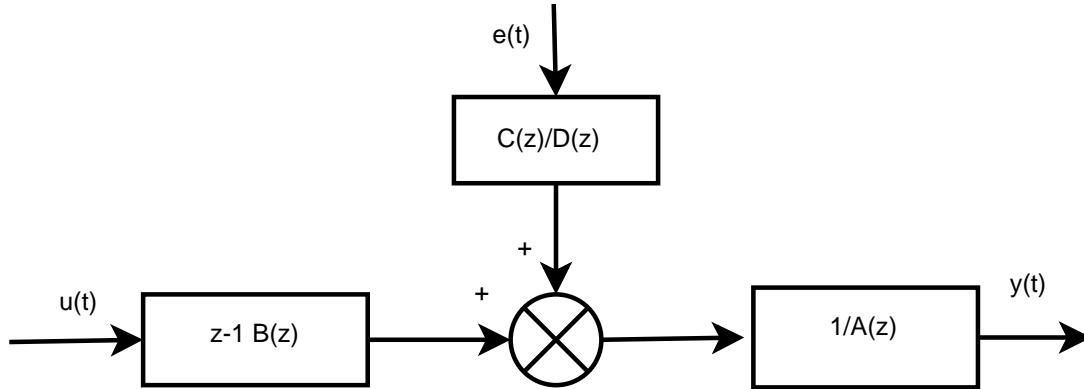


FIGURE 2.2 – Modèle C ARIMA.

La fonction de transfert discrète que l'on peut déduire est alors :

$$\frac{Y(z)}{\Delta U(z)} = z^{-1} \frac{B(z^{-1})}{\Delta(z^{-1}) A(z^{-1})} \quad (2.2)$$

Le but de cette modélisation étant d'introduire un intégrateur dans la fonction de transfert et donc d'annuler toute erreur statique vis à vis d'une consigne constante.

2.2.2 Calcul du prédicteur optimal

Pour calculer les prédictions, on considère $C(z^{-1}) = 1$, l'équation (2.1) s'écrit :

$$A(z^{-1}) y(t) = B(z^{-1}) u(t-1) + \frac{e(t)}{\Delta} \quad (2.3)$$

Considérons l'équation de Diophantine suivante :

$$C(z^{-1}) = E_j(z^{-1}) \tilde{A}(z^{-1}) + z^{-j} F_j(z^{-1}) \quad (2.4)$$

Avec :

- $\tilde{A}(z^{-1}) = \Delta A(z^{-1})$ et $\Delta = 1 - z^{-1}$,
- $F_j(z^{-1}) = f_{j,0} + f_{j,1}z^{-1} + f_{j,2}z^{-2} + \dots + f_{j,na}z^{-na}$,
- $E_j(z^{-1}) = e_{j,0} + e_{j,1}z^{-1} + e_{j,2}z^{-2} + \dots + e_{j,j-1}z^{-(j-1)}$,
- degré du polynôme $F_j(z^{-1}) = na$,
- degré du polynôme $E_j(z^{-1}) = j - 1$,
- Le prédicteur de la sortie est construit pour $C(z^{-1}) = 1$..

A partir de l'équation (2.4), on a :

$$E_j(z^{-1}) \tilde{A}(z^{-1}) = 1 - z^{-j} F_j(z^{-1}) \quad (2.5)$$

Et l'équation (2.4) devient :

$$1 = E_j(z^{-1}) \tilde{A}(z^{-1}) + z^{-j} F_j(z^{-1}) \quad (2.6)$$

Multiplions l'équation (2.3) par $\Delta E_j(z^{-1}) z^j$, on obtient :

$$\Delta E_j(z^{-1}) z^j A(z^{-1}) y(t) = \Delta E_j(z^{-1}) z^j B(z^{-1}) u(t-1) + E_j(z^{-1}) z^j e(t) \quad (2.7)$$

Sachant que :

- $y(t) z^j = y(t+j)$,
- $u(t-1) z^j = u(t+j-1)$,
- $\Delta A(z^{-1}) = A(\tilde{z}^{-1})$,
- $e(t) z^j = e(t+j)$.

Allors :

$$E_j(z^{-1}) \tilde{A}(z^{-1}) y(t+j) = E_j(z^{-1}) B(z^{-1}) \Delta u(t+j-1) + E_j(z^{-1}) e(t+j) \quad (2.8)$$

D'après l'équation (2.6), on a : $E_j(z^{-1}) \tilde{A}(z^{-1}) = 1 - z^{-j} F_j(z^{-1})$.

Concrètement, les polynômes F_j et E_j sont calculés par division polynomiale de 1 par $\tilde{A}(z^{-1})$.

L'objectif de cette division est de scinder le modèle en deux parties de façon à faire apparaître le poids du passé, que l'on doit subir, et la partie générée par les actions futures qu'on doit calculer pour obtenir la sortie souhaitée.

On remplace cette expression dans (2.7), on obtient :

$$[1 - z^{-j} F_j(z^{-1})] y(t+j) = E_j(z^{-1}) B(z^{-1}) \Delta u(t+j-1) + E_j(z^{-1}) e(t+j) \quad (2.9)$$

D'où

$$y(t+j) = F_j(z^{-1}) y(t) + E_j(z^{-1}) B(z^{-1}) \Delta u(t+j-1) + E_j(z^{-1}) e(t+j) \quad (2.10)$$

Le terme $e(t+j)$ spécifie une séquence de perturbations futures.

Etant donné qu'une perturbation future est imprévisible, le prédicteur optimal est défini en considérant que la séquence de perturbations $e(t+j)$ est nulle, alors

$$\hat{y}(t + j/t) = F_j(z^{-1}) y(t) + G_j(z^{-1}) \Delta u(t + j - 1) \quad (2.11)$$

Avec

$$G_j(z^{-1}) = E_j(z^{-1}) B(z^{-1})$$

Les prédictions $\hat{y}(t + j/t)$ peuvent être écrites sous la forme :

$$\hat{y}(t + j/t) = G_j(z^{-1}) \Delta u(t + j) + [F_j(z^{-1}) y(t) + G_j(z^{-1}) \Delta u(t - 1)] \quad (2.12)$$

On pose $f = F_j(z^{-1}) y(t) + G_j(z^{-1}) \Delta u(t - 1)$, l'équation (2.12) peut être écrite sous la forme matricielle :

$$\hat{y} = G \Delta u + f \quad (2.13)$$

Où

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{y}(t+1) \\ \hat{y}(t+2) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+N_p) \end{bmatrix}}_{\hat{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_2 & g_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N_p} & g_{N_p-1} & \cdots & g_0 \end{bmatrix}}_G \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \vdots \\ \Delta u(t+N_u) \end{bmatrix}}_{\Delta u} + \underbrace{\begin{bmatrix} f(t+1) \\ f(t+2) \\ \vdots \\ f(t+N_p) \end{bmatrix}}_f \quad (2.14)$$

La matrice G est triangulaire inférieure de dimension $N_p \times N_u$, et les valeurs g_i correspondent aux coefficients de la réponse indicielle du modèle. Le vecteur f correspond à la réponse libre.

2.2.3 Critère à minimiser

Une fois les prédictions faites, on doit trouver la future séquence de commande à appliquer au système pour atteindre la consigne désirée en suivant la trajectoire de référence. Pour cela, on doit minimiser une fonction de coût (1.29) qui contient les erreurs quadratiques entre la trajectoire de référence et les prédictions sur l'horizon de prédiction ainsi que la variation de la commande.

La minimisation analytique de cette fonction fournit la séquence de commandes futures dont seule la première sera effectivement appliquée sur le système.

La procédure étant itérée de nouveau à la période d'échantillonnage suivante selon le principe de l'horizon glissant.

2.2.4 Calcul de la loi de commande

La loi de commande (GPC) a pour objectif de minimiser le critère J donné par l'équation (1.29). Autrement dit, on devra déterminer le vecteur Δu qui minimise le critère J .

Donc J est minimal, si :

$$\frac{\partial J}{\partial u} = 0 \quad (2.15)$$

Le vecteur Δu minimisant le critère J est :

$$\Delta u = (G^T Q G + R)^{-1} G^T Q (y^d - f) \quad (2.16)$$

Cette dernière équation représente la loi de commande de la méthode GPC.

La dimension de la matrice à inverser est $(N_p \times N_u)$.

On remarque que pour calculer la loi de commande, il est seulement nécessaire de connaître la matrice G et le vecteur f pour la détermination de la solution optimale :

$$\Delta u = k_1 (y^d - f) \quad (2.17)$$

Avec k_1 représente la première ligne de la matrice inverse.

La commande future à appliquer sera :

$$u(t) = u(t-1) + k_1 (y^d - f) \quad (2.18)$$

2.3 Choix des paramètres de réglage de la GPC

Le choix des paramètres de réglage a pour objectif d'assurer les meilleures performance lors de la commande du système.

— Choix de l'horizon de prédiction minimal N_p :

Il est nécessaire de bien choisir l'horizon de prédiction car il représente la longueur de l'intervalle de temps futur sur lequel on cherche à minimiser l'écart entre la sortie prédite et la sortie désirée

— Choix de l'horizon de commande N_u :

Le choix de l'horizon de commande N_u fixe la dimension des matrices à inverser dans le calcul de la commande optimale. Rappelons que N_u est le nombre de variations de la variable manipulée que l'on autorise dans le futur avant qu'elle soit fixée à une valeur constante.

— Choix des matrices de pondération Q et R :

Ces paramètres de pondération étant la balance réalisant le compromis entre une commande raide, lorsqu'ils sont très faibles et pouvant ainsi faire diverger le processus réel d'une part, et d'autre part, lorsqu'ils ont des valeurs très grandes, la commande devient excessivement pondérée et peu dynamique pour réaliser le ralliement à la consigne.

2.4 Exemple d'application

On désire concevoir une commande prédictive généralisée (GPC) pour le système dynamique suivant :

$$(1 - 0.8z^{-1})y_m(t) = (0.4 + 0.6z^{-1})u(t-1) \quad (2.19)$$

On cherche l'expression de la commande $u(t)$ pour un horizon de prédiction $N_p = 3$ et un horizon de commande $N_u = 3$.

Les matrices de pondérations :

$$Q = I_{3 \times 3} \text{ et } R = 0.8 I_{3 \times 3}$$

$$A(z^{-1}) = 1 - 0.8z^{-1}$$

$$B(z^{-1}) = 0.4 + 0.6z^{-1}$$

— Calcul du polynôme \tilde{A} :

$$\tilde{A}(z^{-1}) = \Delta A(z^{-1})$$

$$\tilde{A}(z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 - 0.8z^{-1})$$

$$\tilde{A}(z^{-1}) = 1 - 1.8z^{-1} + 0.8z^{-2}$$

— Calcul des polynômes $E_j(z^{-1})$ et $F_j(z^{-1})$ pour $j = 1, N_p$:

— La division Euclidienne de 1 par $\tilde{A}(z^{-1})$ donne :

$$\begin{array}{c|c}
 \frac{1}{1 - 1.8z^{-1} + 0.8z^{-2}} & \frac{1 - 1.8z^{-1} + 0.8z^{-2}}{\underbrace{1}_{E_1} + 1.8z^{-1} + 2.44z^{-2}} \\
 & \underbrace{\hspace{10em}}_{E_2(z^{-1})} \\
 & \underbrace{\hspace{15em}}_{E_3(z^{-1})} \\
 \hline
 z^{-1} \left(\underbrace{1.8z^{-1} + 0.8z^{-2}}_{F_1(z^{-1})} \right) & \leftarrow 1.8z^{-1} + 0.8z^{-2} \\
 z^{-2} \left(\underbrace{2.44 - 1.44z^{-1}}_{F_2(z^{-1})} \right) & \leftarrow \begin{array}{l} 1.8z^{-1} - 3.24z^{-2} + 1.44z^{-3} \\ 2.44z^{-2} - 1.44z^{-3} \end{array} \\
 z^{-3} \left(\underbrace{2.952 - 1.952z^{-1}}_{F_3(z^{-1})} \right) & \leftarrow \begin{array}{l} 2.44z^{-2} - 4.392z^{-3} + 1.952z^{-4} \\ 2.952z^{-3} - 1.952z^{-4} \end{array}
 \end{array}$$

On déduit les polynômes $E_j(z^{-1})$ et $F_j(z^{-1})$

$$\begin{array}{ll}
 E_1(z^{-1}) = 1 & F_1(z^{-1}) = 1.8 - 0.8z^{-1} \\
 E_2(z^{-1}) = 1 + 1.8z^{-1} & F_2(z^{-1}) = 2.44 - 1.44z^{-1} \\
 E_3(z^{-1}) = 1 + 1.8z^{-1} + 2.44z^{-2} & F_3(z^{-1}) = 2.952 - 1.952z^{-1}
 \end{array}$$

— Calcul des polynômes $G_j(z^{-1})$ pour $j = 1, N_p$:

$$\begin{array}{l}
 G_1(z^{-1}) = E_1(z^{-1}) B(z^{-1}) \\
 G_1(z^{-1}) = 1 (0.4 + 0.6z^{-1}) \\
 G_1(z^{-1}) = 0.4 + 0.6z^{-1}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 G_2(z^{-1}) = E_2(z^{-1}) B(z^{-1}) \\
 G_2(z^{-1}) = (1 + 1.8z^{-1}) (0.4 + 0.6z^{-1}) \\
 G_2(z^{-1}) = 0.4 + 1.32z^{-1} + 1.08z^{-2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 G_3(z^{-1}) = E_3(z^{-1}) B(z^{-1}) \\
 G_3(z^{-1}) = (1 + 1.8z^{-1} + 2.44z^{-2}) (0.4 + 0.6z^{-1}) \\
 G_3(z^{-1}) = 0.4 + 1.32z^{-1} + 2.056z^{-2} + 1.464z^{-3}
 \end{array}$$

— Calcul des prédictions $\hat{y}_m(t + j/t)$ pour $j = 1, N_p$

-Pour $j = 1$

$$\begin{aligned}\hat{y}_m(t+1/t) &= G_1(z^{-1}) \Delta u(t+1-1) + F_1(z^{-1}) y_m(t) \\ \hat{y}_m(t+1/t) &= G_1(z^{-1}) \Delta u(t) + F_1(z^{-1}) y_m(t) \\ \hat{y}_m(t+1/t) &= (0.4 + 0.6z^{-1}) \Delta u(t) + (1.8 - 0.8z^{-1}) y_m(t) \\ \hat{y}_m(t+1/t) &= 0.4\Delta u(t) + 0.6\Delta u(t-1) + 1.8y_m(t) - 0.8y_m(t-1)\end{aligned}$$

Pour $j = 2$

$$\begin{aligned}\hat{y}_m(t+2/t) &= G_2(z^{-1}) \Delta u(t+2-1) + F_2(z^{-1}) y_m(t) \\ \hat{y}_m(t+2/t) &= G_2(z^{-1}) \Delta u(t+1) + F_2(z^{-1}) y_m(t) \\ \hat{y}_m(t+2/t) &= (0.4 + 1.32z^{-1} + 1.08z^{-2}) \Delta u(t+1) + (2.44 - 1.44z^{-1}) y_m(t) \\ \hat{y}_m(t+2/t) &= 0.4) \Delta u(t+1) + 1.32) \Delta u(t) + 1.08) \Delta u(t-1) + 2.44y_m(t) - 1.44y_m(t-1)\end{aligned}$$

-Pour $j = 3$

$$\begin{aligned}\hat{y}_m(t+3/t) &= G_3(z^{-1}) \Delta u(t+3-1) + F_3(z^{-1}) y_m(t) \\ \hat{y}_m(t+3/t) &= G_3(z^{-1}) \Delta u(t+2) + F_3(z^{-1}) y_m(t) \\ \hat{y}_m(t+3/t) &= (0.4 + 1.32z^{-1} + 2.056z^{-2} + 1.464z^{-3}) \Delta u(t+2) + (2.952 - 1.952z^{-1}) y_m(t) \\ \hat{y}_m(t+3/t) &= 0.4\Delta u(t+2) + 1.32\Delta u(t+1) + 2.056\Delta u(t) + 1.464\Delta u(t-1) + \\ &\quad 2.952y_m(t) - 1.952y_m(t-1)\end{aligned}$$

Prédictions sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{y}_m(t+1/t) \\ \hat{y}_m(t+2/t) \\ \hat{y}_m(t+3/t) \end{bmatrix}}_{\hat{y}_m} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 1.32 & 0.4 & 0 \\ 2.056 & 1.32 & 0.4 \end{bmatrix}}_G \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \Delta u(t+2) \end{bmatrix}}_{\Delta u} + \begin{bmatrix} 0.6\Delta u(t-1) + 1.8y_m(t) - 0.8y_m(t-1) \\ 1.08\Delta u(t-1) + 2.44y_m(t) - 1.44y_m(t-1) \\ 1.464\Delta u(t-1) + 2.952y_m(t) - 1.952y_m(t-1) \end{bmatrix}$$

— Expression de la commande à appliquer à l'instant t :

En utilisant l'équation (2.16), on obtient :

$$\Delta u(t) = -0.604 \Delta u(t-1) - 1.371 y_m(t) + 0.805 y_m(t-1) + 0.133 y_m^d(t+1) + 0.286 y_m^d(t+2) + 0.147 y_m^d(t+3)$$

Et d'après la relation : $u(t) = u(t-1) + \Delta u(t)$, l'expression de la commande à appliquer à l'instant t est :

$$u(t) = 0.396 u(t-1) + 0.604 u(t-2) - 1.371 y_m(t) + 0.805 y_m(t-1) + 0.133 y_m^d(t+1) + 0.286 y_m^d(t+2) + 0.147 y_m^d(t+3)$$

La sortie $y(t)$ en boucle fermée est représentée par la Figure 2.3 et l'évolution de la commande est donnée par la Figure 3.1.

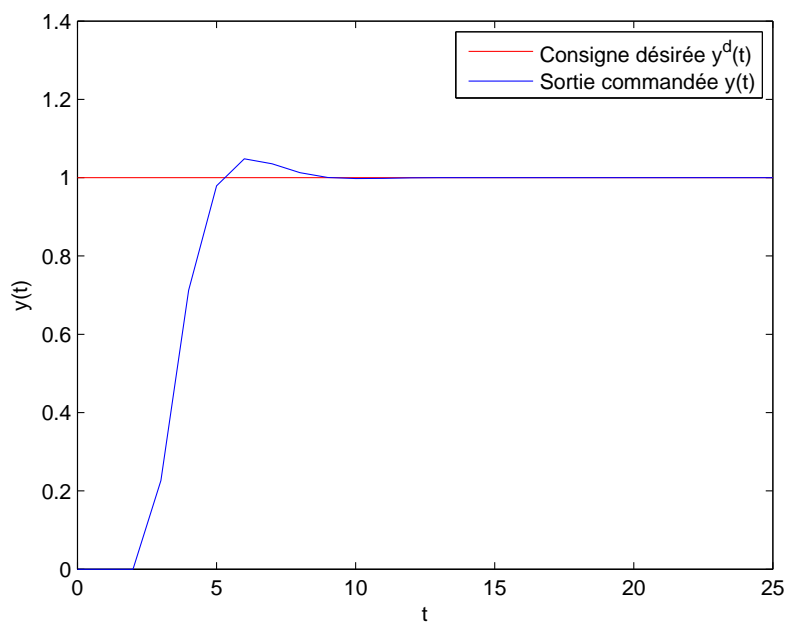
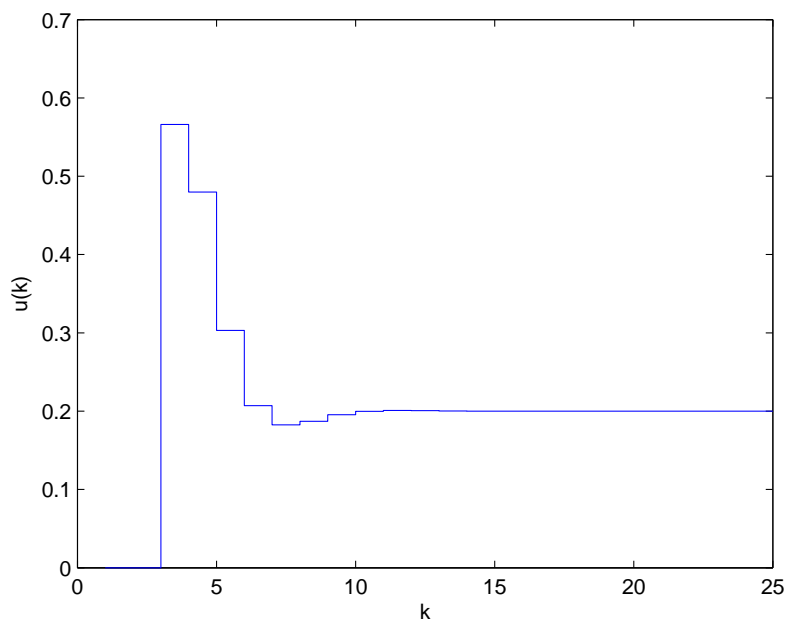
FIGURE 2.3 – Evolution de la sortie $y(t)$ 

FIGURE 2.4 – Evolution de la commande à appliquer

D'après ces figures, on remarque que l'application de la GPC garantit la poursuite et la stabilité du système.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'algorithme de la commande prédictive généralisée GPC qui comprend les étapes suivantes :

- Calcul du modèle de prédiction,
- calcul des prédictions
- le critère à minimiser
- le calcul de la loi de commande à appliquer.

Après avoir détaillé ces différentes étapes de la GPC, nous avons illustré son application par un exemple d'application.

Chapitre 3

Application de la GPC pour la commande d'un bac de stockage

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on effectuera des simulations sur l'application de l'algorithme GPC développé dans le chapitre précédent. Pour ce faire, nous allons d'abord définir les systèmes à retard. Ensuite, nous présentons le bac de stockage qui sera modélisé par une fonction de transfert du système, puis on lui appliquera la commande prédictive généralisée.

3.2 Systèmes à retards

Les systèmes à retards sont des systèmes dont la dynamique dépend non seulement de la valeur de l'état en temps courant t , mais aussi des valeurs passées de la commande et/ou de l'état prise sur un certain horizon temporel. On peut alors considérer que l'état du système est en fait une fonction définie sur un intervalle de temps égal au retard. Ainsi, la présence du retard a une influence considérable sur le comportement d'un système bouclé et peut même être à l'origine d'instabilité ou d'oscillations indésirables.

En pratique, on constate que la plupart des commandes actuellement sont implantées sur des calculateurs numériques. Par conséquent, même si un processus à réguler ne contient pas de retard intrinsèque, bien souvent des retards apparaissent dans la boucle de commande par l'intermédiaire des temps de réaction des capteurs ou des actionneurs, des temps de transmissions des informations ou des temps de calculs. La Figure 3.1 permet de localiser les lieux où apparaissent ces retards. Ces retards peuvent quelquefois être négligés, mais lorsque leur taille devient significative au regard des performances temporelles du système (dynamiques en boucles ouverte et fermée) il n'est plus possible de les ignorer.

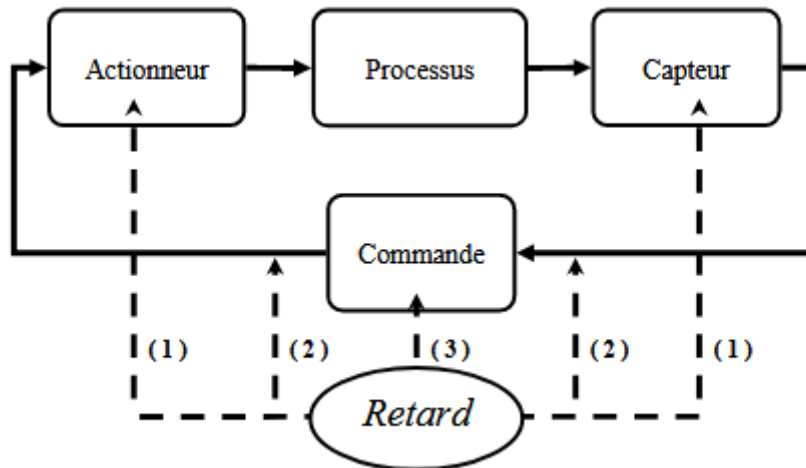


FIGURE 3.1 – Illustration de la provenance des retards dans une boucle de commande.

Le phénomène de retard apparaît naturellement dans la modélisation de nombreux processus physiques tel que le bac de stockage qui fera l'objet de cette étude.

3.3 Définition du système à modéliser

Le procédé à étudier est un système hydraulique constitué d'un bac de stockage, alimenté par un débit d'entrée $Q_e(t)$. Ce débit est fourni par une vanne contrôlée. Le bac, de section S , se vide à travers un orifice de diamètre d_1 , qui se trouve en bas du bac. Le bac se vide via une vanne de sortie, située à une distance L de l'orifice comme le montre le schéma de la Figure 3.2. La hauteur du liquide dans le bac ne doit pas dépasser la hauteur maximale H_{max} : et $e(t)$ est une perturbation qui peut affecter ce débit.

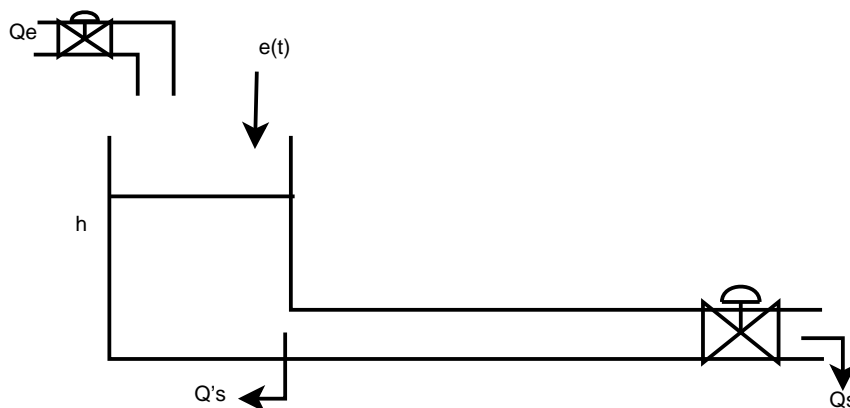


FIGURE 3.2 – Bac de stockage.

On note :

- S : la section du bac,
- h : la hauteur du liquide dans le bac,

- Q_e : le débit d'alimentation ,
- Q'_s : le débit intermédiaire,
- Q_s : le débit de vidange.

3.3.1 Mise en équation du modèle monovariabile

Nous cherchons à modéliser le phénomène de remplissage et de vidange du bac de stockage. On ne tient pas compte des effets autres que le transfert de matière. Le liquide est supposé de masse volumique constante.

Les variables peuvent être classés comme suit :

- Variable d'entrée : le débit volumique d'alimentation Q_e ,
- Variable d'état : le volume du bac, ou de façon équivalente, la hauteur de liquide h ,
- Variable de sortie : le débit volumique de vidange Q_s .

Le volume du liquide est exprimé par la relation :

$$S \frac{dh(t)}{dt} = Q_e(t) - Q'_s(t) \quad (3.1)$$

Le débit Q'_s peut être considéré comme étant proportionnel à la hauteur du liquide dans le bac :

$$Q'_s(t) = \alpha h(t) \quad (3.2)$$

L'équation (3.1) devient :

$$\frac{S}{\alpha} \frac{dQ'_s(t)}{dt} = Q_e(t) - Q'_s(t) \quad (3.3)$$

On applique la Transformée de Laplace (TL), on obtient :

$$\frac{Q'_s(s)}{Q_e(s)} = \frac{1}{as + 1} \quad (3.4)$$

Avec :

$$a = \frac{S}{\alpha} \text{ et } Q'_s(t_0) = Q'_s(0) = 0$$

La sortie $Q_s(t) = Q'_s(t - \tau)$, en appliquant la TL, on trouve :

$$Q_s(s) = Q'_s(s) e^{-\tau s} \quad (3.5)$$

La fonction de transfert s'écrit :

$$G(s) = \frac{Q_s(s)}{Q_e(s)} = \frac{1}{as + 1} e^{-\tau s} \quad (3.6)$$

C'est un modèle linéaire, de premier ordre, avec un temps de retard τ .

A partir de la fonction de transfert continue, on calcul la fonction de transfert discrète :

$$G(z) = TZ\{BOZ.G(s)\} \quad (3.7)$$

Avec :

- TZ est la transformée en Z,
- BOZ est le bloqueur d'ordre zéro.

La fonction de transfert discrète est :

$$G(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} z^{-d} \quad (3.8)$$

Avec :

- $b_1 = k(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau}})$,
- $a_1 = e^{-\frac{T_e}{\tau}}$;
- d exprime le retard en mode discret.

3.3.2 Application de l'algorithme GPC

L'objectif du système de commande consiste à maintenir le niveau du liquide dans le bac à un niveau désiré et ce, malgré la présence de perturbations.

Après avoir calculer la fonction de transfert discrète, le modèle nominal utilisé pour la conception de la loi de commande est le suivant,

$$G(z) = \frac{-0.22z^{-1}}{1 - 0.79z^{-1}} z^{-1} \quad (3.9)$$

Avec :

- une période d'échantillonnage $T_e = 0.25s$, $d = 1$, $a = 1$ et $k = 1$.

On met ce modèle sous forme d'équation d'entrée sortie :

$$G(z) = \frac{Q_s(z)}{Q_e(z)} = \frac{-0.22z^{-1}}{1 - 0.79z^{-1}} z^{-1} \quad (3.10)$$

On aura :

$$(1 - 0.79z^{-1}) Q_s(z) = -0.22z^{-2} Q_e(z) \quad (3.11)$$

On pose $Q_e(z) = u(z)$ et $Q_s(z) = y(z)$.

Par analogie avec l'équation (2.3), les polynômes A et B sont égaux à :

$$A(z^{-1}) = 1 - 0.79z^{-1} ; B(z^{-1}) = -0.22z^{-1} \tag{3.12}$$

Le polynôme de perturbation C est égale à 1 ($C(z^{-1}) = 1$).

On cherche l'expression de la commande u(t) dans le cas où l'horizon de commande et l'horizon de prédiction sont tous les deux égaux à 3 :

$$N_u = N_p = 3$$

Les matrices de pondérations :

$$Q = I_{3 \times 3} \text{ et } R = 0.5 \times I_{3 \times 3}$$

— Calcul du polynôme \tilde{A} :

$$\tilde{A}(z^{-1}) = \Delta A(z^{-1})$$

$$\tilde{A}(z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 - 0.79z^{-1})$$

$$\tilde{A}(z^{-1}) = 1 - 1.79z^{-1} + 0.79z^{-2}$$

— Calcul des polynômes $E_j(z^{-1})$ et $F_j(z^{-1})$ pour $j = 1, N_p$:

Pour ce faire, on utilise la La division Euclidienne.

La division Euclidienne de 1 par $\tilde{A}(z^{-1})$ donne :

	$\frac{1}{1 - 1.79z^{-1} + 0.79z^{-2}}$	$\frac{1 - 1.79z^{-1} + 0.79z^{-2}}{\underbrace{1}_{E_1} + 1.79z^{-1} + 2.40z^{-2}}$ $\underbrace{\hspace{10em}}_{E_2(z^{-1})}$ $\underbrace{\hspace{10em}}_{E_3(z^{-1})}$
$z^{-1} \left(\underbrace{1.79z^{-1} - 0.79z^{-2}}_{F_1(z^{-1})} \right)$	$\leftarrow 1.79z^{-1} - 0.79z^{-2}$	
$z^{-2} \left(\underbrace{2.40 - 1.41z^{-1}}_{F_2(z^{-1})} \right)$	$\leftarrow \begin{array}{l} 1.79z^{-1} - 3.20z^{-2} + 1.41z^{-3} \\ 2.40z^{-2} - 1.41z^{-3} \end{array}$	
$z^{-3} \left(\underbrace{2.9 - 1.9z^{-1}}_{F_3(z^{-1})} \right)$	$\leftarrow \begin{array}{l} 2.40z^{-2} - 4.3z^{-3} + 1.9z^{-4} \\ 2.9z^{-3} - 1.9z^{-4} \end{array}$	

On déduit les polynômes $E_j(z^{-1})$ et $F_j(z^{-1})$

$$\begin{aligned}
E_1(z^{-1}) &= 1 & F_1(z^{-1}) &= 1.79 - 0.79z^{-1} \\
E_2(z^{-1}) &= 1 + 1.79z^{-1} & F_2(z^{-1}) &= 2.40 - 1.41z^{-1} \\
E_3(z^{-1}) &= 1 + 1.79z^{-1} + 2.40z^{-2} & F_3(z^{-1}) &= 2.9 - 1.9z^{-1}
\end{aligned}$$

Après avoir calculé les polynômes $E_j(z^{-1})$ et $F_j(z^{-1})$, on calcule les polynômes $G_j(z^{-1})$ pour $j = 1, N_p$

$$\begin{aligned}
G_1(z^{-1}) &= E_1(z^{-1}) B(z^{-1}) \\
G_1(z^{-1}) &= 1 (-0.22z^{-1}) \\
G_1(z^{-1}) &= -0.22z^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_2(z^{-1}) &= E_2(z^{-1}) B(z^{-1}) \\
G_2(z^{-1}) &= (1 + 1.79z^{-1}) (0.22z^{-1}) \\
G_2(z^{-1}) &= -0.22z^{-1} - 0.39z^{-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_3(z^{-1}) &= E_3(z^{-1}) B(z^{-1}) \\
G_3(z^{-1}) &= (1 + 1.79z^{-1} + 3.20z^{-2}) (-0.22z^{-1}) \\
G_3(z^{-1}) &= -0.22z^{-1} - 0.39z^{-2} - 0.53z^{-3}
\end{aligned}$$

On calcule maintenant les prédictions $\hat{y}_m(t + j/t)$ pour $j = 1, N_p$

Pour $j = 1$

$$\begin{aligned}
\hat{y}_m(t + 1/t) &= G_1(z^{-1}) \Delta u(t + 1 - 1) + F_1(z^{-1}) y_m(t) \\
\hat{y}_m(t + 1/t) &= G_1(z^{-1}) \Delta u(t) + F_1(z^{-1}) y_m(t) \\
\hat{y}_m(t + 1/t) &= -0.22z^{-1} \Delta u(t) + (1.79 - 0.79z^{-1}) y_m(t) \\
\hat{y}_m(t + 1/t) &= -0.22 \Delta u(t - 1) + 1.79 y_m(t) - 0.79 y_m(t - 1)
\end{aligned}$$

Pour $j = 2$

$$\begin{aligned}
\hat{y}_m(t + 2/t) &= G_2(z^{-1}) \Delta u(t + 2 - 1) + F_2(z^{-1}) y_m(t) \\
\hat{y}_m(t + 2/t) &= G_2(z^{-1}) \Delta u(t + 1) + F_2(z^{-1}) y_m(t) \\
\hat{y}_m(t + 2/t) &= (-0.22z^{-1} - 0.39z^{-2}) \Delta u(t + 1) + (2.40 - 1.41z^{-1}) y_m(t) \\
\hat{y}_m(t + 2/t) &= -0.22 \Delta u(t) - 0.39 \Delta u(t - 1) + 2.40 y_m(t) - 1.41 y_m(t - 1)
\end{aligned}$$

Pour $j = 3$

$$\begin{aligned}
\hat{y}_m(t + 3/t) &= G_3(z^{-1}) \Delta u(t + 3 - 1) + F_3(z^{-1}) y_m(t) \\
\hat{y}_m(t + 3/t) &= G_3(z^{-1}) \Delta u(t + 2) + F_3(z^{-1}) y_m(t) \\
\hat{y}_m(t + 3/t) &= (-0.22z^{-1} - 0.39z^{-2} - 0.53z^{-3}) \Delta u(t + 2) + (2.9 - 1.9z^{-1}) y_m(t) \\
\hat{y}_m(t + 3/t) &= -0.22 \Delta u(t + 1) - 0.39 \Delta u(t) - 0.53 \Delta u(t - 1) + 2.9 y_m(t) - 1.9 y_m(t - 1)
\end{aligned}$$

On met les prédictions calculées sous forme matricielle : $\hat{y} = G \Delta u + f$

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_m(t+1/t) \\ \hat{y}_m(t+2/t) \\ \hat{y}_m(t+3/t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.22 & 0 & 0 \\ -0.39 & -0.22 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \Delta u(t+2) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -0.22\Delta u(t-1) + 1.79y_m(t) - 0.79y_m(t-1) \\ -0.39\Delta u(t-1) + 2.40y_m(t) - 1.41y_m(t-1) \\ -0.53\Delta u(t-1) + 2.9y_m(t) - 1.9y_m(t-1) \end{bmatrix}$$

On applique l'équation (2.16),

$$\Delta u(t) = -0.40\Delta u(t-1) + 2.28y(t) - 1.44y_m(t-1) - 0.32y^d(t+2) + 0.52y^d(t+3) \quad (3.13)$$

et l'expression de la commande à appliqué à l'instant est :

$$U(t) = 0.60u(t-1) + 0.40u(t-2) + 2.28y(t) - 1.44y_m(t-1) - 0.32y^d(t+2) - 0.52y(t+3) \quad (3.14)$$

Les évolutions de la sortie $y(t)$ et de la commande $u(t)$ sont données par les figures 3.3 et 3.4 .

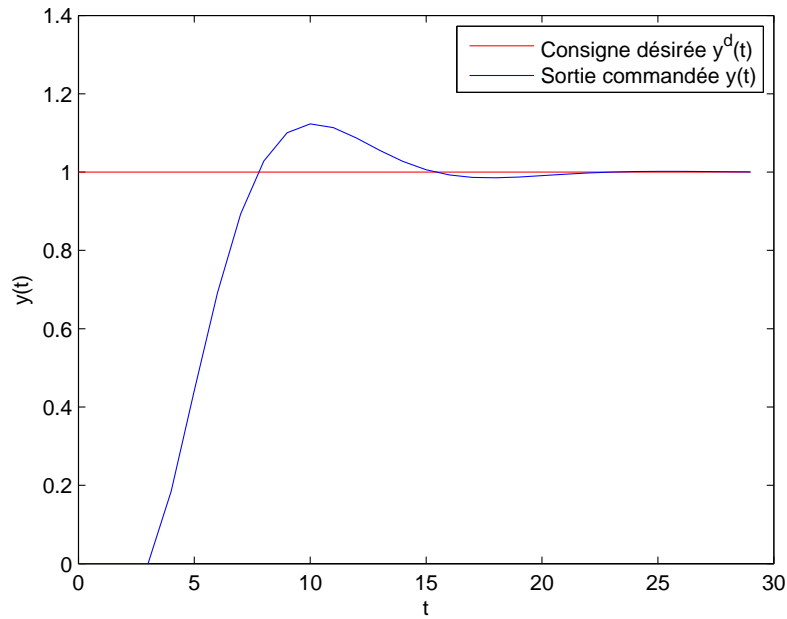


FIGURE 3.3 – Evolution de la sortie.

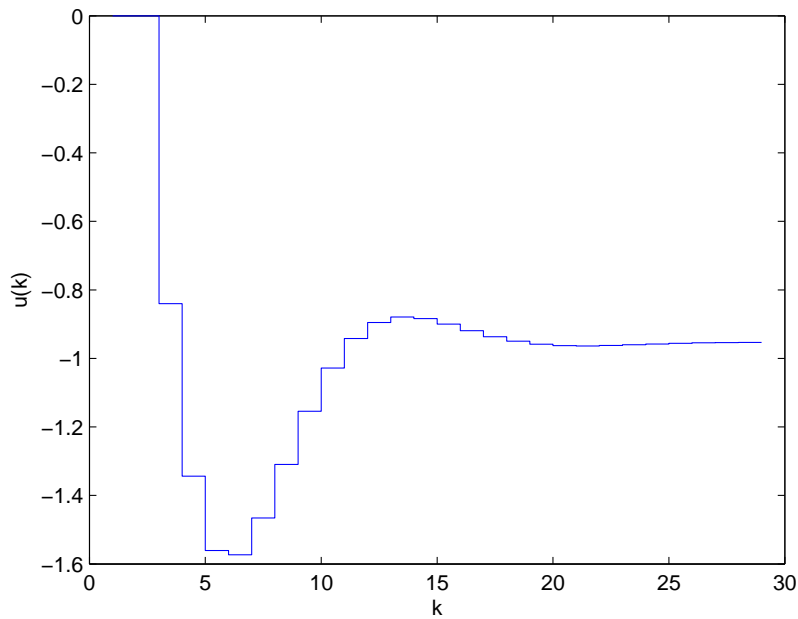


FIGURE 3.4 – Evolution de la commande.

D'après les résultats obtenus, on remarque qu'après le régime transitoire, la courbe de la sortie $y(t)$ coïncide avec celle de la sortie désirée.

Pour pouvoir améliorer les performances désirées, nous allons modifier les paramètres de réglage de la GPC :

1. Réglage de l'horizon de prédiction N_p et de l'horizon de commande N_u .

— $N_p = N_u = 2$:

La nouvelle loi de commande est :

$$U(t) = 0.84u(t-1) + 0.16u(t-2) + 0.96y(t) - 0.56y_m(t-1) - 0.40y^d(t+2) \quad (3.15)$$

Les résultats obtenus sont donnés par les figures 3.5 et 3.6 :

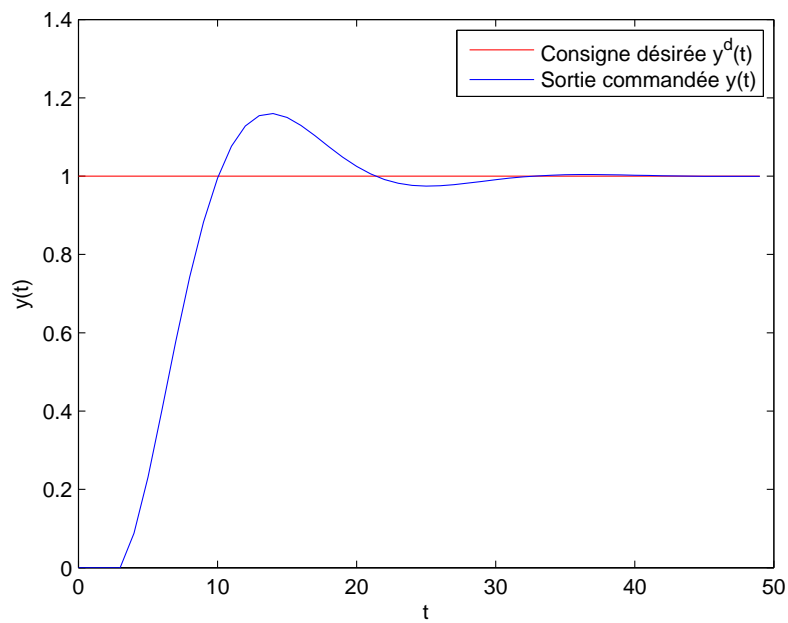
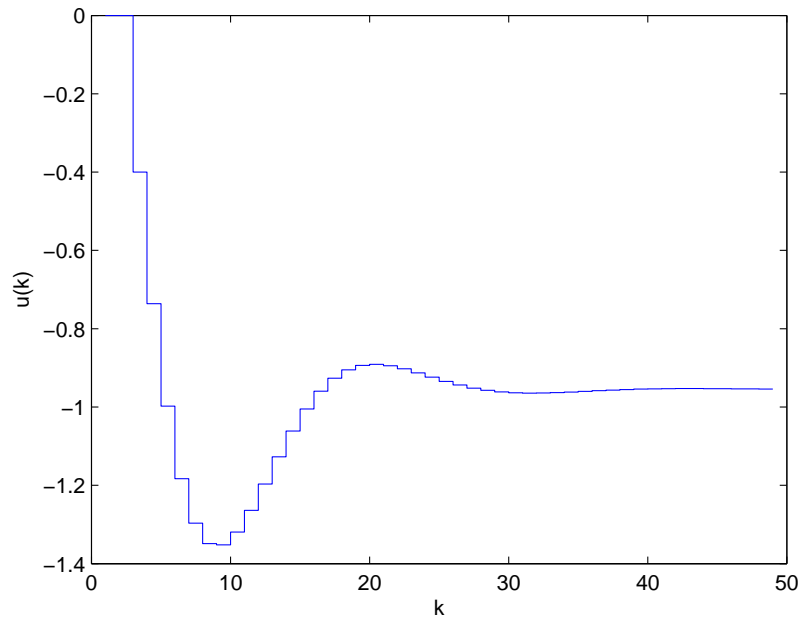


FIGURE 3.5 – Evolution de la sortie $y(t)$ pour un horizon de prédiction $N_p = 2$.

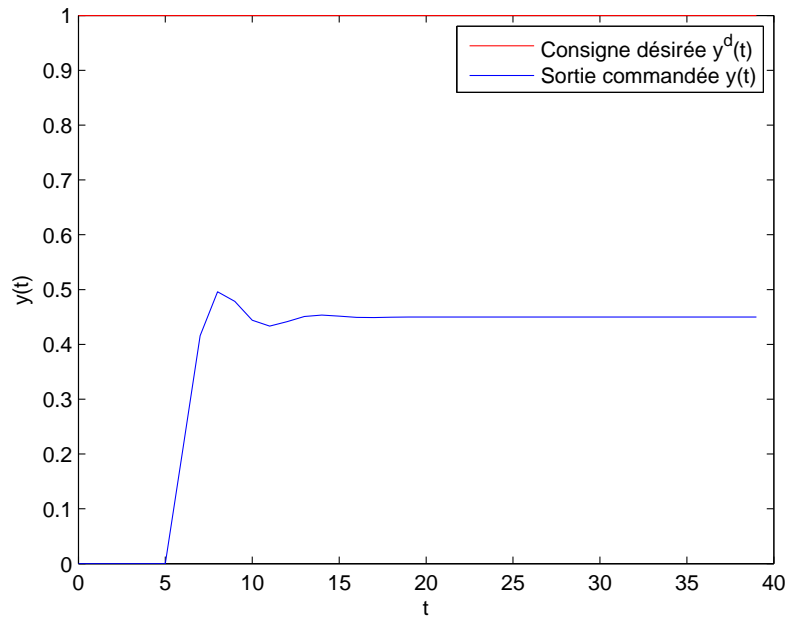
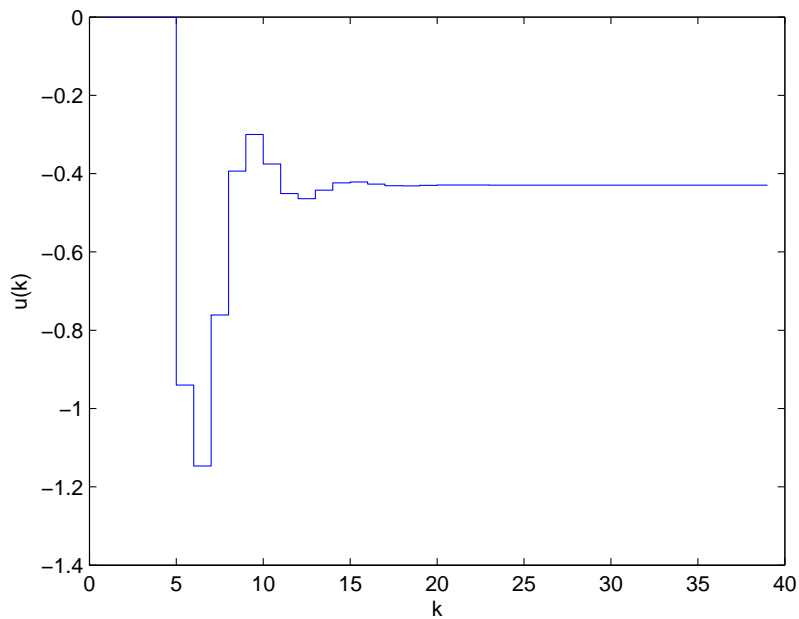
FIGURE 3.6 – Signal de la commande pour $N_u = 2$.

D'après les résultats , la déminution de l'horizon de prediction N_p et de l'horizon de commande N_u n'a pas influé sur les performances du système, car cette nouvelle loi de commande garantit la stabilité et la poursuite par rapport à la consigne désirée.

— $N_p = N_u = 5$:

La loi de commande s'écrit :

$$U(t) = 0.22u(t-1) + 0.78u(t-2) + 5.63y(t) - 3.54y_m(t-1) - 0.24y^d(t+2) \\ - 0.18y(t+3) - 0.2y^d(t+4) - 0.32y^d(t+5)$$

FIGURE 3.7 – Evolution de la sortie pour $N_p = 5$.FIGURE 3.8 – Evolution de la commande pour $N_u = 5$.

D'après les résultats obtenus, nous constatons qu'en augmentant N_p et N_u , l'amplitude de la courbe de sortie du système diminue par rapport à celle de la consigne désirée.

2. Réglage des paramètres de pondérations Q et R

Nous nous intéressons maintenant au réglage des paramètres de pondération pour voir leur influence sur l'application de la GPC.

Prenons la loi de commande calculée pour $N_p = N_u = 3$, et faisons varier les matrices Q et R .

Pour rappel, les résultats obtenus précédemment ont été calculés avec les données choisies initialement lors de la conception du modèle de prédiction où nous avons pris :

$$Q = I_{3 \times 3} \text{ et } R = 0.5 \times I_{3 \times 3}$$

$$\text{— } Q = I_{3 \times 3} \text{ et } R = I_{3 \times 3} :$$

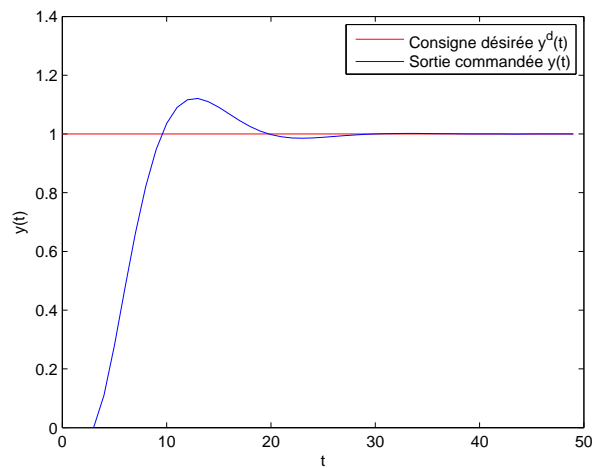


FIGURE 3.9 – Sortie du système.

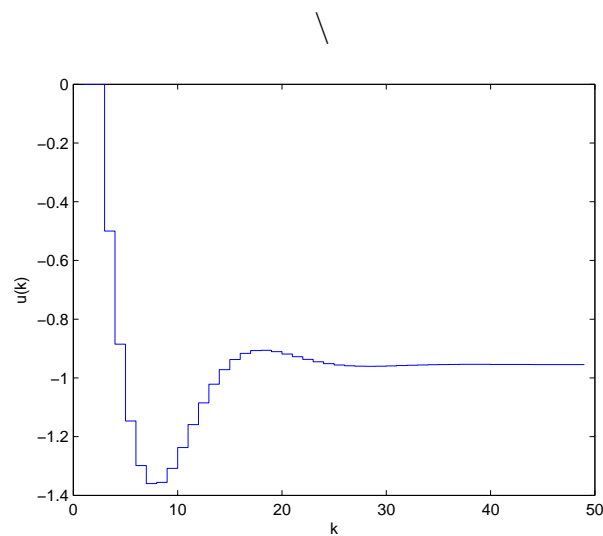


FIGURE 3.10 – Signal de commande.

Pour ces valeurs des matrices de pondération, on voit que la nouvelle loi de commande assure la poursuite de la consigne désirée

— $Q = 0.5 \times I_{3 \times 3}$ et $R = 0.3 \times I_{3 \times 3}$:

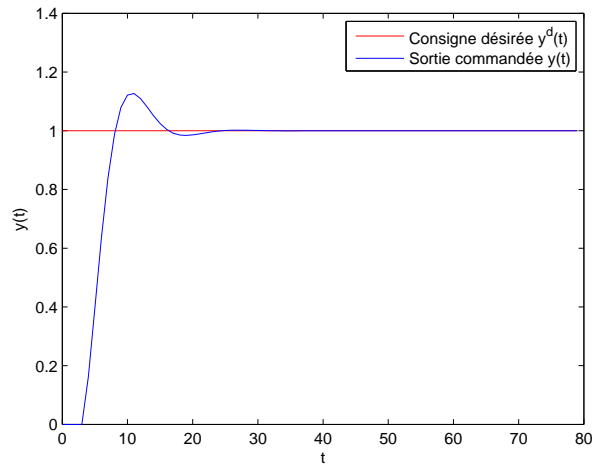


FIGURE 3.11 – Evolution de la sortie.

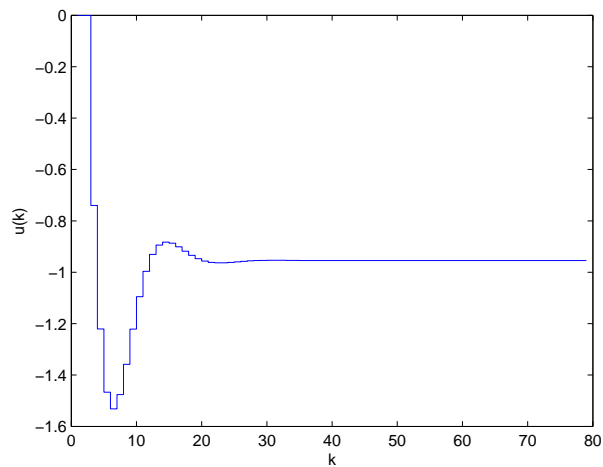


FIGURE 3.12 – Evolution de la commande.

Pour ces paramètres de pondération, la nouvelle loi de commande garantit la poursuite et la stabilité du système.

— $Q = I_{3 \times 3}$ et $R = 0.3 \times I_{3 \times 3}$:

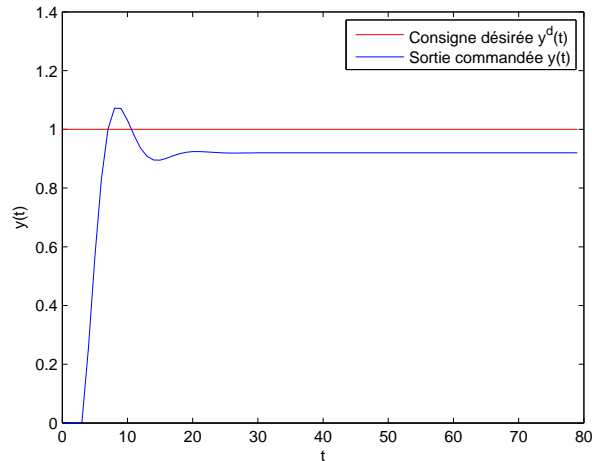


FIGURE 3.13 – Evolution de la sortie.

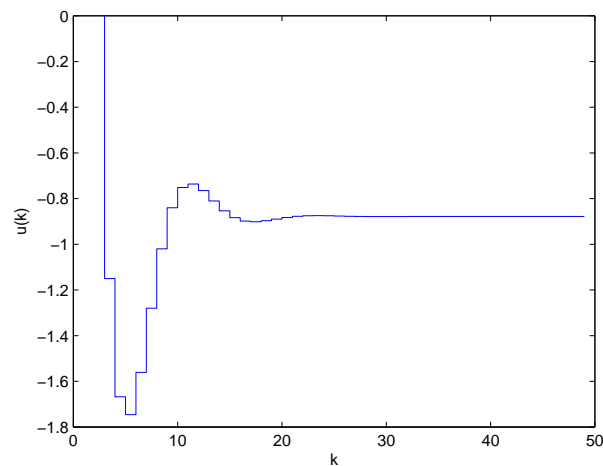


FIGURE 3.14 – Evolution de la commande.

D'après les résultats obtenus, on remarque que les nouveaux paramètres de pondération déminuent l'amplitude de la sortie prédite par rapport aux cas précédents.

3.3.2.1 Interprétation des résultats de simulation

L'application de l'algorithme GPC sur un système à retard (système monovariante, linéaire, du premier ordre), nous a permis de constater que cette technique de commande assure les performance de stabilité et de poursuite et ce même en présence de perturbation constante prise en compte par le choix du polynôme $C(z^{-1}) = 1$, lors de la conception du modèle de prédiction.

Aussi, le jeu de paramètres : l'horison de prédiction, l'horison de commande et les matrices de pondérations, leurs choix influent sur les résultats désirés.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié la commande prédictive généralisée (GPC). Cette méthode qui est une technique de la commande avancée, basée sur la minimisation d'un critère quadratique, calcule des lois de commande optimale qui permettent d'assurer la poursuite et le rejet de perturbations.

Après avoir introduire les principes généraux ainsi que les éléments essentiels de la commande prédictive, nous avons présenté l'algorithme de la commande prédictive généralisée (GPC). Ensuite, nous avons appliqué cet algorithme sur un système retardé qui est le bac de stockage. Cette approche nous a permis de constater et de montrer que la GPC apporte des performances remarquables, notamment, en ce qui concerne la poursuite de la consigne imposée. Ces techniques permettent aussi de satisfaire des spécifications très contraignantes, en termes de stabilité et précision.

Quant aux paramètres de réglage, le choix de ces derniers influe sur le comportement du système, et il n'existe pas de règle énonçant le choix de ces paramètres. Les méthodes existantes peuvent seulement servir de guide pour la conception d'une commande GPC stable.

Comme nous l'avons déjà cité, les techniques de la commande prédictive ne cessent de progresser le jour en jour, surtout ces dernières années où elles ont connues leurs grandes évolutions.

En ce qui concerne ce mémoire, les perspectives qui nous apparaissent importantes à l'issue de notre travail peuvent être orientées vers :

- L'application de la GPC pour les systèmes non linéaires et les systèmes multivariables ;
- La prise en compte des contraintes lors de l'utilisation de l'algorithme GPC pour le calcul de la loi de commande ;
- Calcul du prédicteur optimal en présence de perturbations non constantes.

Bibliographie

- [1] P. BOUCHER, D. DUMUR. La commande Prédictive. Technip, Paris, 1996
- [2] Jacques RICHALET. La commande Prédictive. EYROLLES. Paris. 2005
- [3] R. BEN ABDENNOUR, P. BORNE, M. KSOURI, F. M'SAHLI. Identification et commande numérique des procédés industriels. Technip, Paris, 2001
- [4] Jean-Marie FLAUS. La régulation industrielle régulateurs PID, prédictifs et flous. Hermès, Paris, 1994.
- [5] Jean-Pierre CORRIOU. Commande des Procédés. Hermès, Paris, 2003.
- [6] A. MAIDI. Cours de commande optimale. Université Mouloud MAMMARI de Tizi-Ouzou. 2016
- [7] A. MAIDI. Notes de cours : La commande prédictive. Université Mouloud MAMMARI de Tizi-Ouzou, 2017
- [8] M. Marcelin DABO, Commande prédictive généralisée non linéaire Temps Continus des Systèmes complexes. Université de Rouen, 2010.
- [9] Y. FERDJOUKH. Commande Prédictive Généralisée : Application au moteur à excitation séparée. Université Mohamed BOUDIAF de M'SILA, 2016.
- [10] F. KLAOUA. Commande prédictive généralisée. Université Mohammed KHIDER de Biskra, 2014.
- [11] G. IDIRI. Commande prédictive des systèmes non linéaires dynamiques. Université Mouloud MAMMARI de Tizi-Ouzou, 2011.
- [12] H. MERABET BOULOUIHA. Notes de cours : Techniques de commande avancée. Centre universitaire Ahmed ZABANA de Rélizane, 2015.
- [13] C. STOICA MANIU. Principes de la commande prédictive : Application sous MATLAB. Université Paris SACLAY, 2016.
- [14] H. BENSALAH. Stabilité et stabilisation des systèmes à retards ayant des contraintes. Université de MONTREAL, 2012
- [15] A. SEURET. Commande et observation des systèmes à retards variables. Ecole centrale de LILLE, 2007.

- [16] O. BOUREBIA. Commande Prédicative Floue des Systèmes Non Linéaires. Université MENTOURI de Constantine, 2011.
- [17] A. BENGOUFA. La commande prédictive des systèmes linéaires Multi variables. Université Djilali BOUNAAMA de Khemis Miliana. 2015.
- [18] K. BARRA. Commande Prédicative Généralisée (GPC) des Associtions Convertisseurs- Machine à Induction. Université de Batna, 2008.