

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

THÈSE DE DOCTORAT

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

OPTION : RECHERCHE OPÉRATIONNELLE ET OPTIMISATION

Présentée par :

Mme KARA Fadila

Thème

Problème de contrôle optimal d'une commande polyédrale

Soutenue le 23/06/2018 devant le jury composé de :

Mr. Djamel HAMADOUCHE	Professeur	U.M.M.T.O.	Président
Mr. Mohamed AIDENE	Professeur	U.M.M.T.O	Rapporteur
Mr. Brahim OUKACHA	Professeur	U.M.M.T.O	Examineur
Mr. Meziane AIDER	Professeur	U.S.T.H.B	Examineur
Mr. Mohand Said RADJEF	Professeur	U.A.Mira. Béjaia	Examineur
Mr. Mohand Ouamer BIBI	Professeur	U.A.Mira. Béjaia	Examineur
Mr. Pierre SPITERI	Professeur	ENSEEIH.T. Toulouse	Invité

** Remerciements **

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères à mon directeur de thèse, le Professeur Mohamed Aidene, pour m'avoir guidée, encouragée et conseillée tout au long de cette thèse.

Je tiens particulièrement à remercier, le Professeur Pierre Spiteri de l'université de Toulouse d'avoir accepté mon invitation et être parmi les membres de jury, comme invité. Je le remercie pour son intérêt et son soutien, sa grande disponibilité et ses nombreux conseils tout au long des stages effectués au sein du laboratoire IRIT-ENSEEIH de Toulouse. Il a contribué par ses nombreuses remarques et suggestions à améliorer la qualité de cette thèse.

J'exprime mes sincères remerciements à Monsieur le Professeur Djamel Hamadouche qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Les Professeurs Méziane Aider, Mohand Said Radjef, Mohand Ouamer Bibi et Brahim Oukacha m'ont fait l'honneur de participer au Jury de soutenance, je les en remercie profondément.

Je remercie également Mr Frédéric Messine de l'université de Toulouse pour son aide dans la partie programmation.

Je remercie mes chers parents qui tiennent une place immense dans mon coeur, c'est grâce à eux que je suis ce que je suis maintenant. Je ne pourrais les remercier assez, que Dieu les protège.

J'adresse aussi mes remerciements à mon mari, à tous les membres de ma famille et de ma belle famille, pour leur soutien et leurs encouragements tout au long de cette thèse.

Enfin, je remercie mes plus proches amies, en ayant une pensée toute particulière pour Kahina, à qui je souhaite santé et bonheur.

Liste des travaux scientifiques

Publication :

1. Fadila Kara, Pierre Spiteri, Frederic Messine, Mohamed Aidene, Numerical optimal control method for solving a large thermic process, RAIRO-Oper. Res.50 (2016) 297-314.

Communications :

1. Fadila Kara, Mohamed Aidene, Principe du maximum d'un problème de contrôle optimale d'une commande polyédrale, 6ème Rencontre sur l'Analyse Mathématique et ses Applications (RAMA VI), Tizi-Ouzou, Avril 2008.
2. Fadila Kara, Mohamed Aidene, Résolution d'un problème non linéaire de contrôle optimale, Colloque International sur l'Optimisation et les Systèmes d'information (COSI' 08), Tizi-Ouzou, Juin 2008.
3. Fadila Kara, Mohamed Aidene, Résolution d'un problème min-max avec une commande polyédrale, la Vème Conférence Internationale en Recherche Opérationnelle (CIRO'10), Marrakech, Mai 2010.
4. Fadila Kara, Mohamed Aidene, Resolution of a min-max optimal control problem with a polyhedron control, Second International Symposium on Operational Research (ISOR'11), Alger, 2011.
5. Fadila Kara, Pierre Spiteri, Frederic Messine, Mohamed Aidene, Résolution d'un problème de contrôle optimal avec contrainte sur l'état final et la commande par la méthode de relaxation, First International Conference on Electrical Engineering and Control Applications (ICEECA'2012), Khenchela, Novembre 2012.
6. Fadila Kara, Pierre Spiteri, Frederic Messine, Mohamed Aidene, Résolution d'un problème de contrôle optimal avec contrainte sur l'état final et la commande par la méthode de relaxation, 8ème Rencontre d'Analyse Mathématique et ses Applications, Alger, Novembre 2012.
7. Fadila Kara, Pierre Spiteri, Frederic Messine, Mohamed Aidene, Méthode numérique pour résoudre un problème de contrôle optimal de processus thermiques de grande dimension, Colloque International sur l'Optimisation et les Systèmes d'information (COSI' 2014), Bejaia, Juin 2014.

Table des matières

Table des matières	1
Introduction générale	4
1 Résolution numérique des équations différentielles ordinaires	7
1.1 Système différentiel ordinaire du premier ordre	7
1.1.1 Problème de Cauchy	7
1.1.2 Existence et unicité de la solution	8
1.2 Méthode de résolution des équations différentielles	8
1.2.1 Méthodes numériques à un pas	9
1.2.2 Méthode d'Euler ou méthode de la tangente	12
1.2.3 Méthodes de Runge-Kutta	12
2 Introduction au contrôle optimal	21
2.1 Systèmes contrôlés	21
2.2 Définition d'un problème de contrôle optimal	22
2.3 Ensemble Accessible	23
2.4 Contrôlabilité	24
2.4.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes	24
2.4.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires non autonomes	25
2.5 Principe du Maximum de Pontryagin	26
2.6 Problème de contrôle linéaire quadratique	28
3 Méthode de relaxation couplée à la méthode de tir	30
3.1 Introduction	30
3.2 Position du problème	31
3.2.1 Cas sans contrainte sur la commande	31
3.2.2 Cas avec contrainte sur la commande :	33

3.2.3	La méthode de tir simple	36
3.3	Méthode de résolution numérique	36
3.3.1	Cas avec contrainte	36
3.3.2	Cas sans contraintes	37
3.4	Convergence de la méthode	37
3.5	Exemples numériques	41
3.5.1	Exemple 1	41
3.5.2	Exemple 2	45
3.6	Conclusion	48
4	Régulation d'un processus thermique de grande dimension	50
4.1	Introduction	50
4.2	Position du problème	51
4.2.1	Le principe de Pontryagin dans le cas avec contrainte	53
4.3	Expérimentations numériques	54
4.3.1	Le four à trois zones de chauffage	54
4.3.2	Le four à douze zones de chauffage	55
4.3.3	Commentaire des résultats expérimentaux	59
4.4	Conclusion	59
5	Résolution d'un problème de contrôle optimal avec contrainte sur l'état et sur le contrôle	60
5.1	Introduction	60
5.2	Position du problème	61
5.2.1	Le principe de Pontryagin dans le cas avec contrainte	62
5.3	Algorithme de résolution	62
5.4	Convergence de la méthode	62
5.5	Système en anneau	63
5.6	Régulation de processus thermique	64
5.6.1	Le four à trois zones de chauffages	64
5.6.2	Le four à douze zones de chauffages	67
5.7	Conclusion	67
A	Solution analytique du système en anneau sans contrainte	70
B	Méthode de Tir et méthode de Newton	75

Table des matières	3
Conclusion générale	82
Bibliographie	83

Introduction générale

Dans les applications, un système dynamique permet de modéliser un système physique, mécanique, électronique, biologique, économique, etc. La phase de modélisation est donc essentielle dans le processus d'analyse et de synthèse d'une application. Elle joue également un rôle important lorsqu'on souhaite contrôler un processus. Le modèle mathématique idéal est obtenu en écrivant les lois physiques régissant le comportement du système. Cette étape résulte de l'écriture des équations différentielles et algébriques linéaires, non linéaires, à coefficients constants ou variant dans le temps qui décrivent mathématiquement le comportement idéal du système étudié.

La majorité des modèles mathématiques décrivant le fonctionnement des systèmes physiques est en réalité non linéaire. La résolution des équations non linéaires peut s'avérer difficile ; c'est pourquoi, dans la majorité des cas, on est amené à linéariser localement les modèles non linéaires, ce qui conduit à une résolution plus aisée. Dans cette phase de linéarisation, on veillera tout particulièrement à représenter le plus exactement possible et de manière pertinente le comportement du système physique réel. Techniquement la procédure de linéarisation est basée sur les développements en séries de Taylor à l'ordre un autour d'un point de fonctionnement.

Le contrôle consiste à amener un système dynamique d'un état initial donné vers un état final, en respectant certains critères. Un problème de contrôle optimal est généralement décrit par un système dynamique et une fonction objectif. Pour ce type de problème, on cherche alors à optimiser un critère donné tout en respectant les équations décrivant l'état du système. A titre d'exemple illustratif, on peut étudier le déplacement d'un objet en minimisant la dépense énergétique pour réaliser ce déplacement.

Avant de résoudre un problème de contrôle optimal, il faut d'abord vérifier la contrôlabilité du système. La notion de contrôlabilité est apparue dans les années soixante avec les travaux de R.E.Kalman [12], [13] dans le cadre des systèmes linéaires autonomes.

Ainsi, pour la classe particulière des systèmes différentiels linéaires associés à un critère quadratique sur le contrôle, Kalman [14] a présenté une approche basée sur l'élimination du vecteur d'état adjoint, en supposant que celui-ci est une forme linéaire du vecteur d'état.

Les méthodes utilisées pour résoudre un problème de contrôle optimal sont nombreuses et variées. On a considéré successivement le calcul des variations, la programmation dynamique [2] qui fournit une condition suffisante d'optimalité et le principe du maximum de Pontryagin [26], [27], [28], qui donne une condition nécessaire d'optimalité et permet ainsi de calculer l'état et le contrôle à appliquer au système. Le principe du maximum de Pontryagin est une extension des résultats du calcul des variations au cas où il n'y a pas de contraintes sur l'état et où il y a des contraintes sur le contrôle. Dans le cas d'une résolution numérique d'un problème de contrôle, si on utilise le principe du maximum, on rencontre des difficultés liées au fait que le système différentiel décrivant l'état adjoint du système ne comporte pas des conditions initiales ou finales complètement définies. Dans ce cas, cette difficulté peut être levée par l'utilisation de la méthode de tir correspondante à la méthode de Newton approchée.

La méthode de tir [33] simple est une méthode indirecte, basée sur le Principe du Maximum de Pontryagin; elle est réputée pour sa rapidité et sa précision dans le traitement des problèmes de contrôle optimal. Elle consiste à rechercher le zéro d'une fonction de tir associée $G(p_0) = 0$, définie à partir des contraintes sur l'état du système. Le principe général des méthodes indirectes, en particulier la méthode de tir, consiste à calculer la condition initiale $p_0 = p(0)$ déduite du principe de maximum de Pontryagin, ce vecteur adjoint devant nécessairement vérifier les conditions de transversalité.

Dans le présent travail, on présente et on analyse une méthode de résolution numérique de problèmes de contrôle optimal quadratique de grande dimension avec un temps terminal, une valeur de l'état final fixées et une contrainte sur le contrôle. Nous proposons donc de résoudre ce problème par la méthode de relaxation couplée avec la méthode de tir.

Le présent manuscrit est répartie en cinq chapitres. Le chapitre 1, présente le principe de résolution numérique des équations différentielles ordinaires. Le second chapitre, est une introduction au contrôle optimal; on y présente des généralités essentielles relative à un problème de contrôle optimal. Dans le chapitre 3, on s'intéresse plus particulièrement à la résolution d'un problème de contrôle optimal

quadratique d'un système en anneau avec un temps terminal fixé, un état final fixé et une contrainte sur la contrôle. Dans le chapitre 4, nous nous intéressons à la régulation optimale de processus thermiques de grande dimension dans le cas où l'état final est fixé et le contrôle est soumis à certaines contraintes. La méthode proposée au chapitre 3 est alors appliquée pour résoudre ce problème. Enfin dans le chapitre 5, nous effectuons une extension des résultats du chapitre 3 au cas où le temps terminal et l'état final sont fixés et où le contrôle et l'état sont soumis à des contraintes de type inégalité; pour illustrer ce chapitre nous reconsidérons l'étude d'un système en anneau de grande dimension ainsi que la régulation optimale de processus thermiques de grande dimension. Ce mémoire se termine par l'ajout de deux annexes; la première permet de déterminer analytiquement la loi de contrôle du système en anneau sans contrainte, ceci afin de vérifier la pertinence de la méthode proposée et la seconde permet une présentation synthétique de la méthode de tir correspondante à la méthode de Newton approchée. Nous terminons par une conclusion générale.

Chapitre 1

Résolution numérique des équations différentielles ordinaires

Le présent chapitre permet de présenter de façon succincte le principe de résolution numérique des équations différentielles ordinaires. Pour une preuve des résultats nous renvoyons à [6] et [29].

1.1 Système différentiel ordinaire du premier ordre

Soit $I = [0, T]$ un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point et f une fonction définie continue sur $I \times \mathbb{R}^m$ à valeurs dans \mathbb{R}^m ; on considère la relation

$$y'(t) = f(t, y(t)), t \in I, y \in \mathbb{R}^m. \quad (1.1)$$

Une solution de (1.1) sur un intervalle I est une fonction continue en général et dérivable $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que : $\forall t \in I, y'(t) = f(t, y(t))$.

1.1.1 Problème de Cauchy

On appelle problème de Cauchy le problème qui consiste à trouver une fonction $y(t)$ continue et dérivable sur un intervalle I , à valeurs dans \mathbb{R}^m , solution de (1.1), telle que $y(0) = y_0$. Ce problème est formulé de la manière suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), t \in I, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

La relation (1.2) est appelée système d'équations différentielles du premier ordre, où la variable t représente par exemple le temps. Une fonction y qui vérifie l'équation de (1.2) est appelée une intégrale du système différentiel.

1.1.2 Existence et unicité de la solution

La solution du système différentiel (1.2) est donnée par

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(\tau, y(\tau)) d\tau, t \in I.$$

On donne le résultat d'existence suivant

Théorème 1. (Cauchy-Péano) Soit f une fonction continue dans un voisinage du point $(0, y_0)$ de $I \times \mathbb{R}^m$ à valeurs dans \mathbb{R}^m ; alors il existe un intervalle J voisinage de 0 dans I et une fonction $y \in C^1(J)$ telle que

$$\forall t \in J, y'(t) = f(t, y(t)), y(0) = y_0.$$

On donne le résultat d'unicité suivant

Théorème 2. (Cauchy-Lipschitz) Supposons que I est un intervalle fermé borné d'intérieur non vide et que f est une fonction continue de $I \times \mathbb{R}^m$ dans \mathbb{R}^m , qui vérifie une condition de Lipschitz uniforme c'est à dire s'il existe une constante L positive telle que :

$$\forall t \in I, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m, |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|. \quad (1.3)$$

Alors le système (1.2) admet une solution unique passant par y_0 pour $t = 0$.

1.2 Méthode de résolution des équations différentielles

On considère pour simplifier le cas $m = 1$. Pour obtenir une approximation de la solution $y(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$, nous allons estimer la valeur de cette fonction en un nombre fini de points t_n , pour $n = 1, \dots, N$. La solution numérique discrète obtenue aux points t_n est notée $y_n \simeq y(t_n)$. Le pas de discrétisation h est strictement positif, et appartient à l'intervalle $]0, h^*]$, $h^* > 0$; il est souvent constant, mais il peut être variable et on pose alors $h_n = t_n - t_{n-1}$. On déterminera les valeurs approchées de y_n de la solution exacte $y(t_n)$ par une méthode de calcul numérique. Effectuer le $(n+1)$ ème pas d'intégration numérique consiste donc à passer de la valeur approchée y_n supposée calculée, à la valeur approchée suivante y_{n+1} . On obtiendra alors la solution approchée sous forme de table numérique qu'on transformera ensuite de façon graphique. On cherchera à obtenir une majoration de l'erreur

$$\rho_n = y(t_n) - y_n.$$

On distingue deux grandes classes de méthodes numériques :

1. Méthodes à un pas

Elles permettent de calculer y_{n+1} à partir de la valeur y_n .

2. Méthodes à pas multiples

Elles permettent de calculer y_{n+1} en utilisant plusieurs valeurs $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k}$, (k fixé).

Dans la suite nous ne nous intéressons pas aux méthodes à pas multiples qui nécessitent une méthode de démarrage par une méthode à un pas.

1.2.1 Méthodes numériques à un pas

Pour déterminer la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), t \in [0, T], \\ y(0) = \eta. \end{cases} \tag{1.4}$$

On choisit un ensemble fini de points t_n distincts, qu'on supposera équidistants entre eux par un pas h défini par $h = \frac{T}{N}$; donc $t_n = nh, n = 0, 1, \dots, N$. Dans le cas des méthodes à un pas le calcul de y_{n+1} se fait à partir de t_n, y_n et h . Le schéma général peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n, h), \\ y_0 = \bar{\eta}, \end{cases} \tag{1.5}$$

où y_n est la valeur approchée de $y(t_n)$, y_0 est la condition initiale du schéma ; en pratique on prend la condition initiale η . Choisir une méthode revient à choisir ϕ , où

$$\phi : [0, T] \times \mathbb{R} \times [0, h^*] \rightarrow \mathbb{R}, h^* > 0.$$

ϕ est une fonction continue, ne dépendant que de f et est appelée fonction incrément. Lors de la résolution des équations différentielles ordinaires, trois notions mathématiques sont introduites, la convergence, la stabilité et la consistance. Ces trois notions permettent d'apprécier la proximité de la solution approchée comparée à la solution exacte.

Convergence d'une méthode

Une méthode est convergente si à un instant fixe t , lorsque le pas de discrétisation tend vers 0, la solution numérique tend vers la solution exacte. On définit la convergence comme suit.

Définition 1.1. *L'approximation de (1.2) définie par le schéma à un pas (1.5) est dite convergente si, quelle que soit la donnée initiale y_0 ,*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq n \leq N} |y(t_n) - y_n| = 0. \tag{1.6}$$

La convergence résultera de deux propriétés, l'une est propre au schéma, c'est la stabilité tandis que l'autre décrit une relation entre le schéma et le système différentiel; c'est la consistance.

Stabilité d'une méthode

La stabilité assure que le schéma n'amplifie pas trop les erreurs qu'on commet à chaque pas de temps.

Définition 1.2. *Un schéma (1.5) est dit stable s'il existe une constante M telle que pour tout y_0, \tilde{y}_0 et pour toute suite de vecteurs ε_n correspondant à une perturbation de y_n , les suites y_n et \tilde{y}_n définies par les relations*

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\phi(t_n, y_n, h) \\ \tilde{y}_{n+1} &= \tilde{y}_n + h\phi(t_n, \tilde{y}_n, h) + \varepsilon_n, \end{aligned}$$

vérifient l'estimation

$$\forall n \leq N, |y_n - \tilde{y}_n| \leq M \left(|y^0 - \tilde{y}^0| + \sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_n| \right).$$

Consistance d'une méthode

La consistance traduit le fait que l'erreur d'approximation du schéma doit tendre vers zero lorsqu'on injecte la solution exacte dans le schéma. Ce qui signifie que le procédé de dérivation numérique adopté est correct.

Définition 1.3. *Un schéma (1.5) est dit consistant avec le système (1.2), si pour toute solution y de (1.2), on a*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{0 \leq n \leq N-1} |y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\phi(t_n, y(t_n), h)| = 0,$$

où le vecteur $y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\phi(t_n, y(t_n), h)$ représente l'erreur qu'on commet en remplaçant $y(t_{n+1})$ par la quantité calculée à l'aide du schéma.

Le théorème suivant lie les trois notions précédentes.

Théorème 3. *Soit f une fonction satisfaisant les conditions de Cauchy-Lipschitz, et soit ϕ une fonction continue de $t \in [0, T]$, $y \in \mathbb{R}$ et $h \in [0, h^*]$, définissant un schéma à un pas (1.5). Si ce schéma à un pas est consistant et s'il est stable, alors il est convergent.*

Les théorèmes suivants donnent des conditions qui nous assurent la stabilité et la consistance.

Théorème 4. *Pour qu'un schéma soit stable, il suffit qu'il existe une constante Λ telle que*

$$\forall t \in [0, T], \forall y, \tilde{y} \in \mathbb{R}, \forall h \in [0, h^*], |\phi(t, y, h) - \phi(t, \tilde{y}, h)| \leq \Lambda |y - \tilde{y}|.$$

Théorème 5. *Soit ϕ une fonction continue de $t \in [0, T]$, $y \in \mathbb{R}$ et $h \in [0, h^*]$, définissant un schéma à un pas (1.5). Une condition nécessaire et suffisante pour que ce schéma soit consistant avec (1.2) est que*

$$\forall t \in [0, T], \forall y \in \mathbb{R}, \phi(t, y, 0) = f(t, y).$$

Erreur et ordre de précision d'une méthode

Définition 1.4. *L'erreur de troncature est définie comme la différence entre la solution exacte $y(t_n)$ et l'approximation numérique obtenue y_n , soit :*

$$\rho_n = y(t_n) - y_n.$$

Définition 1.5. *La méthode est d'ordre supérieur ou égale à p si pour toute solution y de $y' = f(t, y)$, on a :*

$$\max_n \left[\left| \frac{1}{h} (y(t_{n+1}) - y(t_n)) - \phi(y(t_n), t_n, h) \right| \right] = o(h^p)$$

Théorème 6. *Si ϕ vérifie une condition de Lipschitz par rapport à la variable y , et si la méthode est d'ordre supérieur ou égal à p , alors :*

$$\max_n |\rho_n| = \max_n |y(t_n) - y_n| = o(h^p)$$

Contrôle du pas

Quand on résout une équation différentielle, on choisit généralement le pas h de façon que l'erreur soit inférieure à une tolérance fixé ε . Le contrôle du pas nécessite une approximation de l'erreur de troncature. L'estimateur d'erreur peut être construit de deux manières :

- En utilisant la même méthode mais avec deux pas de discrétisation différents généralement h et $2h$.
- En utilisant deux méthodes d'ordre p et q différents, généralement $q = p + 1$, mais ayant le même nombre d'étapes s .

C'est une procédure qui permet d'obtenir de manière combinée deux estimations distinctes de $y(t_{n+1})$, l'une d'ordre p et l'autre d'ordre $p+1$. A chaque pas, les deux solutions sont comparées. Si elles sont en concordance, l'approximation est acceptée. Dans le cas contraire, le pas h peut être réduit. Dans le cas où la concordance est meilleure que la précision requise, le pas h est augmenté.

1.2.2 Méthode d'Euler ou méthode de la tangente

Pour obtenir un schéma d'approximation du problème (1.2) sur l'intervalle $[0, T]$, nous allons subdiviser l'intervalle $[0, T]$ comme suit :

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < t_N = T.$$

Posons $h_n = t_{n+1} - t_n$; $h = \max_{0 \leq n \leq N} h_n$.

Les solutions de (1.2) vérifient, pour $0 \leq n \leq N$,

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tau, y(\tau)) d\tau;$$

Par récurrence nous construisons une approximation y_n de $y(t_n)$ en remplaçant la relation précédente par

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \tag{1.7}$$

Ce qui revient à approcher, pour $\tau \in]t_n, t_{n+1}[$, $f(\tau, y(\tau))$ par $f(t_n, y_n)$.

Remarque 1.1. la relation (1.7) correspond à la méthode d'Euler explicite auquel cas on a à résoudre une équation algébrique pour déterminer y_{n+1} . On peut aussi définir la méthode d'Euler implicite par

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Interprétation géométrique de la méthode

La valeur y_{n+1} est obtenue comme l'intersection de la verticale au point t_{n+1} avec la tangente en (t_n, y_n) à la courbe $t \rightarrow y(t)$.

1.2.3 Méthodes de Runge-Kutta

Pour déterminer y_{n+1} on n'utilisera pas uniquement la seule valeur y_n ; en effet on va faire intervenir q points intermédiaires de l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ définis par :

$$\begin{cases} t_{n_i} = t_n + \theta_i h_n \\ t_{n_0} = t_n \\ t_{n_q} = t_{n+1} \end{cases} \quad 0 \leq \theta_i \leq 1, \forall i \in \{0, \dots, q\}$$

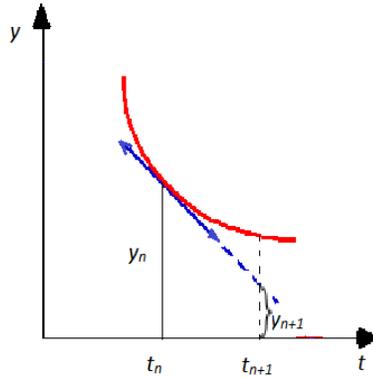


FIG. 1.1 –

L’algorithme de Runge-Kutta consiste à écrire à chaque pas, la suite de valeurs numériques.

$$\begin{cases} y_{n_0} = y_n \\ y_{n_i} = y_n + h_n \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{ij} \cdot f(t_{n_j}, y_{n_j}), \quad i \in \{1, \dots, q\}. \end{cases} \quad (1.8)$$

On dira qu’on a un algorithme de rang q ; les coefficients θ_i et α_{ij} seront déterminés de telle sorte que la suite des valeurs y_{n_i} soit aussi proche que possible de la valeur exacte, c’est à dire qu’on impose au développement de y_{n_i} suivant les puissances croissantes de h de coïncider le plus loin possible avec le développement de Taylor de $y(t_{n_i})$ (solution exacte du système différentiel). Si les deux développements coïncident jusqu’au terme en h^p inclus, l’algorithme sera dit d’ordre p et l’erreur par pas est alors majorée par une quantité en $O(h^{p+1})$. Un algorithme de Runge-Kutta d’ordre p et de rang q sera noté RK_{pq} , où q est le nombre de points intermédiaires de $[t_n, t_{n+1}]$, p est l’ordre du développement en série de Taylor.

Algorithme RK_{11}

Dans ce cas $q = 1$, il s’écrit :

$$\begin{cases} y_{n_0} = y_n \\ y_{n_1} = y_n + h_n \cdot \alpha_{10} \cdot f(t_n, y_n) \end{cases}$$

comme

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + h_n \cdot y'(t_n) + \frac{h_n^2}{2} \cdot y''(t_n) + \dots \\ y(t_{n+1}) &= y(t_n) + h_n \cdot f(t_n, y_n) + O(h^2) \end{aligned}$$

En identifiant α_{10} à 1 et on a

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n),$$

c'est la méthode d'Euler ou la méthode de la tangente.

Algorithme RK_{22}

Il correspond à $q = 2$, il s'écrit :

$$\begin{cases} y_{n_0} = y_n \\ y_{n_1} = y_n + h_n \cdot \alpha_{10} \cdot f(t_{n_0}, y_{n_0}) \\ y_{n_2} = y_{n_0} + h_n \cdot \alpha_{20} \cdot f(t_{n_0}, y_{n_0}) + h_n \cdot \alpha_{21} \cdot f(t_{n_1}, y_{n_1}) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} t_{n_0} = t_n \\ t_{n_1} = t_{n_0} + \theta h_n \\ t_{n_2} = t_{n+1} \end{cases}$$

$$y(t_{n_2}) = y(t_{n_0} + h) = y(t_{n_0}) + h_n f(t_{n_0}, y(t_{n_0})) + \frac{h_n^2}{2} f'(t_{n_0}, y(t_{n_0}))$$

En utilisant la formule des accroissements finis, on obtient :

$$y(t_{n_2}) = y(t_{n_0}) + h_n f(t_{n_0}, y(t_{n_0})) + \frac{h_n^2}{2} \left(\frac{\partial f(t_{n_0}, y(t_{n_0}))}{\partial t} + f(t_{n_0}, y(t_{n_0})) \frac{\partial f(t_{n_0}, y(t_{n_0}))}{\partial y} \right) \quad (1.9)$$

Par construction de RK_{22}

$$y(t_{n_2}) = y(t_{n_0}) + h_n [\alpha_{20} f(t_{n_0}, y(t_{n_0})) + \alpha_{21} f(t_{n_0} + \theta h, y_{n_0} + h \alpha_{10} f(t_{n_0}, y(t_{n_0})))]$$

comme

$$\begin{aligned} f(t_{n_0} + \theta h, y_{n_0} + h \alpha_{10} f(t_{n_0}, y(t_{n_0}))) &= f(t_{n_0}, y(t_{n_0})) + \theta h \frac{\partial f(t_{n_0}, y(t_{n_0}))}{\partial t} \\ &+ h \alpha_{10} f(t_{n_0}, y(t_{n_0})) \frac{\partial f(t_{n_0}, y(t_{n_0}))}{\partial y} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} y(t_{n_2}) &= y(t_{n_0}) + h_n (\alpha_{20} + \alpha_{21}) f(t_{n_0}, y(t_{n_0})) + \theta h^2 \alpha_{21} \frac{\partial f(t_{n_0}, y(t_{n_0}))}{\partial t} \\ &+ \alpha_{21} \alpha_{10} h^2 f(t_{n_0}, y(t_{n_0})) \frac{\partial f(t_{n_0}, y(t_{n_0}))}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.10)$$

On identifie (1.9) et (1.10), on obtient

$$\alpha_{10} = \theta, \alpha_{20} = 1 - \frac{1}{2\theta}, \alpha_{21} = \frac{1}{2\theta}.$$

L'algorithme de Runge-Kutta correspondant est défini par :

$$\begin{cases} y_{n0} = y_n \\ y_{n1} = y_n + h_n \cdot \theta \cdot f(t_n, y_n) \\ y_{n2} = y_n + h_n \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{2\theta}\right) \cdot f(t_n, y_n) + \frac{1}{2\theta} \cdot f(t_{n1}, y_{n1}) \right] \end{cases}$$

l'erreur par pas vérifie :

$$\varepsilon_n = \frac{h_n^3}{3!} \left[\left(1 - \frac{3}{2}\theta\right) y^{(3)}(\xi) + \frac{3}{2}\theta y''(\xi) \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{t=\xi} \right], t_n \leq \xi \leq t_{n+1}$$

Remarque : θ est un nombre réel arbitraire compris entre 0 et 1, on obtient donc une infinité d'algorithme RK_{22} ; on peut donc fixer les temps intermédiaires de plusieurs façons

Cas particuliers

- $\theta = \frac{1}{2}$: méthode de la tangente améliorée

Le point intermédiaire est situé au milieu de l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ et l'algorithme s'écrit :

$$\begin{cases} k_0 = h_n f(t_n, y_n) \\ k_1 = h_n f\left(t_n + \frac{1}{2}h_n, y_n + \frac{1}{2}k_0\right) \\ y_{n+1} = y_n + k_1 \end{cases}$$

l'erreur par pas est donnée par :

$$\varepsilon_n = \frac{h^3}{24} \left(y_n^{(3)} + 3y_n'' \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_n \right)$$

- **Interprétation géométrique de la méthode de la tangente améliorée**

Elle est basée sur la propriété suivante des paraboles : soit $\widehat{M_0M_1}$ un arc de parabole d'axe vertical, A le point de cet arc d'abscisse $t_n + \frac{h}{2}$; alors la tangente à la parabole au point A est parallèle à la corde M_0M_1 .

L'ordonnée du point A sera obtenu grâce à la méthode de la tangente on a :

$$y_{n1} = y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n) = y_n + \frac{k_0}{2}.$$

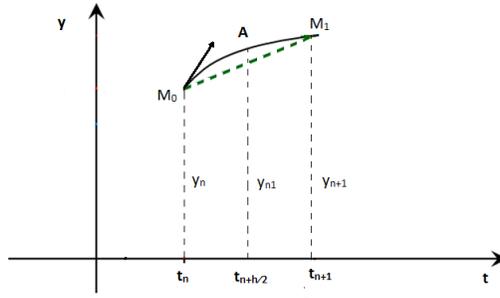


FIG. 1.2 –

Soit alors p , la pente de la tangente à l'arc de parabole en A ; on a alors :

$$p = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_{n1}\right) = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_0}{2}\right).$$

De plus la corde M_0M_1 aura une équation du type

$$y = pt + b$$

b étant obtenue en exprimant que cette corde passe par le point (t_n, y_n) , d'où :

$$y = p(t - t_n) + y_n.$$

On peut maintenant déterminer l'ordonnée du point M_1 ; en effet si $t = t_{n+1}$ on a :

$$y_{n+1} = y_n + hp = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_0}{2}\right).$$

Soit :

$$y_{n+1} = y_n + k_1.$$

• $\theta = 1$: méthode d'Euler-Cauchy

Le point intermédiaire coïncide avec le point t_{n+1} d'où on obtient :

$$\begin{cases} k_0 = h_n f(t_n, y_n) \\ k_1 = h_n f(t_n + h_n, y_n + k_0) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_0 + k_1) \end{cases}$$

l'erreur par pas est donnée par :

$$\varepsilon_n = \frac{h^3}{12} \left(-y_n^{(3)} + 3y_n'' \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_n \right)$$

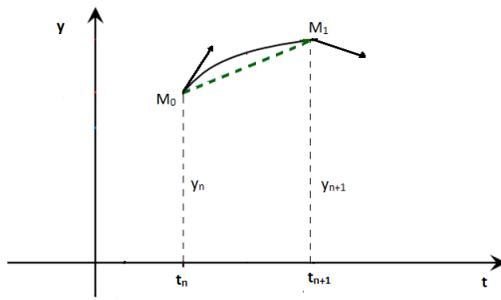


FIG. 1.3 –

• **Interprétation géométrique de la méthode d’Euler-Cauchy**

La pente de la corde M_0M_1 est la moyenne arithmétique des pentes des tangentes aux points M_0 et M_1 de l’arc de parabole.

Soit N_1 le point d’intégration par la méthode de la tangente au temps t_{n+1} , on a :

$$y_{n_1} = y_n + hf(t_n, y_n),$$

et la pente de la tangente en N_1 est :

$$p_1 = f(t_n + h, y_{n_1}) = f(t_n + h, y_n + k_0).$$

La pente de la tangente en M_0 est :

$$p_0 = f(t_n, y_n).$$

On en déduit que la pente de la corde M_0M_1 est :

$$p = \frac{1}{2}(p_0 + p_1) = \frac{1}{2}(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + k_0)).$$

L’équation de la corde M_0M_1 est

$$y = y_n + p(t - t_n),$$

on a :

$$y_{n+1} = y_n + hp = y_n + \frac{1}{2}(k_0 + k_1)$$

• $\theta = \frac{2}{3}$: **méthode de Heun**

Dans ce cas

$$\begin{cases} y_{n_1} = y_n + \frac{2}{3}h_n f(t_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}h_n (f(t_n, y_n) + 3f(t_n + \frac{2}{3}h_n, y_{n_1})) \end{cases}$$

l’erreur par pas est

$$\varepsilon_n = \frac{h^3}{6} y_n'' \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_n$$

Méthode de Runge-Kutta à l'ordre 3 et 4 : RK_{33} et RK_{44}

La formule de Runge-Kutta à l'ordre 3 est :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 = h_n f(t_n, y_n) \\ k_1 = h_n f(t_n + \frac{1}{2}h_n, y_n + \frac{1}{2}k_0) \\ k_2 = h_n f(t_n + h_n, y_n + 2k_1 - k_0) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_0 + 4k_1 + k_2) \end{array} \right.$$

La formule de Runge-Kutta à l'ordre 4 est la plus utilisée ; elle est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 = h_n f(t_n, y_n) \\ k_1 = h_n f(t_n + \frac{1}{2}h_n, y_n + \frac{1}{2}k_0) \\ k_2 = h_n f(t_n + \frac{1}{2}h_n, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 = h_n f(t_n + h_n, y_n + k_2) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) \end{array} \right.$$

Algorithme de Runge-Kutta : RK_{55}

On a les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 = h_n f(t_n, y_n) \\ k_1 = h_n f(t_n + \frac{1}{3}h_n, y_n + \frac{1}{3}k_0) \\ k_2 = h_n f(t_n + \frac{2}{5}h_n, y_n + \frac{1}{25}(4k_0 + 6k_1)) \\ k_3 = h_n f(t_n + h_n, y_n + \frac{1}{4}(k_0 - 12k_1 + 15k_2)) \\ k_4 = h_n f(t_n + \frac{2}{3}h_n, y_n + \frac{1}{81}(6k_0 + 90k_1 - 50k_2 + 8k_3)) \\ k_5 = h_n f(t_n + \frac{4}{5}h_n, y_n + \frac{1}{75}(6k_0 + 36k_1 + 10k_2 + 8k_3)) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{192}(23k_0 + 125k_1 - 81k_4 + 125k_5) \end{array} \right.$$

Algorithme de Runge-Kutta-Fehlberg : RK_{45}

La méthode de Runge-Kutta-Fehlberg combine deux méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4 et 5. L'erreur locale commise est estimée en cours de calcul à l'aide de l'écart entre les

solutions fournies par les deux méthodes. C'est une méthode qui permet d'obtenir deux estimations distinctes de y_{n+1} , l'une d'ordre quatre et l'autre d'ordre cinq. A chaque pas, les deux solutions sont comparées. Si elles sont en concordances, l'approximation est acceptée. Dans le cas contraire, le pas h peut être réduit. Dans le cas où la concordance est meilleure que la précision requise, la pas h est augmenté. Nous venons ainsi de décrire une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec contrôle du pas.

Chaque étape de Runge-Kutta-Fehlberg (RK_{45}) nécessite l'utilisation des six valeurs suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 = h_n f(t_n, y_n) \\ k_1 = h_n f(t_n + \frac{1}{4}h_n, y_n + \frac{1}{4}k_0) \\ k_2 = h_n f(t_n + \frac{3}{8}h_n, y_n + \frac{3}{32}k_0 + \frac{9}{32}k_1) \\ k_3 = h_n f(t_n + \frac{12}{13}h_n, y_n + \frac{1932}{2197}k_0 - \frac{7200}{2197}k_1 + \frac{7296}{2197}k_2) \\ k_4 = h_n f(t_n + h_n, y_n + \frac{439}{216}k_0 - 8k_1 + \frac{3680}{513}k_2 - \frac{845}{4104}k_3) \\ k_5 = h_n f(t_n + \frac{1}{2}h_n, y_n - \frac{8}{27}k_0 + 2k_1 - \frac{3544}{2565}k_2 + \frac{1859}{4104}k_3 - \frac{11}{40}k_4) \end{array} \right.$$

A chaque pas, on calcule deux approximations de y_{n+1} : z_{n+1} et p_{n+1} .

$$p_{n+1} = y_n + \frac{25}{216}k_0 + \frac{1408}{2565}k_2 + \frac{2197}{4101}k_3 - \frac{1}{5}k_4$$

$$z_{n+1} = y_n + \frac{16}{135}k_0 + \frac{6656}{12825}k_2 + \frac{28561}{56430}k_3 - \frac{9}{50}k_4 + \frac{2}{55}k_5$$

Une estimation de l'erreur locale ρ_{n+1} commise par la méthode d'ordre 4 est donnée par :

$$\rho_{n+1} \approx | z_{n+1} - p_{n+1} | .$$

Remarque 1.2. Dans le cas d'un système différentielle du 1er ordre, on a à faire une simple adaptation des formules obtenues dans le cas scalaire ($m = 1$). Par exemple la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 dans le cas vectoriel est donné dans le paragraphe suivant.

Exemple 1.1. Considerons le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y'(t) = F(t, Y) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{array} \right.$$

avec

$$F(t, Y) = (f_1(t, Y), f_2(t, Y)), Y(t) = (y_1(t), y_2(t)) \text{ et } Y_0 = (y_{10}, y_{10})$$

La solution de ce système en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_0 = h_n F(t_n, y_n) \\ K_1 = h_n F(t_n + \frac{1}{2}h_n, y_n + \frac{1}{2}k_0) \\ K_2 = h_n F(t_n + \frac{1}{2}h_n, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ K_3 = h_n F(t_n + h_n, y_n + k_2) \\ Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{6}(K_0 + 2K_1 + 2K_2 + K_3). \end{array} \right.$$

Avec $Y_n = (y_{1n}, y_{2n})$ et $K_i = (k_{i1}, k_{i2}), i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Chapitre 2

Introduction au contrôle optimal

2.1 Systèmes contrôlés

On introduit dans cette section la notion de système contrôlé dont l'évolution temporelle, n'est pas uniquement déterminée par la donnée d'une condition initiale, mais dépend également de paramètres dynamiques extérieurs au système. On s'intéresse à des systèmes contrôlés dont l'équation d'état est une équation différentielle ordinaire.

Soit M une variété différentiable de dimension n et \mathcal{U} un sous-ensemble de \mathbb{R}^m appelé domaine de commande. On appelle système dynamique contrôlé tout processus d'évolution déterminé par l'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où $f : M \times \mathcal{U} \rightarrow M$ est une fonction dérivable continue par rapport à x et à u . Le choix de la fonction u qui peut varier au cours du temps influe directement sur l'évolution du système et on l'appelle contrôle. Dans la suite, selon la nature du problème à résoudre, on imposera diverses conditions sur le contrôle u . On désigne par contrôles admissibles les contrôles satisfaisant à ces conditions. Par exemple soit \mathcal{U} l'ensemble des contrôles admissibles défini par :

$$\mathcal{U} = \{u(t), t \in [0, T] / u(t) \text{ est une fonction mesurable et bornée}\} \quad (2.2)$$

L'objectif principal d'un système contrôlé est de déterminer précisément quelle loi de contrôle permet de réaliser l'évolution souhaitée.

2.2 Définition d'un problème de contrôle optimal

Un problème de contrôle optimal est défini par deux objets, le premier est la dynamique du système qui dicte son évolution temporelle et décrit son état, le second est la fonctionnelle de coût, qui s'exprime de manière générale en une somme de deux termes, le premier étant un terme qui détermine la qualité de la solution obtenue à l'instant final ou coût terminal tandis que le second détermine la qualité de la solution le long de la trajectoire suivie.

L'objectif du contrôle optimal sera de déterminer un contrôle qui permet de commander le système selon sa dynamique tout en minimisant la fonctionnelle du coût. Cela revient à déterminer une solution ayant une qualité optimale. Mathématiquement, le problème se formule de la façon suivante :

Minimiser $J(x, u)$ défini par

$$J(x, u) = g(x(T)) + \int_0^T f^0(x(t), u(t))dt \rightarrow \min_u, \quad (2.3)$$

sous la contrainte

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, x_0 est l'état initial du système. L'état du système peut représenter la vitesse, la température, la position, ... etc. $f(x(t), u(t))$ est la dynamique du système qui dépend de l'état du système et du contrôle $u(t)$ dépendant du temps. Le contrôle u est à valeur dans l'ensemble $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$. Cet ensemble peut être soit ouvert soit fermé. Si le contrôle appartient à un fermé alors il est dit admissible. La fonction $g(x(T))$ est le coût terminal qui décrit l'état final de la solution, par exemple la distance entre l'état du système au temps final et une cible x_T . La fonction $f^0(x(t), u(t))$ est un coût dépendant du chemin qui peut par exemple décrire l'énergie utilisée pour contrôler le système. Par exemple, si $f^0(x(t), u(t)) = u^2$ alors $\int_0^T f^0(x(t), u(t))dt$ correspond à l'énergie utilisée par le contrôle. La fonction f^0 peut également décrire la durée du contrôle si $f^0(x(t), u(t)) = 1$ et $\int_0^T f^0 dt = T$.

Il est important également de définir les trois grands types de problèmes que l'on peut rencontrer.

Type 1 : Problème de Bolza

Ce problème est celui défini par le problème (2.3) et (2.4).

Type 2 : Problème de Lagrange

Dans ce cas, l'objectif final n'est pas de minimiser un coût mais d'aller exactement sur une cible donnée tout en minimisant un coût dépendant du chemin emprunté. Le problème est alors le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(x, u) = \int_0^T f^0(x(t), u(t))dt \rightarrow \min_u \\ \dot{x} = f(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \\ x(T) = x_T \end{array} \right.$$

où x_T est l'état final du système.

Type 3 : Problème de Mayer

Dans ce cas on ne cherche pas à minimiser un coût dépendant du chemin mais seulement à minimiser le coût terminal ; la cible à l'instant final n'est alors pas définie.

$$\left\{ \begin{array}{l} J(x, u) = g(x(T)) \rightarrow \min_u \\ \dot{x} = f(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right.$$

2.3 Ensemble Accessible

Un état x_1 du système (2.4) est dit accessible depuis x_0 lorsqu'on est capable de l'atteindre en un temps fini, c'est à dire qu'il existe un contrôle $u \in \mathcal{U}$ déterminant une trajectoire contrôlée x_u et un instant $t \in [0, T]$ tels que $x_u(0) = x_0$ et $x_u(t) = x_1$. La réunion sur tous les temps $t \in [0, T]$ des états accessibles depuis x_0 constitue l'ensemble accessible, notée $\mathcal{A}_{x_0}(T)$, c'est à dire

$$\mathcal{A}_{x_0}(T) = \{x_u(T), u \in \mathcal{U}\},$$

$\mathcal{A}_{x_0}(T)$ est l'ensemble des extrémités des solutions du système (2.4), au temps T , lorsque le contrôle u varie.

2.4 Contrôlabilité

Avant de s'intéresser à la résolution d'un problème de contrôle optimal, une première étape consiste à étudier la contrôlabilité du système considéré. La notion de contrôlabilité est apparue dans les années soixante avec les travaux de Kalman dans le cadre des systèmes linéaires autonomes. Un système dynamique est dit contrôlable s'il existe une trajectoire admissible de ce système qui relie deux points donnés de l'espace d'état en temps fini.

Définition 2.1. *Le système (2.4) est dit contrôlable depuis x_0 en temps T si*

$$\mathcal{A}_{x_0}(T) = M.$$

Il est dit contrôlable en temps quelconque t depuis x_0 si

$$M = \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{A}_{x_0}(t).$$

Définition 2.2. *Le système $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(0) = x_0$ est dit contrôlable si pour tout point $x_0 \in M_0$ et $x_1 \in M_1$, il existe un contrôle $u(\cdot)$ telle que la trajectoire associée à u relie x_0 à x_1 en temps fini.*

2.4.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

Cas sans contrainte sur le contrôle

Considérons le système linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t), t \in [0, T], x(0) = x_0, \quad (2.5)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice d'état, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est une matrice de contrôle, les matrices A et B ne dépendent pas de t . La solution du système (2.5) est donnée par

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds, t \in [0, T].$$

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où les matrices A et B ne dépendent pas de t .

Théorème 7. *(Critère de Kalman) On suppose que $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$ c'est à dire qu'il n'y a pas de contrainte sur le contrôle. Le système (2.5) est contrôlable en temps T quelconque si et seulement si la matrice*

$$C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B),$$

est de rang n . La matrice C est appelée matrice de Kalman, et la condition $\text{rang}(C) = n$ est appelée condition de Kalman.

Cas avec contrainte sur le contrôle

Corollaire 2.1. *Sous la condition de Kalman précédente, si $r = 0$ et si $0 \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}$, où $\overset{\circ}{\mathcal{U}}$ est l'intérieur de \mathcal{U} , alors l'ensemble accessible $\mathcal{A}_{x_0}(t)$ en temps t contient un voisinage du point $e^{tA}x_0$.*

Remarque 2.1. *Les propriétés de contrôlabilité globale sont reliées aux propriétés de stabilité de la matrice A . Par exemple si*

1. *la condition de Kalman est remplie,*
2. *$r = 0$ et $0 \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}$,*
3. *toutes les valeurs propres de la matrice A sont de partie réelle strictement négative c'est à dire la matrice A est stable,*

alors tout point de \mathbb{R}^n peut être conduit à l'origine en temps fini.

Théorème 8. *Soit $b \in \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ un intervalle contenant 0 dans son intérieur. Considérons le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$, avec $u(t) \in \mathcal{U}$. Alors tout point de \mathbb{R}^n peut être conduit à l'origine en temps fini si et seulement si la paire (A, b) vérifie la condition de Kalman et la partie réelle de chaque valeur propre de A est inférieure ou égale à 0.*

2.4.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires non autonomes

Considérons le système

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), t \in [0, T], x(0) = x_0. \quad (2.6)$$

La solution du système (2.6) en temps t est

$$x(t) = F(t)x_0 + \int_0^t F(t)F^{-1}(s)B(s)u(s)ds, t \in [0, T],$$

où $F(\cdot)$ est la résolvante, solution du système :

$$\begin{cases} \dot{F}(t) = A(t)F(t), \\ F(0) = Id, \end{cases}$$

avec Id la matrice identité.

Théorème 9. *Le système (2.6) est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice*

$$C(T) = \int_0^T F(t)^{-1}B(t)B(t)^T F(t)^{-1T} dt,$$

dite matrice de contrôlabilité, est inversible.

Remarque 2.2. Cette condition dépend de T , mais ne dépend pas du point initial x_0 . Autrement dit, si un système linéaire non autonome est contrôlable en temps T depuis x_0 , alors il est contrôlable en temps T depuis tout point.

Remarque 2.3. Si le système est autonome, on a $F(t) = e^{tA}$, et donc

$$C(T) = \int_0^T e^{-tA} B B^T e^{-tA^T} dt.$$

2.5 Principe du Maximum de Pontryagin

Le Principe du Maximum de Pontryagin [26], [27], [28] est une reformulation du problème de contrôle optimal sous forme hamiltonienne. Ce principe nous donne une condition nécessaire d'optimalité, que doit vérifier toute solution d'un problème de contrôle optimal. Considérons tout d'abord un système de contrôle autonome

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad (2.7)$$

où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe \mathcal{C}^1 . Les contrôles $u(\cdot)$ sont des fonctions mesurables bornées, à valeur dans un domaine quelconque $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$. Soient M_0 et M_1 deux sous variétés différentiables de \mathbb{R}^n définissant les conditions aux deux bouts. On définit enfin le coût d'un contrôle u sur $[0, T]$ par

$$C(T, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(x(s), u(s)) ds; \quad (2.8)$$

où $f^0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, toutes deux de classe \mathcal{C}^1 , et $x(\cdot)$ la trajectoire solution de (2.7) associée au contrôle $u(\cdot)$.

On considère le problème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 et minimisant le coût. Le temps final T peut être fixé ou non. Le Hamiltonien est défini comme suit :

$$H(x, p, p^0, u) = p^0 \cdot f^0 + p \cdot f,$$

où $(p(t), p^0)$ est l'état adjoint du système ; en général $(p(t), p^0)$ est différent de zéro. Si $x \in \mathbb{R}^n$, alors $p \in \mathbb{R}^n$ tandis que p^0 est un scalaire négatif ou nul, car on considère un principe du maximum et non un principe de minimum. Le Principe du Maximum de Pontryagin nous donne une condition de maximisation du l'Hamiltonien.

Théorème 10. (Principe du Maximum de Pontryagin). Si le contrôle $u \in \mathcal{U}$ est optimal sur $[0, T]$, alors il existe une application $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue et une

constante $p^0 \leq 0$, $(p, p^0) \neq 0$, telles que pour presque tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), p^0, u(t)), \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), p^0, u(t)), \\ H(x(t), p(t), p^0, u(t)) &= \max_{v \in \mathcal{U}} H(x, p, p^0, v). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Si le temps final pour joindre la cible M_1 est libre et si u est continu en T , on a la condition suivante au temps final T

$$H(x(T), p(T), p^0, u(T)) = -p^0 \frac{\partial}{\partial t} g(T, x(T)). \quad (2.10)$$

Le vecteur adjoint p doit satisfaire les conditions de transversalité aux extrémités suivantes :

$$p(0) \perp \mathcal{G}_{x(0)} M_0, \quad p(T) - p^0 \frac{\partial}{\partial t} g(T, x(T)) \perp \mathcal{G}_{x(T)} M_1. \quad (2.11)$$

Où $\mathcal{G}_{x(0)} M_0$ et $\mathcal{G}_{x(T)} M_1$ sont des espaces tangents respectivement en $x(0) \in M_0$ et en $x(T) \in M_1$. Puisque le problème de contrôle est autonome, c'est à dire que f et f^0 ne dépendent pas de t , le Hamiltonien H ne dépend pas de t et on a

$$\forall t \in [0, T], H(x(t), p(t), p^0, u(t)) = Cste.$$

Définition 2.3. Une extrémale du problème de contrôle optimal est un quadruplet $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ solution des équations (2.9).

Définition 2.4. Une extrémale $(x(t), p(t), p^0, u(t))$ solution de (2.9) est dite anormale si $p^0 = 0$ et elle est dite normale dans le cas contraire. On peut alors normaliser p^0 à (-1) dans le cas de principe du maximum ou à $(+1)$ dans le cas de principe du minimum.

Définition 2.5. Une extrémale est dite singulière si $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ et elle est dite régulière sinon.

Remarque 2.4. Dans le cas où le domaine \mathcal{U} est un ouvert, c'est à dire il n'y a pas de contrainte sur u , la condition de maximisation dans (2.9) est remplacée par $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$. Dans ce cas, la condition définie ci-après est nécessaire pour que l'extrémale soit optimale sur $[0, T]$.

Proposition 2.1. Si la trajectoire $x(\cdot)$ associée au contrôle non contraint $u(\cdot)$, est optimale sur $[0, T]$ pour la topologie L^∞ , alors la condition de Legendre est vérifiée le long de l'extrémale $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$, c'est à dire

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(x(t), p(t), p^0, u(t)) \cdot (v, v) \leq 0, \forall v \in \mathbb{R}^m, \forall t \in [0, T].$$

Définition 2.6. Une extrémale $(x(t), p(t), p^0, u(t))$ est dite totalement singulière si

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(x(t), p(t), p^0, u(t)) = 0, \forall t \in [0, T].$$

2.6 Problème de contrôle linéaire quadratique

On s'intéresse à un cas particulier de problème de contrôle optimal connu sous le nom de problème de contrôle linéaire quadratique [3]. Soit le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t); \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.12)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est continue par morceaux. Soit T fixé, on définit, sur $[0, T]$, la fonction coût de type quadratique suivante :

$$J(u) = \frac{1}{2}x^T(T)Kx(T) + \frac{1}{2} \int_0^T [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt, \quad (2.13)$$

où $x(T) \in \mathbb{R}^n$ et $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice symétrique constante. Les matrices Q et R sont symétriques, Q est semi-définie positive et R est définie positive. Soit \mathcal{U} l'ensemble des contrôles admissibles ; le problème de contrôle linéaire quadratique défini par les équations (2.12)-(2.13) consiste à trouver un contrôle $u^* \in \mathcal{U}$ qui minimise la fonction coût $J(u)$. L'application de principe du maximum de Pontryagin au problème (2.12)-(2.13), nous donne une loi de commande fonction uniquement du temps. Celle-ci est dite commande en boucle ouverte. Nous obtenons alors le théorème suivant :

Théorème 11. *Soit $(x^*(t); u^*(t)) ; t \in [0, T]$ une solution optimale du problème linéaire quadratique (2.12)-(2.13), avec $R(t) > 0$, pour tout $t \in [0, T]$. Alors, il existe un vecteur d'état adjoint différentiable $p(t) ; t \in [0, T]$ tel que la fonction hamiltonienne définie par :*

$$H(t; x; u; p) = \frac{1}{2}[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] + p^T(t)[A(t)x(t) + B(t)u(t)], \quad (2.14)$$

satisfait les conditions suivantes

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), u(t)), \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), u(t)), \\ H(x(t), p(t), u(t)) &= \max_{v \in \mathcal{U}} H(x, p, v). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Remarque 2.5. *Lorsque il n'y a pas de contraintes sur le contrôle, la dernière condition du Théorème 11 peut être reformulée sous la forme :*

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x(t), p(t), u(t)) = 0. \quad (2.16)$$

La relation (2.16) permet d'obtenir pour tout $t \in [0; T]$:

$$u(t) = -R^{-1}B^T(t)p(t).$$

Les conditions nécessaires de Pontryagin s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Chapitre 3

Méthode de relaxation couplée à la méthode de tir

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons un algorithme numérique pour résoudre un problème de contrôle optimal quadratique avec un temps terminal fixé, un état final fixé et une contrainte sur la commande. De plus, on suppose que la commande agissant sur le système est une fonction bornée et continue par morceaux. Nous distinguons, sous le même formalisme, deux cas distincts de problèmes de contrôle optimal : le cas sans et avec contrainte sur la commande. Dans les deux cas, en vue d'une résolution numérique et en utilisant la notion de sous-différentiel [1] et [16] pour prendre en compte, si nécessaire, la projection sur le convexe des contraintes, nous reformulerons les équations d'optimalité issues du principe de minimum de Pontryagin ; ces dernières forment un système algébro-différentiel, où l'équation d'état est munie d'une condition initiale et d'une condition finale. Par contre l'équation d'état adjoint n'est munie d'aucune condition initiale ou terminale utilisable de manière algorithmique. Pour déterminer la condition initiale sur l'état adjoint, nous utiliserons la méthode de relaxation couplée avec la méthode de tir. Sous des hypothèses convenables, nous analysons la convergence de la méthode itérative considérée et nous terminerons en exposant les résultats des expérimentations numériques.

3.2 Position du problème

3.2.1 Cas sans contrainte sur la commande

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), t \in [0, T] \\ x(0) = x_0, x(T) = x_f, \\ u(t) \in \mathcal{U}_{ad}. \end{cases} \quad (3.1)$$

où $x(t)$ est un n -vecteur représentant l'état du système à l'instant t , $x(0) = x_0$ est la condition initiale et $x(T) = x_f$ l'état final fixé, $u(t)$ est un r -vecteur représentant la commande agissant sur le système à l'instant $t \in [0, T]$, \mathcal{U}_{ad} est l'ensemble de commandes admissibles, \mathcal{U}_{ad} étant un ensemble convexe fermé; A , B sont des $n \times n$ et $n \times r$ matrices données.

On cherche une commande admissible \hat{u} qui transfère le système d'un état initial $x(0)$ vers un état final x_f fixé et minimisant la fonction coût J définie par :

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T [(x - x_d)^T Q (x - x_d) + u^T N u] dt, \quad (3.2)$$

où x_d représente un état désiré, les matrices Q et N sont symétriques, Q est définie non-négative et N est définie positive. Plus généralement on peut considérer le problème (3.2) où $N = N^T$; dans ce cas N est diagonalisable et il suffit de considérer un problème avec $u^T \delta u$, où δ est la matrice des valeurs propres. Dans la suite on prendra $\delta = kI$, où k pondère précision et coût de la commande.

L'Hamiltonien du système est donné par :

$$H(x, p, u, t) = \frac{1}{2} [(x - x_d)^T Q (x - x_d) + u^T k u] + p^t \cdot [Ax + Bu],$$

où p est le vecteur d'état adjoint. Cherchons maintenant la commande qui minimise l'Hamiltonien; cela revient à chercher \hat{u} , tel que

$$H(\hat{x}, \hat{p}, \hat{u}) \leq H(x, p, u); \forall u \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Les équations d'optimalité s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = Ax + Bu; x(0) = x_0, x(T) = x_f, \forall t \in [0, T], \\ -\frac{dp}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} = A^T p + Q(x - x_d), p(0) \text{ à déterminer}, \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0 = ku + B^T p. \end{cases} \quad (3.3)$$

Ces équations sont connues sous le nom d'équations d'Hamilton-Pontryagin.

Condition de transversalité sur p :

De manière générale, lorsque l'on prend en compte un coût terminal, le critère à minimiser s'écrit :

$$J = g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(x(t), u(t), t)dt,$$

où g est le coût terminal, l'état final étant fixé. Conformément à [33], soient M_0 et M_1 deux sous-ensembles de \mathbb{R}^n ; on cherche à déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 tout en minimisant le coût. Si de plus M_0 et M_1 sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents $\mathcal{G}_{x(0)}M_0$ et $\mathcal{G}_{x(T)}M_1$ respectivement en $x(0) \in M_0$ et en $x(T) \in M_1$, alors le vecteur adjoint $p(t)$ peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité :

$$p(0) \perp \mathcal{G}_{x(0)}M_0, \tag{3.4}$$

$$p(T) - p^0 \nabla_x g(T, x(T)) \perp \mathcal{G}_{x(T)}M_1, \tag{3.5}$$

où p^0 est un réel tel que $p^0 < 0$ conduit au principe du maximum de Pontryagin et $p^0 > 0$ conduit au principe du minimum de Pontryagin [33]. Si $M_0 = \{x_0\}$, la condition (3.4) devient vide et si la variété M_1 s'écrit sous la forme :

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n / F_1(x) = \dots = F_q(x) = 0\},$$

où les F_i sont des fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R}^n , alors l'espace tangent à M_1 en un point $x \in M_1$ est :

$$\mathcal{G}_x M_1 = \{\kappa \in \mathbb{R}^n / \nabla F_i(x) \kappa = 0, i = 1, \dots, q\},$$

et la condition (3.5) s'écrit :

$$\exists \kappa_1, \dots, \kappa_q \in \mathbb{R} / p(T) = \sum_{i=1}^q \kappa_i \nabla_x F_i(x(T)) + p^0 \nabla_x g(T, x(T))$$

où κ_i sont les multiplicateurs de Lagrange. Dans notre problème, $g(T, x(T)) = 0$; donc la condition de transversalité sur le vecteur adjoint s'écrit :

$$p(T) = \sum_{i=1}^q \kappa_i \nabla_x F_i(x(T)), \kappa_i \in \mathbb{R}.$$

3.2.2 Cas avec contrainte sur la commande :

Dans ce cas, l'ensemble des commandes admissibles \mathcal{U}_{ad} est un ensemble convexe. On va reformuler les conditions nécessaires d'optimalité ; pour cela on va donc utiliser la notion de sous-différentiabilité pour obtenir des conditions d'optimalité [1], [16]. Auparavant, on va faire quelques rappels mathématiques.

Définition 3.1. Soit χ une fonction convexe dans E et μ un point de E ; on note par $\partial\chi(\mu)$ l'ensemble des $\mu' \in E'$ tel que

$$\chi(v) \geq \chi(\mu) + \langle v - \mu, \mu' \rangle, \text{ pour tout } v \in E, \quad (3.6)$$

où \langle, \rangle est le produit de dualité de E dans E' et E' est l'espace topologique dual de E ; un tel élément μ' est appelé sous-gradient de χ en μ , et $\partial\chi(\mu)$ est appelé le sous-différentiel de χ en μ .

Remarque 3.1. Le produit de dualité de E et E' est une application bilinéaire de $E \times E'$ dans \mathbb{R} . Si E est un espace de Hilbert, alors \langle, \rangle est le produit scalaire de E .

Remarque 3.2. Soit χ une application convexe différentiable (Gâteaux différentiable ou Fréchet différentiable) en μ ; alors $\partial\chi(\mu)$ est un opérateur univoque qui coïncide avec la différentielle (au sens de Gâteaux ou de Fréchet) de χ en μ [1]. On montre que $\partial\chi(\mu)$ est un ensemble convexe fermé (éventuellement vide voir [1]).

Dans la suite, nous allons utiliser une formulation multivoque du problème de minimisation avec contrainte.

Lemme 3.1. $\mu \in E$ est tel que $\chi(\mu) = \min_{v \in E}(\chi(v))$ si et seulement si $0 \in \partial\chi(\mu)$.

Preuve 3.1. Soit $\mu \in E$ tel que $\chi(\mu) = \min_{v \in E}(\chi(v))$; nous avons alors trivialement $\chi(v) \geq \chi(\mu) + \langle v - \mu, 0 \rangle$, ce qui est équivalent à $0 \in \partial\chi(\mu)$.

Lemme 3.2. Le sous-différentiel $\partial\chi(\mu)$ est un opérateur monotone (en général multivoque) de E dans E' .

Preuve 3.2. Soit $w' \in \partial\chi(w)$, alors $\chi(v) \geq \chi(w) + \langle v - w, w' \rangle, \forall v \in E$. Soit encore $\mu' \in \partial\chi(\mu)$, alors $\chi(v) \geq \chi(\mu) + \langle v - \mu, \mu' \rangle, \forall v \in E$. On considère la première équation pour $v = \mu$ et la deuxième pour $v = w$, on additionne terme à terme et l'on obtient alors :

$$\langle w - \mu, w' - \mu' \rangle \geq 0.$$

Soit K un sous-ensemble convexe modélisant les contraintes. La fonction indicatrice du sous ensemble convexe K jouera un rôle important dans la suite ; elle est définie ci-dessous.

Définition 3.2. Soit K un sous ensemble convexe fermé de E . On appelle fonction indicatrice de K la fonctionnelle ψ_K définie par :

$$\Psi_K(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mu \in K, \\ +\infty, & \text{si non.} \end{cases}$$

On montre que $\Psi_K(\mu)$ est convexe.

Consequence 3.1. Il résulte du Lemme 3.1 que chercher le minimum de χ sur $K \subset E$ revient à résoudre une équation multivoque $0 \in A(v)$, où $A = \partial(\chi + \Psi_K)$, Ψ_K fonction indicatrice du convexe K . En utilisant la définition du sous différentiel, on a (voir [1]),

$$\partial\Psi_K(v) = \{v' \in E' / \langle v - w, v' \rangle \geq 0, \text{ pour tout } w \in K\}.$$

Ce qui montre que $D(\partial\Psi_K) = D(\Psi_K) = K$ et $\partial\Psi_K(v) = \{0\}$ pour tout $v \in \text{int}(K)$. Par ailleurs, si v se trouve sur la frontière de K , alors $\partial\Psi_K(v)$ est confondu avec le cône normale à K au point v .

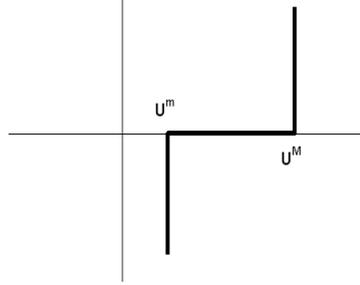
Application à notre problème :

Notre problème consiste à trouver une commande admissible $u \in \mathcal{U}_{ad}$ minimisant la fonction coût $J(u)$ sous les contraintes (3.1), où \mathcal{U}_{ad} est un ensemble convexe fermé défini par : $\mathcal{U}_{ad} = \{u_i \in \mathbb{R} / u_i^m \leq u_i \leq u_i^M\}$. Notons $\Psi_{\mathcal{U}_{ad}}$ la fonction indicatrice de \mathcal{U}_{ad} qui vérifie :

$$\Psi_{\mathcal{U}_{ad}} = \begin{cases} 0, & \text{si } u_i^m \leq u_i \leq u_i^M, \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le sous-différentiel est alors donné par :

$$\partial\Psi_{\mathcal{U}_{ad}} = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } u_i < u_i^m, \\]-\infty, 0], & \text{si } u_i = u_i^m, \\ 0, & \text{si } u_i^m < u_i < u_i^M, \\ [0, +\infty[, & \text{si } u_i = u_i^M, \\ \emptyset, & \text{si } u_i > u_i^M, \end{cases}$$


 FIG. 3.1 – Sous-différentiel de la fonction $\Psi_{\mathcal{U}_{ad}}$

où \emptyset désigne l'ensemble vide et la figure 3.1 représente le sous-différentiel $\partial\Psi_{\mathcal{U}_{ad}}$. On remarque que le sous différentiel $\Psi_{\mathcal{U}_{ad}}$ est bien monotone.

Appliquons le Lemme 3.1 à notre problème. On cherche $\hat{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ qui minimise l'Hamiltonien H ; ceci peut s'écrire sous la forme :

$$0 \in \partial H(\hat{u});$$

puisque H est un opérateur continu [17], on a :

$$0 \in \partial(H + \Psi_{\mathcal{U}_{ad}})(\hat{u}) = \partial H(\hat{u}) + \partial\Psi_{\mathcal{U}_{ad}}(\hat{u}).$$

La nouvelle formulation des conditions nécessaires d'optimalité est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = Ax + Bu; x(0) = x_0, x(T) = x_f, \\ -\frac{dp}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} = A^T p + Q(x - x_d), p(0) \text{ à déterminer,} \\ \partial(H + \Psi_{\mathcal{U}_{ad}})(\hat{u}) = \partial H(\hat{u}) + \partial\Psi_{\mathcal{U}_{ad}}(\hat{u}) \ni 0, \end{array} \right.$$

ce qui conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = Ax + Bu; x(0) = x_0, x(T) = x_f, \\ -\frac{dp}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} = A^T p + Q(x - x_d), p(0) \text{ à déterminer,} \\ 0 \in k\hat{u} + B^T p + \partial\Psi_{\mathcal{U}_{ad}}(\hat{u}). \end{array} \right.$$

Remarque 3.3. Dans les deux cas sans et avec contrainte sur le contrôle, on aboutit à la résolution d'un système algébro-différentiel, l'équation d'état décrivant le système physique

est munie d'une condition initiale $x(0) = x_0$ et d'une condition finale $x(T) = x_f$. Par contre, la seconde équation correspondant à l'équation d'état adjoint, n'est munie d'aucune condition initiale ou d'aucune condition terminale utilisable pratiquement. On va donc utiliser la méthode de tir pour calculer la valeur de $p(0)$.

3.2.3 La méthode de tir simple

La méthode de tir permet d'obtenir la valeur de $p(0)$ nécessaire à la résolution du problème obtenu par application du principe de Pontryagin. Elle consiste à réduire le problème de contrôle en un problème aux valeurs limites, puis de le résoudre numériquement par la méthode d'Euler ou Rung-Kutta. Il s'agit de déterminer un zéro de la fonction de tir associée, ceci peut se faire par la méthode de Newton. Pour plus de détail voir Annexe 2.

3.3 Méthode de résolution numérique

Pour résoudre le problème nous considérons le couplage de la méthode de relaxation (voir [10], [17] et [23]) avec la méthode de tir [33], cette dernière étant destinée à calculer $p(0)$ nécessaire à la résolution du système algèbro-différentiel obtenus par application du principe de Pontryagin.

3.3.1 Cas avec contrainte

Les étapes de la méthode de résolution numérique sont résumées ci-dessous :

1. Approximation de l'état adjoint initial $p^0(0)$ et de la commande correspondante u^0 , pour $t \in [0, T]$.
2. $r \leftarrow 0$ où r est le compteur d'itération.
3. **Tant que** convergence $> \varepsilon$ (où ε définit le seuil de convergence) **faire** :
 - Détermination de l'état x^r et de l'état adjoint p^r composante par composante séquentiellement pour $t \in [0, T]$ par intégration numérique, pour les temps croissants :

$$\begin{cases} \frac{dx^r}{dt} = Ax^r + Bu^r, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} -\frac{dp^r}{dt} = A^T p^r + Q(x^r - x_d), \\ p^r(0) \end{cases} \quad (3.8)$$

où $p^r(0)$ est calculé par la méthode de tir,

- Détermination de la commande u^{r+1} :

$$u^{r+1} \leftarrow Proj\left(-\frac{1}{k}B^T p^r\right), \quad (3.9)$$

où $Proj(\cdot)$ est l'opérateur de projection sur le convexe fermé \mathcal{U}_{ad} ,

- Convergence $\leftarrow |u^{r+1} - u^r|$,
- Détermination de la fonction de tir :

$$G(p) = x^r(T) - x_f,$$

- Solution de l'équation de tir par la méthode de Newton discrète et détermination de la nouvelle valeur de $p(0)$:

$$p^{r+1}(0) \leftarrow p^r(0) + correction,$$

- $r \leftarrow r + 1$

fin de tant que.

Remarque 3.4. Les étapes (3.7), (3.8) et (3.9) de la boucle correspondent à la méthode de relaxation alors que les étapes suivantes correspondent à la mise en œuvre de la méthode de tir.

3.3.2 Cas sans contraintes

La démarche est analogue sauf que l'étape (3.9) est remplacée par

$$u^{r+1} = -\frac{1}{k}B^T p^r,$$

3.4 Convergence de la méthode

Ecrivons les équations d'optimalité sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dp}{dt} \\ \partial\Psi_{\mathcal{U}_{ad}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{A} & 0 & -B \\ -Q & \bar{A}^T & 0 \\ 0 & B^T & kI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \\ u \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} 0 \\ -Qx_d \\ 0 \end{pmatrix},$$

à laquelle il faut adjoindre des conditions initiales pour x et p et où $\bar{A} = -A$ et I est la matrice identité. Le problème s'écrit donc comme la somme d'un système linéaire perturbé par une application diagonale. On pose

$$\Theta = \begin{pmatrix} \bar{A} & 0 & -B \\ -Q & \bar{A}^T & 0 \\ 0 & B^T & kI \end{pmatrix}.$$

Définition 3.3. Une matrice inversible \bar{A} est une M -matrice si $\bar{A}^{-1} \geq 0$ et $\bar{a}_{ij} \leq 0$ pour $i \neq j$.

Les M -matrices ont de nombreuses propriétés importantes ; notamment le rayon spectral de la matrice de Jacobi associée $J = I - \bar{D}^{-1} \cdot \bar{A}$ est inférieur à un, où \bar{D} est la diagonale de \bar{A} , propriété que nous utiliserons dans la suite.

Proposition 3.1. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- \bar{A} est une M -matrice,
- $k \geq k_0 > 0$,
- $p^2(0) - p^2(T) > 0$,

alors l'algorithme permettant de calculer numériquement, par la méthode itérative considérée, la loi de commande optimale, converge quelque soit la donnée initiale u^0 .

Preuve 3.3. Elle est analogue à celle de [23] ; on peut en donner brièvement les grandes lignes. En effet, on a vu dans le Lemme 3.2 que le sous-différentiel est une application continue monotone ; de plus si $x(0)$ est nul ce qui est toujours possible par un changement de variable, alors trivialement on a,

$$\left\langle \frac{dx}{dt}, x \right\rangle = \int_0^T x \frac{dx}{dt} dt = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{dx^2}{dt} dt,$$

soit

$$\left\langle \frac{dx}{dt}, x \right\rangle = \frac{1}{2} [x^2(T) - x^2(0)] = \frac{1}{2} x^2(T) = \frac{1}{2} x_f^2 > 0.$$

où \langle, \rangle est le produit scalaire standard dans l'espace des fonctions continues.

De plus l'état adjoint final p étant en général différent de zero et à cause de la second hypothèse on a

$$\left\langle -\frac{dp}{dt}, p \right\rangle = -\frac{1}{2} \int_0^T \frac{dp^2}{dt} dt = -\frac{1}{2} [p(T)^2 - p(0)^2],$$

$$\left\langle -\frac{dp}{dt}, p \right\rangle = \frac{1}{2} p(0)^2 - \frac{1}{2} p(T)^2 > 0.$$

Soit $y = (x, p, u)$ la solution exacte du système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i}{dt} + \bar{a}_{ii}x_i + \sum_{j \neq i} \bar{a}_{ij}x_j - \sum_j b_{ij}u_j = 0, \\ -\frac{dp_i}{dt} + \bar{a}_{ii}^T p_i + \sum_{j \neq i} \bar{a}_{ij}^T p_j - \sum_j q_{ij}x_j = -\sum_j q_{ij}x_{jd}, \\ ku_i + \sum_{j \neq i} b_{ij}^T p_j + \partial \Psi_i \ni 0. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Soit (ω, π, ν) la valeur des itérés obtenus par un algorithme itératif tel que la méthode de Jacobi ou bien de Gauss-Seidel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega_i}{dt} + \bar{a}_{ii}\omega_i + \sum_{j \neq i} \bar{a}_{ij}\omega_j - \sum_j b_{ij}\nu_j = 0, \\ -\frac{d\pi_i}{dt} + \bar{a}_{ii}^T \pi_i + \sum_{j \neq i} \bar{a}_{ij}^T \pi_j - \sum_j q_{ij}\omega_j = -\sum_j q_{ij}x_{jd}, \\ k\nu_i + \sum_{j \neq i} b_{ij}^T \pi_j + \partial \bar{\Psi}_i \ni 0, \end{array} \right. \quad (3.11)$$

où $\omega_i = x_i^r$, $\pi_i = p_i^r$ et $\nu_i = u_i^r$. En soustrayant membre à membre les équations des systèmes (3.10) et (3.11) et en multipliant respectivement par $(x_i - \omega_i)$, $(p_i - \pi_i)$ et $(u_i - \nu_i)$, on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{d}{dt}(x_i - \omega_i), x_i - \omega_i \right\rangle + \bar{a}_{ii}|x_i - \omega_i|^2 = \sum_{j \neq i} a_{ij} \langle x_j - \omega_j, x_i - \omega_i \rangle \\ \quad + \sum_j b_{ij} \langle u_j - \nu_j, x_i - \omega_i \rangle, \\ \left\langle -\frac{d}{dt}(p_i - \pi_i), p_i - \pi_i \right\rangle + \bar{a}_{ii}^T |p_i - \pi_i|^2 = \sum_{j \neq i} a_{ij}^T \langle p_j - \pi_j, p_i - \pi_i \rangle \\ \quad + \sum_j q_{ij} \langle x_j - \omega_j, p_i - \pi_i \rangle, \\ k \langle u_i - \nu_i, u_i - \nu_i \rangle + \sum_j b_{ij}^T \langle p_j - \pi_j, u_i - \nu_i \rangle + \langle \partial \Psi_i - \partial \bar{\Psi}_i, u_i - \nu_i \rangle \ni 0, \end{array} \right.$$

En raison de la propriété de monotonie du sous-différentiel, nous avons :

$$\langle Z_i - \bar{Z}_i, u_i - \nu_i \rangle \geq 0, Z_i \in \partial \Psi_i, \bar{Z}_i \in \partial \bar{\Psi}_i.$$

Compte tenu de la monotonie des trois opérateurs diagonaux précédents, on obtient aisément les inégalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} |x_i - \omega_i| \leq \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{\bar{a}_{ii}} |x_j - \omega_j| + \sum_j \frac{|b_{ij}|}{\bar{a}_{ii}} |u_j - \nu_j|, \\ |p_i - \pi_i| \leq \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}^T|}{\bar{a}_{ii}^T} |p_j - \pi_j| + \sum_j \frac{|q_{ij}|}{\bar{a}_{ii}^T} |x_j - \omega_j|, \\ |u_i - \nu_i| \leq \sum_j \frac{|b_{ij}^T|}{k} |p_j - \pi_j|, \end{array} \right.$$

qui aussi peuvent s'écrire :

$$|y_i - y_i^r| \leq \sum_{j \neq i} \frac{|\theta_{ij}|}{\theta_{ii}} |y_j - w_j|.$$

Si k est supérieur à un nombre $k_0 > 0$ donné, alors la matrice Θ est une H -matrice (c'est à dire, la matrice $\bar{\Theta}$ de coefficients $|\theta_{ii}|$ et $-|\theta_{ij}|$ est une M -matrice); dans ces conditions, on peut définir la norme uniforme avec poids :

$$\|y - y^r\|_J = \max_j \frac{|y_j - y_j^r|}{\mu_j},$$

où μ_j est le vecteur propre associé au rayon spectral $\rho(J)$ de la matrice de Jacobi J associée à la matrice $\bar{\Theta}$. D'après le théorème de Perron-Frobenius [24], μ est de composantes strictement positives et l'on a :

$$J\mu \leq \rho(J)\mu, \quad \text{avec } 0 \leq \rho(J) < 1.$$

On vérifie que l'on a une contraction, (de la même façon que dans [23]), c'est-à-dire

$$\|y - y^r\|_J \leq \rho(J) \|y - y^{r-1}\|_J,$$

et comme $\rho(J) < 1$, alors la convergence de la méthode est assurée.

Remarque 3.5. La preuve de convergence est valable dans le cas avec et sans contrainte sur la commande. En effet, dans ce dernier cas le sous-différentiel de la fonction indicatrice est nul et le raisonnement précédent est encore valable.

3.5 Exemples numériques

3.5.1 Exemple 1

Afin de tester l'algorithme de la méthode proposée, nous proposons un exemple de deux équations d'état. Dans le cas sans contrainte, nous calculons la solution analytique, nous la comparons ensuite avec la solution numérique.

Cas sans contrainte

Considérons le système dynamique défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -bx_1 + ax_2 + u_1, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = ax_1 - bx_2 + u_2, & x_2(0) = 0, \\ x_1(T) = 2, x_2(T) = 0, & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (3.12)$$

Le problème consiste à déterminer un contrôle admissible $\hat{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ minimisant la fonction coût $J(u)$:

$$J(u) = \min_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v), \quad (3.13)$$

sous les contraintes (3.12). La fonction coût $J(u)$ est donnée par :

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T [(x_1 - x_{1d})^2 + (x_2 - x_{2d})^2 + k(u_1^2 + u_2^2)] dt.$$

L'Hamiltonien relatif à ce problème est donné par :

$$\begin{aligned} H(x, p, u, t) &= \frac{1}{2} [(x_1 - x_{1d})^2 + (x_2 - x_{2d})^2 + k(u_1^2 + u_2^2)] \\ &+ p_1[-bx_1 + ax_2 + u_1] + p_2[ax_1 - bx_2 + u_2]. \end{aligned}$$

Les équations d'optimalité s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -bx_1 + ax_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = ax_1 - bx_2 + u_2, \\ \dot{p}_1 = bp_1 - ap_2 - x_1 + x_{1d}, \\ \dot{p}_2 = -ap_1 + bp_2 - x_2 + x_{2d}, \\ 0 = ku_1 + p_1, \\ 0 = ku_2 + p_2. \end{cases}$$

Solution numérique

Pour unifier les notations, on pose $x^{p_0}(t) = (x(t), p(t))$ et on a à résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -bx_1 + ax_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = ax_1 - bx_2 + u_2, \\ \dot{p}_1 = bp_1 - ap_2 - x_1 + x_{1d}, \\ \dot{p}_2 = -ax_2 + bp_2 - x_2 + x_{2d}, \\ ku_1 + p_1 = 0 \\ ku_2 + p_2 = 0 \\ x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \\ p_1(0) \in \mathbb{R}, p_2(0) \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Soit $x^{p_0}(t)$ une solution du système au temps t avec la condition initiale $x^{p_0}(0) = (0, 0, p_1(0), p_2(0))$, où $p_1(0)$ et $p_2(0)$ sont à déterminer.

On construit une fonction de tir qui est une équation algébrique non linéaire de la variable p à l'instant $t = 0$; cette fonction de tir est calculée par une procédure d'intégration numérique d'équations différentielles ordinaires (Euler, Runge-Kutta, etc). A l'instant final $T = 4$, la fonction de tir s'écrit :

$$G(p_0) = x^{p_0}(4) - x_f = \begin{pmatrix} x_1(4, p_1, p_2) - 2 \\ x_2(4, p_1, p_2) \end{pmatrix}.$$

Le problème consiste alors à déterminer $p(0)$ tel que $G(p(0))$ donne le $x(T)$ désiré.

L'algorithme de résolution numérique de ce problème sera alors complètement définis, si l'on se donne :

1. l'algorithme d'intégration d'un système différentiel à valeur initiale (par exemple une procédure d'Euler ou de Runge-Kutta), pour calculer la fonction de tir G (ici par le programme ode45 de Matlab qui est une Runge-Kutta 4/5 à pas variable).
2. l'algorithme de résolution de $G(p_0) = 0$ qui dans notre cas utilise la méthode de quasi-Newton (soit le programme 'fsolve' de Matlab).

Solution exacte

Nous allons maintenant comparer la solution numérique avec la solution exacte. Pour calculer de manière analytique la solution optimale $x(t)$, et la commande optimale correspondante $u(t)$ du problème (3.12)-(3.13), nous avons utilisé les équations d'optimalité ainsi que la condition de transversalité sur $p(t)$; puisque il n'y a pas de coût terminal, la condition de transversalité sur $p(t)$ s'écrit :

$$\exists \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}, p(T) = \sum_{i=1}^2 \kappa_i \nabla F_i(x(T)) = \kappa_1 \nabla F_1(x, T) + \kappa_2 \nabla F_2(x, T).$$

En posant $F_1(x) = x_1(T) - 2$, $F_2(x) = x_2(T)$, $p(t) = (\kappa_1, \kappa_2)$ où κ_1, κ_2 sont les multiplicateurs de Lagrange. La solution des équations d'état $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont données par :

$$\begin{aligned} x_1(t) = & (b - a - c_1)\lambda e^{c_1 t} + (b - a + c_1)\mu e^{-c_1 t} + (b + a - c_2)\gamma e^{c_2 t} \\ & + (b + a + c_2)\beta e^{-c_2 t} + b\nu - a\acute{u} + x_{1d}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) = & (b - a - c_1)\lambda e^{c_1 t} + (b - a + c_1)\mu e^{-c_1 t} - (b + a - c_2)\gamma e^{c_2 t} \\ & - (b + a + c_2)\beta e^{-c_2 t} - a\nu + b\acute{u} + x_{2d}. \end{aligned}$$

L'expression de $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont données par :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -\frac{1}{k}[\lambda e^{c_1 t} + \mu e^{-c_1 t} + \gamma e^{c_2 t} + \beta e^{-c_2 t}] \\ u_2(t) &= -\frac{1}{k}[\lambda e^{c_1 t} + \mu e^{-c_1 t} - \gamma e^{c_2 t} - \beta e^{-c_2 t}] \end{aligned}$$

Pour plus de détails voir [Annexe 1]. La solution exacte est représentée sur la Figure 3.2.

Comparaison des deux approches

Les expériences numériques ont été réalisées pour $a = 0.5$; $b = 2$; $T = 4$; $x_{1d} = x_{2d} = 0.2$. Le programme de calcul a été écrit en Matlab en utilisant les fonctions 'fsolve' et 'ode45'. On déduit que la solution exacte et la solution numérique sont concordantes (voir Figure 3.2 et Figure 3.3). Les performances de la procédure numérique sont résumées dans la Table 1, pour différentes valeurs de k . Notons que la convergence est rapide puisque, seulement quelques itérations sont nécessaires pour atteindre la solution. De plus, le temps de calcul est très faible.

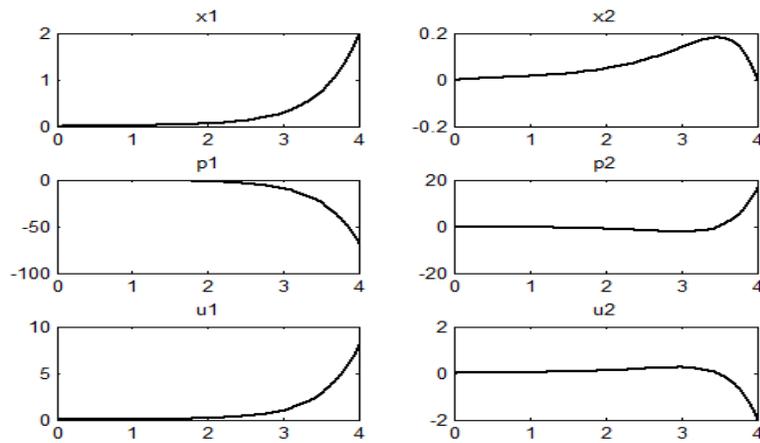


FIG. 3.2 – solution exacte / cas sans contrainte

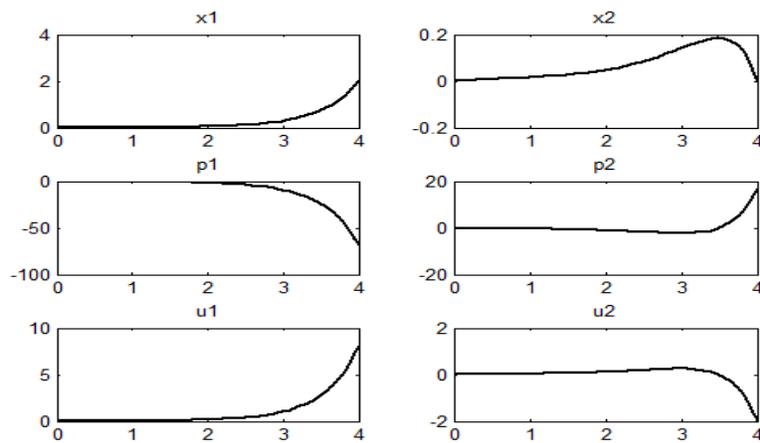


FIG. 3.3 – solution numérique / cas sans contrainte

k	temps C.P.U	nombre d'itérations
0.5	0.1248	3
1	0.0780	2
1.5	0.0780	2
2	0.0936	2
2.5	0.0936	2

Table 1. Nombre d'itérations nécessaire pour la convergence et le temps de calcul en secondes dans le cas sans contraintes.

Cas avec contrainte

En présence de contrainte sur la commande, le calcul de la solution exacte par une méthode analytique est difficile voire impossible à effectuer. Nous nous limiterons ici à la recherche d'une solution numérique. Les données sont les mêmes que celles considérées dans le cas sans contrainte. L'algorithme est analogue à celui proposé précédemment en tenant compte de la projection sur l'ensemble convexe \mathcal{U}_{ad} , cette projection est définie de manière algorithmique comme suit :

$$\text{si } u > u^M \text{ alors } u = u^M \text{ sinon si } u < u^m \text{ alors } u = u^m.$$

Pour $u_1^m = 2$, $u_1^M = 5$, $u_2^m = -1$, et $u_2^M = -0.5$, les résultats numériques sont présentés dans la Table 2 et les solutions sont dessinées en Figure 3.4. Comme précédemment la convergence, exprimée en nombre d'itérations, est rapide et les temps de calculs très faibles. Notons que dans les résultats obtenus, les contraintes sont saturées, compte-tenu des paramètres utilisés.

k	temps C.P.U	nombre d'itérations
0.5	0.6552	3
1	0.1248	2
1.5	0.0780	2
2	0.1092	2
2.5	0.1092	2

Table 2. Nombre d'itérations nécessaire pour la convergence et le temps de calcul en secondes dans le cas avec contraintes.

Nous avons validé la méthode proposée dans le cas où $n = 2$ en comparant les résultats donnés par la méthode analytique et la méthode numérique. Cependant, la méthode proposée est encore valable lorsque l'état du système est décrit par une équation différentielle de grande dimension. Dans la suite nous nous plaçons dans ce cadre.

3.5.2 Exemple 2

Considérons un système en anneau avec différentes tailles de l'équation d'état et différentes valeurs de l'état final. Le problème consiste à trouver le minimum de

$$J = \frac{1}{2} \int_0^4 \{ \|x - x_d\|^2 + k \|u\|^2 \} dt, \quad (3.14)$$

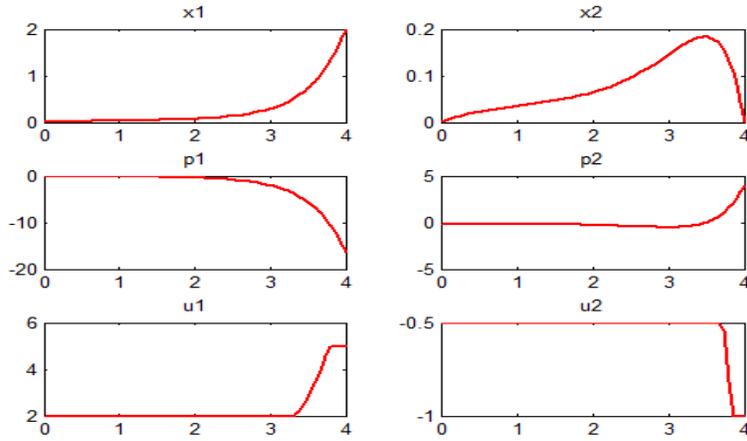


FIG. 3.4 – solution numérique / avec contrainte

sous les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x}_i = -\omega x_i + ax_{i+1} + bu_i, & x_i(0) = 0, i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \\ \dot{x}_n = ax_1 - \omega x_n + bu_n, & x_n(0) = 0, \\ x_i(4) = 2, & i \in \{1, 2, \dots, n\}, t \in [0, 4], \\ u_i^m \leq u_i \leq u_i^M, & i \in \{1, 2, \dots, n\}, \end{array} \right.$$

où a , b et ω sont des constantes réelles positives. Les conditions nécessaires d'optimalité sont alors

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x}_i = -\omega x_i + ax_{i+1} + bu_i, & x_i(0) = 0, i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \\ \dot{x}_n = ax_1 - \omega x_n + bu_n, & x_n(0) = 0, \\ -\dot{p}_1 = x_1 - \omega p_1 + ap_n - x_{1d}, & p_1(0) \text{ à déterminer}, \\ -\dot{p}_i = x_i + ap_{i-1} - \omega p_i - x_{id}, & p_i(0) \text{ à déterminer pour } i \in \{2, \dots, n\}, \\ 0 \in \partial \Psi_{u_{adi}} + bp_i + ku_i, & i \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{array} \right.$$

• **Premier cas :** $n = 5$, $a = 0,5$, $b = 1$, $\omega = 2$, $x_{id} = 0,2$, les valeurs des bornes de contrôle sont $u_i^m = 2$ et $u_i^M = 6$, $i \in [1, 5]$. La résolution numérique est dessinée sur la Figure 3.5 lorsque $k = 0,5$. Notons que dans les résultats présentés et pour tous les exemples considérés les hypothèses de la proposition 3.1 sont satisfaites et que les contraintes sont saturées. Les

résultats numériques sont présentés dans la Table 3, pour différentes valeurs de k . Nous pouvons formuler les mêmes conclusions que celle formulée précédemment concernant le taux de convergence et le temps de calcul.

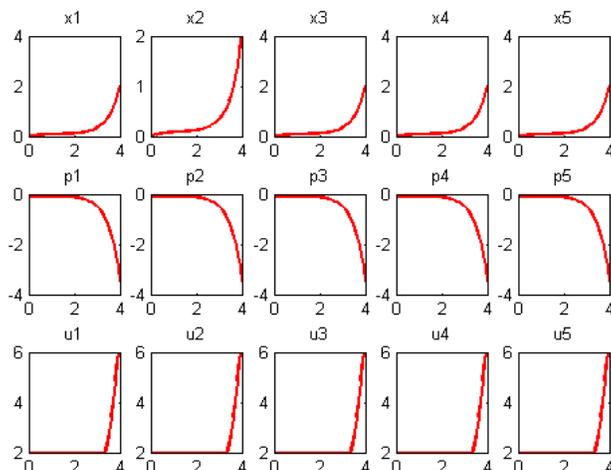


FIG. 3.5 – solution numérique

k	temps CPU	Nombre d'itérations
0.5	0.7488	3
1	0.5772	2
1.5	0.5772	2
2	0.5772	2
2.5	0.5616	2

Table 3. Nombre d'itérations nécessaire pour la convergence et le temps de calcul en secondes dans le cas avec contraintes ($n=5$).

• **Deuxième cas** : $n = 50$, $a = 0,5$, $b = 1$, $\omega = 2$, $x_{id} = 0,2$, les bornes du contrôle sont données par :

$$u_i^m = \begin{cases} 1, & i \in \{1, \dots, 10\}, \\ 5, & i \in \{11, \dots, 20\}, \\ 2, & i \in \{21, \dots, 30\}, \\ 6, & i \in \{31, \dots, 40\}, \\ 2, & i \in \{41, \dots, 50\}. \end{cases} \quad u_i^M = \begin{cases} 5, & i \in \{1, \dots, 10\}, \\ 13, & i \in \{11, \dots, 20\}, \\ 4, & i \in \{21, \dots, 30\}, \\ 17, & i \in \{31, \dots, 40\}, \\ 6, & i \in \{41, \dots, 50\}. \end{cases}$$

Les valeurs d'état final sont :

$$x_i(4) = \begin{cases} 3, & i \in \{1, \dots, 10\}, \\ 5, & i \in \{11, \dots, 20\}, \\ 2, & i \in \{21, \dots, 30\}, \\ 7, & i \in \{31, \dots, 40\}, \\ 4, & i \in \{41, \dots, 50\}. \end{cases}$$

Les résultats expérimentaux sont résumés dans la Table 4, pour différentes valeurs de k . Les Figure 3.6 et 3.7 représentent la solution numérique d'état et du contrôle lorsque $k = 0.5$.

k	temps CPU	Nombre d'itérations
0.5	2.1372	3
1	1.9968	3
1.5	1.9656	3
2	2.1216	3
2.5	1.9968	3

Table 4. Nombre d'itérations nécessaire pour la convergence et le temps de calcul en secondes dans le cas avec contraintes (n=50).

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé, sous certaines hypothèses, l'utilisation d'un algorithme de relaxation pour la résolution d'un problème de contrôle optimal non linéaire dans le cas où il y'a une contrainte sur la commande et un état final fixé. Nous avons testé cette méthode sur un problème et il s'avère que la convergence est rapide et que les temps de calculs sont petits, ce qui laisse espérer une utilisation efficace pour la commande en ligne de processus.

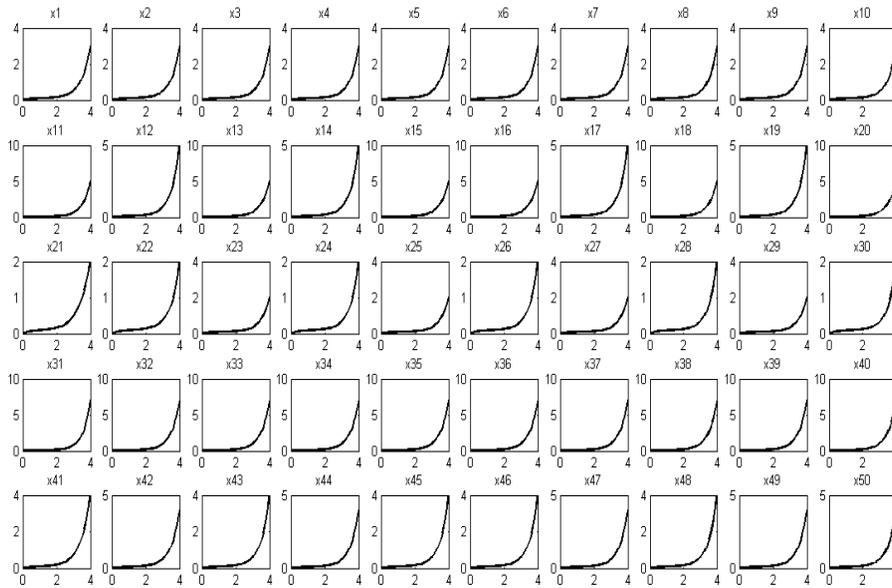


FIG. 3.6 – solution numérique d'état

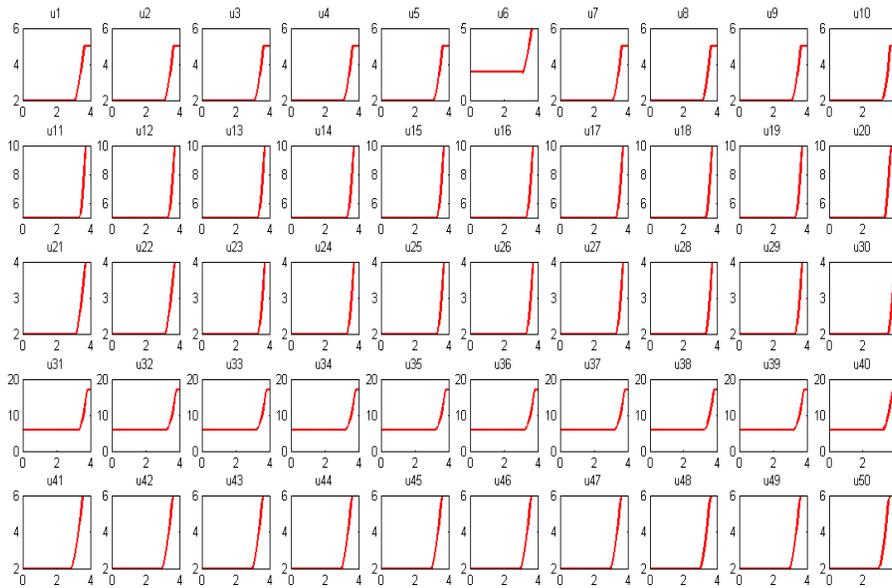


FIG. 3.7 – solution numérique de contrôle

Chapitre 4

Régulation d'un processus thermique de grande dimension

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la régulation optimale de processus thermiques de grande dimension dans le cas où l'état final et le temps final sont fixés et le contrôle est soumis à certaines contraintes. Pour résoudre un tel problème nous utilisons la méthode de relaxation couplée avec la méthode de tir étudiée au chapitre 3. Le processus thermique considéré est décrit par une équation d'état linéaire et un critère quadratique à minimiser. Le four considéré est découpé en n zones de chauffages. Ce système présente de grands couplages internes, en raison de la convection naturelle dans la cheminée et de la conduction thermique. L'objectif est de maintenir une répartition prescrite de la température sur une barre verticale placée dans la cheminée. Les observations sont considérées en n points. Le but est aussi d'obtenir une bonne précision, tout en vérifiant les contraintes de contrôle et en minimisant la consommation d'énergie. La plus simple représentation du processus linéarisé pour un contrôle donné est un modèle de dimension $2n$. Les conditions d'Hamilton-Pontryagin qui caractérisent les conditions d'optimalité, se composent de $4n$ équations différentielles et de $2n$ inégalités. Nous considérons le cas de deux fours ayant trois et douze zones de chauffages. Dans le cas où le contrôle est soumis à des contraintes, nous utiliserons la notion de sous-différentiabilité (voir [1] et [16], voir aussi chapitre 3) pour obtenir les conditions d'optimalité. Nous reformulerons les équations d'optimalité issues du principe de minimum de Pontryagin et nous avons alors à résoudre un système algèbro-différentiel. La solution d'un tel problème est obtenue par la projection sur l'ensemble convexe des contraintes.

4.2 Position du problème

Considérons un four vertical (Fig. 4.1), constitué d'une cheminée ayant n zones de chauffage. Le problème étudié consiste à amener l'état d'un barreau situé dans cette cheminée à une température voisine d'une consigne $z_d \in \mathbb{R}^n$ en un temps fini T . Dans la suite $x \in \mathbb{R}^n$ représente la température de la cheminée en n points, $u \in \mathbb{R}^r$ est l'intensité des courants envoyés dans chacun des r enroulements de chauffage; pour des raisons d'homogénéité de notation, $z \in \mathbb{R}^n$ représente la température du barreau en n points. Le problème revient donc à déterminer la commande u telle qu'au bout du temps T la température du barreau soit uniformément égale à z_d . La modélisation mathématique du problème a été obtenue par linéarisation de l'équation de la chaleur autour d'un point de fonctionnement et identification de paramètre. Soit $y = (z_1, x_1, \dots, z_i, x_i, \dots, z_n, x_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ le vecteur décrivant l'état du système à l'instant $t \in [0, T]$; y vérifie l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Ay(t) + Bu(t), t \in [0, T], \\ y(0) = y_0, y(T) = y_f, \end{cases} \quad (4.1)$$

où $y(0) = y_0$ est l'état initial donné du système, $y(T) = y_f$ est l'état final; $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ est une M-matrice, $B \in \mathbb{R}^{2n \times r}$ est une matrice donnée. L'observation du système est donné par :

$$z = Cy, \quad (4.2)$$

où $C \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$ est la matrice d'observation. La fonction coût $J(u)$ est définie par :

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \left[\frac{\alpha}{\|z_d\|_2^2} \|z - z_d\|_2^2 + \frac{\beta}{\|u_d\|_2^2} \|u - u_d\|_2^2 \right] dt, \quad (4.3)$$

u_d correspondant à la commande conduisant asymptotiquement à la température prescrite z_d est donnée par :

$$u_d = -(CA^{-1}B)^{-1}z_d.$$

Les coefficients α et β contrôlent le poids donné dans la fonction coût relatif à la précision et à la consommation d'énergie. Les composantes du vecteur de contrôle vérifient les contraintes suivantes :

$$u_i^m \leq u_i \leq u_i^M, \forall i \in \{1, \dots, r\}, \forall t \in [0, T]. \quad (4.4)$$

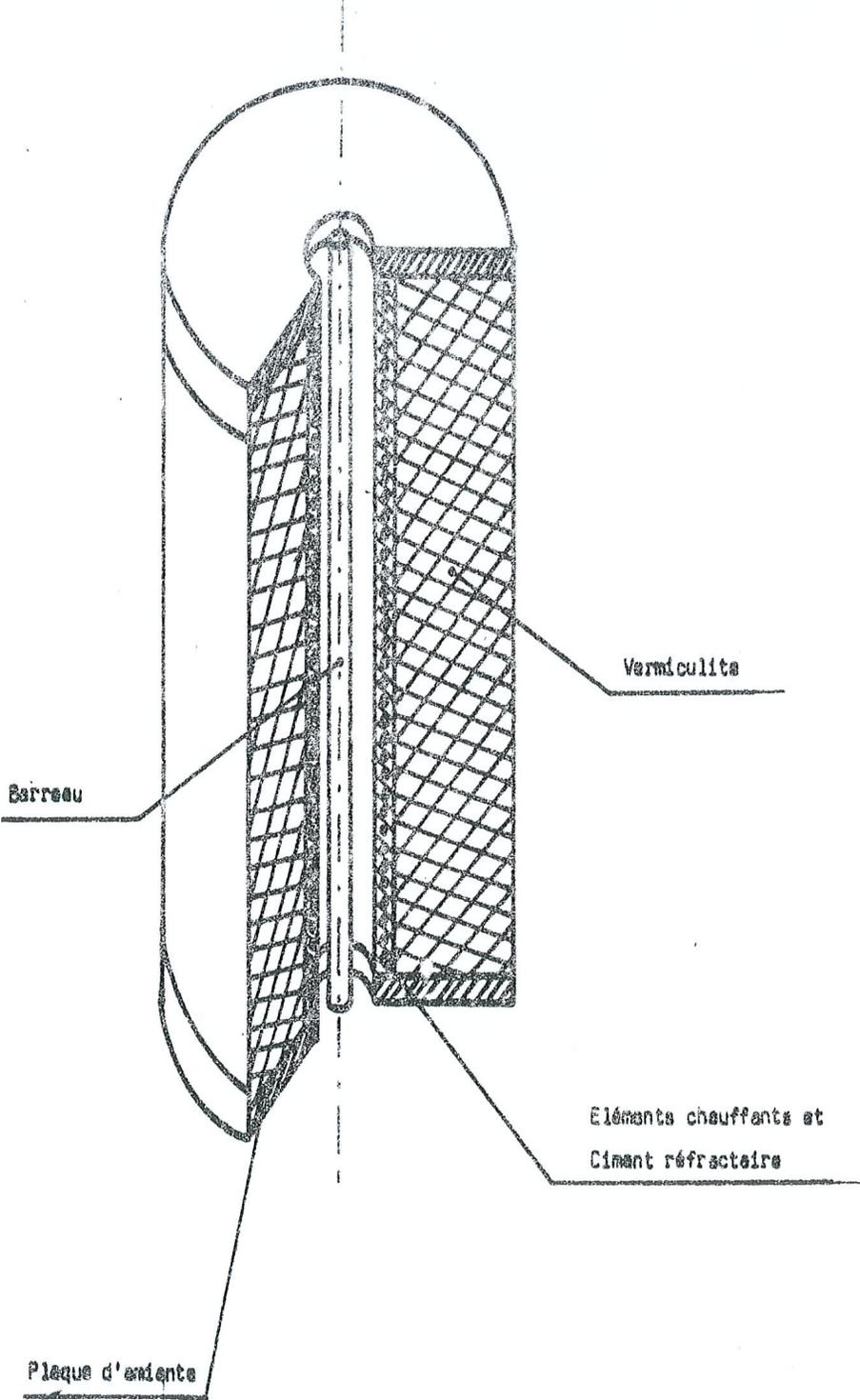


FIG. 4.1 -

Dans la suite \mathcal{U}_{ad} est appelé l'ensemble des commandes admissibles ; \mathcal{U}_{ad} est convexe, fermé et non vide. Le problème consiste alors à trouver un contrôle admissible $u \in \mathcal{U}_{ad}$ minimisant la fonction coût J :

$$J(u) = \min_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v), \quad (4.5)$$

sous les contraintes (4.1) et (4.4). L'Hamiltonien du système est donné par :

$$H(y, p, u, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha}{\|z_d\|_2^2} \|z - z_d\|_2^2 + \frac{\beta}{\|u_d\|_2^2} \|u - u_d\|_2^2 \right] + p^T \cdot [Ay + Bu],$$

où p est le vecteur d'état adjoint. Chercher le contrôle qui minimise l'Hamiltonien revient à chercher \hat{u} , tel que :

$$H(\hat{y}, \hat{p}, \hat{u}) \leq H(y, p, u), \forall u \in \mathcal{U}_{ad}.$$

La solution du problème défini par les équations (4.1)-(4.3) et (4.5) est classiquement caractérisée en utilisant le principe de Pontryaguin. Dans la suite on va reformuler les conditions nécessaires d'optimalité dans le cas, où le contrôle est soumis aux contraintes (4.4) ; pour cela on va donc utiliser la notion de sous-différentiabilité pour obtenir des conditions d'optimalité et analyser la méthode de relaxation couplée avec la méthode de tir.

4.2.1 Le principe de Pontryaguin dans le cas avec contrainte

Appliquons le Lemme 3.1 à notre problème. On cherche $\hat{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ qui minimise l'Hamiltonien H ; puisque H est un opérateur continu [16], on a :

$$0 \in \partial(H + \Psi_{\mathcal{U}_{ad}})(\hat{u}) = \partial H(\hat{u}) + \partial \Psi_{\mathcal{U}_{ad}}(\hat{u}).$$

La nouvelle formulation des conditions nécessaires d'optimalité est donc :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Ay + Bu; y(0) = y_0, y(T) = y_f, \forall t \in [0, T], \\ -\frac{dp}{dt} = A^T p + C^T C y - C^T z_d, p(0) \text{ à déterminer}, \\ \partial(H + \Psi_{\mathcal{U}_{ad}})(\hat{u}) = \partial H(\hat{u}) + \partial \Psi_{\mathcal{U}_{ad}}(\hat{u}) \ni 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

dans notre cas on a :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Ay + Bu; y(0) = y_0, y(T) = y_f, \forall t \in [0, T], \\ -\frac{dp}{dt} = A^T p + C^T C y - C^T z_d, p(0) \text{ à déterminer}, \\ B^T p + k(u - u_d) + \partial\psi_{\mathcal{U}_{ad}} \ni 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

où $p(t)$ est le vecteur adjoint, $k = \frac{\|z_d\|^2}{\|u_d\|^2} \cdot \frac{\beta}{\alpha}$, $u_d = -(CA^{-1}B)^{-1}z_d$ et $\partial\psi_{\mathcal{U}_{ad}}$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice du convexe \mathcal{U}_{ad} .

4.3 Expérimentations numériques

Les expérimentations numériques ont porté sur la régulation de deux processus thermiques de grande dimension, à savoir le four à trois et le four à douze zones de chauffage.

4.3.1 Le four à trois zones de chauffage

Considérons dans ce cas un four constitué d'une cheminée ayant trois zones de chauffage, avec six variables d'état et trois variables de contrôle; donc dans notre cas $n = 6$ et $r = 3$. Le temps exprimé en minutes et les contrôles sont exprimés en calories par minute, $T = 180mn$, $z_d = 30^\circ c$ et $u_d = (372.3915, 193.3312, 419.6856)$. Les valeurs numériques des matrices A , B et C , sont données par

$$A = \begin{pmatrix} -0.030 & 0.013 & 0.0077 & 0.0071 & 0.00017 & 0.00065 \\ 0.0017 & -0.012 & 0.00009 & 0.00033 & 0.00008 & 0.00029 \\ 0.0075 & 0 & -0.040 & 0.016 & 0.0077 & 0.00073 \\ 0 & 0.0030 & 0.0019 & -0.014 & 0.00009 & 0.0033 \\ 0 & 0 & 0.0075 & 0 & -0.029 & 0.012 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0030 & 0.0014 & -0.013 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.00125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00125 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cas sans contraintes Les principaux résultats expérimentaux sont résumés dans la Table 1.

β/α	$k = 0.0077 \cdot (\beta/\alpha)$	temps CPU	nombre d'itérations
1/10	$7.6664 \cdot 10^{-4}$	1.0140	10
1/4	0.0019	1.0452	10
1/2	0.0038	1.0764	11
1/1	0.0077	1.0920	11
2/1	0.0153	1.1388	12
4/1	0.0307	1.1856	12
10/1	0.0767	1.2168	13

Table 1. Nombre d'itérations nécessaire pour la convergence et temps de calcul en secondes dans le cas sans contraintes.

Cas avec contraintes Les valeurs des bornes du commande sont données dans la Table 2.

i	u_i^m	u_i^M
1	180	300
2	0	450
3	0	500

Table 2. Les valeurs des bornes du contrôle

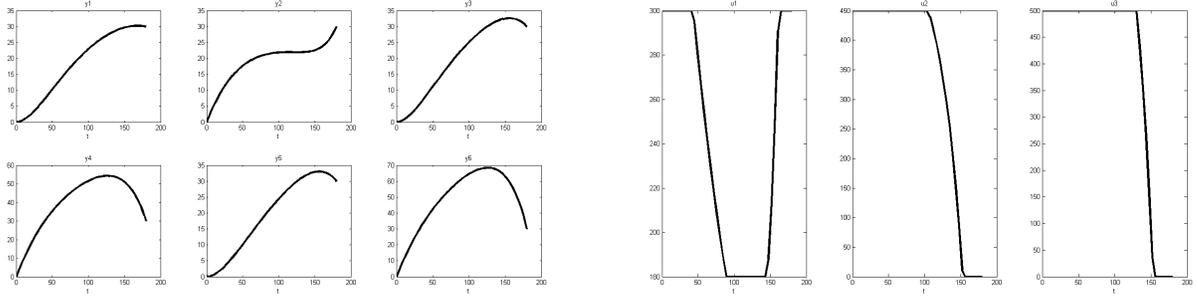
Les principaux résultats expérimentaux sont résumés dans la Table 3. La figure 4.2 représente l'état et la commande lorsque $\beta = 1$ et $\alpha = 4$.

β/α	$k = 0.0077 \cdot (\beta/\alpha)$	temps CPU	nombre d'itérations
1/10	$7.6664 \cdot 10^{-4}$	0.9984	10
1/4	0.0019	1.0764	10
1/2	0.0038	1.0608	11
1/1	0.0077	1.1700	11
2/1	0.0153	1.1388	12
4/1	0.0307	1.1544	12
10/1	0.0767	1.1388	13

Table 3. Nombre d'itérations nécessaire pour la convergence et temps de calcul en secondes dans le cas avec contraintes.

4.3.2 Le four à douze zones de chauffage

Considérons un four constitué d'une cheminée ayant douze zones de chauffage, avec vingt-quatre variables d'état et douze contrôles; dans ce cas $n = 24$ et $r = 12$. Le temps est exprimé en minutes et les contrôles en calories par minute, $T = 40mn$, $z_d = 30^\circ c$ et


 FIG. 4.2 – L'état et le contrôle où $\beta = 1$ et $\alpha = 4$

$u_d = (1075.7, 826.3, 840.9, 845.7, 842.7, 850.7, 858.8, 872.2, 894.3, 930.7, 959.7, 1484.1)$. La matrice d'état A est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & S + \varepsilon & \varepsilon S & \varepsilon^2 S & \cdot & \cdot & \cdot & \varepsilon^k S & \cdot & \cdot & \cdot & \varepsilon^{10} S \\ \theta & D & S + \theta & \varepsilon S & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \varepsilon^8 S & \varepsilon^9 S \\ 0 & \theta & D & S + \theta & \cdot \\ 0 & 0 & \theta & D & S + \theta & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & S + \varepsilon & \varepsilon S & \varepsilon^2 S \\ \cdot & S + \theta & \varepsilon S \\ \cdot & \theta & D & S + \theta \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \theta & D_{12} \end{pmatrix}$$

où chacun des blocs D_1 , D , D_{12} , S et θ sont définis par les matrices suivantes :

$$D_1 = \begin{pmatrix} -0.38 & 0.196 \\ 0.0068 & -0.0629 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -0.39 & 0.196 \\ 0.0068 & -0.0682 \end{pmatrix} \quad D_{12} = \begin{pmatrix} -0.44 & 0.196 \\ 0.0068 & -0.0559 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0.0054 & 0.012 \\ 0.00033 & 0.00074 \end{pmatrix} \quad \theta = \begin{pmatrix} 0.065 & 0 \\ 0 & 0.0031 \end{pmatrix} \quad S + \theta = \begin{pmatrix} 0.0704 & 0.012 \\ 0.0003 & 0.0038 \end{pmatrix}$$

avec $\varepsilon = 0.67$. Les éléments des matrices B et C sont définis par :

$$b_{ij} = \begin{cases} 0.00195, & \text{si } i \text{ est pair et } j = i/2; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pour } i = 1 \text{ à } 24 \text{ et } j = 2i - 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

on vérifie que A est une M-matrice.

Cas sans contraintes Les principaux résultats expérimentaux sont résumés dans la Table 4.

β/α	$k = 0.00098 \cdot (\beta/\alpha)$	temps CPU	nombre d'itérations
1/10	$9.8325 \cdot 10^{-5}$	6.7704	15
1/4	$2.4581 \cdot 10^{-4}$	7.2696	17
1/2	$4.9162 \cdot 10^{-4}$	6.8796	15
1/1	$9.8325 \cdot 10^{-4}$	6.0372	14
2/1	0.0020	6.6300	15
4/1	0.0039	7.1448	16
10/1	0.0098	6.5832	14

Table 4. Nombre d'itérations nécessaire pour la convergence et le temps de calcul en secondes dans le cas sans contraintes.

Cas avec contraintes Les valeurs des bornes du contrôle sont données dans la Table 5.

i	u_i^m	u_i^M	i	u_i^m	u_i^M	i	u_i^m	u_i^M
1	100	1200	5	500	850	9	500	900
2	835	870	6	500	850	10	500	1000
3	500	850	7	500	900	11	500	1000
4	500	850	8	500	900	12	100	1000

Table 5. Les valeurs des bornes du contrôle

Les principaux résultats expérimentaux sont résumés dans la Table 6. Les figures 4.3 et 4.4 représentent l'état et la commande lorsque $\beta = 1$ et $\alpha = 4$.

β/α	$k = 0.00098 \cdot (\beta/\alpha)$	temps CPU	nombre d'itération
1/10	$9.8325 \cdot 10^{-5}$	6.9888	15
1/4	$2.4581 \cdot 10^{-4}$	7.5660	17
1/2	$4.9162 \cdot 10^{-4}$	6.8328	15
1/1	$9.8325 \cdot 10^{-4}$	6.2088	14
2/1	0.0020	6.4428	15
4/1	0.0039	6.6300	16
10/1	0.0098	6.2868	14

Table 6. Nombre d'itérations nécessaire pour la convergence et le temps de calcul en secondes dans le cas avec contraintes.

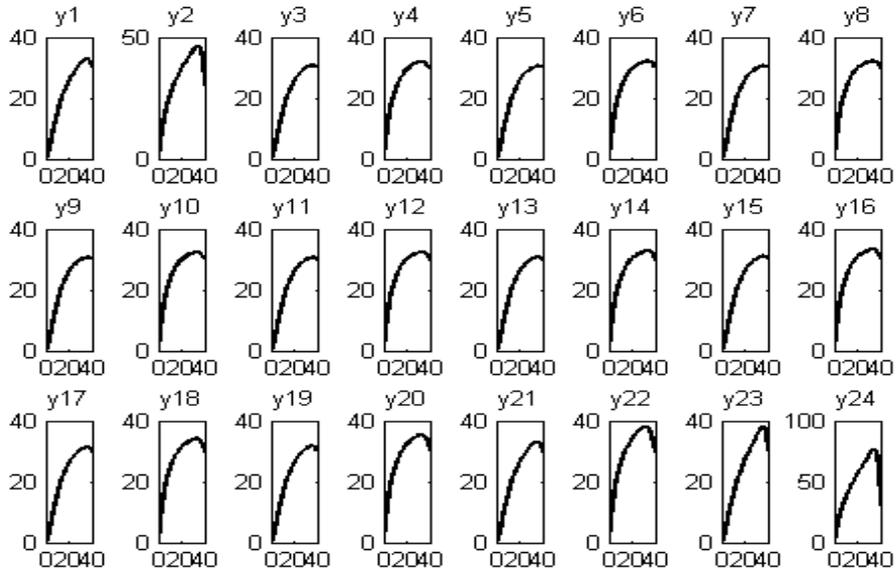


FIG. 4.3 – L'état où $\beta = 1$ et $\alpha = 4$

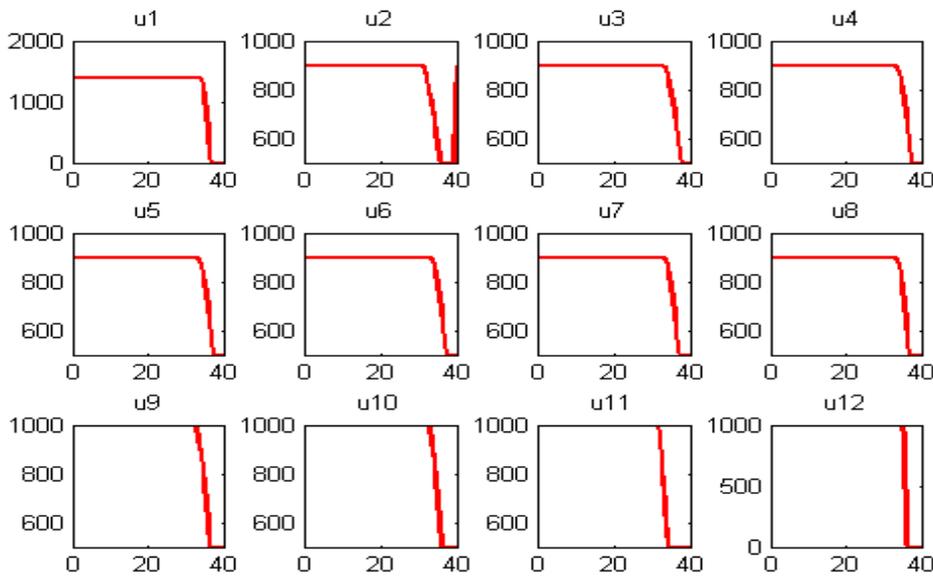


FIG. 4.4 – Le contrôle où $\beta = 1$ et $\alpha = 4$

4.3.3 Commentaire des résultats expérimentaux

Les principaux résultats expérimentaux obtenus pour la régulation des deux fours à trois et à douze zones de chauffage dans le cas avec et sans contraintes sur le contrôle, nous conduisent à formuler les commentaires suivants. On remarque que la convergence est rapide, puisque, le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre la convergence est de dix à dix-sept itérations. Dans les deux cas, le temps de calcul global est d'environ une seconde pour le four à trois zones de chauffage et d'environ sept secondes pour le four à douze zones de chauffage. En faisant une comparaison des résultats obtenus par les deux simulations concernant les deux modèles mathématiques qui décrivent l'évolution du processus thermique, on déduit que les résultats obtenus avec le four à douze zones de chauffage sont plus réalistes. En effet, la décomposition en douze zones est plus fine par rapport à la décomposition en trois zones et par conséquent elle reflète mieux la réalité physique. Notons aussi qu'il existe un phénomène de convection plus important dans la première et dans la dernière zone. La méthode proposée est originale ; elle combine la méthode de tir avec la méthode de relaxation et est bien adaptée pour un contrôle en ligne de processus thermique de grande dimension, dans le cas avec et sans contrainte sur la contrôle.

4.4 Conclusion

Les expérimentations numériques ont porté sur la régulation de deux processus thermiques de grandes dimensions, constitués de deux fours à trois et à douze zones de chauffage. Notons que la convergence est rapide et le temps de calcul est peu important. Par conséquent, l'algorithme proposé est bien adapté à la commande en ligne de processus thermique de grande dimension. De plus, la méthode proposée est également efficace lorsque la contrôle est soumis à certaines contraintes, cas où une résiliation analytique est difficile à envisager.

Chapitre 5

Résolution d'un problème de contrôle optimal avec contrainte sur l'état et sur le contrôle

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous effectuons une extension des résultats obtenus au chapitre 3 dans le cas où le temps terminal et l'état final sont fixés et où le contrôle et l'état sont soumis à des contraintes. Dans ce cas, l'ensemble des états admissibles et des contrôles admissibles sont des ensembles convexes fermés. Nous utiliserons alors la notion de sous-différentiel et nous reformulerons les conditions nécessaires d'optimalité. Les étapes de la méthode de résolution numérique sont analogues à celles du chapitre 3 sauf que l'état est obtenu par la projection sur l'ensemble convexe des états admissibles. Les hypothèses de convergence de la méthode de relaxation couplée avec la méthode de tir proposé au chapitre 3 sont toujours valables. Pour illustrer ce chapitre nous reconsidérons l'exemple de système en anneau de grande dimension ainsi que la régulation optimale de processus thermiques de grande dimension, présentés respectivement au chapitre 3 et 4. Dans le premier exemple on considère 50 équations d'état, on aura à résoudre alors un système algébro-différentiel de 150 équations. Dans l'exemple de four à trois et à douze zones de chauffages on aura respectivement 15 et 60 équations de système algébro-différentiel.

5.2 Position du problème

Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), t \in [0, T] \\ x(0) = x_0, x(T) = x_f, \end{cases} \quad (5.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système à l'instant t , $x(0) = x_0$ est l'état initial du système, $x(T) = x_f$ est l'état final. $u(t) \in \mathbb{R}^r$ est la commande agissant sur le système à l'instant $t \in [0, T]$; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ sont des matrices données. La fonction coût $J(u)$ est définie par :

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T [(x - x_d)^t Q (x - x_d) + u^t k u] dt, \quad (5.2)$$

où x_d représente un état désiré, k pondère précision et coût de la commande, la matrice Q est symétrique, Q est définie non-négative. Les composantes du vecteur d'état et de contrôle vérifient respectivement les contraintes suivantes :

$$u_i^m \leq u_i \leq u_i^M, \forall i \in \{1, \dots, r\}, \forall t \in [0, T]. \quad (5.3)$$

$$x_i^m \leq x_i \leq x_i^M, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall t \in [0, T]. \quad (5.4)$$

Dans la suite \mathcal{X}_{ad} et \mathcal{U}_{ad} sont appelés respectivement l'ensemble des états admissibles et l'ensemble des commandes admissibles; \mathcal{X}_{ad} et \mathcal{U}_{ad} sont des ensembles convexes fermés. Le problème consiste alors à trouver un contrôle admissible $u \in \mathcal{U}_{ad}$ minimisant la fonction coût J :

$$J(u) = \min_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v), \quad (5.5)$$

sous les contraintes (5.1), (5.3) et (5.4). L'Hamiltonien du système est donné par :

$$H(x, p, u, t) = \frac{1}{2} [(x - x_d)^t Q (x - x_d) + u^t k u] + p^t \cdot [Ax + Bu],$$

où p est le vecteur d'état adjoint. Cherchons maintenant la commande qui minimise l'Hamiltonien; cela revient à chercher \hat{u} , tel que

$$H(\hat{x}, \hat{p}, \hat{u}) \leq H(x, p, u); \forall u \in \mathcal{U}_{ad}.$$

La solution du problème défini par les équations (5.1), (5.2) et (5.5) est caractérisée en utilisant le principe de Pontryagin. Comme l'état et le contrôle sont soumis aux contraintes (5.3) et (5.4), on va donc reformuler les conditions nécessaires d'optimalité en utilisant la notion de sous-différentiabilité.

5.2.1 Le principe de Pontryagin dans le cas avec contrainte

Appliquons le Lemme 3.1 à notre problème. On cherche $\hat{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ qui minimise l'Hamiltonien H ; ceci peut s'écrire sous la forme :

$$0 \in \partial H(\hat{u});$$

puisque H est un opérateur continu ([16]), la nouvelle formulation des conditions nécessaires d'optimalité est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} + \partial\Psi_{\mathcal{X}_{ad}} - Ax + B\hat{u} \ni 0; x(0) = x_0, x(T) = x_f, \forall t \in [0, T] \\ -\frac{dp}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} = A^T p + Q(x - x_d), p(0) \text{ à déterminer,} \\ k\hat{u} + B^T p + \partial\Psi_{\mathcal{U}_{ad}}(\hat{u}) \ni 0, \end{array} \right.$$

où $p(t)$ est le vecteur adjoint, $\partial\psi_{\mathcal{U}_{ad}}$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice du convexe \mathcal{U}_{ad} et $\partial\psi_{\mathcal{X}_{ad}}$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice du convexe \mathcal{X}_{ad} .

5.3 Algorithme de résolution

Les étapes de la méthode de résolution numérique sont analogues à celles du chapitre 3 sauf que l'étape (3.7) est remplacée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx^r}{dt} = Ax^r + Bu^r, \text{ avec } x^r = Proj(x), \\ x(0) = x_0, \end{array} \right. \quad (5.6)$$

où $Proj(\cdot)$ est l'opérateur de projection sur le convexe fermé \mathcal{X}_{ad} .

5.4 Convergence de la méthode

Les conditions nécessaires de Pontryagin s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

$$\left(\begin{array}{c} \frac{dx}{dt} + \partial\Psi_{\mathcal{X}_{ad}} \\ -\frac{dp}{dt} \\ \partial\Psi_{\mathcal{U}_{ad}} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc} \bar{A} & 0 & -B \\ -Q & \bar{A}^T & 0 \\ 0 & B^T & kI \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x \\ p \\ u \end{array} \right) \ni \left(\begin{array}{c} 0 \\ Qx_d \\ 0 \end{array} \right), x(0) = x_0,$$

où $\bar{A} = -A$ et I est la matrice identité. Le problème s'écrit donc comme la somme d'un système linéaire perturbé par une application diagonale. On pose

$$\Theta = \begin{pmatrix} \bar{A} & 0 & -B \\ -Q & \bar{A}^T & 0 \\ 0 & B^T & kI \end{pmatrix}.$$

Remarque 5.1. *Les hypothèses de convergence de l'algorithme sont les mêmes avec celles du chapitre 3. Pour la preuve de convergence, elle est analogue à celle du chapitre 3 et [32].*

En prenant en compte des contraintes sur l'état et sur le contrôle, nous avons appliqué la méthode de relaxation couplée avec la méthode de tir sur deux exemples de grandes dimensions. Le premier exemple est celui de système en anneau avec $n = 50$ du chapitre 3, le deuxième est celui de four à trois et à douze zones de chauffages du chapitre 4.

5.5 Système en anneau

Considérons un système en anneau avec 50 équations d'états. Le problème consiste à trouver le minimum de

$$J = \frac{1}{2} \int_0^4 \{ \|x - x_d\|^2 + k\|u\|^2 \} dt, \quad (5.7)$$

sous les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x}_i = -\omega x_i + ax_{i+1} + bu_i, & x_i(0) = 3, \quad i \in \{1, 2, \dots, 49\}, \\ \dot{x}_{50} = ax_1 - \omega x_{50} + bu_{50}, & x_{50}(0) = 3, \\ x_i(4) = 3, & i \in \{1, 2, \dots, 50\}, \quad t \in [0, 4], \\ x_i^m \leq x_i \leq x_i^M, & i \in \{1, 2, \dots, 50\}, \\ u_i^m \leq u_i \leq u_i^M, & i \in \{1, 2, \dots, 50\}, \end{array} \right.$$

où $a = 0.5$, $b = 1$ et $\omega = 2$, $k = 0.5$ et $x_{id} = 1$. Les conditions nécessaires d'optimalité sont alors

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 \in \dot{x}_i + \partial\Psi_{\mathcal{X}_{adi}} + \omega x_i - ax_{i+1} - bu_i, & x_i(0) = 3, i \in \{1, 2, \dots, 49\}, \\ 0 \in \dot{x}_{50} + \partial\Psi_{\mathcal{U}_{ad}} - ax_1 + \omega x_{50} - bu_{50}, & x_{50}(0) = 3, \\ -\dot{p}_1 = x_1 - \omega p_1 + ap_{50} - x_{1d}, & p_1(0) \text{ à déterminer}, \\ -\dot{p}_i = x_i + ap_{i-1} - \omega p_i - x_{id}, & p_i(0) \text{ à déterminer pour } i \in \{2, \dots, 50\}, \\ 0 \in \partial\Psi_{\mathcal{U}_{adi}} + bp_i + ku_i, & i \in \{1, 2, \dots, 50\}. \end{array} \right.$$

Les valeurs des bornes d'état et du contrôle sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_i^m = 1.5, x_i^M = 3, & \text{pour } i \in \{1, \dots, 50\}, \\ u_i^m = 2, u_i^M = 5, & \text{pour } i \in \{1, \dots, 50\}, \end{array} \right.$$

Les résultats numériques sont présentés dans la Table 7, pour différentes valeurs de k . Les figures 5.1 et 5.2 représentent l'état et le contrôle lorsque $k = 0.5$.

k	temps CPU	Nombre d'itérations
0.5	2.9328	6
1	2.8080	6
1.5	2.4960	5
2	2.5740	5
2.5	2.3088	5

Table 7. Nombre d'itérations nécessaire pour la convergence et le temps de calcul en secondes.

5.6 Régulation de processus thermique

Considérons deux fours ayant trois et douze zones de chauffages étudiés au chapitre 3.

5.6.1 Le four à trois zones de chauffages

Le temps T dans cet exemple est donné par $T = 5mn$, les valeurs des bornes du contrôle et d'état sont données dans la Table 8 et la Table 9.

Chapitre 5. Résolution d'un problème de contrôle optimal avec contrainte sur l'état et sur le contrôle

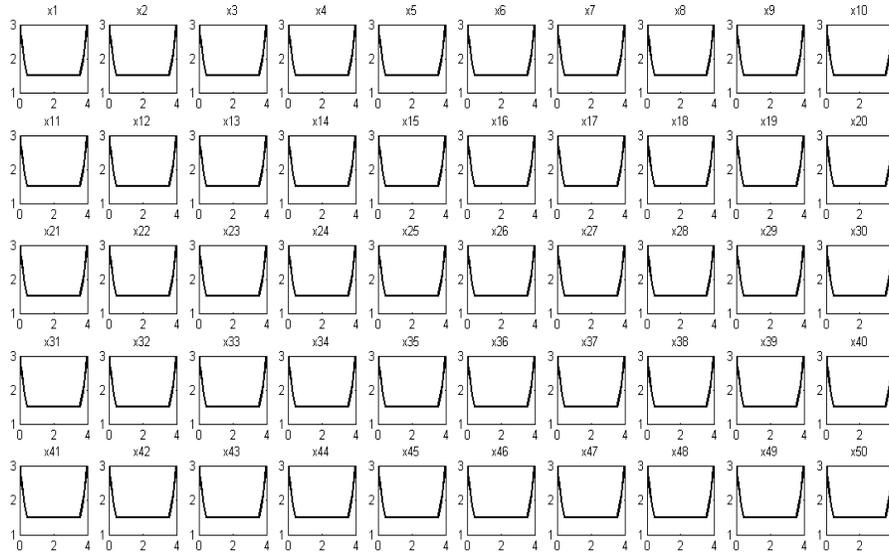


FIG. 5.1 – solution numérique d'état

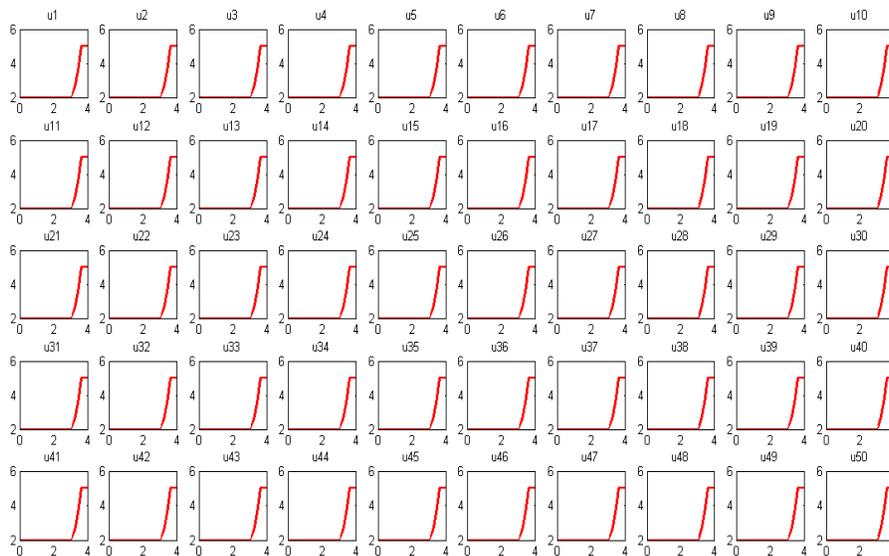


FIG. 5.2 – solution numérique de contrôle

i	u_i^m	u_i^M
1	0	40000
2	0	70000
3	0	90000

Table 8. Les valeurs des bornes du contrôle

i	y_i^m	y_i^M
2	0	100
4	0	150
6	0	200

Table 9. Les valeurs des bornes d'état

Les principaux résultats expérimentaux sont résumés dans la Table 10. La figure 5.3 représente l'état et la commande lorsque $\beta = 1$ et $\alpha = 4$.

β/α	$k = 0.0077 \cdot (\beta/\alpha)$	temps CPU	nombre d'itérations
1/10	$7.6664 \cdot 10^{-4}$	1.4508	19
1/4	0.0019	1.4352	20
1/2	0.0038	1.5600	21
1/1	0.0077	1.5600	21
2/1	0.0153	1.5600	22
4/1	0.0307	1.5912	23
10/1	0.0767	1.6380	24

Table 10. Nombre d'itérations nécessaire pour la convergence et temps de calcul en secondes.

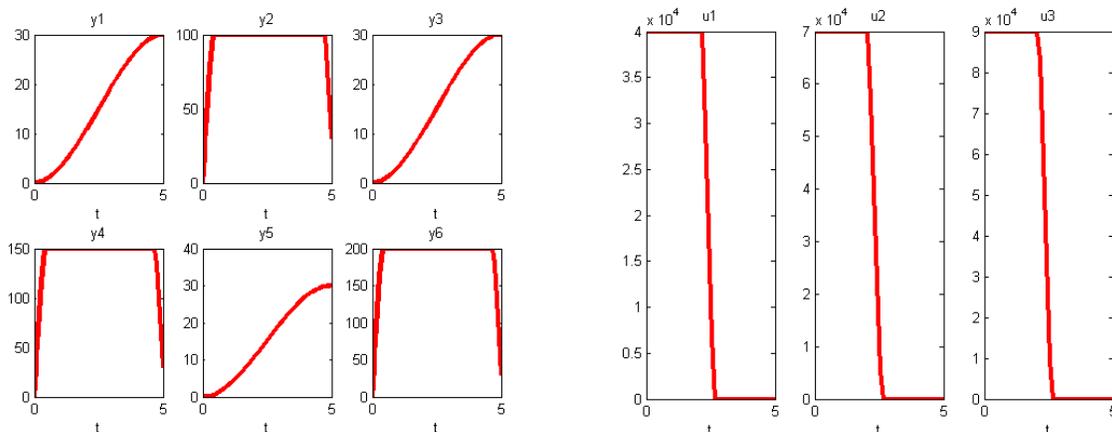


FIG. 5.3 – L'état et le contrôle où $\beta = 1$ et $\alpha = 4$

5.6.2 Le four à douze zones de chauffages

Le temps T dans cet exemple est donné par $T = 5mn$, les valeurs des bornes du contrôle et d'état sont données dans la Table 11 et 12.

i	u_i^m	u_i^M	i	u_i^m	u_i^M	i	u_i^m	u_i^M
1	1000	4000	5	1000	4000	9	1000	4000
2	1000	4000	6	1000	4000	10	1000	4000
3	1000	4000	7	1000	4000	11	1000	4000
4	1000	4000	8	1000	4000	12	1000	8000

Table 11. Les valeurs des bornes du contrôle

i	y_i^m	y_i^M	i	y_i^m	y_i^M
2	0	35	8	0	35
4	0	35	10	0	35
6	0	35	12	0	35

Table 12. Les valeurs des bornes d'état

Les principaux résultats expérimentaux sont résumés dans la Table 13. Les figures 5.4 et 5.5 représentent l'état et la commande lorsque $\beta = 1$ et $\alpha = 4$.

β/α	$k = 0.00098 \cdot (\beta/\alpha)$	temps CPU	nombre d'itération
1/10	$9.8325 \cdot 10^{-5}$	3.4944	11
1/4	$2.4581 \cdot 10^{-4}$	3.2916	12
1/2	$4.9162 \cdot 10^{-4}$	3.4008	13
1/1	$9.8325 \cdot 10^{-4}$	3.5412	13
2/1	0.0020	3.0732	13
4/1	0.0039	4.1184	14
10/1	0.0098	4.1184	15

Table 13. Nombre d'itérations nécessaire pour la convergence et le temps de calcul en secondes.

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons généralisé les résultats de chapitre 3 au cas où le temps terminal et l'état final sont fixés et où le contrôle et l'état sont soumis à des contraintes. Les expérimentations numériques ont porté sur l'étude d'un système en anneau avec 50 équations d'état et sur la régulation de deux processus thermiques de grandes dimensions, constitués de deux fours à trois et à douze zones de chauffage. Notons que dans les

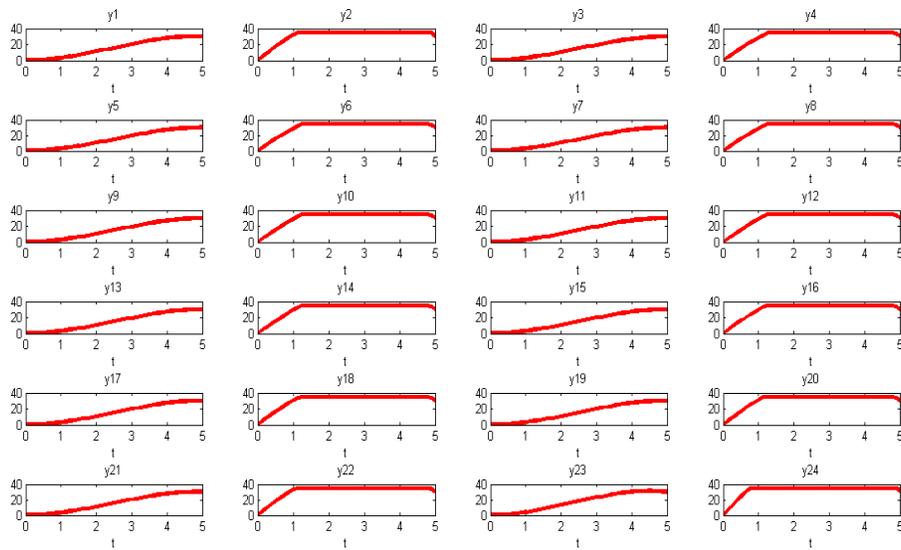


FIG. 5.4 – L'état où $\beta = 1$ et $\alpha = 4$

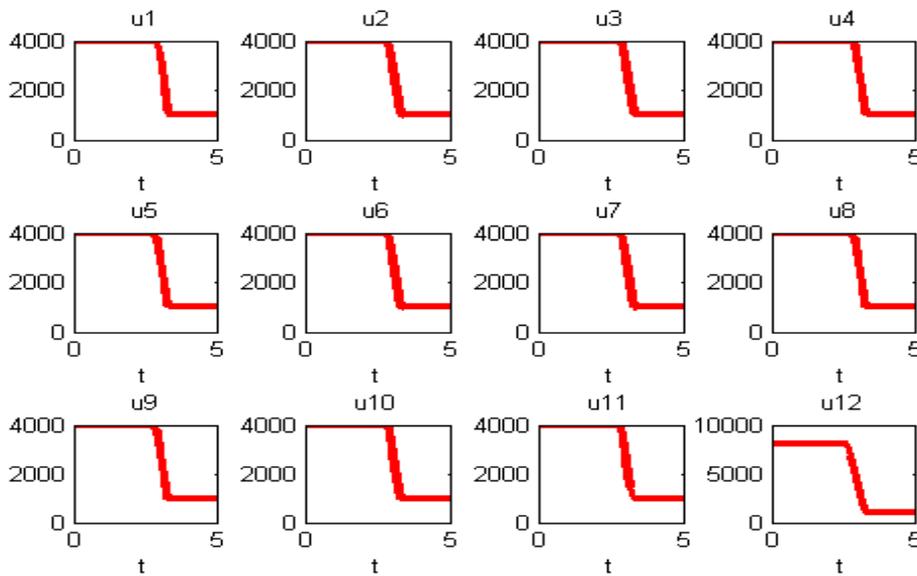


FIG. 5.5 – Le contrôle où $\beta = 1$ et $\alpha = 4$

Chapitre 5. Résolution d'un problème de contrôle optimal avec contrainte sur l'état et sur le contrôle

deux exemples la convergence est rapide, puisque, le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre la convergence est de six itérations dans le système en anneau est de onze à vingt-quatre itérations dans le four à trois et douze zones de chauffage. Le temps de calcul est peu important, puisque, le temps de calcul global est d'environ deux secondes pour le système en anneau, environ une seconde pour le four à trois zones de chauffage et quatre secondes pour le four à douze zones de chauffage. Par conséquent la méthode proposée est toujours efficace lorsque l'état et le contrôle sont soumis à des contraintes.

Annexe A

Solution analytique du système en anneau sans contrainte

Nous limitons ce paragraphe à la recherche de la solution exacte du problème de contrôle dans le cas sans contrainte avec deux équations différentielles [voir chapitre 3].

Les équations d'optimalité s'écrivent :

$$\dot{x}_1 = -bx_1 + ax_2 + u_1, \quad (\text{A.1})$$

$$\dot{x}_2 = ax_1 - bx_2 + u_2, \quad (\text{A.2})$$

$$\dot{p}_1 = bp_1 - ap_2 - x_1 + x_{1d}, \quad (\text{A.3})$$

$$\dot{p}_2 = -ap_1 + bp_2 - x_2 + x_{2d}, \quad (\text{A.4})$$

$$0 = ku_1 + p_1, \quad (\text{A.5})$$

$$0 = ku_2 + p_2. \quad (\text{A.6})$$

En remplaçant u_1 et u_2 dans (A.1) et (A.2), on trouve :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -bx_1 + ax_2 - \frac{1}{k}p_1, \\ \dot{x}_2 = ax_1 - bx_2 - \frac{1}{k}p_2, \end{cases}$$

En dérivant (A.3) et (A.4) et en remplaçant \dot{x}_1 et \dot{x}_2 on obtient :

$$\ddot{p}_1 = b\dot{p}_1 - a\dot{p}_2 + bx_1 - ax_2 + \frac{1}{k}p_1, \quad (\text{A.7})$$

$$\ddot{p}_2 = -a\dot{p}_1 + b\dot{p}_2 - ax_1 + bx_2 + \frac{1}{k}p_2, \quad (\text{A.8})$$

mais d'après (A.3) et (A.4) :

$$\begin{cases} x_1 = bp_1 - ap_2 - \dot{p}_1 + x_{1d}, \\ x_2 = -ap_1 + bp_2 - \dot{p}_2 + x_{2d}. \end{cases}$$

(A.7) et (A.8) deviennent alors :

$$\begin{aligned}\ddot{p}_1 &= (a^2 + b^2 + \frac{1}{k})p_1 - 2abp_2 + bx_{1d} - ax_{2d}, \\ \ddot{p}_2 &= (a^2 + b^2 + \frac{1}{k})p_2 - 2abp_1 - ax_{1d} + bx_{2d},\end{aligned}$$

dérivons deux fois la première équation :

$$\begin{aligned}p_1^{(4)} &= (a^2 + b^2 + \frac{1}{k})\ddot{p}_1 - 2ab\ddot{p}_2, \\ &= (a^2 + b^2 + \frac{1}{k})\ddot{p}_1 - 2ab \left[(a^2 + b^2 + \frac{1}{k})p_2 - 2abp_1 - ax_{1d} + bx_{2d} \right], \\ &= (a^2 + b^2 + \frac{1}{k})\ddot{p}_1 + 4a^2b^2p_1 - 2ab(a^2 + b^2 + \frac{1}{k})p_2 + 2a^2bx_{1d} - 2ab^2x_{2d}.\end{aligned}$$

En remplaçant $2abp_2$ par :

$$2abp_2 = (a^2 + b^2 + \frac{1}{k})p_1 - \ddot{p}_1 + bx_{1d} - ax_{2d}, \quad (\text{A.9})$$

on obtient :

$$p_1^{(4)} - 2(a^2 + b^2 + \frac{1}{k})\ddot{p}_1 - \left[4a^2b^2 - (a^2 + b^2 + \frac{1}{k})^2 \right] p_1 = b(a^2 - b^2 - \frac{1}{k})x_{1d} + a(a^2 - b^2 + \frac{1}{k})x_{2d}.$$

En résolvant l'équation caractéristique :

$$c^4 - 2(a^2 + b^2 + \frac{1}{k})c^2 - \left[4a^2b^2 - (a^2 + b^2 + \frac{1}{k})^2 \right] = 0,$$

les solutions sont données par :

$$c_1^2 = (a - b)^2 + \frac{1}{k}, c_2^2 = (a + b)^2 + \frac{1}{k}.$$

L'équation (A.9) possède une solution du type :

$$p_1(t) = \lambda \exp(c_1 t) + \mu \exp(-c_1 t) + \gamma \exp(c_2 t) + \beta \exp(-c_2 t) + \nu,$$

avec

$$\nu = \frac{b(a^2 - b^2 - \frac{1}{k})x_{1d} + a(a^2 - b^2 + \frac{1}{k})x_{2d}}{c_1^2 c_2^2};$$

de (A.1), on déduit $p_2(t)$

$$\begin{aligned}p_2(t) &= \frac{1}{2ab} \left[(a^2 + b^2 + \frac{1}{k}) (\lambda \exp(c_1 t) + \mu \exp(-c_1 t) + \gamma \exp(c_2 t) + \beta \exp(-c_2 t) + \nu) \right. \\ &\quad \left. - \lambda c_1^2 \exp(c_1 t) - \mu c_1^2 \exp(-c_1 t) - \gamma c_2^2 \exp(c_2 t) - \beta c_2^2 \exp(-c_2 t) + bx_{1d} - ax_{2d} \right],\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
p_2(t) &= \left(\frac{a^2 + b^2 + \frac{1}{k} - c_1^2}{2ab} \right) \lambda \exp(c_1 t) + \left(\frac{a^2 + b^2 + \frac{1}{k} - c_1^2}{2ab} \right) \mu \exp(-c_1 t) \\
&+ \left(\frac{a^2 + b^2 + \frac{1}{k} - c_2^2}{2ab} \right) \gamma \exp(c_2 t) + \left(\frac{a^2 + b^2 + \frac{1}{k} - c_2^2}{2ab} \right) \beta \exp(-c_2 t) \\
&+ \frac{a^2 + b^2 + \frac{1}{k}}{2ab} \nu + \frac{1}{2a} x_{1d} - \frac{1}{2b} x_{2d}.
\end{aligned}$$

$p_2(t)$ s'écrit alors :

$$p_2(t) = \lambda \exp(c_1 t) + \mu \exp(-c_1 t) - \gamma \exp(c_2 t) - \beta \exp(-c_2 t) + \acute{\nu},$$

avec

$$\acute{\nu} = \frac{a^2 + b^2 + \frac{1}{k}}{2ab} \nu + \frac{1}{2a} x_{1d} - \frac{1}{2b} x_{2d};$$

compte tenu des équations

$$\begin{cases} x_1 = bp_1 - ap_2 - \dot{p}_1 + x_{1d} \\ x_2 = -ap_1 + bp_2 - \dot{p}_2 + x_{2d} \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= b[\lambda \exp(c_1 t) + \mu \exp(-c_1 t) + \gamma \exp(c_2 t) + \beta \exp(-c_2 t) + \nu] - a[\lambda \exp(c_1 t) \\
&+ \mu \exp(-c_1 t) - \gamma \exp(c_2 t) - \beta \exp(-c_2 t) + \acute{\nu}] - [\lambda c_1 \exp(c_1 t) - \mu c_1 \exp(-c_1 t) \\
&+ \gamma c_2 \exp(c_2 t) - \beta c_2 \exp(-c_2 t)] + x_{1d},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= -a[\lambda \exp(c_1 t) + \mu \exp(-c_1 t) + \gamma \exp(c_2 t) + \beta \exp(-c_2 t) + \nu] + b[\lambda \exp(c_1 t) \\
&+ \mu \exp(-c_1 t) - \gamma \exp(c_2 t) - \beta \exp(-c_2 t) + \acute{\nu}] - [\lambda c_1 \exp(c_1 t) - \mu c_1 \exp(-c_1 t) \\
&- \gamma c_2 \exp(c_2 t) + \beta c_2 \exp(-c_2 t)] + x_{2d},
\end{aligned}$$

par conséquent les équations d'état $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont données par :

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= (b - a - c_1) \lambda \exp(c_1 t) + (b - a + c_1) \mu \exp(-c_1 t) \\
&+ (b + a - c_2) \gamma \exp(c_2 t) + (b + a + c_2) \beta \exp(-c_2 t) \\
&+ b\nu - a\acute{\nu} + x_{1d},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= (b - a - c_1) \lambda \exp(c_1 t) + (b - a + c_1) \mu \exp(-c_1 t) \\
&- (b + a - c_2) \gamma \exp(c_2 t) - (b + a + c_2) \beta \exp(-c_2 t) \\
&- a\nu + b\acute{\nu} + x_{2d}.
\end{aligned}$$

En utilisant les conditions aux deux bouts :

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, p_1(T) = \kappa_1, p_2(T) = \kappa_2,$$

ce qui va nous permettre de déterminer les constantes λ, μ, γ et β en résolvant numériquement le système suivant :

$$\begin{cases} (b - a - c_1)\lambda + (b - a + c_1)\mu + (b + a - c_2)\gamma + (b + a + c_2)\beta + b\nu - a\dot{\nu} + x_{1d} = 0, \\ (b - a - c_1)\lambda + (b - a + c_1)\mu - (b + a - c_2)\gamma - (b + a + c_2)\beta - a\nu + b\dot{\nu} + x_{2d} = 0, \\ \exp(c_1T)\lambda + \exp(-c_1T)\mu + \exp(c_2T)\gamma + \exp(-c_2T)\beta + \nu = \kappa_1, \\ \exp(c_1T)\lambda + \exp(-c_1T)\mu - \exp(c_2T)\gamma - \exp(-c_2T)\beta + \dot{\nu} = \kappa_2, \end{cases}$$

ce système se réduit à :

$$\begin{cases} 2(b - a - c_1)\lambda + 2(b - a + c_1)\mu = -(b - a)(\nu + \dot{\nu}) - x_{1d} - x_{2d}, \\ 2\exp(c_1T)\lambda + 2\exp(-c_1T)\mu = -(\nu + \dot{\nu}) + \kappa_1 + \kappa_2; \end{cases}$$

et sa solution est donnée par :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-(c_1 - a + b)[- \kappa_1 - \kappa_2 + \nu + \dot{\nu}] - [(a - b)(\nu + \dot{\nu}) - x_{1d} - x_{2d}] \exp(-c_1T)}{2[(c_1 + a - b) \exp(-c_1T) + (c_1 - a + b) \exp(c_1T)]}, \\ \mu &= \frac{(-c_1 - a + b)[- \kappa_1 - \kappa_2 + \nu + \dot{\nu}] + [(a - b)(\nu + \dot{\nu}) - x_{1d} - x_{2d}] \exp(c_1T)}{2[(c_1 + a - b) \exp(-c_1T) + (c_1 - a + b) \exp(c_1T)]}, \\ \gamma &= \frac{(c_2 + a + b)[\kappa_1 - \kappa_2 - \nu + \dot{\nu}] + [(a + b)(\nu - \dot{\nu}) + x_{1d} - x_{2d}] \exp(-c_2T)}{2[(c_2 + a + b) \exp(c_2T) + (c_2 - a - b) \exp(-c_2T)]}, \\ \beta &= \frac{(-c_2 + a + b)[- \kappa_1 + \kappa_2 + \nu - \dot{\nu}] - [(a + b)(\nu - \dot{\nu}) + x_{1d} - x_{2d}] \exp(c_2T)}{2[(c_2 + a + b) \exp(c_2T) + (c_2 - a - b) \exp(-c_2T)]}. \end{aligned}$$

Pour trouver les constantes κ_1 et κ_2 on résoud le système suivant :

$$\begin{cases} x_1(T) = 2; \\ x_2(T) = 0; \end{cases}$$

Les constantes κ_1 et κ_2 sont données par

$$\kappa_1 = \frac{-a_1d_3 + a_2d_4}{a_1a_1 - a_2a_2}, \kappa_2 = \frac{-a_1d_4 + a_2d_3}{a_1a_1 - a_2a_2},$$

avec

$$\begin{aligned}
d_1 &= 2[(c_1 + a - b) \exp(-Tc_1) + (c_1 - a + b) \exp(Tc_1)], \\
d_2 &= 2[(c_2 + a + b) \exp(Tc_2) + (c_2 - a - b) \exp(-Tc_2)], \\
d_3 &= \frac{2c_1(a - b)(v_1 + v_2) + 2c_1(-x_{1d} - x_{2d})}{d_1} - \frac{2c_2(a + b)(v_1 - v_2) + 2c_2(x_{1d} - x_{2d})}{d_2} \\
&\quad + bv_1 - av_2 + x_{1d} - 2, \\
d_4 &= \frac{2c_1(a - b)(v_1 + v_2) + 2c_1(-x_{1d} - x_{2d})}{d_1} + \frac{2c_2(a + b)(v_1 - v_2) + 2c_2(x_{1d} - x_{2d})}{d_2} \\
&\quad - av_1 + bv_2 + x_{2d} \\
a_1 &= \frac{-\exp(4c_1) + \exp(-4c_1)}{kd_1} + \frac{-\exp(4c_2) + \exp(-4c_2)}{kd_2} \\
a_2 &= \frac{-\exp(4c_1) + \exp(-4c_1)}{kd_1} + \frac{\exp(4c_2) - \exp(-4c_2)}{kd_2}
\end{aligned}$$

On trouvera au chapitre 3 une représentation graphique des solutions.

Annexe B

Méthode de Tir et méthode de Newton

Nous commençons par rappeler le principe général de la méthode de tir qui consiste à transformer le problème de contrôle optimal en la résolution d'une équation non linéaire, qui peut se résoudre par la méthode de Newton. Nous exposons aussi une étude bibliographique concernant la convergence de la méthode de Newton. Pour une preuve des résultats nous renvoyons à [1], [25] et [33].

La méthode de tir

L'idée de la méthode de tir est de trouver une condition initiale sur l'état adjoint p_0 telle que l'état final vérifie une condition finale donnée et de résoudre le système d'équations non linéaire :

$$x^{p_0}(T) - x_f = 0,$$

où $x^{p_0}(t)$ est la solution du système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, & x(0) = x_0, \quad x(T) = x_f, \quad \forall t \in [0, T], \\ -\frac{dp}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}, & p(0) = p_0; \end{cases}$$

Ce système peut être résolu numériquement par la méthode d'Euler ou Rung-Kutta. On définit la fonction de tir par $G(p_0) = x^{p_0}(T) - x_f$, G est une fonction implicite définie de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n . G est un système algébrique non linéaire de n équations à n inconnues satisfaisant :

$$G(p_0) = 0.$$

Pour résoudre ce système, on utilisera la méthode de Newton. Il suffit de donner un point initial suffisamment proche de la solution comme initialisation de l'algorithme de Newton, pour déterminer les valeurs de p_0 telles que $G(p_0)$ soit nul.

Méthode de Newton discrète

Dans tout ce qui suit, D_0 est un compact, D est un ouvert et $D_h = \{h \in \mathbb{R}^m / h_i \neq 0\}$.

Différentiation approchée

Soit $G : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application. On propose de résoudre le système algébrique suivant :

$$G(x) = 0, \quad (\text{B.1})$$

par la méthode de Newton. Le principe de cette méthode est le suivant : si x^k est proche d'un zéro x de G alors on a

$$0 = G(x) = G(x^k) + G'(x^k)(x - x^k) + o(x - x^k),$$

où $G'(x^k)$ est la matrice jacobienne de G calculée au point x^k . Soit x^0 un point initial donné, on est alors amené à résoudre à chaque pas le système linéaire suivant

$$x^{k+1} = x^k - [G'(x^k)]^{-1}G(x^k), \quad (\text{B.2})$$

et ce, à condition que G' soit une matrice inversible dans un voisinage S_0 de x^k ; à la place de (B.2) on résoud le système suivant :

$$x^{k+1} = x^k - J(x^k, h^k)^{-1}G(x^k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (\text{B.3})$$

où $J : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ est une approximation de $G'(x^k)$ obtenue par des techniques de différentiation numérique.

$$[J(x, h)]_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{h_{ij}} \left[G_i(x + \beta \sum_{k=1}^{j-1} h_{ik}e^k + h_{ij}e^j) - G_i(x + \beta \sum_{k=1}^{j-1} h_{ik}e^k) \right], & \text{si } h_{ij} \neq 0, \\ \partial_j G_i(x + \beta \sum_{k=1}^{j-1} h_{ik}e^k), & \text{si } h_{ij} = 0, \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

où $\beta \in [0, 1]$ et e^1, \dots, e^n sont les vecteurs de la base canonique.

Si $\beta = 1$, alors (B.4) correspond à l'approximation de $\frac{\partial G_i}{\partial x_j}$

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j} = \frac{1}{h_{ij}} \left[G_i(x + \sum_{k=1}^j h_{ik}e^k) - G_i(x + \sum_{k=1}^{j-1} h_{ik}e^k) \right].$$

Si $\beta = 0$, alors (B.4) correspond à

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j} = \frac{1}{h_{ij}} [G_i(x + h_{ij}e^j) - G_i(x)].$$

Si G est G -différentiable au voisinage de x , alors $J(x, h) \rightarrow G'(x)$ quand $h \rightarrow 0$.

Définition B.1. Soit $G : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application G -différentiable sur $D_0 \subset D$ et $J : D_0 \times D_h \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ où $L(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des applications linéaires continues de \mathbb{R}^n . Alors J est une approximation consistante de G' sur $D_0 \subset D_J$, si $0 \in \mathbb{R}^m$ est un point limite de D_h et

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \in D_h} J(x, h) = G'(x), \text{ uniformément pour } x \in D_0. \quad (\text{B.5})$$

Si de plus, il existe c et $r > 0$ tel que

$$\|G'(x) - J(x, h)\| \leq c\|h\|, \forall x \in D_0, h \in D_h \cap S(0, r), \quad (\text{B.6})$$

alors J est une approximation fortement consistante de G' sur D_0

La base des résultats de cette section est le Lemme d'estimation suivant

Lemme B.1. Supposons que $G : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit G -différentiable sur un voisinage ouvert $S_0 \subset D$ contenant $x^* \in D$ pour lequel $G(x^*) = 0$. Si de plus G' est continue au point x^* et $G'(x^*)$ est non singulière. Soit $J : D_0 \times D_h \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ une approximation consistante de G' sur S_0 . Il existe alors $\delta > 0$ et $r > 0$ tel que l'application

$$F(x, h) = x - J(x, h)^{-1}G(x), \quad (\text{B.7})$$

soit bien définie pour tout $x \in S = S(x^*, \delta)$, $h \in D'_h = D_h \cap S(0, r)$ et satisfasse

$$\|x^* - F(x, h)\| \leq w(x, h)\|x - x^*\|, \forall x \in S, h \in D'_h, \quad (\text{B.8})$$

où

$$w(x, h) \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow x^* \text{ et } h \rightarrow 0, h \in D'_h. \quad (\text{B.9})$$

De plus, si J est une approximation fortement consistante de G' sur S_0 et si

$$\|G'(x) - G'(x^*)\| \leq \gamma\|x - x^*\|, \forall x \in S_0, \quad (\text{B.10})$$

alors, $\exists \alpha_1, \alpha_2$ tel que :

$$\|x^* - F(x, h)\| \leq \alpha_1\|x - x^*\|^2 + \alpha_2\|h\| \cdot \|x - x^*\|, \forall x \in S, h \in D'_h. \quad (\text{B.11})$$

L'application du lemme B.1, donne un résultat qui montre que le taux de convergence de la suite (B.3) est super-linéaire lorsque $\lim_{k \rightarrow \infty} h^k = 0$. Introduisons alors, deux facteurs différents qui mesurent la vitesse de convergence asymptotique des processus itératifs. Ces facteurs fournissent un moyen précis pour comparer la vitesse de convergence asymptotique de différents processus itératifs au point x^* , et donc un moyen de déterminer lequel des deux processus est plus rapide. En particulier, la définition de ces deux facteurs est donnée dans le cas où les itérations sont de la forme

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \gamma \|x^k - x^*\|^p, \forall k \geq k_0,$$

Définition B.2. Soit $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ une suite qui converge vers x^* . Alors les quantités suivantes :

$$Q_p\{x^k\} = \begin{cases} 0, & \text{si } x^k = x^*, k < \infty; \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|^p}, & \text{si } x^k \neq x^*, k < \infty; \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

sont définies pour $p \in [1, \infty[$ et elles sont appelées Q -facteurs, et

$$R_p\{x^k\} = \begin{cases} \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^*\|^{\frac{1}{k}}, & \text{si } p = 1; \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^*\|^{\frac{1}{p^k}}, & \text{si } p > 1. \end{cases}$$

sont appelées R -facteurs.

Dans le cas d'un processus itératif, le facteur de vitesse de convergence est le maximum des taux possible de convergence asymptotique de n'importe quelle suite d'un processus itératif avec un point limite.

Définition B.3. Soit ζ un processus itératif avec point limite x^* et $C(\zeta, x^*)$ l'ensemble de toutes les suites générées par ζ qui convergent vers x^* , alors

$$Q_p(\zeta, x^*) = \sup\{Q_p\{x^k\} / \{x^k\} \in C(\zeta, x^*)\}, 1 \leq p < +\infty,$$

sont les Q -facteurs de ζ au point limite x^* , et

$$R_p(\zeta, x^*) = \sup\{R_p\{x^k\} / \{x^k\} \in C(\zeta, x^*)\}, 1 \leq p < \infty,$$

sont les R -facteurs de ζ au point limite x^* .

Lemme B.2. Soit $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ une suite convergente vers x^* , alors

$$R_1\{x^k\} \leq Q_1\{x^k\},$$

pour chaque norme. Par suite, si ζ est un processus itératif avec un point limite x^* , alors

$$R_1(\zeta, x^*) \leq Q_1(\zeta, x^*),$$

pour chaque norme.

L'application du lemme B.1, nous donne le résultat suivant.

Corollaire B.1. *Supposons que $G : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit G -différentiable dans un voisinage ouvert S_0 de $x^* \in D$ tel que $G(x^*) = 0$, et que G' soit continue au point x^* et que, de plus, $G'(x^*)$ soit non singulière. Soit $J : D_J \times D_h \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ une approximation consistante de G' sur S_0 . Alors il existe une boule $S_1 = S(x^*, \delta_1) \subset S_0$ et un nombre réel $r_1 > 0$ tel que pour tout $x^0 \in S_1$ et pour toute suite $\{h^k\} \subset D_h \cap S(0, r_1)$, les itérations $\{x^k\}$ donnée par la relation (B.3) appartiennent toujours à S_1 et convergent vers x^* . De plus, si $\lim_{h \rightarrow \infty} h^k = 0$, alors $R_1\{x^k\} = Q_1\{x^k\} = 0$.*

Afin d'appliquer le Lemme B.1 ou le Corollaire B.1 à des itérations concrètes, il est nécessaire de s'assurer que J est une approximation consistante. Une possibilité qui découle de l'itération de Newton modifiée de la forme :

$$x^{k+1} = x^k - w_k [G'(x^k) + \lambda_k I]^{-1} G(x^k), k = 0, 1, \dots,$$

Corollaire B.2. *Soit G et x^* satisfaisant les conditions du corollaire B.1. Alors il existe une constante $1 > c_1 > 0, c_2 > 0$ et une boule $S_1 = S(x^*, \delta_1) \subset S_0$ telle que, pour tout $x^0 \in S_1$, les suites $\{w_k\}, \{\lambda_k\}$ satisfassent :*

$$1 - c_1 \leq w_k \leq 1 + c_1, -c_2 \leq \lambda_k \leq c_2, k = 0, 1, \dots,$$

les itérations

$$x^{k+1} = x^k - w_k [G'(x^k) + \lambda_k I]^{-1} G(x^k), k = 0, 1, \dots,$$

sont contenues dans S_1 et convergent vers x^* ; de plus, si $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = 1$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$, alors $R_1\{x^k\} = Q_1\{x^k\} = 0$.

Si G est G -différentiable dans un voisinage d'un point x , alors, $J(x, h) \rightarrow G'(x)$ quand $h \rightarrow 0$. Le prochain Lemme montre que, dans des conditions normales, la limite peut être obtenue de manière uniforme de sorte que J soit une approximation consistante de G'

Lemme B.3. *Supposons que $G : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit continûment différentiable sur un ensemble ouvert D . Alors, pour tout ensemble compact $D_0 \subset D$, il existe un $r > 0$ tel que l'application $J : D_0 \times D_h \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$, donnée par (B.4) est bien définie pour*

tout $\beta \in [0, 1]$, est une approximation consistante de G' sur D_0 , avec $D_h = \{h \in \mathbb{R}^{n^2} / |h_{ij}| \leq r, i, j = [1, n]\}$. Si de plus

$$\|G'(x) - G'(y)\| \leq \gamma \|x - y\|, \forall x, y \in D,$$

alors J est une approximation fortement consistante de G' sur D_0 .

Pour assurer que J soit bien définie, il faut que h soit petit. Si G est bien définie sur tout \mathbb{R}^n , on prend $D_h = \mathbb{R}^{n^2}$. D'après le corollaire B.1 et le Lemme B.3, on obtient un résultat de convergence résumé dans le paragraphe suivant :

Convergence de la méthode Newton discrète

Supposons que $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit continûment différentiable, et qu'il existe une solution x^* de $G(x) = 0$ tel que $G'(x^*)$ soit non singulière. Définissons $J : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ par (B.4). Alors il existe $r_1 > 0$ et $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x^0 \in S(x^*, \delta_1)$ et toute suite $\{h^k\} \subset S(0, r_1) \subset \mathbb{R}^{n^2}$, les itérations $\{x^k\}$ donné par (B.2) sont bien définies et convergent vers x^* . En plus, si $\lim_{k \rightarrow \infty} h^k = 0$, alors $R_1\{x^k\} = Q_1\{x^k\} = 0$. Afin d'obtenir une convergence rapide, il est généralement nécessaire d'introduire les trois conditions supplémentaires suivantes :

- G est une fonction infiniment différentiable.
- J est une approximation fortement consistante.
- Le taux de décroissance de h^k est suffisamment rapide.

Si G' satisfait la condition de Lipschitz (B.9) et J est une approximation fortement consistante, alors d'après (B.10) on a :

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \alpha_1 \|x^k - x^*\|^2 + \alpha_2 \|h^k\| \|x^k - x^*\|.$$

Si $\alpha_2 = 0$, on a une convergence quadratique de la suite $\{x^k\}$, mais, si $\alpha_2 \neq 0$, alors le comportement de h^k quand $k \rightarrow \infty$, joue un rôle important dans le taux de convergence. On donne quelques définitions essentielles, qu'on aura besoin dans la suite.

Définition B.4. Soit $Q_p(\zeta, x^*)$ un Q -facteurs du processus itératif ζ avec un point limite x^* dans \mathbb{R}^n , alors la quantité

$$O_Q(\zeta, x^*) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } Q_p(\zeta, x^*) = 0, \forall p \in [1, +\infty[; \\ \inf\{p \in [1, +\infty[/ Q_p(\zeta, x^*) = +\infty\}, & \text{sinon,} \end{cases}$$

est appelée ordre de Q du processus ζ au point x^* .

Définition B.5. Soit $R_p(\zeta, x^*)$ un R -facteurs du processus itératif ζ avec un point limite x^* dans \mathbb{R}^n , alors la quantité

$$O_R(\zeta, x^*) = \begin{cases} \infty, & \text{si } R_p(\zeta, x^*) = 0, \forall p \in [1, +\infty[; \\ \inf\{p \in [1, +\infty[/ R_p(\zeta, x^*) = 1\}, & \text{sinon,} \end{cases}$$

est appelée ordre de R du processus ζ au point x^* .

Lemme B.4. Soit ζ un processus itératif avec un point limite x^* . Alors

$$O_Q(\zeta, x^*) \leq O_R(\zeta, x^*).$$

Lemme B.5. Soit ζ un processus itératif de point limite x^* , supposons qu'il existe $p \in [1, +\infty[$ et une consatante c_1 tels que pour toute suite $\{x^k\}$ on a

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq c_1 \|x^k - x^*\|^p, \forall k \geq k_0,$$

alors

$$O_R\{x^k\} \geq O_Q\{x^k\} \geq p.$$

La proposition suivante donne deux conditions sur h^k qui assurent la convergence rapide.

Proposition B.1. Supposons que $G : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit G -différentiable dans un voisinage ouvert $S_0 \subset D$ de $x^* \in D$, où $G(x^*) = 0$, tel que la condition de Lipschitz (B.9) est vérifiée et $G'(x^*)$ est non singulière. Soit $J : D_J \times D_h \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ une approximation fortement consistante de G' sur S_0 . Supposons que pour un certain $\{h^k\} \subset D_h$ les itérations $\{x^k\}$ données par (B.2) sont bien définies et convergent vers x^* . Si de plus, la condition

$$\|h^k\| \leq \beta_1 \|G(x^k)\|, \forall k \geq k_0, \tag{B.12}$$

est vérifiée, alors, $O_R\{x^k\} \geq O_Q\{x^k\} \geq 2$, sinon, si

$$\|h^k\| \leq \beta_2 \|x^k - x^{k-1}\|, \forall k \geq k_0, \tag{B.13}$$

est vérifiée, alors, $O_R\{x^k\} \geq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Conclusion générale

Dans le cadre de cette thèse, nous avons proposé une nouvelle approche pour résoudre un problème de contrôle optimal quadratique avec un temps terminal fixé, un état final fixé et une contrainte sur le contrôle. Nous avons donc proposé de résoudre ce problème par la méthode de relaxation couplée avec la méthode de tir. La méthode proposée est originale, elle combine la méthode de relaxation avec la méthode de tir.

Nous avons dans un premier temps analysé, sous certaines conditions, la convergence de la méthode proposée et nous avons testé cette méthode sur deux problèmes simples, le premier est celui d'un système de deux équations d'état, le deuxième problème est celui d'un système en anneau de dimension 5 et 50. Il s'avère que la convergence est rapide et que les temps de calculs sont petits.

Ensuite nous avons appliqué cette méthode à la régulation de deux processus thermiques de grandes dimensions, constitués de deux fours à trois et à douze zones de chauffage.

Enfin nous avons généralisé les résultats obtenus en ajoutant une contrainte sur l'état. Les hypothèses de convergences de la méthode proposée sont toujours valables. En prenant en compte des contraintes sur l'état et sur le contrôle, nous avons appliqué la méthode de relaxation couplée avec la méthode de tir sur deux exemples de grandes dimensions, le premier exemple est celui d'un système en anneau, le deuxième est celui de four à trois et à douze zones de chauffage.

Bibliographie

- [1] V. Barbu, Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces, Noordhoff International Publishing, 1976.
- [2] R.Bellman, Dynamic Programming, Princeton University Press, 1957.
- [3] P.Bernhard, Commande Optimale, Décentralisation des Jeux Dynamiques, Dunod, Automatic 1976.
- [4] H.Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson, Paris, 1983.
- [5] N.Cheik-Obeid, AW.EL Awtani, B.Lang, P.Spiteri, Decentralized calculations in optimal control of a large thermic process : method and results, Proceedings of the international conference of large scale systems. Pergamon Press, pp. 505-516, 1981.
- [6] M.Crouzeix and A.L.Mignot, Analyse numérique des équations différentielles, 2ème Edition Masson, 1989.
- [7] AW.EL Awtani, Réalisation, identification et commande d'un processus thermique a entrées et sorties multiples. Thèse de doctorat en physique, université de Franche-Comté, 1978.
- [8] R.Gabasov, F.M.Kirillova, Problèmes de contrôle optimal, Edition : science et technique, Institut de mathématiques, Académie des sciences de Bélarus, Minsk 1981.
- [9] R.V.Gamkrelidze, Discovery of the maximum principle, Journal of Dynamical and control systems, vol.5, no.4, 437-451, 1999.
- [10] D.Gien, B.Lang, J.C.Miellou, L.Raffort, P.Spiteri, Commande optimale de systèmes complexes, RAIRO Automatique, Systems Analysis and Control, vol. 18-2, 1984, pp.209-224.
- [11] F.Kara, P.Spiteri, F.Messine, M.Aidene, Résolution d'un problème de contrôle optimal avec contrainte sur l'état final et la commande par la méthode de relaxation, ICEECA'2012 du 20 au 22 Novembre à Khenchela.
- [12] R.E.Kalman, Contribution to the theory of optimal control. Bol. Soc. Mat. Mexicana, 5, 102-119,1969

-
- [13] R.E.Kalman, The theory of optimal control and the calculus of variations. Mathematical Optimization Technique, Uni.of California, Press, Los Angeles,1963
- [14] R.E.Kalman, Mathematical description of linear dynamical systems, SIAM Journal on control, 1 :152-192, 1963.
- [15] R.E.Kalman, Canonical structure of linear dynamical systems, In proceedings of the National Academy of sciences, pages 596-600, 1961.
- [16] P.J.Laurent, Approximation et optimisation, Collection Enseignement des sciences, 1972.
- [17] B.Lang, J.C.Miellou and P.Spiteri, Asynchronous relaxation algorithms for optimal control problems, Mathematical and Computers in Simulation, vol. 28, 1986, 227-242.
- [18] B.Lang, P.Spiteri, Decomposition and coordination using asynchronous iterations, Encyclopedia of systems and control, M. Singh ed., Pergamon Press, pp. 3475 - 3481, 1987.
- [19] G.Lastman, A shooting method for solving two-point boundary-value problems arising from non-singular bang–bang optimal control problems, Int. J. Cont. 27(4) (1976) 513–524.
- [20] F.Lhote, J.C.Miellou, B.Lang, P.Spiteri, Relaxation methods of parallel in line calculations of the optimum control of large systems, Optimizations techniques, part I, pp. 324-330, Springer-Verlag, 1980.
- [21] E.B.Lee et L.Markus, Foundations of Optimal Control Theory, John Wiley and Sons, New-York (1967).
- [22] J.Macki, A.Stauss, Introduction to optimal control theory, Springer verlag (second printing), 1995.
- [23] J.C.Miellou, P.Spiteri, A parallel asynchronous relaxation algorithm for optimal control problems, Proceeding of the International Conference on Mathematical Analysis and its Applications, Kuwait, 1985.
- [24] J.M.Ortega and W.C.Rheinboldt, Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Academic Press, New York, 1970.
- [25] J.Rappaz et M.Pacasso, Introduction à l'analyse numérique, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1998.
- [26] L.Pontryagin, V.Boltiansky, R.Gambrelidze et E.Mitchenko, Théorie mathématique des processus optimaux, Edition Mir- Moscou, 1974.
- [27] L.Pontryagin, V.Boltiansky et E.Mitchenko, Théorie mathématique des processus optimaux, Edition de la littérature mathématique physique, Moscou 1961.

-
- [28] L.Pontryagin, Mathematical theory of optimal processus, Interscience, New york, 1962.
- [29] M.Schatzman, Analyse numérique cours et exercices pour la licence, Interditions, Paris, 1991.
- [30] J.Stoer, Quadratic termination and quadratic convergence of minimisation algorithms. Topics in numerical analysis t.III, Proceeding of the royal risch conference, 1975.
- [31] J.Stoer, R.Bulirsh, Introduction to numerical analysis, Springer-Verlag, 2002.
- [32] S.Titouche, P.Spiteri, F.Messinec, M.Aidene, Optimal control of a large thermic process, Journal of Process Control, vol 25, 50-58, 2015.
- [33] E.Trelat, Contrôle optimal : théorie et applications, Vuibert, collection Mathématiques Concrètes, 2005.
- [34] E.Trelat, Contrôle optimal : Notes de cours Master de Mathématiques, Université d'Orléans, 2007/2008.

RÉSUMÉ

Dans cette thèse on présente et on analyse une méthode de résolution numérique de problèmes de contrôle optimal quadratique de grande dimension avec un temps terminal, une valeur de l'état final fixés et une contrainte sur le contrôle. Nous proposons donc de résoudre ce problème par la méthode de relaxation couplée avec la méthode de tir. Nous avons appliqué cette méthode à la régulation de deux processus thermiques constitués de deux fours à trois et à douze zones de chauffage ainsi qu' à un système en anneau. Ensuite nous avons effectué une extension des résultats obtenus en ajoutant une contrainte sur l'état ; nous avons donc reconsidéré l'étude d'un système en anneau de grande dimension ainsi que la régulation optimale de processus thermiques de grande dimension.

Mots clés : méthode de relaxation, méthode de tir, contrôle optimal, sous-différentiel.

ABSTRACT

In this thesis, we study the numerical solution of an optimal quadratic control problem of large size when the final state is fixed and the control is subject to some constraints. For this, we propose an approach based on the relaxation method and shooting method's. This approach, is applied to the regulation of two thermal processes which consisting of two ovens with three and twelve heating zones and a ring system. An extension of the results is obtained by considering constraints on the state. So, we have considered the study of a large ring system and an optimal regulation of large thermal processes.

Key words : Optimal control, relaxation method, shooting method, sub-differential.