

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri De Tizi-Ouzou



Faculté De Génie Electrique Et D'informatique
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

**Mémoire de fin d'études
De MASTER ACADEMIQUE**
Spécialité : **Automatique et Systèmes**

Présenté par
Juba TOUAT

Mémoire dirigé par Mr Mohand Achour TOUAT et codirigé par Mr Samir BENBELKACEM

Thème

**Commande d'un drone type Quadrirotor
en utilisant la Commande Linéaire
Quadratique.**

Mémoire soutenu publiquement le 11 Juillet 2018 devant le jury composé de :

M MELLAH R.
Professeur, UMMTO, Président
M ALI BEY M.
MC B, UMMTO, Examineur
M TRIKI H.
MA A, UMMTO, Examineur
M TOUAT M A.
MC B, UMMTO, Encadrant
M BENBELKACEM S.
Chercheur, CDTA, Co-encadrant

Remerciements

Je tiens avant tout à exprimer ma reconnaissance à M. TOUAT et M. BENBELKACEM pour avoir accepté de m'encadrer dans cette étude. Je les remercie pour leur implication, leur soutien et leurs encouragements tout au long de ce travail.

Je remercie ensuite les membres du jury, qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir étudier avec attention mon travail.

Je souhaite également adresser mes sincères remerciements à mes amis et ma famille qui m'ont apporté leur support moral tout au long de ma démarche.

Dédicaces

A ma famille,

mes proches,

et mes amis.

Table des matières

Introduction générale	6
1 Généralités sur les drones	7
1.1 Introduction	7
1.2 Classification	8
1.2.1 L'endurance et l'altitude	8
1.2.2 La voilure	8
1.3 Le quadrirotor : historique et domaines d'application	10
1.4 Conclusion	12
2 Modélisation du système d'un quadrirotor	13
2.1 Introduction	13
2.2 Description du quadrirotor	13
2.3 Les mouvements du quadrirotor	15
2.3.1 Mouvement vertical	16
2.3.2 Mouvement de rotation de roulis	16
2.3.3 Mouvement de rotation de tangage	16
2.3.4 Mouvement de rotation de lacet	17
2.3.5 Translations horizontales	18
2.4 Modèle dynamique du quadrirotor	18
2.4.1 Les angles d'Euler	19
2.4.2 Vitesses angulaires	20
2.4.3 Effets physiques agissant sur le quadrirotor	21
2.4.3.1 Les forces	21
2.4.3.2 Les moments	22
2.4.3.3 L'effet gyroscopique	22
2.4.4 Modèle mathématique selon le formalisme de Newton-Euler	24
2.4.4.1 Équations de mouvement de translation	25
2.4.4.2 Équations de mouvement de rotation	25
2.4.5 La représentation d'état du système	26
2.5 Conclusion	26
3 Commande optimale	27
3.1 Formulation mathématique d'un problème de commande optimale	27
3.2 Principe du minimum de Pontriaguine	28
3.3 Équation d'Euler-Lagrange (calcul des variations)	29
3.4 Principe d'optimalité de Bellman	30
3.5 Commande linéaire quadratique	30
3.5.1 Commande LQ à horizon fini	30

3.5.2	Commande LQ à horizon infini	32
3.5.3	Minimisation de l'erreur du vecteur d'état	33
3.5.4	Minimisation de l'énergie du contrôle	33
4	Simulation et résultats	34
4.1	Introduction	34
4.2	Modèle d'état du systeme	34
4.3	Stratégie de commande	35
4.3.1	Commande LQ centralisée	35
4.3.2	Commande LQ décentralisée	38
4.4	Résultats de la simulation	40
4.4.1	Poursuite d'échelon	40
4.4.2	Poursuite de trajectoires	42
4.4.3	Poursuite d'une consigne sinusoïdale	48
4.5	Comparaison entre les deux méthodes de commande LQR	51
4.6	Conclusion	51
	Conclusion générale	52

Table des figures

1.1	Kettering bug : torpille aérienne expérimentale sans pilote	7
1.2	Drone MALE	8
1.3	Drone HALE	8
1.4	Drone à voile fixe	9
1.5	Drone hélicoptère conventionnel	9
1.6	Birotor coaxial	9
1.7	Multirotor	10
1.8	Quadrirotor	10
1.9	Le Breguet-Richet Gyroplane No.1, 1907	10
1.10	Le quadrirotor d'Étienne Œhmichen, 1932	11
1.11	Sauvetage en montagne	11
1.12	Prise de vue aérienne	11
1.13	Mission de recherche lors d'un incendie	12
1.14	Cours d'aéromodélisme	12
2.1	Sens de rotation des rotors	14
2.2	Les différents mouvements du quadrirotor (Six degrés de libertés)	15
2.3	Mouvement vertical	16
2.4	Mouvement de rotation de Roulis	16
2.5	Mouvement de rotation de Tangage	17
2.6	Mouvement de rotation de Lacet	17
2.7	Translations horizontales	18
3.1	Diagramme d'une commande LQ	30
4.1	Réponse en position Z pour une consigne de type échelon	40
4.2	Résultat du lacet pour une consigne de type échelon sur la variable Z	41
4.3	Résultat du roulis pour une consigne de type échelon sur la variable Z	41
4.4	Résultat du tangage pour une consigne de type échelon sur la variable Z	42
4.5	Réponse en position Z pour une poursuite de trajectoire	42
4.6	Réponse en position X pour une poursuite de trajectoire	43
4.7	Réponse en position Y pour une poursuite de trajectoire	43
4.8	Résultat du roulis pour une poursuite de trajectoire	44
4.9	Résultat du tangage pour une poursuite de trajectoire	44
4.10	Résultat du lacet pour une poursuite de trajectoire	45
4.11	Réponse en lacet après changement de cap et trajectoire de X	45
4.12	Réponse en position X après changement de cap et trajectoire de X	46
4.13	Réponse en position Y après changement de cap et trajectoire de X	46
4.14	Réponse en position Z après changement de cap et trajectoire de X	47

4.15	Résultat du roulis après changement de cap et trajectoire de X	47
4.16	Résultat du tangage après changement de cap et trajectoire de X	48
4.17	Réponse en position Z pour une consigne sinusoïdale sur la variable X . . .	48
4.18	Réponse en position X pour une consigne sinusoïdale	49
4.19	Réponse en position Y pour une consigne sinusoïdale sur la variable X . .	49
4.20	Réponse en lacet pour une consigne sinusoïdale sur la variable X	50
4.21	Résultat du roulis pour une consigne sinusoïdale sur la variable X	50
4.22	Résultat du tangage pour une consigne sinusoïdale sur la variable X	51

Liste des tableaux

4.1	Paramètres du modèle simulé	40
4.2	Tableau comparatif.	51

Introduction générale

Les véhicules sans pilotes appelés aussi (UAV) suscitent un intérêt particulier pour la communauté scientifique.

La conception et la réalisation de ces systèmes fait appel à plusieurs disciplines à savoir : l'Informatique, l'Électronique, l'Automatique, etc.

L'automatique intervient dans la conception de la loi de commande. Cette dernière doit répondre au cahier de charge qui spécifie les tâches à accomplir par le robot.

Avant la synthèse de la loi de commande, l'automaticien doit avoir un modèle mathématique adéquat.

Pendant le vol, le drone est soumis à plusieurs perturbations qui peuvent être exogènes et endogènes.

Les perturbations exogènes sont dus aux conditions atmosphérique, tandis que les endogènes sont dus à l'état interne du drone.

Ces perturbations rendent la modélisation fastidieuse et difficile.

Ce travail a pour objectif d'établir un modèle mathématique adéquat au quadrirotor et de développer une architecture de contrôle complète qui lui permettra de fonctionner en utilisant la commande linéaire quadratique.

Ce mémoire est organisé en quatre parties principales :

Le premier chapitre introduira le quadrirotor et présentera quelques généralités sur le sujet ainsi qu'une description des différentes configurations des drones hélicoptères.

Le deuxième chapitre traite de la modélisation dynamique du quadrirotor.

La première partie dresse une description du système et de son principe de vol et la deuxième développe les équations qui régissent le système pour enfin aboutir à un modèle mathématique en vue de commander le système.

Le troisième chapitre introduira la commande optimale en ses principes et détaillera l'approche choisie : la commande linéaire quadratique, pour le contrôle de l'engin.

Le quatrième chapitre exposera un modèle simplifié pour la linéarisation puis présentera les deux stratégies de commande LQ utilisées pour la simulation de notre système.

les résultats obtenus lors des simulations seront présentés pour finir avec une comparaison entre les deux stratégies de commande.

Chapitre 1

Généralités sur les drones

1.1 Introduction

L'intérêt croissant pour le développement des drones appelé aussi (UAV) Unmanned Aerial Vehicles, résulte en partie des différentes avancées dans le domaine de la transmission de données, la miniaturisation des capteurs, l'optimisation des moteurs et le développement de la théorie de commande pour les systèmes autonomes. Le drone aérien est un « aéronef inhabité, piloté à distance, semi autonome ou autonome, susceptible d'emporter différentes charges utiles le rendant capable d'effectuer des tâches spécifiques pendant une durée de vol pouvant varier en fonction de ses capacités »[1]. Sa conception nécessite une approche pluridisciplinaire faisant intervenir l'automatique, l'électronique, la mécanique et l'aérodynamique.

Les premiers drones aériens avaient été conçus durant la première guerre mondiale pour des fins purement militaire. Des prototypes d'avions-cibles radio-commandés ont alors vu le jour mais les résultats n'étaient pas assez concluants. Propulsé par la révolution électronique et l'informatique, le progrès en matière de drones n'a cessé de croître depuis les années 60 : reconnaissance de cibles, surveillance et collecte de données. Les drones ont gagné en précision avec l'arrivée du GPS en 1995 pour continuer leur évolution au rythme du progrès technologique [2].



FIGURE 1.1 – Kettering bug : torpille aérienne expérimentale sans pilote

Tout comme de nombreuses innovations conçues initialement pour le domaine militaire (satellites, GPS, moteurs à réaction...etc.), le drone a aujourd'hui un champ d'application élargi : opérations de sauvetage, lutte contre les incendies et les inondations, agriculture, photographie, cinéma, cartographie, topographie et même livraisons.

1.2 Classification

Il est possible de classer les drones aériens selon plusieurs critères, nous en citerons deux [3] :

1.2.1 L'endurance et l'altitude

L'endurance étant le temps que peut passer le drone en vol (l'autonomie) Ex : de Haute Altitude Longue Endurance (HALE), Moyenne Altitude Longue Endurance (MALE)...etc.



FIGURE 1.2 – Drone MALE



FIGURE 1.3 – Drone HALE

1.2.2 La voilure

Nous citerons ici les deux types de voilures les plus répandues :

Voilure fixe (type avion) :

la propulsion et la sustentation sont assurées par deux organes différents (réacteur, et voilure fixe)



FIGURE 1.4 – Drone à voilure fixe

Voilure tournante (type hélicoptère) :

« utilisent le même organe pour la propulsion et la sustentation (un ou plusieurs rotors). Grâce à cette particularité, ce type de drone est capable d’atterrissage et de décollage vertical, ainsi que de vol stationnaire ou quasi-stationnaire, ouvrant un large champ à de nouvelles applications » [4].

Quelques exemples de drones aériens à voilure tournante :

— Hélicoptères conventionnels :

Combinaison d’un rotor principal et d’un rotor à queue



FIGURE 1.5 – Drone hélicoptère conventionnel

— Birotors coaxiaux :

Les moments dus aux rotations de chaque rotor se compensent mutuellement (pas de rotor de queue) [5].



FIGURE 1.6 – Birotor coaxial

— Multirotors :

Combinaison de plusieurs rotors. La forme la plus commune est le quadrirotor.



FIGURE 1.7 – Multirotor



FIGURE 1.8 – Quadrirotor

1.3 Le quadrirotor : historique et domaines d'application

Le quadri rotor est un drone à voilure tournante basé sur quatre rotors placés généralement aux extrémités d'une croix. Il est impératif que deux des quatre hélices tournent dans le sens des aiguilles d'une montre pendant que les deux autres tournent dans le sens contraire. Le premier prototype d'hélicoptère non piloté a été construit par le scientifique français « Charles Richet ». Bien que la tentative ait échoué, elle a le mérite d'avoir inspiré un de ses étudiants « Louis Breguet », qui, avec l'aide de son frère Jacques et après plusieurs essais supervisés par Richet, a réussi en 1907 à faire voler le premier quadrirotor : Le « Breguet-Richet Gyroplane No.1 ». En 1923, le quadrirotor conçu par Étienne Ghemichen réussit un vol stationnaire de cinq minutes [6].

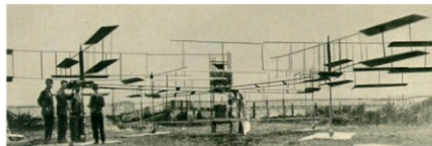


FIGURE 1.9 – Le Breguet-Richet Gyroplane No.1, 1907

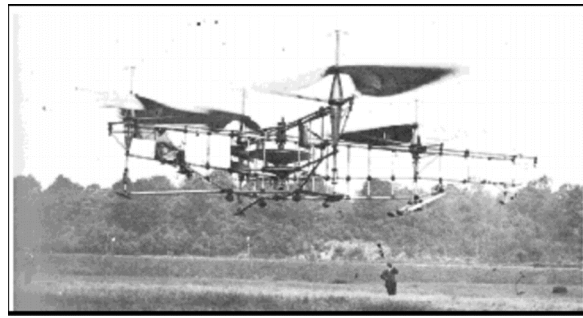


FIGURE 1.10 – Le quadrirotor d'Étienne Oehmichen, 1932

Ces prototypes ainsi que tous leurs congénères précurseurs étaient caractérisés par de faibles performances dynamiques et une taille bien trop grande. Les quadrirotors n'ont pas cessé d'évoluer depuis. Ils deviennent de plus en plus communs notamment dans les applications de loisir mais aussi dans les milieux professionnels et ce grâce à leur accessibilité en terme de coût et de mise en œuvre, leur agilité, leurs possibilités d'embarquements (capteurs, caméras...), ainsi que leur capacité à voler en stationnaire et à effectuer des trajectoires complexes. Ils sont de ce fait privilégiés dans certains domaines tels que :

- Photographie et cinéma : prises de vue aériennes.
- Surveillance, collecte de données, sauvetage et missions dangereuses : les quadrirotors peuvent se déplacer dans des milieux hostiles ou difficiles d'accès pour relever des informations importantes, surveiller, ou aiguiller les sauveteurs ou les scientifiques (incendies, avalanches, noyades, gaz toxiques radiations...).
- Loisirs : les quadrirotors sont les drones aériens les plus utilisés dans ce domaine.



FIGURE 1.11 – Sauvetage en montagne



FIGURE 1.12 – Prise de vue aérienne



FIGURE 1.13 – Mission de recherche lors d'un incendie



FIGURE 1.14 – Cours d'aéromodélisme

1.4 Conclusion

L'étude des drones quadrirotors a suscité l'attention de plusieurs chercheurs dans le domaine de l'automatique pendant ces deux dernières décennies et ce compte tenu de leur énorme potentiel d'évolution. Dans ce travail nous nous sommes intéressés à la commande des quadrirotors.

Chapitre 2

Modélisation du système d'un quadrirotor

2.1 Introduction

La conception d'un contrôleur de vol passe avant tout par une étape cruciale qui est la modélisation. Une compréhension préalable des mouvements du quadrirotor et de sa dynamique ainsi qu'une maîtrise des équations qui régissent la dynamique de son système sont de rigueur. La pertinence de la commande et des résultats de simulation dépendent de la précision de la modélisation.

La dynamique du quadrirotor est sujette à des altérations pouvant être causées par une multitude d'effets physiques : les effets aérodynamiques, la gravité, les effets gyroscopiques, les frottements et le moment d'inertie. Ce qui en fait un des systèmes volants les plus complexes [7].

2.2 Description du quadrirotor

Un quadrirotor est un aéronef propulsé par quatre rotors. Ses hélices sont orientées verticalement et chacune s'enclenche à des vitesses variables. Typiquement, le quadrirotor a les configurations suivantes ; deux rotors tournant dans le sens des aiguilles d'une montre et les deux autres tournant dans le sens contraire [8].

Son châssis est la partie la plus importante. C'est là que les moteurs, les batteries et les hélices, entre autres, sont montés. Il doit être rigide et léger. La carte de commande agit comme le cœur de l'engin car elle est responsable du contrôle de chaque moteur indépendamment, fournissant ainsi l'équilibre à long terme.

Le quadrirotor utilise ses hélices pour s'élever dans les airs, grâce à la poussée générée. Les quatre moteurs sont donc conçus pour tourner dans deux directions pour éviter que l'engin se retourne sur lui-même. Le quadrirotor est caractérisée par un décollage et atterrissage vertical. Afin d'y parvenir, le tangage, le lacet et le roulis doivent être contrôlés. Pour diriger le quadrirotor correctement, il est important que l'on comprenne comment les différentes vitesses dans le moteur affectent la poussée de l'hélice, le déplacement sur les axes et comment gagner ou perdre en altitude.

Pour gagner de l'altitude, le pilote doit contrer l'attraction gravitationnelle en faisant tourner les hélices plus rapidement et avec une plus grande force. La descente signifie que le pilote réduit la vitesse des rotors, réduisant ainsi la force de portance, laissant la force de gravité prendre sa place pour amener l'engin au sol.

les 4 forces qui affectent le vol (poids, portance, poussée et traînée) sont des considérations importantes.

Les mathématiques sont également utilisées pour calculer la poussée du moteur de l'engin, tandis que l'aérodynamique de l'avion est utilisée pour la conception de l'hélice et le mouvement de l'air au-dessus, au-dessous et autour du quadrirotor.

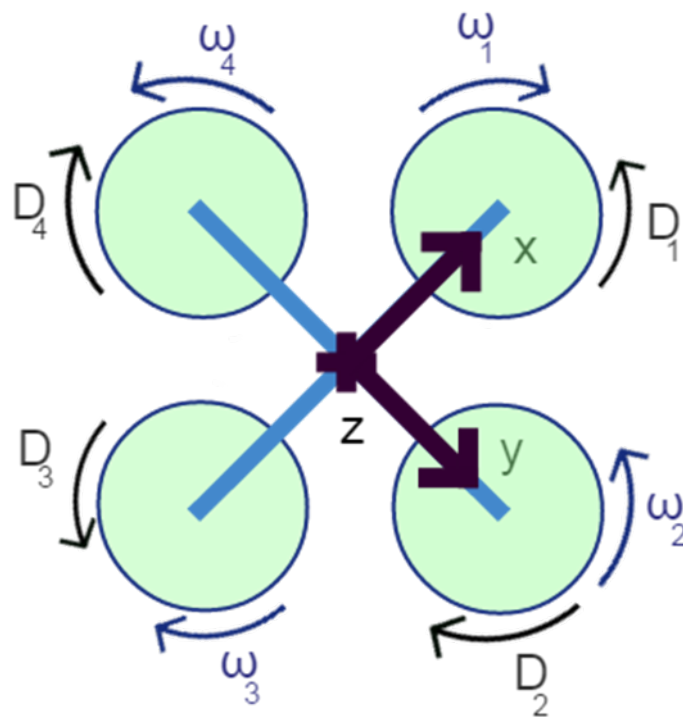


FIGURE 2.1 – Sens de rotation des rotors

Avec

D : le sens de rotation des rotors

ω : la vitesse de rotation

2.3 Les mouvements du quadrirotor

La réalisation des six mouvements du quadrirotor implique une variation de la vitesse de chacun des quatre rotors dont nous disposons entraînant ainsi un changement de poussée produite .

Les mouvements de l'appareil sont couplés : la réalisation d'un mouvement enclenche systématiquement d'autres mouvements. Le quadrirotor s'incline vers le sens du rotor le plus lent, il en résulte ainsi une translation le long de cet axe. Par exemple, l'augmentation de la vitesse du rotor gauche engendre l'inclinaison de l'appareil vers le côté droit. Par conséquent, l'équilibre entre les rotors qui tournent dans le sens horaire et les rotors qui tournent dans le sens antihoraire est perturbé, ce qui entraîne deux mouvements de rotation : (le roulis et le lacet) qui à leur tour entraînent un mouvement de translation sur l'axe Y. Cette caractéristique confère au quadrirotor six degrés de liberté et ce seulement avec quatre actionneurs (rotors) ce qui classe le quadrirotor parmi les systèmes sous-actionnés [9]. On distingue donc six mouvements possibles [8] :

- Mouvement vertical
- Mouvement de rotation de roulis
- Mouvement de rotation de tangage
- Mouvement de rotation de lacet
- Translations horizontales

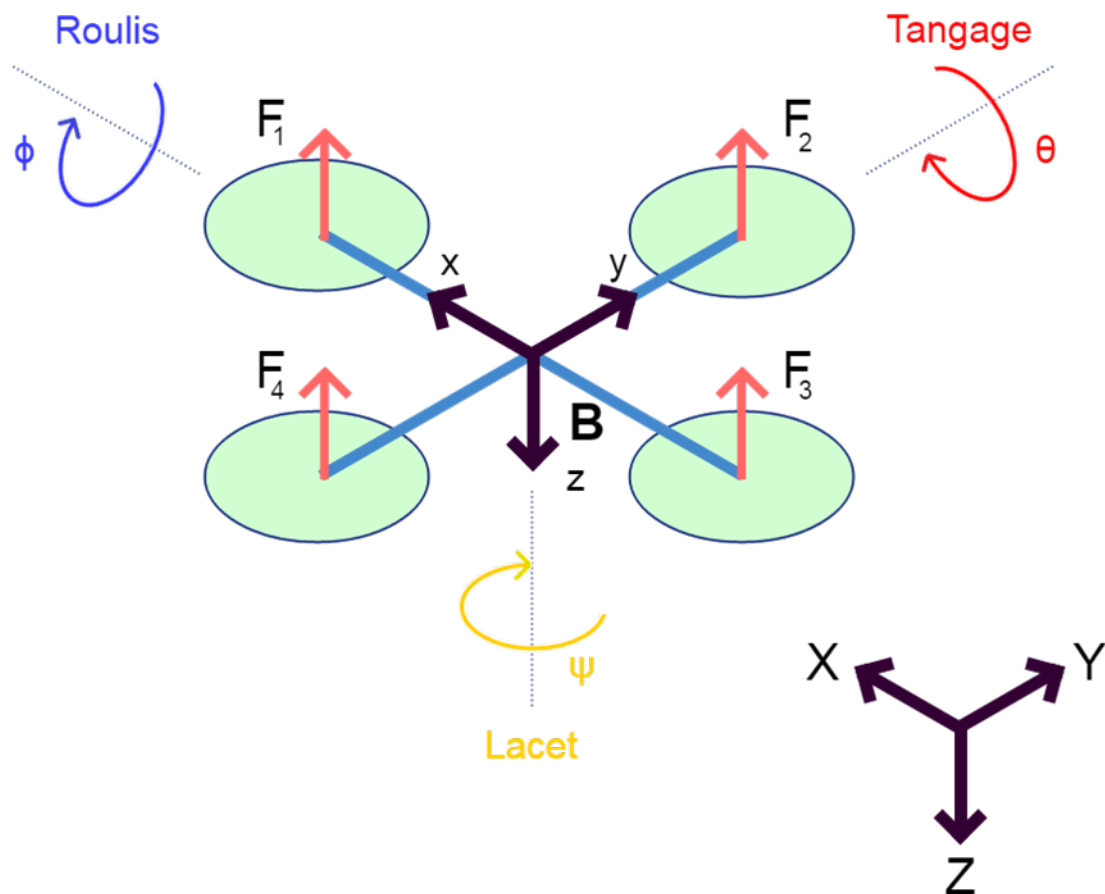


FIGURE 2.2 – Les différents mouvements du quadrirotor (Six degrés de libertés)

2.3.1 Mouvement vertical

Lorsque tous les rotors sont à vitesse égale, ils génèrent une poussée égale, ce qui permet à l'appareil de planer. L'augmentation/diminution de la vitesse des rotors provoque un changement de l'altitude de l'engin en fonction de la poussée totale. Le mouvement du quadrirotor sur l'axe z peut être contrôlé avec les poussées des rotors comme le montre la figure ci-dessous.

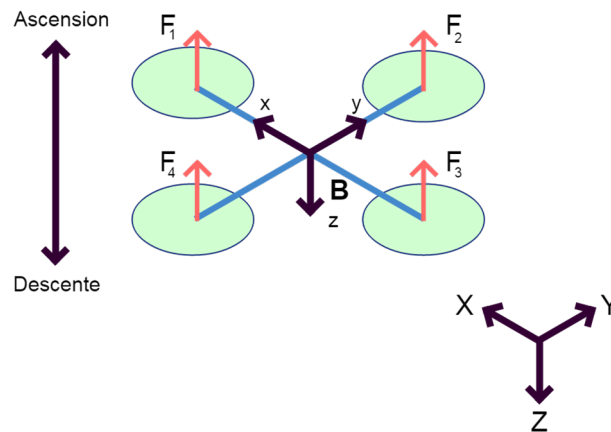


FIGURE 2.3 – Mouvement vertical

2.3.2 Mouvement de rotation de roulis

Lorsque la vitesse entre les rotors 2 et 4 est variée par rapport à sa valeur nominale, cela entraîne une différence de poussée entre ces deux rotors. Par conséquent, une rotation de roulis se produit autour de l'axe X au même moment elle est suivie d'une translation le long de l'axe Y . Dans le cas où le changement de poussée survient à un seul rotor l'engin effectuera une rotation de lacet autour de l'axe Z suite à la perte de l'équilibre des rotors.

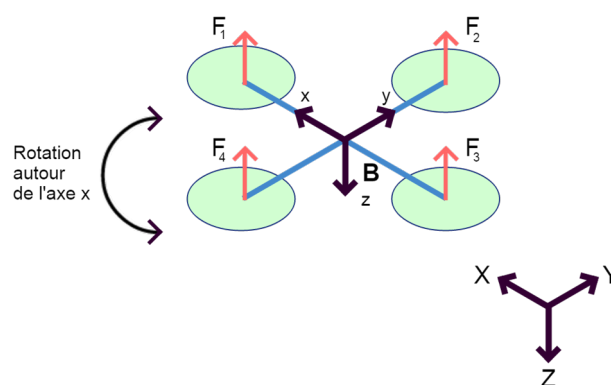


FIGURE 2.4 – Mouvement de rotation de Roulis

2.3.3 Mouvement de rotation de tangage

Lorsque la vitesse entre les rotors 1 et 3 est variée par rapport à sa valeur nominale, cela entraîne une faible poussée au sein rotor dont la vitesse est la plus faible. Par conséquent, une rotation de tangage se produit autour de l'axe Y provoquant une translation le long

de l'axe X. Dans le cas où le changement de poussée survient à un seul rotor l'engin effectuera également une rotation de lacet autour de l'axe Z suite à la perte de l'équilibre des rotors.

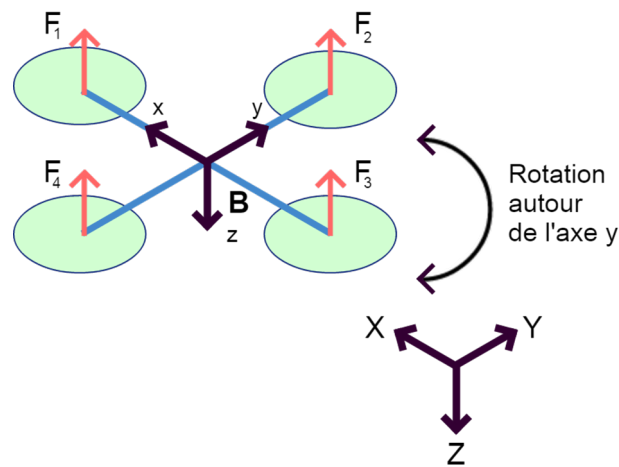


FIGURE 2.5 – Mouvement de rotation de Tangage

2.3.4 Mouvement de rotation de lacet

Lorsque la vitesse entre les rotors 1,3 et 2,4 est modifiée par rapport à sa valeur nominale, cela entraîne un couple plus élevé au niveau des rotors dont la vitesse est supérieure, par conséquent, une rotation dans le sens des rotors dont la vitesse est faible. le mouvement de rotation de Lacet se produit autour de l'axe Z. Pour éviter que d'autres rotations découlent de cette variation de vitesse, il est préconisé que les vitesses des paires de rotors sur le même bras soient égales.

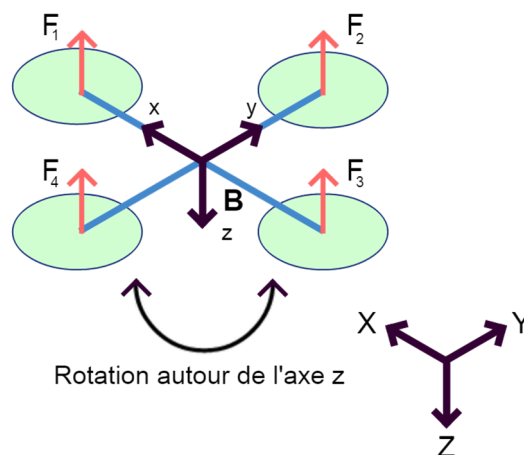


FIGURE 2.6 – Mouvement de rotation de Lacet

2.3.5 Translations horizontales

Elles sont obtenues en réalisant les rotations appropriées à la translation désirée, rotation de roulis pour une translation sur l'axe Y et rotation de tangage pour une translation sur l'axe X. Il est nécessaire de suivre les précautions énoncées précédemment pour éviter une rotation de lacet.

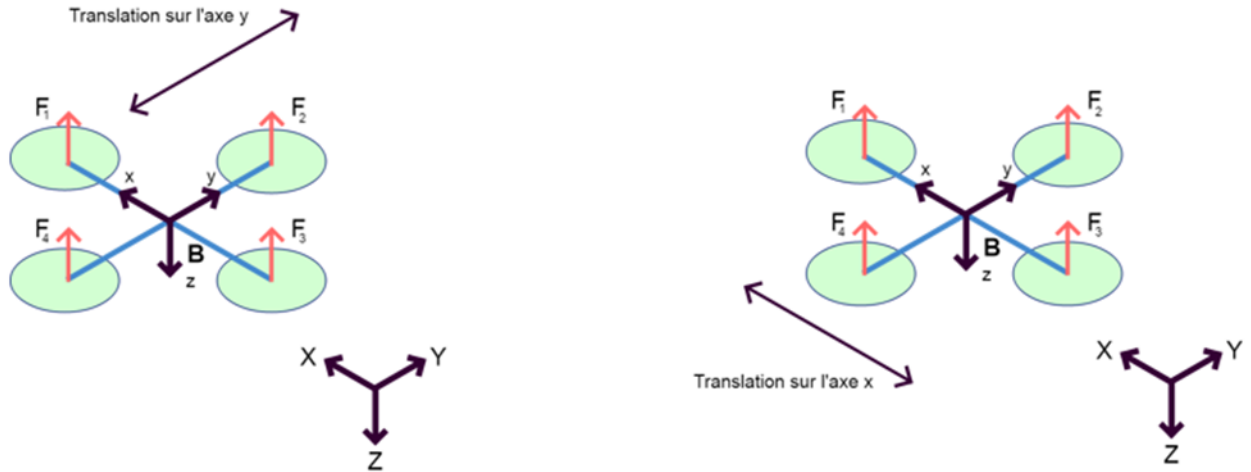


FIGURE 2.7 – Translations horizontales

2.4 Modèle dynamique du quadrirotor

La modélisation de la dynamique du vol du quadrirotor peut s'avérer difficile et délicate et cela est dû à la dynamique fortement non linéaire du système et l'interaction entre les différents états. Des hypothèses ont été proposées dans la littérature et ce pour simplifier la réalisation de cette tâche [10] :

- La structure constituant le quadrirotor est supposée rigide et symétrique.
- Les hélices sont supposées rigides pour pouvoir négliger l'effet de leur déformation lors de la rotation.
- Le centre de gravité du quadrirotor et l'origine du repère lié à ce dernier coïncident.
- Les forces de portance et de traînée sont proportionnelles aux carrés de la vitesse de rotation des rotors.

Afin d'élaborer le modèle mathématique on utilise deux repères, un repère fixe lié à la terre R^b et un autre mobile lié au centre de masse du quadrirotor R^m

Une matrice de transformation T qui contient l'orientation et la position du repère mobile par rapport au repère fixe permet le passage du repère fixe au repère mobile.

$$T = \begin{bmatrix} R & \zeta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.1)$$

Avec R la matrice de rotation de l'objet mobile, $\zeta = [x \ y \ z]^T$ le vecteur de position.

Les angles d'Euler seront exploités pour déterminer les éléments de la matrice de rotation R .

2.4.1 Les angles d'Euler

Au début, le repère mobile est confondu avec le repère fixe. Ensuite, le repère mobile opère trois mouvements de rotation, le premier autour de l'axe X avec un angle de roulis ϕ , le second autour de l'axe Y avec un angle de tangage θ , et le dernier autour de l'axe Z avec un angle de lacet ψ .

On suppose que $(-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2})$ et $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ et $(-\pi < \psi < \pi)$

La matrice R est obtenue comme suit [8] :

$$R = R_z \times R_y \times R_x = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.4.2)$$

1

$$R = \begin{bmatrix} c(\psi).c(\theta) & s(\phi).s(\theta).c(\psi) - s(\psi).c(\phi) & c(\phi).s(\theta).c(\psi) + s(\psi).s(\phi) \\ s(\psi).c(\theta) & s(\phi).s(\theta).s(\psi) - c(\psi).c(\theta) & c(\phi).s(\theta).s(\psi) + s(\phi).c(\psi) \\ -s(\theta) & s(\phi).c(\theta) & c(\phi).c(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.4.3)$$

1. Avec : c=cos , s=sin

2.4.2 Vitesses angulaires

Les vitesses de rotation Ω_1, Ω_2 et Ω_3 posées dans le repère inertiel (fixe) sont exprimées en fonction des vitesses angulaires $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ et $\dot{\psi}$ dans le repère dynamique (mobile) comme suit :

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_x(\phi)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + [R_y(\theta)R_x(\phi)]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.4.4)$$

Initialement les deux repères coïncident au moment où a lieu la rotation de roulis, vient ensuite une rotation de tangage. Le vecteur représentant cette dernière doit être exprimé dans le repère fixe, le vecteur $\dot{\theta}$ est ainsi multiplié par $R_x(\phi)^{-1}$ et enfin une rotation de lacet se produit et le vecteur de vitesse $\dot{\psi}$ est exprimé dans le repère fixe en le multipliant par $[R_y(\theta)R_x(\phi)]^{-1}$ [11].

Nous aboutirons au développement suivant :

$$\begin{aligned} \Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}\cos(\phi) \\ -\dot{\theta}\sin(\phi) \end{bmatrix} + [R_y(\theta)R_x(\phi)]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\psi}\sin(\theta) \\ \dot{\psi}\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \dot{\psi}\cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi}\sin(\theta) \\ \dot{\theta}\cos(\phi) - \dot{\psi}\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \dot{\psi}\cos(\phi)\cos(\theta) - \dot{\theta}\sin(\phi) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Les rotations de Roulis et de Tangage opérées par le quadrirotor sont supposées faibles en amplitude, nous arrivons donc aux approximations suivantes :

$$\begin{cases} \cos(\phi) = \cos(\theta) = 1 \\ \sin(\phi) = \sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

La vitesse angulaire peut donc être exprimée ainsi :

$$\Omega = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.4.6)$$

2.4.3 Effets physiques agissant sur le quadrirotor

2.4.3.1 Les forces

Il existe une multitude de forces qui agissent sur le système :

— La gravité

Elle est donnée comme suit :

$$P = m * g \quad (2.4.7)$$

Avec :

m : la masse du quadrirotor

$g = 9.81m/s^2$

— Les forces de poussées

Engendrées par la rotation des moteurs, les forces de poussées sont orthogonales au plan des hélices et sont proportionnelles au carré de la vitesse de rotation des moteurs :

$$F_i = b\omega_i^2 \quad (2.4.8)$$

Avec : $i = \overline{1 : 4}$

b : le coefficient de portance, il dépend de la forme et le nombre des pales et la densité de l'air.

— Les forces de traînée

La force de traînée est définie comme la force résistante qu'exerce un fluide sur un objet lorsque le fluide ou l'objet sont en mouvement l'un par rapport à l'autre, elle agit comme une force de frottement.

En ce qui concerne hélices :

elle est proportionnelle au carré de la vitesse de rotation des hélices et est formulée comme suit :

$$T_{hi} = d\omega_i^2 \quad (2.4.9)$$

Avec : $i = \overline{1 : 4}$

d : le coefficient de drag qui dépend du façonnage des hélices.

Pour ce qui est de la traînée selon les axes :

elle est due au mouvement du corps du quadrirotor

$$F_t = \begin{bmatrix} -K_{ftx} & 0 & 0 \\ 0 & -K_{f ty} & 0 \\ 0 & 0 & -K_{ftz} \end{bmatrix} V \quad (2.4.10)$$

Avec K_{ftx} , $K_{f ty}$ et K_{ftz} les coefficients de traînée de translation selon l'axe x , y , z , respectivement. $V = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$ la vitesse linéaire.

2.4.3.2 Les moments

Les différents moments qui agissent sur le quadrirotor sont dus aux forces de poussée, de traînée et aux effets gyroscopiques.

— Moments dus aux forces de poussée

L'un est le résultat de la différence entre les forces de portance des rotors 2 et 4 lors de la rotation autour de l'axe X.

qui est exprimé par :

$$M_x = l(F_4 - F_2) = l \cdot b(\omega_4^2 - \omega_2^2) \quad (2.4.11)$$

Avec : l , la longueur du bras entre le centre de masse du quadrirotor et le rotor.

L'autre est le résultat de la différence entre les forces de portance des rotors 1 et 3 lors de la rotation autour de l'axe Y.

qui est exprimé par :

$$M_y = l(F_3 - F_1) = l \cdot b(\omega_3^2 - \omega_1^2) \quad (2.4.12)$$

— Moments dus aux forces de traînée

Un couple réactif est engendré par les couples de traînée de chaque hélice ce qui agit sur la rotation autour de l'axe Z ce moment est décrit comme suit :

$$M_Z = d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \quad (2.4.13)$$

Les moments obtenus par le biais des frottements aérodynamiques sont donnés par :

$$M_a = \begin{bmatrix} K_{fax} \dot{\phi}^2 \\ K_{fay} \dot{\theta}^2 \\ K_{faz} \dot{\psi}^2 \end{bmatrix} \quad (2.4.14)$$

Avec : K_{fax} , K_{fay} , K_{faz} les coefficients des frottements aérodynamiques, $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ les vitesses angulaires.

2.4.3.3 L'effet gyroscopique

La rotation d'un objet engendre un phénomène, appelé effet gyroscopique, ce dernier permet de maintenir le l'objet en équilibre, l'effet augmente avec la vitesse de rotation et l'objet oppose une résistance à la modification de l'orientation de son plan de rotation. Nous citerons donc les moments gyroscopiques suivants :

— Moments gyroscopiques du quadrirotor

Les rotations du quadrirotor sur lui-même génèrent ces moments qui sont donnés ainsi :

$$M_{gm} = \Omega \wedge J \cdot \Omega \quad (2.4.15)$$

Avec : J la matrice d'inertie du système.

— Moments gyroscopiques des hélices

Les rotations des hélices sur leurs axes génèrent ces moments qui sont donnés par :

$$M_{gh} = \sum_{i=1}^4 \Omega \wedge J_r \begin{bmatrix} 0 & 0 & (-1)^{i+1} \omega_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_r \dot{\theta} \bar{\Omega} \\ -J_r \dot{\phi} \bar{\Omega} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.16)$$

Avec : J_r , l'inertie des rotors.

2.4.4 Modèle mathématique selon le formalisme de Newton-Euler

Nous favoriserons le formalisme de Newton-Euler au vu de sa réputation dans la modélisation des robots et des systèmes articulés, les équations sont alors décrites sous la forme suivante [10-12] :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = v \\ m\ddot{\zeta} = F_f + F_t + F_g \\ \dot{R} = RS(\Omega) \\ J\dot{\Omega} = M_{gm} + M_f + M_a + M_{gh} \end{cases} \quad (2.4.17)$$

Avec :

ζ : le vecteur position du quadrirotor.

m : la masse totale du quadrirotor.

R : la matrice de rotation.

Ω : le vecteur des vitesses angulaires exprimé dans le repère fixe.

J : la matrice d'inertie symétrique.

v : $[\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]$

$$J = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (2.4.18)$$

$S(\Omega)$: la matrice antisymétrique du vecteur Ω .

$$S(\Omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & -\Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.19)$$

F_f : la force de poussée totale générée par les quatre rotors.

$$F_f = R \times \left[0 \quad 0 \quad \sum_{i=1}^4 F_i \right]^T \quad (2.4.20)$$

F_t : la force de traînée selon les axes (X, Y, Z).

$$F_t = \begin{bmatrix} -K_{ftx} & 0 & 0 \\ 0 & -K_{f ty} & 0 \\ 0 & 0 & -K_{ftz} \end{bmatrix} \dot{\zeta} = \begin{bmatrix} -K_{ftx}\dot{x} \\ -K_{ftx}\dot{y} \\ -K_{ftx}\dot{z} \end{bmatrix} \quad (2.4.21)$$

F_g : la force de gravité.

$$F_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} \quad (2.4.22)$$

M_f : moment provoqué par les forces de poussée et de traînée.

$$M_f = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (2.4.23)$$

2.4.4.1 Équations de mouvement de translation

D'après le formalisme de Newton-Euler nous avons :

$$m\ddot{\zeta} = F_f + F_t + F_g \quad (2.4.24)$$

Les forces sont remplacées par leurs formules (2.4.20), (2.4.21) et (2.4.22) pour aboutir à :

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\varphi).s(\theta).c(\psi) + s(\psi).s(\varphi) \\ c(\varphi).s(\theta).s(\psi) - s(\varphi).c(\psi) \\ c(\varphi).c(\theta) \end{bmatrix} \sum_{i=1}^4 F_i + \begin{bmatrix} -K_{ftx}\dot{x} \\ -K_{ftx}\dot{y} \\ -K_{ftx}\dot{z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} \quad (2.4.25)$$

Nous obtenons alors les équations différentielles du mouvement de translation comme suit :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m}(c(\varphi).s(\theta).c(\psi) + s(\psi).s(\varphi)) \left(\sum_{i=1}^4 F_i \right) - \frac{K_{ftx}}{m}\dot{x} \\ \ddot{y} = \frac{1}{m}(c(\varphi).s(\theta).s(\psi) - s(\varphi).c(\psi)) \left(\sum_{i=1}^4 F_i \right) - \frac{K_{fty}}{m}\dot{y} \\ \ddot{z} = \frac{1}{m}(c(\varphi).c(\theta)) \left(\sum_{i=1}^4 F_i \right) - \frac{K_{ftz}}{m}\dot{z} - g \end{cases} \quad (2.4.26)$$

2.4.4.2 Équations de mouvement de rotation

Nous avons :

$$J\dot{\Omega} = M_{gm} + M_f + M_a + M_{gh} \quad (2.4.27)$$

Nous effectuerons les remplacements nécessaires pour conduire au résultat suivant :

$$\begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \wedge \left[\begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{fax}\dot{\phi}^2 \\ K_{fay}\dot{\theta}^2 \\ K_{faz}\dot{\psi}^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_r\dot{\theta}\bar{\Omega} \\ -J_r\dot{\phi}\bar{\Omega} \\ 0 \end{bmatrix} \right] \quad (2.4.28)$$

$$\begin{cases} I_x\ddot{\phi} = -\dot{\theta}\dot{\psi}(I_z - I_y) - J_r\bar{\Omega}\dot{\theta} - K_{fax}\dot{\phi}^2 + lb(\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ I_y\ddot{\theta} = -\dot{\phi}\dot{\psi}(I_z - I_x) - J_r\bar{\Omega}\dot{\phi} - K_{fay}\dot{\theta}^2 + lb(\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ \ddot{z} = -\dot{\theta}\dot{\phi}(I_y - I_x) - K_{faz}\dot{\psi}^2 + lb(\omega_3^2 - \omega_1^2) + d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{cases} \quad (2.4.29)$$

Nous pouvons enfin aboutir au modèle régissant la dynamique du quadrirotor :

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \dot{\theta}\dot{\psi}\frac{I_y - I_z}{I_x} - \frac{J_r}{I_x}\bar{\Omega}\dot{\theta} - \frac{K_{fax}}{I_x}\dot{\phi}^2 + \frac{U_2}{I_x} \\ \ddot{\theta} = \dot{\phi}\dot{\psi}\frac{I_z - I_x}{I_y} - \frac{J_r}{I_y}\bar{\Omega}\dot{\phi} - \frac{K_{fay}}{I_y}\dot{\theta}^2 + \frac{U_3}{I_y} \\ \ddot{\psi} = \dot{\theta}\dot{\phi}\frac{I_x - I_y}{I_z} - \frac{K_{faz}}{I_z}\dot{\psi}^2 + \frac{U_4}{I_z} \\ \ddot{x} = \frac{(c(\phi).s(\theta).c(\psi) + s(\psi).s(\phi))}{m}U_1 - \frac{K_{ftx}}{m}\dot{x} \\ \ddot{y} = \frac{(c(\phi).s(\theta).c(\psi) + s(\phi).c(\psi))}{m}U_1 - \frac{K_{fty}}{m}\dot{y} \\ \ddot{z} = \frac{(c(\phi).c(\theta))}{m}U_1 - \frac{K_{ftz}}{m}\dot{z} - g \end{cases} \quad (2.4.30)$$

Avec :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & b & b & b \\ 0 & -lb & 0 & lb \\ -lb & 0 & lb & 0 \\ d & -d & d & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} \quad (2.4.31)$$

2.4.5 La représentation d'état du système

En posant X comme vecteur d'état :

$$\begin{cases} X = [\phi \dot{\phi} \theta \dot{\theta} \psi \dot{\psi} x \dot{x} y \dot{y} z \dot{z}]^T \\ = [x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_{12}]^T \end{cases} \quad (2.4.32)$$

Nous aboutissons au modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = c_1 x_4 x_6 + c_2 x_2^2 + c_3 \bar{\Omega} x_4 + b_1 U_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = c_4 x_2 x_6 + c_5 x_4 + c_6 \bar{\Omega} x_2 + b_2 U_3 \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = c_7 x_2 x_4 + c_8 x_6^2 + b_3 U_4 \\ \dot{x}_7 = x_8 \\ \dot{x}_8 = c_9 x_8 + \frac{\cos(x_1)\cos(x_5)\sin(x_3) + \sin(x_1)\sin(x_5)}{m} U_1 \\ \dot{x}_9 = x_{10} \\ \dot{x}_{10} = c_{10} x_{10} + \frac{\cos(x_1)\sin(x_3)\sin(x_5) - \sin(x_1)\sin(x_5)}{m} U_1 \\ \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = c_{11} x_{12} + \frac{\cos(x_1)\cos(x_3)}{m} U_1 - g \end{cases} \quad (2.4.33)$$

Avec :

$$c_1 = \frac{I_y - I_z}{I_x}, \quad c_2 = -\frac{K_{f_{ax}}}{I_x}, \quad c_3 = -\frac{J_r}{I_x}, \quad c_4 = \frac{I_z - I_x}{I_y}, \quad c_5 = -\frac{K_{f_{ay}}}{I_y}, \quad c_6 = -\frac{J_r}{I_y}, \quad c_7 = \frac{I_x - I_y}{I_z}$$

$$c_8 = -\frac{K_{f_{az}}}{I_z}, \quad c_9 = -\frac{K_{f_{tx}}}{m}, \quad c_{10} = -\frac{K_{f_{ty}}}{m}, \quad c_{11} = -\frac{K_{f_{tz}}}{m}, \quad b_1 = \frac{1}{I_x}, \quad b_2 = \frac{1}{I_y}, \quad b_3 = \frac{1}{I_z}$$

2.5 Conclusion

Ce chapitre propose une modélisation complète d'un quadrirotor. Nous avons commencé par une description du fonctionnement général de l'engin, son principe de fonctionnement, les différents mouvements qu'il peut effectuer, et les effets physiques qui affectent le vol. Nous avons par la suite proposé un modèle mathématique décrivant la dynamique du quadrirotor en utilisant le formalisme de Newton-Euler. Ce qui nous a permis d'établir un modèle dynamique à partir duquel nous avons confirmé que le quadrirotor est un système sous-actionné, complexe, et fortement non linéaire.

Chapitre 3

Commande optimale

L'objectif de la commande optimale contient deux principales orientations. La première orientation vise une énergie minimale tandis que la deuxième cherche à réduire le temps de convergence du système. L'objectif général est de trouver une commande optimale qui minimise un critère qui varie selon l'orientation adoptée [13-14].

3.1 Formulation mathématique d'un problème de commande optimale

Soit un système à temps continu de représentation d'état :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (3.1.1)$$

Avec x : le vecteur d'état, u : le vecteur de commande, t : le temps et \dot{x} : l'état du système

et de condition initiale $x(t_0) = x_0$, où $t \in R$, $u \in R^m$ et $x \in R^n$. Les signaux u et x sont des fonctions de R vers respectivement R^m et R^n . Pour la condition initiale x_0 et la commande u , l'équation d'état (3.0.1) définit une trajectoire unique x pour l'état sur $[t_0, t_f]$. Celle-ci est fonction de la condition initial x_0 et de la commande u sur $[t_0, t_f]$.

Soit un critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x, u, t) dt \quad (3.1.2)$$

Avec $x_f = x(t_f)$. Les fonctions θ et φ ainsi que les instants t_0 et t_f étant donnés, ce critère ne dépend que de x_0 et de u sur $[t_0, t_f]$. L'application qui au signal de commande u associe le critère scalaire $J(x_0, t_0, u)$ est une fonctionnelle. On peut citer les différents critères (problèmes) existant dans la littérature :

— Le problème de Lagrange :

$$\int_{t_0}^{t_f} \psi(x, u, t) dt \quad (3.1.3)$$

— Le problème de Bolza :

$$\theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x, u, t) dt \quad (3.1.4)$$

— Le problème de Mayer

$$\theta(x_f, t_f) \tag{3.1.5}$$

En plus de l'équation d'état qui lie les trajectoires de u et de x , les éléments suivants doivent être spécifiés :

l'instant final peut être imposé ou libre ;

la commande peut appartenir à un ensemble $u \in U \neq R_m$;

des contraintes peuvent exister sur l'état final : $x_f \in X$.

Le problème de la commande optimale consiste alors à trouver la commande \tilde{u} minimisant $J(x_0, t_0, u)$:

$$\tilde{u} = \min_{u \in U} J(x_0, t_0, u) \tag{3.1.6}$$

3.2 Principe du minimum de Pontriaguine

Le principe du minimum de Pontriaguine peut être énoncé comme suit.

Soit le système d'équation d'état :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \tag{3.2.1}$$

et le critère de performance :

$$J(x_0, t_0, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x, u, t) dt \tag{3.2.2}$$

On définit l'hamiltonien du système :

$$H(x, u, p, t) = \varphi(x, u, t) + p^T f(x, u, t) \tag{3.2.3}$$

où p est appelé état-adjoint. Le principe du minimum de Pontriaguine énonce que la trajectoire optimale minimise l'hamiltonien du système. Autrement dit :

$$H(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{p}, t) \leq H(\tilde{x}, u, \tilde{p}) \forall u \in U, t \in [t_0, t_f] \tag{3.2.4}$$

Des équations permettent de résoudre le problème de commande optimale le long de la trajectoire optimale. Ces équations sont obtenues en utilisant le calcul des variations.

La solution conduit aux équations canoniques de Hamilton, qui régissent les dynamiques de l'état d'une part et de l'état adjoint d'autre part :

— État

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x} \tag{3.2.5}$$

— État adjoint

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p} \tag{3.2.6}$$

Les équations de transversalité sont obtenues des conditions terminales, en t_0 d'une part et en t_f d'autre part :

— À l'origine

$$\left(-H(t_0) + \frac{\partial \theta}{\partial t_0}\right) \delta t_0 + \left(p(t_0) + \frac{\partial \theta}{\partial x_0}\right)^T \delta x_0 = 0 \tag{3.2.7}$$

— À l'arrivée

$$\left(-H(t_f) + \frac{\partial \theta}{\partial t_f}\right) \delta t_f + \left(p(t_f) + \frac{\partial \theta}{\partial x_f}\right)^T \delta x_f = 0 \quad (3.2.8)$$

Certaines relations additionnelles peuvent être établies selon la nature du problème :

— Si aucune contrainte (de type saturation) n'est imposée sur $u(t)$ à l'instant t , on a :

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t) = 0 \quad (3.2.9)$$

— Si H n'est pas une fonction explicite du temps, on a :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (3.2.10)$$

3.3 Équation d'Euler-Lagrange (calcul des variations)

L'équation d'Euler-Lagrange, particulièrement utilisée en mécanique, peut être retrouvée à partir du principe du minimum.

En notant T , l'énergie cinétique et U l'énergie potentielle d'un système mécanique, le système évolue en minimisant l'intégrale :

$$\int_{t_0}^{t_f} (T - U) dt \quad (3.3.1)$$

On a q les coordonnées généralisées du système. Soit $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$ le lagrangien, avec le critère :

$$J(q_0, t_0, \dot{q}) = \int_{t_0}^{t_f} L(q, \dot{q}) dt \quad (3.3.2)$$

Soit un système dont on commande la vitesse, l'équation d'état du système s'écrivant alors :

$$\dot{q} = u \quad (3.3.3)$$

L'hamiltonien s'écrit alors :

$$H(q, \dot{q}) = L(q, \dot{q}) + p^T \dot{q} \quad (3.3.4)$$

Du principe du minimum découle les deux équations suivantes :

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} = -\dot{p} \quad (3.3.5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + p = 0 \quad (3.3.6)$$

En dérivant la seconde équation par rapport au temps puis en remplaçant \dot{p} avec l'équation (3.0.21) on obtient l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (3.3.7)$$

3.4 Principe d'optimalité de Bellman

Soit le critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x, u, t) dt \tag{3.4.1}$$

La trajectoire optimale sur $[t_0, t_f]$ est \tilde{u} et le critère optimal :

$$\tilde{J}(x_0, t_0) = \min_{u_{[t_0, t_f]}} J(x_0, t_0, u) \tag{3.4.2}$$

Soit $t_1 \in [t_0, t_f]$. Le principe d'optimalité de Bellman énonce que la trajectoire optimale sur $[t_0, t_f]$ contient la trajectoire optimale sur $[t_1, t_f]$ avec comme condition initiale $x_1 = x(t_1)$. Autrement dit :

$$\tilde{J}(x_0) = \min_{u_{[t_0, t_1], x_1}} \left(\int_{t_0}^{t_1} \varphi(x, u, t) dt + \tilde{J}(x_1) \right) \tag{3.4.3}$$

Ce principe permet d'obtenir une solution optimale en découpant l'intervalle et en résolvant un problème récursif.

3.5 Commande linéaire quadratique

La commande linéaire quadratique, dite commande LQ, est une méthode qui permet de calculer la matrice de gains d'une commande par retour d'état. Le système est linéaire et la commande quadratique. La commande optimale est un retour d'état.

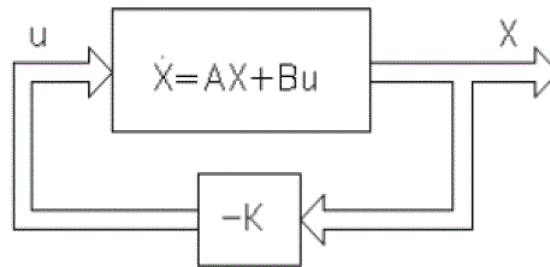


FIGURE 3.1 – Diagramme d'une commande LQ

3.5.1 Commande LQ à horizon fini

Soit le problème de commande optimale du système :

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \tag{3.5.1}$$

Avec le critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2} x_f^T S x_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} (x^T Q(t)x + u^T R(t)u) dt \tag{3.5.2}$$

Les matrices symétriques positives Q et R sont dites matrices de pondération, S est une matrice symétrique avec $S \geq 0$.

L'hamiltonien s'écrit alors :

$$H(x, u, p, t) = p^T A(t)x + p^T B(t)u + \frac{1}{2}(x^T Q(t)x + u^T R(t)u) \quad (3.5.3)$$

L'hamiltonien, vérifie les conditions suivantes :

— Équation d'état adjoint

$$\dot{p} = -\frac{\partial L}{\partial x} = -A^T(t)p - Q(t)x \quad (3.5.4)$$

— Condition de transversalité

$$p(t_f) = Sx_f \quad (3.5.5)$$

— Absence de contrainte sur la commande

$$\frac{\partial L}{\partial u} = B^T(t)p + R(t)u = 0 \quad (3.5.6)$$

De l'équation (3.5.6), on déduit :

$$u = -R^{-1}(t)B^T(t)p \quad (3.5.7)$$

Alors l'équation dynamique du système s'écrit :

$$\dot{x} = A(t)x - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)p \quad (3.5.8)$$

Un système matriciel peut être formé avec les équations (3.5.4) et (3.5.8) et ce système est appelé système hamiltonien :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} \quad (3.5.9)$$

Ecrivons $p = P(t)x$, en s'appuyant sur l'équation (3.5.5), avec, d'après cette dernière, la condition finale $P(t_f) = S$. L'équation (3.5.4) s'écrit alors :

$$\dot{p} = -(A^T(t)P(t) + Q(t))x \quad (3.5.10)$$

Avec $\dot{p} = \dot{P}x + P\dot{x}$ et l'équation d'état (3.5.1) du système, l'équation (3.5.10) s'écrit :

$$(\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q)x = 0 \quad (3.5.11)$$

La solution est alors obtenue en résolvant l'équation (différentielle) de Riccati suivante :

$$\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (3.5.12)$$

avec la condition finale $P(t_f) = S$.

On montre que la condition :

$$x^T(\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q)x = 0 \quad (3.5.13)$$

s'écrit aussi :

$$\frac{d}{dt}(x^T P x) + x^T Q x + u^T R u = 0 \quad (3.5.14)$$

Le critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2}x_f S x_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}(x^T Q(t)x + u^T R(t)u)dt \quad (3.5.15)$$

S'écrit alors :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2} \left(x_f S x_f - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}(x^T P x) dt \right) \quad (3.5.16)$$

soit avec les conditions de transversalités $S = P(t_f)$:

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2}x_0^T P(t_0)x_0 \quad (3.5.17)$$

Le minimum du critère est donc :

$$\tilde{J}(x_0) = J(x_0, t_0, \tilde{u}) = \frac{1}{2}x_0^T P(t_0)x_0 \quad (3.5.18)$$

La commande optimale obtenue s'écrit sous forme d'un retour d'état :

$$u = -K(t)x \quad (3.5.19)$$

avec :

$$K = -R^{-1}B^T P \quad (3.5.20)$$

3.5.2 Commande LQ à horizon infini

Nous nous intéressons dans cette section aux systèmes multivariables linéaires à temps variant précédents où le critère est donné par [13] :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{2}(x^T Q(t)x + u^T R(t)u)dt \quad (3.5.21)$$

On peut arriver à montrer que le critère de l'équation (3.5.21) est fini si le système est stabilisable à tout instant t de ce fait on peut démontrer qu'à chaque instant il existe un $K(t)$. Par ailleurs, sur un horizon infini, l'état final tend vers zéro si le système bouclé est stable.

En ce qui concerne les systèmes linéaires à temps invariant, la commande optimale est exprimée sous forme de retour d'état statique comme suit :

$$U = -Kx \quad (3.5.22)$$

où

$$K = -R^{-1}B^T P \quad (3.5.23)$$

P vérifie l'équation algébrique de Riccati qui est décrite par :

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (3.5.24)$$

3.5.3 Minimisation de l'erreur du vecteur d'état

Soit le critère J_e :

$$J_e = \int_{t_0}^{t_f} e^T(t) Q e(t) dt \quad (3.5.25)$$

avec $e^T(t) Q e(t) \geq 0$

Le critère de l'équation (3.5.25) représente l'erreur quadratique du vecteur d'état $x(t)$ avec $e(t) = x^d(t) - x(t)$, $x(t)$ représente le vecteur d'état et $x^d(t)$ le vecteur d'état désiré.

La condition de l'équation (3.5.25) est réalisable, si et seulement si, la matrice de pondération Q est définie non négative ($Q \geq 0$).

Le terme quadratique $e^T(t) Q e(t)$ a été pris en compte afin d'accumuler l'erreur transitoire du vecteur d'état. Ce critère permet de mesurer la performance optimale du système.

3.5.4 Minimisation de l'énergie du contrôle

Soit le critère J_u :

$$J_u = \int_{t_0}^{t_f} u^T(t) R u(t) dt \quad (3.5.26)$$

avec $u^T(t) R u(t) > 0$

Le critère de l'équation (3.5.26) représente la sommation de l'énergie quadratique requise pendant une période déterminée par $\delta t = t_f - t_0$.

La condition de l'équation (3.5.26) est réalisable, si et seulement si, le vecteur d'entrée $u(t) > 0$ et la matrice de pondération est symétrique définie positive ($R > 0$).

Le terme $u^T(t) R u(t)$ permet de mesurer la consommation de l'énergie du système. l'objectif est de trouver le bon compromis entre la minimisation de ce terme tout en respectant la contrainte de performance.

Chapitre 4

Simulation et résultats

4.1 Introduction

De nombreuses études traitent de la modélisation dynamique et de la commande du quadrirotor. Le système traité dans ce mémoire est complexe et fortement non linéaire. Ces modèles sont difficiles à utiliser pour l'application de la commande. Un modèle simplifié est utilisé dans la plupart des travaux qui ont été menés sur la commande [10]. On utilisera donc le modèle d'état présenté ci-dessous où le vecteur d'état choisi permettra la simplification de la synthèse du contrôleur.

Le chapitre est scindé en deux parties. Dans la première partie nous donnerons un modèle simplifié et facile à linéariser [15]. Dans la deuxième partie nous présenterons deux stratégies de commande à savoir la commande linéaire quadratique centralisée et la commande linéaire quadratique décentralisée.

4.2 Modèle d'état du système

On pose le vecteur d'état X comme suit :

$$X = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \phi \ \theta \ \psi \ \dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T \quad (4.2.1)$$

Le vecteur d'entrée est composé comme suit :

$$u^T = [F_z, \tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi] \quad (4.2.2)$$

Avec $(\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi)$ respectivement les moments générés par les rotations de roulis, de tangage et de lacet.

Le vecteur d'état est partitionné comme suit :

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases}, \begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = \dot{y} \end{cases}, \begin{cases} z_1 = z \\ z_2 = \dot{z} \end{cases}, \begin{cases} \phi_1 = \phi \\ \phi_2 = \dot{\phi} \end{cases}, \begin{cases} \theta_1 = \theta \\ \theta_2 = \dot{\theta} \end{cases}, \begin{cases} \psi_1 = \psi \\ \psi_2 = \dot{\psi} \end{cases}.$$

Le modèle d'état est donc un système multivariable composé de six sous-systèmes non linéaires du 2^e ordre :

$$\begin{cases}
 \dot{x}_1 = x_2 \\
 \dot{x}_2 = \frac{\cos(\phi_1)\sin(\theta_1)+\sin(\phi_1)\sin(\psi_1)}{m}U_1 \\
 \dot{y}_1 = y_2 \\
 \dot{y}_2 = \frac{\cos(\phi_1)\sin(\theta_1)\sin(\psi_1)-\sin(\phi_1)\sin(\psi_1)}{m}U_1 \\
 \dot{z}_1 = z_2 \\
 \dot{z}_2 = -g + \frac{\cos(\phi_1)\cos(\theta_1)}{m}U_1 \\
 \dot{\phi}_1 = \phi_2 \\
 \dot{\phi}_2 = \frac{I_y-I_z}{I_x}\theta_2\psi_2 + \frac{J_{TF}}{I_y}\theta_2\Omega + \frac{1}{I_x}U_2 \\
 \dot{\theta}_1 = \theta_2 \\
 \dot{\theta}_2 = \frac{I_y-I_z}{I_x}\theta_2\psi_2 + \frac{J_{TF}}{I_y}\theta_2\Omega + \frac{1}{I_y}U_3 \\
 \dot{\psi}_1 = \psi_2 \\
 \dot{\psi}_2 = \frac{I_x-I_y}{I_z}\phi_2\theta_2 + \frac{1}{I_z}U_4
 \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Avec

J_{tp} : le moment d'inertie total de la rotation des rotors

4.3 Stratégie de commande

On s'intéresse à la stabilisation du quadrirotor en vol stationnaire, on synthétisera donc un contrôleur dans le but d'établir une loi de commande permettant à l'appareil de suivre une trajectoire définie (x^d, y^d, z^d) ainsi que le cap (ψ^d) .

4.3.1 Commande LQ centralisée

On pose le vecteur d'état X sous cette forme :

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ y_2 \\ 0 \\ z_2 \\ -g \\ \phi_2 \\ \frac{I_y-I_z}{I_x}\theta_2\psi_2 + \frac{J_{TF}}{I_y}\theta_2\Omega \\ \theta_2 \\ \frac{I_z-I_x}{I_y}\phi_2\psi_2 + \frac{J_{TF}}{I_y}\phi_2\Omega \\ \psi_2 \\ \frac{I_x-I_y}{I_z}\phi_2\theta_2 \end{pmatrix} \quad (4.3.1)$$

$$G(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\cos(\phi_1)\sin(\theta_1)+\sin(\phi_1)\sin(\psi_1)}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\cos(\phi_1)\sin(\theta_1)\sin(\psi_1)-\sin(\phi_1)\sin(\psi_1)}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\cos(\phi_1)\cos(\theta_1)}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{pmatrix} \quad (4.3.2)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.3)$$

Le vecteur de sortie à commander est donné comme suit :

$$Y = (x_1, y_1, z_1, \psi_1)$$

La dynamique complète du système est présentée donc comme suit :

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X) + G(X, \Omega)U \\ Y = CX \end{cases} \quad (4.3.4)$$

On procède à la linéarisation du système autour de son point d'équilibre en résolvant :

$$\dot{X} = 0 \Rightarrow F(\bar{X}) + G(\bar{X}, \bar{\Omega})\bar{U} = 0 \quad (4.3.5)$$

On obtient $\bar{U}_2 = \bar{U}_3 = \bar{U}_4 = 0$ et $\phi_2 = \theta_2 = \psi_2 = 0$. L'objectif de la commande c'est de faire en sorte que le quadrirotor suive une trajectoire désirée (x^d, y^d, z^d) avec un angle d'orientation (cap) désiré (ψ^d) autour de l'axe vertical Z .

Donc pour une trajectoire définie nous devons trouver \bar{U}_1 de manière à satisfaire les équations suivantes :

$$\begin{cases} \cos(\bar{\phi}_1)\sin(\bar{\theta}_1) + \sin(\bar{\phi}_1)\sin(\bar{\psi}_1) = 0 \\ \cos(\bar{\phi}_1)\sin(\bar{\theta}_1)\sin(\bar{\psi}_1) - \sin(\bar{\phi}_1)\sin(\bar{\psi}_1) = 0 \\ \cos(\bar{\phi}_1)\cos(\bar{\theta}_1)\bar{U}_1 = 0 \end{cases} \quad (4.3.6)$$

$$\begin{cases} \bar{U}_2 = lb(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) = 0 \\ \bar{U}_3 = lb(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) = 0 \\ \bar{U}_4 = lb(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_3^2 - \Omega_1^2) = 0 \end{cases} \quad (4.3.7)$$

Après résolution des équations (4.3.6) et (4.3.7) en posant $\bar{U}_1 = mg = b(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 + \Omega_3^2 + \Omega_1^2)$ on obtient :

$$\begin{cases} \bar{\phi}_1 = 0 \\ \bar{\theta}_1 = 0 \\ \bar{U}_1 = mg \\ \bar{\Omega}_1 = \bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}_3 = \bar{\Omega}_4 = \bar{\Omega} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{mg}{b}} \end{cases} \quad (4.3.8)$$

Donc, le point d'équilibre est obtenu comme suit :

$$\bar{X} = (\bar{x}_1 \ 0 \ \bar{y}_1 \ 0 \ \bar{z}_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \bar{\psi}_1 \ 0), \quad \bar{\Omega} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{mg}{b}}, \quad \text{et } \bar{U} = (\bar{U}_1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

On définit les vecteurs d'erreur comme suit :

$$\tilde{X} = X - \bar{X} \quad (4.3.9)$$

$$\tilde{U} = U - \bar{U} \quad (4.3.10)$$

$$\tilde{Y} = Y - \bar{Y} \quad (4.3.11)$$

L'erreur dynamique linéarisée est posée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}} = A\tilde{X} + B\tilde{U} \\ \tilde{Y} = C\tilde{X} \end{cases} \quad (4.3.12)$$

Avec $A = \frac{\partial F}{\partial X}$ et $B = \frac{\partial GU}{\partial U} = G(\bar{X})$ les dérivées sont calculées au point d'équilibre et on obtient :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.13)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix} \quad (4.3.14)$$

L'objectif de la commande LQR est de trouver un retour d'état K de manière à avoir une loi de commande $\tilde{U} = -K\tilde{X}$ qui minimise la fonction objective :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{\infty} \frac{1}{2} (\tilde{X}^T Q \tilde{X} + \tilde{U}^T R \tilde{U}) dt \quad (4.3.15)$$

Les matrices Q et R doivent être choisies de manière à obtenir la sortie désirée.

Le problème de commande optimale est réduit à résoudre l'équation algébrique de Riccati suivante avec des matrices Q et R données.

La loi de commande optimale est décrite comme suit :

$$U^* = -K^* \tilde{\eta} = -R^{-1} B^T \tilde{\eta} \quad (4.3.16)$$

Les matrices Q et R sont posées comme suit :

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1000 \end{bmatrix} \quad (4.3.17)$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (4.3.18)$$

Les matrices Q et R sont généralement obtenues avec la règle de Brysen .

Dans notre cas les matrices Q et R sont obtenues par tâtonnement après plusieurs essais.

Le retour d'état K est obtenu comme suit :

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 387.2983 & 28.0107 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1000 & -0.1525 & 0 & 0 & 0.6502 & 0.1433 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0316 & 0.0521 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2651 & 0.0728 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1000 & 0.1133 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.19)$$

4.3.2 Commande LQ décentralisée

Le système linéaire multivariable peut être formulé sous sa forme décentralisée comme suit :

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{\theta}}_1 \\ \dot{\tilde{\theta}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_x} \end{pmatrix} \tilde{U}_2 \quad (4.3.20)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{y}}_1 \\ \dot{\tilde{y}}_2 \\ \dot{\tilde{\phi}}_1 \\ \dot{\tilde{\phi}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_y} \end{pmatrix} \tilde{U}_3 \quad (4.3.21)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{z}}_1 \\ \dot{\tilde{z}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \tilde{U}_1 \quad (4.3.22)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{\psi}}_1 \\ \dot{\tilde{\psi}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_z} \end{pmatrix} \tilde{U}_4 \quad (4.3.23)$$

On obtient quatre sous-systèmes sous forme canonique, on peut appliquer une commande avec une seule entrée sur chaque sous-système ce qui facilite la synthèse d'un contrôleur linéaire dans le but d'une poursuite d'une trajectoire définie.

Pour notre simulation nous allons poser les matrices Q et R obtenues précédemment dans (4.3.17) et (4.3.18) comme suit selon les variables d'état et les entrées de la méthode décentralisée :

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1000 \end{bmatrix} \quad (4.3.24)$$

$$R = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (4.3.25)$$

Le retour d'état K est obtenu comme suit :

$$K = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.4596 & 5.5430 & 1.0439 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1000 & -0.1525 & 0.6502 & 0.1433 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12.2474 & 4.9493 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1000 & 0.1133 \end{bmatrix} \quad (4.3.26)$$

4.4 Résultats de la simulation

Les paramètres suivant sont utilisés pour simuler notre système :

Paramètres	Description
$m = 1 \text{ kg}$	Masse totale du quadrirotor
$I_x = 8.1 \times 10^{-3}$	Moment d'inertie le long de l'axe X
$I_y = 8.1 \times 10^{-3}$	Moment d'inertie le long de l'axe Y
$I_z = 14.2 \times 10^{-3}$	Moment d'inertie le long de l'axe Z
$b = 54.2 \times 10^{-6}$	Coefficient de portance
$d = 4.1 \times 10^{-6}$	Coefficient de drag
$l = 0.24 \text{ m}$	Longueur d'un bras
$g = 9.806 \text{ m/s}^2$	Constante de gravitation

TABLE 4.1 – Paramètres du modèle simulé

A l'issue de plusieurs tests de poursuite de consigne, nous allons présenter les résultats obtenus dans ce qui suit.

4.4.1 Poursuite d'échelon

En premier lieu nous soumettons notre système à une poursuite d'échelon en imposant une altitude $z^d = 10 \text{ m}$ en gardant x^d, y^d, ψ^d nulles. Les résultats sont présentés dans les figure ci-dessous :

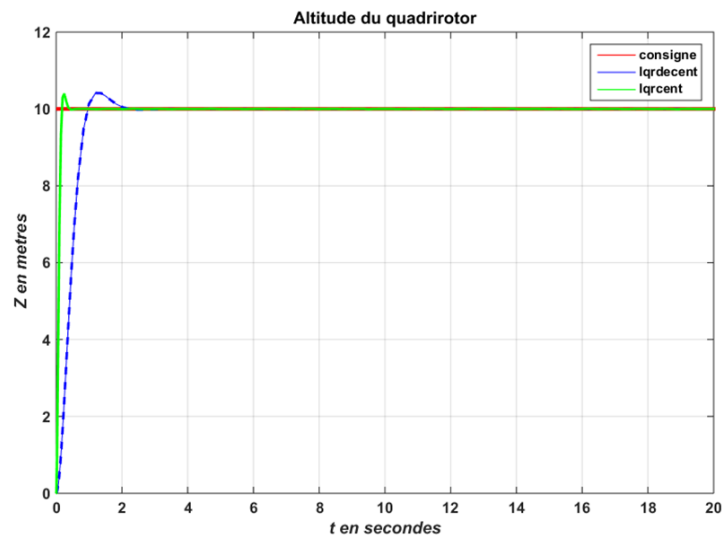


FIGURE 4.1 – Réponse en position Z pour une consigne de type échelon

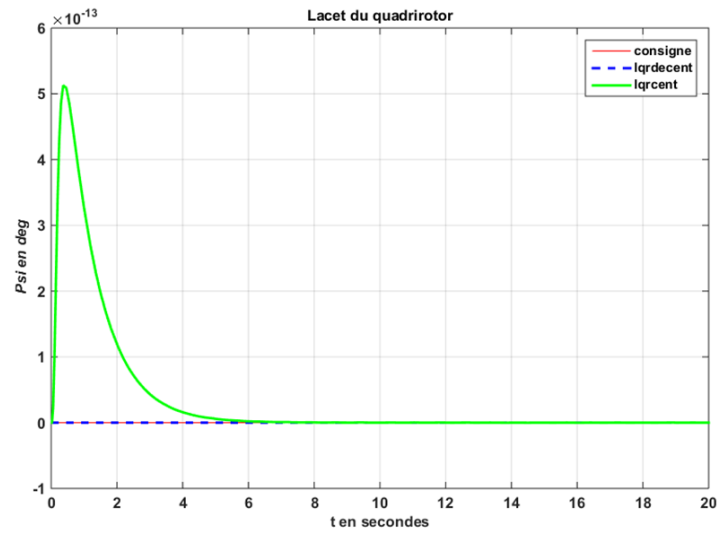


FIGURE 4.2 – Résultat du lacet pour une consigne de type échelon sur la variable Z

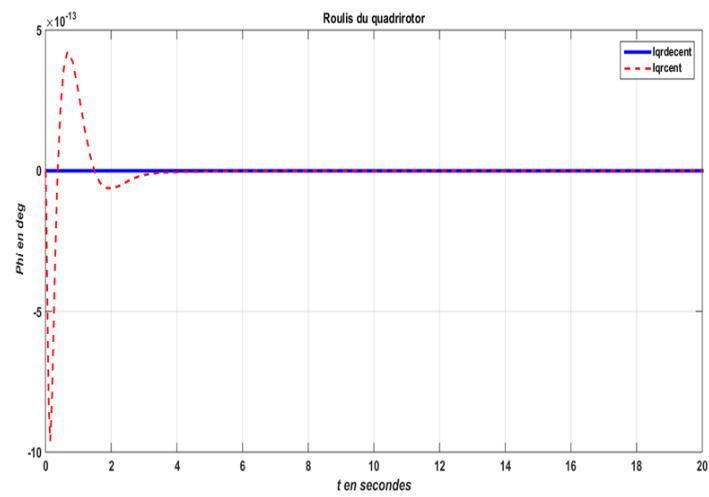


FIGURE 4.3 – Résultat du roulis pour une consigne de type échelon sur la variable Z

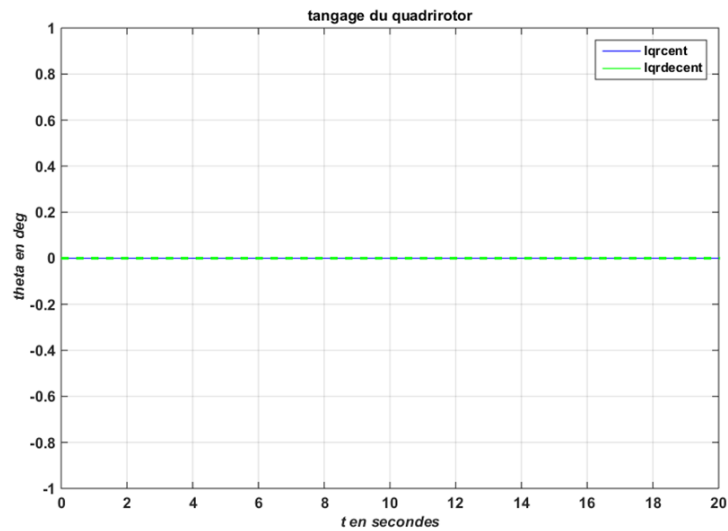


FIGURE 4.4 – Résultat du tangage pour une consigne de type échelon sur la variable Z

On constate un léger dépassement au début qui converge vers la consigne très rapidement ainsi qu'un temps de réponse rapide avec la commande centralisée comparée à la commande décentralisée. Le système reste stable au vu des résultats des angles obtenus.

4.4.2 Poursuite de trajectoires

Nous définissons après 5 secondes une trajectoire x^d de 0.5 m pendant 10 secondes tout en gardant l'altitude z^d donnée précédemment et ensuite une trajectoire y^d de 1 m pendant 15 secondes

le lacet est maintenu nul ($\psi^d = 0$)

On a obtenu les résultats suivants :

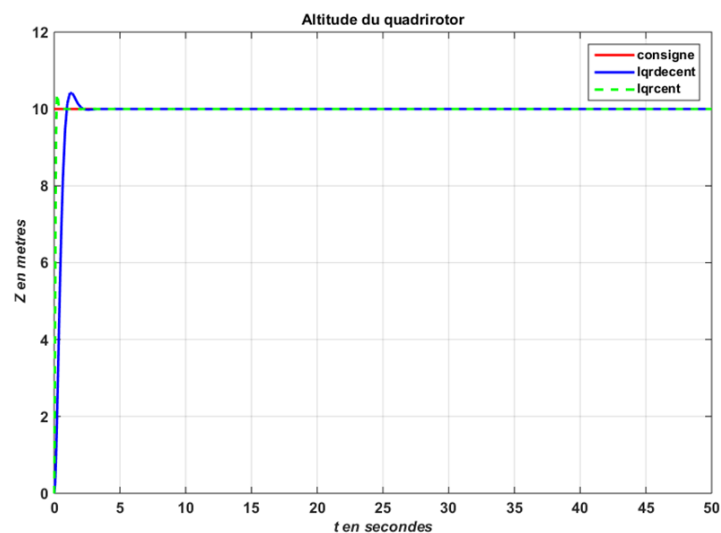


FIGURE 4.5 – Réponse en position Z pour une poursuite de trajectoire

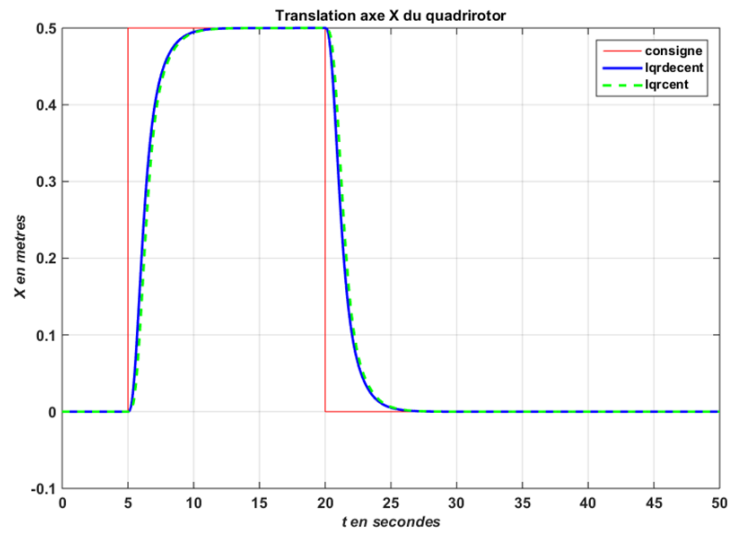


FIGURE 4.6 – Réponse en position X pour une poursuite de trajectoire

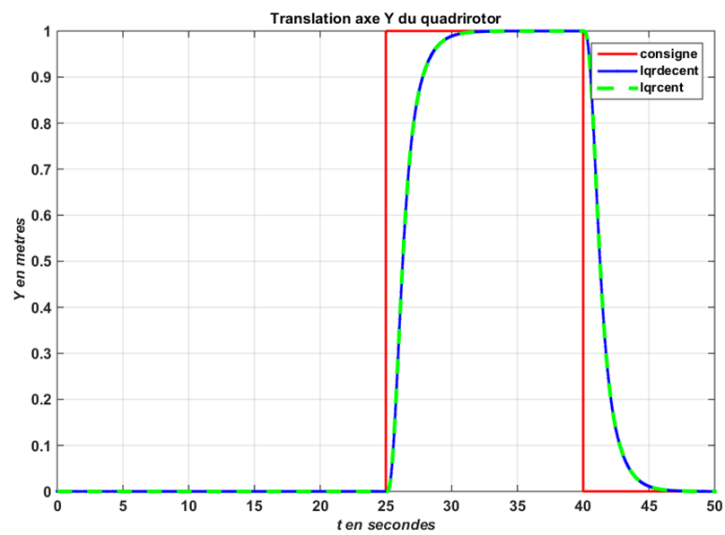


FIGURE 4.7 – Réponse en position Y pour une poursuite de trajectoire

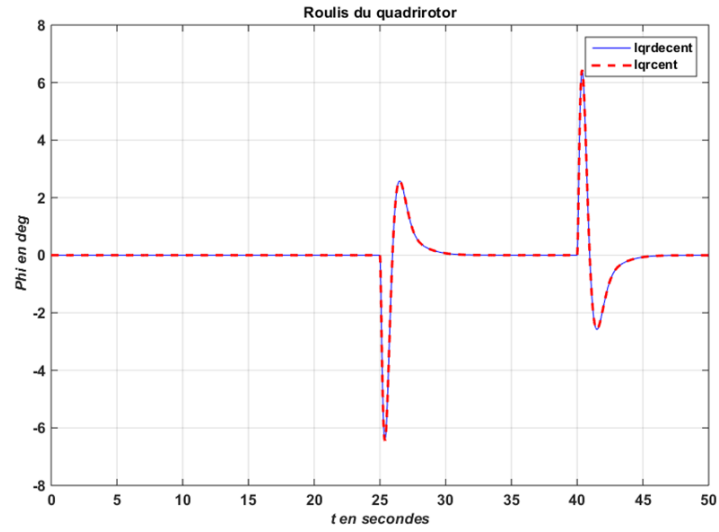


FIGURE 4.8 – Résultat du roulis pour une poursuite de trajectoire

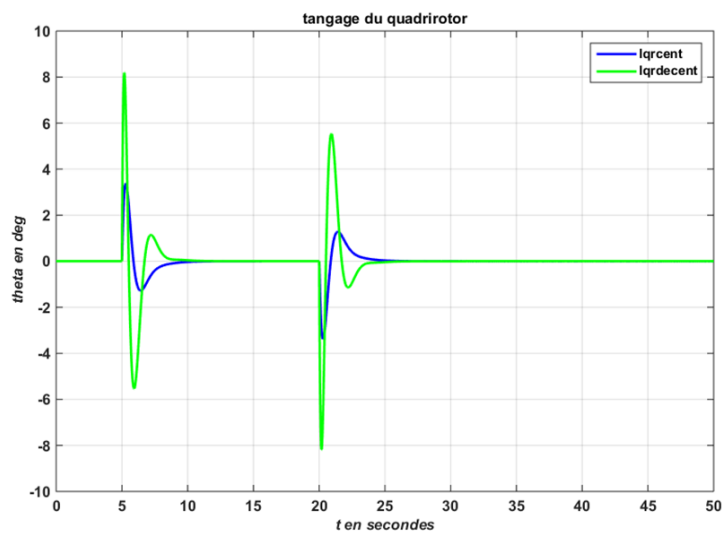


FIGURE 4.9 – Résultat du tangage pour une poursuite de trajectoire

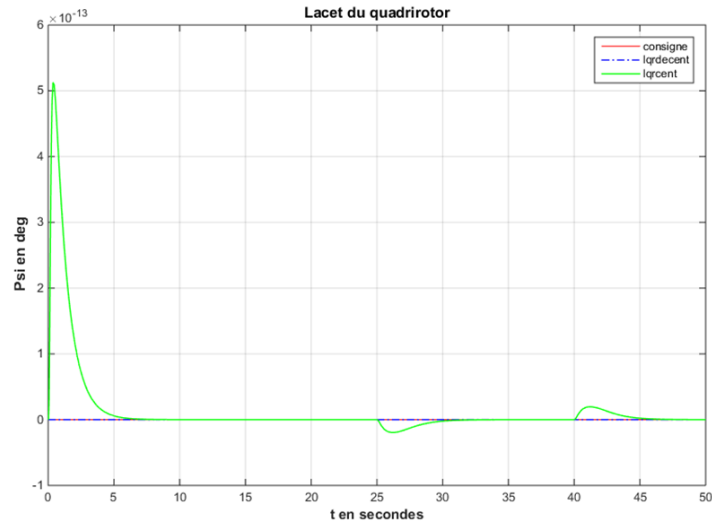


FIGURE 4.10 – Résultat du lacet pour une poursuite de trajectoire

Puis on procède à 50 secondes à un changement de cap de 20 degrés ($\psi^d = 20^\circ$) et enfin après 20 secondes on procède à une translation de 1 mètre selon l'axe X ($x^d = 1 m$).

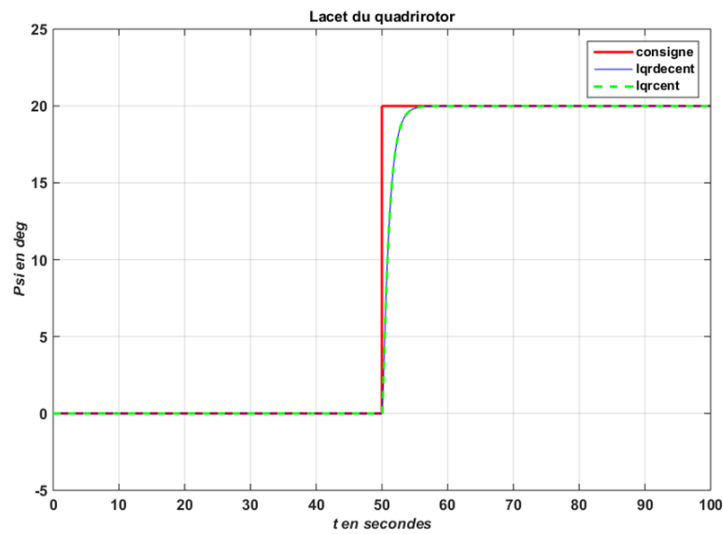


FIGURE 4.11 – Réponse en lacet après changement de cap et trajectoire de X

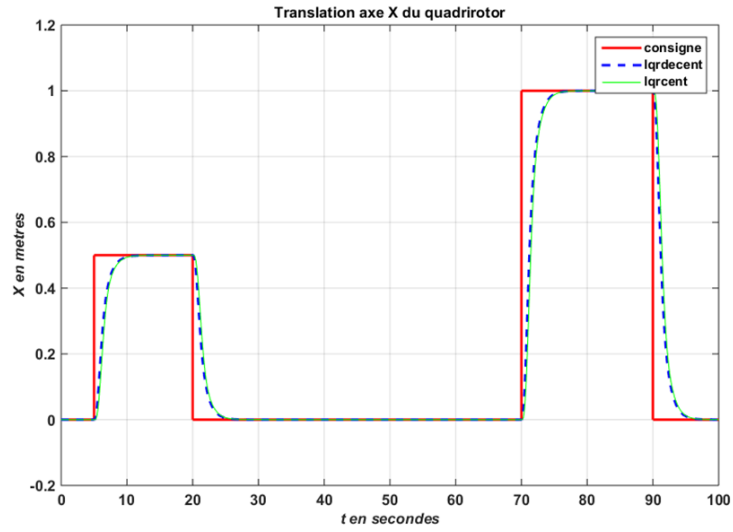


FIGURE 4.12 – Réponse en position X après changement de cap et trajectoire de X

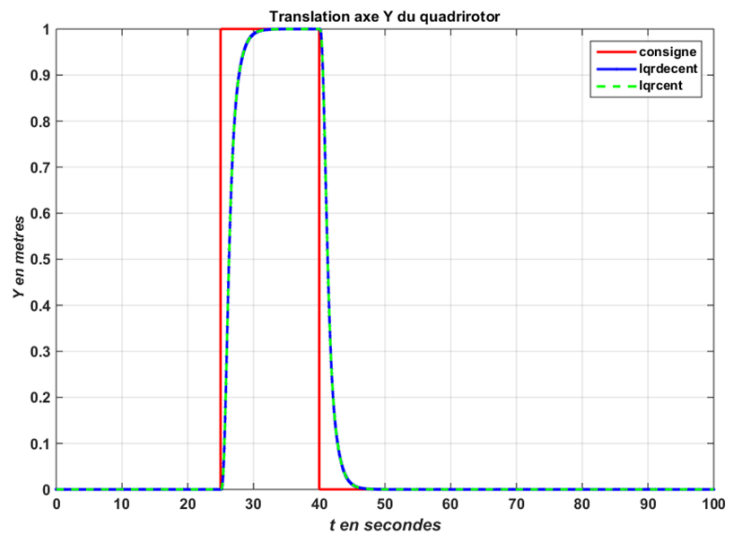


FIGURE 4.13 – Réponse en position Y après changement de cap et trajectoire de X

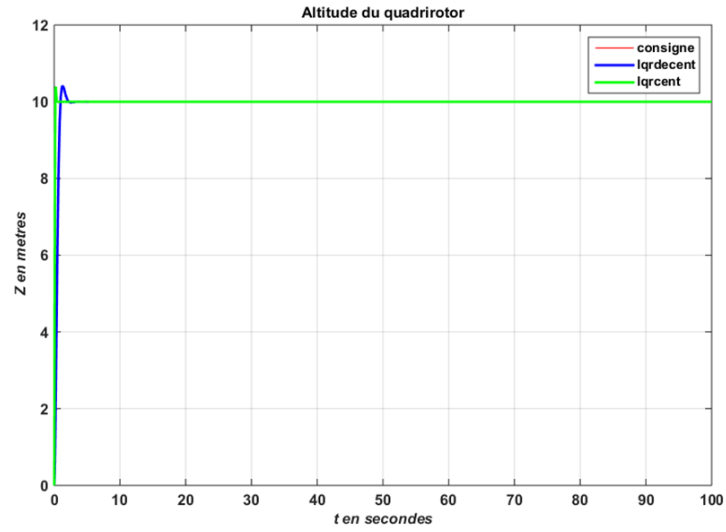


FIGURE 4.14 – Réponse en position Z après changement de cap et trajectoire de X

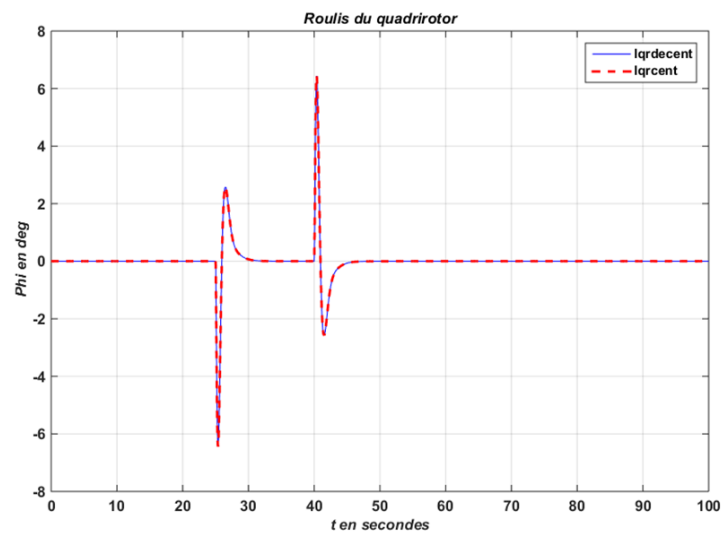


FIGURE 4.15 – Résultat du roulis après changement de cap et trajectoire de X

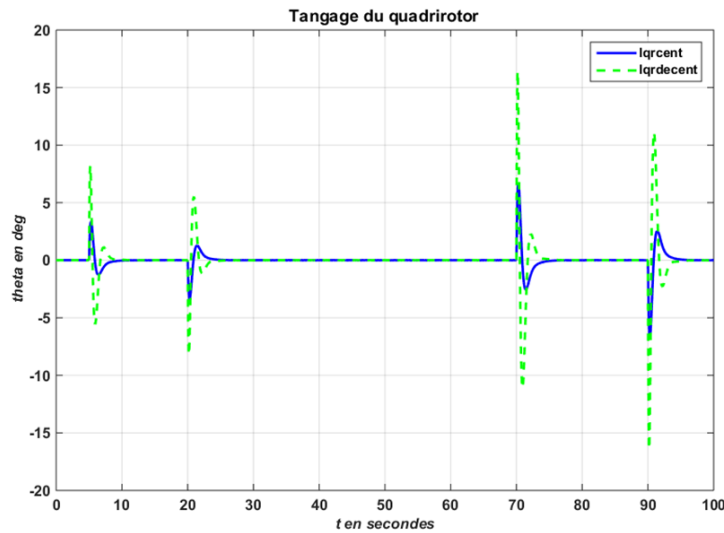


FIGURE 4.16 – Résultat du tangage après changement de cap et trajectoire de X

Nous observons une poursuite de consigne précise ainsi qu'un temps de réponse rapide autant pour la commande centralisée que pour la commande décentralisée.

4.4.3 Poursuite d'une consigne sinusoïdale

Pour mettre à l'épreuve notre système, un signal sinusoïdal sera donné en consigne comme trajectoire à suivre sur l'axe X à 100 secondes, l'altitude z^d sera poussée à 30 m à partir de 95 secondes et le cap (ψ^d) sera maintenu à 20° .

Les résultats suivants sont obtenus :

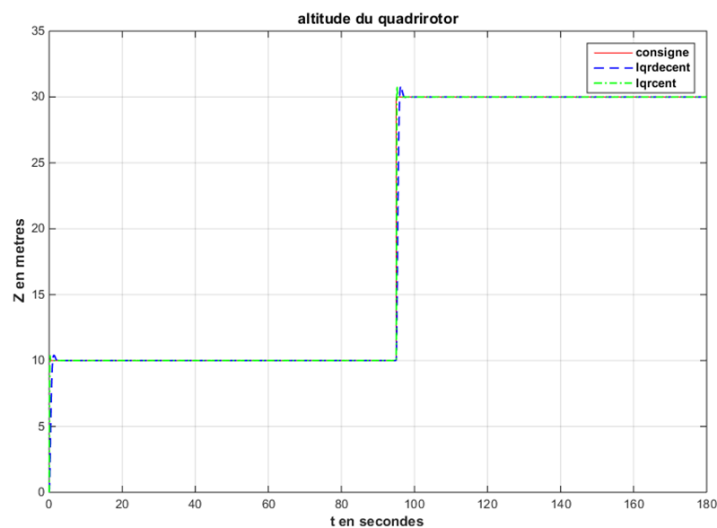


FIGURE 4.17 – Réponse en position Z pour une consigne sinusoïdale sur la variable X

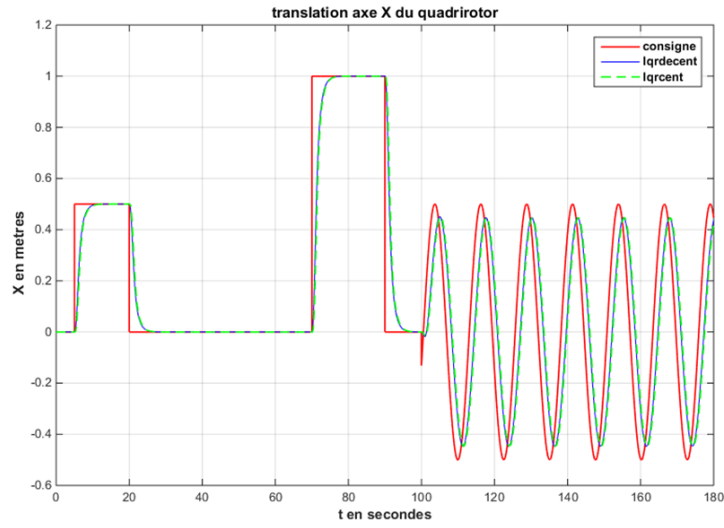


FIGURE 4.18 – Réponse en position X pour une consigne sinusoïdale

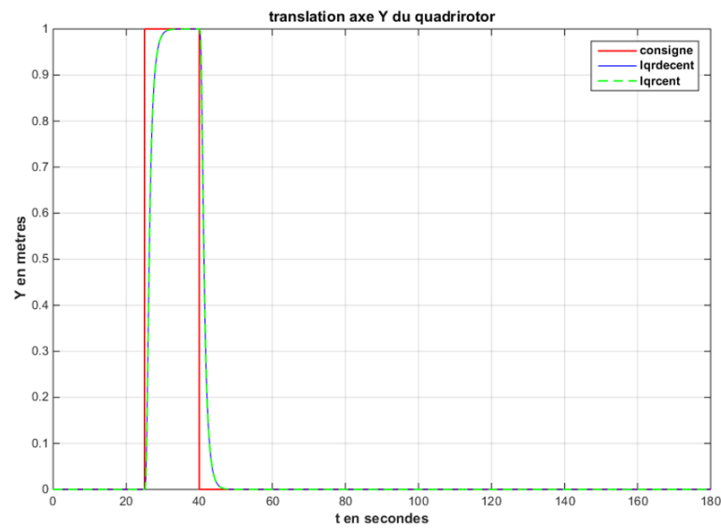


FIGURE 4.19 – Réponse en position Y pour une consigne sinusoïdale sur la variable X

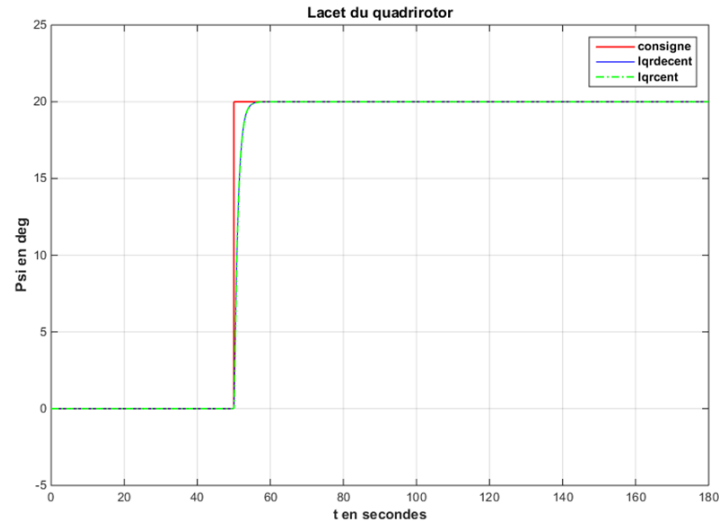


FIGURE 4.20 – Réponse en lacet pour une consigne sinusoïdale sur la variable X

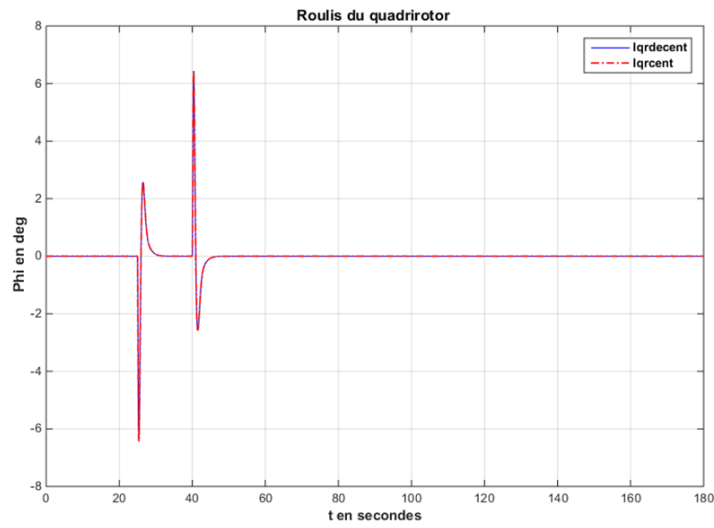


FIGURE 4.21 – Résultat du roulis pour une consigne sinusoïdale sur la variable X

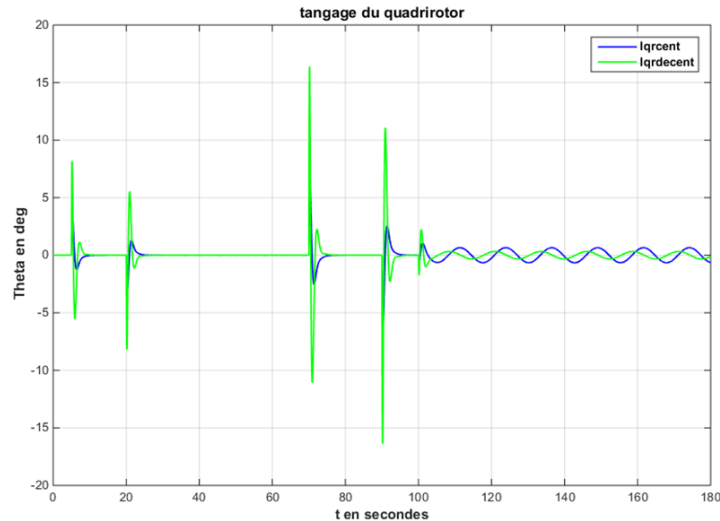


FIGURE 4.22 – Résultat du tangage pour une consigne sinusoïdale sur la variable X

Nous observons une poursuite de la trajectoire sinusoïdale imposée avec les deux méthodes de commande.

4.5 Comparaison entre les deux méthodes de commande LQR

Commande LQR centralisée	Commande LQR décentralisée
<p>Système rapide et précis ne présentant pas de dépassement. Les angles des rotations de tangage résultants sont petits (amplitudes faibles).</p>	<p>Système moins rapide (réponse en altitude Z) ne présentant pas de dépassement. Les angles des rotations de tangage résultants sont importants (amplitudes importantes).</p>

TABLE 4.2 – Tableau comparatif.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé deux stratégies de commande linéaire quadratique pour la poursuite de trajectoire et la stabilisation du système d'un quadrirotor. Nous avons procédé à la linéarisation du modèle d'état et à l'implémentation d'un retour d'état en utilisant la commande LQ centralisée et décentralisée. Les résultats de la simulation montrent que les deux commandes adoptées assurent la convergence de la dynamique des erreurs en boucle fermée et que la poursuite de la trajectoire de référence est bien réalisée.

Conclusion générale

L'étude menée dans ce mémoire s'articule autour de la modélisation et de la commande d'un drone de type quadrirotor. Nous avons appliqué deux stratégies de commande LQ dans le but de stabiliser et d'asservir l'appareil. Nous avons réalisé des simulations et présenté les résultats obtenus.

Le premier chapitre nous a permis de présenter les drones aériens et de les classer selon deux critères. Nous nous sommes ensuite focalisés sur notre objet d'étude, les quadrirotors. Nous avons présenté leurs caractéristiques, leur histoire et leurs applications dans divers domaines.

Dans le second chapitre nous avons pu dresser un modèle dynamique de l'appareil obtenu en utilisant les équations qui régissent son système et le formalisme de Newton-Euler qui décrit la dynamique de rotation et de translation d'un corps rigide. Nous avons pu aboutir à un modèle d'état fortement non-linéaire.

Lors du troisième chapitre nous avons introduit la commande optimale et énoncé ses principes tout en les définissant. Nous avons abordé la commande LQ et détaillé cette approche en développant ses équations.

La quatrième chapitre a porté sur la réalisation d'une commande linéaire quadratique en utilisant deux stratégies de commande, à savoir la commande centralisée et la commande décentralisée. Pour se faire nous avons procédé à la linéarisation du modèle qui a été proposé en préambule.

Des simulations ont été réalisées pour pouvoir tester la commande, ces tests ont été visualisés et observés.

Enfin nous avons comparé les résultats obtenus.

Bibliographie

- [1] D'après la définition donnée par l'INSA de Strasbourg, <https://pages-internes.insa-strasbourg.fr/fr/le-drone>
- [2] J.F. Keane, S.S. Carr A Brief History of Early Unmanned Aircraft, Johns Hopkins Apl Technical Digest, 2013.
- [3] P-M. Basset, J.Hermetz, Véhicules Aériens de type drone Différences avec un aéronef avec pilote à bord, La Documentation Française, 2013.
- [4] S. Bertrand, Commande de drone miniature à voilure tournante, Université Nice Sophia Antipolis, 2007.
- [5] A. Koehl. Modélisation, observation et commande d'un drone miniature à birotor coaxial, Université Henri Poincaré - Nancy I, 2012.
- [6] <https://www.lavionnaire.fr/HistoireHelicop.php>
- [7] S. Bouabdallah "Design and control of quadrotors with application to autonomous flying", école Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2007.
- [8] F. Sabatino, Quadrotor control : modeling, nonlinear control design and simulation, Stockholm, Sweden, 2015.
- [9] L. Derafa, T. Madani, A. Benallegue "Dynarnic Modelling and Experirmental Identification of Four Rotors Helicopter Pararneters", IEEE 1-4244-0726-5/06, 2006, pp 1834-1839.
- [10] H. Bouadi, M. Bouchoucha, M. Tadjine "Modelling and Stabilizing Control Laws Design Based on Sliding Mode for an UAV Type-Quadrotor ", Engineering Letters, 15 :2, EL_15_2_24, 2007.
- [11] H. Khebbache "Tolérance aux défauts via la méthode backstepping des systèmes non linéaires Application : Système UAV de type Quadrirrotor", universite Ferhat Abbas de Setif, 2012.
- [12] S. Bouabdallah, P.Murrieri, R.Siegwart, IEEE International Conference on Robotics and Automation, New Orleans, 2004.
- [13] M.Mechirgui, Commande optimale minimisant la consommation d'énergie d'un drone utilisé comme relai de communication, École de Technologie Supérieure, Montréal, 2014.
- [14] E.Laroche, Commande Optimale, École Nationale Supérieure de Physique, Strasbourg, 2010
- [15] M. Belkheiri, A. Rabhi, A. E. Hajjaji, and C. Pegard. Different linearization control techniques for a quadrotor system. In 2nd Int. Conf. on Communications, Computing and Control Applications (CCCA), 2012, pages 1 –6, Dec. 2012.

Résumé

Dans ce travail nous avons comme objectif la modélisation d'un drone type quadrirotor et l'application d'une commande linéaire quadratique en utilisant deux stratégies à savoir la commande LQ centralisée et la commande LQ décentralisée.

Des simulations sont réalisées dans le but de vérifier la fiabilité de la commande et du système et les résultats sont donnés.

Mots clés :

drone, quadrirotor, uav, vtol, newton-euler, commande, optimale, linéaire, quadratique, lq, lqr, centralisée, décentralisée.