

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA
RECHERCHE SCHIETIFIQUE



UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI OUZOU
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MASTER EN MATHEMATIQUES

Spécialité

Recherche Opérationnelle

Thème

RESOLUTION DU PROBLEME DE TRANSPORT DES HYDROCARBURES AU NIVEAU DE LA RTC BEJAIA

Présenté par :

ABBAS Yamina

Devant le jury :

M^r H. KOURAT

Président

M^r M. CHEBBAH

Rapporteur

M^r M. OUANES

Examineur



REMERCIEMENTS

Je remercie Dieu en premier lieu, qu'il soit loué pour m'avoir donné la force et la patience nécessaires pour accomplir ce travail.

*A la fin de cette recherche, je tiens à remercier très sincèrement Mr **CHEBBAH Mohammed**.*

Ce fut un grand plaisir de travailler avec lui, durant la préparation de mon mémoire. J'ai beaucoup appris de son expérience et de ses conseils. Je lui serai reconnaissante de confiance qu'il m'a témoigné.

Je remercie les membres du jury de m'avoir fait l'honneur de juger ce travail.

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail

A

Mes très chers parents

Mes frères et leurs femmes

Mes sœurs et leurs maris

Mon beau frère Essaid

Mes nièces et neveux

Tous mes amis (es) en particulier Rafik, Karima, Taous et Thiziri

Tous ceux qui m'ont soutenu pour ce travail soit accompli

TABLE DES MATIÈRES

Tableau des abréviations et symboles	i
Liste des tableaux	iii
Liste des figures	iv
Introduction générale	1
1 Définitions de base et présentation de l'entreprise.....	4
1.1 Définitions de base	4
1.2 Présentation de l'entreprise.....	6
1.2.1 Branche de Transport par Canalisation (TRC)	8
1.2.2 Région de Transport Centre (Béjaïa)	9
1.2.3 Profil en long de l'Oléoduc OB1 (24"/22")	11
1.2.4 Structure organisationnelle	12
1.2.5 Département exploitation oléoducs.....	13
1.3 Position du problème.....	15
2 Généralités sur la théorie des graphes et programmation mathématique..	17
2.1 Notions de base de la théorie des graphes	17
2.1.1 Graphe orienté.....	17
2.1.2 Successeurs et Prédécesseurs.....	18
2.1.3 Graphe non orienté.....	19
2.1.4 Graphe complet	20
2.1.5 Degré d'un sommet	20

2.1.6	Chaîne-cycle	20
2.1.7	Chemin-circuit	21
2.1.8	Connexité dans un graphe.....	21
2.1.9	C-eulérien, C-hamiltonien	21
2.1.10	La recherche d'un chemin hamiltonien dans un graphe 1-complet	22
2.1.11	Réseau de transport	22
2.1.12	Le problème du flot maximal.....	23
2.2	Programmation mathématique	28
2.2.1	Classification d'un programme mathématique	29
2.2.2	Qualification des contraintes	29
2.2.3	Principaux résultats d'existences	30
2.2.4	Théorème (Weierstrass).....	30
2.2.5	Condition d'optimalité	30
2.3	Programmation linéaire (PL)	31
2.3.1	Ecriture matricielle d'un problème de programmation linéaire.....	32
2.3.2	Les formes d'un programme linéaire	33
2.3.3	Méthodes de résolution d'un programme linéaire	34
3	Les problèmes de transport	43
3.1	Le problème de transport simple.....	43
3.1.1	L'hypothèse de balance	44
3.1.2	Modèle mathématique du problème de transport (équilibre / simple)	45
3.1.3	La mise en forme du problème de transport (équilibre)	45
3.1.4	Méthodes pour obtenir de solution de base réalisable.....	46
3.1.5	Méthodes utilisées pour le test d'optimalité	47
3.2	Problème du voyageur de commerce (PVC)	49
3.2.1	Définition.....	49
3.2.2	Formulation mathématique	49

3.3	Le problème de tournées de véhicules (VRP)	50
3.3.1	Définition.....	50
3.3.2	Modélisation du problème de tournées de véhicules	51
3.3.3	Méthodes et techniques de résolution du VRP	52
3.4	Livraison de fioul	54
3.4.1	Modélisation	55
4	Modélisation de la chaîne de transport des hydrocarbures.....	59
4.1	Loi de probabilité	59
4.1.1	Epreuve.....	59
4.1.2	Univers Ω des éventualités.....	59
4.1.3	Evènement	60
4.2	Fiabilité et Maintenabilité.....	60
4.2.1	Fiabilité.....	60
4.2.2	Maintenabilité	62
4.3	Etude de fiabilité de la chaîne pétrolière	63
4.3.1	Fiabilité opérationnelle.....	63
4.3.2	Fiabilité intrinsèque.....	64
4.3.3	Estimation des indices de fiabilité	65
4.3.4	Calcul des probabilités de panne.....	66
4.4	Présentation du modèle mathématique.....	67
4.5	Modèle non-linéaire d'extension du réseau.....	69
5	Simulation numérique et informatique	72
5.1	Logiciel LINGO.....	72
5.1.1	Description du logiciel	72
5.1.2	Résolution du modèle de flot maximal associé à un modèle non linéaire d'extension du réseau sur LINGO.....	74
5.2	Logiciel Visual XPRESS.....	77

5.2.1	Présentation du logiciel	77
5.2.2	Modèle XPRESS de fioul	78
	Conclusion générale	84
	Bibliographie	85

LISTE DES ABRÉVIATIONS ET SYMBOLES

A

Appro : Approvisionnement.

C

CNDG : Centre National de Distribution de Gaz.

D

DML : Direction Maintenance Laghouat.

DMB : Direction Maintenance Biskra.

G

GPL : Gaz de Pétrole Liquéfié.

GG1 : Le premier '1' Gazoduc d'Alger.

H

HSE : Hygiène Sécurité Environnement.

HEH : Haoud El Hamra.

I

int : intérieur

K

Km : Kilometer.

Km² : Kilomètre carré.

M

M : Mètre.

M³ : Mètre cube.

O

OB1 : Le premier '1' Oléoduc de Béjaïa.

P

PK : Points Kilométriques.

PIB : Produit Intérieur Brut.

P : Probabilité.

R

RTC : Région Transport Centre (Béjaïa).

S

SP : Station de Pompage.

T

TRC : Transport par Canalisation.

TMB : Terminal Marin Béjaïa.



LISTE DES TABLEAUX

II. 1 Premier tableau du simplexe.....39

II. 2 Premier tableau de la *M*-méthode.....42

III.1 Demandes des sites (en litres).....55

III.2 Distancier (en km).....55



LISTE DES FIGURES

I.1	Bacs en RTC (Béjaïa).....	5
I.2	Structure organisationnelle de l'entreprise SONATRACH.....	7
I.3	Réseau des pipes principales.....	8
I.4	Cheminement de la ligne OB1 (24"/22").....	9
I.5	Topographie de la ligne OB1 (24"/22").....	11
I.6	Structure hiérarchique de la RTC (Béjaïa).....	12
I.7	Structure du département exploitation oléoducs.....	13
II.1	Graphe orienté.....	17
II.2	Successes et prédécesseurs d'un sommet.....	19
II.3	Graphe non-orienté.....	19
II.4	le réseau $R = (X, U, c)$	25
II.5	L'organigramme de la méthode du simplexe-maximisation.....	37
III.1	Exemple de solution non réalisable.....	58
IV. 1	Graphe du réseau HEH-Béjaïa de transport de brut.....	67
V.1	Fenêtre principale du LINGO.....	73
V.2	Fenêtre principale de logiciel Visual XPRESS.....	78

V.3 Tournées optimales.....82

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'Algérie par ses ressources naturelles riche en hydrocarbure, son épargne considérable et sa situation géographique importante, dispose d'un bon potentiel favorable de croissance économique. L'économie algérienne demeure totalement dépendante de la rente pétrolière et du marché international pour ses approvisionnements en biens et services pour satisfaire sa demande interne. Elle est caractérisée par l'importance du rôle joué par le pétrole notamment en tant que principale source de revenus, le pétrole contribue à plus de 50% dans la formation du PIB et 98% des exportations algériennes.

La SONATRACH est parmi les plus importantes sociétés en Algérie, en vue de son lourd poids sur l'économie du pays. Son rôle consiste en exploitation, la recherche, le transport et la commercialisation des hydrocarbures. On trouve au niveau de la société les bons équipements, de l'industrie pour assurer le transport, la sécurité et la commercialisation des hydrocarbures, afin d'optimiser les différents processus effectués au sein de la compagnie.

Concernant l'activité Transport par Canalisation, celle-ci a pour mission le développement, la gestion et l'exploitation du réseau de transport, de stockage, de livraison et de chargement des hydrocarbures. Elle constitue le noyau dynamique de la chaîne pétrolière du groupe SONATRACH. Une canalisation enterrée est la solution la plus adaptée pour le transport massif d'hydrocarbures et limite les risques de pollution par rapport aux transports maritimes. Les hydrocarbures sont transportés sous pression, maintenus par des stations de pompage installées à intervalles réguliers. Ce type de transport est privilégié dans les pays où les distances sont importantes. TRC est appelée pour définir une nouvelle politique de tarification par concession et de contrôle précis de l'usage de la canalisation. Il s'agit aussi de mettre en place un système de contrôle de gestion industriel et un comité HSE pour la gestion du risque environnemental.

L'une des plus importantes et anciennes régions est la RTC (Béjaïa) qui a pour tâche le transport, le stockage et la livraison du pétrole brut. Pour préserver sa place dans l'échelle des

entreprises pétrolières, elle doit atteindre les objectifs tracés à son égard par la centrale d'Alger, en d'autres termes honorer les contrats d'exportation signés avec les entreprises étrangères dans les délais programmés, et éviter au maximum les pertes engendrées.

SONATRACH a développé un ensemble de canalisations permettant d'acheminer le pétrole brut des zones productrice, jusqu'aux centre de consommation. L'oléoduc OB1 (24''/22'') HEH – Béjaïa fut le premier pipeline réalisé en Algérie, reliant le centre de stockage HEH avec le Terminal Marin de Béjaïa. Le développement considérable du transport par pipeline, a été une des réponses aux nombreux besoins entraînés par l'accroissement de la consommation des hydrocarbures, d'abord pour des raisons économiques puis du fait des avantages spécifiques qu'il présente (parfaite adaptation au transport de produit liquide).

Divers problèmes ayant une incidence négative sur le fonctionnement de tout le long de la chaîne de transport. Les majeurs incidents que ce réseau reçoit selon leur ordre d'emplacement sont :

- ✓ Au niveau de la source HEH : il existe une mauvaise programmation des distributions, priorité absolue pour les raffineries au niveau.
- ✓ Au niveau du pipe OB1 (24''/22'') : les arrêts techniques comme panne d'une station de pompage et les éclatements ou fissures de la canalisation.
- ✓ Au niveau du terminal arrivé : comme les retards signalés dans le transport des quantités destinées à l'exportation.
- ✓ Au niveau des postes de chargement : les pannes des postes de chargement aux ports.

Ces incidents de transport de pétrole brut relèvent des problèmes complexes et leurs résolutions ont fait l'objet de notre étude qui vise à optimiser le fonctionnement de la chaîne pétrolière HEH-Béjaïa.

Alors, dans le but d'atteindre l'objectif de cette étude, cinq chapitres lui sont consacrés et sont répartis comme suit :

Nous commençons, dans le premier chapitre, par les définitions de base qui constituent le système et un aperçu sur l'existence de l'entreprise avec une position du problème afin de proposer des solutions.

Le deuxième chapitre est consacré aux rappels théoriques sur la théorie des graphes et la programmation mathématique.

Dans le troisième chapitre, nous allons introduire les techniques de transports employées en recherche opérationnelle avec les algorithmes.

Le quatrième chapitre est employé pour montrer les modèles mathématiques élaborés pour la résolution du problème signalé au niveau de la RTC.

Au cinquième chapitre, nous présenterons la simulation numérique et informatique.

CHAPITRE 1

DÉFINITIONS DE BASE ET PRÉSENTATION DE L'ENTREPRISE

Dans ce chapitre, nous donnons quelques définitions de base des éléments constituant le système ensuite nous présentons SONATRACH avec sa structure organisationnelle et terminons par la position du problème.

1.1 Définitions de base

Hydrocarbures : constituant du pétrole dont les molécules sont une association de l'atome carbone et d'hydrogène. On distingue trois grandes familles de composés :

- Les hydrocarbures saturés qui ne comportent que des liaisons carbonés-carbonés simples, se sont les paraffines et les naphthènes.
- Les hydrocarbures insaturés qui présentent des doubles (Oléfines) ou triples liaisons (Acétylénique) carbone-carbone.
- Les hydrocarbures aromatiques : caractérisés par un ou plusieurs cycles à 6 atomes de carbone de type benzénique.

Les hydrocarbures sont gazeux, liquides ou solides selon la pression et la température. Lors de la combustion des hydrocarbures, leurs molécules sont cassées : le carbone se combine à l'oxygène de l'air pour donner du gaz carbonique et à l'hydrogène pour donner de la vapeur d'eau.

Pétrole : est en latin petroleum, du grec petra « roche », et du latin oleum « huile ». Liquide huileux inflammable dont la couleur varie du vert au noir. Le pétrole est un mélange de substances appelées hydrocarbures. Chacun de ces hydrocarbures est constitué d'un nombre différent d'atomes de carbone et d'hydrogène et donc de molécules de taille et de structure différentes ce qui détermine leur état physique : solide, liquide et gazeux. Le pétrole produit par notre pays est de haute qualité, parce qu'il est composé essentiellement de produits légers ce qui lui confère des propriétés chimiques intéressantes pour le raffinage.

Pétrole brut : provient directement de l'exploitation d'un puits de pétrole.

Gisement : on peut le définir comme un réceptacle, fait d'une roche réservoir perméable et poreuse, et clos à la fois par une roche imperméable, appelée couverture, et par un sous-sol particulier, appelé piège. La roche réservoir doit présenter un volume intérieur suffisant pour accueillir une quantité d'hydrocarbures qui justifie son exploitation. Il n'est pas rare de trouver des hydrocarbures lors de forages d'exploration. En revanche, il est beaucoup plus rare de découvrir une accumulation qui constitue un vrai gisement.

Station de pompage : c'est une installation, composée de plusieurs machines, qui permet de régulariser le débit des produits transportés en exerçant une pression pour les faire parvenir à la prochaine station de pompage.

Pipeline : est une canalisation servant au transport, à moyennes et grandes distances, des liquides. Elle est appelée oléoducs, si elle sert au transport du pétrole brut et gazoduc, si elle sert au transport du gaz. Elles sont caractérisées par leurs diamètres, épaisseurs et matières dont elles sont fabriquées, ainsi que par leurs résistances à la pression.

Raffinerie : le pétrole utilisé directement sous sa forme brute est soumis à diverses opérations de transformation (séparation, mélange, ...) qui constituent le raffinage avant d'être consommé dans divers domaines.

Bacs de stockage : dans la branche pétrolière, on désigne par bacs de stockage les réservoirs utilisés pour les divers produits pétroliers. Leur forme n'est autre que celle d'une grande cuve fermée d'un toit. Il existe des bacs à toit fixe et à toit flottant.



Figure.I.1 – Bacs en RTC (Béjaïa).

Un parc de stockage : est un espace où se trouve un ensemble de bacs connectés à une canalisation d'entrée et une autre qui assure respectivement le remplissage et la vidange des

produits pétroliers. Les parcs de stockage se trouvent à proximité des terminaux de départ et d'arrivée ainsi qu'au début et à la fin de chaque oléoduc.

Un terminal : pour l'industrie pétrolière, ce terme désigne l'une ou l'autre extrémité d'un itinéraire de transport. Il peut caractériser le parc de stockage situé au départ d'un pipeline, comme il peut caractériser les raffineries ou les ports situés à l'arrivée d'une canalisation.

Poste de chargement : situé entre le parc de stockage et les navires et équipé d'un système permettant le chargement du produit dans les navires citerne.

Débit nominal de la pompe est : le débit permettant d'atteindre le rendement maximal de la pompe, donné par la courbe de fonctionnement de la pompe.

1.2 Présentation de l'entreprise

SONATRACH (Société Nationale de Transport et de Commercialisation des Hydrocarbures) a été créée le 31 décembre 1963 par le décret N° :63-491. Les statuts de l'entreprise ayant été modifiés par le décret N° :66-292 du 22 décembre 1966. Elle est devenue une Société Nationale pour la recherche, la production, le transport, la transformation et la commercialisation des Hydrocarbures. Elle est classée 12^{ème} compagnie pétrolière mondiale et 1^{ère} firme du continent africain. La société est également la 3^{ème} exportatrice mondiale du gaz naturel et la seconde concernant les gaz du pétrole liquéfiés.

Les missions confiées à SONATRACH:

- Contribuer au développement national par la maximisation de la valeur long terme des ressources hydrocarbures en Algérie.
- Satisfaire les besoins actuels et futurs de l'Algérie en hydrocarbures et produits pétroliers.
- Contribuer au développement national notamment en lui procurant les devises étrangères nécessaires.

Activités organisationnelles de l'entreprise:

Les activités de base portent sur toute la chaîne des hydrocarbures, en commençant par la recherche et l'exploration, jusqu'à la transformation des hydrocarbures et leur commercialisation aux consommateurs.

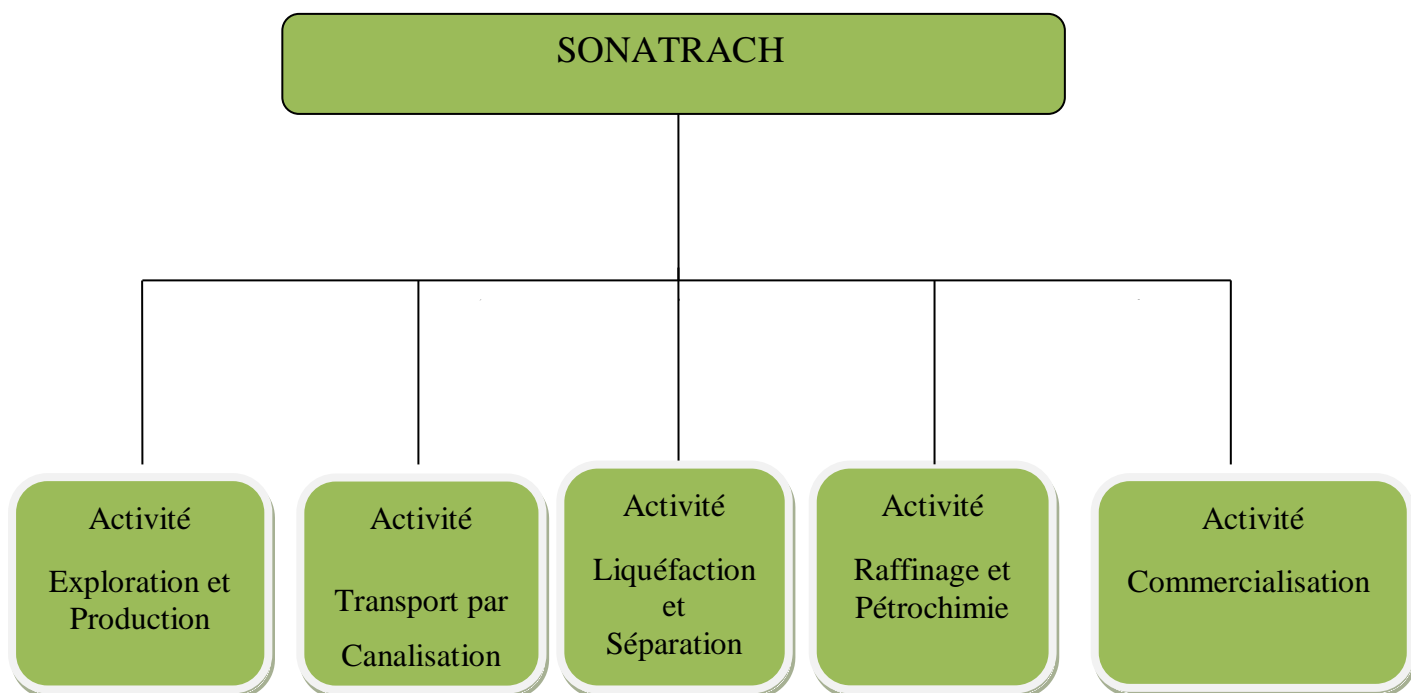


Figure.I.2 – Structure organisationnelle de l’entreprise SONATRACH.

- ✓ Activité exploration et production : est une activité de recherche et d’exploration de nouveaux gisements pétroliers et gaziers ainsi que la production d’hydrocarbures.
- ✓ Activité transport par canalisation : la branche TRC se charge de l’acheminement des hydrocarbures à partir des forages, situés au sud du pays vers les terminaux marins pour l’exportation, ou vers les usines de liquéfaction, à travers un réseau de pipes.
- ✓ Activité liquéfaction et séparation : a pour mission la transformation des hydrocarbures par la liquéfaction du gaz naturel et la séparation des GPL.
- ✓ Activité raffinage et pétrochimie : a pour mission essentielle l’exploitation et la gestion de l’outil de production du raffinage et de la pétrochimie, pour répondre principalement à la demande du marché national en produits pétroliers.
- ✓ Activité commercialisation : a pour mission de veiller aux approvisionnements énergétiques du marché national, sa première mission statutaire en tant que garant du service public, et à la valorisation des hydrocarbures liquides et gazeux primaires et transformés, exportés sur les marchés internationaux.

1.2.1 Branche de Transport par Canalisation (TRC)

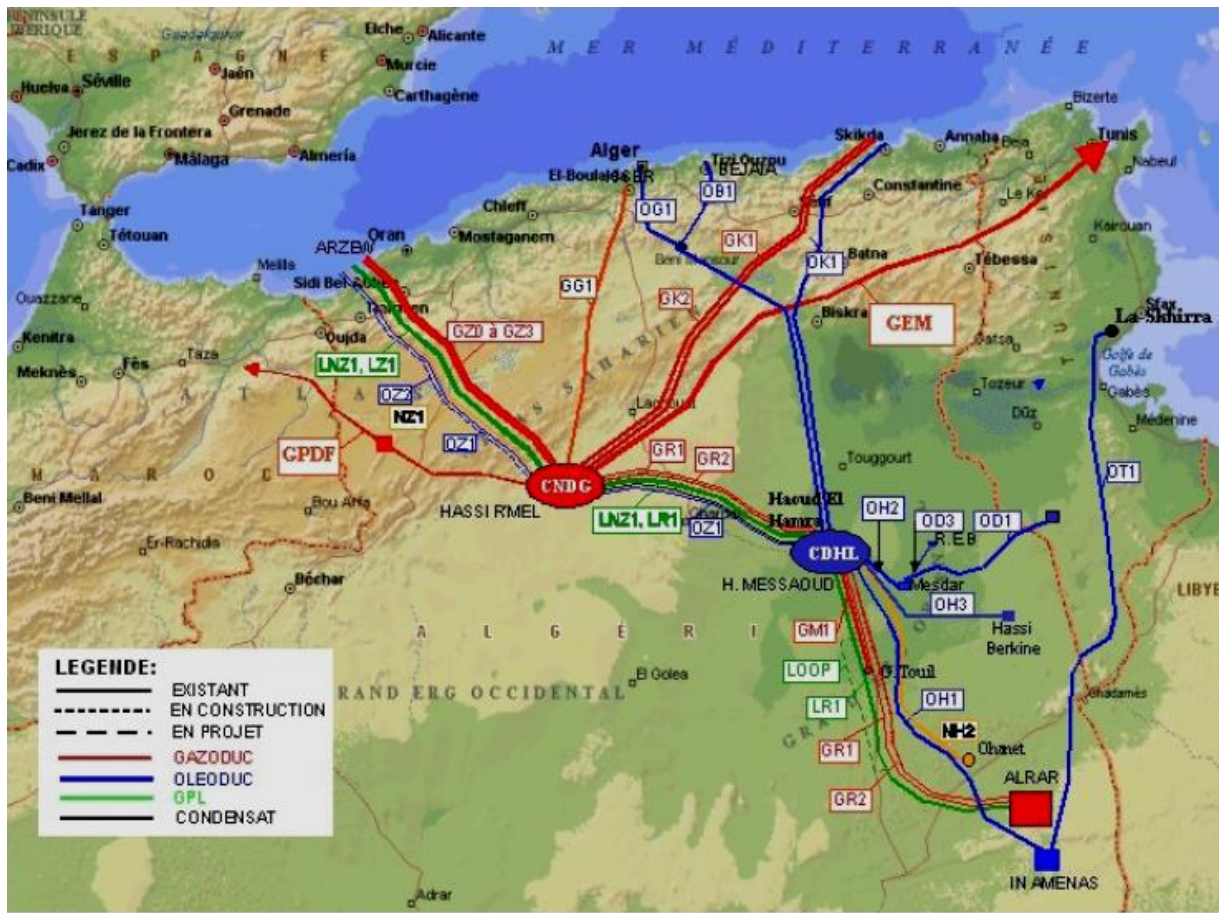


Figure.I.3 – Réseau des pipes principaux.

La TRC se compose de :

- Cinq régions de transport :
 - RTI : Région de Transport In-Amenas.
 - RTH : Région de Transport Haoud-El-Hamra.
 - RTC : Région de Transport Centre (Béjaïa).
 - RTE : Région de Transport Est (Skikda).
 - RTO : Région de Transport Ouest (Arzew).

- Deux directions maintenance (DML et DMB) ayant pour missions d'assurer la maintenance des équipements de toutes les régions.

1.2.2 Région de Transport Centre (Béjaïa)

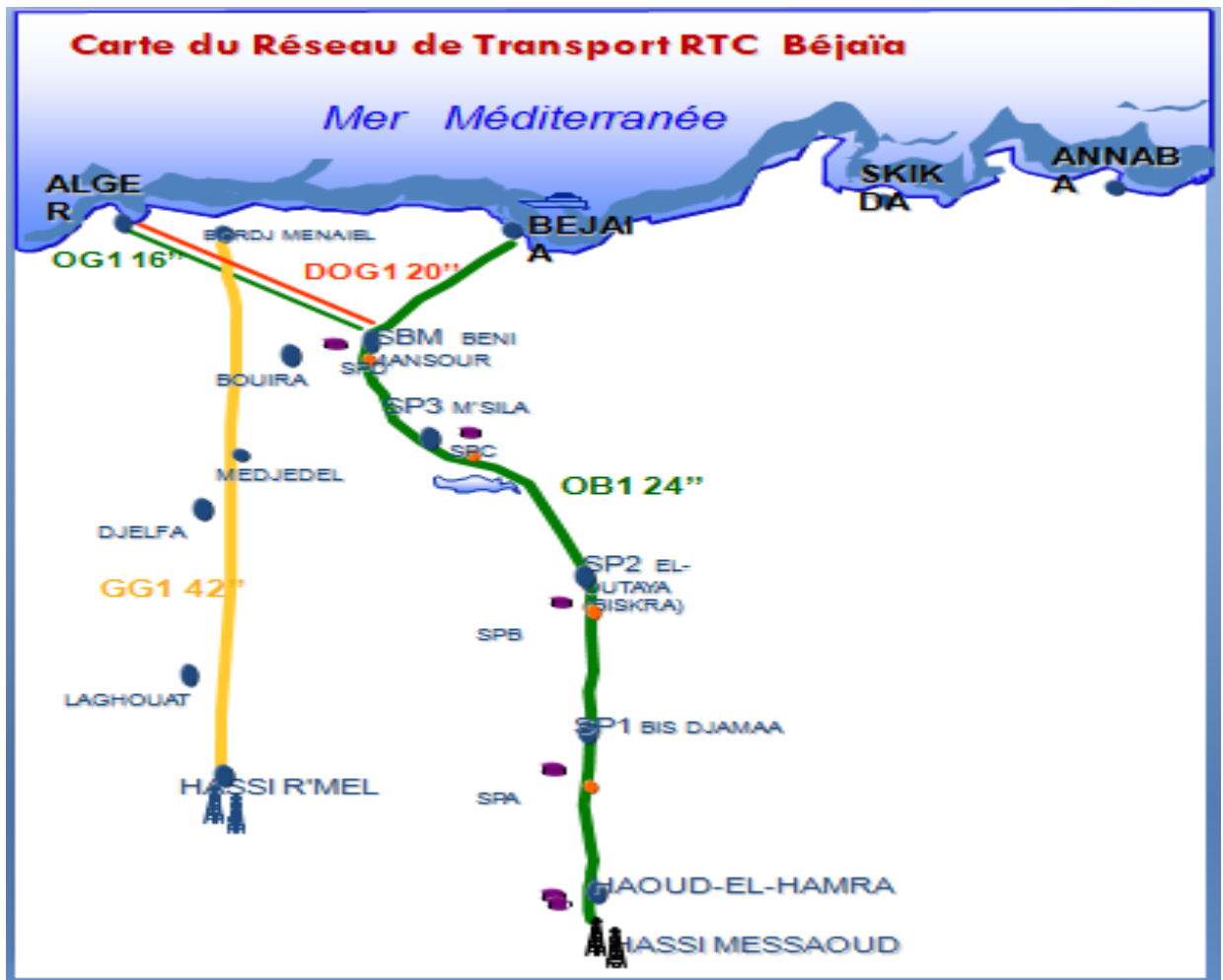


Figure. I. 4 – Cheminement de la ligne OB1 (24"/22").

La RTC assure l'exploitation de :

1. Deux oléoducs pour le transport de pétrole brut
 - Oléoduc HEH-Béjaïa OB1 de diamètre (24"/22") et d'une longueur de 668 Km.
 - Oléoduc Béni Mansour – Sidi Arcine (OG1 16"/DOG1 20") d'une longueur 131 Km.
2. Un gazoduc GG1 pour le transport de gaz naturel de CNDG Hassi R'mel à Bordj Menaeil.
3. La ligne OB1 (24"/22") est constituée de huit stations de pompage dont quatre stations principales, à savoir : SP1 Bis Djamaa, SP2 Biskra, SP3 M'Sila, SBM et quatre stations de pompes auxiliaires : SPA, SPB, SPC, SPD qui servaient à l'époque à augmenter le débit de pompage de ligne OB1, mais pas actuellement.

➤ Station de Pompage SP1 Bis (Djamaa) :

La station de pompage SP1 BIS est située à 26 km au nord-ouest de Djamaa, à 20 Km au nord-est d'El Merara et à 76 km au nord ouest de Touggourt.

➤ Station de Pompage SP2 (Biskra) :

SP2 est installée au PK 350 à une altitude de 217 m (ferme Driss Amor ex-Dufourg à 17 km de Biskra) et était mise en service en 1959 en même temps que le démarrage de la ligne 24" OB1 HEH-Béjaïa.

➤ Station de Pompage SP3 (M'Sila) :

SP3 est située au PK 486 à une altitude de 465 m (à la périphérie de la ville de M'sila) et était mise en service en 1959 en même temps que le démarrage de la ligne 24" OB1 HEH-Béjaïa.

➤ Station de pompage SBM :

La Station de pompage de Beni-Mansour (SBM) permet l'alimentation de la raffinerie de Sidi-Arcine située à Alger en pétrole brut via le pipeline (OG1 16"/ DOG1 20"). Elle est située juste à coté de la route nationale N°5 à 50 km au sud-est de Bouira et à 65 km au nord-ouest d'El Bordj.

La ligne HEH/Béjaïa fonctionnait au départ seulement avec trois stations de pompage pour un débit maximum égal à $1800 \text{ m}^3/\text{h}$ et plus tard, ils ont construit une quatrième station qui porte le nom SP1 Bis à coté de Djamaa, celle-ci a permis d'augmenter le débit jusqu'à $2200 \text{ m}^3/\text{h}$. Vers l'année 1967, les besoins du pétrole ont augmenté d'où l'obligation de la mise en ligne des quatre stations satellites SPA-SPB-SPC-SPD pour augmenter le débit jusqu'à $2540 \text{ m}^3/\text{h}$. Actuellement, l'exploitation de la ligne se fait avec $700 \text{ m}^3/\text{h}$ à $1800 \text{ m}^3/\text{h}$ et peuvent aller jusqu'à $2000 \text{ m}^3/\text{h}$ selon la demande du terminal Béjaïa et aussi suite à la mise en service des stations SP1 Bis, SP2et SP3.

1.2.3 Profil en long de l'Oléoduc OB1 (24"/22")

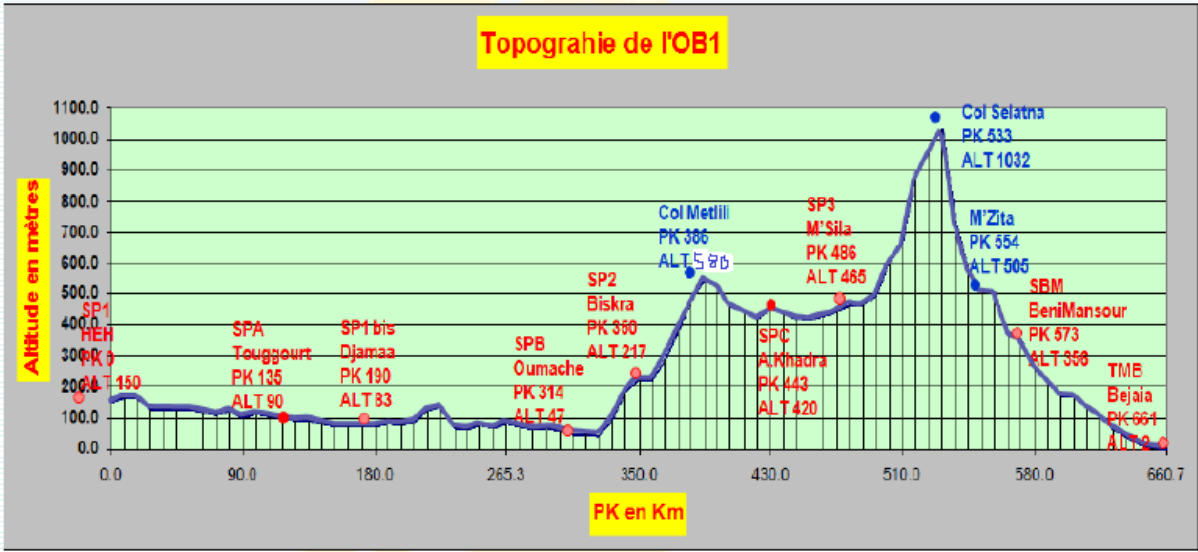


Figure. I. 5 – Topographie de la ligne OB1 (24"/22").

1.2.4 Structure organisationnelle

La structure organisationnelle de la Région de Transport Centre (Béjaïa) repose sur le modèle suivant :

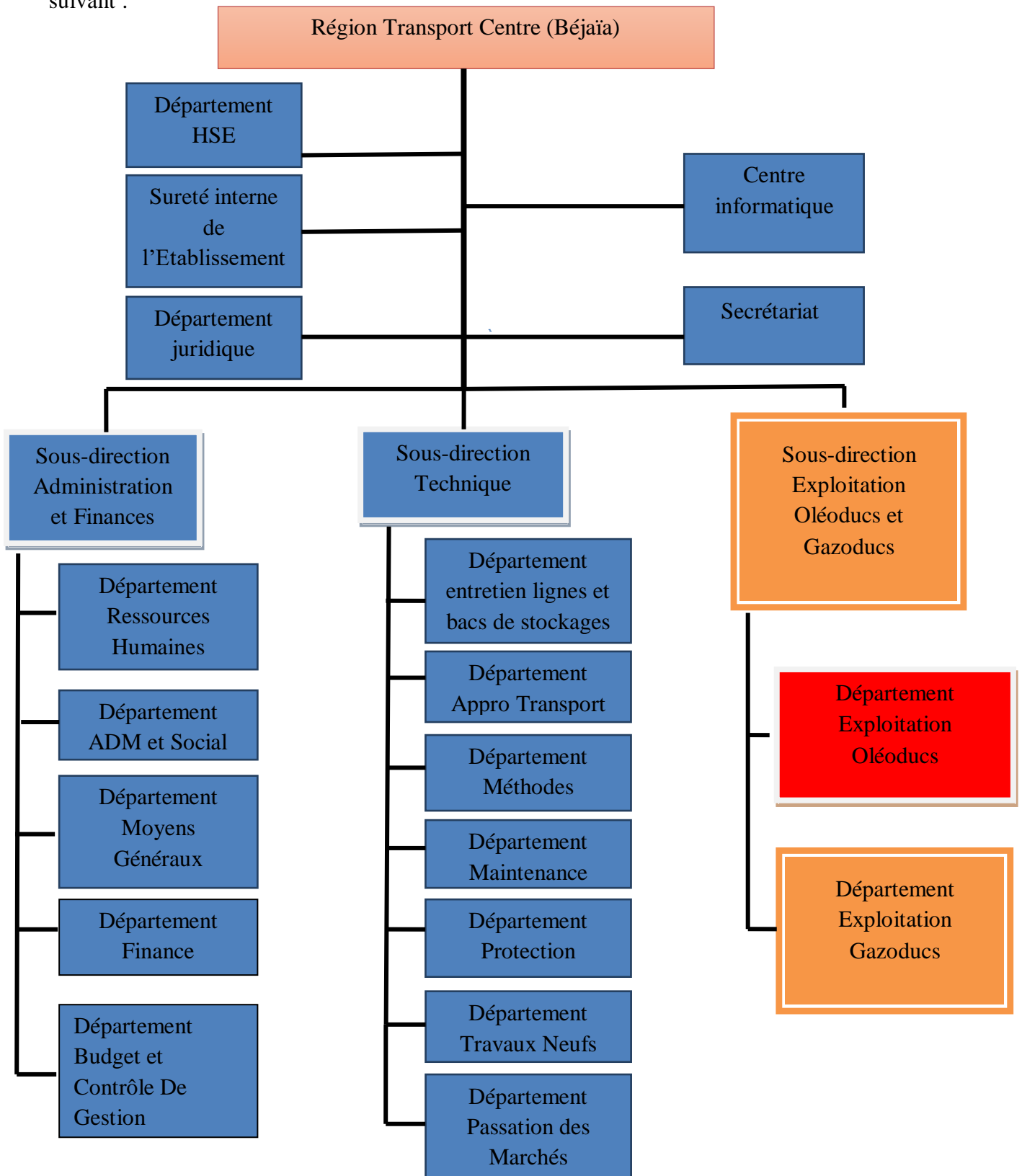


Figure. I. 6 – Structure hiérarchique de la RTC (Béjaïa).

1.2.5 Département exploitation oléoducs

Le département exploitation est le noyau de la Région de Transport Centre(Béjaïa), sa mission principale est d'assurer le transport (à partir de HEH vers le TMB), le stockage et la commercialisation du pétrole brut.

Il est structuré de la manière suivante :

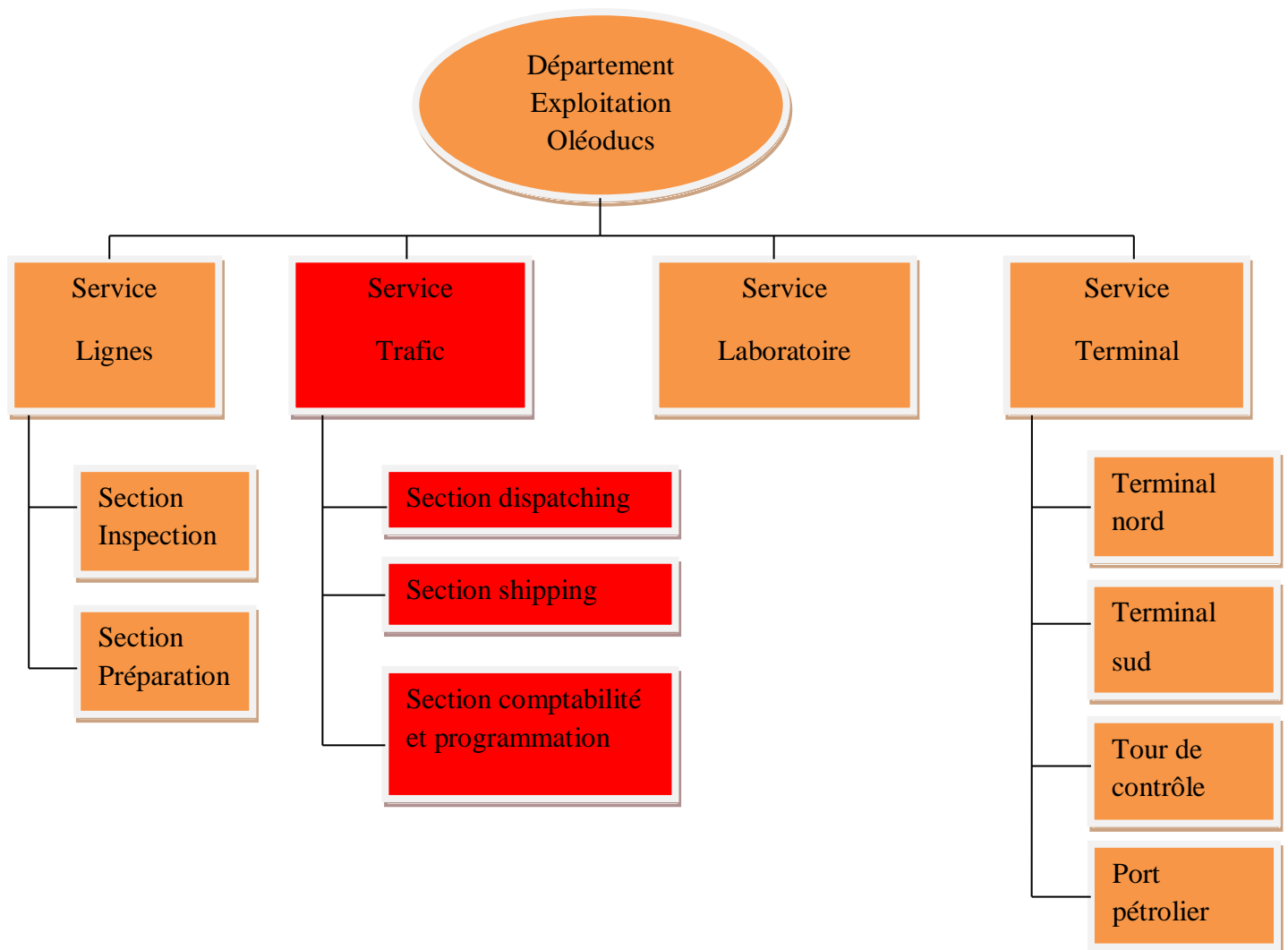


Figure. I. 7 – Structure du département exploitation oléoducs.

Service Trafic : son rôle essentiel est la surveillance et l'acheminement du fluide jusqu'au terminal. Il s'occupe aussi de la coordination du fonctionnement des stations de pompages. Ce service contient trois sections :

→ Section dispatching : cette section s'occupe du réglage de débit envoyé vers le parc de stockage de Béjaïa.

→ Section comptabilité et programmation : son rôle est l'enregistrement sur des registres journaliers :

- Les quantités envoyées de HEH.
- Les quantités de brut consommées au niveau des stations de pompes.
- Les quantités reçues au TMB.
- Les quantités exportées.

→ Section de shipping : à partir d'un planning élaboré par la direction commerciale, cette section prépare les dossiers des clients pour la transaction commerciale.

1.3 Position du problème

Les besoins en énergie du monde de plus en plus croissants, nécessitent la mise en place de nombreuses sources énergétiques parmi elles les hydrocarbures. La mise en exploitation et consommation de ce produit énergétique (pétrole brut, condensât et gaz naturel) a entérinée le développement des moyens de transport massifs.

Les hydrocarbures jouent dans l'ensemble de la politique algérienne un rôle déterminant, aussi bien dans sa politique internationale que dans sa politique économique interne. Pour cela la SONATRACH a mis en place et développé un important réseau de canalisations qui permet de collecter et d'acheminer la production des gisements du sud vers le nord du pays.

L'une des tâches importantes de la RTC (Béjaïa) est de trouver une meilleure solution qui permet de régulariser les quantités du pétrole brut à transporter et de satisfaire la demande en transport et éviter au maximum les pertes engendrées.

Le transport du pétrole brut par canalisation joue un rôle très important à l'entreprise pour le marché algérien. Pour cela elle doit satisfaire les besoins actuels et futurs de l'Algérie en hydrocarbures et contribuer au développement national notamment en lui procurant les devises étrangères nécessaires.

Beaucoup d'entreprises s'intéressent à la Recherche Opérationnelle afin d'optimiser leurs productions et/ou leurs services. C'est le cas de la société algérienne SONATRACH qui s'occupe de plusieurs secteurs d'activités parmi eux : TRC.

Dans cette étude, la modélisation par la théorie des graphes et la mise à contribution du problème du flot maximal, offrent une alternative simple et pratique.

Le problème du flot maximal dans un graphe a donné naissance à de nombreux algorithmes, qui dans leur logique, utilisent la structure particulières des matrices de ce type de problème. Le plus connue est l'algorithme de Ford-Fulkerson. Cependant les problèmes de flots étant des programmes linéaires, la résolution peut être également obtenue par l'intermédiaire de l'algorithme du simplexe.

Pour être efficace, en raison : des pannes intempestives et de l'obsolescence des équipements de pompage, ainsi l'encrassement, la corrosion et de l'évolution de la rugosité

interne de la conduite, la procédure de modélisation du réseau doit inclure la fiabilité des éléments composants.

En effet, l'extension optimale du réseau, en raison de la non-linéarité des coûts d'énergie, est soumise à la résolution d'un modèle de programmation non-linéaire. [13]

Cette modélisation par le flot maximal, associée à un modèle local de fiabilité, ainsi que l'extension optimale du réseau nous permet de développer une approche en trois étapes : diagnostic des capacités réelles de la chaîne pétrolière, une analyse de fiabilité du système et extension optimale du réseau.

CHAPITRE 2

GÉNÉRALITÉS SUR LA THÉORIE DES GRAPHS ET PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE

La recherche opérationnelle est la discipline des mathématiques appliquées qui traite des questions d'utilisation optimale des ressources dans l'industrie et dans le secteur public entre autres. Depuis une dizaine d'années, le champ d'application de la RO (Recherche Opérationnelle) s'est élargi à des domaines comme les graphes, l'économie, la finance et la planification d'entreprise, etc.

2.1 Notions de base de la théorie des graphes

2.1.1 Graphe orienté

Définition : un graphe orienté $G = (X, U)$ est déterminé par la donnée de deux ensembles X et U tels que :

- $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ dont les éléments sont appelés **sommets**.
- $U = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_m\}$ dont les éléments sont appelés **arcs**.

Exemple : l'arc u_{ij} se représente de la manière suivante :

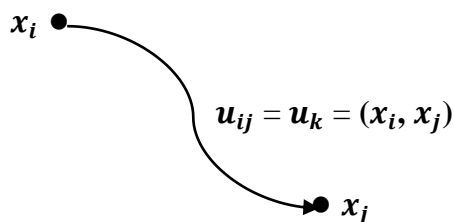


Figure.II.1 – Graphe orienté

Deux applications I et T :

- $I : U \rightarrow X$

$u \mapsto I(u) = \text{Extrémité initiale de } u.$

- $T : U \rightarrow X$

$u \mapsto T(u) = \text{Extrémité terminale de } u.$

Si $u_{ij} = (x_i, x_j)$ alors :

- x_i : est l'extrémité initiale de u_{ij} (ou origine de u_{ij}) notée $I(u_{ij})$.
- x_j : est l'extrémité terminale de u_{ij} (ou destination de u_{ij}) notée $T(u_{ij})$.

Remarque : lorsque $I(u_{ij}) = T(u_{ij})$, u_{ij} est dit **boucle**.

2.1.2 Successeurs et Prédécesseurs

- x_j est successeur de x_i si $(x_i, x_j) \in U$. $x_j \in X$ tel que $(x_i, x_j) \in U$

L'ensemble des successeurs de x_i est noté par $\Gamma^+(x_i)$.

$$\Gamma^+(x_i) = \{x_j \in X \text{ tel que } (x_i, x_j) \in U\}.$$

- x_j est prédécesseur de x_i si $(x_j, x_i) \in U$.

L'ensemble des prédécesseurs de x_i est noté par $\Gamma^-(x_i)$.

$$\Gamma^-(x_i) = \{x_j \in X \text{ tel que } (x_j, x_i) \in U\}.$$

- x_i est un voisin de x_j si x_i est un prédécesseur ou successeur qu'on note :

$$\Gamma(x_i) = \Gamma^+(x_i) \cup \Gamma^-(x_i).$$

Exemple :

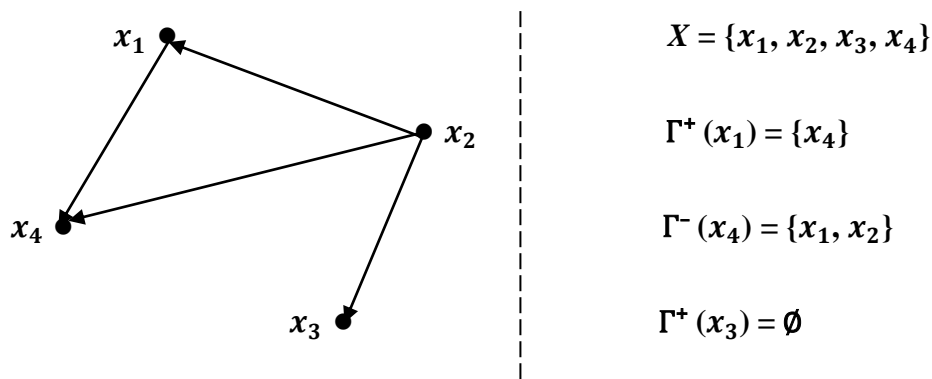


Figure.II.2 – Successeurs et prédécesseurs d'un sommet.

2.1.3 Graphe non orienté

Définition : un graphe non orienté $G = (X, E)$ est défini par deux ensembles X et E , tels que :

- $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ ($|X| = n$) dont les éléments sont appelés **sommets**.
- $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_m\}$ ($|E| = m$) dont les éléments sont appelés **arêtes**.

Exemple :

L'arête $e = x_i x_j$

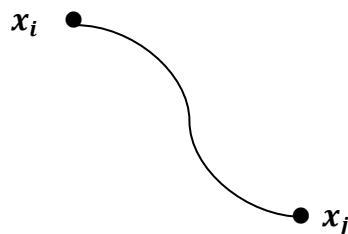


Figure.II.3 – Graphe non-orienté.

Remarque : une arête e de l'ensemble E est définie par une paire non ordonnée de sommets, appelés les extrémités de e . Si l'arête e relie les sommets a et b , on dira que ces sommets sont **adjacents**, ou **incidents** avec e , ou bien que l'arête e est incidente avec les sommets a et b .

- On appelle **ordre** d'un graphe, le nombre de sommets n de ce graphe.

2.1.4 Graphe complet

Soit $G = (X, E)$ complet si $\forall x, y \in X, \exists e = xy \in E$.

Un graphe simple complet est appelé : clique.

Une clique d'ordre n est notée : K_n .

Exemple :



K_1

K_2

K_1 : est une clique d'ordre 1.

2.1.5 Degré d'un sommet

$G = (X, U) ; A \subset X$

$W^+(A) = \{u \in U / I(u) \in A \text{ et } T(u) \notin A\}$.

$W^-(A) = \{u \in U / I(u) \notin A \text{ et } T(u) \in A\}$.

Remarque :

Soit $A = \{x\}$

$|W^+(x)| = |\{u \in U / I(u) = x\}| = d^+(x) =$ demi degré extérieure de x .

$|W^-(x)| = |\{u \in U / T(u) = x\}| = d^-(x) =$ demi degré intérieure de x .

$d(x) =$ degré de $x = d^+(x) + d^-(x)$.

2.1.6 Chaîne-cycle

Chaîne

Soit $G = (X, U)$ un graphe, une chaîne est une successive de sommets et d'arcs, telle que :

$C = (x_1, u_1, x_2, u_2, \dots, x_k, u_k, x_{k+1})$ où x_i et x_{i+1} sont des extrémités de u_i .

Remarque :

- Une chaîne est dite élémentaire si, en la parcourant, on ne rencontre pas deux fois le même sommet.

- Une chaîne est dite simple si, en la parcourant, on ne rencontre pas deux fois le même arc.

Cycle : est une chaîne simple dont les extrémités sont confondues.

Remarque : Ces deux notions ne sont pas orientées.

2.1.7 Chemin-circuit

Chemin

Soit $G = (X, U)$ un graphe. Un chemin est une suite de sommets reliés successivement par des arcs orientés dans le même sens, telle que :

$C = (x_1, u_1, x_2, u_2, \dots, x_k, u_k, x_{k+1}, \dots, x_t)$ où $x_k = I(u_k)$ et $x_{k+1} = T(u_k)$.

Circuit : est un chemin simple ayant ses extrémités confondues.

Remarque : l'orientation est importante.

2.1.8 Connexité dans un graphe

- Un graphe est dit connexe si pour chaque couple de sommet x et y de G , il existe une chaîne les reliant.
- On dit qu'un graphe est fortement connexe si entre chaque couple de sommets x et y , il existe un chemin de x à y et un autre chemin de y à x . Autrement dit, il passe entre chaque couple de sommets de G , au moins un circuit.

2.1.9 C-eulérien, C-hamiltonien

2.1.9.1 C-eulérien

Soit $G = (X, E)$ un graphe connexe d'ordre n .

Un C. est eulérien s'il est simple et passe par toutes les arêtes du graphe.

2.1.9.2 C- hamiltonien

Un C. est hamiltonien s'il est élémentaire et passe par tous les sommets du graphe.

Remarque : le C. peut signifie une chaîne, cycle, chemin ou circuit.

2.1.10 La recherche d'un chemin hamiltonien dans un graphe 1-complet

Le chemin hamiltonien dans un graphe 1-complet se détermine en utilisant l'algorithme suivant.

Le principe :

Soit $G = (X, U)$ un graphe 1-complet. L'idée de cet algorithme est que pour un sommet x dont le demi-degré extérieur est maximum, il s'agit d'introduire les sommets dans le chemin hamiltonien par ordre croissant de leurs demi-degrés maximum.

Énoncé :

Données : un graphe 1-complet $G = (X, U)$.

Résultat : un chemin hamiltonien C dans le graphe G .

Soit $\mathbf{d}^+(x) = \emptyset$

- (0) On repère un sommet dans le graphe G dont le demi-degré extérieur est maximum, soit x_0 ce sommet et $\mathbf{d}^+(x) = \mathbf{d}^+(x) \cup \{x_0\}$
- (1) On considère le sous-graphe G_1 engendré par $X \setminus \{x_0\}$ et on repère un autre sommet x_1 dont le demi-degré extérieur est maximum. $\mathbf{d}^+(x) = \mathbf{d}^+(x) \cup \{x_1\}$, tel que x_1 un successeur de x_0 .
- (2) On considère le sous-graphe G_2 engendré par $X \setminus \{x_0, x_1\}$, et on repère un autre sommet x_2 dont le demi-degré extérieur est maximum. $\mathbf{d}^+(x) = \mathbf{d}^+(x) \cup \{x_2\}$, tel que x_2 un successeur de x_1 .

On continue le même procédé jusqu'à épuisement du graphe. On obtient la suite des sommets de $\mathbf{d}^+(x)$ qui définit un chemin hamiltonien dans le graphe G comme suit $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$.

Remarque : le chemin hamiltonien trouvé peut ne pas être unique.

2.1.11 Réseau de transport

Un réseau de transport est un graphe sans boucle $R = (X, U, c)$ où on associe à chaque arc $u = (i, j)$ de U une capacité $c_{ij} \geq 0$.

En outre, un tel réseau vérifie les hypothèses suivantes :

- Il existe un seul nœud qui n'a pas de prédécesseurs, tous les autres en ont au moins un. Ce nœud est appelé l'entrée du réseau ou la source, noté : s .
- Il existe un seul nœud qui n'a pas de successeurs, tous les autres en ont au moins un. Ce nœud est appelé la sortie du réseau ou le puits, noté : p .
- Sur ce réseau, on trace un arc (fictif) de p à s (arc de retour) d'une capacité infinie. Il permet de mesurer ce qui circule sur le réseau.

2.1.12 Le problème du flot maximal

Proposition du problème : comment transférer une quantité maximale de « matière » de s à p sans dépasser La capacité de chaque arc ?

Flot de s à p sur un réseau de transport :

- Le vecteur $Q = Q_{ij}_{(i,j) \in (U \cup (p,s))}$ est appelé flot sur R .
- Q_{ij} désigne les flux sur l'arc (i, j) qui correspond à la quantité de « matière » circulant sur l'arc.
- Les flux sur R doivent vérifier la contrainte de capacité :

$$0 \leq Q_{ij} \leq c_{ij} \quad \forall i \in X \text{ et } \forall j \in X.$$

- Lorsque $Q_{ij} = c_{ij}$, l'arc (i, j) est dit saturé.
- Les flux sur R doivent également respecter la loi de conservation :

$$\sum_{i \in \Gamma^-(j)} Q_{ij} = \sum_{i \in \Gamma^+(j)} Q_{ji} \quad \forall j \in X.$$
- La loi de conservation est également vérifiée en s et p grâce à l'adjonction de l'arc de retour.
- Un flot Q est dit réalisable (ou admissible ou compatible) si et seulement si : il respecte les contraintes de capacité sur chaque arc et la loi de conservation en chaque sommet.
- Un flot Q est dit complet si et seulement si tout chemin de s à p comporte au moins un arc saturé.

Chaîne améliorante : C est une chaîne améliorante (ou augmentante) de s à p pour un flot Q admissible donné si :

- $Q_{ij} < c_{ij}$ pour tout arc (i, j) de C dans le sens direct (de s vers p).

– $Q_{ij} > 0$ pour tout arc (i, j) de C dans le sens inverse (de p vers s).

▪ On note :

$$C^+ = \{\text{arcs de } C \text{ dans le sens direct}\}.$$

$$C^- = \{\text{arcs de } C \text{ dans le sens inverse}\}.$$

▪ Augmentation de la valeur du flot de ε :

$$\varepsilon_1 = \min [c_{ij} - Q_{ij} ; (i, j) \in C^+].$$

$$\varepsilon_2 = \min [Q_{ij} ; (i, j) \in C^-].$$

$$\text{D'où } \varepsilon = \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}.$$

▪ Dans C^+ : on augmente les flux de ε .

▪ Dans C^- : on diminue les flux de ε .

2.1.12.1 Algorithme de Ford-Fulkerson

Données : un 1-graphe valué $G = (X, U, c)$, Q un flot.

Résultat : un flot Q complet.

(0) Initialisation

Marquer un sommet s et poser $C^+ = \emptyset ; C^- = \emptyset ; Q^k = 0 ; A = \{s\} ; k := 0$

(1) Soit A l'ensemble des sommets marqués et soit i un sommet de A :

- Marquer le sommet j successeur de i tel que $Q_{ij} < c_{ij}$
On pose $C^+ := C^+ \cup \{(i, j)\} ; A := A \cup \{j\}$
- Marquer le sommet j prédécesseur de i tel que $Q_{ji} > 0$
On pose $C^- := C^- \cup \{(j, i)\} ; A := A \cup \{j\}$

Quand on ne peut plus marquer, deux cas se présentent:

1. p est marqué, aller en (2).
2. p n'est pas marqué, terminé le flot est maximal.

(2) On a obtenue une chaîne augmentante $C = C^+ \cup C^-$ de s à p .

Pour améliorer le flot on calcule :

$$\epsilon_1 = \min [c_{ij} - Q_{ij}; (i,j) \in C^+].$$

$$\epsilon_2 = \min [Q_{ij}; (i,j) \in C^-].$$

D'où $\epsilon = \min \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$

On définit le nouveau flot :

$$Q^{k+1} = \begin{cases} Q_{ij}^k + \epsilon & \text{pour } u \in C^+ \\ Q_{ij}^k - \epsilon & \text{pour } u \in C^- \\ Q_{ij}^k & \text{pour } u \notin C \end{cases}$$

Effacer les marques sauf en s , et aller en (1).

On applique l'algorithme de Ford-Fulkerson sur le réseau $R = (X, U, c)$ de la figure suivante.

Initialisation :

On marque la source (s) d'un signe $[\cdot, +\infty]$.

On pose $A = \{s\}; C^+ \cup C^- = \emptyset; Q^k = 0; A = \{s\}; k = 0$

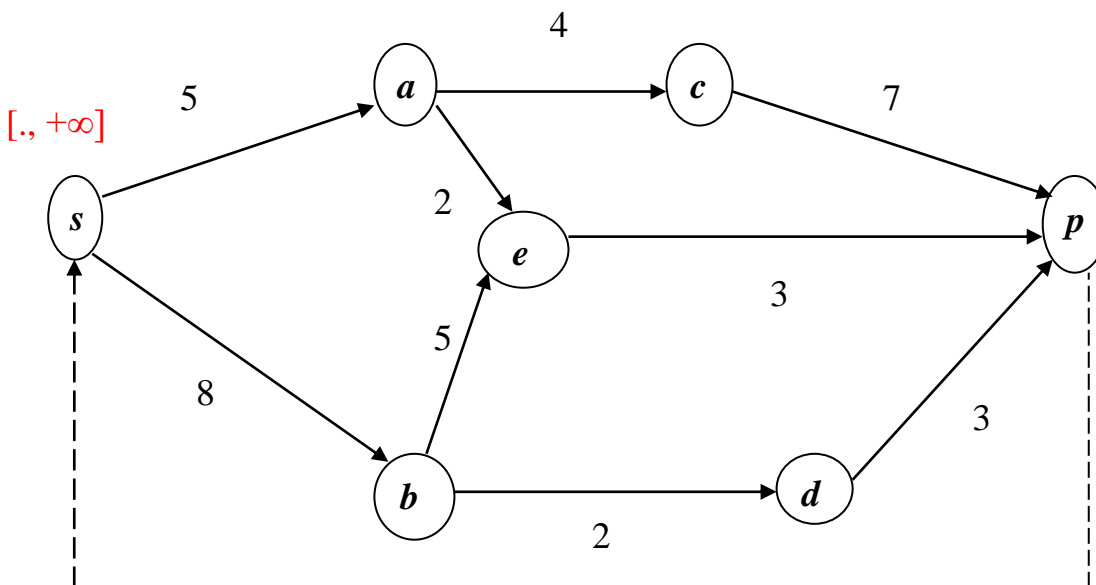
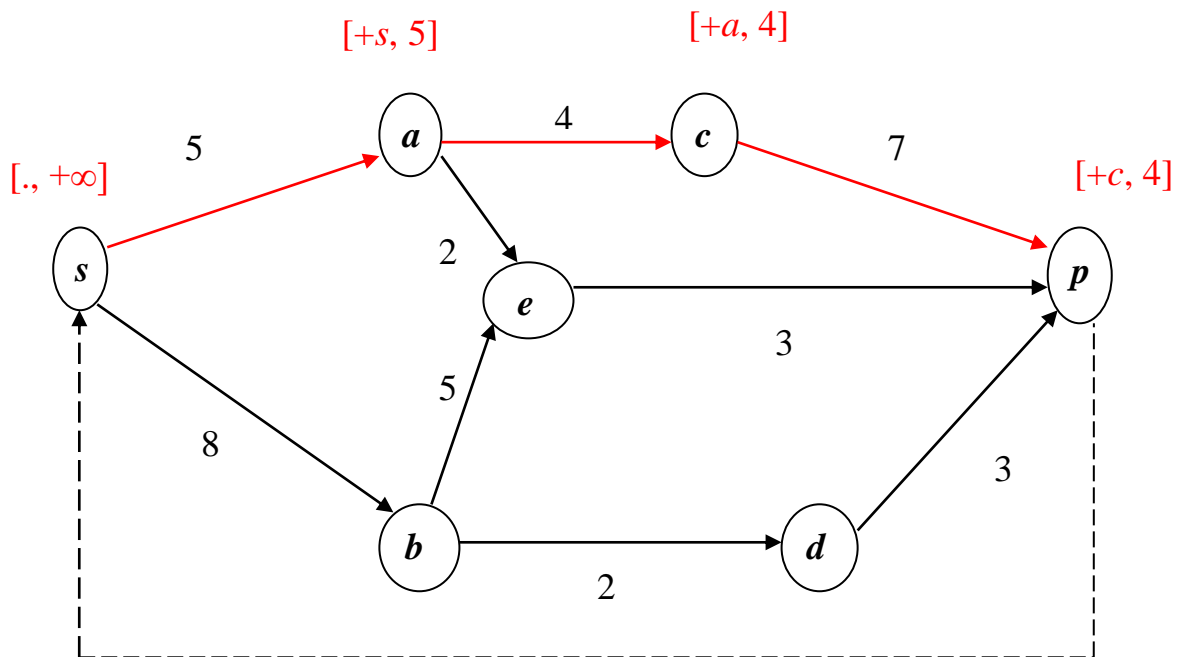


Figure.II.4 - le réseau $R = (X, U, c)$.

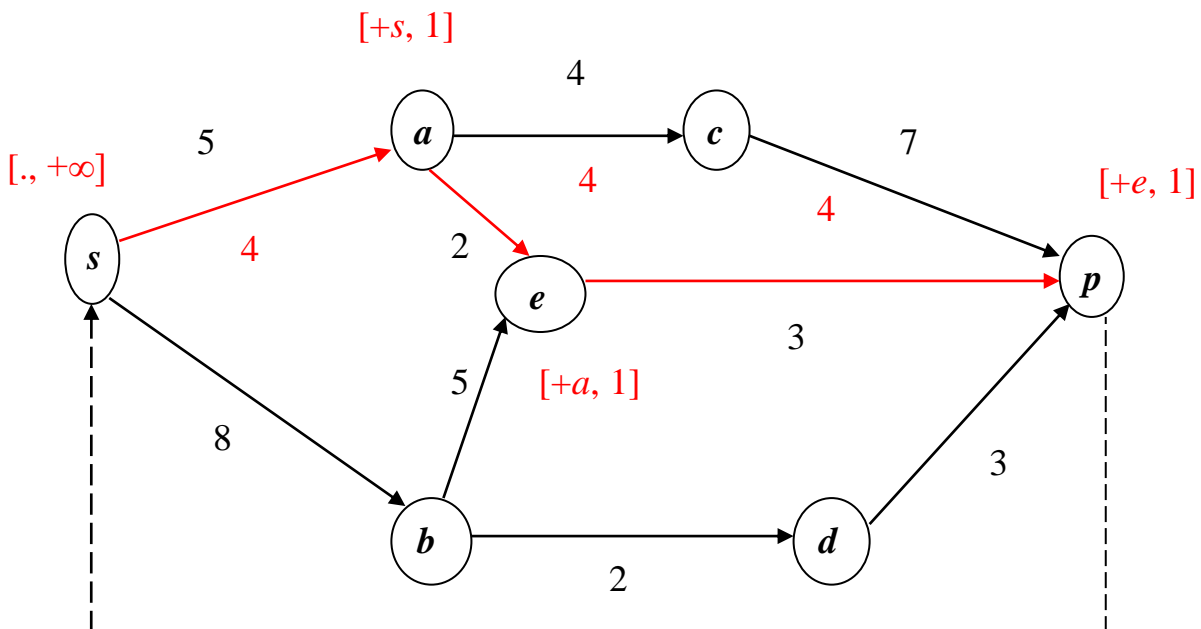
Itération 1 :



La chaîne augmentante est $C = C^+ \cup C^- = C^+ = \{s, a, c, p\}$.

Le nouveau flot est $Q^1 = 4$.

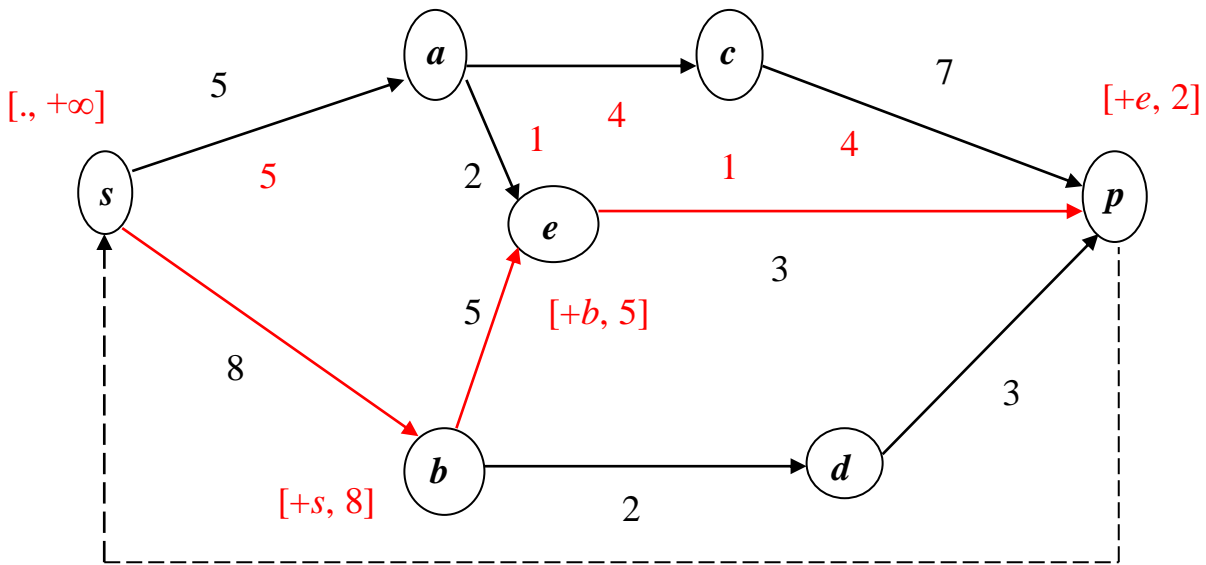
Itération 2 :



La chaîne augmentante est $C = C^+ \cup C^- = C^+ = \{s, a, e, p\}$.

Le nouveau flot est $Q^2 = 5$.

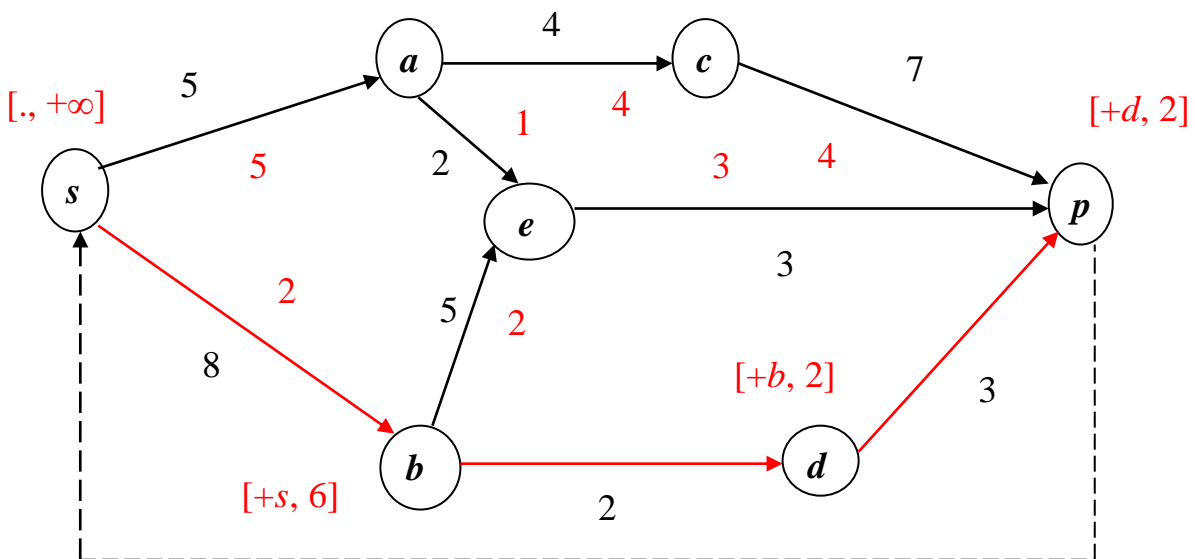
Itération 3 :



La chaîne augmentante est $C = C^+ \cup C^- = C^+ = \{s, b, e, p\}$.

Le nouveau flot est $Q^3 = 7$.

Itération 4 :



La chaîne augmentante est $C = C^+ \cup C^- = C^+ = \{s, b, d, p\}$.

Le nouveau flot est $Q^4 = 9$.

Itération 5 :

Dans le réseau obtenu, on ne peut plus marquer le sommet puits. Donc le flot courant est maximal, on le présente par le tableau suivant :

Arcs	(s, a)	(s, b)	(a, e)	(b, e)	(a, c)	(b, d)	(e, p)	(c, p)	(d, p)
Flux	5	4	1	2	4	2	3	4	2

La valeur du flot maximal est égale à la somme des valeurs des flux sortant de la source (de s), ou à la somme des valeurs des flux entrant au puits (à p).

C'est-à-dire : $Q_{max} = Q_{sa} + Q_{sb} = Q_{ep} + Q_{cp} + Q_{dp} = 9$

2.2 Programmation mathématique

En général, un programme mathématique est défini comme suit :

$$(PM) \quad \begin{cases} \min f(x) \\ x \in D \subseteq \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Où :

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continûment différentiable appelée fonction objectif

D est appelé ensemble des solutions réalisables présenté souvent comme : $D = U \cap V$, avec

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\} \text{ et } V = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) = 0, i = 1, \dots, p\}.$$

Définitions

- On appelle solution réalisable de (PM) tout point vérifiant les contraintes (i.e. : appartenant à D)
- Une solution réalisable qui minimise l'objectif sur D est dite solution optimale globale de (PM) . On note par $\mathbf{arg}_D \min f(x)$ l'ensemble des solutions optimales globales.
- Un point $x^* \in D$ est une solution optimale locale de (PM) si : $\exists V$ (voisinage) de x^* tel que : $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in V$ et on note par $\mathbf{loc}_D \min f(x)$ l'ensemble des solutions optimales locales de (PM) .

Nous avons toujours $\mathbf{arg} \min f(x) \subseteq \mathbf{loc} \min f(x)$ et si (PM) est convexe, les deux ensembles sont égaux.

Remarque :

Le problème d'optimisation précédent consiste :

- Soit à chercher un point optimal (local ou global).
- Soit, si un tel point n'existe pas on cherche une borne inférieure à f .
- Soit à établir une f est non bornée inférieurement sur D , auquel cas on adopte la convention $\inf_D f(x) = -\infty$.
- Lorsque D est vide, on pose par convention $\inf_D f(x) = +\infty$.

2.2.1 Classification d'un programme mathématique

On classe le problème (PM) à partir de deux propriétés fondamentales à savoir essentiellement la convexité et la différentiabilité des fonctions du problème. A ce propos, (PM) est dit convexe si f et f_i sont convexes et g_i affines. Si ces dernières sont toutes différentiables on dit que (PM) est différentiable. La classe de programmes mathématiques convexes différentiables est le modèle le mieux élaboré, les programmes non convexes ou non différentiables sont difficiles à traiter.

Enfin, le cas le plus simple est celui de la programmation linéaire où f , f_i et g_i sont affines.

2.2.2 Qualification des contraintes

- Si D est un polyèdre convexe (i.e. : toutes les fonctions contraintes sont affines), alors par définition les contraintes sont qualifiées en tout point réalisable (Karlin).
- Si D est un convexe (i.e. : f_i convexe et g_i affine) et $\text{int } D \neq \emptyset$, les contraintes sont qualifiées partout. C'est la condition de Slater.
- Une contrainte d'inégalité $f_i(x) \leq 0$ est dite saturée (ou active) en $x^* \in D$ si $f_i(x^*) = 0$. De ce fait, une contrainte d'égalité $g_i(x) = 0$ est par définition saturée en tout point x de D . Les contraintes sont qualifiées en $x^* \in D$ si les gradients de toutes les fonctions des contraintes saturées en x^* sont linéairement indépendants.

Remarque :

La résolution complète de (PM) traite dans l'ordre les points suivants :

- L'existence (et éventuellement l'unicité) d'une solution optimale.
- La caractérisation de la solution (il s'agit des conditions d'optimalité).
- L'élaboration d'algorithmes pour calculer cette solution.

2.2.3 Principaux résultats d'existences

2.2.4 Théorème (Weierstrass)

Soit D compact non vide de \mathbf{R}^n , si f est continue sur D alors (PM) admet au moins une solution optimale globale $\mathbf{x}^* \in D$.

Corollaire

Soit D non vide et fermé de \mathbf{R}^n , f est continue et coercive sur D (au sens que $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{x}) = +\infty$) alors (PM) admet au moins une solution optimale globale.

Remarque :

L'unicité d'une solution éventuelle est en général une conséquence de la convexité de D et de la stricte convexité de f .

2.2.5 Condition d'optimalité

On considère le programme mathématique :

$$(PM) \quad \begin{cases} \min f(\mathbf{x}) \\ f_i(\mathbf{x}) \leq 0 \\ g_i(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} , i = 1, \dots, m \\ , i = 1, \dots, p \end{matrix}$$

Où f , f_i et g_i sont continûment différentiables.

Théorème (Karush-Kuhn-Tucker (KKT))

Si \mathbf{x}^* est une solution optimale locale de (PM) satisfaisant l'une des conditions de qualification précédentes, alors il existe des multiplicateurs $\lambda \in \mathbf{R}_+^m$ et $\mu \in \mathbf{R}^p$ tels que :

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla f_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} & \text{(condition d'optimalité)} \\ \lambda_i f_i(\mathbf{x}^*) = 0, i = 1, \dots, m & \text{(condition de complémentarité)} \\ g_i(\mathbf{x}^*) = 0, i = 1, \dots, p \end{cases}$$

Remarque :

- Si les contraintes ne sont pas qualifiées en \mathbf{x}^* , les conditions de (KKT) ne s'appliquent pas (\mathbf{x}^* peut être optimal sans vérifier ces conditions).

- Si (PM) est convexe, les conditions sont à la fois nécessaires et suffisantes pour que x^* soit un minimum global.

2.3 Programmation linéaire (PL)

La programmation linéaire est une sous-classe de la programmation mathématique. Tout problème de la (PL) peut se formuler de la manière suivante :

Trouver les valeurs des variables $x = (x_j, j = \overline{1, n})$ qui maximisent ou minimisent la fonction linéaire suivante :

$$Z = Z(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow (max / min) \quad (1)$$

Les sous contraintes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad (2)$$

$$x = (x_j, j = \overline{1, n})$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \quad (3)$$

Où $c_j, j = \overline{1, n}$ représentent les coûts ou profit des différents produits.

Les coefficients c_j et $a_{ij} (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ sont supposés être des nombres réels.

Supposons $m \leq n$ et tous les nombres $b_i (i = \overline{1, m})$ sont tous positifs ou nuls.

Définition

- . La fonction Z est appelée fonction objectif.
- . Les contraintes (2) sont appelées, contraintes principales, ou essentielles.
- . Les contraintes (3) sont dites directes (non négativités).

2.3.1 Ecriture matricielle d'un problème de programmation linéaire

Pour écrire le problème de (PL) (1)-(2)-(3) sous forme compacte, on utilise la forme matricielle (vectorielle). Pour se faire, on introduit les notations suivantes :

Soient $I = \{1, 2, \dots, m\}$ l'ensemble des indices des lignes et $J = \{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des indices des colonnes.

Ainsi l'ensemble des variables $\{x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n\}$ s'écrira sous la forme vectorielle :
 $x = x(J) = (x_j, j \in J)$.

De manière analogue on aura : $c = c(J) = (c_j, j \in J)$; $b = b(I) = (b_i, i \in I)$.

L'ensemble des coefficients a_{ij} ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$) sera représenté sous forme d'une matrice A d'ordre $(m \times n)$:

$$A = A(I, J) = (a_{ij}, i \in I, j \in J) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

On écrit souvent A de la manière suivante :

$A = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_j, \dots, a_n)$, où a_j est un vecteur colonne :

$$a_j = A(I, j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Avec ces nouvelles notations, le problème (1)-(3) peut être écrit sous forme matricielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = Z(x) = c'x \rightarrow (max / min) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

Avec :

c' : est le transposé de c , de dimension (n) .

A : la matrice de condition du problème.

b : vecteur (second membre).

x : vecteur (des variables de décisions).

2.3.2 Les formes d'un programme linéaire

Un PL peut être sous une **forme générale** est

$$(\text{PL}) = \left\{ \begin{array}{l} (max / min) Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq, \geq \text{ou} = b_i, i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1, n} \end{array} \right.$$

2.3.2.1 Forme canonique

Un programme linéaire est sous forme canonique lorsque toutes ses contraintes sont des inégalités et toutes ses variables sont non-négatives. Cette forme est représentée comme suit :

$$(\text{PL}) = \left\{ \begin{array}{l} (max / min) Z(x) = c'x \\ Ax \leq (\text{resp} \geq) b \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

2.3.2.2 Forme standard

Un programme linéaire est sous forme standard lorsque toutes ses contraintes sont des égalités et toutes ses variables sont non-négatives. Un programme linéaire sous forme standard se présente donc comme suit :

$$(\text{PL}) = \left\{ \begin{array}{l} (max / min) Z(x) = c'x \\ Ax = b \\ x \geq 0, b \geq 0 \end{array} \right.$$

Remarque : le problème de minimisation et maximisation sont en fait équivalents puisque $\min Z = -\max(-Z)$ et $\max Z = -\min(-Z)$.

2.3.3 Méthodes de résolution d'un programme linéaire

2.3.3.1 Méthode du simplexe

La méthode du simplexe est une méthode itérative. Elle démarre d'un point extrême (sommet de départ) et passe au sommet voisin, et ceci constitue une itération de l'algorithme du simplexe. Pour cela, on doit définir le point extrême de départ et le test d'arrêt. [5]

Soit le problème standard de programmation linéaire (avec maximisation) suivant :

$$Z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (3)$$

Le problème (1)-(3) peut être écrit sous forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} Z(x) = c^t x \rightarrow \max \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

Où :

$A = A(I, J)$ la matrice des conditions.

$a_j = A(I, j)$ les colonnes de la matrice A .

$c^t = c^t(J)$ le vecteur des coûts.

$b = b(I)$ le vecteur des contraintes (second membre), avec $b_i \geq 0, i = \overline{1, m}$

$x = x(J) = (x_j, j \in J)$ le vecteur des variables.

$I = \{1, 2, \dots, m\}$ l'ensemble des indices des lignes et $J = \{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des indices des colonnes de la matrice A .

Rang $A = m \leq n$.

2.3.3.1.1 Solution de base

Définition 01 : tout vecteur x vérifiant les contraintes (2) et (3) est appelé solution réalisable (admissible) du problème (1)-(3).

Définition 02 : une solution réalisable x est dite de base si $(n - m)$ de ses composantes sont nulles, et aux autres $(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m})$, correspondent m vecteurs $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m}$ de la matrice de condition A linéairement indépendants.

Autrement :

Soient $J_B = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ ensembles des indices de base et $J_H = J \setminus J_B$ ensemble des indices hors base.

Une solution réalisable $x = x(J)$ est solution de base si $x_H = x(J_H) = 0$, $\det A_B \neq 0$, où $A_B = A(I, J_B)$, $x(J_B) \geq 0$ (A_B est la matrice de base).

$x_j, j \in J_B$ les composantes de base et $x_j, j \in J_H$ les composantes hors base.

Définition 03 : une solution de base réalisable x^0 de (1)-(3) est optimale si $c^t x^0 = \max(c^t x)$, pour toute solution réalisable.

Définition 04 : une solution réalisable de base x est dite non dégénérée si $x_j > 0, j \in J_B$

L'accroissement de la fonction objectif Z est égale à :

$$\Delta Z = Z(\bar{x}) - Z(x) = c^t x - c^t \bar{x} = c^t \Delta x.$$

Construisons le m -vecteur $y = y(I)$ vecteur de potentiels :

$$y^t = c_B^t A_B^{-1}$$

Et $\Delta = \Delta(J) = (\Delta_j, j \in J)$ est le vecteur estimation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^i = y^t A - c^t \\ \Delta_j = y^t a_j - c_j, j \in J. \end{array} \right.$$

2.3.3.1.2 Critère d'optimalité

Soit $\{x, A_B\}$ une solution réalisable de base de départ.

L'inégalité $\Delta_H = \Delta(J_H) \geq 0$ est suffisante et dans le cas de la non dégénérescence, elle est nécessaire pour l'optimalité de $\{x, A_B\}$.

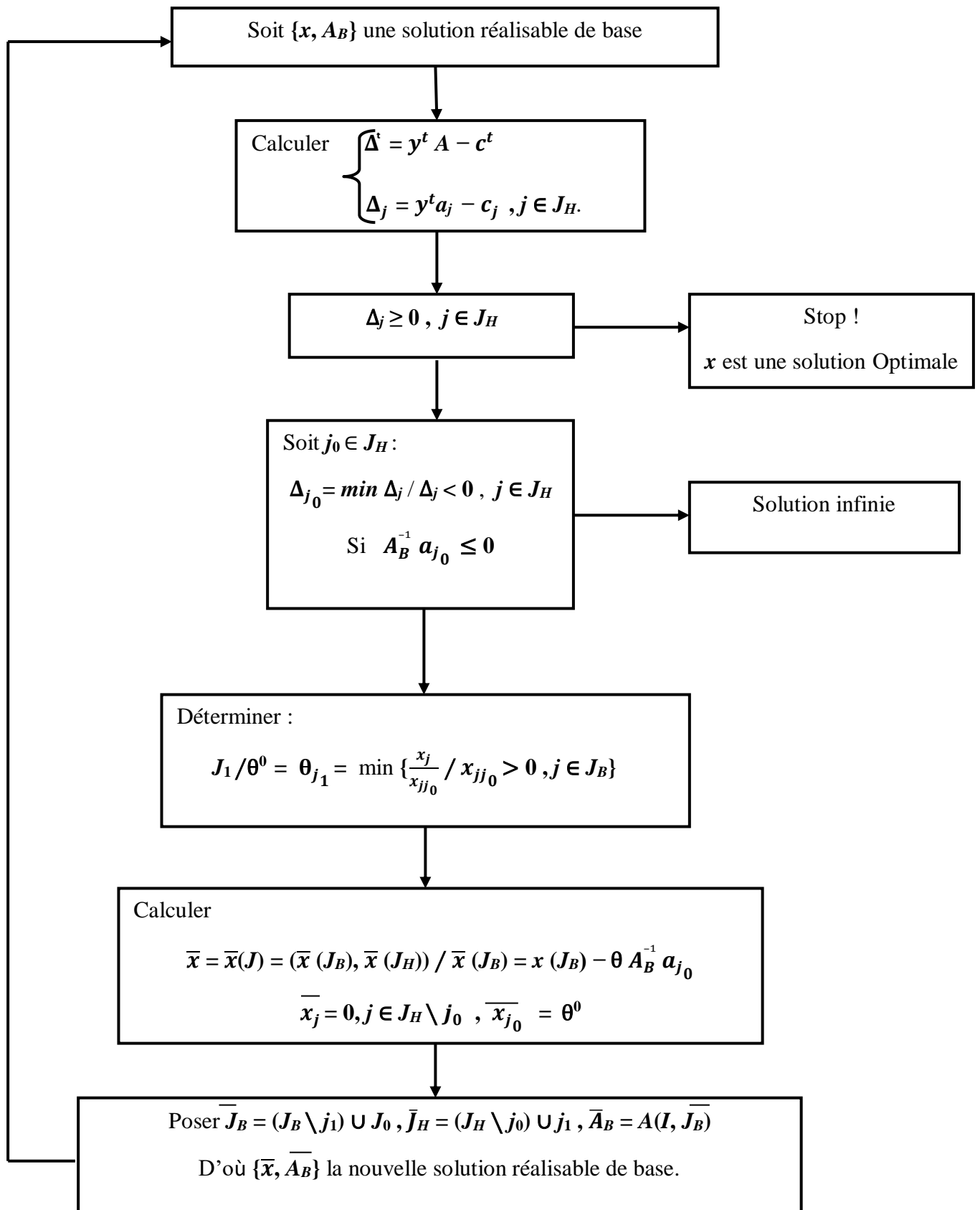


Figure.II.5 – L’organigramme de la méthode du simplexe-maximisation.

2.3.3.1.3 Algorithme du simplexe (cas d'une maximisation)

1. Soit $\{x, A_B\}$ une solution réalisable de base de départ.
2. Calculer $y^t = c_B^t A_B^{-1}$ et $\Delta_j = y^t a_j - c_j, j \in J_H$.

Si $\Delta_j \geq 0, j \in J_H$

Stop ! x est une solution.

Sinon :

Soit $j_0 \in J_H : \Delta_{j_0} = (\min \Delta_j / \Delta_j < 0), j \in J_H$.

Si $A_B^{-1} a_{j_0} \leq 0, j \in J_H$.

Stop le maximum de la fonction objectif tend vers l'infinie

Sinon :

Déterminer $J_1 / \theta^0 = \theta_{j_1} = \min \{ \frac{x_j}{x_{jj_0}} / x_{jj_0} > 0, j \in J_B \}$

Calculer $\bar{x} = \bar{x}(J) = (x(\bar{J}_B), x(\bar{J}_H))$

$$\bar{x}(J_B) = x(J_B) - \theta A_B^{-1} a_{j_0}$$

$$\bar{x}_j = 0, j \in J_H \setminus j_0, \bar{x}_{j_0} = \theta^0$$

Poser $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0, \bar{J}_H = (J_H \setminus j_0) \cup j_1, A_{\bar{B}} = A(I, \bar{J}_B)$

D'où $\{\bar{x}, \bar{A}_B\}$ la nouvelle solution réalisable de base puis aller en 2.

Exemple : l'application de la méthode du simplexe pour la résolution de ce problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max Z(x) = 10x_1 + 12x_2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 40 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 60 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

On a $J = \{1, 2, 3, 4\}$, $J_B = \{3, 4\}$, $J_H = \{1, 2\}$ avec $A_B = I_2$ donc la solution réalisable de base est $x = (0, 0, 40, 60)$, dressons le premier tableau du simplexe :

		c_j	10	12	0	0		
c_B	Base	b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	θ_j	
0	x_3	40	1	2	1	0	20	
0	x_4	60	3	2	0	1	30	
		Δ_j	-10	-12	0	0	$Z = 0$	

Tableau II.1- Premier tableau du simplexe.

- La variable entrante est : (x_2)
- La variable sortante est : (x_3)

Le deuxième tableau du simplexe :

		c_j	10	12	0	0		
c_B	Base	b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	θ_j	
12	x_2	20	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	40	
0	x_4	20	2	0	-1	1	10	
		$\bar{\Delta}_j$	-4	0	6	0	$\bar{Z} = 240$	

- La variable entrante est : (x_1)
- La variable sortante est : (x_4)

Le troisième tableau du simplexe :

		c_j	10	12	0	0		
c_B	Base	b_i	a_1	a_2	a_3	a_4		
12	x_2	15	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$		
10	x_1	10	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
		$\bar{\Delta}_j$	0	0	4	2	$\bar{Z} = 280$	

On a trouvé $\bar{\Delta}_j \geq 0, \forall j \in \bar{J}_H$ le critère d'optimalité est vérifié. L'algorithme s'arrête.

$\bar{x} = (10, 15, 0, 0)$ est la solution optimale du problème avec $\bar{Z} = 280$.

2.3.3.2 Méthode des pénalités (ou du grand M)

Cette méthode a été proposée par le mathématicien américain Tcharness pour résoudre les problèmes de (PL).

Soit le problème (P) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z(x) = c^t x \rightarrow \max \\ Ax = b \\ x \geq 0, j = \overline{1, n} \end{array} \right.$$

On constitue le problème (PM) de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{Z}(x) = c^t x - M \sum_{i=1}^m x_{n+i} \rightarrow \max \\ [Ax]_i + x_{n+i} = b_i, i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n+m} \end{array} \right.$$

Où :

$M \gg 0$ (un nombre positif très grand).

Le vecteur $X = (0, b)^t = (x = 0, x_{n+i} = b_i, i = \overline{1, m})^t$ est une solution de base réalisable pour (PM).

On résout le problème (PM) par la méthode du simplexe avec une solution réalisable de base de départ $\{(0, b), A_B\}$ et on obtient une solution optimale $\{X^0 = (x^0, x_{n+i}^0, i = \overline{1, m}), A_B^0\}$.

2.3.3.2.1 Principe de la M -méthode

Après la transformation de (P) en (PM) , à l'optimum on aura les cas suivants :

1. Si toutes les variables artificielles sont nulles, alors la solution est optimale. De plus si $\Delta_{j_0} = 0 / j_0 \in J_H$, alors on aura une infinité de solutions optimale.
2. Au moins une variable artificielle de la base strictement positive \Rightarrow contraintes contradictoires.
3. A un certain moment on ne peut pas améliorer, par manque du pivot.

On distingue deux cas :

- Toutes les variables artificielles sont nulles \Rightarrow solution infinie.
- Au moins une variable artificielle strictement positive \Rightarrow contraintes contradictoires.

Exemple : résoudre le problème de programmation linéaire suivant en utilisant la méthode des pénalités.

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max Z(x) = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 30 \\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq 40 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Pour déterminer une solution de base initiale, on doit ajouter une variable artificielle x_4 , d'où on obtient le M - problème suivant :

$$(PM) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max Z(x) = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - Mx_4 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 30 \\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 + x_5 = 40 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array} \right.$$

La solution de base de départ est : $\bar{x} = (0, 0, 0, 30, 40)$, avec $\bar{J} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\bar{J}_B = \{4, 5\}$, $\bar{J}_H = \{1, 2, 3\}$ avec $\bar{A}_B = I_2$. Dressons le premier tableau de la M -méthode :

		c_j	5	2	3	$-M$	0		
c_B	Base	b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ_j	
$-M$	x_4	30	1	5	2	1	0	6	
0	x_5	40	1	-5	-6	0	1	/	
		$\bar{\Delta}_j$	$-M-5$	$-5M-2$	$-2M-3$	0	0	$\bar{Z} = -30M$	

Tableau II.2- Premier tableau de la M -méthode.

La solution de départ n'est pas optimale car $\bar{\Delta}_j < 0$, $\bar{j}_H = \{1, 2, 3\}$, donc on doit faire rentrer x_2 dans la base et faire sortir x_4 , ainsi on obtient le nouveau tableau suivant :

		c_j	5	2	3	$-M$	0		
c_B	Base	b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ_j	
2	x_2	6	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	30	
0	x_5	70	2	0	-4	1	1	35	
		$\bar{\Delta}_j$	$\frac{-23}{5}$	0	$\frac{-11}{5}$	$\frac{2}{5}+M$	0	$\bar{Z} = 60$	

La solution trouvée n'est pas optimale car on a pas $\bar{\Delta}_j > 0$, $\bar{j}_H = \{1, 3, 4\}$, donc on doit faire rentrer x_1 dans la base et faire sortir x_2 , ainsi on obtient le nouveau tableau suivant :

		c_j	5	2	3	$-M$	0		
c_B	Base	b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ_j	
5	x_1	30	1	5	2	1	0		
0	x_5	10	0	-10	-8	-1	1		
		$\bar{\Delta}_j$	0	23	7	$5+M$	0	$\bar{Z} = 150$	

On a le critère d'optimalité est vérifié et la variable artificielle \bar{x}_4 est nulle, donc la solution optimale du M -méthode est $X^0 = (30, 0, 0, 0, 10)$. Donc la solution optimale du problème (P) est $X^0 = (30, 0, 0)$.

Conclusion

Dans ce chapitre, d'abord on a introduit les notions de base de la théorie des graphes. Ensuite on a donné les notions fondamentales de la programmation mathématique afin d'entamer la programmation non linéaire et linéaire.

CHAPITRE 3

PROBLÈMES DE TRANSPORT

D'une manière générale, on entendra par problème de transport tout problème d'optimisation du transfert entre points-origine ou fournisseurs et points-destination ou clients. Lorsque ces points matérialisent des lieux géographiques et lorsque l'objet du transfert est un ensemble de marchandises, il s'agit du problème de transport au sens strict.

De nos jours, le problème de transport occupe une place importante dans la vie économique de notre société. Historiquement, les problèmes de transport les plus connus restent le problème du voyageur de commerce et le problème du postier chinois. Le problème de tournées de véhicules est la combinaison de plusieurs problèmes de voyageur de commerce.

3 Les problèmes de transport

3.1 Le problème de transport simple

Il existe en RO (optimisation), un modèle particulier linéaire qui est le modèle de transport simple.

Schématisons cela comme suit

	1	2		j		n	
1	c_{11} x_{11}						a_1
2							a_2
i				c_{ij} x_{ij}			a_i
m							a_m
	b_1	b_2		b_j		b_n	

- Avec : $1 \leq i \leq m$

$$1 \leq j \leq n$$

- On dispose de m dépôts et n magasins.

x_{ij} la quantité à transporter du dépôt i vers le magasin j .

c_{ij} le coût unitaire de transport (marchandise), du dépôt i vers le magasin j .

a_i est la disponibilité en marchandise dans le dépôt i .

b_j est la demande en marchandise dans le magasin j .

3.1.1 L'hypothèse de balance

Cette hypothèse s'exprime comme suit : $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

Soit : l'hypothèse de balance et $x_{ij} \geq 0$ (variables de décisions / les inconnues).

Les contraintes fonctionnelles sont :

- Au niveau des dépôts : $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$ ($a_i \geq 0$, $\forall i = \overline{1, m}$).
- Au niveau des magasins : $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$ ($b_j \geq 0$, $\forall j = \overline{1, n}$).

Le problème dans ce cas est : de minimiser le coût de transport total de la marchandise et tous les dépôts vers tous les magasins, qui s'exprime comme suit : $Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$

3.1.2 Modèle mathématique du problème de transport (équilibre / simple)

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = \overline{1, n} \\ a_i \geq 0, b_j \geq 0, x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \end{array} \right.$$

3.1.3 La mise en forme du problème de transport (équilibre)

On peut toujours mettre un problème de transport (équilibre / simple) en forme standard comme suit.

Soit : un problème de transport simple équilibré avec m dépôts et n magasins.

La nouvelle forme sera :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = c^t x \rightarrow \min \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

$c, x \in R^{m \times n}$ et $b \in R^{m+n}$.

A matrice de dimension $(m+n) \times (m \times n)$.

Théorème : pour le problème de transport ci-dessus (simple / équilibré) en forme standard, le rang de la matrice A est $(m+n-1)$ [6].

Conséquences :

- a) Une solution de base réalisable pour un problème de transport, aura au plus $(m+n-1)$ composantes strictement positives. S'il y a au moins, on dira que cette solution de base réalisable pour ce problème de transport est dégénérée.

- b) Pour notre cas, une solution de base réalisable possède (mn) composantes. Le nombre de composantes de base est $(m + n - 1)$ et le nombre de composantes hors base est $(n - 1)(m - 1)$.

3.1.4 Méthodes pour obtenir de solution de base réalisable

Il existe pour cela plusieurs méthodes entre autres :

- Méthode coin nord-ouest.
- Méthode des coûts minimaux.
- Méthode de Vogel.

Remarque : on utilise les méthodes ci-dessus pour trouver la solution de base réalisable (de départ / initiale) en vue de trouver la solution optimale pour notre problème de transport équilibré.

3.1.4.1 Méthode de Vogel

La méthode de Vogel peut avoir certains avantages sur la règle du coin nord-ouest pour déterminer une solution initiale de base. En effet, elle peut permettre d'obtenir une solution optimale en moins d'itérations et parfois la solution initiale peut être optimale.

Démarche à suivre :

1. Construire la matrice des coûts en incluant les disponibilités et demandes. Ajouter une destination fictive ou une origine fictive pour que $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$.
2. Evaluer la différence entre les deux coûts les plus petits pour chaque ligne et chaque colonne. Nous obtenons ainsi m différences pour les lignes et n différences pour les colonnes.
3. Choisir la ligne ou la colonne ayant le maximum des différences ; faire un choix arbitraire si le maximum des différences n'est pas unique.
4. Allouer la quantité la plus grande possible (tout en respectant les contraintes) à la cellule possédant le coût le plus faible de la ligne ou la colonne obtenue en 3.
5. Rayer la ligne ou la colonne qui est saturée.
6. Retourner à 2. Mais cette fois en effectuant les calculs sur la matrice résultante. La procédure se termine lorsque toutes les lignes et colonnes sont saturées.

3.1.5 Méthodes utilisées pour le test d'optimalité

- Méthode des potentiels.
- Méthode de stepping stone.

3.1.5.1 Méthode de stepping stone

Cette méthode évalue de la solution de base réalisable de départ vers la solution optimale.

Parcours et notions de parcours

Conditions à respecter par les parcours :

- Chaque paire de case consécutive sur un parcours est soit donc dans la même ligne ou dans la même colonne.
- Il ne peut y avoir trois cases consécutives dans la même ligne ou la même colonne.
- La première case et la dernière case de parcours sont sur la même ligne ou sur la même colonne.
- Une case n'apparaît jamais plus d'une fois dans le parcours.

Processus de l'algorithme de stepping stone

A partir de la solution du départ :

- I. Evaluer à partir de tous les parcours possibles les sommes algébriques des coûts des parcours.
- II. Si toutes les sommes positives ou nulles

Arrêter. La solution est optimale.

Sinon, ajuster la nouvelle solution à partir du parcours qu'à la somme minimal

(négative).

Aller à I.

Exemple : soit le problème de transport de départ suivant :

20 / 110	80 /	80 /	110
100 / 30	200 /	100 / 80	160
50 /	100 / 150	200 /	150
140	200	80	

Appliquer l'algorithme de stepping stone pour trouver la solution optimale ?

Solution :

Nous avons l'équilibre $\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^3 b_j = 420$.

La solution présentée est une solution de base réalisable.

Test d'optimalité par stepping stone :

Calculons les sommes algébriques des coûts pour les cases hors base :

$$\Delta_{12} = c_{12} - c_{11} + c_{21} - c_{22} = 80 - 30 + 100 - 200 = -50$$

$$\Delta_{13} = c_{13} - c_{11} + c_{21} - c_{23} = 80 - 30 + 100 - 100 = 50$$

$$\Delta_{31} = c_{31} - c_{32} + c_{22} - c_{21} = 50 - 100 + 200 - 100 = 50$$

$$\Delta_{33} = c_{33} - c_{23} + c_{22} - c_{32} = 200 - 100 + 200 - 100 = 200$$

$\text{Min}(\Delta_{ij}) = \Delta_{12} = -50$ (sur les cases d'hors base).

On considère la case (1, 2) : la valeur de la nouvelle composante de base est

$$\theta = \min(110, 50) = 50$$

Et la nouvelle solution est :

20 / 60	80 / 50	80 /	110
100 / 80	200 /	100 / 80	160
50 /	100 / 150	200 /	150
140	200	80	

Et on refait une itération avec cette nouvelle solution de base réalisable.

Calculons les sommes algébriques des coûts pour les cases hors base :

$$\Delta_{13} = c_{13} - c_{11} + c_{21} - c_{23} = 50$$

$$\Delta_{22} = c_{22} - c_{21} + c_{11} - c_{12} = 50$$

$$\Delta_{31} = c_{31} - c_{32} + c_{12} - c_{11} = 0$$

$$\Delta_{33} = c_{33} - c_{23} + c_{21} - c_{11} + c_{12} - c_{32} = 150$$

Puisque on a $\Delta_{31} = 0$, alors on a une infinité de solutions optimales.

3.2 Problème du voyageur de commerce (PVC)

3.2.1 Définition

Le problème du voyageur de commerce, mieux connu sous le nom de Traveling Salesman Problem (TSP), est un des problèmes le plus étudié en recherche opérationnelle. Effectivement, il est à la base de tous les problèmes de tournées et a une multitude d'applications réelles. Ce problème consiste à trouver le chemin le plus court qui visite toutes les villes une et une seule fois tout en revenant au point de départ. Il se définit mathématiquement comme ceci. [7, 8]

3.2.2 Formulation mathématique

Les différents paramètres nécessaires pour effectuer la formulation mathématique du problème du voyageur de commerce sont :

d_{ij} distance entre les villes i et j .

n nombre de villes.

x_{ij} variable binaire qui prend la valeur **1** si la ville i est visitée immédiatement avant la ville j .

Si non, cette variable prend la valeur **0**.

Les contraintes du problème sont :

$$\text{a) } \sum_{j=1, j \neq i}^n x_{ij} = 1 \quad i = \overline{1, n} \quad (2)$$

Cette contrainte assure qu'on ne sort qu'une seule fois de chacun des sommets (villes).

$$\text{b) } \sum_{i=1, i \neq j}^n x_{ij} = 1 \quad j = \overline{1, n} \quad (3)$$

La contrainte (3) vérifie que l'on entre seulement une fois à chaque point.

Ces deux contraintes (2) et (3) permettent donc de visiter tous les points une et une seule fois. Par contre, si on ne va pas ajouter la quatrième contrainte des sous-tours se fermeront. La contrainte suivante élimine donc tous les sous-tours possibles.

$$c) \sum_{(i,j) \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall S \quad (4)$$

$|S|$ dénote la cardinalité de l'ensemble S . Cette contrainte doit être décrite pour tous les sous-ensembles de S .

Alors le modèle mathématique du PVC est :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (1) \\ \sum_{j=1 | i \neq j}^n x_{ij} = 1 \quad i = \overline{1, n} \quad (2) \\ \sum_{i=1 | i \neq j}^n x_{ij} = 1 \quad j = \overline{1, n} \quad (3) \\ \sum_{(i,j) \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall S \quad (4) \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, n} \end{array} \right.$$

3.3 Le problème de tournées de véhicules (VRP)

3.3.1 Définition

Le problème de routage de véhicules est une extension du problème du voyageur de commerce. Il a été introduit pour la première fois par Dantzig et Ramser sous le nom « Truck Dispatching Problem » et a depuis fait l'objet d'études intensives pour le modéliser et le résoudre.

Dans sa version la plus basique dite « Capacitated VRP (CVRP) » ou VRP avec contraintes de capacité, une flotte de véhicules de capacité finie, basée dans un dépôt, doit assurer des tournées entre plusieurs clients (ou villes) ayant demandé chacun une certaine quantité de marchandises. L'ensemble des clients visités par un véhicule désigne la tournée de celui-ci. Chaque client doit être desservi une et une seule fois et chaque tournée commence et se termine au dépôt.

L'objectif du CVRP est de minimiser le coût total, c'est-à-dire la somme des distances ou des temps de parcours des tournées, tout en respectant la contrainte de capacité des véhicules : la quantité de marchandises livrées sur une tournée ne doit pas dépasser la capacité du véhicule qui l'assure.

3.3.2 Modélisation du problème de tournées de véhicules

L'ensemble des paramètres nécessaires pour effectuer la formulation mathématique est :

n : nombre de sommets

m : nombre de véhicules (k)

D_k : capacité de véhicule (k)

T_k : temps maximal de parcours du véhicule (k)

d_i : demande du sommet i ($d_1 = 0$)

t_i^k : temps nécessaire au véhicule (k) pour décharger ou charger au sommet i

t_{ij}^k : temps nécessaire au véhicule (k) pour traverser l'arc (i, j)

c_{ij} : coût ou distance du sommet i au sommet j

Variables de décision :

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \text{ est parcouru par le client } (k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors le modèle mathématique est :

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \sum_{k=1}^m x_{ij}^k \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m x_{ij}^k = 1 \quad j = \overline{2, n} \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m x_{ij}^k = 1 \quad i = \overline{2, n} \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ip}^k - \sum_{j=1}^n x_{pj}^k = 0 \quad k = \overline{1, m}, p = \overline{1, n} \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n d_i \left(\sum_{j=1}^n x_{ij}^k \right) \leq D_k \quad k = \overline{1, m} \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n t_j^k \sum_{j=1}^n x_{ij}^k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij}^k x_{ij}^k \leq t_k \quad k = \overline{1, m} \quad (6)$$

$$\sum_{j=2}^n x_{1j}^k \leq 1 \quad k = \overline{1, m} \quad (7)$$

$$\sum_{i=2}^n x_{i1}^k \leq 1 \quad k = \overline{1, m} \quad (8)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m}$$

La fonction objective (1) consiste à minimiser le coût total de transport.

Les équations (2) et (3) assurent que chaque client soit servi par un et un seul véhicule.

La continuité d'une tournée est représentée par les équations (4) : un véhicule visitant un sommet doit en sortir.

Les équations (5) sont les contraintes de capacité d'un véhicule, celles de (6), les contraintes de durée totale d'une tournée.

Les équations (7) et (8) assurent le non dépassement de la disponibilité d'un véhicule.

3.3.3 Méthodes et techniques de résolution du VRP

Comme les autres problèmes d'optimisation combinatoire, le problème de routage de véhicules a été étudié et résolu par des méthodes exactes, des heuristiques spécifiques ainsi que par des métaheuristiques. Ces trois familles correspondent à la classification générale des méthodes de résolution.

3.3.3.1 Les méthodes approchées

Contrairement aux méthodes exactes, les méthodes approchées sont incomplètes : elles permettent de trouver des solutions mais ne garantissent en aucun cas l'optimalité de celles-ci. Les méthodes approchées sont composées de heuristiques et de métaheuristiques.

Les heuristiques

Par définition, une heuristique est un moyen de guider les choix que doit faire un algorithme pour réduire sa complexité vers la solution. Une heuristique est spécifique à un problème et ne peut pas être généralisée.

Les métaheuristiques

Les métaheuristiques peuvent être vues comme des heuristiques « puissantes et évoluées » dans la mesure où elles sont généralisables à plusieurs problèmes d'optimisation. Elles sont habituellement classées en fonction du nombre de solutions qu'elles manipulent.

Les approches heuristiques dans notre cas se répartissent en deux classes principales :

- Procédures de construction des tournées.
- Procédures d'affinage des tournées.

3.3.3.1 Procédure de construction des tournées

On définit un graphe $G = (X, U)$ où X est l'ensemble des clients et U est un ensemble des arcs du graphe, (c'est-à-dire $(i, j) \in U$) s'il représente le plus court chemin reliant directement le client i au client j .

L'un de ces algorithmes les plus connus est : la méthode du plus proche voisin.

Méthode du plus proche voisin

Le principe de cette méthode est de choisir arbitrairement un sommet, ce dernier c'est le premier sommet de la chaîne hamiltonienne qu'on va construire. Le sommet suivant est le sommet le plus proche du dernier choisi, qui n'appartient pas déjà à la chaîne. Joindre le sommet d'extrémité finale de la chaîne à celui d'extrémité initiale [9].

Cette méthode peut être adaptée au problème étudié avec de petites modifications, dont l'algorithme est le suivant :

Algorithme de plus proche voisin adapté au problème de VRP

Début

- a) Choisir un véhicule de la liste des véhicules disponibles ;
- b) Commencer la tournée à partir d'un sommet quelconque non visité (dans notre cas c'est le dépôt).
- c) **Répéter**
 - Trouver le sommet le plus proche du dernier sommet de la tournée et ajouter celle-ci en vérifiant la contrainte de capacité du véhicule et d'autres contraintes spécifiques au problème étudié ;

Jusqu'à aucune liaison ne soit possible

- d) **Si** la liste des clients non visités n'est pas vide **alors**

- Si** la liste des véhicules est non épuisée **alors**

- Aller en a)

- Sinon** afficher « Manque de véhicules »

- Fin.**

Fin

3.3.3.1.2 Procédure d'affinage des tournées

Il est d'usage d'essayer d'améliorer une solution réalisable générée pour tout problème d'optimisation combinatoire. Aussi, certaines méthodes d'amélioration des tournées du TSP (problème de voyageur de commerce) ont été élaborées. Puisque une solution réalisable d'un VRP peut être vue comme un ensemble de tournées (plusieurs TSP), ces procédures peuvent être adaptées au VRP, nous présentons quelques-unes des plus utilisées.

Méthode de 2-Optimalité

La méthode 2-Optimalité consiste à échanger (permuter) deux branches ou arcs dans une tournée, jusqu'à aboutir à une solution que l'on ne peut plus raffiner [9, 10].

3.4 Livraison de fioul

Problème

Un transporteur doit livrer du fioul à un certain nombre de clients à partir de la raffinerie d'Alger. Ses clients se situent à Sétif, Constantine, Bouira, Bordj Bou Arreridj, Jijel et M'Sila.

Le Tableau III.1 contient les demandes en litres pour les différents sites de ce problème. La matrice des distances en kilomètres séparant les clients et la raffinerie est donnée au Tableau III.2.

Alger	Sétif	Constantine	Bouira	Bordj Bou Arreridj	Jijel	M'Sila
0	10 000	8 000	7 000	15 000	14 000	5 000

Tableau III.1- Demandes des sites (en litres).

	Alger	Sétif	Constantine	Bouira	Bordj Bou Arreridj	Jijel	M'Sila
Alger	-	278	390	123	197	304	237
Sétif	278	-	125	182	73	155	233
Constantine	390	125	-	288	193	132	249
Bouira	123	182	288	-	96	214	132
Bordj Bou Arreridj	197	73	193	96	-	193	60
Jijel	304	155	132	214	193	-	226
M'Sila	237	233	249	132	60	226	-

Tableau III.2- Distancier (en km).

Pour faire ses livraisons, le transporteur dispose de camions-citernes pouvant contenir jusqu'à 45 000 litres. Déterminer les tournées à réaliser pour livrer tous les clients de façon à minimiser le nombre de kilomètres parcourus.

3.4.1 Modélisation

Soit des variables binaires x_{ij} valant **1** si la ville i est avant la ville j dans une tournée, **0** sinon.

Notons n le nombre de villes, D_{ij} la distance séparant deux villes i et j , Q_i la quantité demandée par le client i .

Voici le modèle mathématique :

$$(1) \text{ Min } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} x_{ij}$$

$$(2) \quad \forall j = \overline{2, n} \quad \sum_{i=1, i \neq j}^n x_{ij} = 1$$

$$(3) \quad \forall i = \overline{2, n} \quad \sum_{j=1, j \neq i}^n x_{ij} = 1$$

$$(4) \quad \forall i = \overline{2, n} \quad Q_i \leq c_i \leq Q_{max}$$

$$(5) \quad \forall i = \overline{2, n} \quad c_i \leq Q_{max} - (Q_{max} - Q_i) x_{1i}$$

$$(6) \quad \forall j = \overline{2, n} \quad \forall i = \overline{2, n} \quad i \neq j$$

$$c_j \geq c_i + Q_j - Q_{max} + Q_{max} \cdot x_{ij} + (Q_{max} - Q_j - Q_i) x_{ji}$$

$$(7) \quad \forall i = \overline{2, n} \quad c_i \geq 0$$

$$(8) \quad \forall j = \overline{2, n} \quad \forall i = \overline{2, n} \quad i \neq j : x_{ij} \in \{0, 1\}$$

L'objectif est de minimiser le nombre de kilomètres parcourus (1).

Chaque ville doit être livrée en une seule fois. Ceci se traduit par les deux contraintes (2) et (3) qui imposent respectivement qu'on doit entrer une et une seule fois dans chaque ville (sauf le dépôt) et qu'on doit quitter chaque ville (sauf le dépôt) une et une seule fois.

Afin de respecter la capacité des camions-citernes, nous allons utiliser des variables c_i (c comme Cumul) correspondant à la quantité de fioul livrée aux différents clients le long du trajet allant du dépôt au client i inclus. Cette quantité c_i doit être supérieure à la quantité Q_i demandée par le client i et inférieure à la capacité Q_{max} des camions-citernes.

De plus, si le client i est le premier de la tournée, alors c_i doit être égale à la quantité demandée par le client i . Cette contrainte se traduit par les deux contraintes (4) et (5).

En effet, si i est le premier client d'une journée, alors x_{1i} vaut 1 et, après simplification, la contrainte (5) est équivalente à contrainte (5').

$$(5') \quad c_i \leq Q_i$$

Alors (5') et (4) implique que c_i est égale à la demande du client i .

Dans le cas où i n'est pas le premier de la tournée, x_{1i} vaut 0 et la contrainte (5) est équivalente à la contrainte (5''). Cette relation est redondante puisque déjà exprimée dans la contrainte (4).

$$(5'') \quad c_i \leq Q_{max}$$

Considérant maintenant le cas où i n'est pas le premier client de la tournée. Alors c_i doit être égale à la somme des quantités livrées entre le dépôt et i inclus. Ainsi, si le client j est après le client i sur une tournée, on peut écrire que c_j doit être égale à la quantité livrée sur le trajet du dépôt à i inclus, quantité à laquelle s'ajoute la quantité demandée par j . Cette relation est traduite par la contrainte (6).

En effet, si j est juste après i sur une tournée, x_{ij} vaut 1 et x_{ji} vaut 0. La contrainte (6) est équivalente à la contrainte (6').

$$(6') \quad c_j \geq c_i + Q_j$$

Dans le cas où j n'est pas juste après i , la contrainte (6) reste vérifiée.

En effet, dans le cas où j est juste avant i , la contrainte (6) devient (6'').

$$(6'') \quad c_j \geq c_i - Q_i$$

Cette contrainte signifie que la quantité livrée sur le trajet du dépôt à j est supérieure à la quantité livrée entre le dépôt et le successeur i de j sur la tournée, quantité à laquelle on doit retirer la quantité livrée en i .

Enfin, si i et j ne sont pas côte à côte sur une tournée, on obtient la contrainte (6'''). Comme elle a un second membre inférieur ou égale à Q_j , cette contrainte est redondante puisque déjà exprimée par la contrainte (4).

$$(6''') \quad c_j \geq c_i + Q_j - Q_{max}$$

Enfin, les contraintes (7) et (8) indiquent que les variables c_i sont positives et que les x_{ij} sont des variables binaires.

Notons pour terminer que l'affectation de variables c_i à chaque sommet i garantit le respect de la capacité des camions, tout en interdisant la création de tournées ne passant pas par le dépôt. En effet, sans ces variables, il serait possible d'obtenir une solution comme celle de la *Figure.III.1*

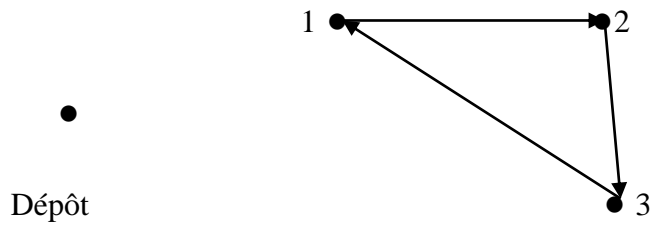


Figure.III.1 – Exemple de solution non réalisable.

Conclusion

Dans ce troisième chapitre, on a défini quelques modèles de transport classique qui seront utiles dans ce mémoire. On a donné un ensemble de définitions et de notations générales concernant ces modèles. A la fin, pour bien comprendre le travail, on a introduit un exemple pratique de fioul.

CHAPITRE 4

MODÉLISATION DE LA CHAÎNE DE TRANSPORT DES HYDROCARBURES

Un modèle mathématique est une traduction de la réalité pour pouvoir lui appliquer les outils, les techniques et les théories mathématiques.

Les problèmes d'organisation rencontrés dans une entreprise ne sont pas mathématiques dans leur nature. Mais les mathématiques peuvent permettre de résoudre ces problèmes. Pour cela, il faut traduire le problème dans un cadre mathématique, cadre dans lequel les techniques de la recherche opérationnelle pourront s'appliquer.

Cette traduction est le modèle du problème. Cette phase essentielle s'appelle la **modélisation**. La résolution d'un problème dépend crucialement du modèle choisi. Dans cette présente étude on cherche à optimiser le fonctionnement de la chaîne pétrolière allant de HEH à RTC (Béjaïa) avec les moyens du bord.

4.1 Loi de probabilité

En probabilités, nous utilisons beaucoup de mots du langage courant, mais ceux-ci revêtent un sens précis, il faut par conséquent les définir et les commenter.

4.1.1 Epreuve

On désigne par ce mot une expérience concrète : lancer un dé, prendre un objet au hasard pour en noter ses caractéristiques, prélever un échantillon d'une population en vue d'une observation quelconque.

4.1.2 Univers Ω des éventualités

C'est l'ensemble des résultats possibles d'une épreuve. Ainsi par exemple, en lançant un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6, a-t-on $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Le symbole Ω représente un ensemble fini et les éléments de cet ensemble sont appelés éventualités ou événement élémentaire.

4.1.3 Evènement

C'est un type de résultat pouvant se produire lors d'une épreuve. Il peut être caractérisé par une proposition logique et doit pouvoir se ramener sans ambiguïté à une partie de l'univers Ω .

Ainsi par exemple si on prend $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ l'évènement décrit par la proposition p « être pair » correspond à la partie $\{2, 4, 6\}$.

Indépendance : on dit que A, B sont deux évènements indépendants si :

$$P[A \cap B] = P[A] P[B].$$

4.2 Fiabilité et Maintenabilité

4.2.1 Fiabilité

Définition 1 : la fiabilité est l'aptitude ou la probabilité d'un dispositif à accomplir une fonction requise sous des conditions données dans un intervalle de temps donné. Il s'agit d'une probabilité, noté $R(t)$ [12].

Le terme « **dispositif** » est ici employé pour désigner tout composant, sous-système, système ou équipement que l'on peut considérer individuellement et essayer séparément.

Fonction requise : on entend une fonction ou un ensemble de fonctions d'une entité dont l'accomplissement est considéré comme nécessaire pour la fourniture d'un service donné.

Le calcul de $R(t)$ permet de connaître le pourcentage de chances qu'a un équipement de fonctionner sans panne pendant un temps donné.

Il est important de distinguer :

- La fiabilité opérationnelle (ou fiabilité observée ou estimée) qui résulte de l'observation et de l'analyse du comportement d'entités identiques dans des conditions opérationnelles.
- La fiabilité prévisionnelle (ou fiabilité prédite) qui estime une fiabilité future à partir des considérations sur la conception du système et la fiabilité de ses composants.
- La fiabilité intrinsèque est propre à un matériel et à un environnement donné et ne dépend que de ce matériel.

Définition 2 : la variable aléatoire T , généralement absolue continue, représente la durée de vie d'un dispositif (par exemple).

- Fiabilité à l'instant t : $R(t) = P(T > t)$.
- Fonction de répartition : $F(t) = P(T \leq t)$.
- Densité de défaillance : f densité de la loi T .

4.2.1.1 Indicateurs de fiabilité

Défaillance : c'est la cessation de l'aptitude d'une entité à accomplir une fonction requise.

Panne : la panne est « l'inaptitude d'une entité à accomplir une fonction « requise ». Après apparition d'une défaillance, on considère donc que l'entité est en panne ; une panne résulte toujours d'une défaillance.

4.2.1.1.1 Taux de défaillance

Définition : ou **taux de panne** est une expression relative à la fiabilité des équipements et de chacun de leurs composants. Son symbole est la lettre grecque λ .

Taux de défaillance constant : lorsque le taux de défaillance λ est constant, cela signifie que le risque de panne est totalement aléatoire ; on a un système dit « sans effet de mémoire », sans usure, il n'y a pas de cumul de dommage. C'est typiquement la situation des systèmes électroniques.

Dans ce cas, la probabilité de défaillance f suit une loi exponentielle. Le taux de défaillance est alors :

$$\lambda = \frac{\text{nombre total de défaillance pendant le service}}{\text{durée totale de bon fonctionnement}}$$

Où :

La durée totale de bon fonctionnement = la durée totale en service – la durée des défaillances.

4.2.1.1.2 Temps moyen de bon fonctionnement

Définition : la fiabilité peut se caractériser par la moyenne des temps de bon fonctionnement ou MTBF (Mean Time Between Failure). Il se calcule ainsi :

$$\text{MTBF} = \frac{\text{Temps de Bon Fonctionnement (TBF)}}{\text{nombre de défaillances}}$$

Remarque : si λ est constant, alors $\text{MTBF} = \frac{1}{\lambda}$

4.2.1.2 Fiabilité d'un système

Un système est constitué des composants élémentaires, sa fiabilité dépend à la fois de la fiabilité de ses composants et de la façon dont le bon fonctionnement ou la panne de chaque composant influe sur le fonctionnement ou la panne du système. Donc, l'objet de cette section est la détermination de la fiabilité de ses composants [12].

Fiabilité de système constitué de plusieurs composants :

- En série : on dit que le système est en série si la défaillance d'un seul de ses sous ensemble entraîne la défaillance du système totale (c'est-à-dire le système ne fonctionne que si tous ses composants fonctionnent).
- En parallèle : le fonctionnement de ce système est assuré si au moins un de ses composants est en bon état, le système sera en panne si et seulement si tous ses composants sont en panne simultanément.

4.2.1.3 Quelques lois de probabilités usuelles en fiabilité des systèmes

Loi exponentielle : est de loin la plus utilisée en fiabilité des systèmes. Un système dont le comportement stochastique est modélisé par une loi exponentielle est un système sans mémoire ou markovien, c.-à-d, pour $t > 0, x > 0$, on a $P(X > t + x / X > t) = P(X > x)$.

4.2.2 Maintenabilité

Définition : la maintenabilité est définie comme la probabilité qu'un système tombe en panne sera restaurée à un état de fonctionnement au cours d'une période de temps donnée quand la **maintenance** est exécutée selon les procédures et des ressources prescrites.

Maintenabilité = être rapidement dépanné

4.2.2.1 Indicateurs de Maintenabilité

4.2.2.1.1 MTTR (Mean Time To Repair)

La maintenabilité peut se caractériser par sa Moyenne des Temps Techniques de Réparation.

$$\text{MTTR} = \frac{\text{La somme des temps de pannes}}{\text{Nombre de pannes}}$$

4.2.2.1.2 Taux de réparation

Il est égale à l'unité de temps sur MTTR : $\mu = \frac{1}{\text{MTTR}}$

4.3 Etude de fiabilité de la chaîne pétrolière

La fiabilité est une discipline qui étudie les risques de défaillance d'un dispositif quelconque, c'est un peu la science des défaillances, qui fait appel à la fois à des théories mathématiques se perfectionnant sans cesse à des connaissances d'ordre technologique et à l'expérience [13].

Concernant notre étude, la condition $Q_{max} \geq d$ (le flot maximal trouvé doit être supérieure ou égale à la demande) est un évènement aléatoire dont la réalisation dépend de la mesure de l'efficacité et la performance des éléments principaux composants l'oléoduc.

La fiabilité est quantifiée par l'introduction de différentes grandeurs caractéristiques.

Pour cela la fiabilité de la ligne s'exprime par de la relation suivante :

$$R = \frac{\int_0^T Q(t) dt}{Q^{nom}(t) \int_0^T dt} \quad (1)$$

$Q(t)$: débit de la ligne

$Q^{nom}(t)$: débit nominal

L'amélioration de la fiabilité peut être obtenue par la réalisation de solutions purement techniques. Cependant, ces alternatives nécessitent l'élaboration de modèles mathématiques permettant d'évaluer leur impact en vue d'une prise de décision rationnelle.

4.3.1 Fiabilité opérationnelle

Sur la base des données statistiques issues de l'exploitation réelle du processus, la fiabilité opérationnelle de la ligne est :

$$R^{op} = \frac{c_r}{c_{nom}} \quad (2)$$

Avec :

c_{nom} : la capacité nominale de la ligne, sa formule est la suivante

$$c_{nom} = Q^{nom} \cdot T$$

c_r : la quantité de brut réellement transportée par la ligne, et donnée par

$$c_r = \sum_S Q_j \tau_j$$

Où :

T : durée d'expérimentation = $\sum_S \tau_j$

s : dimension de la gamme des débits de pompage de la ligne

τ_j : durée du pompage total (gammes)

Q_j : $j^{\text{ème}}$ débit de la gamme s

Pour **un réseau complet**, la fiabilité opérationnelle est donnée par l'expression suivante :

$$R^{op} = \frac{Q^{op}}{Q^{nom}} \quad (3)$$

Q^{op} : flot maximal du réseau en tenant compte des capacités réelles c_r

Q^{nom} : flot maximal du réseau en affectant à la ligne sa capacité nominale c_{nom}

$$\text{Avec : } c_r = R c_{nom}$$

La relation (3) est très utilisée en pratique, elle ne distingue pas les baisses du régime, dues aux pannes de celle volontaires dictées par les conditions d'exploitations.

4.3.2 Fiabilité intrinsèque

Par fonctionnement perturbé, il y a lieu de comprendre ici les arrêts intempestifs et volontaires dus aux pannes des équipements situés sur tout le parcours de la chaîne pétrolière OB1 (24''/22''). Ces perturbations se traduisent en particulier par un grand nombre d'arrêts / démarrages des composantes principales de l'oléoduc. Des arrêts / démarrages fréquents sont non seulement préjudiciables en termes de fiabilité mais également en termes de consommation énergétique.

La perte de performance due aux pannes de l'équipement peut se calculer comme suit :

$$K = \frac{1}{Q_i^{nom}} \sum_S P_i \cdot Q_i^{op} \quad (4)$$

Où :

Q_i^{nom} : débit nominal de la ligne

s : dimension de la gamme des débits du pompage de la ligne

Q_i^{op} : débit maximal de la ligne en présence de la panne i . ($Q_i^{op} < Q_i^{nom}$)

P_i : la probabilité de la panne i .

A chaque phase correspond un état de panne bien défini. La Fiabilité exprimée par l'intermédiaire de la relation (4) est appelée Fiabilité intrinsèque. La Fiabilité intrinsèque permet l'estimation de la fiabilité de dispositif, aussi bien en projet qu'en exploitation. Elle peut s'avérer très utile pour l'aide à la décision concernant l'extension ou l'amélioration des performances de sites existants.

4.3.3 Estimation des indices de fiabilité

Les indices de fiabilité des éléments constitutifs du pipeline sont :

- Le taux de défaillance λ (des pompes λ_p et des SP λ_{sp})
- Le taux de réparation μ (des pompes μ_p et des SP μ_{sp})

Taux de défaillance :

$$\lambda = \frac{\text{nombre total de défaillance pendant le service}}{\text{durée totale de bon fonctionnement}}$$

Durée moyenne de réparation :

$$\text{MTTR} = \frac{\text{La somme des temps d'intervention pour pannes}}{\text{Nombre de pannes}}$$

Taux de réparation :

$$\mu = \frac{1}{\text{MTTR}}$$

4.3.4 Calcul des probabilités de panne

Le calcul des probabilités de phase M_k et P_k se fera directement par l'intermédiaire des indices de fiabilité de ses principaux éléments (des pompes et des stations de pompage).

Supposons les quatre SP de l'OB1 sont identiques, avec l'utilisation de la règle de « k parmi $(n - 1)$ éléments indépendants », alors la probabilité d'avoir k SP hors service est :

$$M_k = \frac{C_{n-1}^k \cdot \lambda_{sp}^k \cdot \mu_{sp}^{n-k-1}}{(\lambda_{sp} + \mu_{sp})^{n-1}}$$

Chaque SP est constituée d'un nombre de pompes, assemblées en série ou en parallèle, et d'une ou deux pompes de réserve. Pour cela, on note par m le nombre de pompes principales et l le nombre de pompes de réserve.

Posons : $\gamma = \frac{\lambda}{\mu}$

Sur la base de la théorie de naissance et de mort, les différentes situations de panne sont calculées à l'aide du modèle suivant :

- Probabilité les m pompes principales et l pompes de réserve soient tous disponibles :

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^l m^k \frac{\gamma^k}{k!} + m^l \sum_{k=l+1}^{m+l} \frac{\gamma^k}{k!} \cdot \prod_{j=0}^{k-l-1} (m-j)}$$

- Probabilité que parmi $m + l$ pompes il y ait k pompes défailtantes est :

$$P_k = \begin{cases} \frac{\gamma^k}{k!} P_0 & \text{si } k \leq l \\ m^l \frac{\gamma^k}{k!} \prod_{j=0}^{k-l-1} (m-j) P_0 & \text{si } k > l \end{cases}$$

Ce modèle de fiabilité permet de quantifier l'impact de toute décision tendant à augmenter la fiabilité sur la valeur maximale du flux de la ligne.

4.4 Présentation du modèle mathématique

Le problème du flot maximal peut être exprimé comme un problème de programmation linéaire, c'est-à-dire comme une fonction linéaire à maximiser tout en respectant un certain nombre de contraintes linéaires. De nombreux problèmes autour de ce concept ont été modélisés et étudiés, parmi eux notre étude d'optimisation de la chaîne pétrolière OB1 (24''/22'').

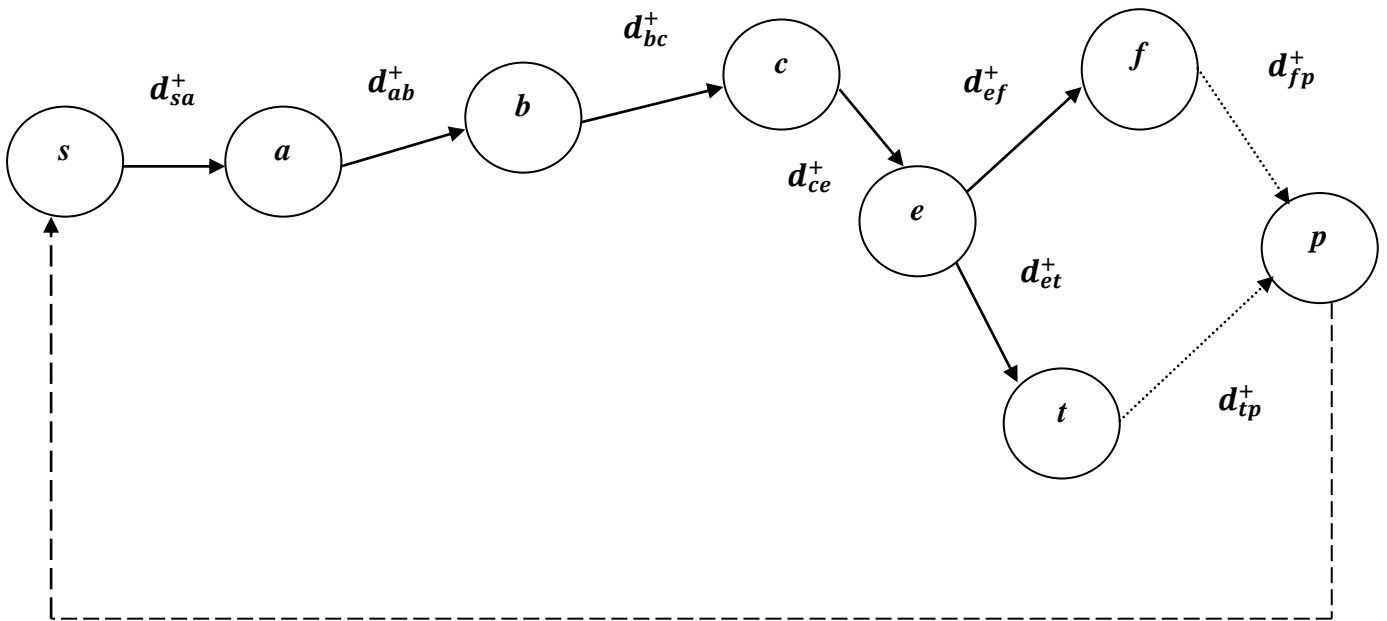


Figure. IV. 1 – Graphe du réseau HEH-Béjaïa de transport de brut.

Où chaque nœud représente :

s : SP1 (Haoud El Hemra).

a : SP1 Bis (Djamaa).

b : SP2 (Biskra).

c : SP3 (M'Sila).

e : la station de pompage de Beni-Mansour (SBM).

f : la raffinerie d'Alger.

t : Région Transport Centre (Béjaïa).

p : le sommet puits effectif.

Les données du problème

d_{ij}^- : la capacité minimale des flux (qui vaut zéro).

d_{ij}^+ : la capacité maximale des flux qu'on déterminera à partir du modèle de fiabilité précédent.

X : l'ensemble des nœuds.

Pour notre étude $X = (s, a, b, c, e, f, t, p)$.

U : l'ensemble des arcs.

Pour notre problème $U = \{(s, a), (a, b), (b, c), (c, e), (e, f), (e, t), (f, p), (t, p)\}$ avec (f, p) et (t, p) sont des arcs effectifs.

$\Gamma^+(j)$: l'ensemble des sommets sortant du sommet j .

$\Gamma^-(j)$: l'ensemble des sommets entrants au sommet j .

s : désigne un nœud qui s'appelle l'entrée du réseau ou la source.

p : désigne un nœud qui s'appelle la sortie du réseau ou le puits.

Les variables de décision

Q_{ij} : désigne les flux sur l'arc (i, j) , qui correspond à la quantité du brut circulant sur l'arc.

Les contraintes

- Contrainte de conservation de flot : la relation suivante exprime que la somme des flux entrant en un sommet est égale à la somme des flux sortant de ce sommet.

$$\text{Pour la source } s : \quad \sum_{i \in \Gamma^+(s)} Q_{si} = \nu \quad \nu \geq 0, \quad j = s$$

$$\text{Pour un sommet intermédiaire } j : \quad \sum_{i \in \Gamma^-(j)} Q_{ij} = \sum_{i \in \Gamma^+(j)} Q_{ji} \quad \forall j \in X \setminus \{s, p\}$$

$$\text{Pour le puits } p : \quad \sum_{i \in \Gamma^-(p)} Q_{ip} = \nu \quad \nu \geq 0, \quad j = p$$

Où : ν désigne la valeur du flot maximal.

- Contrainte de capacité : sur chaque arc, le flux est compris entre la capacité inférieure (qui vaut zéro) et supérieure (maximale).

$$0 \leq Q_{ij} \leq d_{ij}^+ \quad \forall i \in X \text{ et } \forall j \in X$$

- Contrainte de non négativité : les flux doivent être positifs ou nuls.

$$0 \leq Q_{ij} \quad \forall i \in X \text{ et } \forall j \in X$$

La fonction objectif

L'objectif à atteindre est de chercher un flot tel que la valeur ($\sum_{i \in \Gamma^+(s)} Q_{si}$) soit maximale.

Par conservation des flots, cette valeur est exactement aussi ($\sum_{i \in \Gamma^-(p)} Q_{ip}$).

La fonction objectif peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\max v(Q) = \sum_{i \in \Gamma^+(s)} Q_{si} = v$$

Voici le modèle obtenu :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max v & \\ \sum_{i \in \Gamma^+(s)} Q_{si} = v & v \geq 0, j = s \\ \sum_{i \in \Gamma^-(p)} Q_{ip} = v & v \geq 0, j = p \\ \sum_{i \in \Gamma^-(j)} Q_{ij} = \sum_{i \in \Gamma^+(j)} Q_{ji} & \forall j \in X \setminus \{s, p\} \\ 0 \leq Q_{ij} \leq d_{ij}^+ & \forall i \in X \text{ et } \forall j \in X \\ 0 \leq Q_{ij} & \forall i \in X \text{ et } \forall j \in X \end{array} \right.$$

4.5 Modèle non-linéaire d'extension du réseau

La solution dégagée par la résolution du problème du flot maximal n'est pas toujours unique. C'est le plus souvent une distribution de flux compatibles. D'autres variantes de distribution des flux peuvent donner la même valeur du flot maximal. La détermination d'une solution unique par la mise à profit des algorithmes classiques du flot maximal à coût minimum suppose des fonctions de coûts linéaires. Ces conditions ne sont pas remplies dans le cas du problème traité ici, en raison principalement de la non-linéarité des coûts d'énergie.

Dans ce type de problème, on considère le réseau de transport dont les arcs ont deux valeurs : une capacité et un coût. Le problème du flot maximal à coût minimal consiste à acheminer le flot maximal trouvé « v » de s à p de sorte à minimiser le coût total.

Formulation mathématique du problème

L'ensemble des paramètres nécessaires pour effectuer la formulation mathématique est :

d_{ij}^+ la capacité maximale des flux.

c_{ij} le coût de transport entre les clients i, j .

C_e le coût d'énergie de la ligne.

$$C_e = k (Q_{ce} \times Q_{et}) + k' (Q_{ce} \times Q_{ef})$$

Où k, k' : des coefficients de perte d'énergie, Q_{ce} , Q_{et} et Q_{ef} sont les flux des arcs (c, e) , (e, t) , (e, f) respectivement.

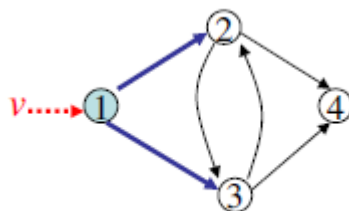
Variables de décision :

Q_{ij} la variable dénotant la valeur du flux dans l'arc (i, j) .

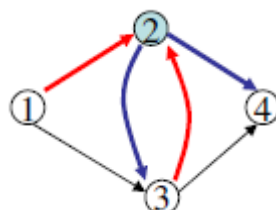
Les contraintes :

- Contrainte de conservation du flot : la contrainte de conservation du flot associée à un sommet j indique que la quantité totale du flot entrante dans le sommet doit être égale à celle sortante du sommet.

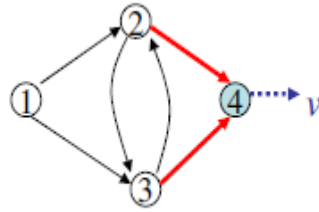
Pour la source s : $\sum_{i \in \Gamma^+(s)} Q_{si} = v$, $j = s$



Pour un sommet intermédiaire j : $\sum_{i \in \Gamma^+(j)} Q_{ji} - \sum_{i \in \Gamma^-(j)} Q_{ij} = 0, \forall j \in X, j \neq s, p$



Pour le puits p : $\sum_{i \in \Gamma^-(p)} Q_{ip} = \nu$, $j = p$



- Contrainte de capacité

$$0 \leq Q_{ij} \leq d_{ij}^+ \quad \forall i \in X \text{ et } \forall j \in X$$

La fonction objectif :

$$\Psi = \sum_{(i,j) \in U} c_{ij} Q_{ij} + C_e \rightarrow \min$$

Alors le modèle mathématique est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi = \sum_{(i,j) \in U} c_{ij} Q_{ij} + C_e \rightarrow \min \\ \sum_{i \in \Gamma^+(s)} Q_{si} = \nu \quad j = s \\ \sum_{i \in \Gamma^+(j)} Q_{ji} - \sum_{i \in \Gamma^-(j)} Q_{ij} = 0 \quad \forall j \in X, j \neq s, p \\ \sum_{i \in \Gamma^-(p)} Q_{ip} = \nu \quad j = p \\ 0 \leq Q_{ij} \leq d_{ij}^+ \quad \forall i \in X \text{ et } \forall j \in X \\ C_e = k (Q_{ce} \times Q_{et}) + k' (Q_{ce} \times Q_{ef}) \\ 0 \leq Q_{ij} , \quad 0 \leq c_{ij} \quad \forall i \in X \text{ et } \forall j \in X \end{array} \right.$$

Conclusion

Dans ce quatrième chapitre, en premier on a présenté quelques notions de base de probabilité, de la fiabilité et maintenabilité afin de les utiliser dans l'étude de fiabilité de la chaîne de transport OB1 (24'' / 22''). Ensuite, on a introduit notre problème du flot maximal qui est associé à un modèle non linéaire d'extension du réseau.

CHAPITRE 5

SIMULATION NUMERIQUE ET INFORMATIQUE

Logiciels (LINGO/Visual XPRESS)

La programmation est un ensemble d'outils et de technique permettant de résoudre des problèmes mathématiques par ordinateurs, elle sert à trouver une solution optimale de n'importe quel type de problèmes. Le processus de résoudre un problème mathématique exige un grand nombre de calculs donc il est mieux de l'exécuter par machine.

5.1 Logiciel LINGO

LINGO est un logiciel utilisé pour résoudre les problèmes d'optimisations linéaires, entières et quadratiques. Il est aussi utilisé pour résoudre les modèles d'optimisations globales non linéaires.

Une des caractéristiques de LINGO c'est qu'il offre des outils qui peuvent aider à l'analyse des modèles utilisant la méthode de simplexe et la méthode de Branch and Bound.

5.1.1 Description du logiciel

LINGO utilise quatre solveurs pour résoudre différents types de programmes mathématiques :

- Solveur direct
- Solveur linéaire
- Solveur non linéaire
- Méthode de type séparation et évaluation

Le modèle mathématique reçu par LINGO doit respecter le langage de modélisation associé. Les données transmises au solveur peuvent se faire soit d'une manière directe, soit à travers des fichiers intermédiaires.

Durant l'exécution d'un programme, LINGO commence par l'utilisation de son solveur direct qui détermine les valeurs des différentes variables. Une fois que l'affectation des variables est terminée, il affiche un rapport à propos de la solution. S'il existe des variables

indéterminées dans le modèle mathématique, LINGO détermine quels solveurs faut-il utiliser en examinant la structure du modèle à résoudre.

- Pour un modèle linéaire continu, LINGO appelle le solveur linéaire qui utilise la méthode du simplexe révisé avec une forme produit inverse.
- Si le modèle contient une ou plusieurs contraintes non linéaires, le solveur non linéaire est appelé. Ce dernier s'appuie sur les algorithmes de programmation linéaire successive et les algorithmes du gradient réduit. Dans le cas où le modèle contient des restrictions entières, un algorithme de type séparation et évaluation est invoqué.
- Les modèles entiers sont résolus en utilisant un algorithme de type séparation et évaluation ou de « découpe ». Ces découpes augmentent considérablement le temps de résolution de la plupart des modèles de programmation entière.

Environnement de travail de logiciel

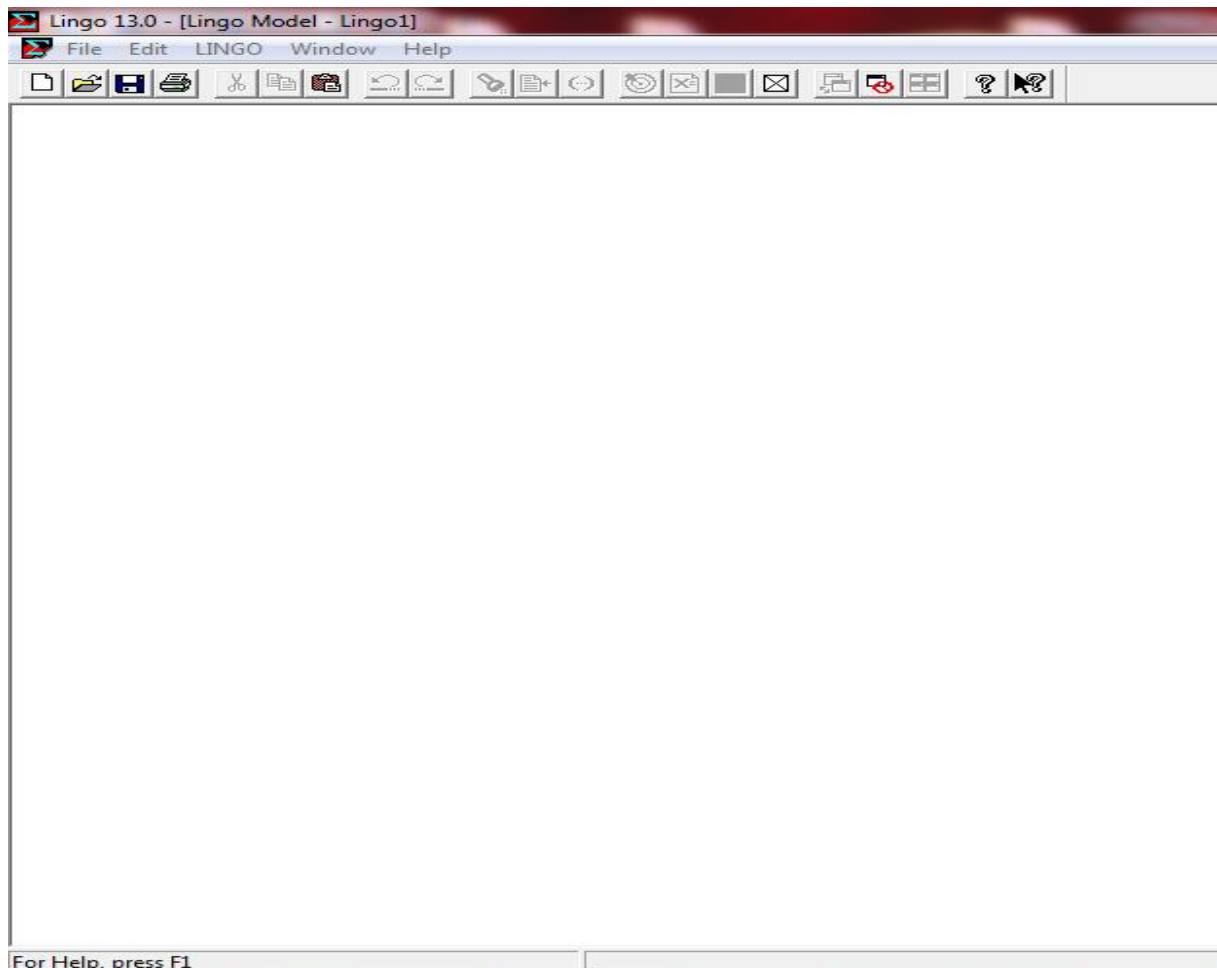
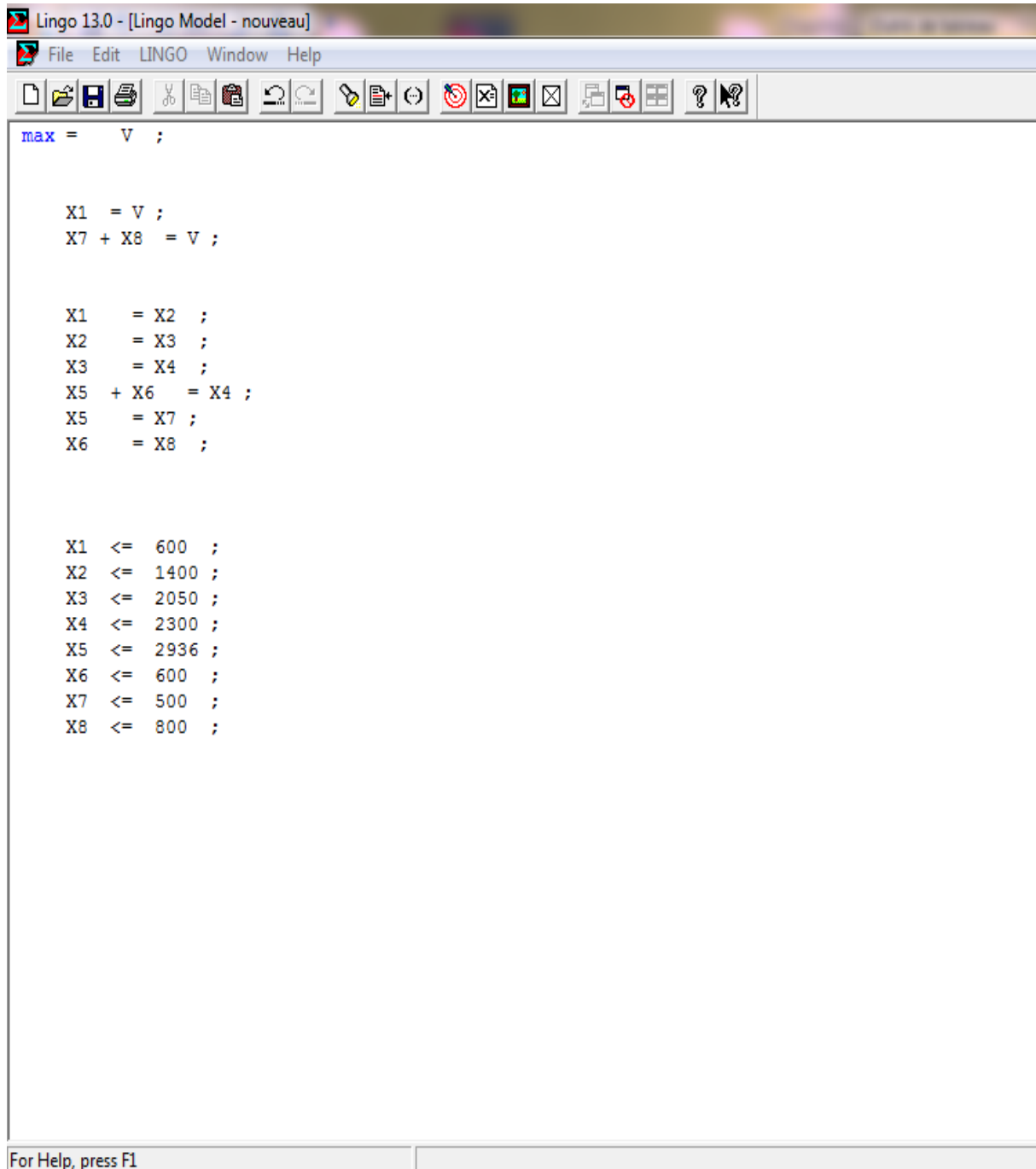


Figure.V.1 – Fenêtre principale du LINGO.

5.1.2 Résolution du modèle de flot maximal associé à un modèle non linéaire d'extension du réseau sur LINGO

En écrivant le modèle LINGO de notre problème du flot maximal sur la fenêtre principale, on aura la fenêtre représentée par la figure suivante :



Résultats

Lingo 13.0 - [Solution Report - nouveau]

File Edit LINGO Window Help

Global optimal solution found.

Objective value: 600.0000
 Infeasibilities: 0.000000
 Total solver iterations: 0

Model Class: IP

Total variables: 9
 Nonlinear variables: 0
 Integer variables: 0

Total constraints: 17
 Nonlinear constraints: 0

Total nonzeros: 27
 Nonlinear nonzeros: 0

Variable	Value	Reduced Cost
V	600.0000	0.000000
X1	600.0000	0.000000
X7	0.000000	0.000000
X8	600.0000	0.000000
X2	600.0000	0.000000
X3	600.0000	0.000000
X4	600.0000	0.000000
X5	0.000000	0.000000
X6	600.0000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	600.0000	1.000000
2	0.000000	-1.000000
3	0.000000	0.000000
4	0.000000	0.000000
5	0.000000	0.000000
6	0.000000	0.000000
7	0.000000	0.000000
8	0.000000	0.000000
9	0.000000	0.000000
10	0.000000	1.000000

Lingo 13.0 Solver Status [nouveau]

Solver Status

Model Class: IP
 State: Global Opt
 Objective: 600
 Infeasibility: 0
 Iterations: 0

Variables

Total: 9
 Nonlinear: 0
 Integers: 0

Constraints

Total: 17
 Nonlinear: 0

Nonzeros

Total: 27
 Nonlinear: 0

Generator Memory Used (K): 21

Elapsed Runtime (hh:mm:ss): 00:00:00

Extended Solver Status

Solver Type:
 Best Obj:
 Obj Bound:
 Steps:
 Active:

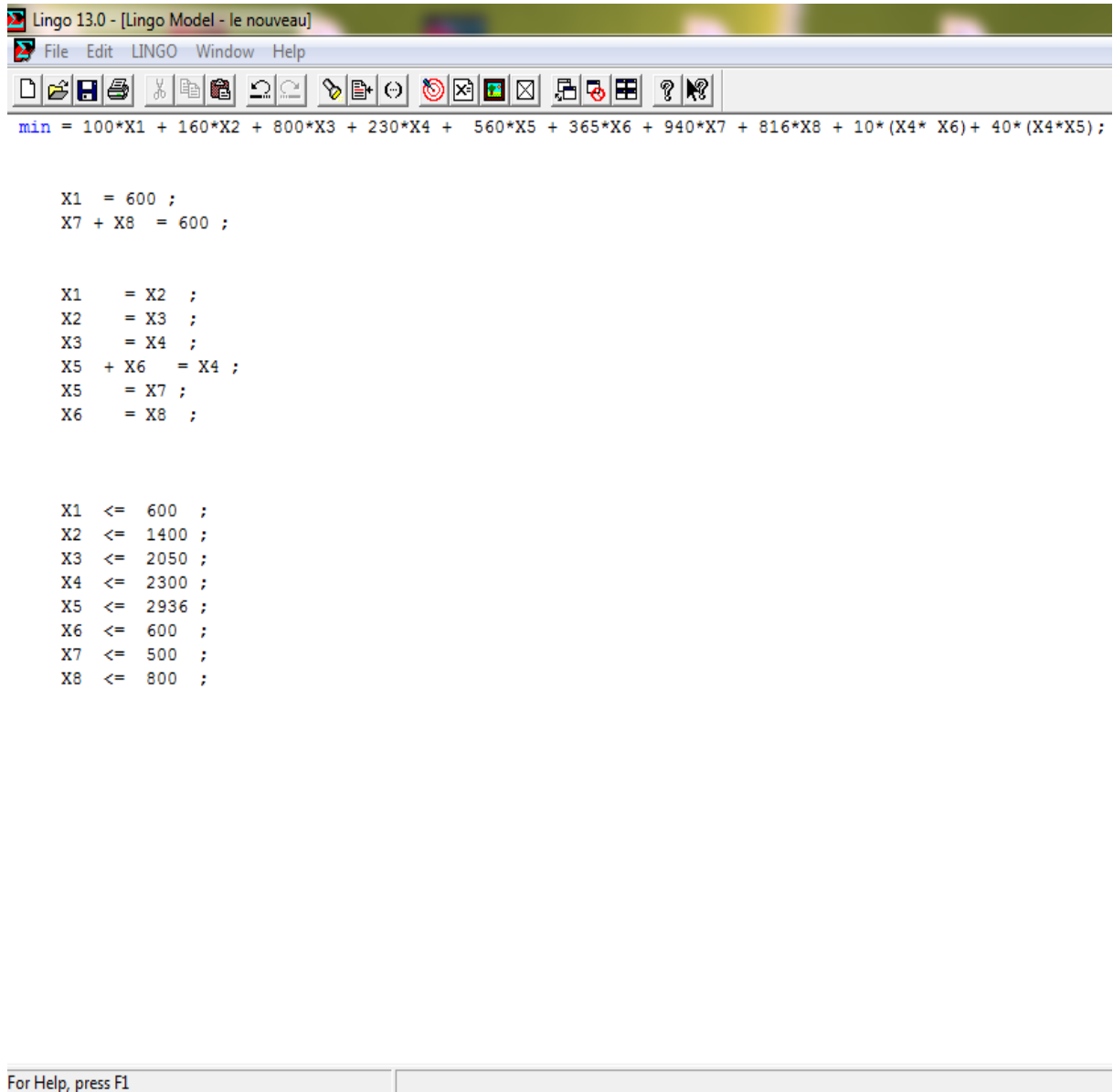
Update Interval: 2

Interrupt Solver Close

Print the active document

NUM

En écrivant le modèle LINGO de notre problème de programmation non linéaire associé au flot maximal sur la fenêtre principale, on aura la fenêtre représentée par la figure suivante :



Résultats

The screenshot shows the Lingo 13.0 Solver Status dialog box overlaid on a solution report. The dialog box provides a summary of the solver's performance and model characteristics.

Lingo 13.0 Solver Status [le nouveau]

- Solver Status:**
 - Model Class: LP
 - State: Global Opt
 - Objective: 5.0826e+006
 - Infeasibility: 0
 - Iterations: 0
- Variables:**
 - Total: 4
 - Nonlinear: 0
 - Integers: 0
- Constraints:**
 - Total: 13
 - Nonlinear: 0
- Nonzeros:**
 - Total: 16
 - Nonlinear: 0
- Generator Memory Used (K):** 21
- Elapsed Runtime (hh:mm:ss):** 00:00:00
- Extended Solver Status:**
 - Solver Type: . . .
 - Best Obj: . . .
 - Obj Bound: . . .
 - Steps: . . .
 - Active: . . .
- Update Interval:** 2
- Buttons:** Interrupt Solver, Close

The background window displays the solution report for a Linear Programming (LP) model. It indicates that a global optimal solution was found. The objective value is 5082600.0, and there are no infeasibilities or iterations. The model has 4 variables and 13 constraints. The solution values for variables X1 through X8 are all 600.0000, except for X7 which is 0.000000. The reduced costs for all variables are 0.000000, except for X7 which is 18319.00. The dual prices for the constraints are listed in the following table:

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	5082600.	-1.000000
2	0.000000	-13655.00
3	0.000000	-816.0000
4	0.000000	13555.00
5	0.000000	13395.00
6	0.000000	12595.00
7	0.000000	-6365.0000
8	0.000000	-18195.00
9	0.000000	0.000000
10	0.000000	0.000000
11	0.000000	0.000000

5.2 Logiciel Visual XPRESS

La résolution du problème de fioul se fera à l'aide d'un logiciel intitulé Visual XPRESS, étant donné la taille du (PL), il est difficile de le résoudre sans l'aide de la machine.

L'environnement de développement intégré de Visual XPRESS comporte des outils qui nous aiderons dans notre tâche de résolution.

5.2.1 Présentation du logiciel

C'est un logiciel qui comporte un langage de modélisation qui permet d'écrire les programmes linéaires sous une forme symbolique proche de l'écriture mathématique,

permettent ainsi de modifier les données, enlever ou rajouter des contraintes, comparer deux modèles, analyser la sensibilité des solutions par rapport aux données.

En lançant le programme on aura la fenêtre suivante :

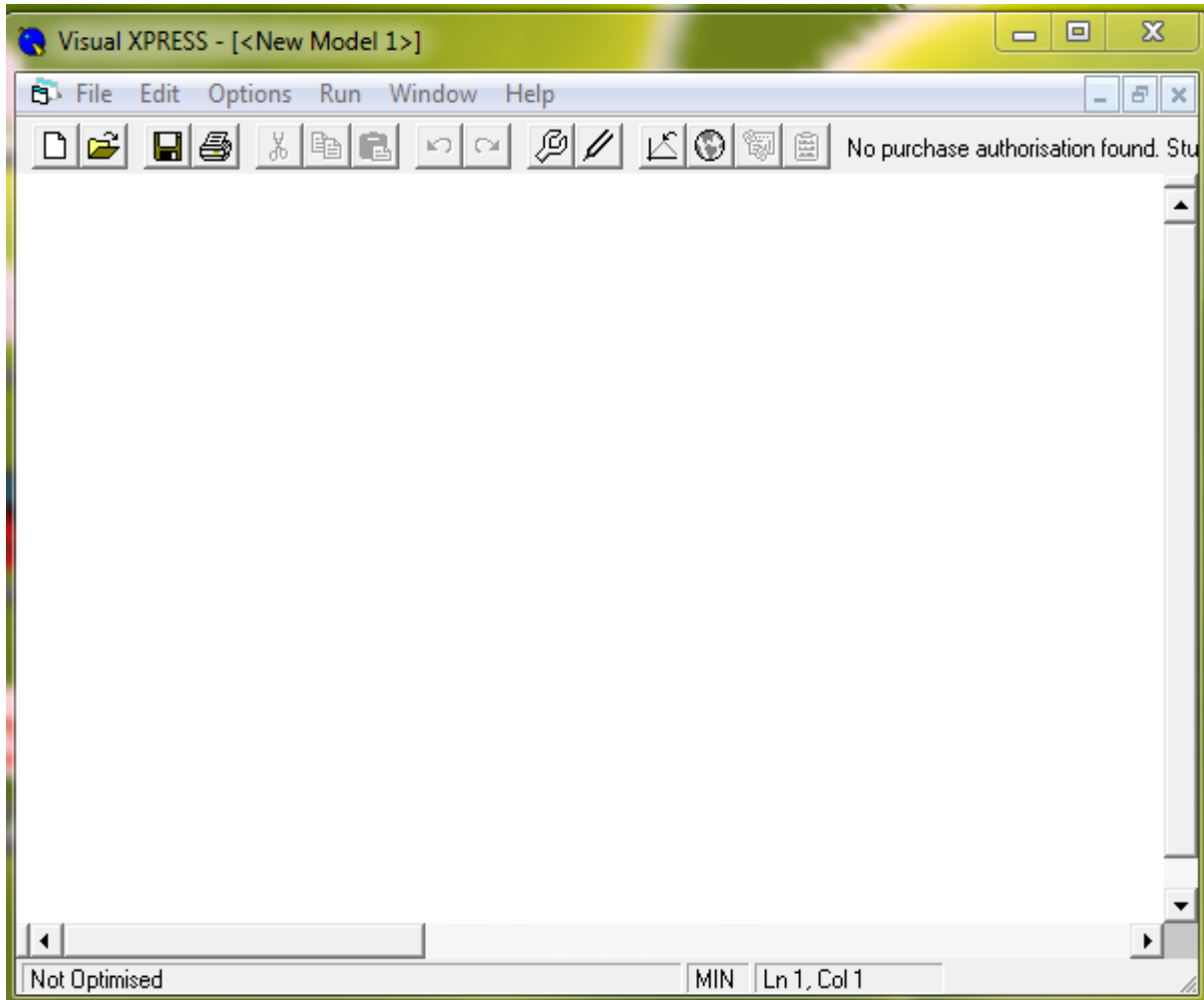


Figure.V.2 – Fenêtre principale de logiciel Visual XPRESS.

5.2.2 Modèle XPRESS de fioul

La traduction de ce problème linéaire en nombres entiers est donnée par le modèle E4Fioul. Les contraintes portant sur les valeurs minimales et maximales des variables ci ont été classées dans la section Bounds. Le distancier est stocké dans le fichier E4Distan.dat, la demande des clients dans E4Quanti.dat.

```

Visual XPRESS - [C:\Users\Solutions-IT\Desktop\les chapitres I, II et III\PbE\E4Fioul.mod]
File Edit Options Run Window Help
No purchase authorisation found. Student Edition

!-----
! Probleme de livraison de fioul
!-----

MODEL E4Fioul

LET

n      = 7           ! Nombre de clients + 1 (depot)

DATA

Qmax = 45000        ! Capacite max des camions

TABLES

D(n,n)             ! distances separant les clients
Q(n)               ! demandes des clients

DISKDATA

D      = E4Distan.dat
Q      = E4Quanti.dat

VARIABLES

X(i=1:n,j=1:n,|i<>j) ! X(i,j)=1 si i est juste avant j dans une tournée, 0 sinon
C(n)      ! C(i) est la quantite livree avant d'arriver a la ville i

CONSTRAINTS ! Objectif : minimiser le nombre de km parcourus

kilometres           : Sum(i=1:n,j=1:n|i<>j)D(i,j)*X(i,j)$

! on entre dans chaque ville une et une seule fois (sauf pour le depot)
enter(j=2:n)         : Sum(i=1:n|i<>j)X(i,j)=1

! on quitte une et une seule fois chaque ville (sauf le depot)
leave(i=2:n)         : Sum(j=1:n|i<>j)X(i,j)=1

Not Optimised      MIN  Ln 1, Col 1

```

```

Visual XPRESS - [C:\Users\Solutions-IT\Desktop\les chapitres I, II et III\PbE\E4Fioul.mod]
File Edit Options Run Window Help
No purchase authorisation found. Student Edition

DISKDATA

D = E4Distan.dat
Q = E4Quanti.dat

VARIABLES

X(i=1:n,j=1:n,|i<>j) ! X(i,j)=1 si i est juste avant j dans une tournée, 0 sinon
C(n) ! C(i) est la quantité livrée avant d'arriver à la ville i

CONSTRAINTS ! Objectif : minimiser le nombre de km parcourus

kilometres : Sum(i=1:n,j=1:n|i<>j)D(i,j)*X(i,j)$

! on entre dans chaque ville une et une seule fois (sauf pour le depot)
enter(j=2:n) : Sum(i=1:n|i<>j)X(i,j)=1

! on quitte une et une seule fois chaque ville (sauf le depot)
leave(i=2:n) : Sum(j=1:n|i<>j)X(i,j)=1

! Si i est le premier client d'une tournée, alors C(i)=Q(i)
First(i=2:n) : C(i)<Qmax-(Qmax-Q(i))*X(1,i)

! Si j est juste après i sur une tournée, alors C(j) est supérieur à la quantité livrée le
! long du parcours du depot à i + la quantité à livrer à j (permet d'éviter les boucles
! et de respecter la capacité du camion)
j_Apres_i(i=2:n,j=2:n|i<>j) : C(j)>C(i)+Q(j)-Qmax + Qmax*X(i,j)+(Qmax-Q(j)-Q(i))*X(j,i)

! Si i n'est pas le premier client d'une tournée, C(i) est supérieur à la somme des
! quantités à livrer à i et à son prédécesseur sur la tournée
!NotFirst(i=2:N):C(i)>Q(i)+Sum(j=2:N)Q(j)*X(j,i)

BOUNDS

C(i=2:n) < Qmax
C(i=2:n) > Q(i)
X(i=1:n,j=1:n|i<>j) .bv.

END

```

Not Optimised MIN Ln 1, Col 1

Résultats

The screenshot shows the Visual Xpress interface with a model named 'E4Fioul'. The model is defined as follows:

```

MODEL E4Fioul

LET

n = 7          ! Nombre de clients + 1 (depot)

DATA

Qmax = 45000   ! Capacité max des camions

TABLES

D(n,n)         ! distances separant les clients
Q(n)           ! demandes des clients

DISKDATA

D = E4Distan.dat
Q = E4Quanti.dat

VARIABLES

X(i=1:n,j=1:n,|i<>j) ! X(i,j)=1 si i est juste avant j
C(n)             ! C(i) est la quantité livrée à i

CONSTRAINTS ! Objectif : minimiser le nombre de km parcourus

kilometres      : Sum(i=1:n,j=1:n|i<>j)D(i,j)*X(i,j)$

! on entre dans chaque ville une et une seule fois (sauf pour le depot)
enter(j=2:n)    : Sum(i=1:n|i<>j)X(i,j)=1

! on quitte une et une seule fois chaque ville (sauf le depot)
leave(i=2:n)    : Sum(j=1:n|i<>j)X(i,j)=1
  
```

A 'Solve IP' dialog box is overlaid on the model, showing the following statistics:

Statistics		
Rows:	49	Columns: 162
Entities:	42	Non-Zeroes: 246
		Sets: 0
		Set Members: 0

Branch and Bound		
Node:	1231	Active Nodes: 0
Solution(s):	4	Best Bound: 1351
		Best Solution: 1351 at node: 160

Status
Search Complete - integer solutions found

The status bar at the bottom indicates 'IP Optimal' and 'MIN' with 'Ln 22, Col 85'.

La solution optimale consiste à faire deux tournées. La première dessert Bouira et M'Sila puis Bordj Bou Arreridj. La seconde livre en premier Sétif, puis Constantine pour terminer par Jijel. Dans la première tournée, 27 000 litres de fioul sont livrés, 32 000 dans la seconde. Les tournées sont représentées sur *Figure.V.3*. Le nombre total de kilomètres parcourus est 1351.

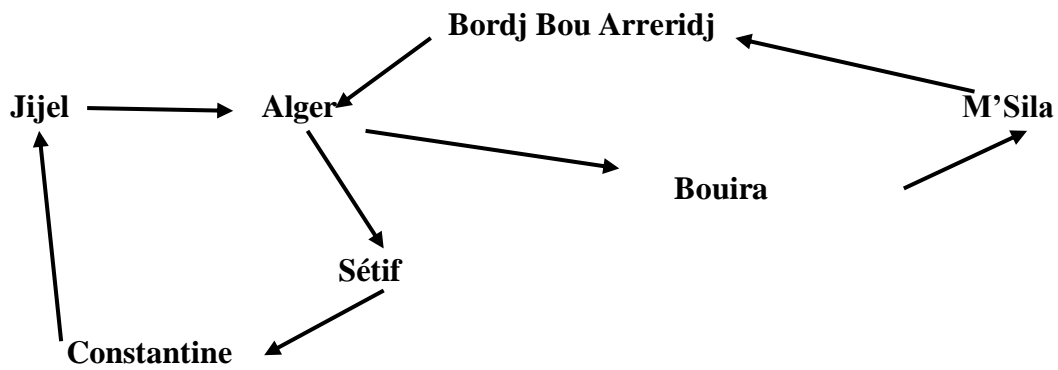


Figure.V.3 – Tournées optimales.

Conclusion

On a vu dans ce chapitre comment insérer un model d'exécution d'un problème sur LINGO et même sur Visual XPRESS. LINGO fait appel au « solveur global » après l'exécution on a directement le minimum global ou maximum globale et la valeur optimale de la fonction objectif.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Les problèmes de transport par canalisation des hydrocarbures relèvent des problèmes très complexes et leurs résolutions ont fait l'objet de plusieurs études.

Parmi les composantes essentielles du système, il y a le phénomène des retards signalés dans le transport des quantités destinées à l'exportation, les arrêts de la ligne OB1 dues à un sur stockage au niveau du terminal TMB et les réductions des débits au niveau du pipe. Ces perturbations altèrent le fonctionnement normal de la chaîne pétrolière.

Nous avons étudié dans le cadre de ce mémoire le problème de transport des hydrocarbures par canalisation. Pour cela, dans le premier nous avons dressé un aperçu général sur l'existence de l'entreprise. Le second chapitre est consacré pour les rappels théoriques de la théorie des graphes et la programmation mathématique, qui seront nécessaires par la suite. Le troisième chapitre, on a présenté quelques modèles de transport classique et un exemple de pratique sur le fioul. Dans le quatrième chapitre, on a introduit la modélisation du flot maximal associée ; à un modèle local de fiabilité et à un modèle de non linéarité des coûts. Le dernier chapitre est réalisé pour appliquer nos modèles sur les deux logiciels LINGO et Visual XPRESS.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Site de SONATRACH : www.Sonatrach.com
- [2] Rapport annuel 2019 de RTC (Région Transport Centre (Béjaïa)), SONATRACH.
- [3] B. SADI, (2018-2019). *Théorie des graphes*, Cours de 1^{ère} année Master, U.M.M.T.O ; Tizi Ouzou.
- [4] N. BELHARRAT & Collectif, « *Théorie des graphes* » Pages Bleues & Bleues lignes Editions.
- [5] M. AZZOUG & S. MOUSSI, *Programmation mathématique multi-objectif et applications*, Mémoire de master recherche opérationnelle, Université UMMTO, (2018/2019).
- [6] M. CHEBBAH, (2018-2019). *Programmation par contrainte*, Cours de 1^{ère} année Master, U.M.M.T.O ; Tizi Ouzou.
- [7] M. Minoux & A. Billionnet, « *Informatique et recherche opérationnelle* », Université Pierre et Marie Curie- Paris 6, (1999 / 2000).
- [8] Cordeau J.F, Gendreau M, Laporte G, Potvin J-Y & Semet F, *A Guide to Vehicule Routing problem Heuristics*. Journal of the Operational Research Society (2002).
- [9] C. Berge, « *Graphes et hypergraphes* » Dunod Editions, Paris, Bruxelles, Montréal, (1973).

- [10] Beghouini Mohamed, Bouderbala Abdelkader. , *Problème de distribution du gaz butane au niveau d'Alger*. Projet de fin d'études. Département de Recherche Opérationnelle, U.S.T.H.B, 1996.
- [11] A. HAMAZ. (2016-2017). *Notions de probabilités*, Cours de 2^{ème} année licence, U.M.M.T.O ; Tizi Ouzou.
- [12] S. BENZAADA, D. FELIACHI. *La maintenance industrielle*, Alger : place centrale de Ben-Aknoun.
- [13] A. Smati, N. Zeraibi et M. C. Touabti. (2000). *Optimisation du réseau algérien de transport de brut et de condensat*.