MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI–OUZOU

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

THÈSE DE DOCTORAT

Filière : **Mathématiques**

Spécialité : **Mathématiques**

Option : **Recherche Opérationnelle**

Présentée par

Fatima HESSAS

Sujet :

ON GENERATING FUNCTIONS ASSOCIATED TO PATTERNS

Devant le jury d'examen composé de :

M.	Abdelghani	HAMAZ	Professeur	UMMTO	Président
M.	Mouloud	GOUBI	MCA	UMMTO	Rapporteur
M.	Mohamed	BOUALEM	Professeur	Univ. Bejaia	Examinateur
M.	Sadek	BOUROUBI	Professeur	USTHB	Examinateur
M.	Mohand	OUANES	Professeur	UMMTO	Examinateur
M.	Rachid	BOUMAHDI	MCA	E.N.S. Mathématiques	Examinateur

Année Universitaire : **2023/2024**

A la mémoire de ma très chère tante *Khalti Hammama*.

A mes chers parents qui ont toujours cru en moi.

A mes frères et sœurs pour leur amour et soutien.

A mon cher époux et mes trois enfants. Vous êtes ma plus belle histoire d'amour.

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au sein du Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA) de l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, sous la direction du Dr. Mouloud GOUBI que je remercie vivement d'avoir accepté d'encadrer ce travail et d'avoir donné de son temps pour sa concrétisation. Il m'a accueilli au sein de son équipe, m'a accordé toute sa confiance et m'a permis de travailler dans des conditions adéquates.

Je souhaite exprimer toute ma reconnaissance à Messieurs BOUALEM Mohamed, Professeur à l'Université de Bejaia, BOUROUBI Sadek, Professeur à l'Université des Sciences et Technologie Houari Boumedienne, OUANES Mohand, Professeur à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou et BOUMAHDI Rachid, Maître de Conférences à l'Ecole Nationale Supérieure de Mathématiques de Sidi Abdellah. Ils m'ont fait l'honneur de juger mon travail en tant qu'examinateurs et membres du jury. Je tient à remercier grandement M. Abdelghani HAMAZ, Professeur à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de ma soutenance de thèse.

Il me tient également à cœur d'exprimer ici toute ma gratitude et ma reconnaissance à Mme BEDOUHENE Fazia, Vice Doyenne Chargée de la Post-Graduation et de la Recherche Scientifique de la Faculté des Sciences. Sans son engagement et son dévouement à nous permettre de bénéficier d'une deuxième chance, tout cela n'aurait pas pu se réaliser.

Je tiens également à exprimer ma profonde amitié à Mme Noria Benkhemmou, Maître Assistante A au Département de Mathématiques. Elle a su me convaincre de me replonger dans la recherche. Son aide, sa bonne humeur et l'enthousiasme dont elle a fait preuve au quotidien m'ont été d'un grand apport tout au long de ce travail de thèse. Un grand merci particulier à mon époux pour son soutien moral et son expertise dans la rédaction scientifique.

Je n'oublierai pas les bons moments passés au sein de l'équipe de M. GOUBI au sein du LMPA. Mes pensées vont à : Farida, Nassima, Samir, Malika, ...Je leur souhaitent à tous de concrétiser leurs travail de thèse. Un grand merci à mes amies Lamia et Malha.

A ma famille et à tous mes proches, un grand merci pour tous les moments partagés avec vous et pour votre soutien continu malgré le poids des années.

Résumé

La notion de pattern (motif constitué d'une suite de symboles ou de lettres) est largement étudiée dans la littérature. Dans le cadre de ce travail de thèse, nous nous sommes interessés aux patterns apparaissant dans la théorie du langage, les appariements parfaits (perfects matchings) et les partitions d'ensembles. Les fonctions génératrices algébriques des suites de nombres sont les principaux outils utilisés dans notre contribution. Nous expliquons comment les nombres et polynômes de Bell, de Fibonacci et de Fibonacci généralisé peuvent être utilisés dans la théorie des patterns pour fournir des formules d'énumération efficaces. Dans la première partie de notre travail, nous nous sommes focalisés sur l'énumération des nombres de mots de longueur arbitraire contenant des patterns à partir d'un alphabet fini. Des relations de récurrence et des formules explicites sont extraites et proposées. De plus, nous revisitons le travail de Bloom et Elizalde sur l'énumération de l'évitement de patterns dans les appariements parfaits et les partitions afin de le compléter avec des relations de récurrence et des formules explicites.

Abstract

The notion of pattern is widely studied in the literature. In this paper we focus our attention on patterns appearing in language theory, perfect matchings and set partitions. Algebraic generating functions of sequences of numbers are the main tools used in our contribution. We explain how the Bell, Fibonacci, and generalised Fibonacci numbers and polynomials can be used in the theory of patterns that provide enumeration formulae. In the first part of our work we are interested in the enumeration of words of arbitrary length containing patterns from a finite alphabet. Recurrence relations and explicite formulae are extracted and proposed. Furthermore, we revisit the work of Bloom and Elizalde on the enumeration of pattern avoidance in perfect matchings and partitions in order to complete it with some recurrence relations and explicite formulae.

ملخص

تتم دراسة فكرة النمط (الذي يتكون من سلسلة من الرموز أو الحروف) على نطاق واسع في المنشورات العلمية. وكجزء من عمل هذه الأطروحة، كان إهتمامنا خاصا بالأنماط التي تظهر في نظرية اللغات والمطابقات المثالية وأقسام المجموعات. تعتبر الدوال المولدة الجبرية للتسلسلات الرقمية من الأدوات الرئيسية المستخدمة في عملنا. سنوضح كيف يمكن استخدام أرقام و كثيرات حدود بيل، فيبوناتشي وفيبوناتشي المعممة في نظرية الأنماط لتوفير صيغ تعداد فعالة. في الجزء الأول من عملنا، ركزنا على تعداد أعداد الكلمات ذات الطول العشوائي والتي تحتوي على أنماط من أبجدية محدودة، حيث يتم استخراج واقتراح علاقات تكرارية وصيغ صريحة. بالإضافة إلى ذلك، فإننا قمنا بإعادة النظر في عمل بلوم وإليزالد بشأن تعداد تجنب الأنماط في المطابقات المثالية و أقسام المجموعات لاستكمالها بعلاقات تكرارية وصيغ صريحة.

Table des matières

Introduction Générale

La théorie du langage formel, la théorie des graphes et les fonctions génératrices sont toutes des branches des mathématiques discrètes. Elles sont étroitement liées, en particulier dans le domaine de l'analyse combinatoire. La théorie du langage formel s'intéresse à l'étude des langages abstraits, qui sont définis par des ensembles de règles pour la construction et la manipulation de chaînes de symboles (ou *patterns*) tirés d'un alphabet qui peuvent ou non avoir une structure particulière. Il s'agit également de comprendre les propriétés de ces langages, telles que la complexité et l'expressivité, et de développer des algorithmes et des outils pour les utiliser [1,2]. Son étude permet de mieux comprendre la structure des langages et leurs mécanismes de génération. La théorie a de nombreuses applications en informatique, en linguistique et dans bien d'autres domaines, et joue un rôle central dans l'étude et la conception des langages de programmation, des compilateurs, des automates et du traitement du langage naturel [3–7]. La théorie des graphes est une discipline mathématique qui étudie les graphes, structures composées de sommets (ou nœuds) reliés par des arêtes (ou lignes ou arcs). Ce domaine s'intéresse à la compréhension des propriétés des graphes, telles que la connectivité et la planarité, ainsi qu'au développement d'algorithmes et d'outils permettant de les utiliser. La théorie des graphes a de nombreuses applications dans divers domaines liés aux patterns, à leurs croisements, imbrication et évitements dans des permutations de partitions d'ensembles ou d'appariement (ou *matchings*) [8–13].

Les fonctions génératrices sont, quant à elles, des outils mathématiques algébriques très puissants utilisés en analyse combinatoire pour obtenir des formules permettant de représenter et d'énumérer une suite de nombres ou d'objets sous la forme d'une fonction. Introduites par Abraham De Moivre, en 1730, pour résoudre le problème de récurrence de Fibonacci, ces fonctions se présentent sous la forme de séries de puissances formelles, dont les coefficients correspondent aux valeurs de la suite recherchée. Les fonctions génératrices ont montré leur efficacité dans la résolution de problèmes de comptage très compliqués avec un minimum d'efforts, dans différents domaines des mathématiques, que ce soit en analyse combinatoire et stochastique qu'en théorie des graphes et du langage [14–17]. En utilisant les outils du calcul et de l'algèbre pour représenter un langage formel sous la forme d'une fonction génératrice, on peut analyser sa structure et ses propriétés. Ils peuvent être utilisés pour déterminer le nombre de patterns d'une longueur donnée dans un langage, pour calculer la fonction génératrice du croisement du langage avec un autre langage, ou pour analyser le taux de croissance de la complexité d'un langage. L'étude des langages réguliers, c'est-à-dire ceux qui peuvent être reconnus par un automate à états finis, est une application importante des fonctions génératrices dans la théorie du langage. Ici, les fonctions génératrices sont utilisées pour représenter le langage comme une fonction rationnelle qui peut être manipulée à l'aide de la géométrie algébrique et des techniques d'analyse complexe. Le lien entre ces domaines vient du fait que de nombreux problèmes peuvent être formulés en termes de langages formels, de graphes ou de fonctions génératrices. Par exemple, le problème de la recherche du chemin le plus court entre deux sommets d'un graphe peut être formulé comme le problème de la recherche du chemin le plus court entre deux chaînes de caractères dans un langage formel [18]. Une autre partie de la théorie du langage consiste à analyser d'un point de vue mathématique les mots d'un alphabet donné, comme toute langue écrite, le système binaire des ordinateurs, le code génétique des cellules. Ces mots sont utilisés pour identifier différents types de modèles dans un ensemble donné de données. Bien qu'un même ensemble de données puisse contenir différents modèles, l'identification des mots indicateurs les plus importants peut nous aider à analyser et à organiser les données de manière plus efficace. Cela peut s'avérer particulièrement utile dans le domaine des mathématiques, où l'identification et la description de modèles sont essentielles pour résoudre des problèmes complexes.

Les fonctions génératrices sont aussi très exploitées dans l'énumération des permutations simples ou multiples. Ce type de classes de permutation font l'objet d'un intérêt de plus en plus croissant au cours des dernières décennies. Il s'agit notamment de classes contenant des patterns linéaires [19], cycliques [20, 21] consécutifs [22] et forts [23]. Plus récemment, les fonctions génératrices ont aussi été utilisées pour dénombrer les évitements de classes de permutation (ou *pattern-avoiding*) dans les appariements parfaits (*perfect matchings*) [24, 25]. En 2013, Bloom et Elizalde ont réalisé une étude sur ces évitements de patterns dans les appariements parfaits et partitions d'ensemble [15]. Ils ont, entre autres, donné les fonctions génératrices algébriques et quelques formules explicites des nombres $\#M_n(312)$ et $\#M_n(\sigma, \tau)$ d'appariements parfaits évitant un pattern particulier, ou une paire de patterns respectivement, ainsi que les nombres $\#P_n(\sigma, \tau)$ de partitions évitant une paire de patterns.

Dans le cadre de notre travail de thèse, nous nous sommes essentiellement intéressés aux deux domaines que sont la théorie de langage et les évitements de patterns. Dans le cadre de la théorie de langage, notre contribution est dans notre tentative d'apporter quelques réponses à une question bien précise : Étant donné un alphabet fini et un pattern fini dans cet alphabet, comment pouvons-nous énumérer les mots d'une taille donnée qui contiennent ce pattern ? Pour ce faire, là où l'analyse combinatoire de base n'est pas en mesure de le décrire, nous tirons profit des fonctions géneratrices pour proposer diverses relations de récurrence et formules explicites pour le dénombrement de ces mots. Nous exploiterons pour cela les suites de nombres et polynômes généralisés de Fibonacci. Dans la deuxième partie de notre travail nous essayerons d'apporter un complément de résultats à l'étude de Bloom et Elizalde [15] en exploitant les fonctions génératrices et les suites de polynômes de Bell afin de proposer des relations de récurrence et des formules explicites dans l'énumération des nombres $\#M_n(312)$, $\#M_n(\sigma, \tau)$ et $\#P_n(\sigma, \tau)$.

Ce manuscrit comporte principalement 3 chapitres. Dans le premier chapitre, les notions de base concernant les fonctions génératrices et leurs propriétés sont présentées. Ces fonctions génératrices sont appliquées aux cas des suites de nombres et polynômes de Fibonacci et Bell afin de les exploiter dans notre étude. Le deuxième chapitre est dédié à la première partie de notre travail concernant l'énumération des mots de taille donnée contenant un pattern à partir d'un alphabet fini. Notre étude, initialement mené dans le cas particulier d'un alphabet à 2 éléments, est généralisé au cas d'un alphabet de taille arbitraire. Dans le troisième chapitre, nous nous intéresserons aux partitions d'ensembles et appariement parfaits, plus particulièrement ceux évitant un pattern donné ou une paire de patterns. Nous présenterons nos résultats complétant les travaux de Bloom et Elizalde [15] par des relations de récurrence et formules explicites énumérant les évitements de patterns bien définis au niveau des appariements parfaits et des partitions. Nous terminerons par une conclusion générale et quelques perspectives.

Chapitre 1

Aperçu sur les fonctions génératrices

1.1 Introduction

Les fonctions génératrices sont un outil mathématique très puissant permettant de déterminer des formules explicites pour des suites de nombres, de fonctions ou de polynômes définies par des relations de récurrence, souvent plus ou moins complexes et pas du tout intuitives. Ainsi, lorsqu'il devient compliqué de déterminer la relation de récurrence pour certaines suites de nombres ou de polynômes, les fonctions génératrices prennent souvent le relai afin de donner des formules plus ou moins simples explicitant les n^{ième} nombres de ces suites à travers des séries de puissances dont les coefficients sont ces nombres que nous recherchons. On peut donc dire qu'une fonction génératrice n'est qu'une manière différente d'écrire ces nombres et polynômes. Une représentation imagée d'une fonction génératrice est celle donnée par Wilf dans son livre référence sur les fonctions génératrices [26]. La fonction génératrice y est décrite comme "*une corde à linge sur laquelle nous accrochons une suite de nombres à afficher*". Dans ce premier chapitre, nous présenterons un bref aperçu sur les fonctions génératrices, leurs propriétés de base ainsi que leurs applications dans la définition de certaines suites de nombres et de polynômes généralisés, à savoir les suites et polynômes de Fibonacci et les polynômes de Bell, qui nous seront très utiles pour la suite de notre travail.

1.2 Définition d'une fonction génératrice

La notion de fonction génératrice est donnée par la définition suivante :

Définition 1.1. *Soit $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de nombres réels.*

- *On appelle fonction génératrice* ***ordinaire*** *de la suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ toute fonction g pouvant s'écrire sous la forme d'une série formelle :*

$$g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_j z^j + \cdots .$$

- *On appelle fonction génératrice* ***exponentielle*** *de la suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ toute fonction g pouvant s'écrire sous la forme d'une série formelle :*

$$g(z) = a_0 + a_1 \frac{z}{1!} + a_2 \frac{z^2}{2!} + \cdots + a_j \frac{z^j}{j!} + \cdots .$$

Dans ce qui suit, on se contentera du terme "fonction génératrice" en parlant d'une fonction génératrice ordinaire. La fonction génératrice $g(z)$ est considérée comme une série formelle pouvant donner des relations entre les coefficients a_j, sans avoir à étudier sa convergence au sens analytique, comme il est bien expliqué dans [26].

Exemple 1.1. *Dans ce qui suit on donne quelques fonctions génératrices classiques :*

1. *La fonction génératrice de la suite $(3,\ 2,\ 1,\ 0,\ \cdots)$ est : $g(z) = 3 + 2z + z^2$.*
2. *La fonction génératrice de la suite $(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \cdots)$ est : $g(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \frac{1}{1-z}$.*
3. *La fonction génératrice de la suite $(1, -1,\ 1, -1,\ \cdots)$ est :*

$$g(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \frac{1}{1+z}. \tag{1.2.1}$$

4. *La fonction génératrice de la suite $(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1, \cdots)$ est :*

$$g(z) = 1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2n} + \cdots = \frac{1}{1-z^2}. \tag{1.2.2}$$

5. *La fonction génératrice de la suite $(1,\ a,\ a^2,\ a^3, \cdots)$ est :*

$$g(z) = 1 + az + a^2 z^2 + a^3 z^3 + \cdots + a^n z^n + \cdots = \frac{1}{1-az}. \tag{1.2.3}$$

1.3 Propriétés des fonctions génératrices algébriques

1.3.1 Opérations de base

Tout comme pour d'autres objets mathématiques, tels que les entiers et polynômes, il est important de définir certaines opérations basiques des fonctions génératrices comme la somme (ou soustraction), la multiplication par un scalaire, le produit, la dérivée, l'intégrale, ... [26]

La fonction symétrique de la fonction génératrice $g(z)$ est $-g(z)$. Elle est associée à la suite $(-a_1,\ -a_2,\ -a_3,\cdots)$. La somme de deux fonctions génératrices est donnée par la définition suivante.

Définition 1.2. *La somme de deux fonctions génératrices $g(z)$ et $h(z)$, associées à deux suites de nombres $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est la fonction génératrice :*

$$g(z)+h(z)=\sum_{j\geq 0}(a_j+b_j)\,z^j. \qquad (1.3.1)$$

Exemple 1.2. *Reprenons les deux suites de nombres dont les fonctions génératrices sont données par (1.2.1) et (1.2.2) . L'addition des deux fonctions génératrices associées à ces suites revient à sommer terme à terme ces deux suites :*

$$\begin{array}{cc} & (1,-1,\,1,-1,\,\cdots) \\ + & (1,\,0,\,1,\,0,\,1,\cdots) \\ & -----------\\ = & (2,-1,\,2,-1,\,\cdots) \end{array}$$

Cette nouvelle suite de nombres est générée par la fonction génératrice :

$$\begin{aligned} 2-z+2z^2-z^3+\cdots-\cdots &= 2\left(1+z^2+z^4+\cdots\right)-z\left(1+z^2+z^4+\cdots\right) \\ &= (2-z)\left(1+z^2+z^4+\cdots\right) \\ &= \frac{2-z}{1-z^2}. \end{aligned}$$

Cette fonction génératrice n'est autre que la somme des deux fonctions génératrices associées aux deux suites de nombres :

$$\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z^2} = \frac{2-z}{1-z^2}.$$

Définition 1.3. *La multiplication de la fonction génératrice $g(z)$, associées à la suite de nombres $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$, par un scalaire λ est la fonction génératrice :*

$$\lambda\, g(z) = \sum_{j\geq 0} \lambda a_j z^j. \tag{1.3.2}$$

Exemple 1.3. *Considérons à nouveau la suite de nombres générés par la fonction (1.2.2). En multipliant la fonction génératrice de cette suite par 3, on obtient la fonction génératrice :*

$$3\, g(z) = \frac{3}{1-z^2} = 3 + 3z^2 + 3z^4 + \cdots .$$

qui générera la suite de nombres $(3,\,0,\,3,\,0,\,3,\cdots)$ qui n'est autre que le produit du scalaire 3 par chaque terme de la suite $(1,\,0,\,1,\,0,\,1,\cdots)$.

Définition 1.4. *Pour une fonction génératrice $g(z)$, associées à la suite de nombres $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$:*

1. *sa dérivée est la fonction génératrice :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} g(z) = \sum_{j\geq 0} (j+1) a_{j+1} z^j. \tag{1.3.3}$$

2. *sa dérivée $\mathrm{n}^{\text{ième}}$ est la fonction génératrice :*

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} g(z) = \sum_{j\geq 0} \left(\prod_{k=1}^{n} (j+k) \right) a_{j+n} z^j. \tag{1.3.4}$$

Exemple 1.4. *Si l'on dérive la fonction génératrice associée à la suite de nombres $(1,\,1,\,1,\,1,\,\cdots)$ on obtient :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{1-z}\right).$$

soit :

$$1+2z+3z^2+\cdots+nz^{n-1}+\cdots=\frac{1}{(1-z)^2}.$$

La suite de nombres générés par la dérivée de la fonction génératrice de la suite $(1,\,1,\,1,\,1,\,\cdots)$ *est la suite de nombres* $(1,\,2,\,3,\,4,\,\cdots)$*. Plus généralement, la dérivée de la fonction génératrice* $g(z)$ *de la suite de nombres* $(a_0,\,a_1,\,a_{2,},\,a_3,\cdots)$ *est la fonction génératrice* $g'(z)$ *de la suite de nombres* $(a_1,\,2a_{2,},3a_3,\,\cdots)$*.*

Définition 1.5. *La primitive de la fonction génératrice* $g(z)$*, associées à la suite de nombres* $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$*, est la fonction génératrice :*

$$\int g(z)\,\mathrm{d}z=c_0+\sum_{j\geq 1}\frac{a_j}{j+1}z^{j+1}\,;\ c_0 \text{ constante arbitraire.} \tag{1.3.5}$$

Exemple 1.5. *Si l'on intègre la fonction génératrice associée à la suite de nombres* $(1,\,1,\,1,\,1,\,\cdots)$ *on obtient :*

$$\int\left(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots\right)\mathrm{d}z=\int\frac{1}{1-z}\mathrm{d}z.$$

soit :

$$c_0+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots+\frac{z^{n+1}}{n+1}+\cdots=-\ln(1-z)\,.$$

La suite de nombres générés par la primitive de la fonction génératrice de la suite $(1,\,1,\,1,\,1,\,\cdots)$ *est la suite de nombres* $\left(c_0,\,1,\,\frac{1}{2},\,\frac{1}{3},\,\frac{1}{4},\,\cdots\right)$*. Plus généralement, la primitive de la fonction génératrice* $g(z)$ *de la suite de nombres* $(a_0,\,a_1,\,a_{2,},\,a_3,\cdots)$ *est la fonction génératrice* $g(z)$ *de la suite de nombres* $\left(c_0,\,a_0,\,\frac{a_1}{2},\,\frac{a_2}{3},\,\cdots\right)$*.*

Nous définissons aussi une autre opération de base des fonctions génératrices qu'est le produit de convolution de deux fonctions génératrices appelé aussi *Produit de Cauchy* [26]. Il est donné par la définition suivante.

Définition 1.6. *Soient deux fonctions génératrices $g(z)$ et $h(z)$ associées à deux suites de nombres $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Le produit de convolution, appelé aussi produit de Cauchy, de ces deux fonctions est définit comme suit :*

$$g(z)\cdot h(z) = \left(\sum_{j\geq 0} a_j z^j\right)\left(\sum_{j\geq 0} b_j z^j\right) = \sum_{j\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}\right) z^j. \tag{1.3.6}$$

Il s'agit dans ce cas de multiplier tous les coefficients possibles qui font la puissance j. Ainsi, pour la puissance $j=0$, seul le coefficient a_0b_0 est possible. Pour la puissance $j=1$, seuls les coefficients a_0b_1 et a_1b_1 sont possibles et ainsi de suite.

Exemple 1.6. *Le produit de deux fonctions génératrices identiques générant la suite de nombres* $(1, 1, 1, 1, \cdots)$ *est :*

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j\geq 0} z^j\right)\left(\sum_{j\geq 0} z^j\right) &= \sum_{j\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{j}(1)\right) z^j\\ &= \sum_{j\geq 0}(j+1)\,z^j\\ &= 1+2z+3z^2+\cdots\\ &= \frac{1}{(1-z)^2}.\end{aligned}$$

La fonction génératrice obtenue est bien le produit des deux fonctions génératrices des suites identiques de nombres :

$$\left(\sum_{j\geq 0} z^j\right)\left(\sum_{j\geq 0} z^j\right) = \frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-z}.$$

L'addition et la multiplication de fonctions génératrices sont des lois de composition interne. L'ensemble G des fonctions génératrices, muni de ces deux lois, noté $(G,+,\cdot)$, est un anneau car :

- L'addition de deux fonctions génératrices est commutative : $\sum_{j\geq 0}(a_j+b_j)\,z^j = \sum_{j\geq 0}(b_j+a_j)\,z^j$.

- L'additions de fonctions génératrices est associative : $\sum_{j\geq 0}(a_j+(b_j+c_j))\,z^j = \sum_{j\geq 0}((a_j+b_j)+c_j)\,z^j$.

- La multiplication de fonctions génératrices est associative : $\left(\sum_{j\geq 0} a_j z^j\right)\left(\sum_{j\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{j} b_k c_{j-k}\right) z^j\right)$ $\left(\sum_{j\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}\right) z^j\right)\left(\sum_{j\geq 0} c_j z^j\right)$.

- Il existe un élément neutre $I(z) = \sum_{j\geq 0}(0)\,z^j = 0$ pour l'addition de fonctions génératrices et un élément neutre $J(z) = 1+\sum_{j\geq 1}(0)\,z^j = 1$ pour la multiplication des fonctions génératrices.

- Toute fonction génératrice $\sum_{j\geq 0} a_j z^j$ possède une fonction génératrice opposée $\sum_{j\geq 0}(-a_j)\,z^j$ par l'addition.

- La multiplication de fonctions génératrices est distributive par rapport à leur addition : $\sum_{j\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{j} a_k\,(b_{j-k}+c_{j-k})\right) z^j = \sum_{j\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{j}(a_k b_{j-k}+a_k c_{j-k})\right) z^j$ et $\sum_{j\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{j}(b_k+c_k)\,a_{j-k}\right) z^j = \sum_{j\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{j}(b_k a_{j-k}+c_k a_{j-k})\right) z^j$.

1.3.2 Inverse d'une fonction génératrice

Nous terminons par énoncer une autre propriété importante concernant l'inverse d'une fonction génératrice et sa condition d'existence.

Définition 1.7. *Soit une fonction génératrice $g(z)$ associée à la suite de nombres $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$. On dit que la fonction génératrice $h(z)$, associée à la suite de nombres $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$, est l'inverse de $g(z)$ si :*

$$g(z)\cdot h(z) = \left(\sum_{j\geq 0} a_j z^j\right)\left(\sum_{j\geq 0} b_j z^j\right) = 1.$$

La condition d'existence de cette fonction inverse est donnée par la proposition suivante :

Proposition 1.1. *Une fonction génératrice $g(z)$, associée à la suite de nombres $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$, est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$.*

Preuve. *On suppose que la fonction* $g(z) = \sum_{j\geq 0} a_j z^j$ *admet une fonction inverse* $h(z) = \sum_{j\geq 0} b_j z^j$ *tel que :*

$$\left(\sum_{j\geq 0} a_j z^j\right)\left(\sum_{j\geq 0} b_j z^j\right) = 1.$$

En appliquant la définition du produit de Cauchy, on obtient :

$$\sum_{j\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}\right) z^j = 1,$$

soit :

$$a_0 b_0 + \sum_{j\geq 1}\left(\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}\right) z^j = 1.$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} a_0 b_0 & = & 1 \\ \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} & = & 0\,;\; j \geq 1, \end{array}$$

d'où :

$$a_0 \neq 0.$$

Réciproquement, si $a_0 \neq 0$, *alors l'identité* $\left(\sum_{j\geq 0} a_j z^j\right)\left(\sum_{j\geq 0} b_j z^j\right) = 1$ *donne lieu au système d'équations :*

$$\begin{cases} a_0 b_0 & = 1 \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_j b_0 + a_{j-1} b_1 + \cdots + a_0 b_j & = 0 \end{cases}.$$

La fonction génératrice $g(z)$ *admet une fonction génératrice inverse unique définie par* $h(z) = \sum_{j\geq 0} b_j z^j$ *avec les coefficients* $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *vérifiant :*

$$\begin{cases} b_0 & = \dfrac{1}{a_0} \\ b_1 & = -\dfrac{a_1}{a_0^2} \\ b_2 & = -\dfrac{a_2}{a_0^2} + \dfrac{a_1^2}{a_0^3} \\ \vdots & \vdots \\ b_j & = -\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{j} a_k b_{j-k}}{a_0} \end{cases}.$$

$\square$

Exemple 1.7. *Si l'on reprend la suite de nombres* $(1, 1, 1, 1, \cdots)$ *ayant pour fonction génératrice* $g(z) = \dfrac{1}{1-z}$, *on vérifie bien que sa fonction inverse est* $h(z) = \sum\limits_{j \geq 0} b_j z^j$ *tel que* $b_0 = \dfrac{1}{a_0} = 1$, $b_1 = -\dfrac{a_1}{a_0^2} = -1$ *et* $b_j = 0$ *pour* $j \geq 2$. *D'où* $h(z) = 1-z$ *et* $g(z)\,h(z) = 1$.

1.3.3 Décalage des coefficients

Considérons la fonction génératrice $g(z)$, associée à la suite de nombres $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Si l'on multiplie la fonction $g(z)$ par z, on obtient une nouvelle fonction génératrice :

$$zg(z) = a_0 z + a_1 z^2 + a_2 z^3 + \cdots = \sum_{j \geq 0} a_j z^{j+1} = \sum_{j \geq 1} a_{j-1} z^j = \sum_{j \geq 1} b_j z^j.$$

Ainsi, pour tout $j \geq 1$, le j^{ième} coefficient de la suite de nombres $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$, associée à la fonction génératrice $zg(z)$, correspond au (j – 1)^{ième} coefficient de la suite de nombres $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$, associée à la fonction génératrice $g(z)$. On dit que la suite $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ décalée vers la droite.

Plus généralement, si l'on multiplie la fonction génératrice $g(z)$ par z^n, $n \geq 1$, la suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ générée par cette fonction sera décalée vers la droite de n positions. les n premiers nombres de la nouvelle suite $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ générée par $z^n g(z)$ seront nuls.

1.3.4 Coefficient binomial et binomial généralisé

L'exploitation des fonctions génératrices dans la résolution de nombreux problèmes d'énumération nous amènera à appliquer le théorème binomial, notamment dans le cas généralisé où l'exposant n'est pas un entier positif. Pour tous entiers non négatifs n et j, le coefficient binomial ordinaire est définit par :

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!}. \tag{1.3.7}$$

Il apparaît dans la formule binomiale de Newton :

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}. \tag{1.3.8}$$

Pour tout nombre réel α, on définit le factoriel descendant $(\alpha)_j$ (représentation de *Pochhammer)* donné par la relation suivante :

$$(\alpha)_j = \alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)\cdots(\alpha-j+1)\,.$$

Définition 1.8. *Soient le nombre réel α et le nombre entier non négatif j. Le coefficient binomial généralisé $\binom{\alpha}{j}$ est défini par :*

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{(\alpha)_j}{j!}, \tag{1.3.9}$$

avec $\binom{\alpha}{0} = 1$

Exemple 1.8. *Quelques valeurs de coefficients binomiaux généralisés sont donnés dans le tableau* (1.1) *:*

α	-1	-3	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
j	1	2	5	2	3	3
$\binom{\alpha}{j}$	-1	6	-6	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{128}$

Table 1.1 – Quelques valeurs de $\binom{\alpha}{j}$.

Le coefficient binomial généralisé $\binom{\alpha}{j}$ peut s'écrire en fonction du coefficient binomial ordinaire conformément à la proposition suivante.

Proposition 1.2. *Soient le nombre réel $\alpha = -n$ (n réel non négatif) et le nombre entier non négatif j. Le coefficient binomial généralisé $\binom{-n}{j}$ peut s'écrire :*

$$\binom{-n}{j} = (-1)^j \binom{n+j-1}{j}$$

Preuve. *La définition du coefficient binomial généralisé permet d'écrire :*

$$\begin{aligned}
\binom{-n}{j} &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-j+1)}{j!} \\
&= \frac{(-1)^j (n)(n+1)(n+2)\cdots(n+j-1)}{j!} \\
&= \frac{(-1)^j (n+j-1)(n+j)\cdots(n+2)(n+1)(n)}{j!} \\
&= \frac{(-1)^j (n+j-1)!}{j!\,(n-1)!} \\
&= (-1)^j \binom{n+j-1}{j}.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi le résultat désiré. □

Exemple 1.9. *Si l'on reprend l'exemple précédent du coefficient binomial généralisé $\binom{-3}{2}$ (voir tableau (1.1)), on retrouvera la même valeur en exploitant cette dernière propriété :*

$$\binom{-3}{2} = (-1)^2 \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

Après avoir défini les coefficients binomiaux généralisés, nous pouvons énoncer le théorème binomial généralisé comme suit.

Théorème 1.1. *Soient les nombres réels n et z. Alors :*

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{j\geq 0} \binom{\alpha}{j} z^j. \tag{1.3.10}$$

Preuve. *On considère la fonction génératrice :*

$$g(z) = (1+z)^{\alpha} = \sum_{j\geq 0} a_j z^J.$$

En utilisant la formule de Taylor-Young, le développement limité de $g(z)$, quand $z \longrightarrow 0$, est :

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{j\geq 0} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} z^j = 1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}z^j+\cdots.$$

Par identification termes à termes, on obtient :

$$a_j = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-j+1)}{j!} = \binom{\alpha}{j}.$$

On aboutit ainsi au résultat voulu :

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{j\geq 0} \binom{\alpha}{j} z^j.$$

□

Exemple 1.10. *La fonction génératrice de $(1-z)^{-1/2}$ peut s'écrire en exploitant le théorème 1.1 du binomial généralisé. En effet, on peut écrire que :*

$$(1+z)^{-1/2} = \sum_{j\geq 0} \binom{-1/2}{j} z^j.$$

En exploitant la proposition 1.2, on obtient :

$$(1+z)^{-1/2} = \sum_{j\geq 0} (-1)^j \binom{j-3/2}{j} z^j.$$

En remplaçant z par $-z$, on aboutit à :

$$(1-z)^{-1/2} = \sum_{j\geq 0} (-1)^{2j} \binom{j-3/2}{j} z^j = \sum_{j\geq 0} \binom{j-3/2}{j} z^j.$$

1.4 Nombres et polynômes de Fibonacci

Les nombres et les polynômes de Fibonacci sont des suites d'entiers et de polynômes très connus et très utilisés dans différents domaines des mathématiques, la théorie des nombres entre autres. On trouve énormément de travaux de recherche en rapport avec les suites et polynômes de Fibonacci dans la littérature mathématique [27–31]. Ces suites et leurs fonctions génératrices ont été exploitées dans le cadre de notre travail de thèse. Nous aborderons dans ce qui suit quelques notions de base sur ces suites et nous introduirons leurs fonctions génératrices ainsi que la manière, parfois différente, d'aboutir à la formule explicite exprimant ces nombres ou ces polynômes.

1.4.1 Fonction génératrice des nombres de Fibonacci

La suite de nombres de Fibonacci est définie comme suit.

Définition 1.9. *La suite des nombres de Fibonacci $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres satisfaisant la relation de récurrence, linéaire et homogène à coefficients constants, suivante :*

$$\begin{cases} F_0 &= 0, \quad F_1 = 1 \\ F_j &= F_{j-1} + F_{j-2}\ ;\ j \geq 2. \end{cases} \tag{1.4.1}$$

La suite de nombres de Fibonacci obtenue est $(0, 1, 1, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots)$. Cette suite de nombres peut paraître assez complexe et pas vraiment intuitive mais sa fonction génératrice est beaucoup plus simple à obtenir. Elle est donnée par le lemme suivant [27]

Lemme 1.1. *La fonction génératrice associée à la suite de nombres $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$, est :*

$$\sum_{j\geq 0} F_j z^j = \frac{z}{1-z-z^2}. \tag{1.4.2}$$

Preuve. *La fonction génératrice peut se développer comme suit :*

$$\sum_{j\geq 0} F_j z^j = F_0 + F_1 z + \sum_{j\geq 2} F_j z^j.$$

En remplaçant les termes de la suite $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *par leurs valeurs données par la relation* (1.4.1)*, celle-ci s'écrit comme suit :*

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geq 0} F_j z^j &= z + \sum_{j\geq 2} F_{j-1} z^j + \sum_{j\geq 2} F_{j-2} z^j \\
&= z + \sum_{j\geq 1} F_j z^{j+1} + \sum_{j\geq 0} F_j z^{j+2} \\
&= z + z\sum_{j\geq 1} F_j z^j + z^2 \sum_{j\geq 0} F_j z^j \\
&= z + z\left(\sum_{j\geq 0} F_j z^j - F_0\right) + z^2 \sum_{j\geq 0} F_j z^j \\
&= z + z\sum_{j\geq 0} F_j z^j + z^2 \sum_{j\geq 0} F_j z^j.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on peut écrire :

$$\left(1 - z - z^2\right) \sum_{j\geq 0} F_j z^j = z,$$

et aboutir finalement au résultat désiré. □

La fonction génératrice de la suite de nombres de Fibonacci va nous permettre d'aboutir à la formule explicite (dite *Formule de Binet*) du j$^{\text{ième}}$ terme de cette suite [32].

Théorème 1.2. *Le* j$^{\text{ième}}$ *terme de la suite de Fibonacci* $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *est donné par :*

$$F_j = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^j - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^j\right]. \tag{1.4.3}$$

Preuve. *Le dénominateur de la fonction génératrice de la suite* $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$*, donnée par l'équation* (1.4.2)*, admet deux solutions* $\varphi_1 = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *et* $\varphi_2 = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ *telles que* $\varphi_1\varphi_2 = -1$ *et* $\varphi_1 - \varphi_2 = -\sqrt{5}$*. La fonction génératrice peut alors s'écrire comme suit :*

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geq 0} F_j z^j &= -\frac{z}{(\varphi_1 - z)(\varphi_2 - z)} \\
&= -\frac{z}{\varphi_1\left(1-\frac{z}{\varphi_1}\right)\varphi_2\left(1-\frac{z}{\varphi_2}\right)} \\
&= \frac{z}{\left(1-\frac{z}{\varphi_1}\right)\left(1-\frac{z}{\varphi_2}\right)} \\
&= z\left(\sum_{j\geq 0}\left(\frac{z}{\varphi_1}\right)^j\right)\left(\sum_{j\geq 0}\left(\frac{z}{\varphi_2}\right)^j\right).
\end{aligned}$$

En exploitant le produit de Cauchy de deux fonctions génératrices, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geq 0} F_j z^j &= z\sum_{j\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{j}\left(\frac{z}{\varphi_1}\right)^k\left(\frac{z}{\varphi_2}\right)^{j-k}\right) \\
&= \sum_{j\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{j}\left(\frac{1}{\varphi_1}\right)^k\left(\frac{1}{\varphi_2}\right)^{j-k}\right)z^{j+1} \\
&= \sum_{j\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{j}\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^k\left(\frac{1}{\varphi_2}\right)^{j}\right)z^{j+1} \\
&= \sum_{j\geq 0}\left(\frac{1}{\varphi_2}\right)^j\left(\sum_{k=0}^{j}\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^k\right)z^{j+1} \\
&= \sum_{j\geq 0}\left(\frac{1}{\varphi_2}\right)^j\left(\frac{1-\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^{j+1}}{1-\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)}\right)z^{j+1} \\
&= \sum_{j\geq 0}\left(\frac{1}{\varphi_1\varphi_2}\right)^j\left(\frac{\varphi_1^{j+1}-\varphi_2^{j+1}}{\varphi_1-\varphi_2}\right)z^{j+1} \\
&= \sum_{j\geq 0}(-1)^{j+1}\left(\frac{\varphi_1^{j+1}-\varphi_2^{j+1}}{\sqrt{5}}\right)z^{j+1} \\
&= \sum_{j\geq 1}(-1)^{j}\left(\frac{\varphi_1^{j}-\varphi_2^{j}}{\sqrt{5}}\right)z^{j} \\
&= \sum_{j\geq 0}(-1)^{j}\left(\frac{\varphi_1^{j}-\varphi_2^{j}}{\sqrt{5}}\right)z^{j}.
\end{aligned}$$

En remplaçant les racines φ_1 et φ_2 par leurs valeurs on obtient :

$$\sum_{j\geq 0} F_j z^j = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{j\geq 0}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^j-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^j\right]z^j.$$

Le coefficient de rang j de la fonction génératrice est alors donné par :

$$F_j \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^j-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^j\right].$$

□

A première vue, il ne parait pas évident que les valeurs données par la Formule explicite de Binet soient bien des entiers positifs. C'est pourtant le cas. Cette formule permet de calculer plus efficacement les nombres de Fibonacci comparativement à la relation de récurrence. Elle permet aussi de mettre en évidence la croissance exponentielle de ces nombres. les vingt premiers nombres de la suite de Fibonacci, ainsi obtenus sont donnés par le tableau 1.2.

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_j	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
j	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
F_j	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181

Table 1.2 – Valeurs des vingt premiers nombres de Fibonacci.

Le terme $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ vérifie bien la propriété du nombre d'or ($\phi = 1 + \dfrac{1}{\phi}$). La formule de Binet s'écrit comme :

$$F_j = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\phi^j - (1-\phi)^j\right] = \frac{\phi^{2j}-(-1)^j}{\sqrt{5}\phi^j}.$$

A partir de cette dernière expression, on pourra facilement démontrer la proposition suivante :

Proposition 1.3. *Pour la suite de nombres $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$, on a :*

$$\lim_{j\to+\infty}\frac{F_{j+1}}{F_j} = \phi.$$

Si l'on exploitait les valeurs du tableau 1.2, on pourrait remarquer que cette propriété se vérifie bien pour $j \geq 13$.

Écriture binomiale des nombres de Fibonacci

Une autre formulation des nombres de Fibonacci est donnée par le lemme suivant.

Lemme 1.2. *Le* j$^{\text{ième}}$ *terme de la suite de Fibonacci* $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *est donné par l'écriture binomiale suivante :*

$$F_j = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \binom{j-l-1}{l}. \tag{1.4.4}$$

$\lfloor \alpha \rfloor$ désigne la partie entière du nombre α.

Preuve. *On reprend la fonction génératrice des nombres de Fibonacci.*

$$\sum_{j\geq 0} F_j z^j = \frac{z}{1-z-z^2} = z\, f(z),$$

où la fonction $f(z)$ *est donnée par :*

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{1-(z+z^2)} &= \sum_{i\geq 0} \left(z+z^2\right)^i \\ &= \sum_{i\geq 0} z^i (1+z)^i. \end{aligned}$$

En appliquant la formule du binôme pour $(1+z)^i$*, l'expression de* $f(z)$ *devient :*

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{i\geq 0} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} z^{i+k} \\ &= \sum_{k\geq 0} \sum_{i\geq k} \binom{i}{k} z^{i+k}. \end{aligned}$$

En considérant $j = i + k$*, on obtient :*

$$f(z) = \sum_{j\geq 0} \sum_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor \leq i \leq j} \binom{i}{j-i} z^j,$$

soit, en considérant $l = j - i$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{j\geq 0} \sum_{0\leq l\leq \lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{j-l}{l} z^j. \\ &= \sum_{j\geq 0} \tilde{F}_j z^j, \end{aligned}$$

tel que $\tilde{F}_j = \sum_{0\leq l\leq \lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{j-l}{l}$. *La fonction génératrice s'écrit alors comme suit :*

$$\begin{aligned} \frac{z}{1-z-z^2} = zf(z) &= \sum_{j\geq 0} \tilde{F}_j z^{j+1} \\ &= \sum_{j\geq 1} \tilde{F}_{j-1} z^j \end{aligned}$$

Les termes $\left(\tilde{F}_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ *sont les nombres de la suite de Fibonacci décalée* $(1, 1, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots)$ *tel que* $\tilde{F}_j = F_{j+1}$. *L'expression précédente devient alors :*

$$\frac{z}{1-z-z^2} = \sum_{j\geq 1} F_j z^j = \sum_{j\geq 0} F_j z^j,$$

avec $F_j = \tilde{F}_{j-1} = \sum_{0\leq l\leq \lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \binom{j-l-1}{l}$.

□

1.4.2 Suite des polynômes de Fibonacci à une variable

La suite de polynômes de Fibonacci à une variable est définie comme suit.

Définition 1.10. *Les polynômes de Fibonacci à une variable* $(F_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ *sont définis par la relation de récurrence, linéaire et homogène à coefficients variables, suivante :*

$$\begin{cases} F_0(x) &= 0, \quad F_1(x) = 1 \\ F_j(x) &= xF_{j-1}(x) + F_{j-2}(x) \ ; \ j \geq 2. \end{cases} \tag{1.4.5}$$

La suite de polynômes de Fibonacci obtenue est $(0,\, 1,\, x,\, x^2+1,\, x^3+2x,\, x^4+3x^2+1,\, \cdots)$. Nous remarquerons que la suite des nombres de Fibonacci n'est qu'un cas particulier de la suite de ces polynômes pour $x=1$ $(F_j = F_j\,(x=1))$. La fonction génératrice de cette suite de polynômes est donnée par le lemme suivant.

Lemme 1.3. *La fonction génératrice associée à la suite de polynômes de Fibonacci* $(F_j\,(x))_{j\in\mathbb{N}}$ *est :*

$$f\,(x,z) = \sum_{j\geq 0} F_j\,(x)\,z^j = \frac{z}{1-xz-z^2}. \tag{1.4.6}$$

Sa démonstration se fait de manière similaire que pour la fonction génératrice des nombres de Fibonacci. De même que pour les nombres de Fibonacci, cette fonction génératrice permet d'aboutir à la formule explicite de Binet donnant le j$^{\text{ième}}$terme de cette suite.

Théorème 1.3. *Le* j$^{\text{ième}}$*terme de la suite des polynômes de Fibonacci* $(F_j\,(x))_{j\in\mathbb{N}}$ *est donné par :*

$$F_j\,(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{4+x^2}}{2}\right)^j - \left(\frac{1-\sqrt{4+x^2}}{2}\right)^j\right]. \tag{1.4.7}$$

Preuve. .

Le dénominateur de la fonction génératrice de la suite $(F_j\,(x))_{j\in\mathbb{N}}$ *admet deux solutions* $\varphi_1\,(x) = -\dfrac{x+\sqrt{4+x^2}}{2}$ *et* $\varphi_2 = -\dfrac{x-\sqrt{4+x^2}}{2}$ *tel que* $\varphi_1\,(x)\,\varphi_2\,(x) = -1$ *et* $\varphi_1\,(x) - \varphi_2\,(x) = -\sqrt{4+x^2}$. *En suivant le même raisonnement que pour les nombres de Fibonacci, on aboutit à :*

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geq 0} F_j\,(x)\,z^j &= \sum_{j\geq 0}\left(\frac{1}{\varphi_1\,(x)\,\varphi_2\,(x)}\right)^j \left(\frac{\varphi_1^{j+1}\,(x) - \varphi_2^{j+1}\,(x)}{\varphi_1\,(x) - \varphi_2\,(x)}\right) z^{j+1} \\
&= \sum_{j\geq 0} (-1)^{j+1}\left(\frac{\varphi_1^{j+1}\,(x) - \varphi_2^{j+1}\,(x)}{\sqrt{4+x^2}}\right) z^{j+1} \\
&= \sum_{j\geq 1} (-1)^{j}\left(\frac{\varphi_1^{j}\,(x) - \varphi_2^{j}\,(x)}{\sqrt{4+x^2}}\right) z^{j} \\
&= \sum_{j\geq 0} (-1)^{j}\left(\frac{\varphi_1^{j}\,(x) - \varphi_2^{j}\,(x)}{\sqrt{4+x^2}}\right) z^{j}.
\end{aligned}$$

En remplaçant les racines φ_1 et φ_2 par leurs valeurs on obtient :

$$\sum_{j\geq 0} F_j\left(x\right)z^j = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\sum_{j\geq 0}\left[\left(\frac{1+\sqrt{4+x^2}}{2}\right)^j-\left(\frac{1-\sqrt{4+x^2}}{2}\right)^j\right]z^j.$$

Le coefficient de rang j *de la fonction génératrice est alors donné par :*

$$F_j\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{4+x^2}}{2}\right)^j-\left(\frac{1-\sqrt{4+x^2}}{2}\right)^j\right].$$

□

Écriture binomiale des polynômes de Fibonacci

Comme pour les nombres de Fibonacci, nous pouvons proposer une autre formulation binomiale des polynômes de Fibonacci donnée par le lemme suivant.

Lemme 1.4. *Le* $\mathrm{j}^{\text{ième}}$ *terme de la suite de polynômes de Fibonacci* $\left(F_j\left(x\right)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ *est donné par l'écriture binomiale suivante :*

$$F_j = \sum_{l=0}^{\left\lfloor\frac{j-1}{2}\right\rfloor}\binom{j-l-1}{l}x^{j-2l-1}. \tag{1.4.8}$$

Preuve. *En suivant le même raisonnement que pour les nombres de Fibonacci, on a :*

$$\sum_{j\geq 0} F_j(x)z^j = \frac{z}{1-xz-z^2} = z\,f\left(x,z\right),$$

tel que :

$$\begin{aligned} f\left(x,z\right) &= \sum_{i\geq 0}\left(xz+z^2\right)^i \\ &= \sum_{i\geq 0} x^iz^i\left(1+\frac{z}{x}\right)^i. \end{aligned}$$

En appliquant la formule du binôme pour $\left(1+\frac{z}{x}\right)^i$*, et en considérant le changement d'indice* $j = i + k$*, l'expression de* $f(x,z)$ *devient :*

$$f(x,z) = \sum_{j\geq 0} \sum_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor \leq i \leq j} \binom{i}{j-i} x^{2i-j} z^j,$$

puis, en considérant $l = j - i$ *:*

$$f(x,z) = \sum_{j\geq 0} \tilde{F}_j(x) z^j,$$

tel que $\tilde{F}_j(x) = \sum_{0\leq l\leq \lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{j-l}{l} x^{j-2l}$*. La fonction génératrice s'écrit alors comme suit :*

$$\begin{aligned} \frac{z}{1-z-z^2} = zf(x,z) &= \sum_{j\geq 0} \tilde{F}_j(x) z^{j+1} \\ &= \sum_{j\geq 1} \tilde{F}_{j-1}(x) z^j \end{aligned}$$

Les termes $\left(\tilde{F}_j(x)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ *sont les polynômes de Fibonacci décalés* $(1, x, x^2+1, x^3+2x, \cdots)$ *tel que* $\tilde{F}_j(x) = F_{j+1}(x)$*. L'expression précédente devient alors :*

$$\frac{z}{1-xz-z^2} = \sum_{j\geq 0} F_j(x) z^j,$$

avec $F_j(x) = \tilde{F}_{j-1}(x) = \sum_{0\leq l\leq \lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \binom{j-l-1}{l} x^{j-2l-1}$.

□

1.4.3 Suite des polynômes de Fibonacci généralisés à deux variables

Ozdemir et Simsek [33] ont réussi à construire des fonctions génératrices pour différents types de suite de polynômes bien connus, entre autres les polynômes de Fibonacci et de Jacobsthal [34]. Une nouvelle famille de polynômes généralisés à deux variables $\mathcal{G}_j(x,y;k,u,v)$ est ainsi définie.

Définition 1.11. *Soient les entiers positifs k, u et v et les variables réelles x et y. La famille de polynômes généralisés à deux variables est définie par les fonctions génératrices :*

$$H\left(z;x,y;k,u,v\right)=\sum_{j\geq 0}\mathcal{G}_{j}\left(x,y;k,u,v\right)z^{j}=\frac{1}{1-x^{k}z-y^{u}z^{u+v}}. \tag{1.4.9}$$

Notons qu'une fonction génératrice est définie pour chaque valeur de k, u et v. Notons également que nous retrouverons la fonction génératrice des polynômes de Fibonacci à une variable x dans le cas particulier $y=1$; $k=u=v=1$.

En utilisant l'identité (1.4.9), la formule explicite des polynômes $\mathcal{G}_j$ est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.4. *le* j^ième^ *polynôme de la famille de polynômes généralisés* $\left(\mathcal{G}_{j}\left(x,y;k,u,v\right)\right)_{k,u,v\in\mathbb{N}}$ *est donné par :*

$$\mathcal{G}_{j}\left(x,y;k,u,v\right)=\sum_{c=0}^{\left\lfloor\frac{j}{u+v}\right\rfloor}\binom{j-c\left(u+v-1\right)}{c}y^{uc}x^{jk-uck-vck}. \tag{1.4.10}$$

Preuve. *En suivant le même raisonnement que précédemment pour les nombres et les polynômes de Fibonacci, on a :*

$$H\left(z;x,y;k,u,v\right)=\frac{1}{1-x^{k}z-y^{u}z^{u+v}}=\frac{1}{1-\left(x^{k}z+y^{u}z^{u+v}\right)},$$

tel que :

$$\begin{aligned}H\left(z;x,y;k,u,v\right)&=\sum_{i\geq 0}\left(x^{k}z+y^{u}z^{u+v}\right)^{i}\\&=\sum_{i\geq 0}x^{ki}z^{ki}\left(1+\frac{y^{u}z^{u+v}}{x^{k}z}\right)^{i}.\end{aligned}$$

En appliquant la formule du binôme pour $\left(1+\frac{y^{u}z^{u+v}}{x^{k}z}\right)^{i}$, *et en considérant le changement d'indice* $j=m\left(u+v-1\right)+i$, *l'expression de* $H\left(z;x,y;k,u,v\right)$ *devient :*

$$H\left(z;x,y;k,u,v\right) = \sum_{j\geq 0}\sum_{\left\lfloor \frac{j}{u+v}\right\rfloor \leq i\leq j}\binom{i}{\frac{j-i}{u+v-1}}y^{u\left(\frac{j-i}{u+v-1}\right)}x^{ki-k\left(\frac{j-i}{u+v-1}\right)}z^{j},$$

puis, en considérant $c=\dfrac{j-i}{u+v-1}$ *:*

$$H\left(z;x,y;k,u,v\right) = \sum_{j\geq 0}\sum_{0\leq c\leq \left\lfloor \frac{j}{u+v}\right\rfloor}\binom{j-(cu+cv-1)}{c}y^{uc}x^{kj-uck-vck}z^{j}.$$

Comme on a :

$$H\left(z;x,y;k,u,v\right)=\sum_{j\geq 0}\mathcal{G}_j\left(x,y;k,u,v\right)z^j,$$

on obtient par identification :

$$\mathcal{G}_j\left(x,y;k,u,v\right)=\sum_{c=0}^{\left\lfloor \frac{j}{u+v}\right\rfloor}\binom{j-c\left(u+v-1\right)}{c}y^{uc}x^{jk-uck-vck}.$$

□

1.5 Polynômes exponentiels partiels de Bell

Tout comme les polynômes de Fibonacci, les polynômes de Bell sont très étudiés dans la littérature, notamment dans les problèmes combinatoires relatifs aux partitions d'ensembles et aux permutations des éléments d'ensembles, auxquels nous nous intéresserons dans la deuxième partie de notre travail [35–38]. Les polynômes exponentiels partiels de Bell sont définis comme suit [39].

Définition 1.12. *Les polynômes exponentiels partiels de Bell* $B_{n,k}\left(x_1,x_2,\cdots,x_{n-k+1}\right)$*, notés* $B_{n,k}$*, sont définis par la fonction génératrice :*

$$\sum_{n\geq k}B_{n,k}\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{k!}\left(\sum_{m\geq 1}x_m\frac{z^m}{m!}\right)^k \tag{1.5.1}$$

Les polynômes exponentiels partiels de Bell admettent une formule explicite donnant le $(\mathrm{n},\mathrm{k})^{\text{ième}}$ terme de cette suite de polynômes.

Définition 1.13. *Le terme de rang* (n,k) *de la suite de polynômes exponentiels partiels de Bell* $(B_{n,k})_{n\geq k}$ *est donné par :*

$$B_{n,k}=\frac{n!}{k!}\sum_{s_n(k)}\binom{k}{k_1,k_2,\cdots k_{n-k+1}}\prod_{r=1}^{n-k+1}\left(\frac{x_r}{r!}\right)^{k_r}, \tag{1.5.2}$$

où $s_n(k)$ *est l'ensemble des valeurs* $k_1,k_2,\cdots,k_{n-k+1}$*, solutions de :*

$$k_1+k_2+\cdots+k_{n+k-1}=k \quad et \quad k_1+2k_2+3k_3+\cdots+(n-k+1)\,k_{n-k+1}=n,$$

et :

$$\binom{k}{k_1,k_2,\cdots k_{n-k+1}}=\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_{n-k+1}!}.$$

Exemple 1.11. *Le polynôme exponentiel partiel de Bell de rang* $(3,2)$ *est donné par :*

$$B_{3,2}=\sum_{s_n(k)}\frac{3!}{k_1!k_2!}\left(\frac{x_1}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{x_2}{2!}\right)^{k_2},$$

avec : $k_1+k_2=2$ *et* $k_1+2k_2=3$*. La seule solution* (k_1,k_2) *admises par ces deux solutions est le doublet* $(1,1)$*. Par conséquent :*

$$B_{3,2}=\frac{3!}{1!\,1!}\left(\frac{x_1}{1!}\right)\left(\frac{x_2}{2!}\right)=3x_1x_2.$$

Exemple 1.12. *Quelques valeurs particulières des polynômes* $B_{n,k}$ *sont [39] :*

- $B_{n,k}(1,1,1,\cdots)=S(n,k)$ *;* $S(n,k)$ *sont les nombres de Stirling de deuxième espèce donnés par la fonction génératrice exponentielle :*

$$\sum_{n\geq k}S(n,k)\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{k!}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n!}\right)^k.$$

Les nombres de Stirling de deuxième espèce correspondent aux nombres de partitions d'ensembles à n éléments en k blocs disjoints.

- $B_{n,k}\left(0!,-1!,2!,-3!,\cdots\right)=s\left(n,k\right)$; $s\left(n,k\right)$ *sont les nombres de Stirling de première espèce donnés par la fonction génératrice exponentielle :*

$$\sum_{n\geq k}s\left(n,k\right)\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{k!}\left(\sum_{n\geq 1}\left(-1\right)^{n-1}\frac{z^n}{n}\right)^k.$$

- $B_{n,k}\left(0!,1!,2!,3!,\cdots\right)=\left|s\left(n,k\right)\right|$; $\left|s\left(n,k\right)\right|$ *sont les nombres de Stirling absolus de première espèce donnés par la fonction génératrice exponentielle :*

$$\sum_{n\geq k}\left|s\left(n,k\right)\right|\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{k!}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n}\right)^k.$$

Les nombres de Stirling absolus de première espèce correspondent aux nombres de permutations de n éléments se décomposant en k cycles disjoints.

- $B_{n,k}\left(1!,2!,3!,\cdots\right)=L\left(n,k\right)$; $L\left(n,k\right)=\binom{n-1}{k-1}\frac{n!}{k!}$ *sont les nombres de Lah donnés par la fonction génératrice exponentielle :*

$$\sum_{n\geq k}L\left(n,k\right)\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{k!}\left(\sum_{n\geq 1}z^n\right)^k.$$

Les nombres de Lah peuvent s'exprimer en fonction des nombres de Stirling de première et deuxième espèce comme suit :

$$L\left(n,k\right)=\sum_{j\geq 0}\left(-1\right)^j s\left(n,j\right)S\left(j,k\right).$$

- $B_{n,k}\left(1,2,3,\cdots\right)=\binom{n}{k}k^{n-k}$; $\binom{n}{k}k^{n-k}$ *sont les nombres idempotents donnés par la fonction génératrice exponentielle :*

$$\sum_{n\geq k}\binom{n}{k}k^{n-k}\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{k!}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{(n-1)!}\right)^k.$$

Les polynômes exponentiels partiels de Bell jouent un rôle important dans la théorie des fonctions génératrices. Goubi [40] a montré leur apparition dans toute fonction génératrice de la forme :

$$g^{\alpha}(z) = b_0^{\alpha} + \sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n} (\alpha)_k \, b_0^{\alpha-k} B_{n,k} \frac{z^n}{n!}, \tag{1.5.3}$$

avec $g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$ et $(\alpha)_k = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$.

Il a exploité cette propriété pour exprimer les nombres $F_n(a,b)$ générés par la fonction génératrice de la forme :

$$\sum_{n\geq 0} F_n(a,b) z^n = \frac{1}{1-(a+b)z+abz^2} \tag{1.5.4}$$

et a démontré la formule explicite de ces nombres [40] (Lemme 2, p.62) donnée par :

$$F_n(a,b) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n-j}{j} (a+b)^{n-2j} (-ab)^j . \tag{1.5.5}$$

Ce type de fonctions génératrices sera exploité dans le cadre de notre travail.

1.6 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons présenté un bref aperçu sur les outils mathématiques de base de notre étude, que sont les fonctions génératrices et leurs propriétés, mais aussi les nombres et polynômes généralisés de Fibonacci et les polynômes exponentiels partiels de Bell. La compréhension de ces notions sera d'une grande utilité dans la suite de ce manuscrit.

Chapitre 2

Énumération des patterns dans la théorie de langage

2.1 Introduction

Les langues (latine, arabe, germanique ou autre), le système binaire des ordinateurs, le code génétique des cellules ont en commun ce que l'on appelle communément un *alphabet*. Un alphabet est un ensemble d'éléments pouvant être des lettres, chiffres ou symboles permettant de construire des mots au sens linguistique, des combinaisons de bits dans les mémoires des ordinateurs ou des codons (séquences de nucléotides) pour les codes génétiques. La théorie du langage a pour principal objectif d'analyser ces alphabets et ces mots d'un point de vue mathématique et algorithmique. Un alphabet est considéré comme un ensemble de symboles et un mot défini sur cet alphabet est une suite finie des symboles issus de l'alphabet. Comme exemples, le mot 11010 est défini sur l'alphabet $\{0, 1\}$, le mot $ATCG$ est défini sur l'alphabet $\{A, U, C, G, T\}$,...

L'apparition de certains motifs ou *patterns* (suites de lettres, chiffres ou symboles) et l'énumération de mots ou permutations contenant ces patterns font l'objet d'un intérêt croissant lors de ces dernières décennies. La première partie de ce travail de thèse s'inscrit dans cette démarche qui consiste à énumérer, à l'aide d'outils mathématiques pures, les nombres de mots construits à partir d'un alphabet donné et contenant un pattern de taille donnée.

Dans la théorie de langage, considérons l'alphabet $E_m = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$, de taille m. Chaque combinaison d'un nombre fini des éléments $a_1, a_2, ..., a_m$ constituant cet alphabet est un mot. Par exemple $x = a_1a_3a_4a_5$ $(m = 5)$ est un mot construit à partir de E_5. En considérant $M(E_m)$ comme l'ensemble de tous les mots construits à partir de l'alphabet E_m, nous définissons sur $M(E_m)$ la loi de composition suivante : $x, y \in M(E_m)\,; .x \bullet y = xy$. Par exemple si $x = a_1a_2a_3$ et $y = a_2a_m$, alors $x \bullet y = a_1a_2a_3a_2a_m$. Cette loi de composition est associative et admet le mot vide v comme unité $(x \bullet v = x)$. Le cardinal de l'ensemble de tous les mots à construire est $\#M(E_m) = \infty$. On appellera $M_j(E_m)$ l'ensemble des mots de taille j $(j \in \mathbb{N})$. Cet ensemble est évidemment fini. Dans cet ensemble, nous cherchons, dans le cadre de notre travail, à déterminer les nombres $P\begin{bmatrix} n & m \\ & j \end{bmatrix}$ de mots de taille $j \geq n$ contenant le pattern $\underbrace{a_ma_m\cdots a_m}_{n \text{ fois}}$. Nous présenterons, dans cette partie, notre contribution à l'énumération de ces nombres, via les fonctions génératrices, en exploitant les nombres et les polynômes généralisés de Fibonacci. Nous commencerons par étudier un cas particulier, en déterminant, de différentes manières, les nombres $P\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & j \end{bmatrix}$ à partir d'un alphabet de taille 2, avant d'aborder le cas plus général pour déterminer les nombres $P\begin{bmatrix} n & m \\ & j \end{bmatrix}$ par deux relations de récurrence et une formule explicite.

2.2 Mots contenant des patterns de taille $n = 2$

Dans le cas particulier d'un alphabet $E_2 = \{a_1, a_2\}$, nous cherchons à énumérer les mots de taille j contenant le pattern a_2a_2. Pour cela, nous considérons l'ensemble G_j tel que $G_j = \{$tous les mots de taille j qui ne contiennent pas le pattern $a_2a_2\}$.

Lemme 2.1. *Le cardinal de l'ensemble G_j est donné par :*

$$\begin{cases} \#G_0 = 1 \\ \#G_1 = 2 \\ \#G_j = \#G_{j-1} + \#G_{j-2} \quad ; j \geq 2. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Preuve. *L'ensemble $G_0 = \{$mot vide$\}$ et son cardinal est $\#G_0 = 1$. L'ensemble $G_1 = \{a_1, a_2\}$ et son cardinal est $\#G_1 = 2$.*

Si l'on définit, les ensembles $G_j(a_1) = \{xa_1/\, x \in G_{j-1}\}$ et $G_j(a_2) = \{xa_1a_2/\, x \in G_{j-2}\}$, il est facile de remarquer qu'ils forment une partition de G_j car :

$$\begin{cases} G_j\left(a_1\right) \cap G_j\left(a_2\right) = \emptyset \\ G_j\left(a_1\right) \cup G_j\left(a_2\right) = G_j. \end{cases}$$

Par conséquent $\#G_j = \#G_j\left(a_1\right) + \#G_j\left(a_2\right)$.

Sachant que $\#G_j\left(a_1\right) = \#G_{j-1}$ *et* $\#G_j\left(a_2\right) = \#G_{j-2}$*, on aboutit au résultat souhaité :*

$$\#G_j = \#G_{j-1} + \#G_{j-2}$$

□

Exemple 2.1. *Nous illustrerons cette propriété dans le cas de l'ensemble* $G_2 = \{$*tous les mots de taille* 2 *qui ne contiennent pas le pattern* $a_2a_2\} = \{a_1a_1, a_1a_2, a_2a_1\}$ *tel que* $\#G_2 = 3$. *On vérifie bien que, conformément à la relation* (2.2.1), $\#G_2 = \#G_1 + \#G_0$.

2.2.1 Relations de récurrence pour $P\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & j \end{bmatrix}$

On remarquera que les différents nombres $\#G_j$, vérifiant l'équation (2.2.1), constituent les termes d'une suite de Fibonacci $\left(F_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ tel que $\#G_j = F_{j+2}$. Les nombres $P\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & j \end{bmatrix}$ de mots de taille j contenant le pattern a_2a_2 sont alors déterminés selon le lemme suivant.

Lemme 2.2. *Les nombres* $P\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & j \end{bmatrix}$ *sont donnés par la relation suivante :*

$$P\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & j \end{bmatrix} = 2^j - F_{j+2}. \tag{2.2.2}$$

Preuve. *Si l'on considère* Ω_j *comme l'ensemble de tous les mots de taille* j *construits a partir de l'alphabet* E_2*, il est évident que* $\#\Omega_j = \#G_j + \#\overline{G_j} = 2^j$. *De la définition de l'ensemble* G_j*, nous pouvons écrire :*

$$P\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & j \end{bmatrix} = \#\overline{G_j},$$

et par conséquent :

$$P\begin{bmatrix} 2\ 2 \\ j \end{bmatrix} = 2^j - \#G_j = 2^j - F_{j+2}.$$

$\square$

En combinant la relation (2.2.2) et la relation de récurrence de Fibonacci (1.4.1), nous aboutissons à une deuxième relation de récurrence énumérant les nombres $P\left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ j \end{smallmatrix}\right]$ et donnée par la proposition suivante.

Proposition 2.1. *Les nombres* $P\left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ j \end{smallmatrix}\right]$ *satisfont la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} P\left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = P\left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] = 0 \\ P\left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ j \end{smallmatrix}\right] = 2^{j-2} + P\left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ j-1 \end{smallmatrix}\right] + P\left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ j-2 \end{smallmatrix}\right],\ j \geq 2 \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Avant d'énoncer une troisième relation de récurrence, nous donnerons la fonction génératrice de $P\left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ j \end{smallmatrix}\right]$ dans le lemme suivant.

Lemme 2.3. *La fonction génératrice des nombres* $P\left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ j \end{smallmatrix}\right]$*est :*

$$\sum_{j\geq 0} P\begin{bmatrix} 2\ 2 \\ j \end{bmatrix} z^j = \frac{1}{1-2z} - \frac{1+z}{1-z-z^2} = \frac{z^2}{1-3z+z^2+2z^3}. \tag{2.2.4}$$

Preuve. *En utilisant la relation* (2.2.1)*, on pourra écrire :*

$$\sum_{j\geq 0} \#G_j z^j = \sum_{j\geq 0} \#G_{j+2} z^j - \sum_{j\geq 0} \#G_{j+1} z^j.$$

En multipliant et en divisant par z^2, et par z, chacun des deux termes de droite de la précédente identité, on obtient :

$$\sum_{j\geq 0} \#G_j z^j = \frac{1}{z^2} \sum_{j\geq 0} \#G_{j+2} z^{j+2} - \frac{1}{z} \sum_{j\geq 0} \#G_{j+1} z^{j+1},$$

soit :

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 0} \#G_j z^j &= \frac{1}{z^2}\sum_{j\geq 2} \#G_j z^j - \frac{1}{z}\sum_{j\geq 1} \#G_j z^j \\ &= \frac{1}{z^2}\left(\sum_{j\geq 0} \#G_j z^j - 1 - 2z\right) - \frac{1}{z}\left(\sum_{j\geq 0} \#G_j z^j - 1\right).\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\sum_{j\geq 0} \#G_j z^j = \frac{1+z}{1-z-z^2}.$$

D'après la relation (2.2.2), on peut alors écrire :

$$\sum_{j\geq 0} P\begin{bmatrix} 2\ 2 \\ j \end{bmatrix} z^j = \sum_{j\geq 0}\left(2^j - \#G_j\right) z^j = \sum_{j\geq 0} 2^j z^j - \sum_{j\geq 0} \#G_j z^j.$$

Sachant que :

$$\sum_{j\geq 0} 2^j z^j = \sum_{j\geq 0} (2z)^j = \frac{1}{1-2z},$$

on peut alors déduire le résultat souhaité :

$$\sum_{j\geq 0} P\begin{bmatrix} 2\ 2 \\ j \end{bmatrix} z^j = \frac{1}{1-2z} - \frac{1+z}{1-z-z^2}.$$

□

L'exploitation de cette fonction génératrice nous permet d'énoncer la proposition suivante.

Proposition 2.2. *Les nombres* $P\begin{bmatrix} 2\ 2 \\ j \end{bmatrix}$ *sont donnés par la relation de récurrence :*

$$\begin{cases} P\begin{bmatrix} 2\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} 2\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \\ P\begin{bmatrix} 2\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \\ P\begin{bmatrix} 2\ 2 \\ j \end{bmatrix} = 3P\begin{bmatrix} 2\ 2 \\ j-1 \end{bmatrix} - P\begin{bmatrix} 2\ 2 \\ j-2 \end{bmatrix} - 2P\begin{bmatrix} 2\ 2 \\ j-3 \end{bmatrix} \quad , j \geq 3. \end{cases} \tag{2.2.5}$$

Preuve. *La fonction génératrice de l'équation* (2.2.4) *nous permet d'écrire :*

$$\left(1 - 3z + z^2 + 2z^3\right) \sum_{j \geq 0} P \begin{bmatrix} 2\ 2 \\ j \end{bmatrix} z^j = z^2.$$

Cette identité peut s'écrire comme le produit de Cauchy de deux fonctions génératrices :

$$\left(\sum_{j \geq 0} a_j z^j\right) \left(\sum_{j \geq 0} P \begin{bmatrix} 2\ 2 \\ j \end{bmatrix} z^j\right) = \sum_{j \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{j} a_k P \begin{bmatrix} 2\ 2 \\ j-k \end{bmatrix}\right) z^j = \sum_{j \geq 0} b_j z^j,$$

avec $a_0 = 1$, $a_1 = -3$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_j = 0$, $\forall j \geq 4$ *et* $b_0 = b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_j = 0$, $\forall j \geq 3$. *Par identification terme à terme des deux côté de l'identité précédente, on obtient :*

$$\begin{cases} b_0 = a_0 P \left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \\ b_1 = a_0 P \left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] + a_1 P \left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \\ b_2 = a_0 P \left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] + a_1 P \left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] + a_2 P \left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \\ b_j = a_0 P \left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ j \end{smallmatrix}\right] + a_1 P \left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ j-1 \end{smallmatrix}\right] + a_2 P \left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ j-2 \end{smallmatrix}\right] + a_3 P \left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ j-3 \end{smallmatrix}\right] & , j \geq 3. \end{cases}$$

On déduit ainsi le résultat souhaité :

$$\begin{cases} P \left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = 0 \\ P \left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] = 0 \\ P \left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] = 1 \\ P \left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ j \end{smallmatrix}\right] = 3P \left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ j-1 \end{smallmatrix}\right] - P \left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ j-2 \end{smallmatrix}\right] - 2P \left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ j-3 \end{smallmatrix}\right] & , j \geq 3. \end{cases}$$

□

2.2.2 Formule explicite de $P \begin{bmatrix} 2\ 2 \\ j \end{bmatrix}$

La combinaison de l'équation (2.2.2), donnée par le lemme 2.2, et l'équation (1.4.4), donnée par le lemme 1.2, conduit au théorème suivant où est énoncée la formule explicite des nombres $P \left[\begin{smallmatrix} 2\ 2 \\ j \end{smallmatrix}\right]$.

Théorème 2.1. *La formule explicite énumérant les nombres* $P\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & j \end{bmatrix}$ *est donnée par :*

$$P\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ j & \end{bmatrix} = 2^j - \sum_{0 \leq l \leq \frac{j+1}{2}} \begin{pmatrix} j-l+1 \\ l \end{pmatrix}. \tag{2.2.6}$$

Quelques valeurs des nombres $P\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & j \end{bmatrix}$ obtenus par la formule (2.2.6) sont données dans le tableau (2.1).

j	$P\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & j \end{bmatrix}$
10	880
40	1099243713480
60	1152917451867309095
80	1208925758308838453094585
100	1267650599300856709303624206201
120	1329227995770887506250308144981420816
140	1393796574907951739244542286640988853390306
160	1461501637330899708146875376608557771675156250921

Table 2.1 – Quelques valeurs des nombres $P\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & j \end{bmatrix}$ obtenues par la l'équation (2.2.6).

2.3 Mots contenant des patterns de taille n

Nous considérerons dans ce qui suit le cas général d'un alphabet $E_m = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ et nous chercherons à énumérer les mots de taille j contenant le pattern $\underbrace{a_m a_m \cdots a_m}_{n \text{ fois}}$. En d'autres termes, cela revient à déterminer les nombres $P\begin{bmatrix} n & m \\ & j \end{bmatrix}$ pour des valeurs arbitraires de m, n, et j. Comme pour le cas particulier, nous énoncerons des relations de récurrence et une formule explicite des nombres $P\begin{bmatrix} n & m \\ & j \end{bmatrix}$. Mais avant, nous entamerons notre démarche en déterminant la fonction génératrice de $P\begin{bmatrix} n & m \\ & j \end{bmatrix}$. Nous considérerons pour cela l'ensemble $G_j = \left\{ \text{mots de taille } j \text{ ne contenant pas le pattern } \underbrace{a_m a_m \cdots a_m}_{n \text{ fois}} \right\}$, tel que :

$$P\begin{bmatrix} n & m \\ j & \end{bmatrix} = \#\overline{G_j} = m^j - \#G_j. \tag{2.3.1}$$

Lemme 2.4. *Le cardinal de G_j est donné par*

$$\#G_j = \begin{cases} m^j & , j < n \\ (m-1)\sum_{k=1}^{n} \#G_{j-k}; & , j \geq n. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Preuve. *Il est évident que pour $n > j$, tous les mots de G_j ne peuvent pas contenir le pattern $\underbrace{a_m a_m \cdots a_m}_{n\ fois}$. Leur nombre est m^j. Dans le cas contraire, nous considérons les ensembles :*

$$\begin{cases} G_j(a_i) = \{x a_i / x \in G_{j-1}\} & , i \neq m \\ G_j^*(a_m) = \left\{ \text{mots } x a_m \text{ ne contenant pas le pattern } \underbrace{a_m a_m \cdots a_m}_{n\ fois} \right\}, \end{cases}$$

qui forment une partition de G_j car :

$$\begin{cases} G_j(a_1) \cup G_j(a_2) \cup \cdots \cup G_j(a_{m-1}) \cup G_j^*(a_m) = G_j \\ G_j(a_k) \cap G_j(a_{l \neq k}) = \emptyset & 1 \leq k, l \leq m-1 \\ G_j(a_k) \cap G_j^*(a_m) = \emptyset. \end{cases}$$

Par conséquent $\#G_j = \sum_{i=1}^{m-1} \#G_j(a_i) + \#G_j^*(a_m) = (m-1)\#G_{j-1} + \#G_j^*(a_m)$.
Pour déterminer $\#G_j^*(a_m)$, nous considérerons les ensembles :

$$\begin{cases} G_j(a_i a_m) = \{x a_i a_m / x \in G_{j-2}\} & , i \neq m \\ G_j^*(a_m a_m) = \left\{ \text{mots } x a_m a_m \text{ ne contenant pas le pattern } \underbrace{a_m a_m \cdots a_m}_{n\ fois} \right\}, \end{cases}$$

qui forment une partition de $G_j^*(a_m)$ car :

$$\begin{cases} G_j(a_1 a_m) \cup G_j(a_2 a_m) \cup \cdots \cup G_j(a_{m-1} a_m) \cup G_j^*(a_m a_m) = G_j^*(a_m) \\ G_j(a_k a_m) \cap G_j(a_{l \neq k} a_m) = \emptyset & 1 \leq k, l \leq m-1 \\ G_j(a_k a_m) \cap G_j^*(a_m a_m) = \emptyset \end{cases}$$

Par conséquent $\#G_j^*(a_m) = \sum_{i=1}^{m-1} \#G_j(a_i a_m) + \#G_j^*(a_m a_m) = (m-1)\#G_{j-2} + \#G_j^*(a_m a_m)$ *et* $\#G_j = (m-1)\#G_{j-1} + (m-1)\#G_{j-2} + \#G_j^*(a_m a_m)$*, et ainsi de suite, en appliquant le même processus, jusqu'à ce que l'on aboutisse à la relation* $\#G_j = (m-1)\#G_{j-1} + (m-1)\#G_{j-2} + \ldots + (m-1)\#G_{j-n}$. □

2.3.1 Fonction génératrice de $P\left[\begin{smallmatrix} n & m \\ & j \end{smallmatrix}\right]$

La fonction génératrice de $\#G_j$ est donnée par la proposition suivante.

Proposition 2.3. *La fonction génératrice de* $\#G_j$ *est :*

$$\sum_{j\geq 0} \#G_j z^j = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} z^k}{1 - \sum_{k=1}^{n}(m-1)z^k}. \tag{2.3.3}$$

Preuve. *On peut écrire :*

$$\sum_{j\geq 0} \#G_j z^j = \sum_{j=0}^{n-1} \#G_j z^j + \sum_{j\geq n} \#G_j z^j.$$

En utilisant la relation (2.3.2), on pourra écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{j\geq 0} \#G_j z^j &= \sum_{j=0}^{n-1} m^j z^j + (m-1)\sum_{j\geq n}\sum_{k=1}^{n} \#G_{j-k} z^j \\ &= \frac{1-(mz)^n}{1-mz} + (m-1)\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\geq n-k} \#G_j z^{j+k}, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\sum_{j\geq n-k} \#G_j z^{j+k} &= \sum_{k=1}^{n} z^k \left(\sum_{j\geq n-k} \#G_j z^j\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} z^k \left[\sum_{j\geq 0} \#G_j z^j - \frac{1-(mz)^{n-k}}{1-mz}\right]. \end{aligned}$$

On écrit alors :

$$\sum_{j\geq 0} \#G_j z^j = \frac{1-(mz)^n}{1-mz} + (m-1)\sum_{k=1}^{n} z^k \left(\sum_{j\geq 0} \#G_j z^j\right) - (m-1)\sum_{k=1}^{n} \frac{1-(mz)^{n-k}}{1-mz} z^k,$$

soit :

$$\left[1-(m-1)\sum_{k=1}^{n} z^k\right]\sum_{j\geq 0} \#G_j z^j = \frac{1}{1-mz}\left[1-(m-1)\sum_{k=1}^{n} z^k - z^n\right].$$

Pour le deuxième terme de cette identité, en développant $\sum_{k=1}^{n} z^k$ *et en effectuant la division euclidienne, on obtient :*

$$\left[1-(m-1)\sum_{k=1}^{n} z^k\right]\sum_{j\geq 0} \#G_j z^j = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

On obtient alors le résultat souhaité, soit :

$$\sum_{j\geq 0} \#G_j z^j = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} z^k}{1-\sum_{k=1}^{n} (m-1)\, z^k}.$$

□

En combinants les équations (2.3.1) et (2.3.3), nous déduisons la fonction génératrice suivante :

$$\sum_{j\geq 0} P\begin{bmatrix} n & m \\ & j \end{bmatrix} z^j = \frac{1}{1-mz} - \frac{\sum_{k=0}^{n-1} z^k}{1-\sum_{k=1}^{n} (m-1)\, z^k}. \tag{2.3.4}$$

Mieux encore, une autre forme de la fonction génératrice peut être donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.2. *La fonction génératrices des nombres* $P\begin{bmatrix} n & m \\ & j \end{bmatrix}$ *a pour expression :*

$$\sum_{j\geq 0} P\begin{bmatrix} n & m \\ & j \end{bmatrix} z^j = \frac{1}{1-mz} - \frac{1-z^n}{1-mz+(m-1)\, z^{n+1}}. \tag{2.3.5}$$

Preuve. *On s'intéresse, en premier lieu, au dénominateur du deuxième terme de l'équation* (2.3.4)*. Ce dernier s'écrit comme suit :*

$$\begin{aligned} 1-\sum_{k=1}^{n}(m-1)\,z^{k} &= 1-(m-1)\left(\frac{1-z^{n+1}}{1-z}-1\right) \\ &= \frac{1-mz+(m-1)\,z^{n+1}}{1-z}. \end{aligned}$$

Sachant que $\sum_{k=0}^{n-1} z^{k} = \frac{1-z^{n}}{1-z}$*, l'équation* (2.3.4) *s'écrit alors comme suit :*

$$\sum_{j\geq 0} P\begin{bmatrix} n\ m \\ j \end{bmatrix} z^{j} = \frac{1}{1-mz}-\frac{1-z^{n}}{1-mz+(m-1)\,z^{n+1}}.$$

□

2.3.2 Relations de récurrence de $P\begin{bmatrix} n\ m \\ j \end{bmatrix}$

La première relation de récurrence pour les nombres $P\begin{bmatrix} n\ m \\ j \end{bmatrix}$ est donnée par la proposition suivante.

Proposition 2.4. *Les nombres* $P\begin{bmatrix} n\ m \\ j \end{bmatrix}$ *sont données par la relation de récurrence suivante :*

$$P\begin{bmatrix} n\ m \\ j \end{bmatrix} = \begin{cases} 0 & ;\, j<n \\ m^{j-n}+(m-1)\sum_{k=1}^{n} P\begin{bmatrix} n\, m \\ j-k \end{bmatrix} & ;\, j\geq n. \end{cases} \tag{2.3.6}$$

Preuve. *La démonstration de cette proposition est détaillée dans [41]. En combinant les équations 2.3.1 et 2.3.2, on écrit, pour* $j \geq n$ *:*

$$\begin{aligned} P\begin{bmatrix} n\ m \\ j \end{bmatrix} &= m^{j}-(m-1)\sum_{k=1}^{n}\#G_{j-k} \\ &= m^{j}-(m-1)\sum_{k=1}^{n} m^{j-k}+(m-1)\sum_{k=1}^{n} P\begin{bmatrix} n\ m \\ j-k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On aboutit ainsi au résultat recherché. $\square$

En se basant sur la fonction génératrice (2.3.5), la deuxième relation de récurrence est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.3. *Les nombres* $P\begin{bmatrix} n & m \\ & j \end{bmatrix}$ *sont tels que* $P\begin{bmatrix} n & m \\ & n \end{bmatrix} = 1, P\begin{bmatrix} n & m \\ n+1 & \end{bmatrix} = 2m-1$ *et, pour* $j \geq n+2$,

$$\begin{aligned} P\begin{bmatrix} n\ m \\ j \end{bmatrix} &= 2mP\begin{bmatrix} n\ m \\ j-1 \end{bmatrix} - m^2 P\begin{bmatrix} n\ m \\ j-2 \end{bmatrix} - (m-1)\, P\begin{bmatrix} n\ m \\ j-n-1 \end{bmatrix} \\ &\quad - \left(m - m^2\right) P\begin{bmatrix} n\ m \\ j-n-2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Preuve. *Le développement de l'expression de la fonction génératrice* (2.3.5) *donne :*

$$\sum_{j\geq 0} P\begin{bmatrix} n\ m \\ j \end{bmatrix} z^j = \frac{z^n - z^{n+1}}{1 - 2mz + m^2z^2 + (m-1)\, z^{n+1} - (m^2 - m)\, z^{n+2}},$$

et par conséquent,

$$\left(1 - 2mz + m^2 z^2 + (m-1)\, z^{n+1} - \left(m^2 - m\right) z^{n+2}\right) \sum_{j\geq 0} P\begin{bmatrix} n\ m \\ j \end{bmatrix} z^j = z^n - z^{n+1}.$$

Cette dernière identité peut s'écrire comme :

$$\left(\sum_{j\geq 0} a_j z^j\right)\left(\sum_{j\geq 0} P\begin{bmatrix} n\ m \\ j \end{bmatrix} z^j\right) = \sum_{j\geq 0} b_j z^j,$$

avec : $a_0 = 1$, $a_1 = -2m$, $, a_2 = m^2$, $a_{n+1} = m-1$, $a_{n+2} = m - m^2$, $b_n = 1$, $b_{n+1} = -1$. *Les autres coefficients* a_j *et* b_j *sont nuls ailleurs. Le produit de Cauchy conduit à :*

$$\sum_{j\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{j} P\begin{bmatrix} n\ m \\ j-k \end{bmatrix} a_k\right) z^j = \sum_{j\geq 0} b_j z^j,$$

tel que :

$$\begin{cases} b_0 = a_0 P\begin{bmatrix} n\ m \\ 0 \end{bmatrix} \\ b_1 = a_0 P\begin{bmatrix} n\ m \\ 1 \end{bmatrix} + a_1 P\begin{bmatrix} n\ m \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vdots \\ b_j = a_0 P\begin{bmatrix} n\ m \\ j \end{bmatrix} + a_1 P\begin{bmatrix} n\ m \\ j-1 \end{bmatrix} + \cdots a_j P\begin{bmatrix} n\ m \\ 0 \end{bmatrix} & , 0 \leq j \leq n-1 \\ b_n = a_0 P\begin{bmatrix} n\ m \\ n \end{bmatrix} + a_1 P\begin{bmatrix} n\ m \\ n-1 \end{bmatrix} + a_2 P\begin{bmatrix} n\ m \\ n-2 \end{bmatrix} \\ b_{n+1} = a_0 P\begin{bmatrix} n\ m \\ n+1 \end{bmatrix} + a_1 P\begin{bmatrix} n\ m \\ n \end{bmatrix} + a_2 P\begin{bmatrix} n\ m \\ n-1 \end{bmatrix} + a_{n+1} P\begin{bmatrix} n\ m \\ 0 \end{bmatrix} \\ b_j = a_0 P\begin{bmatrix} n\ m \\ j \end{bmatrix} + a_1 P\begin{bmatrix} n\ m \\ j-1 \end{bmatrix} + a_2 P\begin{bmatrix} n\ m \\ j-2 \end{bmatrix} + a_{n+1} P\begin{bmatrix} n\ m \\ j-n-1 \end{bmatrix} + a_{n+2} P\begin{bmatrix} n\ m \\ j-n-2 \end{bmatrix} & , j \geq n+2. \end{cases}$$

On déduit ainsi le résultat souhaité :

$$\begin{cases} P\begin{bmatrix} n\ m \\ 0 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} n\ m \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \\ P\begin{bmatrix} n\ m \\ j \end{bmatrix} = 0 & , 0 \leq j \leq n-1 \\ P\begin{bmatrix} n\ m \\ n \end{bmatrix} = 1 \\ P\begin{bmatrix} n\ m \\ n+1 \end{bmatrix} = 2m-1 \\ P\begin{bmatrix} n\ m \\ j \end{bmatrix} = 2mP\begin{bmatrix} n\ m \\ j-1 \end{bmatrix} - m^2 P\begin{bmatrix} n\ m \\ j-2 \end{bmatrix} - (m-1)\, P\begin{bmatrix} n\ m \\ j-n-1 \end{bmatrix} - (m-m^2)\, P\begin{bmatrix} n\ m \\ j-n-2 \end{bmatrix} & , j \geq n+2. \end{cases}$$

□

2.3.3 Formule explicite de $P\begin{bmatrix} n\ m \\ j \end{bmatrix}$

Le théorème suivant énonce la formule explicite permettant l'énumération des nombres $P\begin{bmatrix} n\ m \\ j \end{bmatrix}$

Théorème 2.4. *Pour $j \geq n$, les nombres $P\begin{bmatrix} n\ m \\ j \end{bmatrix}$ sont donnés par la formule :*

$$P\begin{bmatrix} n\ m \\ j \end{bmatrix} = m^j + \sum_{c=0}^{\left\lfloor \frac{j-n}{n+1} \right\rfloor} \binom{j-n(c+1)}{c} (1-m)^c m^{j-n(c+1)-c} - \sum_{c=0}^{\left\lfloor \frac{j}{n+1} \right\rfloor} \binom{j-cn}{c} (1-m)^c m^{j-nc-c}. \tag{2.3.8}$$

Preuve. *Pour déterminer la formule explicite des nombres* $P\left[\begin{smallmatrix} n & m \\ & j \end{smallmatrix}\right]$*, nous ferons appel aux fonctions génératrices de la famille de polynômes généralisés à deux variables données par l'équation* (1.4.9) *et la formule explicite de ces polynômes donnée par l'équation* (1.4.10)*. Nous réécrivons la fonction génératrice de l'équation* (2.3.5) *comme :*

$$\sum_{j\geq 0} P\begin{bmatrix} n & m \\ & j \end{bmatrix} z^j = \frac{1}{1-mz} - (1-z^n)\,\mathcal{G}(z;m;n),$$

avec $\mathcal{G}(z;m;n) = \dfrac{1}{1-mz+(m-1)z^{n+1}}$.

Nous remarquerons que la fonction $\mathcal{G}(z;m;n)$ *est équivalente à la fonction génératrice* $H\,(z;x,y;k,u,v)$ *donnée par l'équation* (1.4.9) *dans le cas particulier où :*

$$\begin{cases} x^k = m \\ -y^u = m-1 \\ u+v = n+1, \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x = m^{\frac{1}{k}} \\ y = (1-m)^{\frac{1}{u}} \\ u+v = n+1. \end{cases}$$

En introduisant ce changement de variables dans la formule explicite des polynômes généralisés $\mathcal{G}_j\,(x,y;k,u,v)$*, générés par* $H\,(z;x,y;k,u,v)$*, et donnés par* (1.4.10) *on obtient :*

$$\mathcal{G}_j\,(m;n) = \sum_{c=0}^{\left\lfloor \frac{j}{n+1} \right\rfloor} \binom{j-cn}{c} (1-m)^c\, m^{j-nc-c}. \tag{2.3.9}$$

Sachant que :

$$\begin{aligned}
(1-z^n)\,\mathcal{G}(z;m;n) &= (1-z^n)\sum_{j\geq 0}\mathcal{G}_j\,(m;n)\,z^j \\
&= \sum_{j\geq 0}\mathcal{G}_j\,(m;n)\,z^j - \sum_{j\geq 0}\mathcal{G}_j\,(m;n)\,z^{n+j} \\
&= \sum_{j\geq 0}\mathcal{G}_j\,(m;n)\,z^j - \sum_{j\geq n}\mathcal{G}_{j-n}\,(m;n)\,z^j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\mathcal{G}_j\,(m;n)\,z^j + \sum_{j\geq n}\left[\mathcal{G}_j\,(m;n) - \mathcal{G}_{j-n}\,(m;n)\right] z^j,
\end{aligned}$$

on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 0} P\begin{bmatrix} n & m \\ & j \end{bmatrix} z^j &= \frac{1}{1-mz} - \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{G}_j\left(m;n\right) z^j - \sum_{j\geq n}\left[\mathcal{G}_j\left(m;n\right) - \mathcal{G}_{j-n}\left(m;n\right)\right] z^j \\ &= \sum_{j\geq 0} m^j z^j - \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{G}_j\left(m;n\right) z^j - \sum_{j\geq n}\left[\mathcal{G}_j\left(m;n\right) - \mathcal{G}_{j-n}\left(m;n\right)\right] z^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\left[m^j - \mathcal{G}_j\left(m;n\right)\right] z^j + \sum_{j\geq n}\left[m^j + \mathcal{G}_{j-n}\left(m;n\right) - \mathcal{G}_j\left(m;n\right)\right] z^j.\end{aligned}$$

Par conséquent, on aura, pour $j \geq n$:

$$P\begin{bmatrix} n & m \\ & j \end{bmatrix} = m^j + \mathcal{G}_{j-n}\left(m;n\right) - \mathcal{G}_j\left(m;n\right),$$

et finalement, en exprimant en fonction des formules explicites de$\mathcal{G}_j\left(m;n\right)$, on aura l'expression recherchée :

$$P\begin{bmatrix} n & m \\ & j \end{bmatrix} = m^j + \sum_{c=0}^{\left\lfloor \frac{j}{n+1}\right\rfloor}\binom{j-n(c+1)}{c}\left(1-m\right)^c m^{j-n(c+1)-c} - \sum_{c=0}^{\left\lfloor \frac{j}{n+1}\right\rfloor}\binom{j-cn}{c}\left(1-m\right)^c m^{j-nc-c}.$$

□

Le tableau (2.2) résume quelques valeurs des nombres $P\begin{bmatrix} n & m \\ & j \end{bmatrix}$ énumérés par l'intermédiaire de la formule explicite (2.3.8).

j	$P\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ & j \end{bmatrix}$	j	$P\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ & j \end{bmatrix}$
2	1	6	281
3	5	7	963
4	21	8	3217
5	79	9	10547

Table 2.2 – Quelques valeurs des nombres $P\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ & j \end{bmatrix}$ obtenues par la l'équation (2.3.8).

2.4 Conclusion

Dans la première partie de ce travail, nous nous sommes intéressés à l'exploitation des fonctions génératrice dans l'énumération des nombres $P\begin{bmatrix} n & m \\ & j \end{bmatrix}$ de mots de taille arbitraire j, contenant le pattern $\underbrace{a_m a_m \cdots a_m}_{n \text{ fois}}$ à partir d'un alphabet de taille m. Nous avons commencé par étudier le cas particulier des nombres $P\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & j \end{bmatrix}$ où nous avons proposé deux relations de récurrence, données par les équations (2.2.2), (2.2.3) et (2.2.5), et une formule explicite, donnée par l'équation (2.2.6). Nous avons ensuite étendu notre étude au cas général des nombres $P\begin{bmatrix} n & m \\ & j \end{bmatrix}$ pour lesquels nous avons pu proposer 2 relations de récurrence (équations (2.3.1) et (2.3.7)) et une formule explicite donnée par l'équation (2.3.8).

Chapitre 3

Partitions d'ensembles et appariements parfaits

3.1 Introduction

Les partitions d'ensemble et appariements parfaits (évitant ou pas certains patterns) sont une branche des mathématiques qui a connu un intérêt particulièrement croissant lors de ces deux dernières décennies (un aperçu est donné dans [42]). Ils constituent une extension naturelle des permutations (évitant ou pas ces patterns). Depuis les premiers travaux de Klazar [43, 44], l'intérêt pour l'énumération, asymptotique ou exacte, des nombres de permutations, partitions d'ensemble et/ou appariements parfaits évitant certains patterns (comme les croisements et imbrications) a été de plus en plus significatif au vu des nombreuses contributions recensées dans la littérature [15,19–24]. Nous nous intéresserons dans la deuxième partie de ce travail de thèse, plus particulièrement, aux travaux de Bloom et Elizalde [15] en rapport avec l'énumération de partitions et appariements parfaits évitant un certain pattern ou un doublet de patterns. Nous compléterons ces travaux par des relations de récurrence et une formule explicite en exploitant les fonctions génératrices et les polynômes de Bell.

Avant d'aborder nos résultats, nous présenterons un bref rappel sur les partitions d'ensemble et le cas particulier des appariements et leurs représentation dans la théorie des graphes. Nous définirons les croisements et imbrications que l'on pourrait rencontrer dans ce type de partitions ainsi que l'évitement de patterns dans ces partitions sur lesquelles nous appliquerons notre approche pour leurs énumérations.

3.2 Partition d'ensemble et appariement parfait en théorie des graphes

3.2.1 Partition d'un ensemble

Définition 3.1. *Une partition P d'un ensemble $[n] = \{1, 2, \cdots, n\}$ est un ensemble de sous-ensembles disjoints et non vides de l'ensemble $[n]$. Ces sous-ensembles sont appelés blocs, et leur union donne l'ensemble $[n]$.*

- *Une façon standard d'écrire une partition avec k blocs est :*

$$P = \{B_1, B_2, \cdots, B_k\},$$

  tel que les blocs $B_k = \{i_1, i_2, \cdots, i_a\}$ soient ordonnés dans l'ordre croissant de leurs éléments minimaux : $(i_1 \in B_1) < (i_1 \in B_2) < \cdots < (i_1 \in B_k)$. A l'intérieur de chaque bloc, les éléments sont aussi écrits dans l'ordre croissant : $B_k = \{i_1, i_2, \cdots, i_a\}, \, i_1 < i_2 < \cdots < i_a$

- *L'ensemble des partitions de $[n]$ est noté $\mathcal{P}_n$.*

Exemple 3.1. *Pour l'ensemble $[10] = \{1, 2, \cdots, 10\}$, l'ensemble $P = \{\{1, 4, 6\}, \{2, 3, 5\}, \{7, 9\}, \{8, 10\}\}$ est une partition de $[10]$ car :*

$$\begin{cases} \{1,4,6\} \cup \{2,3,5\} \cup \{7,9\} \cup \{8,10\} = [10] \\ \{1,4,6\}, \{2,3,5\}, \{7,9\} \ \textit{et} \ \{8,10\} \ \textit{disjoints deux à deux.} \end{cases}$$

Les blocs $B_1 = \{1, 4, 6\}$, $B_2 = \{2, 3, 5\}$, $B_3 = \{7, 9\}$ et $B_4 = \{8, 10\}$ sont ordonnés dans l'ordre croissant de leurs éléments minimaux ($1 < 2 < 7 < 8$). Les éléments de chaque bloc sont aussi écrits dans l'ordre croissant (Par exemple pour B_1, $1 < 4 < 6$).

Rappelons que le nombre des partitions P à 4 blocs de l'ensemble $[10]$ est donné par le nombre de Stirling de deuxième espèce (voir équation (1.5.2)) :

$$S\,(10,4) = B_{10,4}\,(1,1,1,\cdots) = \frac{10!}{4!} \sum_{s_n(k)} \binom{4}{k_1, k_2, \cdots k_7} \prod_{r=1}^{7} \left(\frac{1}{r!}\right)^{k_r}.$$

L'ensemble des partitions P à k blocs de l'ensemble $[10]$ est contenu dans l'ensemble $\mathcal{P}_{10}$.

En théorie des graphes, il est souvent commode de représenter une partition par un graphe $G\,(V,E)$ à V sommets représentant les éléments de l'ensemble $[n]$ et E arcs joignant ces sommets.

Définition 3.2. *Une partition d'un ensemble $[n]$ est représentée par un diagramme linéaire à n points disposés, et numérotés de manière croissante de gauche à droite, sur une ligne horizontale. Tous les sommets i et j, éléments adjacents d'un même bloc, sont joins par un arc noté e.*

- *Pour un bloc $B_k = \{i_1, i_2, \cdots, i_a\}$, si $a \geq 2$, un arc e est représenté par le doublet (i,j) avec $i < j$, tel que i est l'*extrémité initiale *de l'arc et j son* extrémité terminale.

- *Pour chaque bloc $B_k = \{i_1, i_2, \cdots, i_a\}$, on trace $(a-1)$ arcs $(i_1,i_2), (i_2,i_3), \cdots, (i_{a-1}, i_a)$. Les sommets $i_2, i_3, \cdots, i_{a-1}$ sont dits* sommets transitoires.

- *Pour un bloc $B_k = \{i_1\}$, ($a = 1$), le sommet i_1 est appelé* singleton.

Exemple 3.2. *Si l'on reprend l'exemple précédent de l'ensemble $[10] = \{1, 2, \cdots, 10\}$ et de la partition $P = \{\{1,4,6\}, \{2,3,5\}, \{7,9\}, \{8,10\}\}$, le diagramme linéaire représentatif de cette partition est donné par la figure (3.2.1). Les sommets $1, 2, 7$ et 8 sont des extrémités initiales. Les sommets $6, 5, 9$ et 10 sont des extrémités terminales. Les sommets 4 et 3 sont des sommets transitoires. Ce diagramme d'arcs ne possède pas de singleton.*

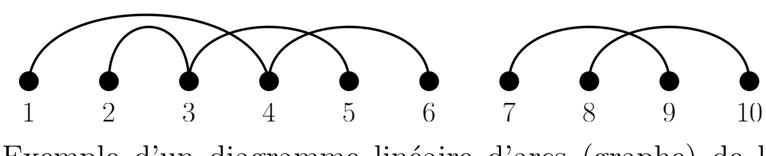

Figure 3.2.1 – Exemple d'un diagramme linéaire d'arcs (graphe) de la partition $P = \{\{1,4,6\}, \{2,3,5\}, \{7,9\}, \{8,10\}\}$.

3.2.2 Appariement parfait d'un ensemble

Définition 3.3. *Un appariement parfait M d'un ensemble $[2n] = \{1, 2, \cdots, 2n\}$ est une partition de l'ensemble $[2n]$ en n blocs de 2 éléments :*

$$M = \{B_1, B_2, \cdots, B_n\}, \; B_k = \{i_k, j_k\}.$$

- *Un appariement ne peut être parfait que si l'ensemble contient un nombre pair d'éléments.*

- *L'ensemble des appariements parfaits de $[2n]$ est noté $\mathcal{M}_n$.*

Exemple 3.3. *Pour l'ensemble $[10] = \{1, 2, \cdots, 10\}$, l'ensemble $M = \{\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 7\}, \{5, 10\}, \{8, 9\}\}$ est un appariement parfait de l'ensemble $[10]$ car :*

$$\begin{cases} \{1, 2\} \cup \{3, 6\} \cup \{4, 7\} \cup \{5, 10\} \cup \{8, 9\} = [10] \\ \{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 7\}, \{5, 10\} \; \textit{et} \; \{8, 9\} \; \textit{disjoints deux à deux.} \end{cases}$$

L'ensemble M vérifie les propriétés d'une partition avec 5 blocs, $B_1 = \{1, 2\}$, $B_2 = \{3, 6\}$, $B_3 = \{4, 7\}$,$B_4 = \{5, 10\}$ et $B_5 = \{8, 9\}$, ordonnés dans l'ordre croissant de leurs éléments minimaux ($1 < 3 < 4 < 5 < 8$) et les éléments de chaque bloc écrits dans l'ordre croissant (Par exemple pour B_1, $1 < 2$).

Rappelons que le nombre d'appariements parfaits M de l'ensemble $[10]$ est donné par le nombre de Stirling de deuxième espèce (voir équation (1.5.2)) :

$$S(10, 5) = B_{10,5}(1, 1, 1, \cdots) = \frac{10!}{5!} \sum_{s_n(k)} \binom{5}{k_1, k_2, \cdots k_6} \prod_{r=1}^{6} \left(\frac{1}{r!}\right)^{k_r}.$$

Tout comme pour une partition d'ensemble, on peut représenter un appariement parfait par un graphe.

Définition 3.4. *Un appariement parfait d'un ensemble $[2n]$ est représentée par un diagramme linéaire à $2n$ points disposés, et numérotés de manière croissante de gauche à droite, sur une ligne horizontale. Tous les sommets i et j, éléments adjacents d'un même bloc, sont joins par un arc e.*

- *Pour chaque bloc* $B_k = \{i_1, i_2\}$*, on trace un arc* (i_1, i_2)*. Les sommets* i_1 *et* i_2 *sont dits appariés (ou* matched *en anglais).*

- *Pour l'ensemble* $[2n]$*, il existe* n *arcs* $e = (i, j)$ *avec* $i < j$*, tel que* i *est l'*extrémité initiale *de l'arc et* j *est son* extrémité terminale.

- *Dans un digramme d'arcs pour un appariement parfait, il ne peut exister de sommet transitoire ou de singleton.*

Exemple 3.4. *Si l'on reprend l'exemple précédent de l'ensemble* $[10] = \{1, 2, \cdots, 10\}$*et de l'appariement parfait* $M = \{\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 7\}, \{5, 10\}, \{8, 9\}\}$*, le diagramme linéaire représentatif de cet appariement parfait est donné par la figure* (3.2.2) *avec 5 extrémités initiales* $1, 3, 4, 5$ *et* 8 *et autant d'extrémités terminales* $2, 6, 7, 10$ *et* 9*. Le diagramme ne possède aucun singleton ou sommet transitoire.*

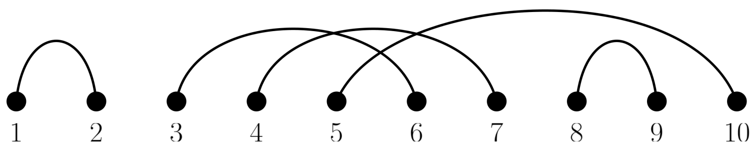

Figure 3.2.2 – Exemple d'un diagramme d'arcs (graphe) de l'appariement parfait $M = \{\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 7\}, \{5, 10\}, \{8, 9\}\}$.

3.2.3 Croisements et imbrications d'arcs dans les partitions et les appariements parfaits

Dans les diagrammes d'arcs (graphes) associés aux partitions d'ensemble et aux appariement parfaits, il pourrait exister ce que l'on appelle *croisements* et/ou *imbrications.* Ces dispositions particulières d'arcs sont définies comme suit [10, 11].

Définition 3.5. *Dans un diagramme d'arc représentatif d'une partition* P *d'un ensemble* $[n]$ *ou d'un appariement parfait d'un ensemble* $[2n]$*, deux arcs* $e_1(i, j)$ *et* $e_2(k, l)$ *forment :*

- *un croisement avec* e_1 *comme arc initial si* $i < k < j < l$*.*

- *une imbrication avec* e_2 *comme arc intérieur si* $i < k < l < j$*.*

Exemple 3.5. *Dans le diagramme linéaire d'arcs correspondant à la partition de la figure* (3.2.1)*, les arcs* $(1,4)$ *et* $(3,5)$*,* $(3,5)$ *et* $(4,6)$*,* $(7,9)$ *et* $(8,10)$ *forment un croisement. Les arcs* $(1,4)$ *et* $(2,3)$ *forment une imbrication.*

Dans le diagramme linéaire d'arcs correspondant à l'appariement parfait de la figure (3.2.2)*, les arcs* $(3,6)$ *et* $(4,7)$*,* $(3,6)$ *et* $(5,10)$*,* $(4,7)$ *et* $(5,10)$ *forment un croisement. Les arcs* $(5,10)$ *et* $(8,9)$ *forment une imbrication.*

Les croisement et imbrications dans les partitions et les appariements parfaits d'ensembles font l'objet d'une attention particulière lors des deux dernières décenies [10, 11]. S'il est maintenant admis que le nombre de partitions (appariements parfaits) d'un ensemble $[n]$ ($[2n]$) sans croisement (imbrication) est donné par le $n^{ième}$ nombre de Catalan C_n [26], l'attention des chercheurs s'est portée sur l'étude des croisements (imbrications) d'ordre k, correspondant au nombre de paires de croisements (imbrications) d'arcs apparaissant dans différents types de graphes [8, 9, 11–13].

3.2.4 Évitement de patterns dans les appariements et partitions d'ensembles

Différentes définitions ont été données pour les évitements de patterns dans les partitions d'ensembles et appariements parfaits [15, 45–48]. Nous donnerons les définitions suivantes données par Bloom [15]. Nous noterons pour cela $\mathcal{S}_n$ comme l'ensemble des permutations de l'ensemble d'éléments $\{1, 2, \cdots, n\}$.

Définition 3.6. *([15], Définition 5, p.7)*

Soient les ensembles d'éléments $[2n]$ *et de permutations* $\mathcal{S}_k$*. Un appariement parfait* $M \in \mathcal{M}_n$ *évite le pattern* $\tau \in \mathcal{S}_k$ *s'il n'existe pas* $2k$ *sommets* $1 < i_1 < i_2 < \cdots < i_{2k} < 2n$ *tel que* M *contienne toutes les paires* $\left(i_a, i_{2k+1-\tau(a)}\right)$ *avec* $1 \leq a \leq k$*.*

On notera $\mathcal{M}_n(\tau)$ *l'ensemble des appariements parfaits de l'ensemble* $[2n]$*, évitant le pattern* τ*.*

Cette définition est une extension des notions d'évitement de k croisements (ou $k-$*noncrossing* en anglais) et d'évitement de k imbrications (ou $k-$*nonnesting* en anglais) données par [11, 49].

Exemple 3.6. *Considérons l'ensemble des permutations* $\mathcal{S}_3 = \{123, 132, 231, 213, 312, 321\}$. *Pour un pattern* $\tau \in \mathcal{S}_3$, *on peut décrire l'ensemble* $\mathcal{M}_n(\tau)$ *comme l'ensemble des appariements ne contenant pas les paires* $\left(i_1, i_{7-\tau(1)}\right)$, $\left(i_2, i_{7-\tau(2)}\right)$ *et* $\left(i_3, i_{7-\tau(3)}\right)$. *Les différentes configurations de ces paires sont données dans la figure* (3.2.3).

Par exemple, éviter le pattern $\tau \equiv 312$, *revient à éviter les appariements* $(1,4)$, $(2,6)$ *et* $(3,5)$ *correspondant à la configuration de la figure (3.2.3-e).*

Nous remarquerons aussi que :

- *Éviter le pattern* $\tau \equiv 123$ *dans un appariement parfait revient à éviter* 3 *imbrications comme le montre la configuration de la figure (3.2.3-a).*
- *Éviter le pattern* $\tau \equiv 321$ *dans un appariement parfait revient à éviter* 3 *croisements comme le montre la configuration de la figure (3.2.3-f).*

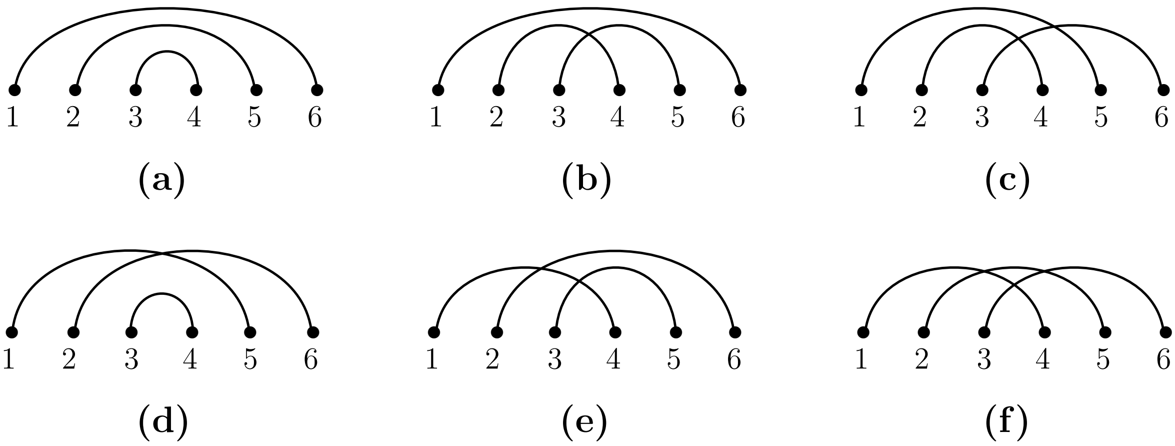

Figure 3.2.3 – Configurations correspondant au pattern $\tau \in \mathcal{S}_3$. (a) $\tau \equiv 123$. (b) $\tau \equiv 132$. (c) $\tau \equiv 231$. (d) $\tau \equiv 213$. (e) $\tau \equiv 312$. (f) $\tau \equiv 321$.

Sachant que les appariements parfaits sont des partitions avec des blocs de taille 2, la définition précédente pour l'évitement de patterns dans les appariements parfaits s'étend naturellement aux partitions d'ensembles comme suit.

Définition 3.7. *([15], Définition 6, p.8)*

Soient les ensembles d'éléments $[n]$ *et de permutations* $\mathcal{S}_k$. *Une partition* $P \in \mathcal{P}_n$ *évite le pattern* $\tau \in \mathcal{S}_k$ *s'il n'existe pas* $2k$ *sommets* $1 < i_1 < i_2 < \cdots < i_{2k} < n$ *tel que* P *contienne toutes les paires* $\left(i_a, i_{2k+1-\tau(a)}\right)$ *avec* $1 \leq a \leq k$.

On notera $\mathcal{P}_n(\tau)$ *l'ensemble des partitions de l'ensemble* $[n]$, *évitant le pattern* τ.

Contrairement aux appariements parfaits, les partitions d'ensembles contiennent des sommets singletons et des sommets transitoires. Les blocs singletons ne contribuent pas aux occurrences d'un quelconque pattern. Pour pouvoir énumérer les partitions évitant un certain pattern $\tau \in \mathcal{S}_k$, Bloom et Elizalde proposent une transformation $P \longmapsto M_P$ qui associe un appariement parfait M_P à chaque partition P [15]. Nous illustrerons cela dans l'exemple suivant.

Exemple 3.7. *Considérons la partition* $P = \{\{1,6,7\},\{2,5\},\{3\},\{4,8\}\}$ *de l'ensemble* $[8]$ *représentée par le diagramme d'arcs de la figure (3.2.4-a) dans lequel les sommets* 1, 2 *et* 4 *sont les extrémités initiales et les sommets* 7, 5 *et* 8 *sont les extrémités terminales. Le sommet* 6 *est transitoire et le sommet* 2 *est un singleton.*

Dans la transformation $P \longmapsto M_P$*, les sommets singletons sont supprimée (c'est le cas du sommet* 2*) et les sommets transitoires sont séparés en deux sommets : le premier comme extrémité terminale suivi du deuxième comme extrémité initiale (c'est le cas du sommet 6). Le diagramme d'arcs de l'appariement* M_P *correspondant est illustré sur la figure (3.2.4-b).*

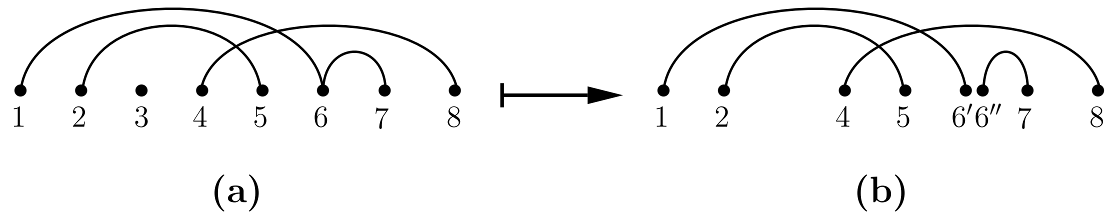

Figure 3.2.4 – (a) Diagramme d'arc correspondant à la partition $P = \{\{1,6,7\},\{2,5\},\{3\},\{4,8\}\}$. (b) Diagramme d'arc de l'appariement parfait $M_P = \{\{1,6'\},\{2,5\},\{4,8\},\{6'',7\}\}$ associé à la partition P.

Cette nouvelle construction de la partition P préserve les occurrences de tout pattern τ. Ainsi, la partition P évite le pattern $\tau \in \mathcal{S}_k$ si et seulement si M_P évite ce même pattern. De plus si $P \in \mathcal{P}_n$ a x blocs, alors $M_P \in \mathcal{M}_{n-x}$.

3.3 Énumération de $\#\mathcal{M}_n(312)$ et $\#\mathcal{M}_n(\sigma,\tau)$

Dans cette section, nous revisitons le travail de Bloom et Elizalde [15] sur les appariements parfaits$\mathcal{M}_n$ évitant le pattern $\tau \in \mathcal{S}_3$ ou une paire de patterns $(\sigma,\tau) \in \mathcal{S}_3^2$. Il a été démontré que les patterns 123, 321 et 213 appartiennent à la même classe d'équivalence de Wilf ($123 \sim 321 \sim 213$) [11, 15, 50]. Il a aussi été démontré que $231 \sim 312$ [51, 52]. De même, les paires de patterns $(\sigma, \tau) \in \mathcal{S}_3^2$ ont été réparties en 7 classes d'équivalence de Wilf (voir Tableau 3, p. 25 dans [15]).

Nous nous intéresserons à l'énumération de $\#\mathcal{M}_n(312)$, soit de manière équivalente à $\#\mathcal{M}_n(231)$, et à l'énumération de $\#\mathcal{M}_n(\sigma,\tau)$ pour les paires de patterns$(\sigma, \tau) \in \mathcal{S}_3^2$ de la classe I d'équivalence de Wilf ($(123, 213) \sim (132, 213) \sim (132, 231) \sim (132, 312) \sim (213, 231) \sim (213, 312) \sim (231, 312) \sim (231, 321) \sim (312, 321)$.

3.3.1 Cas des ensembles $\mathcal{M}_n(312)$

Dans l'identité (2, p.18) de [15], Bloom et Elizalde se sont intéressés à l'étude des ensembles $\mathcal{M}_n(312)$. Ils ont montré que leur cardinal était donné par la fonction génératrice :

$$\sum_{n\geq 0} \#\mathcal{M}_n(312) z^n = \frac{1 + 36z + (1 - 12z)^{3/2}}{2(1 + 4z)^2}. \tag{3.3.1}$$

Ils ont également proposé le comportement asymptotique des coefficients de cette fonction génératrice donné par :

$$\#\mathcal{M}_n(312) \sim \frac{3^3}{2^5\sqrt{\pi n^5}} 12^n. \tag{3.3.2}$$

Nous proposerons dans ce qui suit notre contribution à cette étude en proposant une formulation exacte de $\#\mathcal{M}_n(312)$ à travers une relation de récurrence et une formule explicite.

3.3.1.1 Relation de récurrence pour $\#\mathcal{M}_n(312)$

Notre relation de récurrence est donnée par la proposition suivante.

Proposition 3.1. *Les ensembles $\mathcal{M}_n(312)$ d'appariements parfaits évitant le pattern 312 sont donnés par la relation de récurrence :*

$$\begin{cases} \#\mathcal{M}_0(312) = \mathcal{M}_1(312) = 1. \\ \#\mathcal{M}_n(312) + 8\#\mathcal{M}_{n-1}(312) + 16\#\mathcal{M}_{n-2}(312) = \frac{1}{2}\binom{3/2}{n}(-12)^n. \end{cases} \tag{3.3.3}$$

Preuve. *En exploitant le théorème du binôme généralisé donné par l'équation (1.3.10), on peut écrire :*

$$(1-12z)^{3/2} = \sum_{n\geq 0} \binom{3/2}{n} (-12)^n z^n.$$

En reprenant le numérateur de la fonction génératrice donnée par (3.3.1), on peut le réécrire comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{1+36z+(1-12z)^{3/2}}{2} &= \frac{1}{2}\left(1+36z+\sum_{n\geq 0}\binom{3/2}{n}(-12)^n z^n\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(2+36z-18z+\sum_{n\geq 2}\binom{3/2}{n}(-12)^n z^n\right), \\ &= 1+9z+\frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\binom{3/2}{n}(-12)^n z^n. \end{aligned}$$

L'expression de l'équation (3.3.1) peut alors se réécrire comme :

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} \#\mathcal{M}_n(312) z^n\right) = 1+9z+\frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\binom{3/2}{n}(-12)^n z^n,$$

avec : $\sum_{n\geq 0} a_n z^n = (1+4z)^2 = 1+8z+16z^2$, *soit* $a_0 = 1$, $a_1 = 8$, $a_2 = 16$ *et* $a_n = 0$ *pour* $n \geq 3$.

L'identité précédente étant un produit de Cauchy, on a :

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} a_k \#\mathcal{M}_{n-k}(312) z^n = 1+9z+\frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\binom{3/2}{n}(-12)^n z^n.$$

Par identification terme à terme des deux côté de l'identité précédente, on obtient :

$$\begin{cases} a_0\#\mathcal{M}_0(312) = 1 \\ a_0\#\mathcal{M}_1(312) + a_1\#\mathcal{M}_0(312) = 9 \\ a_0\#\mathcal{M}_n(312) + a_1\#\mathcal{M}_{n-1}(312) + a_2\#\mathcal{M}_{n-2}(312) = \frac{1}{2}\binom{3/2}{n}(-12)^n & , n \geq 2, \end{cases}$$

En remplaçant les coefficients a_n *par leurs valeurs, on obtient la récurrence recherchée.* $\square$

En comparant les premiers termes de notre relation de récurrence avec l'identité (3.3.2) de Bloom-Elizalde, il apparaît une surestimation de $\#\mathcal{M}_n(312)$, pour les faibles valeurs de n, comme le montre la tableau (3.1).

n	$\#\mathcal{M}_n(312)$ (3.3.3)	$\frac{3^3}{2^5\sqrt{\pi n^5}}12^n$
1	1	5.71
2	3	12.11

Table 3.1 – Tableau comparatif entre nos valeurs exactes de $\#\mathcal{M}_n(312)$ obtenus par l'équation (3.3.3) et les valeurs approximatives de [15].

3.3.1.2 Formule explicite de $\#\mathcal{M}_n(312)$

Pour pouvoir comparer encore plus avec l'approximation asymptotique de l'identité (3.3.2) pour des valeurs élevées de n, la relation de récurrence n'est pas la plus adaptée à cette comparaison. Nous nous proposons donc de démontrer l'existence d'une formule explicite donnant la valeur exacte des nombres $\#\mathcal{M}_n(312)$. Celle-ci est énoncée dans le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Pour $n \geq 2$, les ensembles $\mathcal{M}_n(312)$ de appariement parfait évitant le pattern 312 sont donnés par :*

$$\#\mathcal{M}_n(312) = (-4)^n\left(-\frac{5}{4}n + 1 + 1/2\sum_{k=2}^{n}\binom{3/2}{k}(n-k+1)3^k\right). \tag{3.3.4}$$

avec $\#\mathcal{M}_0(312) = \mathcal{M}_1(312) = 1$.

Preuve. *En exploitant toujours le théorème du binôme généralisé donné par l'équation (1.3.10), on peut écrire :*

$$(1+4z)^{-2} = \sum_{n\geq 0}\binom{-2}{n}4^n z^n.$$

La fonction génératrice de l'équation (3.3.1) s'écrit alors comme le produit de Cauchy des deux fonctions $\frac{1+36z+(1-12z)^{3/2}}{2}$ et $(1+4z)^{-2}$:

$$\begin{aligned}\frac{1+36z+(1-12z)^{3/2}}{2(1+4z)^2} &= \left(1+9z+\frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\binom{3/2}{n}(-12)^n z^n\right)\left(\sum_{n\geq 0}\binom{-2}{n}4^n z^n\right)\\ &= \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} a_k\binom{-2}{n-k}4^{n-k}z^n,\end{aligned}$$

avec $a_0 = 1, a_1 = 9$ *et* $a_k = \frac{1}{2}\binom{3/2}{k}(-12)^k;\ k \geq 2$.

Par conséquent, on obtient :

$$\#\mathcal{M}_n(312) = \sum_{k=0}^{n} a_k \binom{-2}{n-k} 4^{n-k}.$$

Finalement, on aura : $\#\mathcal{M}_0(312) = 1, \#\mathcal{M}_1(312) = 1$ *et pour* $n \geq 2$;

$$\#\mathcal{M}_n(312) = \binom{-2}{n}4^n + 9\binom{-2}{n-1}4^{n-1} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\binom{3/2}{k}(-12)^k\binom{-2}{n-k}4^{n-k},$$

qui peut aussi s'écrire comme :

$$\#\mathcal{M}_n(312) = 4^n\left(\binom{-2}{n} + \frac{9}{4}\binom{-2}{n-1} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\binom{3/2}{k}\binom{-2}{n-k}(-3)^k\right).$$

Sachant que $\binom{-2}{n} = (-1)^n(n+1)$, *on aboutit à l'expression finale recherchée :*

$$\#\mathcal{M}_n(312) = (-4)^n\left(-\frac{5}{4}n + 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\binom{3/2}{k}(n-k+1)3^k\right).$$

□

Avec cette formule explicite on pourrait proposer une comparaison plus appropriée de nos valeurs de $\#\mathcal{M}_n(312)$ avec celles asymptotiques de l'équation (3.3.2), comme le montre le tableau (3.2).

n	$\#\mathcal{M}_n(312)$	$\frac{3^3}{2^5\sqrt{\pi n^5}}12^n$	n	$\#\mathcal{M}_n(312)$	$\frac{3^3}{2^5\sqrt{\pi n^5}}12^n$
3	14	52.7691	8	2.9990710^5	1.130742850340361510^6
4	83	308.471	9	2.66899410^6	1.010796641664158210^7
5	570	2118.95	10	2.451357810^7	9.32075966705511410^7
6	4318	16119.4	11	2.3098131610^8	8.81354940087893110^8
7	35068	131572	12	2.22297374210^9	8.50865053788404710^9

Table 3.2 – Tableau comparatif entre nos valeurs exactes de $\#\mathcal{M}_n(312)$ obtenus par l'équation (3.3.4) et les valeurs approximatives de [15].

3.3.2 Cas des ensembles $\mathcal{M}_n(\sigma,\tau)$

Concernant les ensembles $\mathcal{M}_n(\sigma,\tau)$ ((σ,τ) appartenant à la classe I d'équivalence de Wilf), Bloom et Elizalde ont aussi montré dans [15] (théorème 19, p.27) que la fonction génératrice des cardinaux de ces ensembles est donnée par :

$$\sum_{n\geq 0} \#\mathcal{M}_n(\sigma,\tau)z^n = \frac{4}{3+\sqrt{1-8z}}, \tag{3.3.5}$$

et ont, par la suite, déduit l'expression du cardinal de chaque ensemble donné par :

$$\#\mathcal{M}_n(\sigma,\tau) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+2}{n-k}\binom{n+k}{k}. \tag{3.3.6}$$

Dans le théorème suivant, nous proposons une autre formulation pour ces nombres $\#\mathcal{M}(\sigma,\tau)$ comme suit.

Théorème 3.2. *les ensembles $\mathcal{M}_n(\sigma,\tau)$ d'appariements parfaits évitant une paire de patterns de classe I d'équivalence de Wilf, sont tels que $\#\mathcal{M}_0(\sigma,\tau)=1$ et, pour $n\geq 1$:*

$$\#\mathcal{M}_n(\sigma,\tau) = (-1)^n\left[1-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}8^k\binom{1/2}{k}\right]. \tag{3.3.7}$$

Preuve. *Dans l'équation (3.3.5), sachant que :*

$$\frac{4}{3+\sqrt{1-8z}} = \frac{3-\sqrt{1-8z}}{2(1+z)},$$

et que, d'après (1.3.10) :

$$\sqrt{1-8z} = \sum_{n\geq 0}\binom{1/2}{n}(-8)^n z^n,$$

on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3+\sqrt{1-8z}} &= \frac{3-\sqrt{1-8z}}{2(1+z)}, \\
&= \frac{1}{2}\left(3-\sqrt{1-8z}\right)\left(\frac{1}{1+z}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(3-\sum_{n\geq 0}\binom{1/2}{n}(-8)^n z^n\right)\left(\frac{1}{1+z}\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\binom{1/2}{n}(-8)^n z^n\right)\left(\sum_{k\geq 0}(-1)^n z^n\right).
\end{aligned}$$

L'identité précédente étant un produit de Cauchy, la fonction génératrice s'écrit comme :

$$\sum_{n\geq 0}\#\mathcal{M}_n(\sigma,\tau)z^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}a_k z^n,$$

avec : $a_0 = 1$ *et* $a_n = -\frac{1}{2}\binom{1/2}{n}(-8)^n$ *pour* $n \geq 1$.

Par identification terme à terme des deux côté de l'identité précédente, on obtient :

$$\begin{cases} \#\mathcal{M}_0(\sigma,\tau) = 1 \\ \#\mathcal{M}_n(\sigma,\tau) = (-1)^n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{1/2}{n}(-8)^k \quad , n \geq 1, \end{cases}$$

On aboutit finalement à $\#\mathcal{M}_0(\sigma,\tau) = 1$ *et :*

$$\#\mathcal{M}_n(\sigma,\tau) = (-1)^n\left[1-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{1/2}{k}8^k\right].$$

□

Quelques valeurs des nombres $\#M_n(\sigma,\tau)$ obtenues par l'équation (3.3.7) sont données dans le tableau (3.3).

n	$\#\mathcal{M}_n(\sigma,\tau)$	n	$\#\mathcal{M}_n(\sigma,\tau)$
2	3	6	2307
3	13	7	14589
4	67	8	95235
5	381	9	636925

Table 3.3 – Quelques valeurs des nombres $\#\mathcal{M}_n(\sigma,\tau)$ obtenus par l'équation (3.3.7).

Remarque 3.1. *La formule explicite* (3.3.6) *des nombres* $\#\mathcal{M}_n(\sigma,\tau)$ *donnée par [15] (théorème 19, p.27) correspond en réalité à notre formule explicite pour les nombre* $\#\mathcal{M}_{n+1}(\sigma,\tau)$*, et après comparaison on obtient la relation suivante :*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{n-k-1}\binom{n+k-1}{k} = (-1)^n\, n\left[1-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\binom{1/2}{k}8^k\right]. \tag{3.3.8}$$

3.4 Énumération de $\#\mathcal{P}_n(\sigma,\tau)$

Nous continuons notre contribution au travail de [15] sur les ensembles de partitions $\#\mathcal{P}_n(\sigma,\tau)$ évitant les patterns (σ,τ) de classe I d'équivalence de Wilf. en le complétant avec une relation de récurrence et une formule explicite.

Bloom et Elizalde ont proposé pour ces nombres la fonction génératrice suivante (théorème 19, p.27 dans [15]) :

$$\sum_{n\geq 0}\#\mathcal{P}_n(\sigma,\tau)z^n = \frac{2-3z+z^2-z\sqrt{1-6z+z^2}}{2(1-3z+3z^2)}. \tag{3.4.1}$$

3.4.1 Relation de récurrence pour $\#\mathcal{P}_n(\sigma,\tau)$

La relation de récurrence pour énumérer $\#\mathcal{P}_n(\sigma,\tau)$ est donnée par la proposition suivante.

Proposition 3.2. *Les ensembles* $\mathcal{P}_n(\sigma,\tau)$ *de partitions d'ensembles évitant la paire de patterns* (σ,τ) *sont donnés par la relation de récurrence :*

$$\begin{cases}\#\mathcal{P}_0(\sigma,\tau) = \#\mathcal{P}_1(\sigma,\tau) = 1\ ,\ \#\mathcal{P}_2(\sigma,\tau) = 4\\ \#\mathcal{P}_n(\sigma,\tau) - 3\#\mathcal{P}_{n-1}(\sigma,\tau) + 3\#\mathcal{P}_{n-2}(\sigma,\tau) = -\frac{1}{2}\binom{1/2}{j}\binom{j}{n-j-1}(-6)^{2j-n+1}.\end{cases} \tag{3.4.2}$$

Preuve. *Nous considérerons les fonctions génératrices :*

$$\frac{1}{1-3z+3z^2} = \sum_{n\geq 0}F_n(3)z^n \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1-6z+z^2} = \sum_{n\geq 0}H_n z^n.$$

La combinaison des identités (1.5.4), (1.5.5) *et* (1.5.3), *pour* $\alpha = 1/2$, *conduit à écrire :*

$$F_n(3) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-j}{j} (-1)^j 3^{n-j},$$

et

$$H_n = \sum_{j=1}^{n} \binom{1/2}{j} \binom{j}{n-j} (-6)^{2j-n}.$$

Par conséquent, le numérateur de l'équation (3.4.1) *s'écrit :*

$$\begin{aligned}
2 - 3z + z^2 - z\sum_{n\geq 0} H_n z^n &= 2 - 3z + z^2 - \sum_{n\geq 0} H_n z^{n+1} \\
&= 2 - 3z + z^2 - \sum_{n\geq 1} H_{n-1} z^n \\
&= 2 - 3z + z^2 - H_0 z - H_1 z^2 - \sum_{n\geq 3} H_{n-1} z^n.
\end{aligned}$$

Sachant que $H_0 = 1$ *et* $H_1 = -3$, *on a :*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(2 - 3z + z^2 - z\sum_{n\geq 0} H_n z^n\right) &= 1 - 2z + 2z^2 - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 3} H_{n-1} z^n \\
&= \sum_{n\geq 0} a_n z^n,
\end{aligned}$$

avec : $a_0 = 1, a_1 = -2, a_2 = 2$, *et* $a_n = -\frac{H_{n-1}}{2}$. *L'équation* (3.4.1) *s'écrit alors comme suit :*

$$\left(1 - 3z + 3z^2\right)\left(\sum_{n\geq 0} \#\mathcal{P}_n(\sigma,\tau) z^n\right) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n.$$

L'identité précédente est équivalente à un produit de Cauchy tel que :

$$\left(\sum_{n\geq 0} b_n z^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} \#\mathcal{P}_n(\sigma,\tau) z^n\right) = \textstyle\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \#\mathcal{P}_{n-k}(\sigma,\tau) b_k\right) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$

avec $b_0 = 1$, $b_1 = -3$, $b_2 = 3$ *et* $b_n = 0$ *pour* $n \geq 3$. *Par identification, terme à terme, des deux côté de l'identité précédente, on obtient :*

$$\begin{cases} \#\mathcal{P}_0(\sigma,\tau)b_0 = a_0 \\ \#\mathcal{P}_1(\sigma,\tau)b_0 + \#\mathcal{P}_0(\sigma,\tau)b_1 = a_1 \\ \#\mathcal{P}_2(\sigma,\tau)b_0 + \#\mathcal{P}_1(\sigma,\tau)b_1 + \#\mathcal{P}_0(\sigma,\tau)b_2 = a_2 \\ \#\mathcal{P}_n(\sigma,\tau)b_0 + \#\mathcal{P}_{n-1}(\sigma,\tau)b_1 + \#\mathcal{P}_{n-2}(\sigma,\tau)b_2 = a_n \quad , n \geq 3. \end{cases}$$

Connaissant les coefficients a_0, a_1, a_2, a_n *et* b_0, b_1, b_2 , *on aboutit finalement à la relation de récurrence suivante :*

$$\#\mathcal{P}_n(\sigma,\tau) - 3\#\mathcal{P}_{n-1}(\sigma,\tau) + 3\#\mathcal{P}_{n-2}(\sigma,\tau) = -\frac{1}{2}\binom{1/2}{j}\binom{j}{n-j-1}(-6)^{2j-n+1},$$

avec : $\#\mathcal{P}_0(\sigma,\tau) = 1$, $\#\mathcal{P}_1(\sigma,\tau) = 1$ *et* $\#\mathcal{P}_2(\sigma,\tau) = 4$.

□

3.4.2 Formule explicite de $\#\mathcal{P}_n(\sigma,\tau)$

Nous énoncerons dans le théorème suivant la formule explicite donnant les nombres $\#\mathcal{P}_n(\sigma,\tau)$.

Théorème 3.3. *les nombres* $\#\mathcal{P}_n(\sigma,\tau)$ *de partitions d'ensembles évitant une paire de patterns* (σ,τ), *de classe I d'équivalence de Wilf, sont tels que* $\#\mathcal{P}_0(\sigma,\tau) = \#\mathcal{P}_1(\sigma,\tau) = 1$, $\#\mathcal{P}_2(\sigma,\tau) = 2$ *et, pour* $n \geq 3$ *:*

$$\begin{aligned} \#\mathcal{P}_n(\sigma,\tau) \;=\; & \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-j}{j}(-1)^j 3^{n-j} - \frac{2}{3} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-j-1}{j}(-1)^j 3^{n-j} \\ & + 23^{n-2} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-j-2}{j}(-1)^j \,(1/3)^j \\ & + 3^{n+1} \sum_{k=3}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} \binom{1/2}{j}\binom{j}{k-j-1}(-6)^{2j-k} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} \binom{n-j-k}{j}(-1)^j \,(1/3)^{j+k}. \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Preuve. *On a déjà écrit que :*

$$\frac{1}{2}\left(2-3z+z^2-z\sum_{n\geq 0}H_n z^n\right)=1-2z+2z^2-\sum_{n\geq 3}\frac{H_{n-1}}{2}z^n=\sum_{n\geq 0}a_n z^n,$$

avec : $a_0=1, a_1=-2, a_2=2$ *et* $a_n=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\binom{1/2}{j}\binom{j}{n-j-1}(-6)^{2j-n+1}$.

Le produit de Cauchy pour les fonctions $\dfrac{1}{1-3z+3z^2}$ *et* $\dfrac{2-3z+z^2-z\sqrt{1-6z+z^2}}{2}$ *conduit directement à :*

$$\#\mathcal{P}_n(\sigma,\tau)=\sum_{k=0}^{n}a_k F_{n-k}(3),$$

et finalement à $\#\mathcal{P}_0(\sigma,\tau)=\#\mathcal{P}_1(\sigma,\tau)=1,\ \#\mathcal{P}_2(\sigma,\tau)=2,$ *et :*

$$\#\mathcal{P}_n(\sigma,\tau)=F_n(3)-2F_{n-1}(3)+2F_{n-2}(3)-\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}H_{k-1}F_{n-k}(3).$$

□

Le tableau (3.4) donne quelques valeurs des nombres $\#F_{n-k}(3)$ et $\#\mathcal{P}_n(\sigma,\tau)$ obtenues par les équations (1.5.5) et (3.4.3) respectivement.

n	a_k	$F_{n-k}(3)$	$\#\mathcal{P}_n(\sigma,\tau)$	n	a_k	$F_{n-k}(3)$	$\#\mathcal{P}_n(\sigma,\tau)$
0	1	1	1	4	6	9	15
1	-2	3	1	5	22	0	52
2	2	6	2	6	90	-27	201
3	2	9	5	7	394	-81	841

Table 3.4 – Quelques valeurs des nombres $\#\mathcal{P}_n(\sigma,\tau)$ obtenus par l'équation (3.4.3).

3.5 Conclusion

Dans cette dernière partie de notre travail de thèse, nous nous sommes intéressés au dénombrement combinatoire des nombres d'appariements parfaits $\#\mathcal{M}_n(312)$ évitant le pattern (312) (ou (231)) et $\#\mathcal{M}_n(\sigma,\tau)$ évitant une des 9 paires de patterns (σ,τ) de la classe I d'équivalence de Wilf donnée par [15]. Nous nous sommes aussi intéressés aux nombres de partitions $\#\mathcal{P}_n(\sigma,\tau)$ évitant ces mêmes paires de patterns (σ,τ). Nous avons basé notre étude sur les résultats déjà obtenus par Bloom et Elizalde [15] en la complétant par une relation de récurrence et une formule explicite pour les nombres $\#\mathcal{M}_n(312)$ (équations (3.3.3) et (3.3.4)), là ou Bloom et Elizalde n'ont proposé qu'une approximation asymptotique, une autre formule explicite pour les nombres $\#\mathcal{M}_n(\sigma,\tau)$ (équation (3.3.7)) et une relation de récurrence et une formule explicite pour les nombres $\#\mathcal{P}_n(\sigma,\tau)$ (équations (3.4.2) et (3.4.3)) là où Bloom et Elizalde n'ont proposé qu'une fonction génératrice.

Conclusion générale

A l'heure de la croissance exponentielle des travaux de recherche en rapport avec le dénombrement combinatoire en théorie du langage et en théorie des graphes, la recherche de méthodes mathématiques souples et intuitives pour aboutir à des formules explicites d'énumérations est devenu un défi majeur dans la littérature. En théorie du langage, De nombreux travaux en rapport avec l'énumération de mots de taille arbitraire contenant ou évitant des patterns ont été publiés. En théorie des graphes, d'autres travaux en rapport avec l'énumération des partitions d'ensembles et appariements parfaits contenant ou évitant des patterns ou paires de patterns font aussi l'objet d'une attention particulière dans la littérature. Le recours aux fonctions algébriques génératrices a permis d'aider à répondre à certains de ces défis.

Ce travail de thèse s'inscrit dans cette démarche dans le sens où il représente une nouvelle approche pour étudier la façon de déterminer les nombres de mots de longueur finie, contenant un nombre fini de lettres qui se répètent (pattern) en théorie de langage. Nous avons aussi montré que notre approche pouvait trouver sa projection dans l'étude des appariements parfaits et des partitions d'ensembles finis. Les outils utilisés sont les fonctions génératrices, notamment celles engendrant les nombres de Fibonacci ainsi que les polynôme de Fibonacci généralisés et les polynômes de Bell.

Dans la première partie de ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés au calcul des nombres $P\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & j \end{bmatrix}$ de mots de taille arbitraire j contenant le pattern a_2a_2 à partir de l'alphabet $E_2 = \{a_1, a_2\}$. L'étude a permis de dégager trois relations différentes de récurrence et une formule explicite. Nous avons réussi à étendre notre étude au cas général de mots de taille j contenant le pattern $\underbrace{a_m a_m \cdots a_m}_{n \text{ fois}}$ à partir de l'alphabet $E_m = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Dans ce dernier cas, nous avons énoncé deux relations générales de récurrence et une formule explicite permettant d'énumérer les nombres $P\left[{n\ m \atop j}\right]$.

Dans la deuxième partie de notre travail, nous nous somme projetés dans un autre domaine des mathématiques qu'est celui des partitions et appariements d'ensembles où leurs énumérations via l'usage des fonctions génératrices font l'objet de plus en plus de travaux dans la littérature. Nous nous sommes particulièrement intéressés au travail de Bloom et Elizalde (2013) sur le dénombrement d'appariement parfaits $\#\mathcal{M}_n(312)$ évitant le pattern (312) ou ceux évitant une paire de patterns d'une classes d'équivalence bien déterminée ($\#\mathcal{M}_n(\sigma,\tau)$) ainsi que les nombres $\#\mathcal{P}_n(\sigma,\tau)$ de partions d'ensembles évitant cette paire de patterns. Notre contribution, dans le cadre de notre travail de thèse, a été de compléter les résultats de Bloom et Elizalde par une relation de récurrence et une formule explicite pour les nombres $\#\mathcal{M}_n(312)$, là ou Bloom et Elizalde n'ont proposé qu'une approximation asymptotique. Pour les nombres $\#\mathcal{M}_n(\sigma,\tau)$, nous avons proposé une formulation explicite. Nous avons enfin pu proposer une relation de récurrence et une formule explicite pour les nombres $\#\mathcal{P}_n(\sigma,\tau)$.

Notre approche constitue un pas important dans le domaine de l'application de l'analyse combinatoire à l'aide des fonctions génératrices, aussi bien en théorie de langage qu'en théorie des graphes. L'apport des fonctions génératrices des nombres et polynômes de Fibonacci et Bell a été indéniable dans la concrétisation de ce travail de thèse. Il offre des perspectives diverses et variées dans les deux domaines des mathématiques, en ce sens où l'on pourrait étendre notre approche à des cas plus complexes dans la théorie de langage avec des alphabets plus ciblés et des patterns bien déterminés. Nous pouvons aussi nous intéresser à d'autres types de patterns à éviter dans les appariements en élargissant les types, classes et tailles de patterns ou de paires de patterns à éviter dans les appariements parfaits et partitions d'ensemble, mais aussi dans les partitions contenant ou évitant certains croisement ou imbrications.

Bibliographie

[1] J. Hopcroft, R. Motwani, and J. Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*, Addison-Wesley series in computer science, Addison-Wesley, 2001.

[2] M. Sipser, *Introduction to the Theory of Computation*, Introduction to the Theory of Computation, Cengage Learning, 2012.

[3] O. Kupferman, S. Safra, and M. Y. Vardi, *"Relating word and tree automata"*, Annals of Pure and Applied Logic, vol. 138, no. 1, pp. 126–146, 2006.

[4] K. Chatterjee, L. Doyen, and T. A. Henzinger, *"Quantitative languages"*, ACM Trans. Comput. Logic, vol. 11, jul 2010.

[5] L. Fleischer and J. Shallit, *"Automata, palindromes, and reversed subwords"*, Journal of Automata, Languages and Combinatorics, vol. 26, no. 3–4, pp. 221–253, 2021.

[6] A. Pettorossi, *Automata Theory and Formal Languages : Fundamental Notions, Theorems, and Techniques*, Springer International Publishing, 2022.

[7] F. Lehner and C. Lindorfer, *"Self-avoiding walks and multiple context-free languages"*, Combinatorial Theory, vol. 3, no. 1, p. 50, 2023. Id/No 18.

[8] J. Riordan, *"The distribution of crossings of chords joining pairs of $2n$ points on a circle"*, Mathematics of Computation, vol. 29, pp. 215–222, 1975.

[9] D. Gouyou-Beauchamps, *"Standard young tableaux of height 4 and 5"*, European Journal of Combinatorics, vol. 10, no. 1, pp. 69–82, 1989.

[10] C. Krattenthaler, *"Permutations with restricted patterns and dyck paths"*, Advances in Applied Mathematics, vol. 27, no. 2, pp. 510–530, 2001.

[11] W. Y. C. Chen, E. Y. P. Deng, R. R. X. Du, R. P. Stanley, and C. H. Yan, *"Crossings and nestings of matchings and partitions",* Trans. Amer. Math. Soc., vol. 359, pp. 1555–1575, 2007.

[12] A. de Mier, *"Decreasing subsequences in permutations and wilf equivalence for involutions",* Journal of Algebraic Combinatorics, vol. 22, no. 4, pp. 383–409, 2005.

[13] M. Bousquet-Melou and E. Steingrï¿œmsson, *"Decreasing subsequences in permutations and wilf equivalence for involutions",* Journal of Algebraic Combinatorics, vol. 22, no. 4, pp. 383–409, 2005.

[14] P. Flajolet and R. Sedgewick, *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, 2009.

[15] J. Bloom and S. Elizalde, *"Pattern avoidance in matchings and partitions",* The Electronic Journal of Combinatorics, vol. 2, p. Research Paper P5, 2013.

[16] S. Gahlot and R. N. Saraswat, *"Fuzzy information inequalities and application in pattern recognition",* International Journal of Mathematics in Operational Research, vol. 23, no. 4, pp. 456–480, 2022.

[17] M. Bousquet-Melou, "Algebraic generating functions in enumerative combinatorics and context-free languages", in *STACS 2005* (V. Diekert and B. Durand, eds.), (Berlin, Heidelberg), pp. 18–35, Springer Berlin Heidelberg, 2005.

[18] Z. Wang, D. Xiao, W. Li, and L. He, *"A dna procedure for solving the shortest path problem",* Applied Mathematics and Computation, vol. 183, no. 1, pp. 79–84, 2006.

[19] Z. Lin, D. G. Wang, and T. Zhao, *"A decomposition of ballot permutations, pattern avoidance and gessel walks",* Journal of Combinatorial Theory, Series A, vol. 191, p. 105644, 2022.

[20] R. Domagalski, S. Elizalde, J. Liang, Q. Minnich, B. E. Sagan, J. Schmidt, and A. Sietsema, *"Cyclic pattern containment and avoidance",* Advances in Applied Mathematics, vol. 135, p. 102320, 2022.

[21] K. Menon and A. Singh, *"Pattern avoidance of [4,k]-pairs in circular permutations",* Advances in Applied Mathematics, vol. 138, p. 102346, 2022.

[22] S. Garg and A. Peng, *"Classical and consecutive pattern avoidance in rooted forests",* Journal of Combinatorial Theory, Series A, vol. 194, p. 105699, 2023.

[23] J. Pan, *"On a conjecture about strong pattern avoidance",* Graphs and Combinatorics, vol. 39, no. 1, p. Research Paper P2, 2023.

[24] M. Cervetti and L. Ferrari, *"Enumeration of some classes of pattern avoiding matchings, with a glimpse into the matching pattern poset",* Annals of Combinatorics, vol. 26, no. 4, pp. 971–995, 2022.

[25] J. J. Fang, Z. Hamaker, and J. M. Troyka, *"On pattern avoidance in matchings and involutions",* The Electronic Journal of Combinatorics, vol. 24, no. 1, p. Research Paper P1.39, 2022.

[26] H. S. Wilf, *Generatingfunctionology*, Boston : Academic Press, 1994.

[27] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, New York : A Wiley-Interscience Publication, 2001.

[28] S. Falcon, *"On k-fibonacci sequences and polynomials and their derivatives",* Chaos, Solitons and Fractals, vol. 39, pp. 1005–1019, 2009.

[29] H. Prodinger, *"Sums of powers of fibonacci polynomials",* Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), vol. 119, no. 5, pp. 567–570, 2009.

[30] Y. Ma and W. Zhang, *"Some identities involving fibonacci polynomials and fibonacci numbers",* The Electronic Journal of Combinatorics, vol. 2, p. Research Paper P5, 2013.

[31] M. S. Teeth and S. Harne, "Polynomials related to generalized fibonacci sequence", in *Coding Theory Essentials* (D. G. Harkut and K. N. Kasat, eds.), ch. 7, Rijeka : IntechOpen, 2023.

[32] *"MÃ©moire sur l'intÃ©gration des Ã©quations linÃ©aires aux diffÃ©rences finies, d'un ordre quelconque, Ã coefficients variables",* Comptes rendus des sÃ©ances de l'AcadÃ©mie des sciences, vol. 17, pp. 559–567, 1843.

[33] G. Ozdemir and Y. Simsek, *"Generating functions for two-variable polynomials related to a family of fibonacci type polynomials and numbers",* Filomat, vol. 30, no. 4, pp. 969–975, 2016.

[34] A. F. Horadam, *"Jacobsthal and bell curves",* The Fibonacci Quarterly, vol. 26, no. 1, 1988.

[35] O. V. Kuzmin and O. V. Leonova, *"On partition polynomials"*, Discrete Mathematics and Applications, vol. 11, no. 2, pp. 173–188, 2001.

[36] M. Abbas and S. Bouroubi, *"On new identities for bell's polynomials"*, Discrete Mathematics, vol. 293, no. 1, pp. 5–10, 2005. 19th British Combinatorial Conference.

[37] W. Wang and T. Wang, *"General identities on bell polynomials"*, Computers and Mathematics with Applications, vol. 58, no. 1, pp. 104–118, 2009.

[38] M. Goubi, *"r-bell polynomials and derangement polynomials identities using exponential partial bell polynomials"*, Montes Taurus Journal of Pure Applied Mathematics, vol. 5, no. 1, pp. 54–64, 2023.

[39] L. Comtet, *Advanced combinatorics : the art of finite and infinite expansions ; rev. version*, Dordrecht : Reidel, 1974. Trans. of : Analyse combinatoire. Paris : Presses Univ. de France, 1970.

[40] M. Goubi, *"On combinatorial formulation of fermat quotients and generalization"*, Montes Taurus Journal of Pure Applied Mathematics, vol. 4, no. 1, pp. 59–76, 2022.

[41] F. Hessas, M. Goubi, and N. Benkhemmou, *"A new approach for counting patterns in language theory, matchings, and set partitions."*, International Journal of Mathematics in Operational Research, vol. xx, pp. xx–xx, 2024.

[42] H. S. Wilf, *"The patterns of permutations"*, Discrete Mathematics, vol. 257, no. 2, pp. 575–583, 2002. Kleitman and Combinatorics : A Celebration.

[43] M. Klazar, *"Counting pattern-free set partitions i : A generalization of stirling numbers of the second kind"*, European Journal of Combinatorics, vol. 21, no. 3, pp. 367–378, 2000.

[44] M. Klazar, *"Counting pattern-free set partitions ii : Noncrossing and other hypergraphs"*, European Journal of Combinatorics, vol. 7, R34, p. 25 pp., 2000.

[45] M. Klazar, *"On abab-free and abba-free set partitions"*, Eur. J. Comb., vol. 17, pp. 53–68, 1996.

[46] B. E. Sagan, *"Pattern avoidance in set partitions"*, Ars Comb., vol. 94, 2006.

[47] V. Jelínek and T. Mansour, *"On pattern-avoiding partitions."*, The Electronic Journal of Combinatorics [electronic only], vol. 15, no. 1, p. Research Paper R39, 2008.

[48] V. Jelínek and T. Mansour, *"Matchings and partial patterns"*, Electronic Journal of Combinatorics, vol. 17, no. 1, 2010.

[49] C. Krattenthaler, *"Growth diagrams, and increasing and decreasing chains in fillings of ferrers shapes"*, Adv. Appl. Math., vol. 37, pp. 404–431, 2005.

[50] J. Backelin, J. West, and G. Xin, *"Wilf-equivalence for singleton classes"*, Advances in Applied Mathematics, vol. 38, no. 2, pp. 133–148, 2007. authorCount :3.

[51] Z. Stankova and J. West, *"A new class of wilf-equivalent permutations"*, J. Algebraic Comb., vol. 15, no. 3, pp. 271–290, 2002.

[52] J. Bloom and D. Saracino, "A simple bijective proof of the shape-wilf-equivalence of the patterns 231 and 312", 2012.