

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE MOULOU MAMMERI, TIZI-OUZOU  
FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE  
DEPARTEMENT AUTOMATIQUE

**Thèse de doctorat**

en **Automatique**

présentée par

**Ahmed MAIDI**

Ingénieur INHC

Magister UMBB

**Commande des systèmes décrits par des équations  
aux dérivées partielles hyperboliques**

Thèse soutenue le ..... 2008 devant le jury composé de MM :

<b>BENAMROUCHE Nacereddine</b>	Professeur à l'UMMTO	<b>Président</b>
<b>DIAF Moussa</b>	Professeur à l'UMMTO	<b>Rapporteur</b>
<b>CORRIOU Jean-Pierre</b>	Professeur à l'ENSIC (Nancy, France)	<b>Co-Rapporteur</b>
<b>DJENNOUNE Saïd</b>	Professeur à l'UMMTO	<b>Examineur</b>
<b>BELMEHDI Ali</b>	Professeur à l'université de Béjaïa	<b>Examineur</b>
<b>YAHMEDI Saïd</b>	Professeur à l'université d'Annaba	<b>Examineur</b>
<b>TADJINE Mohamed</b>	Professeur à l'ENP d'Alger	<b>Examineur</b>

# Remerciements

Je remercie tout d'abord le Professeur **Moussa DIAF**, directeur de cette thèse, pour la confiance et le soutien sans faille qu'il m'a accordés. Il m'a conseillé avec franchise et efficacité dans mes choix scientifiques tout en m'en laissant la liberté, et j'ai beaucoup appris à son contact sur la façon de mener un travail de recherche. Il s'est toujours rendu disponible, avec sa rigueur scientifique, pour moi y compris dans les moments difficiles.

Je remercie aussi le Professeur **Jean-Pierre CORRIOU**, codirecteur de thèse, de m'avoir accueilli dans le Laboratoire des Sciences de Génie Chimique pour des périodes de recherche fructueuses sur tous les plans, pour son soutien, sa disponibilité et l'aide qu'il m'a apportée tout au long de ma thèse. Il a plusieurs fois trouvé la clef scientifique qui m'a permis de résoudre le problème auquel j'étais confronté. Sans son application, cette thèse ne serait pas ce qu'elle est.

Je remercie vivement le Professeur **Naceredine BENAMROUCHE** pour sa présidence du jury de thèse, et également les autres membres du jury, les professeurs **Said DJEN-NOUNE**, **Ali BELMEHDI**, **Said YAHMEDI** et **Mohamed TADJINE**, pour s'être penchés sur cette thèse et l'avoir enrichi par leurs questions, leurs remarques et commentaires lors de la soutenance publique.

Je tiens également à remercier les chercheurs du LSGC et de l'École Nationale Supérieure des Industries Chimiques de Nancy pour l'ambiance de collaboration ayant rendu mes séjours scientifiques instructifs et agréables.

Je remercie également mes collègues enseignants de la Faculté de Génie Électrique et d'Informatique pour leurs encouragements en particulier **Kamal HAMMOUCHE**, **Redouane KARA** et **Hamid HAMMICHE**.

Enfin et surtout, mon plus grand merci va à toute ma famille en particulier ma femme qui a su faire preuve de tant de patience et de compréhension face à l'accaparement lié à la finalisation de la thèse.

## **Dédicaces**

*Je dédie ce travail à la mémoire de*

*mon père*

*et de*

*ma grand-mère*

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>12</b>
<b>1 Sur la Commande des Systèmes à Paramètres distribués (SPD)</b>	<b>20</b>
1.1 Introduction . . . . .	20
1.2 Systèmes à paramètres distribués . . . . .	20
1.3 Description mathématique d'un système à paramètres distribués . . . . .	21
1.4 Classification des systèmes à paramètres distribués . . . . .	24
1.5 Commande des systèmes à paramètres distribués . . . . .	26
1.5.1 Stratégie de pré-approximation . . . . .	27
1.5.2 Stratégie de post-approximation . . . . .	34
1.6 Système diffusion-convection-réaction . . . . .	36
1.7 Simulation de système convection-réaction . . . . .	37
1.8 Conclusion . . . . .	38
<b>2 Optimisation contrainte d'une Commande PI Floue d'un Échangeur de Chaleur</b>	<b>40</b>
2.1 Introduction . . . . .	40
2.2 Modèle dynamique de l'échangeur de chaleur . . . . .	41
2.2.1 Description de l'échangeur de chaleur . . . . .	41
2.2.2 Modèle de l'échangeur de chaleur . . . . .	42
2.3 Structure générale d'un correcteur flou . . . . .	43
2.4 Commande PI floue de l'échangeur de chaleur . . . . .	46
2.4.1 Optimisation des paramètres d'adaptation d'un correcteur PID Flou	48
2.4.2 Application à la commande de l'échangeur de chaleur . . . . .	49
2.4.3 Commande PI Floue de l'échangeur de chaleur . . . . .	50
2.4.4 Évaluation des performances des correcteurs . . . . .	53
2.5 Conclusion . . . . .	56
<b>3 Commande Géométrique à la Frontière d'un Échangeur de Chaleur à contre-courant</b>	<b>59</b>

3.1	Introduction . . . . .	59
3.2	Modèle de l'échangeur de chaleur à contre-courant . . . . .	60
3.3	Formulation du problème de commande . . . . .	62
3.4	Obtention de la loi de commande . . . . .	64
3.4.1	Manipulation de la température du fluide externe à la frontière . . .	64
3.4.2	Manipulation de la vitesse du fluide externe . . . . .	66
3.5	Évaluation des performances des correcteurs . . . . .	69
3.5.1	Manipulation de la température du fluide externe . . . . .	69
3.5.2	Manipulation de la vitesse du fluide externe . . . . .	87
3.6	Conclusion . . . . .	90
<b>4</b>	<b>Commande géométrique d'un système hyperbolique de second ordre en temps</b>	<b>93</b>
4.1	Introduction . . . . .	93
4.2	Commande Géométrique de l'équation d'ondes . . . . .	94
4.3	Formulation du problème de commande . . . . .	94
4.4	Obtention de la loi de commande . . . . .	96
4.4.1	Commandabilité d'un système modélisé par une équation d'ondes .	96
4.4.2	Réduction de l'équation d'ondes . . . . .	97
4.4.3	Degré relatif . . . . .	99
4.4.4	Expression générale de la loi de commande . . . . .	99
4.5	Application à une corde vibrante . . . . .	100
4.5.1	Description et modèle de la corde . . . . .	101
4.5.2	Loi de commande pour la corde . . . . .	102
4.5.3	Évaluation des performances du correcteur . . . . .	104
4.6	Conclusion . . . . .	111
	<b>Conclusion générale</b>	<b>112</b>

# Liste des tableaux

2.1	Relations de passage entre les paramètres d'adaptation du correcteur Flou et les réglages du correcteur PID classique. . . . .	48
2.2	Paramètres de l'échangeur de chaleur et conditions de simulation. . . . .	50
2.3	Règles floues. . . . .	51
3.1	Paramètres de l'échangeur de chaleur à contre-courant et conditions de simulation. . . . .	70
3.2	Paramètres de la loi de commande. . . . .	70
4.1	Paramètres de la corde. . . . .	105
4.2	Paramètres de réglage de correcteur pour $\kappa = 0.8$ . . . . .	105

# Table des figures

1	Classification des méthodes d'approximation des systèmes à paramètres distribués (SPD). . . . .	15
1.1	Différents types de commandes et d'observations d'un SPD. . . . .	25
1.2	Commande des systèmes à paramètres distribués (SPD). . . . .	27
1.3	Principe de la stratégie de post-approximation. . . . .	32
2.1	Echangeur de chaleur à température d'enveloppe homogène. . . . .	42
2.2	Structure d'un correcteur flou. . . . .	44
2.3	Commande PI Flou de l'échangeur de chaleur. . . . .	50
2.4	Fonctions d'appartenance. . . . .	51
2.5	Poursuite de consigne. . . . .	54
2.6	Rejet de la perturbation. . . . .	55
2.7	Variation paramétrique. . . . .	56
2.8	Influence du nombre de points de discrétisation. . . . .	57
3.1	Echangeur de chaleur à contre-courant (température d'enveloppe non homogène). . . . .	61
3.2	Stratégie de commande géométrique de l'échangeur de chaleur. . . . .	66
3.3	Evolution de la température $T(L, t)$ en fonction de la vitesse du fluide externe $v_e(t)$ . . . . .	68
3.4	Profils des températures du fluide interne et externe en régime stationnaire. . . . .	71
3.5	Poursuite de consigne. Gauche : sortie commandée et consigne. Droite : Entrée manipulée. . . . .	72
3.6	Profils des températures dans le cas de la poursuite de consigne. Gauche : à $t = 4$ s. Droite : à $t = 10$ s. . . . .	72
3.7	Rejet de la perturbation. Gauche : Sortie commandée. Droite : Entrée manipulée. . . . .	73

3.8	Variation de la température en différentes positions, le long de l'échangeur, dans le cas de rejet de perturbation (la perturbation est la température du fluide interne au point $z = 0$ qui subit un échelon à $t = 5$ s). Un échelon de consigne a eu lieu à $t = 1$ s. . . . .	74
3.9	Profils spatiaux des températures à l'instant $t = 10$ s dans le cas de rejet de perturbation. . . . .	74
3.10	Echangeur de chaleur à contre-courant avec la paroi. . . . .	75
3.11	Changement de paramètres du fluide externe. Gauche : Sortie commandée. Droite : Entrée manipulée. . . . .	76
3.12	Changement de paramètres du fluide interne. Gauche : Sortie commandée. Droite : Entrée manipulée. . . . .	76
3.13	Changement de paramètres des deux fluides. Gauche : Sortie commandée. Droite : Entrée manipulée. . . . .	77
3.14	Poursuite de la consigne en présence de la paroi. Gauche : Sortie commandée. Droite : Entrée manipulée. . . . .	78
3.15	Influence de la position du capteur mesurant la température au point $z = L - \Delta L = L - l \Delta z$ . . . . .	79
3.16	Influence de l'erreur de positionnement du capteur mesurant la température au point $z = L - \Delta L$ . Gauche : Sortie commandée. Droite : Variable manipulée. . . . .	80
3.17	Filtrage des mesures : Température au point $z = L - \Delta L$ ( $\Delta L = 5 \Delta z$ ). . .	81
3.18	Filtrage des mesures : Température au point $z = L$ . . . . .	81
3.19	Filtrage des mesures : Variation de la variable manipulée. . . . .	82
3.20	Estimation de la température au point $z = L - \Delta L$ ( $\Delta L = 5 \Delta z$ ) par le filtre de Kalman. . . . .	86
3.21	Estimation de la température au point $z = L$ par le filtre de Kalman. . . .	86
3.22	Variable manipulée dans le cas de l'estimation des mesures par le filtre de Kalman. . . . .	87
3.23	Estimation de la température au point $z = L - \Delta L$ ( $\Delta L = 5 \Delta z$ ), par le filtre de Kalman, pour le changement paramétrique : $a$ (-25%), $v$ (-25%), $a_e$ (+25%), $v_e$ (+25%). . . . .	88
3.24	Estimation de la température au point $z = L$ , par le filtre de Kalman, pour le changement paramétrique : $a$ (-25%), $v$ (-25%), $a_e$ (+25%), $v_e$ (+25%). . . . .	88
3.25	Variable manipulée dans le cas de l'estimation des mesures, par le filtre de Kalman, pour le changement paramétrique : $a$ (-25%), $v$ (-25%), $a_e$ (+25%), $v_e$ (+25%). . . . .	89

3.26	Poursuite de consigne et rejet de la perturbation dans le cas de la manipulation de la vitesse du fluide externe. Gauche : Sortie commandée. Droite : Variable manipulée. . . . .	90
4.1	Déplacement d'une corde vibrante. . . . .	101
4.2	Stratégie de commande du déplacement de la corde. . . . .	104
4.3	Commande stationnaire en fonction de la consigne désirée pour une incertitude de $-20\%$ sur le paramètre $\Gamma$ . . . . .	106
4.4	Évolution de la sortie commandée. . . . .	107
4.5	Évolution de la variable manipulée. . . . .	107
4.6	Profils du déplacement. . . . .	108
4.7	Évolution spatio-temporelle du déplacement de la corde. . . . .	108
4.8	Comparaison entre la sortie réelle et la sortie stationnaire avec consigne. . . . .	109
4.9	Comparaison entre la commande réelle et la commande stationnaire. . . . .	109
4.10	Évolution de la sortie commandée sans incertitudes. . . . .	110
4.11	Évolution de la variable manipulée sans incertitudes. . . . .	110

## Nomenclature

$a, a_e, a_{Int}, a_{Ext}$	Coefficients de transfert de chaleur $[s^{-1}]$
$\tilde{a}, \tilde{b}$	Coefficients dynamiques
$A$	Matrice diagonale (les valeurs propres de l'opérateur différentiel spatial constituent la diagonale-bloc)
$\tilde{A}$	Matrice d'état du modèle approximé
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$	Matrices d'opérateurs différentiels spatiales
$b$	Fonction caractérisant la géométrie du système d'actionneurs
$\tilde{B}$	Matrice de commande du modèle approximé
$c$	Fonction caractérisant la géométrie du système de capteurs
$C$	Matrice des coefficients de convection
$\mathbf{C}$	Matrice de sortie
$C_p, C_{pe}$	Capacités calorifiques $[J \cdot kg^{-1} \cdot K]$
$C_{pp}$	Capacité calorifique du matériau de la paroi $[J \cdot kg^{-1} \cdot K]$
$\tilde{C}$	Matrice de sortie du modèle approximé
$D$	Matrice des coefficients de diffusion
$D_0, D_L$	Matrices constantes
$\mathcal{F}, \mathcal{F}_\Delta$	Fonctions vectorielles non linéaires
$e$	Écart consigne-mesure
$e_{Int}$	Épaisseur du tube interne de l'échangeur de chaleur
$e_{Ext}$	Épaisseur de l'enveloppe de l'échangeur de chaleur
$\dot{e}$	Vitesse de variation de l'écart consigne-mesure
$\tilde{E}$	Matrice de perturbation du modèle approximé
$f$	Fonction vectorielle lisse
$f_{md}$	Force agissant sur la corde
$f_{Flou}$	Caractéristique du correcteur flou
$\mathbf{f}$	Fonction vectorielle des relations de passage
$\tilde{F}, F$	Fonctions vectorielles non linéaires
$F_m$	Force distribuée agissant sur la corde
$\mathbf{g}$	Accélération de la pesanteur
$g, h$	Fonctions vectorielles lisses
$G$	Fonction temporelle (inverse d'une fonction de transfert)
$G_e, G_{ie}, G_{de}, G_u$	Paramètres d'adaptation du correcteur flou
$h_t, h_e$	Coefficients de chaleur globaux $[W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}]$
$\mathcal{H}$	Espace de Hilbert séparable
$\mathcal{J}, \hat{\mathcal{J}}$	Critère à minimiser (fonction objectif)
$I$	Matrice identité
$K$	Matrice des gains du filtre de Kalman

$K_c$	Gain proportionnel du correcteur PID classique
$L$	Longueur [m]
$L_f$	Longueur du filtre à moyenne mobile
$\mathcal{L}$	Opérateur différentiel spatial
$m$	Nombre de sorties
$\mathcal{M}$	Opérateur différentiel spatial
$n$	Dimension du vecteur d'état
$N$	Nombre de points de discrétisation
$N_f$	Nombre de points de discrétisation utilisé pour le modèle du filtre de Kalman
$l_0, l_L$	Fonctions vectorielles
$\mathcal{O}$	Matrice d'observabilité
$p$	Nombre de zones
$P$	Matrice de covariance de l'erreur
$P_{k/k-1}$	Estimation de la matrice de covariance (prédiction)
$P_{k/k}$	Estimation corrigée de la matrice de covariance
$P_{0/0}$	Condition initiale pour la matrice de covariance de l'erreur
$Q, R$	Matrices de covariances des bruits (paramètres de réglage du filtre de Kalman)
$\mathbf{q}$	Opérateur différentiel
$\mathcal{Q}$	Opérateur différentiel
$r$	Nombre de commandes
$R_0, R_L$	Matrices constantes
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$s$	Opérateur de Laplace
$\mathbf{s}$	Opérateur différentiel
$S_t$	Section du tube interne de l'échangeur de chaleur [m <sup>2</sup> ]
$S$	Section utilisée pour le transfert de chaleur par unité de longueur [m]
$\mathcal{S}$	Opérateur différentiel
$t$	Temps [s]
$T$	Température du fluide à chauffer (à l'intérieur du tube) [°C]
$T^*, T_e^*$	Profils de températures initiaux (en régime stationnaire) [°C]
$T_0$	Température du fluide interne à l'entrée de l'échangeur [°C]
$T_e$	Température du fluide externe (à l'intérieur l'enveloppe) [°C]
$T_{e0}$	Température du fluide externe à l'entrée de l'échangeur [°C]
$T_f$	Température filtrée [°C]
$\dot{T}_e$	Vitesse de variation de la température du fluide externe [°C . s <sup>-1</sup> ]
$T_L$	Température du fluide interne à la sortie de l'échangeur [°C]

$T_m$	Température moyenne du fluide interne [°C]
$T_p$	Température de la paroi [°C]
$\mathbb{T}$	Domaine temporel
$u$	Vecteur de commande
$\tilde{u}$	Vecteur de commande issu de la pré-approximation
$x$	Vecteur d'état
$x_0$	État initial
$\tilde{x}$	Vecteur d'état issu de la pré-approximation
$X$	Vecteur d'état du modèle approximé
$\hat{X}_{k/k-1}$	Estimation du vecteur d'état du modèle approximé (prédiction)
$\hat{X}_{k/k}$	Estimation corrigée du vecteur d'état du modèle approximé (correction)
$X_r$	Vecteur d'état du modèle réduit
$y$	Vecteur de sortie
$Y$	Transformée de Laplace de $y(t)$
$z$	Position [m]
$\tilde{z}$	Position normalisée entre 0 et 1 [m]

### Indices

$d$	Distribué(e)
$\mathcal{D}$	Dirichlet
$\mathcal{F}$	Fourier
$i, j, k, l$	Indices (nombres entiers)
$\mathcal{D}$	Neumann

### Exposants

$d$	Désiré(e)
P	Poursuite
S	État Stationnaire
$T$	Transposée

### Symboles et lettres grecques

$\alpha, \beta, \gamma$	Coefficients constants
$\lambda$	Vecteur des valeurs propres de la matrice d'opérateurs différentiels spatiaux
$\delta$	Distribution de Dirac
$\epsilon$	Incrément de position (très faible) [m]
$\phi$	Fonctions test (ou encore modales ou propres)

$\Phi$	Matrice de coefficients constants
$\varphi$	Fonction non linéaire de l'écart et du temps
$\eta, \zeta$	Bruits blancs Gaussiens
$\kappa$	Paramètre de réglage
$\Gamma$	Tension dans la corde $[\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$
$\lambda_f$	Facteur d'oubli du filtre à moyenne mobile (proche de 1)
$\mu$	Coefficient positif
$\nu$	Entrée externe
$\theta$	Valuer constante
$\rho, \rho_e$	Densités des fluides $[\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$
$\rho_m$	Densité massique de la corde $[\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}]$
$\rho_p$	Densité du matériau de la paroi $[\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$
$\sigma$	Degré relatif
$\tau, \tau_1$	Constantes de temps [s]
$\tau_2$	Constante de temps $[\text{s}^2]$
$\tau_I$	Constante intégrale du correcteur PID [s]
$\tau_d$	Constante de temps dérivée du correcteur PID [s]
$v, v_e$	Vitesses des fluides
$\omega_0$	Paramètre de réglage
$\xi$	Variable d'intégration (temps)
$\psi$	Fonction non linéaire des paramètres d'adaptation du correcteur flou
$\Psi$	Matrice de transition
$\Delta L$	Multiple du pas de discrétisation [m]
$\Delta L'$	Multiple du pas de discrétisation avec une erreur de position [m]
$\Delta t$	Période d'échantillonnage [s]
$\Delta z$	Pas de discrétisation pour la variable espace [m]
$\Omega$	Domaine spatial
$\partial\Omega$	Frontière du domaine spatial

### Abréviations

EDO	Équation aux dérivées ordinaires
EDP	Équation aux dérivées partielles
ICE	Intégrale du Carré de l'Erreur
ITAE	Intégrale de la valeur absolue de l'erreur pondérée par le temps
PI	Correcteur proportionnel-intégral
PID	Correcteur proportionnel-intégral-dérivé
SPD	Système à paramètres distribués
SPL	Système à paramètres localisés



# Introduction générale

Au cours des dernières décennies, l'automatique des systèmes a évolué vers l'étude et la maîtrise de systèmes de plus en plus complexes parmi lesquels on retrouve les systèmes à paramètres distribués (SPD) dont le comportement dynamique est régi par des équations aux dérivées partielles (EDP). Cet intérêt de la part de la communauté scientifique s'explique par la conjonction des éléments suivants :

- la nature distribuée de nombreux systèmes industriels a dû être prise en considération pour les placer dans les meilleures conditions opératoires qui améliorent leur efficacité, accroître la productivité, et de ce fait répondre à la demande technique.
- les progrès informatiques ont permis le développement des programmes facilitant l'usage et l'exploitation des EDP, ce qui permet une analyse plus fine par l'utilisateur, et l'implantation d'algorithmes plus compliqués.
- le développement de la théorie des systèmes de dimension infinie, et l'avancée remarquable des sciences appliquées provoqués par les efforts de regroupement des compétences scientifiques, particulièrement des mathématiciens, ayant porté intérêt à l'analyse et la commande des systèmes dynamiques.

En effet, dans de nombreuses applications industrielles (réacteur chimique, bio-réacteur, bio-filtre, décanteurs, propagation d'ondes, diffusion de la chaleur, mécanique des fluides, robotique ...), les variables caractéristiques du système dépendent fréquemment de coordonnées spatiales d'où la nécessité de caractériser leurs évolutions par des modèles dynamiques à paramètres distribués. Ceci fait intervenir des EDP, c'est-à-dire des équations mettant en jeu des dérivées partielles spatiales et temporelles des différentes variables caractéristiques du système. Comme un système dynamique réel est généralement délimité physiquement dans l'espace, la description mathématique d'un système à paramètres distribués (SPD) doit être complétée par des conditions aux limites qui représentent des contraintes physiques auxquelles sont soumises les frontières du système, et permettent la résolution des équations du modèle. Par conséquent, elles doivent être en nombre suffisant, dépendant de l'ordre des EDP par rapport à la variable d'espace.

Les EDP que l'on rencontre en pratique sont rarement d'ordre élevé en temps et en espace, le plus souvent d'ordre deux en espace et d'ordre un en temps, et de type linéaire (Le Pourhiet, 1988) ; aussi c'est sur les équations d'ordre deux que s'appuie la classification

générale des EDP. Cette classification joue un rôle de premier plan lors de la conception d'un système de commande. En effet, c'est le type des EDP, modélisant le système, qui détermine la stratégie et l'approche de commande à adopter pour ce dernier (Christofides, 2001). Il existe trois classes de systèmes à paramètres distribués : de type hyperbolique, parabolique et elliptique (Renardy et Rogers, 1993). Notons que cette classification est plus difficile à établir dans le cas des EDP non linéaires. Cependant, on peut distinguer des EDP quasi-linéaires ou semi-linéaires. De plus, dans le cas où les coefficients sont fonctions des variables spatiales et temporelles, le type de l'EDP peut changer selon le point de l'espace et le moment considéré.

Les EDP de second ordre linéaires modélisent généralement le couplage de phénomènes de transport (diffusion et convection), et de réaction. En effet, la modélisation des phénomènes de transport conduit fréquemment à des modèles à paramètres distribués, et les phénomènes de réaction caractérisent les différentes interactions entre les variables caractéristiques du système. Notons qu'en faisant l'hypothèse que les phénomènes de transport sont négligeables, la modélisation conduit à un système à paramètres localisés (SPL) qui sera décrit par des équations différentielles ordinaires (ODE).

En présence des phénomènes de transport, le rapport entre le phénomène de diffusion et de convection est mesurée par le nombre de Péclet (Allaire, 2005) qui détermine la validité du modèle à retenir. Si le nombre de Péclet est très petit, alors les phénomènes de diffusion dominent ceux de convection qui peuvent être alors négligés, et on parle d'un système de diffusion-réaction (EDP du deuxième ordre en espace). Dans le cas où les phénomènes de convection sont prédominants, le système est de type convection-réaction (EDP du premier ordre en espace), et les phénomènes diffusifs sont ignorés. Si le nombre de Péclet n'est ni petit, ni grand (de l'ordre de l'unité), c'est-à-dire aucun phénomène de transport ne peut être négligé, le système est de type diffusion-convection-réaction (EDP du deuxième ordre en espace).

A ces phénomènes physiques que l'on rencontre dans les procédés liés à des transformations de matière et d'énergie, s'ajoutent ceux de propagation d'ondes et de vibrations rencontrés particulièrement en mécanique. Ces phénomènes sont modélisés par une équation d'ondes qui est une EDP du deuxième ordre par rapport au temps et à l'espace. Ces systèmes posent des problèmes importants de commande à cause de leur nature distribuée et de la difficulté de traiter des EDP d'ordre élevé en temps. Notons que peu de techniques de commande ont été développées pour ce type de systèmes dans la littérature.

La commande des SPD fait l'objet d'une intense activité scientifique. Outre la complexité du traitement mathématique direct des EDP, la commande des SPD est en soi difficile à cause de la nature même du système. L'étude est généralement limitée à des systèmes unidimensionnels (une seule variable d'espace), ce qui revient à négliger les phénomènes de transport ou de propagation dans les autres directions, une hypothèse

généralement vérifiée pour la quasi-totalité des systèmes.

Les différentes approches et stratégies de commande proposées pour la commande des SPD peuvent être scindées en deux grandes catégories (Ray, 1989) : stratégie de pré-approximation, et stratégie de post-approximation.

Ainsi, dans le cas de la stratégie de post-approximation, l'analyse et la synthèse sont faites directement à partir du modèle à paramètres distribués, qui est de dimension infinie. Une approximation sera utilisée au besoin de la mise en oeuvre du système de commande.

Les approches de la stratégie de pré-approximation considèrent un modèle approché, de dimension finie, décrit par des EDO. Ce dernier est obtenu par une approximation préalable du modèle EDP original en utilisant des techniques d'approximation (différences finies, méthodes des résidus pondérés ...). Notons que la capacité du modèle approximé (modèle ODE) à retranscrire correctement le comportement dynamique du système original dépend de la dimension de son espace d'état, mais aussi de la technique d'approximation utilisée (Ray, 1989; Christofides, 2001; Liu, 2005).

Les techniques d'approximation possibles sont classées en deux grandes familles (Figure 1). Le principe des méthodes de la première famille, dites d'approximation d'équations, consiste à discrétiser les EDP en utilisant les méthodes de différences finies, de volumes finis ou d'éléments finis. Ces dernières conduisent à des EDO dans le cas d'une semi-discrétisation (décomposition du domaine d'espace seulement) appelée aussi méthode des lignes, et à des équations algébriques dans le cas d'une discrétisation totale (décomposition des domaines d'espace et de temps). Pour construire un modèle qui approxime correctement le comportement du modèle EDP, la dimension de son espace d'état (qui représente le nombre d'équations retenu pour le modèle approximé) doit être élevée.

Les méthodes dites d'approximation de solutions, qui représentent la deuxième famille, consistent à approcher les solutions des EDP en utilisant les techniques des résidus pondérés (méthode de collocation, Galerkin ...) ou la méthode de fonctions propres dans le cas des EDP linéaires, basée sur la notion des fonctions tests, appelées encore fonctions propres, obtenues analytiquement à partir des valeurs propres associées au modèle EDP, ou expérimentalement en utilisant la méthode de décomposition orthogonale propre (décomposition de Karhunen-Loève). Cette dernière bute à des problèmes liés à la collecte des mesures qui dépend sensiblement des emplacements des systèmes de capteurs qui représentent un des problèmes épineux dans le cas des SPD (Uciński, 2004), et à lui seul constitue un axe de recherche. C'est pourquoi, une simulation d'un modèle EDO obtenu par les méthodes d'approximation d'équations est préférable et avantageuse, par rapport à l'expérimentation, pour la détermination des fonctions tests (Liu, 2005).

La stratégie de la pré-approximation (modèle EDO) constitue l'approche conventionnelle utilisée pour la synthèse des systèmes de commande pour les SPD. Néanmoins, cette approche présente les inconvénients suivants (Christofides, 2001) :

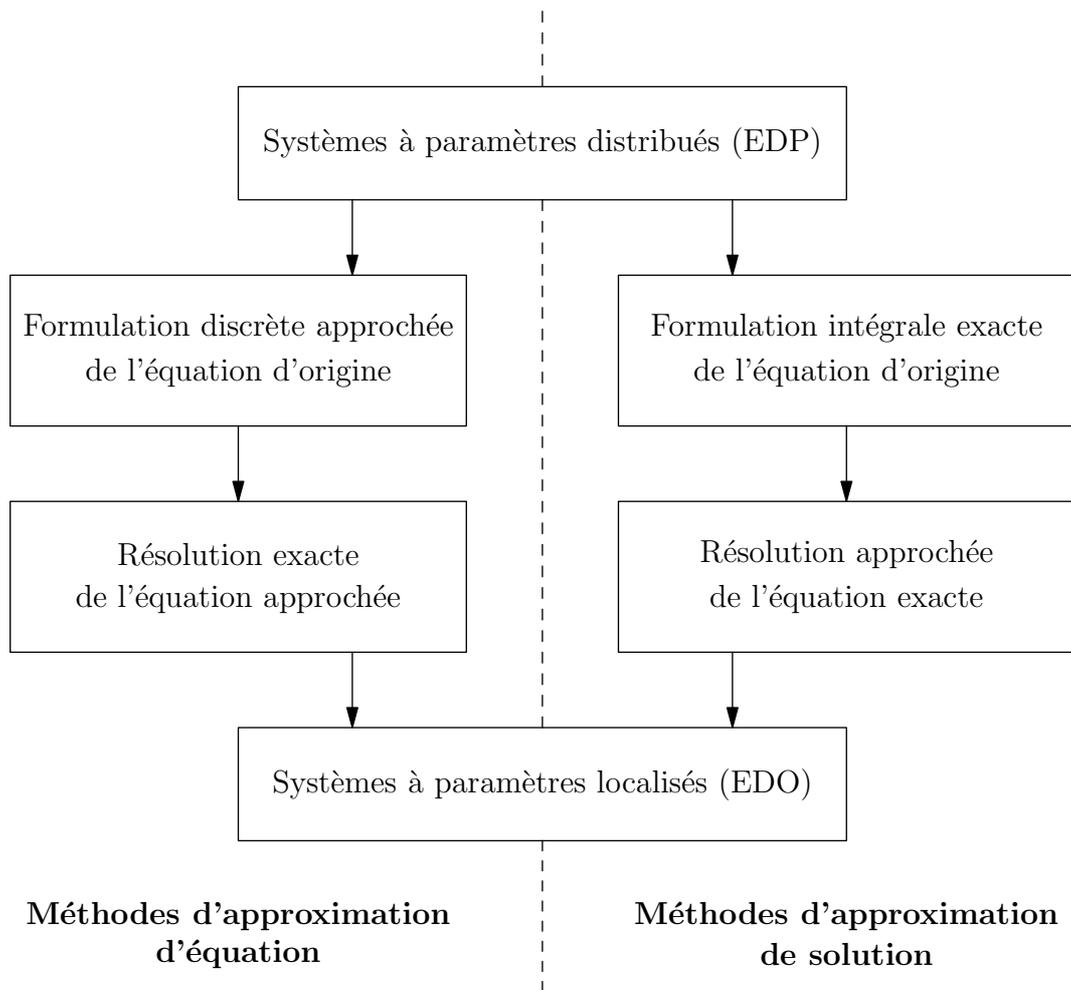


FIG. 1 – Classification des méthodes d'approximation des systèmes à paramètres distribués (SPD).

- les propriétés fondamentales de commandabilité et d'observabilité du système qui dépendent fortement des positions des capteurs et des actionneurs peuvent dépendre de la méthode d'approximation utilisée, et du nombre de points de discrétisation considéré.
- le passage de la dimension infinie à la dimension finie, par l'approximation du modèle EDP, peut conduire à des résultats erronés en ce qui concerne la stabilité du système en boucle ouverte et/ou boucle fermée. Ainsi, une attention particulière doit être accordée au problème de cohérence, de stabilité et de convergence de la méthode d'approximation utilisée.
- lorsque le système est de nature fortement distribuée, due à la présence forte des phénomènes de diffusion et de convection, cette approche limite les performances du correcteur, et peut conduire à une commande de qualité inacceptable qui se répercute négativement sur les performances souhaitées.
- en général, une approximation acceptable du modèle original est obtenue en considérant un espace d'état de dimension élevée, ce qui complique davantage l'étape de synthèse, et conduit souvent à un correcteur de dimension élevée contraignant ainsi l'implantation en ligne de ce dernier.

Si la stratégie de pré-approximation donne des résultats acceptables dans le cas des systèmes paraboliques, en utilisant des techniques de réduction de modèles ou de correcteurs pour surmonter les difficultés causées par la dimension du système approximé, la situation n'est pas la même pour les systèmes hyperboliques. Ceci s'explique, par le fait que les modes de l'opérateur différentiel spatial d'un système hyperbolique sont regroupés le long d'une droite parallèle à l'axe imaginaire du plan complexe. Par conséquent, la séparation de ces derniers, en modes rapides de nombre fini et en modes lents stables infinis, entraîne que la réduction du modèle n'est pas toujours possible, contrairement aux systèmes paraboliques pour lesquels cette séparation de modes est toujours possible et réalisable (Christofides, 2001). La dimension du modèle capturant les modes lents est très élevée ce qui nécessite, en général, une réduction de ce dernier, pour les objectifs de synthèse, ou la réduction du correcteur conçu à base de ce modèle (Atwell et King, 2001, 2005).

Les limitations de la stratégie de pré-approximation ont incité les chercheurs, dans le domaine de la commande des SPD, à développer des techniques de commande basées sur l'utilisation directe du modèle à paramètres distribués de type hyperbolique, c'est-à-dire le modèle EDP, sans aucune approximation. L'approximation sera utilisée lors de la mise en oeuvre de la commande.

L'examen de la littérature scientifique dédiée à la commande des systèmes hyperboliques, basée sur la stratégie de post-approximation, confirme la difficulté d'exploitation du modèle EDP directement pour la synthèse du correcteur à cause de la complexité

du traitement mathématique des problèmes de commande formulés. En effet, le peu de résultats obtenus est limité aux systèmes linéaires, principalement, en utilisant des outils d'analyse en dimension infinie, en particulier la notion de semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés ( $C_0$ -semi-groupe) qui est un prolongement en dimension infinie de l'ensemble des matrices de transition d'état. Cette dernière permet dans certains cas une généralisation à la dimension infinie de nombreux concepts définis en dimension finie (El Jai et Amouroux, 1990; Curtain et Zwart, 1995; Bensoussan *et al.*, 2006).

Récemment, certains travaux présentent des solutions transposant la commande géométrique à des systèmes hyperboliques quasi-linéaires du premier ordre. Dans ce cadre, en utilisant les concepts familiers de la commande géométrique, Christofides et Daoutidis (1996a) abordent la commande distribuée, par zone de sorties obtenues par moyennage spatial, et proposent des lois de commande permettant d'assurer les performances désirées et la stabilité du système en boucle fermée, via un placement de pôles. Les mêmes concepts ont été utilisés par Gundepudi et Friedly (1998), et Wu et Liou (2001) pour développer des lois de commande performantes permettant de commander une sortie à la frontière. Ainsi, Gundepudi et Friedly (1998) considèrent comme variable manipulée la vitesse du flux convectif, et Wu et Liou (2001) traitent le problème de commande aux frontières. Pour le même type de systèmes, Shang *et al.* (2005) ont exploité la méthode des caractéristiques pour concevoir des lois de commande performantes et très intéressantes. Notons que toutes les contributions précédemment citées ont été appliquées avec succès à la commande d'un échangeur de chaleur et d'un réacteur chimique tubulaire (deux exemples de cette classe de systèmes les plus fréquents) en considérant une double enveloppe à température homogène.

En somme, l'examen et l'analyse des travaux antérieurs montrent que beaucoup de développements ont été accomplis dans la commande des SPD, principalement les systèmes paraboliques, et la quasi-totalité concerne la stratégie de la pré-approximation. Les contributions dans le cas de la stratégie de post-approximation restent minimes, en nombre, et focalisées sur des systèmes de premier ordre en temps.

Motivés par ces considérations, les objectifs de cette présente thèse sont :

- développement de nouvelles approches de commande basée sur la stratégie de post-approximation à base de commandes modernes pour les systèmes hyperboliques.
- étendre l'application de la stratégie de post-approximation à des systèmes décrits par l'équation d'ondes, c'est-à-dire à des SPD dont le modèle est de second ordre en temps.

La classe des systèmes considérés est décrite par des EDP linéaires. Ceci se justifie par le fait que tous les systèmes dynamiques peuvent être linéarisés autour d'un régime permanent. Comme exemples typiques de ces systèmes, étudiés dans la littérature, on considère un échangeur de chaleur à température d'enveloppe homogène, un échangeur

de chaleur à contre-courant, et le déplacement d'une corde vibrante tendue.

Le reste de la thèse est organisée comme suit :

**Le chapitre 1** présente les notions relatives aux SPD qui seront utilisées le long de cette thèse, et un état de l'art sur la commande de ces derniers. Les notions présentées concernent la définition, la représentation mathématique, la classification des SPD. L'état de l'art présenté est axé sur les différentes stratégies de commande des SPD, proposées dans la littérature, et présente une synthèse d'une recherche bibliographique regroupant un nombre important de références relatant les différents travaux antérieurs réalisés dans ce domaine. La fin du chapitre introduit la classe de système linéaire de type diffusion-convection-réaction, et particulièrement la pré-approximation des systèmes convection-réaction, qui feront l'objet d'étude dans cette thèse, par la méthode des lignes. Cette pré-approximation est réalisée en boucle fermée pour les besoins de simulation.

**Le chapitre 2** décrit une méthodologie d'optimisation d'un correcteur PI Flou utilisée pour commander la température moyenne d'un échangeur de chaleur en manipulant la température de la jaquette supposée homogène et distribuée uniformément. L'approche de synthèse est formulée sous forme d'un problème d'optimisation avec contraintes où les paramètres d'adaptation du correcteur flou (paramètres du réglage du correcteur) représentent les variables de décision et la fonction objectif représente un critère de performances. Le modèle EDP de l'échangeur sera intégré dans le système de contraintes du problème d'optimisation formulé. La solution du problème d'optimisation finale est obtenue numériquement, et les performances du correcteur seront évaluées par simulation.

**Le chapitre 3** présente une nouvelle stratégie de commande aux frontières d'un échangeur de chaleur à contre-courant basée sur la commande géométrique. Le modèle de l'échangeur est donné par deux EDP couplées. La stratégie proposée consiste à commander la température du fluide, à chauffer, à la sortie de l'échangeur en manipulant la température du fluide chauffant à la frontière ou la vitesse d'écoulement de ce dernier. Les deux stratégies de commande seront étudiées et principalement la première stratégie qui présente des avantages par rapport à la deuxième. La synthèse des correcteurs sera faite directement en considérant le modèle EDP, et aboutit à des lois de commande de nature distribuée. Ces dernières permettent d'imposer un comportement désiré entre une entrée externe définie et la sortie commandée. Pour rendre robuste le système de commande vis-à-vis des erreurs de modélisation et de variations paramétriques, cette entrée externe sera définie par un correcteur PI classique. Des tests de simulation seront réalisés pour évaluer les performances des deux stratégies adoptées avec une étude plus approfondie dans le cas de la manipulation de la température.

**Le chapitre 4** traite la commande géométrique distribuée des systèmes décrits par l'équation d'ondes, où une loi de commande générale sera développée. Tout d'abord, les conditions d'applicabilité, relatives à l'existence du degré relatif et de commandabilité seront posées et justifiées. Puis une réduction de l'équation d'ondes, de second ordre en temps, à un système de trois équations hyperboliques, de premier ordre en temps, sera opérée. Cette réduction permettra de calculer une loi de commande géométrique d'une manière très simple suivant l'approche des dérivées successives de la sortie commandée. L'expression de la loi de commande générale, de nature distribuée évidemment, sera donnée sous forme d'un opérateur différentiel. L'approche de commande proposée sera illustrée par une application portant sur la commande du déplacement d'une corde vibrante tendue et fixée aux extrémités. Pour justifier la justesse de l'approche proposée, des tests de simulation seront réalisés.

La fin de la thèse est réservée à la conclusion générale résumant les différents résultats obtenus en mettant l'accent sur les principales contributions de l'étude réalisée, tout en précisant les axes de recherche prometteurs dans le domaine de la commande des SPD.

# Chapitre 1

## Sur la Commande des Systèmes à Paramètres distribués (SPD)

### 1.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de présenter des notions relatives aux systèmes à paramètres distribués (parfois appelés à paramètres répartis ou de dimension infinie) utilisées le long de cette thèse. Ces notions portent sur la définition, la modélisation mathématique, la classification, et les différentes approches de commande de ce type de systèmes.

Ainsi, le chapitre commence par la description mathématique d'un système à paramètres distribués (SPD), et les différents types de commandes et d'observations possibles. Ensuite, on s'intéresse à la classification des systèmes à paramètres distribués établie sur la base de l'équation aux dérivées partielles (EDP) de deuxième ordre qui modélise une grande partie des systèmes rencontrés en pratique. Cette classification joue un rôle de premier plan dans le choix de la stratégie de commande à adopter pour un SPD. La suite du chapitre est consacrée à une synthèse sur les différentes approches de commande des SPD proposées dans la littérature. La fin du chapitre est réservée aux systèmes de diffusion-convection-réaction, et en particulier, aux systèmes de convection-réaction qui feront l'objet de cette thèse dans les chapitres suivants.

### 1.2 Systèmes à paramètres distribués

Les SPD concernent un large spectre d'applications dans le domaine des sciences de l'ingénieur, dont notamment : la thermique, l'électromagnétisme, la mécanique des fluides, le génie des procédés, la chimie, la biologie, et d'autres. En effet, pour la quasi-totalité des systèmes physiques, les variables caractéristiques (paramètres et variables) sont rarement uniformes et homogènes par rapport à l'espace géométrique, par conséquent elles ne

peuvent pas être considérées comme indépendantes de la variable d'espace. L'hypothèse de l'homogénéité est peut être utile quand il s'agit de situations très particulières.

Par exemple, la température dans une enceinte thermique n'est pas la même en tout point mais elle est distribuée, ou encore la conductivité thermique d'un matériau hétérogène constitue un paramètre distribué. Il en est de même, pour les concentrations des réactifs et des produits dans les réacteurs chimiques tubulaires, le déplacement d'une structure flexible, la densité et le débit dans un trafic urbain, et l'évolution d'une épidémie dans une population qui sont toutes des variables de nature distribuée et ne peuvent pas être ignorées dans les problèmes de commande.

Ainsi, la dynamique de nombreux systèmes physiques, ayant des applications industrielles essentielles, est décrite par des équations aux dérivées partielles (EDP). Friedly (1972); Omatu et Seinfeld (1989); Ray (1989); Neittaanmäki et Tiba (1994); Curtain et Zwart (1995); Christofides (2001); Uciński (2004), et Armaou (2001) donnent des exemples de systèmes industriels dans différents domaines. Parmi ces systèmes, on peut citer les réacteurs (bio)chimiques, décanteurs, laminoirs, réacteurs thermiques, échangeurs de chaleurs, fours industrielles, colonne chromatographique, colonne de distillation ou d'absorption à garnissage, manipulateurs flexibles en robotique. De ce fait, leur espace d'état est de dimension infinie, et les outils habituels de l'automaticien, utilisés pour les systèmes à paramètres localisés (SPL), c'est-à-dire des systèmes décrits par des EDO, ne sont donc plus utilisables pour des systèmes physiques à variables caractéristiques non homogènes spatialement.

### 1.3 Description mathématique d'un système à paramètres distribués

Les équations aux dérivées partielles sont des équations différentielles mettant en jeu des variables d'espace et de temps lorsque l'équation traduit un phénomène d'évolution. Ces équations ont leur origine dans l'écriture des bilans macroscopiques de masse, de mouvement ou d'énergie, si bien qu'on les rencontre dans tous les domaines de la physique.

En effet, la modélisation de nombreuses classes de systèmes physiques conduit à des EDP. Ceux-ci sont appelés systèmes à paramètres distribués (SPD) dont les variables caractéristiques ou/et les paramètres sont non homogènes spatialement. Ce type de systèmes est de dimension infinie, c'est-à-dire que le nombre de variables caractérisant l'état du système est infini, par opposition aux (SPL), décrits par des EDO, qui sont de dimension finie (El Jai et Amouroux, 1990; Curtain et Zwart, 1995; Bensoussan *et al.*, 2006).

D'une façon générale, un SPD linéaire à deux variables indépendantes, une variable temporelle et une variable d'espace, dans le cas monodimensionnel, désignées respective-

ment par  $t$  et  $z$ , est décrit par les données suivantes (Babary et Pelczewski, 1985; Rachid, 1997) :

- un domaine spatial, borné de  $\mathbb{R}$ ,  $\Omega = [0, L]$  et de frontière  $\partial\Omega = \{0, L\}$ ,
- un domaine temporel  $\mathbb{T} = [0, +\infty[$ ,
- une équation d'état (ou d'évolution) à l'intérieur du domaine  $\Omega \times \mathbb{T}$  :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \mathcal{A}(x(z, t)) + \mathcal{B}(u(z, t)), \quad t \in \mathbb{T} \text{ et } 0 < z < L, \quad (1.1)$$

- une équation de sortie sur  $\Omega \times \mathbb{T}$  :

$$y(z, t) = \mathcal{C}(x(z, t)), \quad (1.2)$$

- des conditions sur la frontière  $\partial\Omega$  appelées conditions aux limites :

$$\mathcal{L}(x(z, t)) = u(z, t) \quad , \quad z \in \partial\Omega. \quad (1.3)$$

Les conditions aux limites peuvent être de type : Dirichlet, Neumann, Fourier (mais il en existe d'autres) qui ont lieu sur l'intégralité de la frontière  $\partial\Omega$ . Des situations où les conditions aux limites sont mélangées peuvent se présenter, par exemple : Dirichlet sur  $\partial\Omega_{\mathcal{D}}$ , Neumann sur  $\partial\Omega_{\mathcal{N}}$ , et Fourier sur  $\partial\Omega_{\mathcal{F}}$ , avec  $\partial\Omega_{\mathcal{D}}, \partial\Omega_{\mathcal{N}}, \partial\Omega_{\mathcal{F}}$  formant une partition de la frontière  $\partial\Omega$ , c'est-à-dire  $\partial\Omega = \partial\Omega_{\mathcal{D}} \cup \partial\Omega_{\mathcal{N}} \cup \partial\Omega_{\mathcal{F}}$  (Allaire, 2005).

Dans le cas où  $z \in \partial\Omega$ , on a  $u(z, t) \neq 0$ , alors les conditions aux limites sont non-homogènes, c'est-à-dire que la commande est appliquée aux frontières. Ce type de conditions aux limites conduit généralement à une complexité du traitement mathématique des EDP, principalement sur le plan théorique (Ray, 1989), d'où l'intérêt de transformer le système d'état avec conditions aux limites non homogènes en un système avec conditions aux limites homogènes (Babary et Pelczewski, 1985; Ray, 1989). Ceci est souvent possible dans le cas des systèmes linéaires, moyennant certaines transformations, par exemple par changement de fonctions (Babary et Pelczewski, 1985), ou utilisation de la fonction de Dirac (Ray, 1989).

- des conditions initiales ( $t = 0$ ) sur  $\Omega$  :

$$\mathcal{M}(x(z, 0)) = 0, \quad (1.4)$$

où l'état  $x(z, t)$ , la commande  $u(z, t)$ , et la sortie  $y(z, t)$  du système sont représentées par des fonctions vectorielles de dimension  $1 \times n$ ,  $1 \times m$ , et  $1 \times r$  respectivement.

Les matrices  $\mathcal{A}(\cdot)$ ,  $\mathcal{B}(\cdot)$ ,  $\mathcal{C}(\cdot)$ ,  $\mathcal{L}(\cdot)$ , et  $\mathcal{M}(\cdot)$  sont des matrices d'opérateurs différentiels spatiales, bornés, ne comportant que des dérivées par rapport à la variable d'espace  $z$ .

$\mathcal{A}(\cdot)$ ,  $\mathcal{B}(\cdot)$ ,  $\mathcal{C}(\cdot)$  sont appelés respectivement opérateur d'état, opérateur de commande et opérateur de sortie (ou d'observation). L'état  $x(z, t)$  du système appartient à un espace d'état qui est un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  séparable. Le choix de l'espace d'état  $\mathcal{H}$ , dans le cas linéaire, est lié à l'ordre le plus élevé des dérivées temporelles.

La matrice  $\mathcal{B}(\cdot)$  dépend de la nature des commandes appliquées au système, et la matrice  $\mathcal{C}(\cdot)$  dépend des objectifs de la commande. Néanmoins, une attention particulière doit être accordée au choix de ces deux dernières matrices qui conditionnent la commandabilité et l'observabilité du système, donc un compromis doit être trouvé entre les objectifs de commande et les propriétés fondamentales.

Pour les objectifs de simulation ou de commande d'un SPD, la nature des commandes et d'observations doit être spécifiée (Babary et Pelczewski, 1985; Rachid, 1997). Les différentes commandes et observations possibles sont illustrées par la Figure 1.1.

Pour la commande, on distingue plusieurs classes :

- **la commande distribuée** :  $u(z, t)$  définie sur  $\Omega \times \mathbb{T}$ , et donnée comme suit :

$$u(z, t) = b(z) u_d(t), \quad (1.5)$$

où  $b(z)$  caractérise la structure géométrique du système d'actionneurs, et  $u_d(t)$  est le signal d'entrée.

- **la commande par zones** : Une zone  $\Omega_i$  représente une portion du domaine spatial  $\Omega$  ( $\Omega = \cup_{i=1}^p \Omega_i$ ). Une commande par zone est définie sur un sous-ensemble de  $\Omega_i \times \mathbb{T}$ . Si, par exemple, la commande est appliquée sur  $p$  zones, on a :

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^p b_i(z) u_{d_i}(t), \quad (1.6)$$

où  $b_i(z)$  caractérise la structure géométrique du système d'actionneurs, et  $u_{d_i}(t)$  est le signal d'entrée relatifs à la zone  $i$ .

- **la commande ponctuelle** : agissant sur un ou plusieurs points de  $\Omega$ .
- **la commande par balayage** : pour laquelle les zones ou/et points d'action (actionneurs) sont mobiles dans  $\Omega$ .
- **la commande aux frontières** : définie sur  $\partial\Omega \times \mathbb{T}$ .

Le vecteur de sortie du système coïncide en général avec l'ensemble des observations, et se déduit souvent de transformations linéaires sur le vecteur d'état. On distingue :

- **l'observation distribuée** : sur  $\Omega \times \mathbb{T}$  ou sur un sous-ensemble de  $\Omega \times \mathbb{T}$ .
- **l'observation ponctuelle** : agissant sur un ou plusieurs points  $z_i$  de  $\Omega$  ou/et de  $\partial\Omega$

(**observation aux frontières**).

$$y_i(t) = y(z_i, t) = \int_{\Omega} \delta(z - z_i) x(z, t) dz, \quad z_i \in \Omega \quad (1.7)$$

- **l'observation par balayage** : pour laquelle les points d'observation (système de capteurs) sont mobiles dans  $\Omega$ ,
- **l'observation par moyennage spatial** : définie par l'intégrale suivante,

$$y(t) = \int_{\Omega} c(z) x(z, t) dz \quad (1.8)$$

où  $c(z)$  caractérise la structure géométrique de l'ensemble des capteurs.

## 1.4 Classification des systèmes à paramètres distribués

La classification générale des EDP s'appuie sur l'EDP de deuxième ordre (Le Pourhiet, 1988; Ames, 1992; Renardy et Rogers, 1993). Par définition, l'ordre d'une EDP est l'ordre de la plus grande dérivée présente dans l'équation.

Dans le cas général de systèmes linéaires d'ordre deux, dont la solution  $x(z, t)$  est fonction de deux variables  $t$  et  $z$ , le modèle mathématique s'écrit :

$$\alpha \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t \partial z} + \gamma \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + [\dots] = 0 \quad (1.9)$$

où le terme entre crochets dépend de  $x(z, t)$ ,  $t$ ,  $z$  et des dérivées premières de  $x(z, t)$ . Les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ , et  $\gamma$  sont supposés constants et indépendants de la variable d'espace  $z$ .

Par analogie avec l'équation des coniques (Le Pourhiet, 1988; Renardy et Rogers, 1993), l'équation (1.9) est dite :

- elliptique, si  $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$ ,
- parabolique, si  $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$ ,
- hyperbolique, si  $\beta^2 - \alpha\gamma > 0$ .

Si les trois coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ , et  $\gamma$  sont nuls, le type d'équation dépend seulement des dérivées premières de  $x(z, t)$ , alors l'équation est hyperbolique et d'ordre un.

Notons que, pour les EDP non linéaires, la classification précédente est difficile à établir bien que Renardy et Rogers (1993) s'y soient essayés.

Une classe particulière de systèmes, assez largement répandue notamment dans les domaines chimiques, biochimique, thermique, ..., pour laquelle  $\beta = \gamma = 0$  est parabolique si  $\alpha \neq 0$ , et hyperbolique si  $\alpha = 0$ .

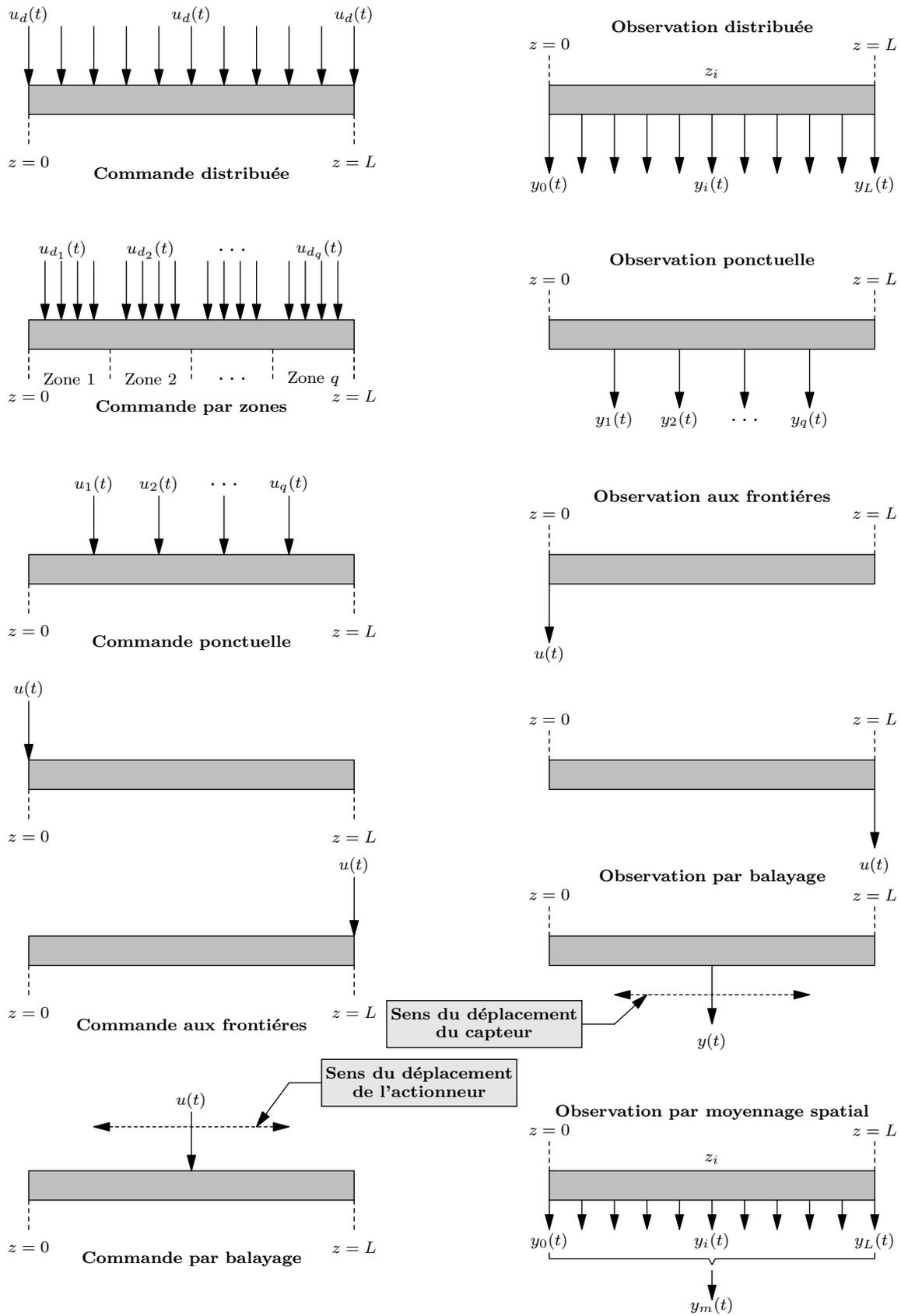


FIG. 1.1 – Différents types de commandes et d'observations d'un SPD.

En général, les problèmes stationnaires (indépendants du temps) sont modélisés par des EDP de nature elliptique, tandis que les problèmes d'évolution (dynamique) sont modélisés par des EDP de nature parabolique ou hyperbolique (Allaire, 2005). Comme en commande, le modèle doit être dynamique pour pouvoir représenter les variations du système au cours du temps, alors l'étude de la commande des SPD se limite, souvent, aux systèmes hyperboliques et paraboliques (Ray, 1989).

Du point de vue commande, il est important de signaler que les propriétés des SPD dépendent fortement de la nature des EDP le modélisant (El Jai et Amouroux, 1990). Ces propriétés dictent, souvent, l'approche de commande à adopter (Christofides, 2001) et l'algorithme de simulation (méthode de résolution numérique) sur le plan pratique pour la validation du modèle ou la mise en oeuvre du correcteur (Ames, 1992; Renou, 2000; Renou *et al.*, 2003).

## 1.5 Commande des systèmes à paramètres distribués

L'étude des SPD a connu un regain d'intérêt de la part de la communauté scientifique lors de ces dernières années. Soutenue par un développement parallèle de l'informatique et des outils mathématiques, de plus en plus élaborés, plusieurs travaux de recherche ont été menés et axés sur la modélisation, la simulation, l'identification, l'estimation, le placement optimal des capteurs, et la commande. Les recherches menées ont conduit à de probants résultats sur le plan théorique et pratique.

De nombreux articles de synthèse ont été consacrés à la commande des SPD (Balas, 1982; Lasiecka, 1995; Christofides, 2001, 2002; Heinkenschloss, 2003; Christofides, 2004, 2005; Balogh et Krstic, 2006), y compris des ouvrages (Lions, 1968; Omatu et Seinfeld, 1989; El Jai et Amouroux, 1990; Barbu, 1992; Curtain et Zwart, 1995; Neittaanmäki et Tiba, 1994; Lasiecka et Triggiani, 2000a,b; Christofides, 2001; Uciński, 2004; Bensoussan *et al.*, 2006).

En outre, de nombreux papiers relatent des développements de stratégies de commande optimale (Lim et Fang, 1972; Dugdale et Wen, 2002; Li et Christofides, 2007a), de commande prédictive (Abdelghani-Idrissi *et al.*, 2001; Choi et Lee, 2005; Dubljevic *et al.*, 2005; Demetriou et Fahroo, 2006; Arbaoui *et al.*, 2007), de commande non linéaire (Hanczyc et Palazoglu, 1995; Christofides et Daoutidis, 1996a; Wu et Liou, 2001; Shang *et al.*, 2005), de commande floue (Sooraksa et Chen, 1998; Sagias *et al.*, 2001; Lin et Lewis, 2003; Li *et al.*, 2007), et de commande robuste (Pohjolainen et Lätti, 1983; Gauthier et Xu, 1991; Alvarez-Ramirez *et al.*, 1997; Christofides, 1998; Christofides et Daoutidis, 1998) avec des applications sur des systèmes physiques (Dochain *et al.*, 1997; Kalani et Christofides, 1999; Estel *et al.*, 2000; Armaou, 2001; Boubaker *et al.*, 2001; Karafyllis et Daoutidis, 2002; Boubaker et Babary, 2003; Dufour *et al.*, 2003, 2004; Baldeaa et Daou-

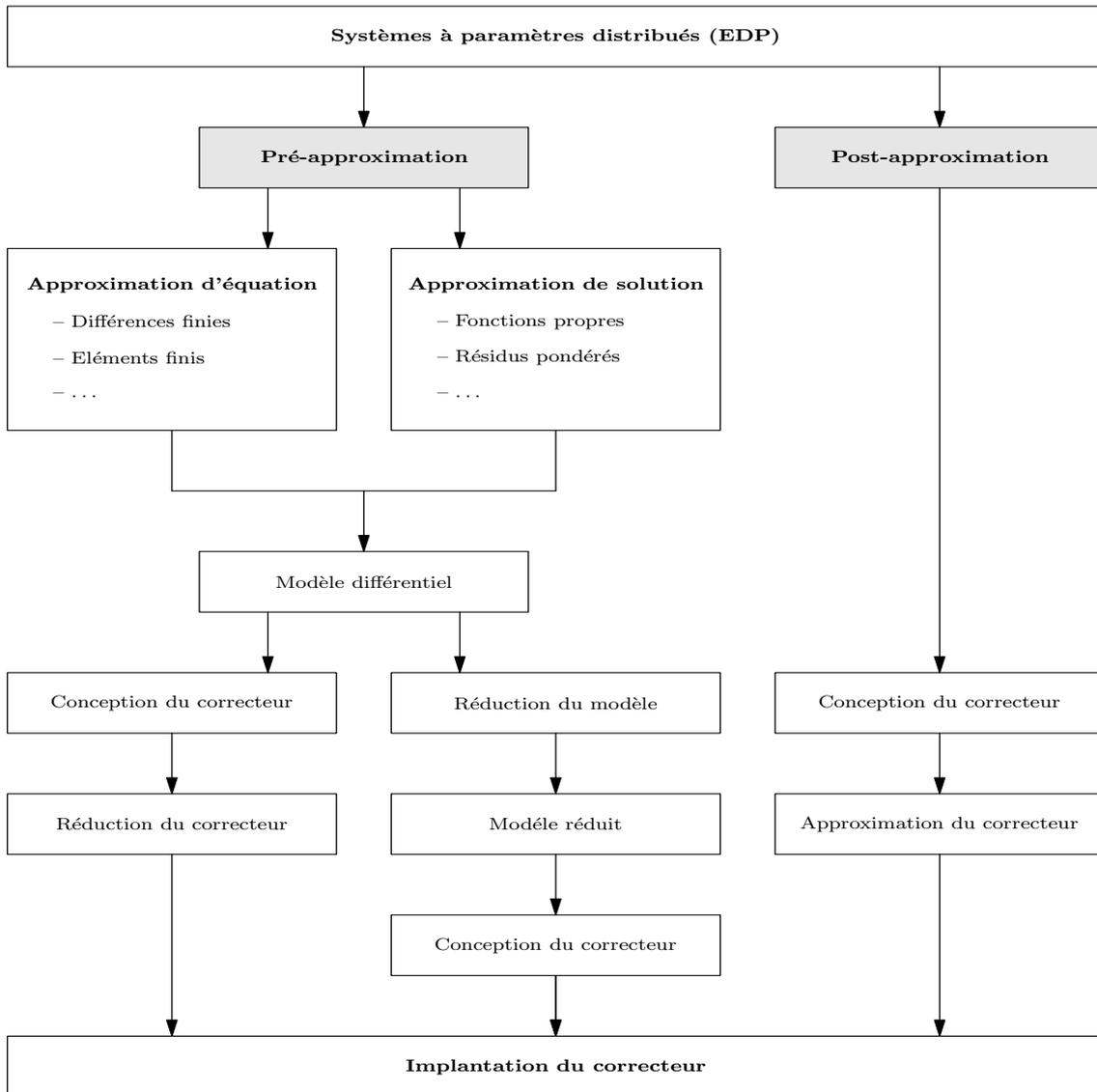


FIG. 1.2 – Commande des systèmes à paramètres distribués (SPD).

tidis, 2007; Damak, 2007; Ding *et al.*, 2007).

Les différentes approches développées peuvent être divisées, comme cela a été suggéré par Ray (1989), en deux grandes catégories : la stratégie de pré-approximation et la stratégie de post-approximation (Figure 1.2).

### 1.5.1 Stratégie de pré-approximation

Les approches de commande par pré-approximation utilisent une approximation préalable des EDP par des EDO, dont l'objectif est de se ramener à ce qui est bien connu et maîtrisé, c'est-à-dire un SPL, par des techniques d'approximation, et l'algorithme de commande est conçu en utilisant le modèle SPL obtenu (Ray, 1989; Dochain *et al.*, 1992). Notons que la stratégie de pré-approximation est plus indiquée pour les systèmes parabo-

liques, et déconseillée dans le cas des systèmes hyperboliques. Ceci sera argumenté dans la suite.

La stratégie de pré-approximation se distinguent par le type d'approximation utilisé. En effet, des techniques analytiques ou numériques doivent être utilisées pour permettre la transformation du modèle SPD en un modèle SPL avec un nombre suffisamment restreint d'EDO, pour que le modèle approximé soit exploitable pour la conception de la loi de commande.

Plusieurs méthodes de pré-approximation ont été proposées dans la littérature (Shvartsman et Kevrekidis, 1998; Lee *et al.*, 1999; Lefèvre *et al.*, 2000; Adrover *et al.*, 2000; Cruz *et al.*, 2001; Krishnan *et al.*, 2004; Bleris et Kothare, 2005). Le Pourhiet (1988) et Ames (1992) donnent une synthèse sur les différentes approches, et des références spécialisées.

Ces méthodes sont classées en deux grandes familles radicalement différentes dans leurs principes.

La première concerne les algorithmes basés sur la discrétisation des EDP. Ce sont les méthodes dites d'approximation d'équations (Ames, 1992; Wouwer *et al.*, 2004; R., 2005; Hamdi *et al.*, 2005; Li et Christofides, 2007b). Cette classe de méthodes regroupe la méthode des différences finies, la méthode des lignes, la méthode des éléments finis, la méthode des volumes finis et donne un système d'EDO, dans le cas d'une semi-discrétisation, de la forme :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \mathcal{F}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \quad (1.10)$$

ou algébrique, dans le cas d'une discrétisation totale, de la forme :

$$\tilde{x}(k+1) = \mathcal{F}_\Delta(\tilde{x}(k), \tilde{u}(k)) \quad (1.11)$$

ceci dépend de l'approche d'approximation utilisée. Les fonctions vectorielles  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}_\Delta$  sont généralement non linéaires. Le nouveau vecteur d'état  $\tilde{x}$ , issu de l'approximation, est de dimension  $nN$ , où  $N$  est le nombre de points de discrétisation utilisée. Par contre la dimension, du nouveau vecteur de commandes  $\tilde{u}$  dépend de nombre de commandes  $m$  et leur type. La section 1.7 présente la pré-approximation d'un système de type convection-réaction par la méthode des lignes.

Le système final obtenu, par ce type de méthode, est à paramètres localisés pour lequel une panoplie de méthodes d'analyse et de synthèse est disponible dans la littérature (Ray, 1989; Ray et Ogunnaike, 1994; Isidori, 1995; Corriou, 2003, 2004).

La seconde famille regroupe les méthodes qui abordent le problème non plus par des équations approchées, mais directement par des modèles de solutions approchées : ce sont les méthodes d'approximation de solutions (Babary et Pelczewski, 1985; Ray, 1989; Rachid, 1997; Lee *et al.*, 1999; Lefèvre *et al.*, 2000; Wouwer *et al.*, 2004; Li et Christofides, 2007b). La méthode des fonctions splines, les méthodes des résidus pondérés (méthode

des moindres carrés, méthode de Galerkin, méthode des moments, méthode des sous-domaines, et méthode de collocation par points), et la méthode de Riesz (minimisation d'une fonctionnelle) font partie des méthodes de cette classe. Pour les problèmes de commande, la méthode de lignes, la méthode de Galerkin, et la méthode de collocation sont les plus adaptées.

Ces méthodes d'approximation, dans leur principe, supposent que la solution du problème est séparable, ce qui permet d'écrire pour chaque EDP du modèle original (variable du vecteur d'état) :

$$x_i(z, t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \tilde{a}_{i,j}(t) \phi_{i,j}(z), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.12)$$

et

$$u_i(z, t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \tilde{b}_{i,j}(t) \phi_{i,j}(z), \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.13)$$

où  $\tilde{a}_{i,j}$  et  $\tilde{b}_{i,j}$  sont inconnus, et les fonctions  $\phi_{i,j}(z)$ , appelées fonctions de tests ou modales sont connues, et doivent être choisies orthogonales, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi_{i,k}(\tilde{z}) \phi_{i,l}(\tilde{z}) d\tilde{z} &= 1, \quad \text{pour } k = l \\ \int_0^1 \phi_{i,k}(\tilde{z}) \phi_{i,l}(\tilde{z}) d\tilde{z} &= 0, \quad \text{pour } k \neq l \end{aligned} \quad (1.14)$$

où  $\tilde{z} = z/L$  représente la position normalisée entre 0 et 1.

Pour les systèmes linéaires, ces fonctions représentent les fonctions propres des opérateurs différentiels spatiaux de la matrice  $\mathcal{A}$  (Babary et Pelczewski, 1985; Ray, 1989). Le problème aux valeurs propres associé au système (1.1–1.4) consiste à résoudre l'équation matricielle différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\phi(z)) &= -\lambda^T \phi(z) \\ \mathcal{L}(\phi(z)) &= 0, \quad z \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.15)$$

Si cette équation admet une solution non nulle, alors  $\lambda$  et  $\phi(z)$ , solutions du système d'équations (1.15) sont respectivement le vecteur des valeurs propres et le vecteur des fonctions propres.

La substitution des solutions (1.12) et (1.13) dans l'équation d'évolution (1.1) conduit, en considérant les conditions d'orthogonalité (1.14), au modèle d'état suivant :

$$\dot{\tilde{a}}(t) = \tilde{F}(\tilde{a}(t), \tilde{b}(t)) \quad (1.16)$$

où  $\tilde{F}$  est une fonction vectorielle souvent non linéaire.

Le système différentiel (1.16) étant de dimension infinie, on procède en pratique à une troncature d'ordre  $N$ , dépendant de la précision souhaitée sur la solution de  $x(z, t)$ , dans l'expression de la solution (1.12). Dans ce cas,  $\tilde{a}$  et  $\tilde{b}$  sont des vecteurs de dimension  $1 \times nN$  donnés respectivement par :

$$\tilde{a} = [\tilde{a}_{i,j}]_{i=1,\dots,n; j=1,\dots,N}^T \quad ; \quad \tilde{b} = [\tilde{b}_{i,j}]_{i=1,\dots,n; j=1,\dots,N}^T \quad (1.17)$$

Illustrons cette méthode d'approximation en considérant le système linéaire d'ordre  $n = 1$  suivant :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \mathcal{A}(x(z, t)) + u(z, t) \quad (1.18)$$

avec la condition initiale  $x(z, 0) = x_0$  et la condition aux limites  $\mathcal{L}(x(z, t)) = 0$  ( $z \in \partial\Omega$ ).

En considérant que l'état et la commande de l'équation (1.18) sont séparables, on peut écrire :

$$x(z, t) = \sum_{j=1}^N \tilde{a}_j(t) \phi_j(z) \quad (1.19)$$

$$u(z, t) = \sum_{j=1}^N \tilde{b}_j(t) \phi_j(z) \quad (1.20)$$

où  $\phi_j(z)$  représentent les fonctions propres (orthogonales) de l'opérateur  $\mathcal{A}$  obtenues en résolvant le problème aux valeurs propres (1.15). En substituant  $x(z, t)$  et  $u(z, t)$  par leurs expressions (1.19) et (1.20) dans l'équation d'état (1.18), il vient :

$$\frac{\partial \left[ \sum_{j=1}^N \tilde{a}_j(t) \phi_j(z) \right]}{\partial t} = \mathcal{A} \left( \sum_{j=1}^N \tilde{a}_j(t) \phi_j(z) \right) + \sum_{j=1}^N \tilde{b}_j(t) \phi_j(z) \quad (1.21)$$

$$\sum_{j=1}^N \phi_j(z) \frac{\partial \tilde{a}_j(t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \tilde{a}_j(t) \mathcal{A}(\phi_j(z)) + \sum_{j=1}^N \tilde{b}_j(t) \phi_j(z) \quad (1.22)$$

En multipliant l'équation (1.22) par  $\phi_k(z)$  et en tenant compte de l'orthogonalité des fonctions propres  $\phi$ , on obtient :

$$\phi_k(z) \frac{\partial \tilde{a}_k(t)}{\partial t} = a_k(t) \mathcal{A}(\phi_k(z)) + b_k(t) \phi_k(z), \quad k = 1, \dots, N \quad (1.23)$$

Ensuite, en divisant l'équation (1.23) par  $a_k(t) \phi_k(z)$ , on obtient :

$$\frac{1}{\tilde{a}_k(t)} \frac{\partial \tilde{a}_k(t)}{\partial t} = \frac{\mathcal{A}(\phi_k(z))}{\phi_k(z)} + \frac{b_k(t)}{\tilde{a}_k(z)}, \quad k = 1, \dots, N \quad (1.24)$$

L'équation (1.24) peut être décomposée en deux équations différentielles ordinaires, l'une fonction de la variable  $t$ , et l'autre fonction de la variable  $z$ , comme suit :

$$\frac{1}{\tilde{a}_k(t)} \frac{\partial \tilde{a}_k(t)}{\partial t} - \frac{b_k(t)}{\tilde{a}_k(t)} = -\lambda_k, \quad k = 1, \dots, N \quad (1.25)$$

$$\mathcal{A}(\phi_k(z)) = -\lambda_k \phi_k(z), \quad k = 1, \dots, N \quad (1.26)$$

L'équation (1.26) représente le problème aux valeurs propres associé à l'EDP (1.18). La résolution du problème (1.26) permet de déterminer les valeurs propres  $\lambda_k$  et les fonctions propres  $\phi_k(z)$  de l'opérateur différentiel  $\mathcal{A}$  (la résolution du problème aux valeurs propres associé à l'équation d'ondes est présentée dans la section 4.4.1).

L'équation (1.25) écrite sous la forme (1.16) est donnée par :

$$\dot{\tilde{a}}(t) = A \tilde{a} + I_{N \times N} \tilde{b} \quad (1.27)$$

où :

$$A = \text{diag}(-\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_N) \quad (1.28)$$

$$\tilde{a} = [\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_N]^T \quad (1.29)$$

$$\tilde{b} = [\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_N]^T \quad (1.30)$$

et  $I_{N \times N}$  est une matrice identité de dimension  $N \times N$ .

Ainsi, le problème de commande du système (1.18) se ramène à la commande du système (1.27). Ce dernier est un système multivariable linéaire. L'objectif est de déterminer le vecteur de commande  $\tilde{b}(t)$  afin d'amener le vecteur d'état  $\tilde{a}(t)$  à un état désirée  $\tilde{a}^d(t)$ .

De manière générale, d'après la relation (1.12), il est clair que pour assurer un profil désiré  $x_i^d(z, t)$  :

$$x_i^d(z, t) = \sum_{j=1}^N a_{i,j}^d(t) \phi_{i,j}(z), \quad (1.31)$$

et compte tenu des fonctions tests  $\phi_{i,j}(z)$  choisies, le problème de commande revient à déterminer le vecteur  $\tilde{b}$ , qui représente le vecteur de commandes pour le système (1.16), de manière à minimiser les écarts suivants :

$$e_{i,j}(t) = \tilde{a}_{i,j}^d(t) - \tilde{a}_{i,j}(t) \quad (1.32)$$

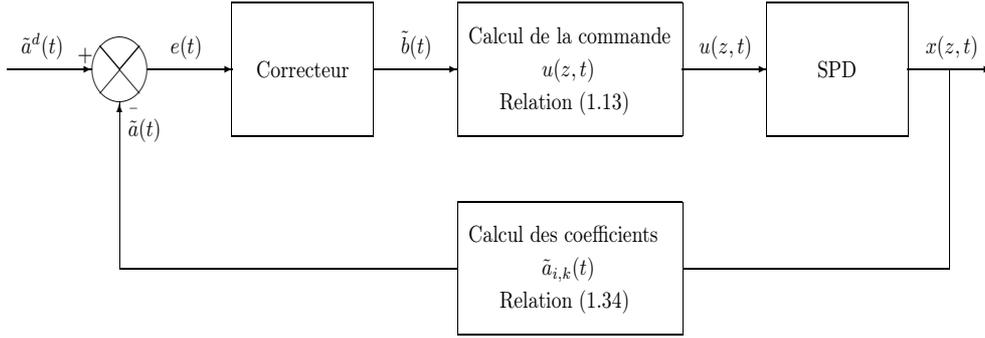


FIG. 1.3 – Principe de la stratégie de post-approximation.

où les éléments  $\tilde{a}_{i,j}$  sont obtenus à partir de la relation (1.12) comme suit :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi_{i,j}(\tilde{z}) x_i(\tilde{z}, t) d\tilde{z} &= \sum_{k=0}^N \tilde{a}_{i,j}(t) \int_0^1 \phi_{i,j}(\tilde{z}) \phi_{i,k}(\tilde{z}) d\tilde{z} \\ &= \tilde{a}_{i,k}(t) \end{aligned} \quad (1.33)$$

avec la condition initiale :

$$a_{i,k}(0) = \int_0^1 \phi_{i,k}(\tilde{z}) x_i(\tilde{z}, 0) d\tilde{z} \quad (1.34)$$

Par conséquent, le problème de commande du SPD (1.1) se réduit à la commande du SPL (1.16). Le principe algorithmique des commandes basées sur l'approximation de la solution est résumé sur la Figure 1.3. L'utilisation des méthodes des résidus pondérés est surtout intéressante lorsqu'il s'agit d'obtenir un modèle approximé suffisamment représentatif de son comportement réel, avec un nombre relativement faible de variables d'état. Néanmoins, ces méthodes nécessitent des calculs analytiques préliminaires parfois longs et complexes (intégrales, calcul variationnel).

Lorsque le problème consiste en une simple simulation du comportement dynamique du système considéré (en boucle ouverte ou fermée), mais pas en une mise en oeuvre pratique du correcteur, les méthodes d'approximation aux différences finies sont les plus indiquées. Ces dernières restent nécessaires pour l'étape de validation du modèle approximé obtenu en utilisant les méthodes d'approximation de solutions (consistant à fixer le nombre  $N$  de discrétisation de manière à réduire le modèle tout en gardant une précision suffisante). Par exemple, Rachid (1997) utilise la méthode des différences finies pour la validation d'un modèle approximé d'un biofiltre obtenu par la méthode de collocation orthogonale.

Dans le cas particulier de systèmes linéaires, la méthode des fonctions propres est plus indiquée lorsque les fonctions propres et les valeurs propres de l'opérateur différentiel sont calculables. Cette méthode est explicitée par des exemples d'application dans Babary et

Pelczewski (1985) et Ray (1989).

Les techniques de pré-approximation précédemment citées sont basées sur le modèle EDP du système. D'autres approches de pré-approximation expérimentales existent, elles sont basées sur la collecte des mesures (Graham et Kevrekidis, 1996; Hahn et Edgar, 2002). Ces dernières seront par la suite utilisées pour le calcul des fonctions tests  $\phi_{i,j}(z)$  permettant, ainsi, de construire un modèle réduit pour le système SPD.

Ces approches expérimentales nécessitent un nombre de points de mesures important, et un temps de traitement de données considérable (Liu, 2005). Parmi les plus célèbres approches, on retrouve la méthode de collocation orthogonale propre (COP), appelée encore décomposition de Karhunen-Loève (Hoo et Zheng, 2001; Zheng et Hoo, 2004) et la méthode de Krylov (Antoulas et Sorensen, 2001). Cependant, en pratique, l'acquisition des mesures est restreinte à un certain nombre de points, dont le choix de leurs emplacements constitue un épineux problème (El Jai et Pritchard, 1986; Antoniadis et Christofides, 2001; Uciński, 2004; Armaou et Demetriou, 2006), ce qui conduit à des modèles approximés rarement satisfaisants.

Une approche alternative aux mesures expérimentales, consiste à simuler le modèle EDP moyennant une méthode de différences finies en considérant un modèle de dimension très élevée (Liu, 2005), et les résultats de la simulation seront assimilés à des mesures expérimentales effectuées.

D'une manière générale, il est très difficile de préconiser une méthode de pré-approximation, car l'approximation dépend de la nature des phénomènes modélisés (Renou, 2000), de la complexité du modèle EDP, et chaque méthode nécessite le respect de certaines règles quantitatives ou qualitatives (Rachid, 1997).

L'approche de la pré-approximation présente des limitations dues essentiellement à la méthode de discrétisation utilisée, au nombre et aux positions des points de discrétisation choisis, qui influent directement sur les propriétés fondamentales intrinsèques telle que la commandabilité et l'observabilité du processus (El Jai et Pritchard, 1986; Ray, 1989; El Jai et Amouroux, 1990; Omatu et Seinfeld, 1989; Curtain et Zwart, 1995; Waldraff *et al.*, 1998; Alotaibi *et al.*, 2004; Bensoussan *et al.*, 2006; Singh et Hahn, 2007). De plus, la dimension du système approximé conduit, parfois, à des conclusions erronées en ce qui concerne la stabilité du système original en boucle ouverte ou/et en boucle fermée (Christofides, 2001).

Pour les systèmes fortement distribués essentiellement à cause des phénomènes de diffusion et de convection, l'approche de la pré-approximation limite les performances du correcteur et conduit, souvent, à des performances insuffisantes voire médiocres parfois (Christofides, 2001; Shang *et al.*, 2005).

L'approche de pré-approximation peut être adoptée pour la synthèse de la loi de commande pour les systèmes paraboliques (système diffusion-réaction), car l'utilisation des

modes principaux de l'opérateur différentiel spatial, i.e. les modes lents (valeurs propres), ce qui est toujours possible, peut permettre d'approximer correctement le modèle EDP (Armaou, 2001; Christofides, 2001).

Les valeurs propres (modes) d'un système EDP sont obtenues en résolvant le problème aux valeurs propres associé à son modèle EDP (Babary et Pelczewski, 1985; Ray, 1989). Il est ainsi possible d'obtenir une décomposition sous forme d'un système EDO de dimension finie. Le problème avec cette approche, spécialement dans le cas des systèmes EDP non linéaires, est lié au choix du nombre de modes à retenir qui fixe la dimension du système approximé et la précision de l'approximation (Bendersky et Christofides, 2000; Christofides, 2001; Liu et Jacobsen, 2004). En général, pour capturer la dynamique du modèle EDP original, cette dimension est relativement importante ce qui complique l'étape de synthèse et la mise en oeuvre du correcteur.

Les modèles obtenus par la stratégie de pré-approximation sont, en général, d'une dimension très élevée, ce qui représente une contrainte pour la conception du correcteur. Par conséquent, la conception du système de commande, basée sur la stratégie de la pré-approximation, passe inéluctablement, par l'étape de réduction de l'ordre d'un SPL (Jalali *et al.*, 2006). Ainsi, deux approches sont possibles (Evans, 2003) :

**Réduire puis concevoir** : consiste à réduire l'ordre du modèle EDO obtenu moyennant des techniques de réduction, puis à utiliser le modèle réduit pour la conception du correcteur (Kepler *et al.*, 2000; Atwell et King, 2001; Ly et Tran, 2001).

**Concevoir puis réduire** : consiste à concevoir le correcteur en utilisant le modèle EDO obtenu, puis à procéder à la réduction de l'ordre du correcteur conçu (Burns et King, 1998; Atwell et King, 2005).

Du point de vue perte de l'information liée au processus de réduction, Atwell et King (2005) recommandent l'utilisation de la deuxième approche pour la conception du correcteur pour un SPD suivant la stratégie de pré-approximation.

### 1.5.2 Stratégie de post-approximation

Dans la stratégie de post-approximation (Christofides et Daoutidis, 1996a; Wu et Liou, 2001; Shang *et al.*, 2005; Maida *et al.*, 2005, 2007, 2008c,b,a), le modèle SPD est conservé le plus longtemps possible dans l'étude et la conception de la loi de commande, c'est-à-dire que la synthèse du correcteur est faite directement à partir du modèle EDP. L'approximation sera utilisée, uniquement, au besoin de la mise en oeuvre du correcteur par approximation des solutions obtenues.

Dans le cas des systèmes hyperboliques, spécialement ceux de premier ordre (système convection-réaction), pour lesquels la séparation des modes ou valeurs propres de l'opérateur différentiel spatial en modes rapides et lents est difficile, la stratégie de pré-

approximation est fortement déconseillée, et la conception de la loi de commande doit être envisagée suivant la stratégie de post-approximation (Christofides, 2001; Shang *et al.*, 2005).

Les techniques de post-approximation utilisent souvent des théories mathématiques importantes, et parfois complexes, dues à la définition des EDP dans des espaces de fonctions (Hilbert, Sobolov ou de Banach). Ainsi, des notions d'analyse fonctionnelle (Curtain et Pritchard, 1997; Atkinson et Han, 2001) sont essentielles à la compréhension des concepts utilisés, et pour aborder les questions d'analyse et de synthèse des SPD.

Dans le cas des systèmes linéaires, un cadre de travail complet et détaillé pour l'analyse des propriétés intrinsèques et le développement de lois de commande, illustré parfaitement par des exemples d'applications, est donné par Omatu et Seinfeld (1989); El Jai et Amouroux (1990); Curtain et Zwart (1995), et Bensoussan *et al.* (2006). Les différents résultats présentés sont développés en utilisant la notion des semi-groupes (Howie, 1995; Melnikova, 2001) qui met en évidence certaines similarités entre la théorie des SPL et SPD. Les différents problèmes abordés concernent la représentation (Bensoussan *et al.*, 2006), la commandabilité, l'observabilité, la stabilité (Omatu et Seinfeld, 1989; El Jai et Amouroux, 1990; Curtain et Zwart, 1995; Bensoussan *et al.*, 2006), l'identification (Omatu et Seinfeld, 1989), l'analyse fréquentielle, la commande robuste (Curtain et Zwart, 1995) et la commande optimale (Bensoussan *et al.*, 2006; El Jai et Amouroux, 1990).

D'autres approches fréquentielles basées sur la notion de la transformée de Laplace existent dans la littérature (Friedly, 1972; Ray, 1989; Curtain et Zwart, 1995). L'utilisation de la transformée de Laplace permet de développer des modèles entrées-sorties continus et de réaliser une analyse qualitative directe de l'influence de variables externes sur le système. Ainsi, deux approches existent (Ray, 1989) : la première consiste à calculer la transformée de Laplace dans l'espace et la seconde dans le temps. Cette dernière est la plus pratique et conduit à la notion de fonction ou de matrice de transfert qui peut être étudiée par de puissants outils de l'automatique linéaire (Friedly, 1972; Curtain et Zwart, 1995). Seulement, il faut noter que les fonctions de transfert ne sont plus des rapports de deux polynômes par rapport à la variable de Laplace  $s$ , mais des rapports de fonctions non linéaires en  $s$ . Néanmoins, les fonctions de transfert obtenues peuvent être développées sous forme de séries de fonctions de transfert de polynômes (Friedly, 1972; Ray, 1989; Curtain et Zwart, 1995).

Dans le cas des SPD non linéaires, l'utilisation de la stratégie de post-approximation revient à les linéariser autour d'un point de fonctionnement afin de se ramener au cas linéaire. L'exploitation du modèle EDP non linéaire est très difficile, voire parfois impossible vu l'indisponibilité d'une théorie unifiée et générale. La commande des SPD non linéaires reste un challenge peu aisé pour la communauté d'automaticiens. Chen *et al.* (1999) donnent une synthèse sur l'état d'avancement et les résultats obtenus dans ce

cadre.

## 1.6 Système diffusion-convection-réaction

Comme cela a été mentionné précédemment, les EDP linéaires d'ordre deux sont les plus rencontrées en pratique. En effet, dans la plupart des domaines de la physique, l'écriture des équations des bilans conduit souvent à combiner les phénomènes de diffusion, de convection, et de réaction (Christofides et Daoutidis, 1996b; Renou *et al.*, 2003) et à les traduire par l'équation d'état du système diffusion-convection-réaction, donnée comme suit (à laquelle il faut bien entendu ajouter les conditions aux limites et initiales) :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = D \underbrace{\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}}_{\text{Diffusion}} - C \underbrace{\frac{\partial x(z, t)}{\partial z}}_{\text{Convection}} + \underbrace{F(x(z, t), u(z, t))}_{\text{Réaction}} \quad (1.35)$$

où  $D$  et  $C$  sont des matrices diagonales constantes, de dimension  $n \times n$  regroupant respectivement les coefficients de diffusion et de convection.  $F$  est une fonction vectorielle non linéaire.

Il est à noter que les phénomènes de diffusion et de convection ne couplent pas les variables physiques du système à l'inverse du terme de réaction. Ceci explique la forme diagonale des matrices  $D$  et  $C$ . De plus, la prise en considération des phénomènes de diffusion et de convection conduit à un SPD. Par contre, si ces deux phénomènes sont négligés, lors du processus de modélisation (écriture des bilans), ce qui revient à avoir  $D = C = 0$  dans l'équation d'état (1.35), alors le modèle prend la forme d'un SPL comprenant seulement le terme de réaction.

D'après la classification des SPD (cf. section 1.4), il ressort qu'un système convection-réaction ( $D = 0$ ) est hyperbolique, et la quasi-totalité des systèmes appartenant à cette classe (réacteur chimiques, échangeurs de chaleur) sont décrits par des équations différentielles quasi-linéaires (Christofides et Daoutidis, 1996a; Christofides, 2001), et affines par rapport à l'entrée. Par conséquent, le terme  $F$ , caractérisant le phénomène de réaction dans l'équation (1.35), prend souvent la forme :

$$F(x(z, t), u(z, t)) = f(x(z, t)) + g(x(z, t)) u(z, t) \quad (1.36)$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions vectorielles suffisamment lisses.

La suite de la thèse est consacrée à la commande de certains systèmes de cette classe

munie des conditions aux limites :

$$\begin{aligned} R_0 x(0, t) + D_0 \frac{\partial x(0, t)}{\partial z} &= l_0(t) \\ R_L x(L, t) + D_L \frac{\partial x(L, t)}{\partial z} &= l_L(t) \end{aligned} \tag{1.37}$$

de la condition initiale :

$$x(z, 0) = x_0(z); \tag{1.38}$$

où  $R_0$ ,  $R_L$ ,  $D_0$  et  $D_L$  sont des matrices constantes, et  $l_0(t)$ ,  $l_L(t)$  sont des fonctions vectorielles.

La variable de sortie du système est choisie de manière générale comme une fonction des états du système :

$$y(t) = h(x(z, t)) \tag{1.39}$$

L'objectif consiste à concevoir de lois de commande basées sur le modèle EDP, c'est-à-dire en adoptant la stratégie de post-approximation présentée dans la section 1.5.2, sans passer par une approximation préalable.

## 1.7 Simulation de système convection-réaction

Les lois de commande qu'on est appelé à développer, dans les prochains chapitres, font partie de la stratégie de post-approximation. A cet effet, l'approximation des EDP n'est envisageable que pour des objectifs de simulation en boucle fermée, c'est-à-dire que la conception de loi de commande est faite directement à partir du modèle à paramètres distribués.

Pour la mise en oeuvre et l'évaluation des performances du correcteur conçu, la méthode des lignes (semi-discrétisation par rapport à la variable d'espace  $z$ ), basée sur les différences finies, est adoptée pour toutes les simulations réalisées en boucle fermée.

La méthode des lignes (Ames, 1992; Wouwer *et al.*, 2004; Liu, 2005) est une méthode simple à mettre en oeuvre qui échappe à la complexité des calculs rencontrée en adoptant d'autres approches (méthode des fonctions propres, méthode des résidus pondérés, et les méthodes variationnelles). De plus, elle est bien adaptée pour tout type de système hyperbolique ou parabolique (Alhumaizi, 2004; Liu, 2005), et permet de valider le modèle approximé obtenu par d'autres techniques d'approximation des SPD (Rachid, 1997).

Le principe de la méthode des lignes consiste à discrétiser (Wouwer *et al.*, 2004; Liu, 2005) :

- le domaine spatial  $\Omega$  en introduisant un pas d'espace  $\Delta z$ , avec  $\Delta z = L/(N + 1) > 0$ , où  $N$  est un entier positif, représentant le nombre de points de discrétisation

considéré,

- l'opérateur différentiel spatial par un schéma numérique de différences finies stable. Ceci donne un SPL dont le vecteur d'état est de dimension  $nN$ , où l'entier  $N$  doit être suffisamment grand pour assurer une bonne approximation du modèle EDP original.

Pour le système de convection-réaction, l'approximation par la méthode des lignes, en considérant un schéma numérique de différences finies arrière à deux points (Ciarlet et Lions, 1990; Maida *et al.*, 2008c), pour l'opérateur différentiel traduisant le phénomène de convection, donne pour l'équation d'évolution (équation (1.35) avec  $D = 0$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_{i,j}(t)}{\partial t} &= \frac{\partial x_i(z_j, t)}{\partial t} \\ &= -\frac{C_{i,i}}{\Delta z} [x_i(z_j, t) - x_i(z_{j-1}, t)] + F(x(z_j, t), u(z_j, t)), \end{aligned} \quad (1.40)$$

pour les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} R_0 x(0, t) + \frac{D_0}{\Delta z} [x(\Delta z, t) - x(0, t)] &= l_0(t) \\ R_L x(L, t) + \frac{D_L}{\Delta z} [x(L, t) - x(L - \Delta z, t)] &= l_L(t) \end{aligned} \quad (1.41)$$

et pour la condition initiale :

$$x_i(z_j, 0) = x_{i_0}(z_j); \quad (1.42)$$

avec  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, N$ , et  $z_j = j \Delta z \in \Omega$ . Le coefficient  $C_{i,i}$  représente le  $i$ -ème élément diagonal de la matrice  $C$ .

Notons que pour tenir compte des conditions aux limites, définies aux frontières du domaine spatial  $\Omega$  ( $\partial\Omega$ ), le schéma numérique de discrétisation nécessite souvent une adaptation aux points  $j = 1$  et  $j = N$ .

En intégrant les équations (1.41) dans le modèle discrétisée (1.40), et après arrangement des résultats, le modèle discrétisé final (EDO) se met sous la forme (1.10).

## 1.8 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à des généralités sur des SPD. L'objectif est de passer en revue les différentes approches de commande utilisées pour la commande des SPD, tout en présentant les notions utiles pour la suite de la thèse.

En effet, plusieurs systèmes réels sont décrits par un modèle à paramètres distribués de nature hyperbolique ou parabolique. Une classe importante de ces modèles est formée par les systèmes de type convection-diffusion-réaction.

Dans le domaine de la commande des SPD, l'étude de type des EDP modélisant le

SPD constitue le point de départ pour toute conception du correcteur. Ainsi, si la stratégie de post-approximation est bien adaptée pour la commande des SPD de type quelconque, la stratégie de pré-approximation peut être adoptée seulement dans le cas des systèmes hyperboliques mais combinée avec des techniques de réduction de l'ordre du modèle ODE, obtenu par approximation du modèle EDP, ou celui du correcteur.

Toutefois, l'utilisation directe des modèles distribués (stratégie de post-approximation) reste prometteuse, et la plus privilégiée, car ces modèles sont beaucoup plus proches de la physique du système, et traduisent correctement son comportement dynamique. Cette stratégie de commande constitue, actuellement, un axe de recherche actif, et les efforts sont focalisés notamment sur la commande de systèmes convection-réaction, principalement de nature hyperbolique, qu'on rencontre, le plus souvent, dans les applications industrielles essentielles. Ainsi, la nécessité de les placer dans les meilleures conditions opératoires possibles incite à prendre en compte leur caractère distribué à fin d'améliorer leur efficacité. C'est dans cette optique que s'inscrivent les études présentées dans les chapitres suivants.

# Chapitre 2

## Optimisation contrainte d'une Commande PI Floue d'un Échangeur de Chaleur

### 2.1 Introduction

Un échangeur de chaleur est un dispositif permettant de transférer de l'énergie thermique d'un fluide vers un autre, sans les mélanger. Le flux thermique traverse la surface d'échange qui sépare les fluides. La plupart du temps, on utilise cette méthode pour refroidir ou réchauffer un fluide qui ne peut pas ou qui est difficile à refroidir ou chauffer directement.

Dans le milieu industriel, l'échangeur de chaleur est un élément essentiel de toute politique de maîtrise de l'énergie. L'énergie thermique utilisée dans les procédés industriels transite au moins une fois par un échangeur de chaleur. Ces systèmes sont utilisés, en particulier, dans les industries chimiques, pétrochimiques, agroalimentaires, etc.

Sur le plan de l'investissement et de la qualité, les avantages des échangeurs de chaleur ne sont plus à démontrer. Néanmoins, ces derniers sont fréquemment conçus pour un fonctionnement en boucle ouverte, si bien que les performances attendues se dégradent rapidement avec le temps d'où la nécessité de les remplacer à chaque fois, ce qui entraîne un impact négatif sur le plan économique (Xia, et al., 1991). Par conséquent, la commande de ces derniers s'impose comme la solution alternative et adéquate.

La commande de l'échangeur de chaleur a attiré l'attention de plusieurs chercheurs, et plusieurs approches de commande ont été développées. Ces dernières diffèrent dans leur principe, dans le modèle utilisé pour la synthèse du correcteur, et par les hypothèses faites sur les variables caractéristiques de l'échangeur. La consultation de l'abondante littérature traitant ce sujet, montre que les contributions se partagent entre la stratégie de pré-approximation (Davison *et al.*, 1980; Katayama *et al.*, 1990; Dugdale et Wen,

2002; Alvarez-Ramirez *et al.*, 1997; Malleswararao et Chidambaram, 1992; Abdelghani-Idrissi *et al.*, 2001)), et la stratégie de post-approximation (Christofides et Daoutidis, 1996a; Christofides, 2001; Shang *et al.*, 2005; Maida *et al.*, 2007, 2008c,a). De plus, toutes les approches proposées sont d'approche algorithmique, c'est-à-dire basée sur un modèle mathématique.

Dans ce chapitre, la stratégie de post-approximation est adoptée pour concevoir une commande PI floue pour un échangeur de chaleur. L'idée de base consiste à concevoir un correcteur flou qui minimise un certain critère de performance en se basant sur le modèle EDP de l'échangeur. Ainsi, le chapitre commence par la description de l'échangeur de chaleur et la structure générale d'un correcteur flou, puis une approche d'optimisation sous contraintes d'une commande PID Floue est proposée. Cette dernière est illustrée, à la fin du chapitre, par une application sur l'échangeur de chaleur. L'objectif consiste à optimiser un correcteur PI Flou contrôlant une température obtenue par moyennage spatiale en faisant varier la température de l'enveloppe supposée répartis uniformément et homogène. La suite du chapitre est réservée pour l'évaluation des performances du correcteur synthétisé.

## 2.2 Modèle dynamique de l'échangeur de chaleur

Le comportement dynamique de l'échangeur de chaleur est souvent décrit par un modèle basé sur des équations aux dérivées partielles (EDP) qui prend des formes différentes selon les hypothèses retenues lors la phase de modélisation. Ainsi, si le phénomène de diffusion est négligé, ce qui est le cas le plus fréquent, alors le modèle de l'échangeur est linéaire de type convection-réaction.

Le modèle de l'échangeur de chaleur, qui fera l'objet d'étude dans ce présent chapitre, est présenté dans la section suivante en négligeant le phénomène de diffusion.

### 2.2.1 Description de l'échangeur de chaleur

Un fluide de densité constante  $\rho$  et de capacité calorifique  $C_p$  traverse le tube interne d'un échangeur thermique tubulaire, de longueur  $L$ , avec une vitesse constante  $v(t)$  (Figure 2.1). Ce fluide rentre à une température  $T_0(t)$  et échange de la chaleur à travers une paroi métallique avec le deuxième fluide, circulant à l'intérieur de l'enveloppe, dont la température  $T_e(t)$  est supposée homogène et distribuée uniformément le long de l'échangeur. A la sortie de l'échangeur, le fluide interne sort à une température  $T_L(t)$ . La température  $T(z, t)$  du fluide à l'intérieur du tube est non homogène, c'est-à-dire qu'elle dépend de la position spatiale sur toute la longueur de l'échangeur. De plus, elle dépend du temps en supposant que la température  $T_0(t)$  à l'entrée de l'échangeur varie.

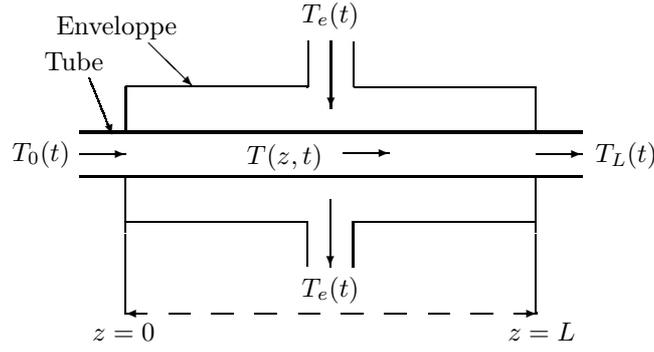


FIG. 2.1 – Echangeur de chaleur à température d’enveloppe homogène.

Dans cette étude, la section  $S_t$  du tube interne et la surface utilisée pour le transfert de chaleur  $S$ , par unité de longueur, sont supposées constantes. De même pour la section de l’enveloppe.

### 2.2.2 Modèle de l’échangeur de chaleur

En tenant compte des hypothèses de la section précédente, l’écriture du bilan d’énergie pour le tube interne de l’échangeur de chaleur conduit à l’équation aux dérivées partielles (EDP) linéaire suivante (Ray et Ogunnaike, 1994) :

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = -v(t) \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} + a [T_e(t) - T(z, t)] , \quad a = \frac{h_t S}{\rho S_t C_p} . \quad (2.1)$$

où  $a$  est le coefficient de transfert de chaleur, et  $h_t$  est le coefficient de transfert de chaleur global. Pour avoir un modèle complet, l’EDP (2.1) requiert une condition aux limites, et une condition initiale. La condition aux limites est habituellement spécifiée à  $z = 0$  puisque la température du fluide interne à l’entrée est, en général, connue et mesurable. Ce qui donne, à  $z = 0$ , une condition aux limites de Dirichlet :

$$T(0, t) = T_0(t), \quad (2.2)$$

tandis que la condition initiale (à  $t = 0$ ) est un profil de température donné :

$$T(z, 0) = T^*(z). \quad (2.3)$$

Le modèle de l’échangeur de chaleur est une EDP linéaire, qui a pour variables caractéristiques : la température  $T(z, t)$  comme l’état du système, la température du fluide à l’entrée de l’échangeur  $T_0(t)$  comme perturbation, et la température homogène de l’enveloppe  $T_e(t)$  comme commande. Cette dernière est considérée homogène et distribuée

uniformément le long de l'échangeur (cf. relation 1.5), par conséquent :

$$T_e(z, t) = b(z) T_e(t) \quad (2.4)$$

où  $b(z) = 1$  puisque la température de l'enveloppe est supposée homogène.

Dans la présente étude, l'objectif consiste à commander la température moyenne  $T_m(t)$ , obtenue par moyennage spatial, du fluide à l'intérieur du tube en manipulant la température de l'enveloppe  $T_e(t)$ . Par conséquent, la sortie à commander prend la forme (cf. la relation 1.8) (Maidi *et al.*, 2008c) :

$$\begin{aligned} T_m(t) &= \mathcal{C}(T(z, t)) \\ &= \int_{\Omega} c(z) T(z, t) dz \end{aligned} \quad (2.5)$$

où  $\Omega = [0, L]$ , et la fonction  $c(z)$  caractérisant la géométrie du capteur est, en général, de la forme  $1/L$  (Christofides et Daoutidis, 1996a; Christofides, 2001).

Pour répondre à cet objectif de commande, on propose d'utiliser un correcteur PI Flou. Avant de présenter la démarche de synthèse, on commence d'abord par un bref rappel sur la commande floue. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à des ouvrages spécialisés (par exemple Yager et Filev (1994); Reznik (1997); Zhanga et Liu (2006), et de Jantzen (2007)).

## 2.3 Structure générale d'un correcteur flou

Une loi de commande est habituellement conçue en utilisant un modèle mathématique du système. Cependant, dans l'hypothèse où le modèle mathématique du système est complexe et difficile à exploiter (cas des modèles EDP) pour l'analyse et la synthèse, la commande par logique floue se présente comme une alternative intéressante. En effet, la loi de commande est exprimée avec des règles linguistiques, déduites des informations énoncées dans un langage naturel traduisant le fonctionnement du système ou la stratégie de pilotage utilisée par un opérateur.

Le domaine de la commande par logique floue a littéralement explosé suite à la publication des travaux de Mamdani sur un système de commande floue pour une machine à vapeur (Mamdani et Assilian, 1975). Il est quasiment impossible de dresser un bilan de la commande floue à un moment où les travaux se multiplient et des théories se développent de plus en plus en parallèle avec l'approche conventionnelle (algorithmique). Les ouvrages de Yager et Filev (1994); Reznik (1997); Passino et Yurkovich (1997); Zhanga et Liu (2006), et de Jantzen (2007) constituent des ouvrages de références dans le domaine. Ces ouvrages regroupent un ensemble de théories et d'applications, et retracent parfaitement

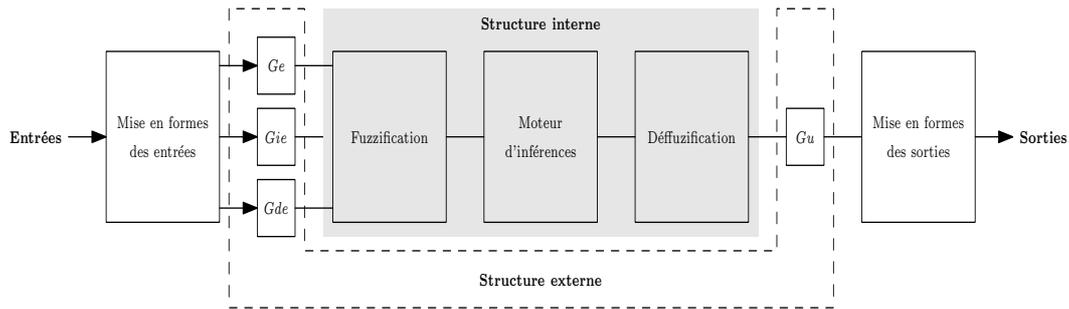


FIG. 2.2 – Structure d'un correcteur flou.

le développement de la commande floue appuyé par des références bibliographiques. En plus des ouvrages dédiés à ce domaine, on retrouve des journaux spécialisés (par exemple *Fuzzy Sets and Systems*, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*).

En général, les correcteurs flous sont utilisés dans les structures de commande en boucle fermée des systèmes. Les variables caractéristiques du système à commander définissent les variables du correcteur. Les variables caractéristiques sont, en général, les grandeurs de sortie du système à commander et, le cas échéant, d'autres mesures déterminantes pour saisir l'évolution dynamique du système. Les variables de sortie du correcteur flou sont les commandes appliquées au système. La configuration de base du correcteur flou est donnée par la Figure (2.2), dans laquelle, on distingue deux structures (Yager et Filev, 1994) :

**Structure interne** : dans la structure interne, on retrouve les blocs suivants :

- *Fuzzification* : permet de passer du domaine réel au domaine flou. Elle consiste à déterminer le degré d'appartenance d'une valeur (mesurée par exemple) à un ensemble flou. Ce dernier est défini par sa fonction d'appartenance qui correspond à la notion de fonction caractéristique en logique classique.
- *Inférences* : cette phase simule la prise de décision à partir des règles floues par une procédure de chaînage avant des propositions (activation des règles par les prémisses). L'implication et l'inférence floues sont associées pour définir l'ensemble flou caractérisant la commande. Une règle floue est de type :

**SI** *prédicat* **ALORS** *conclusion*

Un prédicat est une combinaison de propositions par des opérateurs ET, OU, et NON. La conclusion d'une règle floue est une combinaison de propositions liées par des opérateurs ET. Notons que, le mécanisme d'inférence le plus couramment utilisé est celui de Mamdani (Jantzen, 2007).

- *Défuzzification* : à la fin de l'inférence, l'ensemble flou de sortie est déterminé mais n'est pas directement utilisable pour donner une information précise au système d'actionneur. Il est nécessaire de passer du mode flou au mode réel, c'est la défuzzification. Il existe plusieurs méthodes de défuzzification, mais la

méthode du centre de gravité est plus utilisée et recommandée vu ses avantages par rapport à ces concurrentes. Cette méthode consiste à calculer le centre de gravité de l'ensemble flou, caractériser par une fonction d'appartenance, résultant de l'agrégation des ensembles flous obtenus pour chacune des règles concernant la sortie en question.

**Structure externe :** elle comprend les paramètres d'adaptations d'entrée  $Ge$ ,  $Gie$  et  $Gde$  et de sorties  $Gu$  du correcteur flou associés respectivement à l'erreur, à l'intégrale de l'erreur, à la dérivée de l'erreur, au signal de commande. Le réglage de ces paramètres constitue la phase la plus importante dans la conception du correcteur flou (Yager et Filev, 1994; Passino et Yurkovich, 1997; Reznik, 1997; Tang *et al.*, 2001; Zhanga et Liu, 2006). Ces paramètres affectent considérablement les performances en boucle fermée (Yager et Filev, 1994; Hu *et al.*, 1999; Tang *et al.*, 2001; Jantzen, 2007), et la caractéristique du correcteur flou (Yager et Filev, 1994; Gómez-Ramírez, 2007). En effet, chaque variation des paramètres d'adaptions d'entrée entraîne l'activation d'un certain ensemble de règles floues, ceci se traduit par un certain effet sur le comportement dynamique des sorties commandées. De même, la variation du paramètre d'adaptation de sorties affecte directement l'amplitude de la commande appliquée. Plusieurs techniques de réglage, en ligne ou hors ligne, ont été proposées dans la littérature, et la quasi-totalité repose sur une analogie avec les correcteurs PID classiques (voir par exemple Moon, 1995; Hu *et al.*, 1999; Woo *et al.*, 2000; Tang *et al.*, 2001; Carvajal *et al.*, 2000; Yesil *et al.*, 2004, et leurs références). Yager et Filev (1994) donne certaines recommandations, intéressantes, pour le réglage du correcteur flou qui permettent d'avoir plus ou moins les performances souhaitées. Ces règles sont déduites des constatations faites sur l'influence de chaque paramètre sur les performances en boucle fermée.

La mise en œuvre du correcteur flou nécessite les deux opérations suivantes :

- *mise en formes des entrées* : par le traitement des variables d'entrée. En particulier, certaines grandeurs sont associées pour calculer des erreurs (différences entre les sorties et les consignes désirées), les intégrales, et les dérivées des erreurs. Très souvent, la dynamique des variables est normalisée sur l'univers de discours.
- *mise en forme des variables de sorties* : elle consiste à traiter chaque commande appliquée afin de définir la dynamique des commandes (leur univers de discours est souvent normalisé), et d'obtenir des effets de commande particuliers par une combinaison des trois actions : proportionnelle, intégrale, et dérivée.

## 2.4 Commande PI floue de l'échangeur de chaleur

La logique floue connaît un intérêt grandissant auprès de la communauté scientifique depuis quelques années, particulièrement dans le domaine de la commande où on assiste à un énorme développement de stratégie de commande floue (Wang, 1996). L'une des raisons principales tient à l'énorme succès des applications réalisées à base des régulateurs flous sur des systèmes complexes (Bai *et al.*, 2006). Cependant, la plupart des travaux sont focalisés sur la commande des SPL. Pour ce qui est de systèmes à paramètres distribués (SPD), peu de contributions peuvent être trouvées dans la littérature (Sooraksa et Chen, 1998; Sagias *et al.*, 2001; Lin et Lewis, 2003; Li *et al.*, 2007).

Sooraksa et Chen (1998); Sagias *et al.* (2001), et Lin et Lewis (2003) proposent des stratégies de commande floue pour des systèmes particuliers, à solution séparables (robots et réacteur tubulaire), dont la synthèse du système de commande passe par une pré-approximation du modèle EDP par un modèle EDO obtenu par les méthodes des résidus pondérés (Sagias *et al.*, 2001) ou par la méthode de fonctions propres (Sooraksa et Chen, 1998; Lin et Lewis, 2003).

La commande floue basée sur la stratégie de post-approximation est un axe au stade du balbutiement. Ainsi, en introduisant le nouveau concept de sous-ensembles flous à trois dimensions, Li *et al.* (2007) proposent une méthodologie pour la commande des SPDs illustrée par une application portant sur la commande d'un réacteur chimique. Ce travail reste l'une des rares références sur la commande floue des SPD basée sur le modèle EDP.

La suite de ce chapitre, s'inscrit dans cette optique, où une approche pour l'optimisation d'une commande PID floue d'un SPD, basée sur le modèle EDP, sera développée. Cette dernière sera appliquée pour la synthèse d'un correcteur PI Flou optimal pour la commande de la température moyenne, à l'intérieur de l'échangeur de chaleur, en manipulant la température de l'enveloppe. L'approche proposée repose sur l'utilisation des relations liant les paramètres d'un correcteur PID classiques et ceux du correcteur flou.

En effet, un correcteur flou possède des propriétés intéressantes. Ce type de correcteur permet de concevoir des commandes non linéaires qui sont réputées robustes. Toutefois la conception d'un correcteur flou passe souvent par des tests de type essai-erreur ou par des analogies avec des techniques classiques. Pour la structure interne, des recommandations existent dans la littérature concernant le choix des fonctions d'appartenance, du nombre d'ensembles flous, du mécanisme de traitement des règles floues, et la déffuzification. Par contre, le réglage des paramètres d'adaptation constitue une tâche ardue vu l'absence d'outils théoriques et de méthodologies de réglage (Hu *et al.*, 1999; Tang *et al.*, 2001; Gómez-Ramírez, 2007).

Ainsi, dans le cas du correcteur PID flou, des réglages de paramètres d'adaptation en fonction de ceux d'un correcteur PID classique ont été établis et corroborés par des

applications (Jantzen, 2007). Cette démarche est intéressante vu que les réglages d'un correcteur PID classique sont toujours disponibles, pour la plupart des systèmes industriels, et que le PID reste le correcteur le plus utilisé dans l'industrie, permettant de commander la grande majorité des procédés (Issaksson et Graebe, 1999; Visioli, 2006).

Ces relations de passage sont déterminées par la procédure générale suivante :

La sortie agissante  $u(t)$  du correcteur PID est liée à l'écart observé entre la sortie commandée  $y(t)$  et la consigne désirée  $y^d(t)$ , noté  $e(t) = y^d(t) - y(t)$ , par :

$$u(t) = K_c \left( e(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t e(\xi) d\xi + \tau_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (2.6)$$

où  $K_c$ ,  $\tau_I$ , et  $\tau_d$  sont les paramètres de réglages du correcteur PID classique.

Sous la forme discrète, le correcteur PID (2.6) prend la forme :

$$u(k) = K_c \left( e(k) + \frac{\Delta t}{\tau_I} \sum_{i=0}^k e(i) + \frac{\tau_d}{\Delta t} [e(k) - e(k-1)] \right) \quad (2.7)$$

où  $\Delta t$  est la période d'échantillonnage.

De même, le correcteur PID Flou est toujours de forme discrète, et sa sortie agissante  $u(k)$  est liée à l'écart observé entre la sortie commandée  $y(k)$  et la consigne désirée  $y^d(k)$  par :

$$u(k) = f_{\text{Flou}} \left( Ge, Gie, Gde, Gu, e(k) \right) \quad (2.8)$$

où  $f_{\text{Flou}}$  est la caractéristique du correcteur PID Flou, généralement non linéaire. Toutefois, par des choix judicieux au niveau de la structure interne une caractéristique linéaire peut être obtenue (Jantzen, 2007) . Dans la suite de cette étude cette caractéristique est supposée linéaire.

En effet, par identification de la fonction de transfert discrétisée du PID classique (2.7) avec la caractéristique linéaire du PID Flou (2.8), on arrive à établir les relations liant les différents paramètres des deux correcteurs de forme générale (Jantzen, 2007) :

$$\mathbf{f}(Ge, Gie, Gde, Gu, K_c, \tau_I, \tau_d) = 0 \quad (2.9)$$

où  $\mathbf{f}$  est une fonction vectorielle.

Par conséquent, des relations de passages peuvent être établies entre les paramètres des deux correcteurs.

Ces relations de passage sont parfaitement documentées dans Jantzen (2007), et résumées dans le Tableau 2.1 pour les différents types du correcteur PID Flou. La démarche de détermination de ces relations (la fonction  $\mathbf{f}$ ) dans le cas du PI Flou, utilisée pour

Correcteur flou	$K_c$	$\frac{1}{\tau_I}$	$\tau_D$
P	$Gde.Gu$	–	–
PI	$Ge.Gu$	$\frac{Ge}{Gde}$	–
PD	$Ge.Gu$	–	$\frac{Gde}{Gu}$
PID	$Ge.Gu$	$\frac{Gie}{Ge}$	$\frac{Gde}{Ge}$

TAB. 2.1 – Relations de passage entre les paramètres d’adaptation du correcteur Flou et les réglages du correcteur PID classique.

commander l’échangeur de chaleur, est explicitée dans la section 2.4.3.

### 2.4.1 Optimisation des paramètres d’adaptation d’un correcteur PID Flou

La synthèse d’un système de commande repose sur la minimisation d’un critère de performance qui définit le but de la commande. Le choix d’un objectif est donc un aspect déterminant du processus de synthèse, et il est important, si l’on veut que le problème de commande soit intéressant, de retenir un critère qui pose le problème de la robustesse en performance. Plusieurs critères existent qui peuvent être classés en fonction de leurs caractéristiques propres qui déterminent le critère à choisir pour être minimisé (Corriou, 2003, 2004).

L’approche proposée pour l’optimisation des paramètres d’adaptation du correcteur PID flou est basée sur la minimisation de l’un des critères d’intégrale d’erreur sortie-consigne, qui prennent en compte la totalité de la réponse du système. Ainsi, en boucle fermée, la valeur de l’erreur  $e(t)$ , entre la consigne désirée  $y^d(t)$  et la sortie  $y(t)$ , est dépendante des réglages du correcteur, et il en est de même pour le critère de performances à minimiser. Par conséquent, dans le cas d’un correcteur flou, le critère s’écrit :

$$\mathcal{J}(Ge, Gie, Gde, Gu) = \int_0^{+\infty} \varphi(e(t), t) dt \quad (2.10)$$

où

$$\begin{aligned} e(t) &= y^d(t) - y(t) \\ &= \psi(Ge, Gie, Gde, Gu, t). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ainsi, en considérant les paramètres  $Ge$ ,  $Gie$ ,  $Gde$ , et  $Gu$  du correcteur flou comme

des variables de décision, et le critère à minimiser  $\mathcal{J}$  comme fonction objectif, le problème de synthèse revient à résoudre le problème d'optimisations avec contrainte suivant :

$$\min_{Ge, Gie, Gde, Gu} \mathcal{J}(Ge, Gie, Gde, Gu) \quad (2.12)$$

sujet à la contrainte donnée par le modèle du système à commander.

Cependant, il est astucieux d'intégrer les relations de passage (2.9) comme des contraintes pour le problème d'optimisation sans contraintes (2.12) pour simplifier la synthèse du correcteur flou. En effet, comme les contraintes sont de type égalité, il est facile de démontrer que l'introduction de ces dernières simplifie davantage le problème d'optimisation final à résoudre, puisque le nombre de variables de décision se réduit à une seule variable quelque soit le type du correcteur flou considéré. Ceci permet de restreindre le domaine de recherche de la solution du problème d'optimisation final formulé qui peut être obtenue numériquement.

## 2.4.2 Application à la commande de l'échangeur de chaleur

Pour régler la température moyenne  $T_m(t)$  du fluide à l'intérieur du tube de l'échangeur, à une température désirée  $T_m^d(t)$ , on propose de concevoir un correcteur PI Flou qui minimise le critère de l'Intégrale du Carré de l'Erreur (ICE), c'est-à-dire

$$\varphi(e(t), t) = e^2(t) \quad (2.13)$$

avec  $e(t) = T_m^d(t) - T_m(t)$ .

La première étape de conception du PI Flou consiste à synthétiser un correcteur PI classique pour le même problème de commande. Comme le modèle de l'échangeur de chaleur est un système de dimension infinie, l'approximation de ce dernier donne sur un SPL d'ordre très élevé inexploitable pour la détermination des paramètres de réglage du PI classique (Xia *et al.*, 1991; Bandyopadhyay *et al.*, 1998; Issaksson et Graebe, 1999). Par conséquent, il est pratique de procéder par minimisation du même critère (2.13), c'est-à-dire de déterminer la solution du problème d'optimisation suivant (Maidi *et al.*, 2008c) :

$$\min_{K_c, \tau_I} \left\{ \int_0^{+\infty} e^2(t) dt \right\} \quad (2.14)$$

soumis à :

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} + v(t) \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} - a \left[ K_c \left( e(\xi) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t e(\xi) d\xi \right) - T(z, t) \right] = 0 \quad (2.15)$$

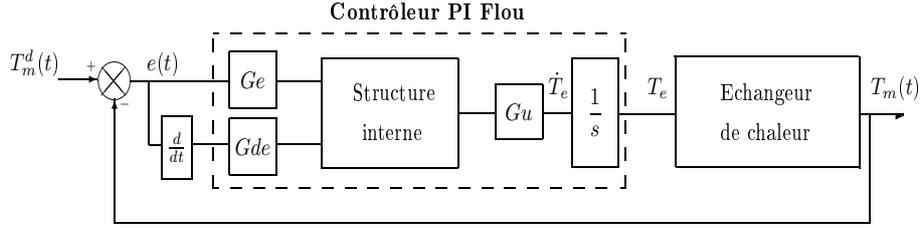


FIG. 2.3 – Commande PI Flou de l'échangeur de chaleur.

Désignation	Symbole	Valeur
Coefficient de transfert de chaleur	$a$	$2.92 \text{ s}^{-1}$
Longueur de l'échangeur	$L$	1 m
Vitesse du fluide	$v$	$1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Condition initiale	$T(z, 0)$	$25^\circ\text{C}$
Condition aux limites	$T(0, t)$	$25^\circ\text{C}$
Consigne désirée	$T_m^d(t)$	$50^\circ\text{C}$

TAB. 2.2 – Paramètres de l'échangeur de chaleur et conditions de simulation.

avec  $e(t) = T_m^d(t) - \int_{\Omega} c(z) T(z, t) dz$ .

Ainsi, en considérant pour paramètres de l'échangeur et conditions de simulation les données résumées dans le Tableau 2.2, la résolution numérique du problème d'optimisation (2.14–2.15) conduit aux réglages suivants :

$$K_c = 0.4951, \quad \tau_I = 0.0377 \text{ s} \quad (2.16)$$

Rappelons que la simulation du modèle de l'échangeur de chaleur (2.1), en boucle fermée, est réalisée par approximation de ce dernier par la méthode des lignes, présentée dans la section 1.7, en considérant un nombre de points de discrétisation  $N = 80$  qui assure une bonne approximation du comportement dynamique du modèle EDP.

### 2.4.3 Commande PI Flou de l'échangeur de chaleur

Après avoir déterminé les paramètres  $K_c$  et  $\tau_I$ , on passe à la conception du correcteur PI Flou. La stratégie de commande adoptée est donnée par la Figure 2.3. De cette dernière, il ressort que l'étape de mise en forme des entrées se résume dans le calcul de l'erreur  $e(t)$  et de sa vitesse de variation  $\dot{e}(t)$ . L'étape de mise en forme des sorties consiste à calculer l'intégrale de la vitesse de variation  $\dot{T}_e(t)$  du signal de commande.

Au niveau de la structure interne, les fonctions d'appartenance choisies pour les variables caractéristiques du correcteur flou ( $e(t)$ ,  $\dot{e}(t)$ , et  $\dot{T}_e(t)$ ) sont données par la Figure 2.4. Leurs univers de discours sont décomposés en cinq sous-ensembles flous (NG :

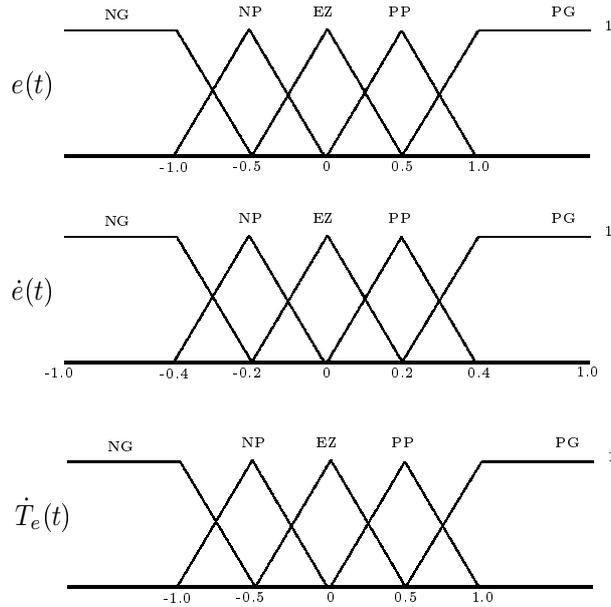


FIG. 2.4 – Fonctions d'appartenance.

$\dot{T}_e$	$e$					
	NG	NP	EZ	PP	PG	
NG	NG	NG	NG	NP	EZ	
NP	NG	NG	NP	EZ	PP	
$\dot{e}$	EZ	NG	NP	EZ	PP	PG
PP	NP	EZ	PP	PG	PG	
PG	EZ	PP	PG	PG	PG	

TAB. 2.3 – Règles floues.

Négatif Grand, NP : Négatif Petit, EZ : Environ Zéro, PP : Positif Petit, et PG : Positif Grand). Les règles floues du bloc d'inférences, traitées par le mécanisme de Mamdani, sont résumées dans le Tableau 2.3. La grandeur de sortie du correcteur flou est générée par la méthode de centre de gravité. Pour le réglage des paramètres d'adaptation, on considère la minimisation du même critère de performances (2.14) soumis aux contraintes définies par les relations liant les paramètres du correcteur PI classique à son équivalent Flou déduite comme suit :

En considérant que la caractéristique du correcteur PI Flou donnée dans la Figure 2.3

est linéaire, il vient :

$$\begin{aligned}
u(k) &= \sum_{i=1}^k f_{\text{Flou}} \left( Ge, Gde, e(i), \dot{e}(i) \right) \cdot Gu \cdot \Delta t \\
&= \sum_{i=1}^k \left[ Ge e(i) + Gde \dot{e}(i) \right] \cdot Gu \cdot \Delta t \\
&= \sum_{i=1}^k \left[ Ge e(i) + Gde \frac{(e(i) - e(i-1))}{\Delta t} \right] \cdot Gu \cdot \Delta t \\
&= \left[ Ge \sum_{i=1}^k e(i) \Delta t + Gde \sum_{i=1}^k (e(i) - e(i-1)) \right] \cdot Gu \\
&= \left[ Ge \cdot Gu \cdot \Delta t \sum_{i=1}^k e(i) + Gde \cdot Gu \cdot e(k) \right] \\
&= Gde \cdot Gu \left[ \frac{Ge}{Gde} \cdot \Delta t \sum_{i=1}^k e(i) + e(k) \right] \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Par identification de la relation (2.17) avec celle du correcteur PI classique, en posant  $\tau_d = 0$ , dans la relation (2.7), on retrouve les relations de passage du Tableau 2.1 associées au cas d'un PI Flou.

Ainsi, le problème de synthèse du correcteur PI Flou revient à résoudre le problème d'optimisation avec contraintes suivant (Maidi *et al.*, 2008c) :

$$\min_{Ge, Gde, Gu} \mathcal{J}(Ge, Gde, Gu) \tag{2.18}$$

soumis à :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} + v(t) \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} - a \times \\
&\left[ Gde \cdot Gu \left( e(\xi) + \frac{Ge}{Gde} \int_0^t e(\xi) d\xi \right) - T(z, t) \right] = 0 \\
&Gde \cdot Gu - K_c = 0 \\
&Ge \cdot \tau_I - Gde = 0
\end{aligned} \tag{2.19}$$

L'introduction des relations de passage considérées comme des contraintes pour le problème d'optimisation (2.18) permet de simplifier le problème d'optimisation formulé en réduisant le nombre de variables de décision. En effet, puisque les paramètres  $K_c$  et  $\tau_I$  sont connus, des relations de contraintes (2.19), on tire :

$$Ge = \frac{Gde}{\tau_I}, \quad Gu = \frac{K_c}{Gde} \tag{2.20}$$

En substituant ces expressions dans la fonction objectif (2.18), le problème d'optimisation (2.18) se simplifie et devient (Maidi *et al.*, 2008c) :

$$\begin{aligned} \min_{Gde} \mathcal{J} \left( \frac{Gde}{\tau_I}, Gde, \frac{K_c}{Gde} \right) &= \min_{Gde} \hat{\mathcal{J}}(Gde) \\ &= \min_{Gde} \left\{ \int_0^{+\infty} \left[ T_m^d(t) - \int_{\Omega} c(z) T(z, t) dz \right]^2 dt \right\} \end{aligned} \quad (2.21)$$

soumis à :

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} + v(t) \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} - a \left[ K_c \left( e(\xi) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t e(\xi) d\xi \right) - T(z, t) \right] = 0 \quad (2.22)$$

avec l'erreur  $e(t) = T_m^d(t) - \int_{\Omega} c(z) T(z, t) dz$  qui dépend implicitement de la variable d'optimisation ou de décision  $Gde$ .

De ce qui précède, il est clair que l'introduction des contraintes a simplifié le problème d'optimisation du PI Flou, posé avec trois variables de décision en réduisant leur nombre à une seule variable. En suivant le même raisonnement, pour les autres types du correcteur, on démontre facilement que la synthèse du correcteur PID flou optimal, suivant la démarche proposée, se réduit à la minimisation d'une fonction objectif d'une seule variable. Ceci représente un avantage appréciable puisque la résolution numérique ou analytique du problème d'optimisation final devient très simple.

La résolution numérique du problème d'optimisation (2.21–2.22) a été réalisée pour les mêmes conditions de simulation du Tableau 2.2, et donne comme solution optimale :

$$Gde = 2.82 \times 10^{-4},$$

et les relations (2.16) et (2.20) fournissent :

$$Ge = 75 \times 10^{-4}, \quad Gu = 1.7557 \times 10^4.$$

#### 2.4.4 Évaluation des performances des correcteurs

Pour évaluer les performances des deux correcteurs, PI classique et flou, des tests de simulation ont été réalisés. Ces derniers concernent les problèmes de poursuite de consigne et de rejet de la perturbation.

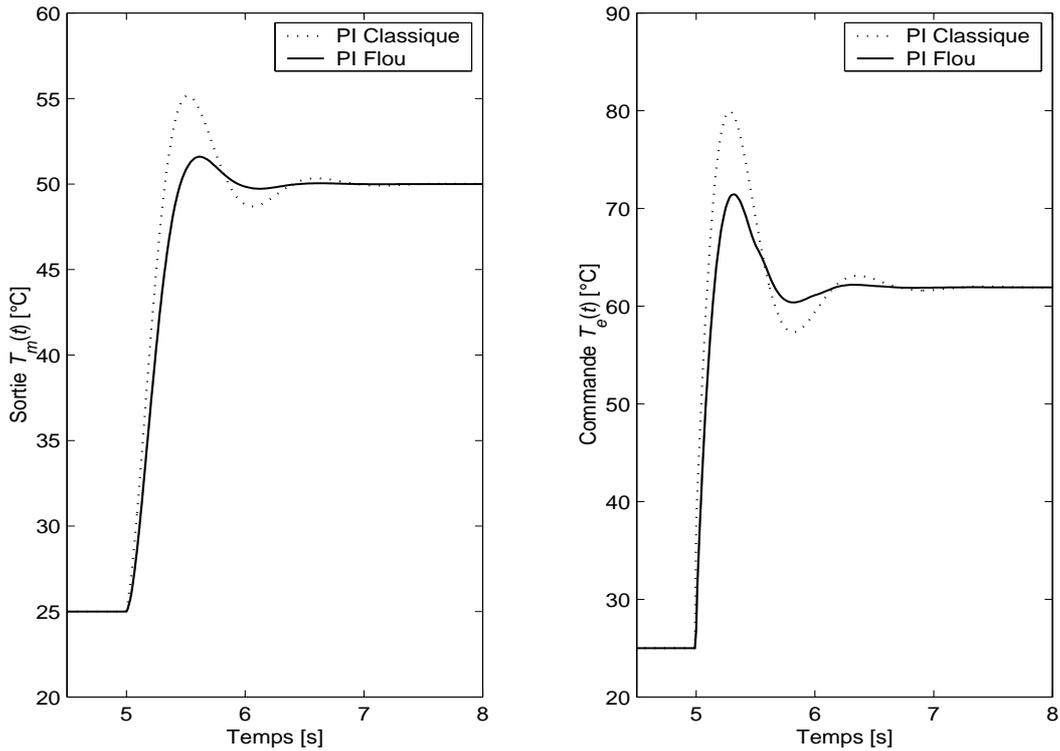


FIG. 2.5 – Poursuite de consigne.

## Poursuite de consigne

Pour le test de la poursuite de consigne, un échelon de consigne d'amplitude de  $25^{\circ}\text{C}$  ( $y_m^d(t) = 50^{\circ}\text{C}$ ) a été imposé à l'instant  $t = 5$  s. La Figure 2.5 donne la variation de la température moyenne  $T_m(t)$ , et celle de l'enveloppe  $T_e(t)$ . On constate que les deux correcteurs assurent une poursuite très correcte de la consigne imposée, avec des variations physiquement admissibles de la grandeur manipulée  $T_e(t)$ . Néanmoins, l'examen des résultats obtenus, montre que, dans le cas du correcteur flou, la sortie est mieux amortie, en plus de la grandeur de commande qui est moins énergétique.

## Rejet de la perturbation

Ce test consiste à évaluer les performances des correcteurs face à la variation de la température du fluide  $T_0(t)$ , à l'entrée de l'échangeur, qui représente la perturbation affectant le système. Ainsi, une variation de  $+40\%$  de la température  $T_0(t)$ , a été introduite à  $t = 5$  s. Les évolutions de la sortie et de la commande sont données par la Figure 2.6. Les résultats obtenus montrent que le correcteur flou offre de bonnes performances puisque l'effet de la perturbation est mieux amorti, et rapidement rejeté par rapport au correcteur classique.

Les deux tests de simulation effectués ont montré que les performances sont nettement améliorées avec le correcteur PI flou. Alors, il est judicieux de tester la robustesse

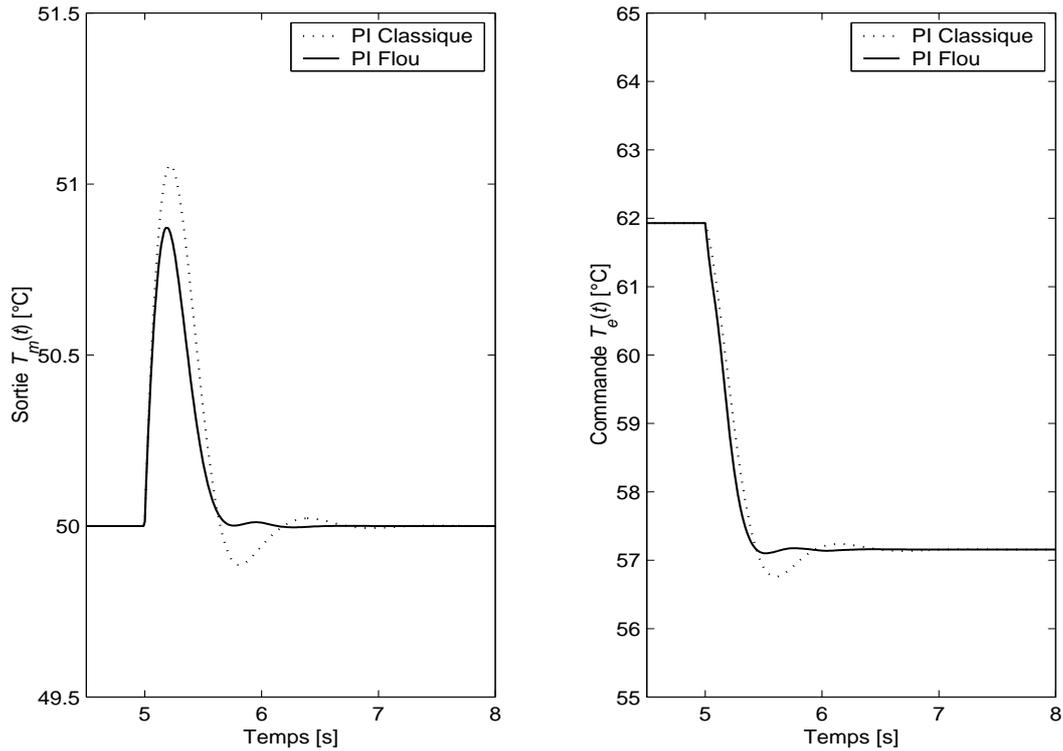


FIG. 2.6 – Rejet de la perturbation.

de ce correcteur face aux variations paramétriques, et aux erreurs de modélisation ou d'approximation faites.

### Variation paramétrique

L'échangeur de chaleur est souvent connecté à d'autres équipements thermiques qui affectent son fonctionnement. Par exemple, la vitesse du fluide à chauffer est liée à l'équipement qui se trouve en amont de l'échangeur. Par conséquent, le correcteur doit réagir convenablement face à la variation de la vitesse du fluide à chauffer et les fluctuations de cette grandeur représentent une variation paramétrique.

Pour évaluer les performances du correcteur, des variations de vitesse de l'ordre de  $\pm 50\%$  ont été opérées à l'instant  $t = 5$ s. D'après les résultats obtenus (Figure 2.7), il est remarquable qu'en dépit des variations introduites, la poursuite de consigne est parfaitement assurée, et la variation de la grandeur de commande reste physiquement acceptable, et compense l'effet perturbateur induit par la variation de la vitesse.

### Erreurs de modélisation

Pour la résolution numérique du problème d'optimisation (synthèse du correcteur PI Flou), un modèle approximé avec un nombre de points de discrétisation  $N = 80$ , obtenu par la méthode des lignes, a été utilisé. Le modèle ainsi discrétisé permet une bonne

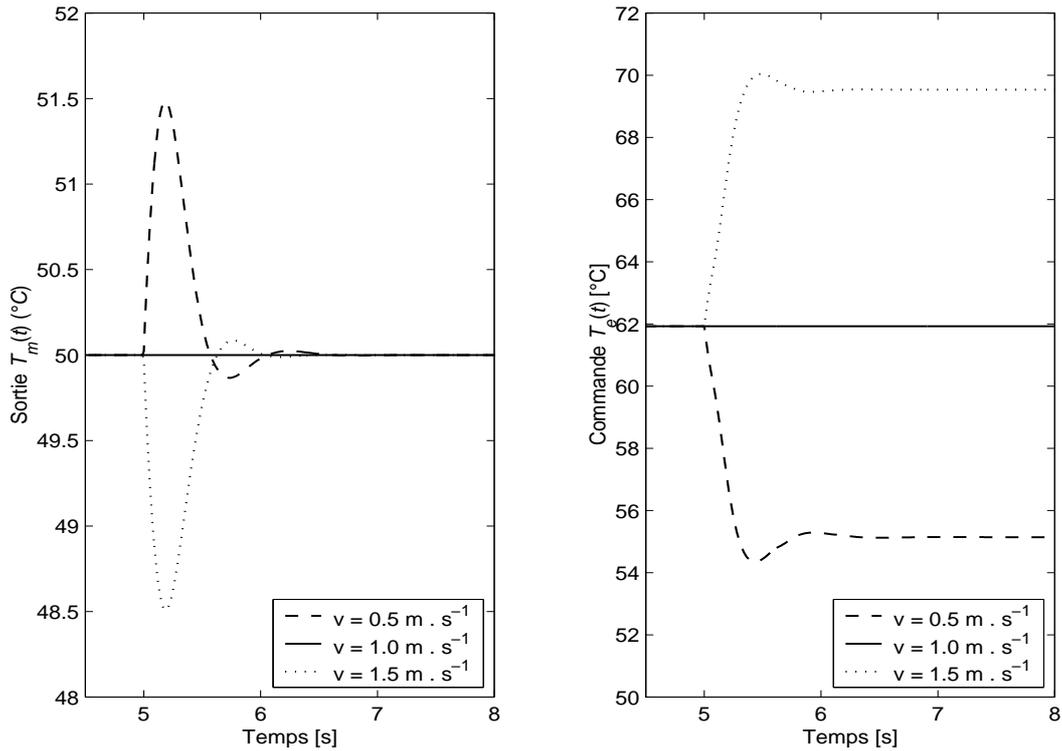


FIG. 2.7 – Variation paramétrique.

approximation du modèle EDP avec un nombre de points  $N$  raisonnable.

Pour simuler l'effet des erreurs de modélisation, on propose de considérer deux autres valeurs du nombre de points de discrétisation  $N = 40$  et  $N = 120$  (ordre du système approximé). Le modèle considéré lors de la synthèse représente le modèle nominal obtenu avec  $N = 80$ . D'après les résultats obtenus (Figure 2.8), on constate que le correcteur flou réagit convenablement puisqu'on note une insensibilité du correcteur aux erreurs de modélisation introduites, et la grandeur de commande présente de légères variations. En examinant la sortie commandée, on peut conclure que la valeur minimale du critère optimisée reste inchangée.

## 2.5 Conclusion

La commande PID floue d'un SPD, basée sur la stratégie de post-approximation, a été étudiée dans ce chapitre. Il a été montré que le problème de synthèse du correcteur PID peut être formulé sous la forme d'un problème d'optimisation dont la fonction objectif est un critère de performance, et les variables de décision sont les paramètres d'adaptation du correcteur flou. Pour faciliter la synthèse, ce problème d'optimisation a été simplifié par l'introduction de contraintes de type égalité. Ces dernières traduisent les relations de passage liant les paramètres de réglage du correcteur PID classique et ceux du correcteur PID Flou, et permettent de ramener le nombre de variables de décision à une seule va-

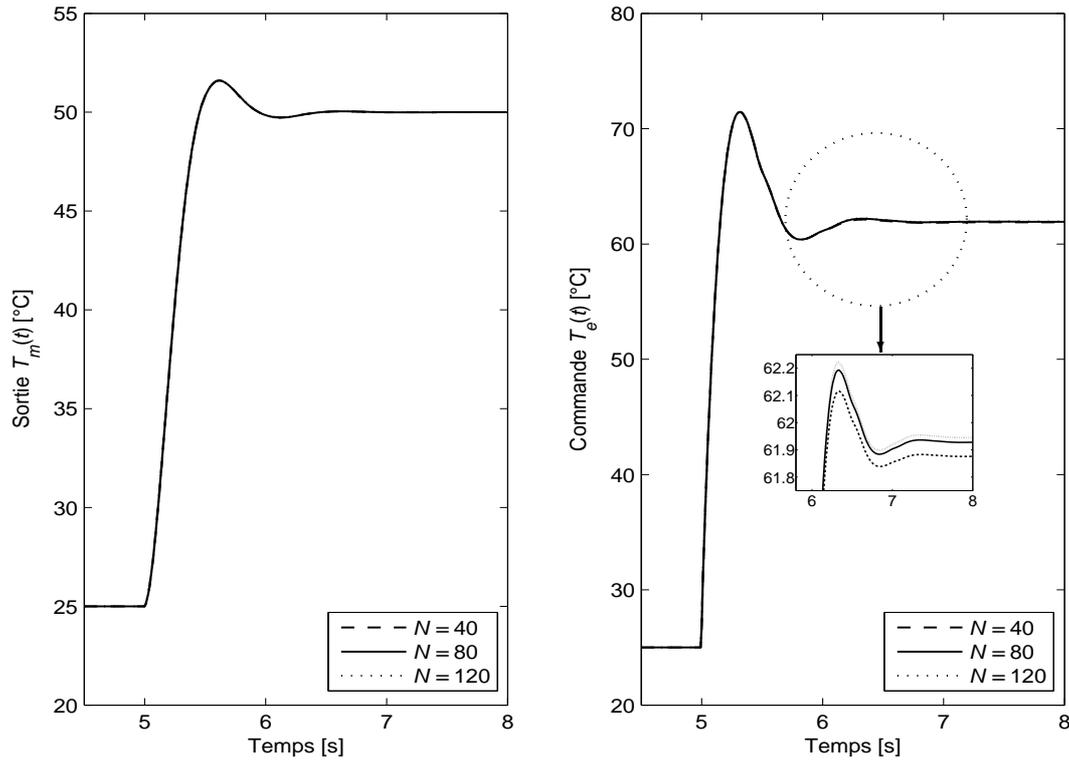


FIG. 2.8 – Influence du nombre de points de discrétisation.

riable, ce qui simplifie davantage la résolution du problème d'optimisation des paramètres d'adaptation du correcteur flou.

La démarche de synthèse a été appliquée avec succès pour concevoir un correcteur PI Flou en vue de commander la température moyenne du fluide, à l'intérieur du tube d'un échangeur de chaleur, par la manipulation de la température de l'enveloppe supposée homogène et répartie uniformément le long de l'échangeur.

Les tests de simulation réalisés ont confirmé la supériorité du correcteur flou par rapport au correcteur classique. En effet, outre le rejet rapide de l'effet perturbateur dû à la variation de la température du fluide à l'entrée de l'échangeur, le comportement dynamique de la température est mieux amorti et les sollicitations de la grandeur de commande sont moins énergiques. De plus, il a été démontré que le correcteur PI Flou présente des facultés intéressantes pour faire face à la variation de la vitesse du fluide à chauffer, assimilée à une variation paramétrique, et à la présence des incertitudes structurelles traduites par les erreurs de modélisation entre le modèle approximé et le modèle EDP.

L'implantation de la commande PID Floue pour un SPD, avec une observation par moyennage spatial, est très intéressante. En effet, il est clair que l'implantation ne requiert pas la disponibilité de l'état du système en totalité, ce qui constitue un problème inextricable vu sa dimension infinie, mais un ensemble de points de mesure suffisamment grand permet une estimation, avec une bonne précision, de la grandeur commandée. Ce constat est confirmé par le dernier test de simulation réalisé. Néanmoins, cette solution

est onéreuse, vu le nombre de capteurs indispensables, c'est pourquoi il est préférable de penser à appliquer la commande floue en considérant un autre type d'observation par exemple à la frontière.

Un autre problème intéressant à considérer consiste à prendre en compte la nature distribuée de la température de l'enveloppe. Ce problème de commande fera l'objet du chapitre suivant, où une solution basée sur la commande géométrique à la frontière sera proposée pour un échangeur de chaleur à contre-courant.

# Chapitre 3

## Commande Géométrique à la Frontière d'un Échangeur de Chaleur à contre-courant

### 3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, la température de l'enveloppe a été supposée homogène et distribuée d'une manière uniforme le long de l'échangeur. Cette hypothèse constitue une simplification pour le modèle de ce dernier. En réalité, la température de l'enveloppe est aussi de nature distribuée et non homogène. Dans ce cas, l'évolution dynamique de la température de l'enveloppe sera régie par une EDP linéaire, et le modèle de l'échangeur sera constitué par deux EDP. En absence des phénomènes de diffusion, ce modèle est de type convection-réaction et décrit convenablement le comportement spatial et dynamique de l'échangeur (Friedly, 1972; Douglas, 1972). En considérant ce type de modèle, ce présent chapitre aborde la commande géométrique à la frontière de l'échangeur de chaleur.

En effet, pour commander la température de fluide interne, circulant dans le tube, à la sortie de l'échangeur de chaleur, deux variables caractéristiques peuvent être manipulées : la température d'entrée du fluide externe, circulant à contre-courant dans l'enveloppe, ou sa vitesse d'écoulement (Xia *et al.*, 1991). Néanmoins, la manipulation de la vitesse influe directement sur les paramètres physiques de l'échangeur de chaleur, en particulier les coefficients de transfert de chaleur, et peuvent même entraîner le changement de la nature d'écoulement du fluide de laminaire à turbulent (Xuan et Roetzel, 1993). Par conséquent, une adaptation des paramètres du correcteur s'impose mais cette dernière constitue une tâche très difficile (Abdelghani-Idrissi *et al.*, 2001). De plus, manipuler la vitesse du fluide revient à considérer une température d'entrée constante pour le fluide externe, ce qui impose des limitations pour la variable manipulée, donc pour les consignes à atteindre (Abdelghani-Idrissi *et al.*, 2001; Arbaoui *et al.*, 2007). Par contre, la manipulation de

la température permet de travailler avec des débits constants, et la variation du régime hydrodynamique constitue une perturbation, affectant le système, dont l'effet doit être rejeté par le correcteur (Maidi *et al.*, 2007, 2008a).

Ces considérations justifient le choix porté sur la manipulation de la température d'entrée du fluide externe dans ce chapitre. Ainsi, la synthèse de la loi de commande est réalisée en considérant l'équation aux dérivées partielles (EDP) du modèle de l'échangeur décrivant la distribution de la température du fluide interne, et la commande calculée représente la condition aux limites pour l'équation décrivant la distribution de la température de l'enveloppe.

Le chapitre débute par l'introduction du modèle de l'échangeur considéré, puis aborde la commande géométrique à la frontière de ce dernier. La fin du chapitre est réservée à l'évaluation des performances de la commande géométrique, et des discussions relatives aux questions d'implantation pratiques. Le cas de la manipulation de la vitesse du fluide constitue l'un des points abordés, également, dans ce chapitre afin de comparer les deux stratégies.

## 3.2 Modèle de l'échangeur de chaleur à contre-courant

L'examen de la littérature dédiée à la commande de l'échangeur de chaleur à contre-courant révèle que peu d'approches de commande, basées sur le modèle EDP, ont été développées (Lim et Fang, 1972; Pohjolainen et Lätti, 1983; Xu et Gauthier, 1991; Gauthier et Xu, 1991; Hanczyc et Palazoglu, 1995; Abdelghani-Idrissi *et al.*, 2001; Christofides, 2001; Shang *et al.*, 2005; Arbaoui *et al.*, 2007). Ces dernières diffèrent dans leur principe, dans la stratégie et par le modèle retenu pour la synthèse de la loi de commande. Le modèle dépend des hypothèses posées lors du processus de modélisation (Douglas, 1972; Ray et Ogunnaike, 1994).

Ainsi, si le phénomène de diffusion est négligé, le modèle est de type convection-réaction (Douglas, 1972; Ray et Ogunnaike, 1994; Estel *et al.*, 2000; Abdelghani-Idrissi *et al.*, 2001; Arbaoui *et al.*, 2007), dans le cas contraire il est de type diffusion-convection-réaction (Pohjolainen et Lätti, 1983; Gauthier et Xu, 1991; Xu et Gauthier, 1991) ou diffusion-réaction (Alotaibi *et al.*, 2004). Le nombre d'EDP dépend des dynamiques de transfert de chaleur considérées et de la nature des variables caractéristiques.

Couramment le phénomène de diffusion est négligé devant celui de convection. Lorsque la température de fluide dans l'enveloppe est supposée homogène et que la dynamique de transfert de chaleur à travers le tube est négligée (Lim et Fang, 1972; Ray et Ogunnaike, 1994; Christofides, 2001; Shang *et al.*, 2005), le modèle se réduit à une seule EDP (modèle étudié dans le chapitre 2). Dans le cas où la température de l'enveloppe est non homogène, alors sa dynamique est régie par une EDP ce qui conduit à un modèle à deux EDP

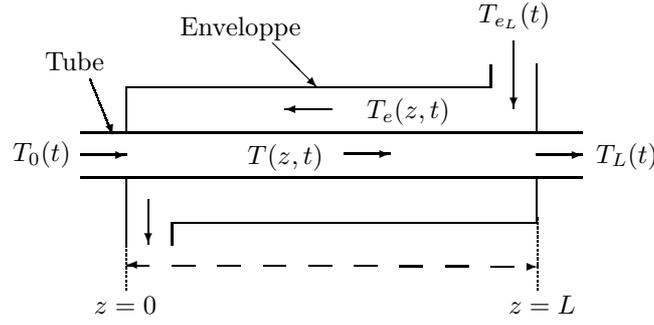


FIG. 3.1 – Echangeur de chaleur à contre-courant (température d’enveloppe non homogène).

(Douglas, 1972; Hanczyc et Palazoglu, 1995). Si, de plus, la dynamique de transfert à travers la paroi est prise en considération, cette dernière sera caractérisée par une EDO, ce qui aboutit à un modèle à deux EDP et une EDO (Estel *et al.*, 2000; Abdelghani-Idrissi *et al.*, 2001; Arbaoui *et al.*, 2007). Cette hypothèse peut être ignorée du fait que la dynamique de la paroi est très rapide (Douglas, 1972, page 234). Par conséquent, un modèle à deux EDP régit convenablement le comportement dynamique d’un échangeur à contre-courant. Ce dernier sera retenu, dans le présent chapitre, pour la conception d’une loi de commande en utilisant des notions de commande géométrique telle qu’elle est abordée par Christofides et Daoutidis (1996a), et Christofides (2001).

Dans ce chapitre, un échangeur de chaleur à contre-courant (Figure 3.1) est considéré. Le fluide circulant à l’intérieur du tube, fluide à chauffer, échange de la chaleur avec un deuxième fluide ou vapeur sans condensation, de masse volumique  $\rho_e$  et de capacité calorifique  $C_{pe}$ , circulant à contre-courant dans l’enveloppe avec une vitesse  $v_e(t)$ , et rentrant à une température  $T_{e0}(t)$ . Contrairement à l’échangeur de chaleur considéré dans le chapitre 1, la température de l’enveloppe est maintenant considérée non homogène, c’est-à-dire de nature distribuée. Ainsi, l’écriture du bilan d’énergie pour l’enveloppe conduit à l’EDP suivante :

$$\frac{\partial T_e(z, t)}{\partial t} = +v_e(t) \frac{\partial T_e(z, t)}{\partial z} + a_e [T(z, t) - T_e(z, t)] , \quad a_e = \frac{h_e S}{\rho_e S_e C_{pe}} \quad (3.1)$$

Pour cette équation, décrivant la distribution de la température du fluide externe dans l’enveloppe, la condition aux limites est la température du fluide entrant  $T_{e0}(t)$ , spécifiée à  $z = L$ , par conséquent :

$$T_e(L, t) = T_{e0}(t) \quad (3.2)$$

tandis que la condition initiale (à  $t = 0$ ) est un profil de température donné :

$$T_e(z, 0) = T_e^*(z) \quad (3.3)$$

En reprenant l'EDP (2.1), décrivant la distribution de la température du fluide interne, dans le tube, la condition aux limites (2.2), et la condition initiale (2.3), le modèle dynamique de l'échangeur de chaleur prend la forme (Maidi *et al.*, 2007, 2008a) :

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = -v(t) \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} + a [T_e(z, t) - T(z, t)] \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial T_e(z, t)}{\partial t} = +v_e(t) \frac{\partial T_e(z, t)}{\partial z} + a_e [T(z, t) - T_e(z, t)] \quad (3.5)$$

$$T(0, t) = T_0(t) \quad (3.6)$$

$$T_e(L, t) = T_{e0}(t) \quad (3.7)$$

$$T(z, 0) = T^*(z) \quad (3.8)$$

$$T_e(z, 0) = T_e^*(z) \quad (3.9)$$

Dans ce qui suit, les conditions initiales  $T^*(z)$  et  $T_e^*(z)$  représentent les profils spatiaux de température des fluides interne et externe en régime stationnaire. Ces profils sont obtenus en annulant les dérivées temporelles dans le modèle de l'échangeur de chaleur à contre-courant. Ceci revient à résoudre le système d'EDO suivant :

$$0 = -v(t) \frac{\partial T^*(z, t)}{\partial z} + a [T_e^*(z, t) - T^*(z, t)] \quad (3.10)$$

$$0 = +v_e(t) \frac{\partial T_e^*(z, t)}{\partial z} + a_e [T^*(z, t) - T_e^*(z, t)] \quad (3.11)$$

Ce problème est à deux limites. Sa résolution doit être envisagée numériquement moyennant des techniques d'approximation d'équations ou de solutions. Dans cette étude, la solution est obtenue en utilisant la méthode des lignes présentée dans la section 1.7.

### 3.3 Formulation du problème de commande

Le modèle de l'échangeur de chaleur appartient à la classe des systèmes décrits par des EDP quasi-linéaires de premier ordre. Christofides et Daoutidis (1996a); Gundepudi et Friedly (1998); Wu et Liou (2001); Christofides (2001), et Shang *et al.* (2005) ont pu étendre la théorie de commande géométrique, développée dans le cadre des systèmes à paramètres localisés (Kravaris et Kantor, 1990a,b; Isidori, 1995; Corriou, 2003, 2004), pour développer des lois de commande géométriques performantes pour cette classe de systèmes. Il a été démontré que le problème de synthèse revient à un placement de pôles qui peut se faire d'une manière optimale, pour fixer une dynamique désirée pour le comportement entrée externe-sortie. Un comportement qui peut être robustifié (garantir une erreur asymptotique nulle même en présence d'erreur de modélisation et de perturba-

tion) par l'introduction d'un correcteur, pour le calcul de l'entrée externe dont l'entrée est l'écart consigne désirée-sortie commandée (Isidori, 1995; Kravaris et Kantor, 1990b; Christofides, 2001; Corriou, 2004).

Rappelons que la dynamique des systèmes SPD de type convection-réaction, d'ordre un, est caractérisée par le modèle quasi-linéaire suivant :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = -v(t) \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} + f(x(z, t)) + g(x(z, t)) u(t) \quad (3.12)$$

Pour commander cette classe de systèmes, deux stratégies sont possibles. La première consiste à manipuler la grandeur  $u(t)$ , en dépit de la variation de  $v(t)$ . La deuxième inverse les grandeurs, c'est-à-dire prend comme variable de commande la grandeur  $v(t)$ , et  $u(t)$  représente la grandeur perturbatrice.

Christofides et Daoutidis (1996a), et Christofides (2001) adoptent la première stratégie de commande, pour commander la température moyenne de fluide à chauffer, en manipulant la température de l'enveloppe supposée uniforme et répartie le long de l'échangeur (modèle étudié dans le chapitre 1). La même stratégie a été considérée par Wu et Liou (2001) pour commander la concentration à la sortie d'un réacteur piston, en manipulant la température de l'enveloppe aux frontières.

Pour la commande des mêmes systèmes (échangeur de chaleur et réacteur piston), Gundepudi et Friedly (1998) et Shang *et al.* (2005) adoptent la deuxième stratégie de commande. Pour le cas de l'échangeur, la vitesse du fluide à chauffer est utilisée pour commander sa température à la sortie de l'échangeur. La température de l'enveloppe est supposée uniforme et constante (modèle à une seule EDP). Concernant le réacteur piston, les auteurs proposent de manipuler la vitesse du fluide caloporteur pour commander la concentration du produit désirée à la sortie du réacteur.

Ces problèmes de commande ont été abordés par la commande géométrique (Christofides et Daoutidis, 1996a; Christofides, 2001), et par la méthode des caractéristiques (Shang *et al.*, 2005).

Néanmoins, les résultats probants obtenus avec la commande géométrique incitent et motivent son application à des systèmes dont le modèle EDP est plus réaliste. En outre, elle constitue une voie intéressante pour développer des lois de commande faisant partie de la stratégie de post-approximation.

L'étude menée dans ce chapitre s'inscrit dans ce cadre. L'objectif consiste à synthétiser une loi de commande géométrique en considérant le modèle (3.4–3.9) de l'échangeur de chaleur, qui traduit parfaitement la variation spatiale de la température de l'enveloppe, ou encore l'influence de l'EDP (3.5). Dans ce cas, la commande ne peut être appliquée qu'à la frontière  $z = L$ .

Ainsi, l'essentiel du travail est axé principalement sur la première stratégie de com-

mande qui consiste à commander la température du fluide interne, à la sortie de l'échangeur  $z = L$  (observation à la frontière), par la manipulation de la température d'entrée du fluide externe correspondante à la condition aux limites (3.7). Du fait de l'équation (3.5), il est remarquable que la manipulation de la condition aux limites de l'enveloppe, donnée par la relation (3.7), entraîne une variation de la température du fluide externe  $T_e(t)$  le long de l'enveloppe. Notons que la stratégie de commande basée sur la manipulation de la vitesse du fluide externe  $v_e(t)$  est également abordée afin de comparer les deux stratégies de commande.

Ainsi, en désignant par  $u(t)$  la variable manipulée et par  $y(t)$  la variable de sortie à commander, le modèle de l'échangeur de chaleur (3.4–3.9), en ajoutant l'équation de la sortie, prend la forme (Maidi *et al.*, 2007, 2008a) :

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = -v(t) \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} + a [T_e(z, t) - T(z, t)] \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial T_e(z, t)}{\partial t} = +v_e(t) \frac{\partial T_e(z, t)}{\partial z} + a_e [T(z, t) - T_e(z, t)] \quad (3.14)$$

$$T(0, t) = T_0(t) \quad (3.15)$$

$$T_e(L, t) = T_{e0}(t) = u(t) \quad (3.16)$$

$$T(z, 0) = T^*(z) \quad (3.17)$$

$$T_e(z, 0) = T_e^*(z) \quad (3.18)$$

$$y(t) = T(z, t)|_{z=L} = T(L, t) \quad (3.19)$$

Pour la synthèse de la loi de commande, des notions de commande géométrique (Kravaris et Kantor, 1990a,b; Isidori, 1995; Corriou, 2003, 2004) seront utilisées. Les deux stratégies de commande présentées précédemment seront étudiées dans ce qui suit.

## 3.4 Obtention de la loi de commande

### 3.4.1 Manipulation de la température du fluide externe à la frontière

Pour déterminer la loi de commande géométrique, pour le problème de commande formulé dans la section précédente, la première étape consiste à déterminer le degré relatif  $\sigma$  de l'échangeur de chaleur à contre-courant. Le degré relatif est défini comme le plus petit degré de dérivation de la sortie  $y(t)$  qui dépend explicitement de l'entrée  $u(t)$  (Isidori, 1995; Christofides et Daoutidis, 1996a; Christofides, 2001; Corriou, 2004).

Le degré relatif, pour le modèle de l'échangeur de chaleur (3.13–3.18), est déterminé

suivant l'approche des dérivées temporelles successives de la sortie  $y(t)$  (Corriou, 2003, 2004). Ainsi, pour ce dernier, la dérivée première de la température de sortie du fluide interne est :

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= \left. \frac{dT(z, t)}{dt} \right|_{z=L} \\ &= -v(t) \left. \frac{\partial T(L, t)}{\partial z} \right|_{z=L} + a \left[ \underbrace{T_e(L, t)}_{u(t)} - T(L, t) \right]\end{aligned}\quad (3.20)$$

On constate que la commande  $u(t)$  apparaît explicitement dans la première dérivée de la sortie, et comme le coefficient de transfert de chaleur  $a \neq 0$ , le degré relatif du système est  $\sigma = 1$ . Ceci signifie qu'une dynamique d'un système linéaire, de premier ordre, peut être imposée pour le comportement sortie désirée  $\nu(t)$ –sortie  $y(t)$  de la boucle fermée :

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \nu(t) \quad (3.21)$$

En substituant l'expression du terme  $\frac{dy(t)}{dt}$  donnée par la relation (3.20) dans la relation (3.21), il vient :

$$y(t) - \tau v(t) \left. \frac{\partial T(L, t)}{\partial z} \right|_{z=L} + \tau a \left[ u(t) - T(L, t) \right] = \nu(t) \quad (3.22)$$

De cette relation, on déduit l'expression de la loi de commande suivante :

$$u(t) = \frac{1}{a\tau} \left[ \left( \nu(t) - T(L, t) \right) + \tau v(t) \left. \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \right|_{z=L} + \tau a T(L, t) \right] \quad (3.23)$$

où  $\tau$  désigne la constante du temps désirée pour la dynamique en boucle fermée entre l'entrée  $\nu(t)$  et la sortie  $y(t)$ . La grandeur  $\nu(t)$  représente une entrée externe, et afin de garantir une erreur asymptotique nulle, même en présence des erreurs de modélisation et de perturbation, cette entrée externe peut être fournie par le correcteur suivant :

$$\nu(t) = \int_0^t G(t - \xi) \left[ y^d(\xi) - y(\xi) \right] d\xi \quad (3.24)$$

où la fonction  $G(t)$  est déterminée en se basant sur la théorie de commande des systèmes linéaires, par exemple comme l'inverse d'une fonction de transfert continue donnée. Dans

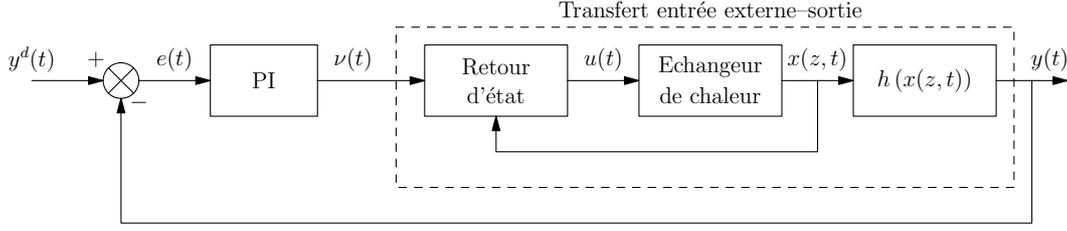


FIG. 3.2 – Stratégie de commande géométrique de l'échangeur de chaleur.

cette étude,  $\nu(t)$  sera un correcteur PI classique :

$$\nu(t) = K_c \left[ y^d(t) - y(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t (y^d(\xi) - y(\xi)) d\xi \right] \quad (3.25)$$

où  $K_c$ ,  $\tau_I$ , et  $y^d(t)$  représentent respectivement le gain proportionnel et la constante de temps intégrale du correcteur PI, et la consigne désirée.

La stratégie de commande adoptée pour la commande à la frontière de l'échangeur de chaleur est donnée par la Figure 3.2.

En boucle fermée, la fonction de transfert entre la consigne désirée  $y^d(t)$  et la sortie commandée  $y(t)$  est :

$$\frac{Y(s)}{Y^d(s)} = \frac{\frac{K_c}{\tau} s + \frac{K_c}{\tau \tau_I}}{s^2 + \left( \frac{1}{\tau} + \frac{K_c}{\tau} \right) s + \frac{K_c}{\tau \tau_I}} \quad (3.26)$$

Dans ce cas, la stabilité du système et le comportement dynamique sont conditionnés par les racines du polynôme caractéristique :

$$s^2 + \left( \frac{1}{\tau} + \frac{K_c}{\tau} \right) s + \frac{K_c}{\tau \tau_I} = 0, \quad (3.27)$$

fixés par le choix effectué pour les paramètres de réglages  $K_c$ ,  $\tau_I$ , et  $\tau$ . Dans cette présente étude, on considère un polynôme continu optimal, au sens du critère de l'intégrale de la valeur absolue de l'erreur pondérée par le temps (ITAE), en utilisant la méthode de Graham et Lathrop (1953).

### 3.4.2 Manipulation de la vitesse du fluide externe

Lorsque la vitesse du fluide externe est choisie comme la grandeur manipulée, la température de ce dernier est supposée constante excepté dans le cas de perturbation. Pour cette stratégie de commande, deux approches de synthèse sont possibles (Maidi *et al.*, 2008a).

La première approche est basée sur l'utilisation directe de l'équation (3.14) considérée

en point  $z = L$ . Dans ce cas, cette équation n'est plus une EDP mais une équation algébrique de la forme suivante (Maidi *et al.*, 2008a) :

$$0 = -v_e(t) \left. \frac{\partial T_e(z, t)}{\partial z} \right|_{z=L} + a_e [T(L, t) - T_e(L, t)] \quad (3.28)$$

où  $T(L, t)$  représente la température désirée, pour le fluide interne, à la sortie de l'échangeur de chaleur.

De l'équation (3.28), il est remarquable que la grandeur manipulée influe, directement, sur la sortie à commander sans dynamique apparente, c'est-à-dire que le degré relatif est  $\sigma = 0$ . De cette équation résulte l'expression de la loi de commande suivante :

$$v_e(t) = a_e \frac{[T(L, t) - T_e(L, t)]}{\left. \frac{\partial T_e(z, t)}{\partial z} \right|_{z=L}} \quad (3.29)$$

Notons que cette loi de commande est valable pour un modèle parfait et en absence de perturbations. La dérivée partielle intervenant dans le dénominateur de l'équation (3.29) dépend implicitement de la consigne désirée  $y^d(t) = T(L, t)$ , et peut être calculée en régime stationnaire pour différentes valeurs de  $y^d(t)$ . Cette dépendance, pour les mêmes paramètres du Tableau 3.1, est donnée par la Figure 3.3. Néanmoins, l'application de cette loi de commande telle quelle n'assure aucun rejet de perturbation puisqu'elle opère en boucle ouverte. Pour tenir compte des erreurs de modélisation et des perturbations, un terme de correction dynamique, moyennant un PID par exemple, peut être ajouté à la loi de commande (3.29).

La deuxième approche de synthèse est basée sur la commande géométrique comme cela a été abordé précédemment. Dans le cas de la manipulation de la vitesse du fluide externe, comme les EDP régissant le comportement dynamique de l'échangeur de chaleur sont de nature hyperbolique, des discontinuités au niveau des profils de température peuvent se manifester (Gundepudi et Friedly, 1998). De plus, en point  $z = L$  la température  $T_{e0}(t)$  est constante par conséquent sa variation temporelle est nulle. Ainsi, pour que la loi de commande  $v_e(t)$  soit bien définie, la variable à commander doit être évaluée au point  $z = L - \epsilon$  ( $\epsilon$  représente un incrément de position très faible) et non au point  $z = L$  (Gundepudi et Friedly, 1998). Ceci permet d'éviter l'utilisation de la loi de commande (3.28), et de tenir compte de l'influence de l'EDP originale (3.14).

De la même manière, que précédemment, le calcul des dérivées temporelles successives

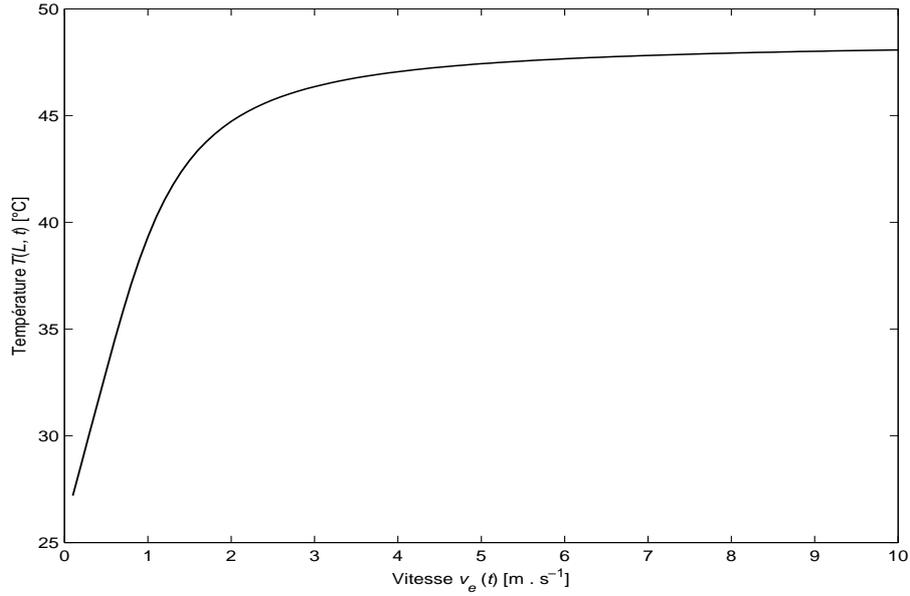


FIG. 3.3 – Evolution de la température  $T(L, t)$  en fonction de la vitesse du fluide externe  $v_e(t)$ .

de la sortie  $y(t) = T(L - \epsilon, t)$  (la vitesse du fluide interne  $v(t)$  est constante) donne :

$$\begin{aligned}
\frac{dy(t)}{dt} &= \left. \frac{dT(z, t)}{dt} \right|_{z=L-\epsilon} \\
&= -v \left. \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \right|_{z=L-\epsilon} + a [T_e(L - \epsilon, t) - T(L - \epsilon, t)] \quad (3.30) \\
\frac{d^2y(t)}{dt^2} &= -v \left. \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \right) \right|_{z=L-\epsilon} + a \left[ \left. \frac{dT_e(z, t)}{dt} \right|_{z=L-\epsilon} - \left. \frac{dT(z, t)}{dt} \right|_{z=L-\epsilon} \right] \\
&= -v \left. \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} \right) \right|_{z=L-\epsilon} + a \left[ \left. \frac{dT_e(z, t)}{dt} \right|_{z=L-\epsilon} - \left. \frac{dT(z, t)}{dt} \right|_{z=L-\epsilon} \right] \\
&= -v \left. \frac{\partial}{\partial z} \left( -v \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} + a [T_e(z, t) - T(z, t)] \right) \right|_{z=L-\epsilon} \\
&\quad + a \left( \underbrace{+v_e(t)}_{u(t)} \left. \frac{\partial T_e(z, t)}{\partial z} \right|_{z=L-\epsilon} + a [T(L - \epsilon, t) - T_e(L - \epsilon, t)] \right) \\
&\quad + v \left. \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \right|_{z=L-\epsilon} - a [T_e(L - \epsilon, t) - T(L - \epsilon, t)] \quad (3.31)
\end{aligned}$$

On constate que la variable manipulée  $v_e(t)$  apparaît dans l'expression de la dérivée seconde de la variable commandée par rapport au temps, alors le degré relatif est  $\sigma = 2$ . Ainsi, une dynamique d'un système de second ordre peut être imposée au transfert entrée

externe  $\nu(t)$ -sortie commandée  $y(t)$  régi par l'EDO suivante :

$$\tau_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \tau_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \nu(t) \quad (3.32)$$

En substituant les termes  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2}$  et  $\frac{dy(t)}{dt}$  par leurs expressions données respectivement par (3.30) et (3.31) dans (3.32), et après arrangement, on aboutit à l'expression suivante pour la loi de commande (Maidi *et al.*, 2008a) :

$$\begin{aligned} u(t) = & \frac{1}{a \tau_2 \left. \frac{\partial T_e(z, t)}{\partial z} \right|_{z=L-\epsilon}} \times \left\{ \nu(t) - \tau_2 v^2 \left. \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \right|_{z=L-\epsilon} + \tau_2 a v \left. \frac{\partial T_e(z, t)}{\partial z} \right|_{z=L-\epsilon} \right. \\ & + (\tau_2 a^2 + \tau_2 a a_e - \tau_1 a) \left( T_e(L - \epsilon, t) - T(L - \epsilon, t) \right) \\ & \left. - (2\tau_2 a v - \tau_1 v) \left. \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \right|_{z=L-\epsilon} - T(L - \epsilon, t) \right\} \end{aligned} \quad (3.33)$$

où  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont les paramètres ajustables du correcteur. De même, pour l'objectif de robustesse, l'entrée externe  $\nu(t)$  sera définie à l'aide d'un correcteur PI, ce qui conduit, en boucle fermée, à la fonction de transfert suivante :

$$\frac{Y(s)}{Y^d(s)} = \frac{K_c (\tau_I s + 1)}{\tau_I \tau_2 s^3 + \tau_I \tau_1 s^2 + (\tau_I + K_c \tau_I) s + K_c} \quad (3.34)$$

## 3.5 Évaluation des performances des correcteurs

Dans le but d'évaluer les performances des deux lois de commande (3.23) et (3.33), des tests de simulation ont été réalisés. L'accent est mis sur la première stratégie de commande, étant donné ses avantages, discutés dans l'introduction, par rapport à la deuxième stratégie. Pour le cas de la deuxième stratégie de commande, la simulation est limitée à un seul test dont l'objectif est de montrer l'applicabilité de cette dernière et de pouvoir comparer les deux stratégies de commande.

Ainsi, pour la simulation du système bouclé, la méthode des lignes est utilisée (cf. section 1.7) en utilisant un nombre de points de discrétisation  $N = 100$ , et une période d'échantillonnage de  $\Delta t = 0.02$  s.

### 3.5.1 Manipulation de la température du fluide externe

Dans l'expression de la loi de commande (3.23), il est remarquable que cette dernière fait intervenir la dérivée première de la température, par rapport à la variable spatiale

Désignation	Symbole	Valeur
Coefficient de transfert de chaleur pour le fluide interne	$a$	$2.92 \text{ s}^{-1}$
Coefficient de transfert de chaleur pour le fluide externe	$a_e$	$5 \text{ s}^{-1}$
Vitesse du fluide interne	$v$	$1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Vitesse du fluide externe	$v_z$	$2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Longueur de l'échangeur	$L$	1 m
Condition aux limites pour le fluide interne	$T(0, t)$	$25^\circ\text{C}$
Condition aux limites pour le fluide externe	$T_e(L, t)$	$50^\circ\text{C}$

TAB. 3.1 – Paramètres de l'échangeur de chaleur à contre-courant et conditions de simulation.

Désignation	Symbole	Valeur
Constante de temps pour le transfert $\nu(t) - y(t)$	$\tau$	1 s
Gain proportionnel	$K_c$	7.80
Constante de temps intégrale	$\tau_I$	1.03 s

TAB. 3.2 – Paramètres de la loi de commande.

$z$ , du fluide interne sortant au point  $z = L$ . Par conséquent, pour implanter la loi de commande, cette dernière doit être discrétisée en utilisant la technique des différences finies. Ainsi, le schéma de différence arrière donne :

$$\begin{aligned}
u(t) = & \frac{1}{a\tau} \left[ \left( K_c \left[ y^d(t) - y(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t (y^d(\xi) - y(\xi)) d\xi \right] - T(L, t) \right) \right. \\
& \left. + \tau \frac{v(t)}{\Delta L} (T(L, t) - T(L - \Delta L, t)) + \tau a T(L, t) \right] \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Du point de vue pratique, l'implantation de cette loi de commande nécessite l'utilisation de deux capteurs, placés aux positions adjacentes définies par  $z = L - \Delta L$  ( $\Delta L \neq \Delta z$ ) et  $z = L$ , ou l'estimation de ces deux mesures (états) à ses positions. Ce point est amplement discuté dans ce qui suit.

Les conditions de simulation sont résumées dans le Tableau 3.1. Les conditions initiales sont prises égales aux profils des températures, des fluides interne et externe, en régime statique. Ces derniers sont obtenus en résolvant le problème à deux limites (3.10). La méthode des lignes conduit aux profils représentés sur la Figure 3.4. Les paramètres de réglage de la loi de commande, reportés dans le Tableau 3.2, sont choisis de manière à ce que le système en boucle fermée (3.26) soit optimal pour le critère ITAE.

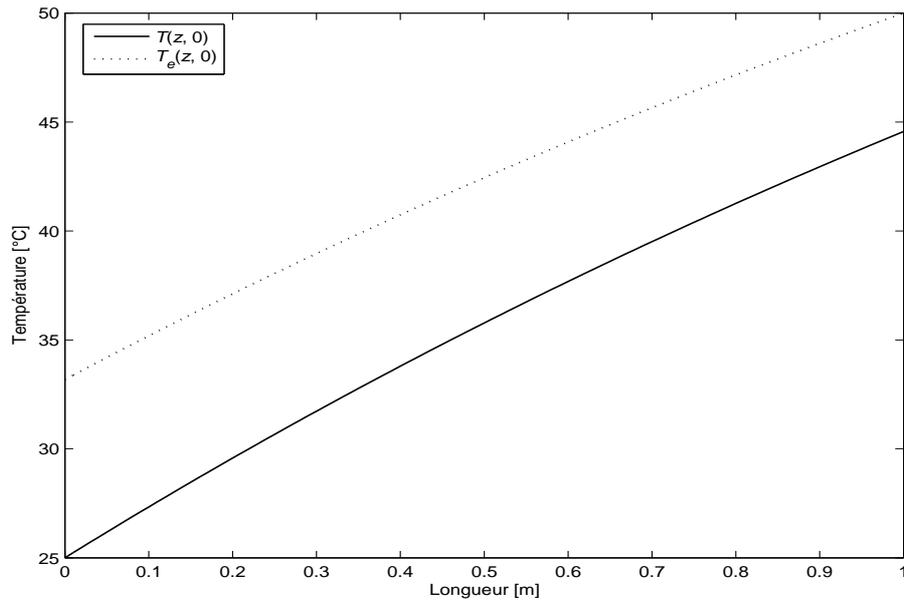


FIG. 3.4 – Profils des températures du fluide interne et externe en régime stationnaire.

### Poursuite de la consigne

Le premier test effectué concerne la poursuite de consigne. Ainsi, deux échelons de consigne ont été imposés, aux instants  $t = 1$  s et  $t = 5$  s, qui sont respectivement  $y^d(t) = 50^\circ\text{C}$  et  $y^d(t) = 30^\circ\text{C}$ . Pour éviter les conséquences dues aux changements brusques de la consigne, cette dernière est filtrée par un filtre de premier ordre de constante de temps égale à 0.2 s.

La Figure 3.5 donne les évolutions de la sortie  $y(t)$  et de la grandeur de commande  $u(t)$ . On constate que la sortie suit très correctement les consignes imposées, tandis que les variations de la commande sont physiquement admissibles. Les profils spatiaux de température obtenus aux instants  $t = 4$  s et  $t = 10$  s (Figure 3.6) sont également réalistes.

### Rejet de la perturbation

Le test de rejet de la perturbation consiste à évaluer les performances du correcteur face à la variation de la température du fluide interne  $T_0(t)$ , à l'entrée de l'échangeur, qui constitue une perturbation pour le système. Pour cette raison, un échelon de  $-20\%$  de la température d'entrée (à  $z = 0$ ) du fluide interne est imposé à l'instant  $t = 5$  s, après avoir imposé un échelon de consigne  $y^d(t) = 50^\circ\text{C}$  à  $t = 1$  s.

On constate que la sortie commandée (Figure 3.7) est insensible à la perturbation dont l'effet est compensé par la variation de la commande. Par contre, si on examine

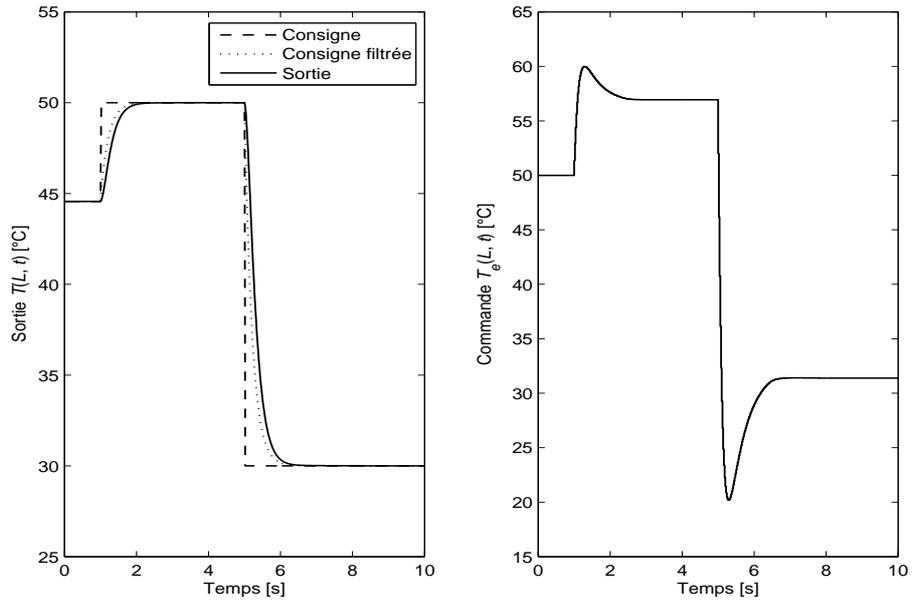


FIG. 3.5 – Poursuite de consigne. Gauche : sortie commandée et consigne. Droite : Entrée manipulée.

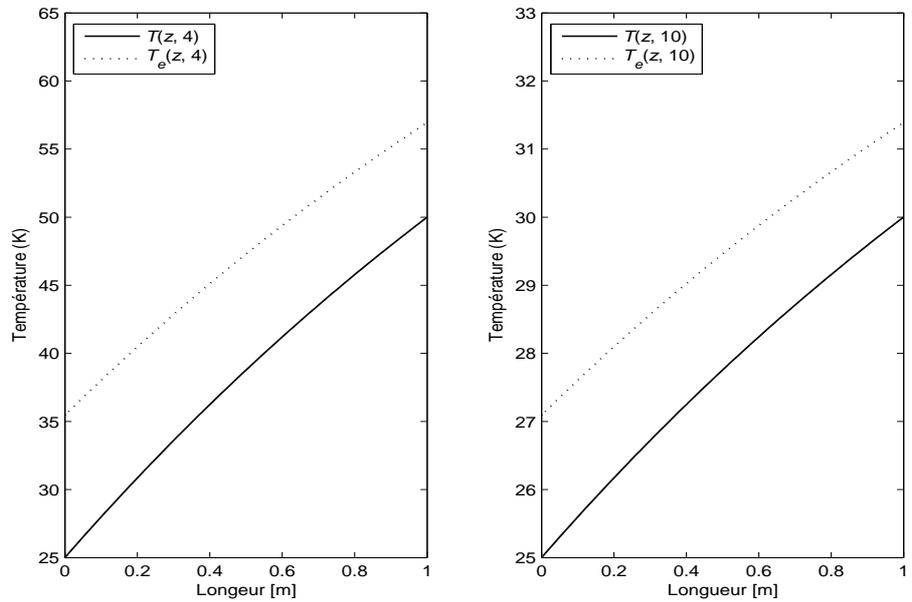


FIG. 3.6 – Profils des températures dans le cas de la poursuite de consigne. Gauche : à  $t = 4$  s. Droite : à  $t = 10$  s.

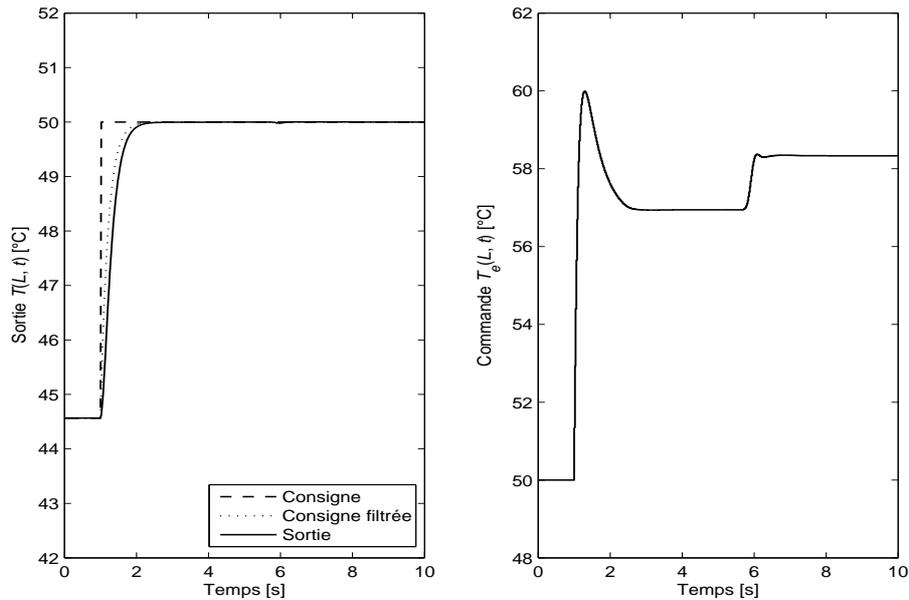


FIG. 3.7 – Rejet de la perturbation. Gauche : Sortie commandée. Droite : Entrée manipulée.

les températures aux points  $z = 0, 0.25, 0.50, 0.75, 1$  m (Figure 3.8), on remarque que la perturbation de type échelon visible à  $z = 0$  s'atténue au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'entrée ( $z = 0$ ) jusqu'à devenir quasiment invisible à la sortie de l'échangeur (en  $z = L$ ). A nouveau, les profils de température, après successivement l'échelon de consigne et l'échelon de perturbation (Figure 3.9), sont typiques du fonctionnement d'un échangeur à contre-courant.

## Robustesse

Pour tester la robustesse du correcteur vis-à-vis des variations paramétriques et des erreurs de modélisation, deux tests ont été réalisés. Dans le premier test, différentes variations paramétriques ont été introduites pour perturber le modèle nominal.

Les variations paramétriques concernent les coefficients de transfert de chaleur  $a$  et  $a_e$ , et les vitesses des fluides  $v(t)$ , et  $v_e(t)$ . Ces variations représentent des incertitudes paramétriques ou des fluctuations brusques induites par les équipements connectés à l'échangeur de chaleur. Pour ce test, tous les changements paramétriques interviennent à l'instant  $t = 5$  s, après avoir imposé un changement de consigne de  $y^d(t) = 50^\circ\text{C}$  à l'instant  $t = 1$  s. Les Figures 3.11–3.13 montrent les résultats obtenus pour les différents changements de

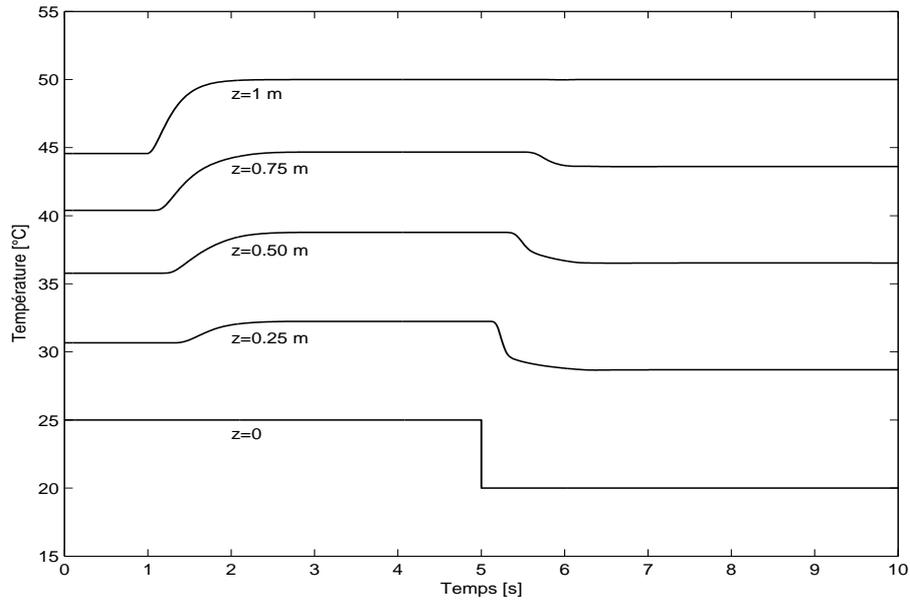


FIG. 3.8 – Variation de la température en différentes positions, le long de l'échangeur, dans le cas de rejet de perturbation (la perturbation est la température du fluide interne au point  $z = 0$  qui subit un échelon à  $t = 5$ s). Un échelon de consigne a eu lieu à  $t = 1$ s.

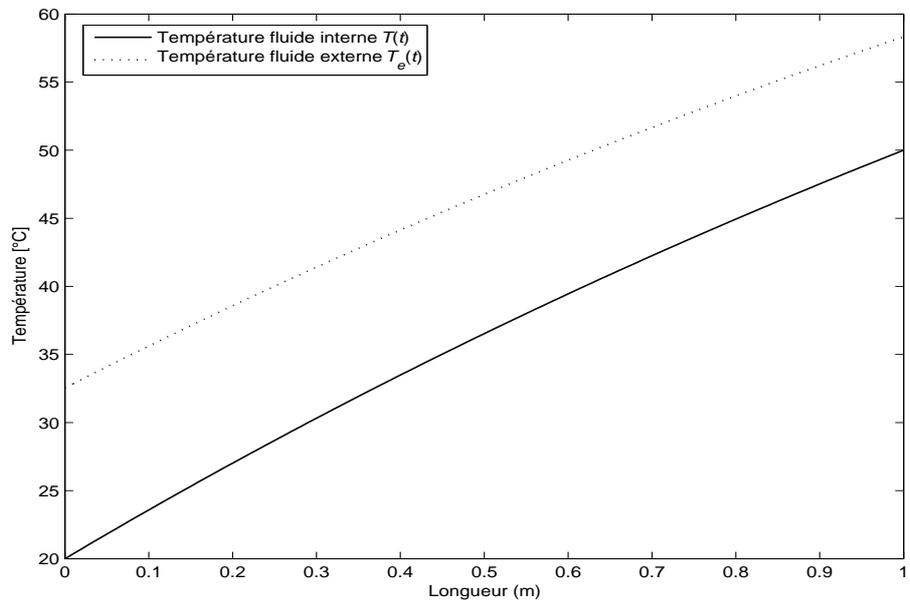


FIG. 3.9 – Profils spatiaux des températures à l'instant  $t = 10$ s dans le cas de rejet de perturbation.

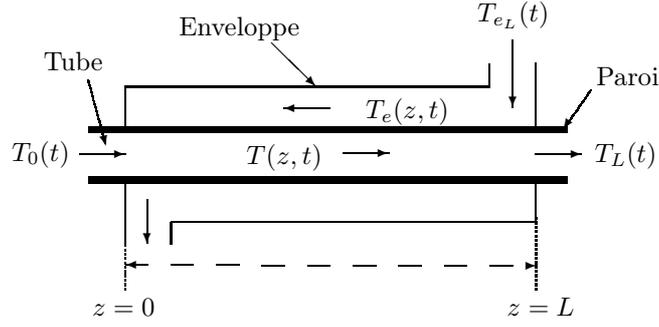


FIG. 3.10 – Echangeur de chaleur à contre-courant avec la paroi.

paramètres effectués. Il est remarquable que, malgré les variations significatives des paramètres, la sortie commandée suit très correctement la consigne désirée avec des variations admissibles pour la grandeur manipulée.

Dans le deuxième test effectué, l'équation de la paroi (Figure 3.10) a été prise en considération dans le modèle de l'échangeur de chaleur simulé en boucle fermée avec la même loi de commande. La dynamique de la paroi est donnée par l'EDO suivante :

$$\frac{\partial T_p(z, t)}{\partial t} = a_{\text{int}} [T(z, t) - T_p(z, t)] + a_{\text{ext}} [T_e(z, t) - T_p(z, t)] \quad (3.36)$$

où les coefficients de transfert  $a_{\text{int}}$  et  $a_{\text{ext}}$  sont donnés par :

$$a_{\text{int}} = \frac{h}{\rho_p e_{\text{int}} C_{pp}}, \quad a_{\text{ext}} = \frac{h_e}{\rho_p e_{\text{ext}} C_{pp}} \quad (3.37)$$

où  $\rho_p$  et  $C_{pp}$  sont respectivement la densité et la capacité calorifique de la paroi.  $e_{\text{int}}$  et  $e_{\text{ext}}$  sont respectivement l'épaisseur du tube et de l'enveloppe.

Pour évaluer les performances du correcteur en présence des erreurs du modèle, traduites par l'intégration de l'équation de la paroi (3.36), un changement de consigne de  $y^d(t) = 50^\circ\text{C}$  a été imposé à l'instant  $t = 1\text{ s}$ . Les valeurs des coefficients de transfert  $a_{\text{int}}$  et  $a_{\text{ext}}$ , considérées pour ce test, sont respectivement  $1\text{ s}^{-1}$  et  $3\text{ s}^{-1}$ . La Figure 3.14 donne les résultats obtenus. On constate que le correcteur assure la poursuite de consigne, mais la sortie commandée et la grandeur manipulée présentent des évolutions oscillantes amorties qui restent acceptables. Ceci est dû à la dynamique de la paroi qui rentre en jeu. Ces oscillations peuvent être amorties davantage en intervenant sur les paramètres de réglage du système de commande, ou simplement par l'ajout de l'action dérivée dans le correcteur calculant l'entrée externe  $\nu(t)$  (cette grandeur sera fournie par un PID).

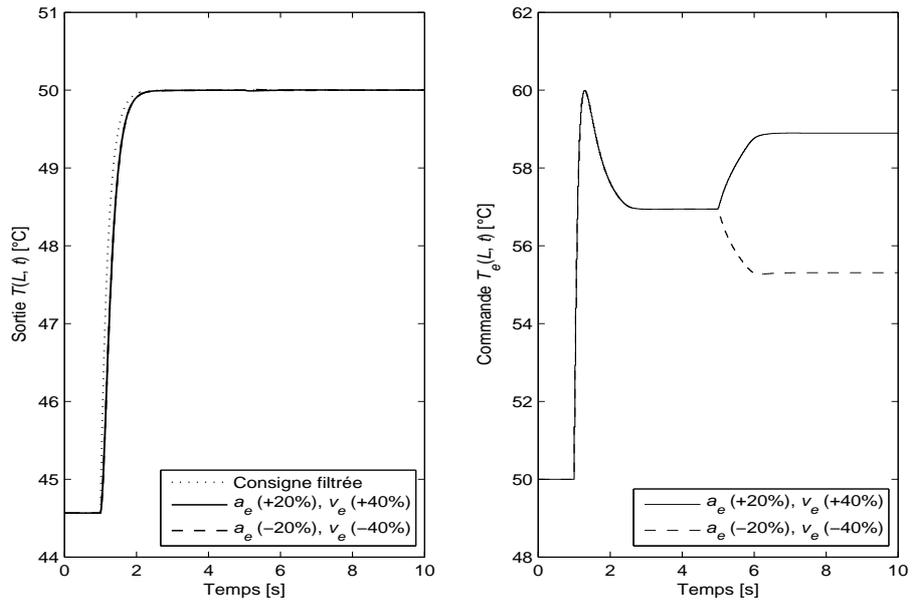


FIG. 3.11 – Changement de paramètres du fluide externe. Gauche : Sortie commandée. Droite : Entrée manipulée.

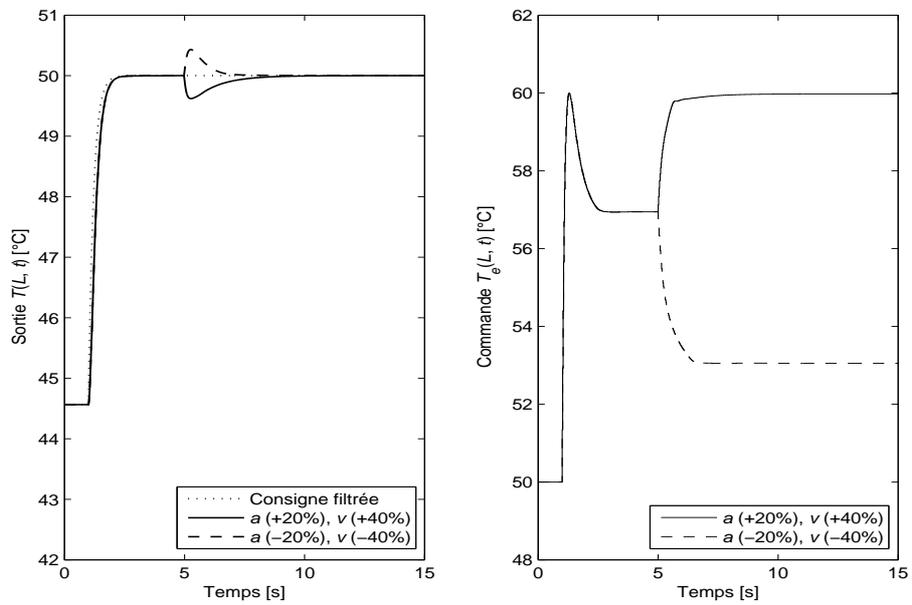


FIG. 3.12 – Changement de paramètres du fluide interne. Gauche : Sortie commandée. Droite : Entrée manipulée.

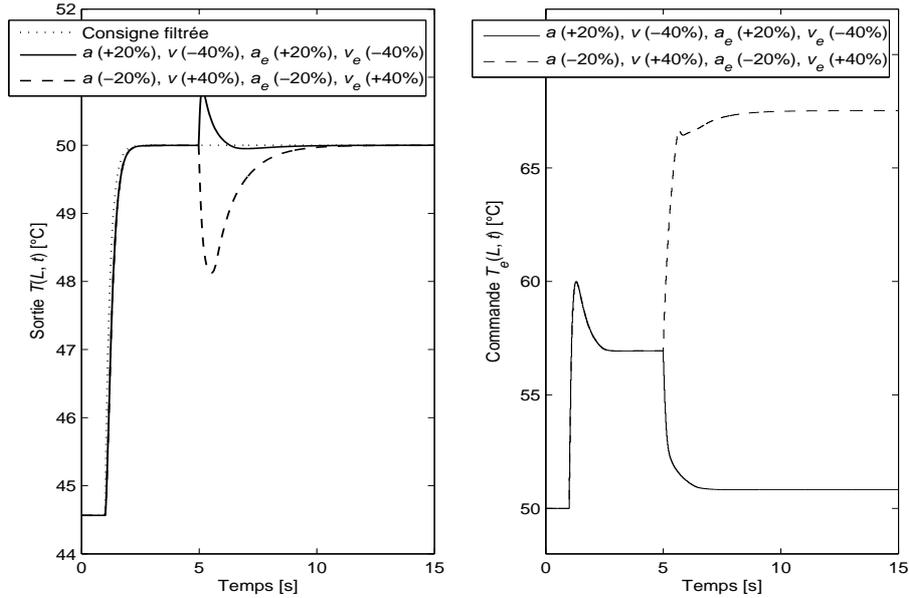


FIG. 3.13 – Changement de paramètres des deux fluides. Gauche : Sortie commandée. Droite : Entrée manipulée.

### Bruits de mesures et positionnement des capteurs

En pratique, les mesures transmises par les capteurs sont souvent bruitées ce qui conduit à des erreurs de mesure à caractère stochastique, donc non prédictibles. Ainsi, l'implantation de la loi de commande (3.35) fait intervenir l'approximation de la dérivée de la température par rapport à la variable  $z$ , par conséquent deux mesures sont nécessaires pour évaluer cette dérivée. En présence des erreurs de mesures, la variation de température entre deux points adjacents à  $z = L - \Delta z$  et  $z = L$  peut être noyée dans le bruit de mesure ce qui se répercute, immédiatement, sur les performances du correcteur (Maidi *et al.*, 2008a).

Avant de présenter les techniques utilisées pour une estimation acceptable des mesures indispensables pour l'implantation, il est judicieux d'étudier l'influence de la position du capteur de température placé à la position définie par  $z = L - \Delta L$ .

En effet, la sensibilité du terme dérivé par rapport au bruit de mesure est directement influencée par cette position. Pour cet objectif, plusieurs valeurs ont été considérées pour  $\Delta L$ , et prises égales à  $l \Delta z$ , avec  $l$  est un entier.

Afin de simuler une implantation réelle, on considère que les mesures sont bruitées en ajoutant aux valeurs fournies par le modèle théorique un bruit blanc Gaussien d'écart-type égal à  $0.2^\circ\text{C}$ . Un changement de consigne correspondant à  $y^d(t) = 50^\circ\text{C}$ , et une

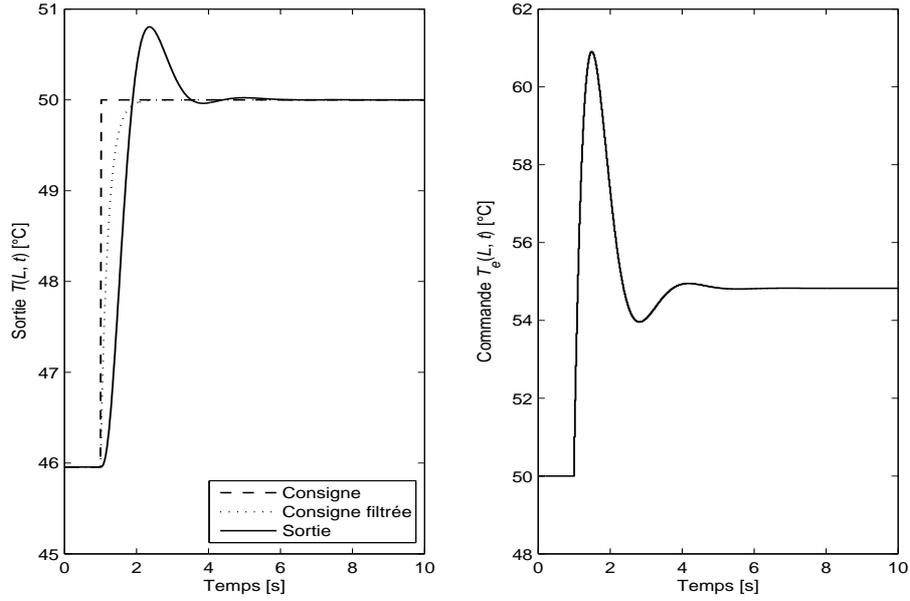


FIG. 3.14 – Poursuite de la consigne en présence de la paroi. Gauche : Sortie commandée. Droite : Entrée manipulée.

perturbation de  $-20\%$  pour la température de fluide entrant en  $z = 0$  ont été spécifiés respectivement aux instants  $t = 1$  s et  $t = 5$  s. D'après les résultats de la Figure 3.15, il est à noter qu'en éloignant le capteur de la sortie de l'échangeur, c'est-à-dire par augmentation de  $l$ , l'effet du bruit de mesure diminue, ce qui se traduit par une amélioration des performances. De plus, on constate que le déplacement du capteur est sans conséquence notable sur l'approximation de la dérivée de température, calculée en point  $z = L$ , qui intervient dans la loi de commande. Ceci est justifié par le fait que les profils des températures d'un échangeur de chaleur à contre-courant présentent des variations douces. Ce constat est corroboré par les résultats de la Figure 3.6. Par conséquent, du point de vue pratique, il est recommandé que les deux capteurs soient suffisamment distants.

En réalité, l'implantation de la loi de commande dépend des mesures disponibles. A cet effet, deux situations peuvent se présenter (Maidi *et al.*, 2008a). Comme la mesure à la sortie de l'échangeur est supposée toujours disponible (sortie à commander), le problème est lié à la mesure effectuée à la position  $z = L - \Delta L$ . Ainsi, si les deux mesures sont disponibles, une technique de filtrage ou d'estimation peut être adoptée. Dans le cas où seule la mesure en  $z = L$  est disponible, alors une technique d'estimation est indispensable pour récupérer la mesure au point  $z = L - \Delta L$ . Ces deux situations seront examinées, dans ce qui suit, en considérant que le deuxième capteur est positionné au point  $z = L - 5\Delta z$ . On considère, également, pour ce même capteur, placé théoriquement au point  $z = L - 5\Delta z$ , une erreur de position qui se traduit par une position réelle désignée par  $\Delta L' \neq \Delta L$ . Ainsi, deux valeurs correspondant à des erreurs de positionnement de l'ordre de  $\pm 20\%$  ont été considérées, et un changement de consigne correspondant à  $y^d(t) = 50^\circ\text{C}$  est spécifié à

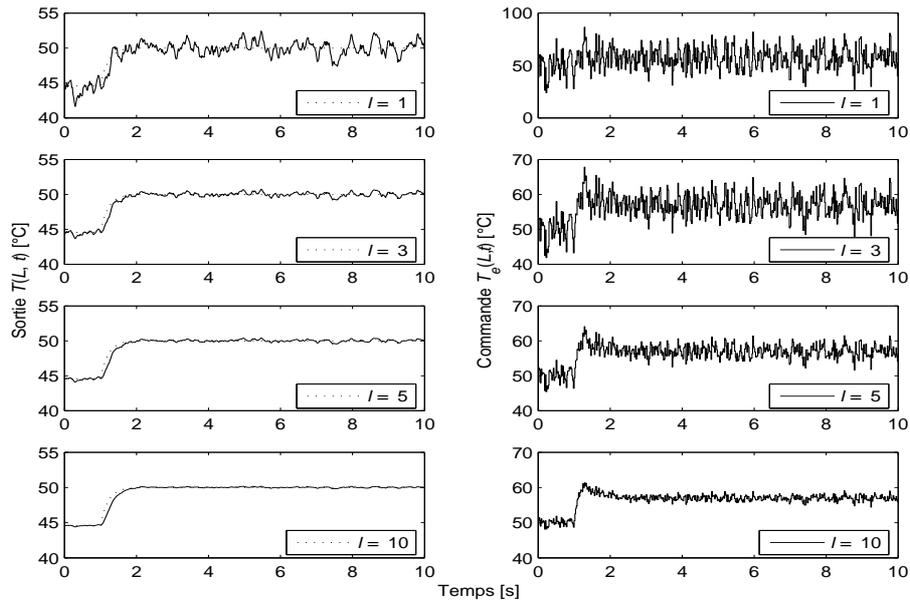


FIG. 3.15 – Influence de la position du capteur mesurant la température au point  $z = L - \Delta L = L - l \Delta z$ .

l'instant  $t = 5$  s.

La Figure 3.16 montre que le correcteur possède une robustesse satisfaisante par rapport aux erreurs de positionnement du deuxième capteur, puisque la poursuite de la consigne est correctement assurée avec une variation, physiquement admissible, de la grandeur de commande mais d'une qualité médiocre puisqu'elle présente des oscillations fortes. Cette mauvaise qualité de l'entrée manipulée peut être avantageusement améliorée par le filtrage ou l'estimation des mesures nécessaires pour le calcul de la loi de commande comme cela sera démontré dans la suite.

– **Filtrage** : les deux mesures effectuées aux points  $z = L - \Delta L$ , et  $z = L$  sont supposées disponibles. Dans ce cas, pour une implantation en ligne de la loi de commande, une technique de filtrage ou de lissage peut être appliquée pour recouvrir les mesures réelles. Pour cette étude, les deux mesures bruitées sont filtrées par un filtre à facteur d'oubli à moyenne mobile. Ce dernier effectue une moyenne mobile d'une succession d'échantillons

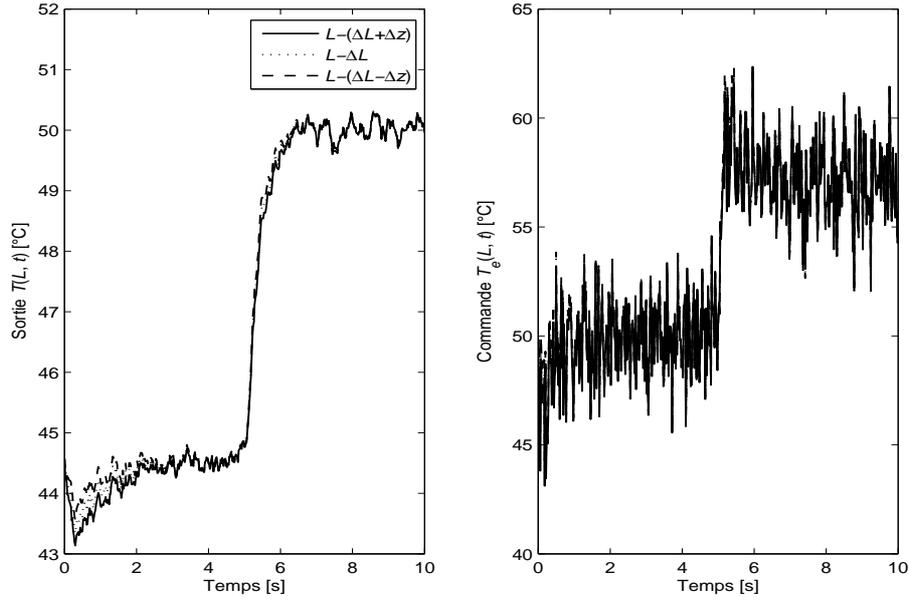


FIG. 3.16 – Influence de l’erreur de positionnement du capteur mesurant la température au point  $z = L - \Delta L$ . Gauche : Sortie commandée. Droite : Variable manipulée.

pour lisser les mesures bruitées. Les expressions des mesures filtrées sont données par :

$$T_f(L, k \Delta t) = \frac{\sum_{i=1}^{L_f} \lambda_f^{i-1} T(L, (k - i + 1) \Delta t)}{\sum_{i=1}^{L_f} \lambda_f^{i-1}} \quad (3.38)$$

$$T_f(L - \Delta L, k \Delta t) = \frac{\sum_{i=1}^{L_f} \lambda_f^{i-1} T(L - \Delta L, (k - i + 1) \Delta t)}{\sum_{i=1}^{L_f} \lambda_f^{i-1}} \quad (3.39)$$

où  $L_f$  et  $\lambda_f$  sont respectivement la longueur et le facteur d’oubli du filtre. Ce dernier doit être proche de 1, par exemple 0.95.

Notons que plus le facteur d’oubli  $\lambda_f$  est faible, plus l’effet de lissage est faible et l’augmentation de la longueur du filtre  $L_f$ , augmente l’effet de filtrage. Les valeurs considérées pour ces deux paramètres dans le test de simulation réalisé sont :  $\lambda_f = 0.96$ , et  $L_f = 10$ .

Les résultats obtenus (Figures 3.17–3.19) montrent que le correcteur se comporte convenablement et assure de performances appréciables, puisque la sortie présente des déviations acceptables par rapport à la consigne imposée (Figure 3.18), avec des sollicitations modérées pour la variable manipulée (Figure 3.19).

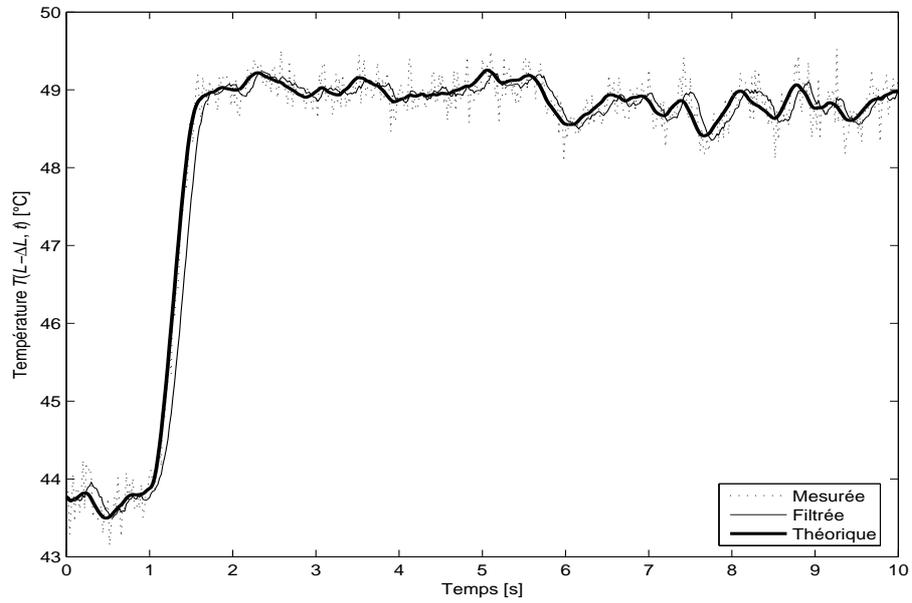


FIG. 3.17 – Filtrage des mesures : Température au point  $z = L - \Delta L$  ( $\Delta L = 5\Delta z$ ).

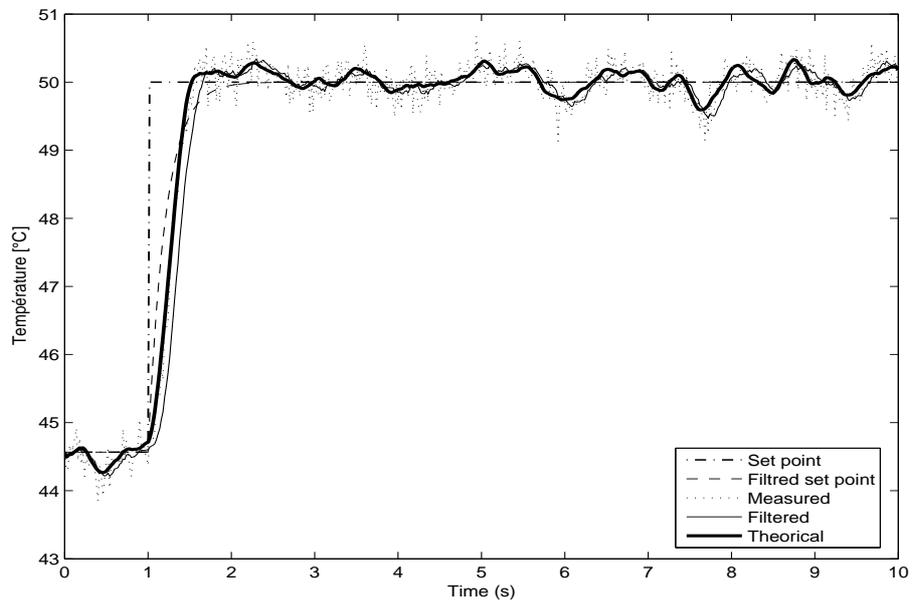


FIG. 3.18 – Filtrage des mesures : Température au point  $z = L$ .

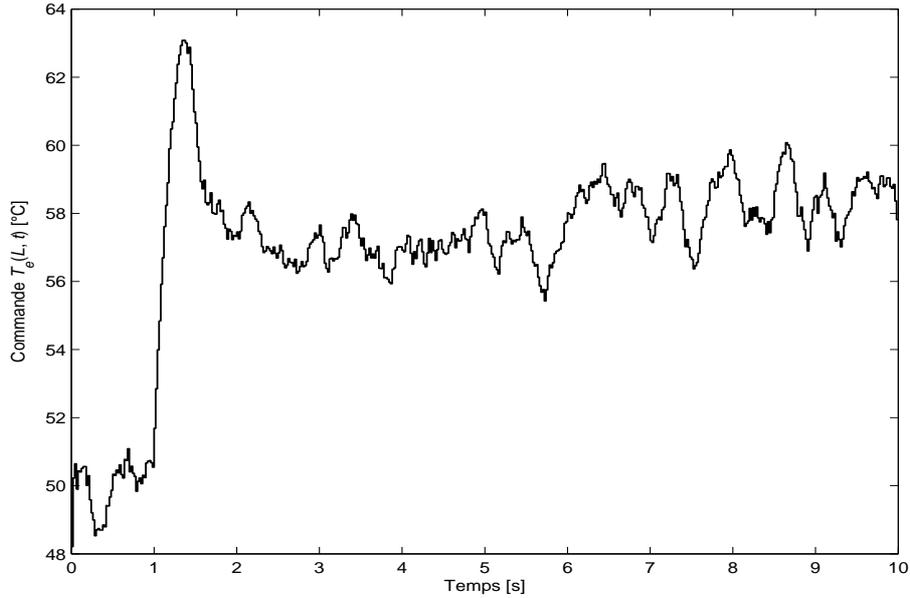


FIG. 3.19 – Filtrage des mesures : Variation de la variable manipulée.

– **Estimation d'état** : L'estimation d'état est la technique la plus utilisée pour l'implantation en ligne de lois de commande, lorsque ces dernières nécessitent une connaissance partielle ou totale du vecteur d'état. Plusieurs techniques ont été développées pour l'estimation des états à partir des mesures disponibles (Grewal et Andrews, 2001; Simon, 2006). Néanmoins, l'examen de la littérature dédiée au domaine de l'estimation d'état montre que le filtre de Kalman reste de loin la technique la plus répondue. Ce dernier sera utilisé pour estimer la mesure au point  $z = L - \Delta L$  à partir des mesures disponibles : la sortie en  $z = L$ , et la perturbation mesurable  $T_0(t)$ .

Avant de procéder à la conception du filtre de Kalman, il est nécessaire d'étudier l'observabilité du système. Puisque l'échangeur de chaleur à contre-courant est un SPD, l'observabilité de ce dernier n'est pas affectée seulement par le choix des capteurs mais aussi par leurs emplacements (Ray, 1989; Waldraff *et al.*, 1998). En général, il est très difficile de prouver l'observabilité d'un SPD et, dans la plupart des cas, l'étude de cette propriété passe par une pré-approximation du système pour appliquer, par la suite, les différents critères dédiés aux SPL (Waldraff *et al.*, 1998; Alotaibi *et al.*, 2004). Néanmoins, cette approche est très limitée, car l'observabilité qui dépend seulement de l'emplacement des capteurs, peut dépendre de la méthode de la pré-approximation utilisée, du nombre de points de discrétisation retenu pour la précision souhaitée, et de leurs positions (Singh et Hahn, 2007). En faisant ainsi abstraction de la nature distribuée du système, des conclusions erronées peuvent être faites à propos des propriétés fondamentales du système (Christofides, 2001).

L'étude de l'observabilité des systèmes décrits par des EDP de premier ordre en temps est amplement discutée par (Ray, 1989, page 293). L'approche présentée par Ray (1989)

repose sur la méthode des caractéristiques utilisée pour la pré-approximation des EDP. Pour étudier l'observabilité de l'échangeur de chaleur à contre-courant en suivant cette approche, on mis le modèle de l'échangeur de chaleur à contre-courant (3.4–3.5) sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} &= \begin{bmatrix} -v & 0 \\ 0 & v_e \end{bmatrix} \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} + \Psi x(z, t) \\ y(t) &= \mathbf{C} x(z, t)|_{z=L} \end{aligned} \quad (3.40)$$

où

$$x(z, t) = \begin{bmatrix} T(z, t) \\ T_e(z, t) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} -a & +a \\ +a_e & -a_e \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

La matrice d'observabilité du système (3.40) est donnée par (Ray, 1989) :

$$\mathcal{O} = [\Phi^T \mathbf{C}^T] \quad (3.44)$$

où  $\Phi = e^{\Psi t}$  est la matrice de transition.

On déduit que le système (3.40) est complètement observable puisque :

$$\text{rang}(\mathcal{O}) = n = 2 \quad (\text{ordre du système EDP}) \quad (3.45)$$

Pour la synthèse du filtre de Kalman, on utilise le modèle approximé de l'échangeur de chaleur obtenu par la méthode des lignes en considérant un nombre de points de discrétisation  $N_f < N$  (Maidi *et al.*, 2008a). Ainsi, en présence du bruit de mesures et des erreurs de modélisation, le modèle approximé prend la forme :

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \tilde{A} X(t) + \tilde{B} u(t) + \tilde{E} T_0(t) + \zeta(t) \\ y(t) &= \tilde{C} X(t) + \eta(t) \end{aligned} \quad (3.46)$$

où

$$X(t) = \begin{bmatrix} T_1(t) & \dots & T_{N_f}(t) & T_{e_1}(t) & \dots & T_{e_{N_f}}(t) \end{bmatrix}^T \quad (3.47)$$

avec  $T_i(t) \equiv T(z_i, t)$  et  $T_{e_i}(t) \equiv T_e(z_i, t)$  ( $i = 1, \dots, N_f$ ).

Les matrices  $\tilde{A} \in \mathfrak{R}^{N_f \times N_f}$ ,  $\tilde{B} \in \mathfrak{R}^{N_f \times 1}$ ,  $\tilde{E} \in \mathfrak{R}^{N_f \times 1}$  et  $\tilde{C} \in \mathfrak{R}^{1 \times N_f}$  sont constantes et issues du processus de discrétisation.  $\zeta(t)$  et  $\eta(t)$  sont des bruits blancs Gaussiens,

respectivement d'état et de mesure, non corrélés, de matrices de covariance respectivement  $Q$  et  $R$ .

Comme le système est continu et que les mesures sont discrète, le filtre de Kalman continu-discret est utilisé pour l'estimation de l'état du système. L'estimation de l'état  $\hat{X}(t)$  est basée sur l'exploitation des variables mesurées  $u(t)$ ,  $T_0(t)$ , et  $y(t)$ , et la matrice des gains du filtre est évaluée en utilisant l'algorithme du filtre de Kalman (Corriou, 2003, 2004; Simon, 2006). Le problème consiste à estimer à l'instant  $t_k$  ( $t_k = k \Delta t$ ) des états non mesurés en utilisant les mesures disponibles sur le système à l'instant  $t_{k-1}$ .

L'algorithme du filtre de Kalman comprend deux phases (Grewal et Andrews, 2001; Corriou, 2004; Simon, 2006) :

**Phase de prédiction** : elle consiste à intégrer les équations différentielles décrivant la variation du vecteur d'état  $\hat{X}(t)$ , et de la matrice de covariance de l'erreur  $P(t)$  sur l'intervalle  $[t_{k-1}, t_k]$ . Ces équations sont données selon :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{X}}(t/t_{k-1}) &= \tilde{A} \hat{X}(t/t_{k-1}) + \tilde{B} u(t/t_{k-1}) + \tilde{E} T_0(t/t_{k-1}) \\ \dot{P}(t/t_{k-1}) &= \tilde{A} P(t/t_{k-1}) + P(t/t_{k-1}) \tilde{A}^T + Q\end{aligned}\quad (3.48)$$

pour obtenir une prédiction alors que la mesure n'a pas encore été réalisée. Les prédictions de  $\hat{X}(t_k)$ , et  $P(t_k)$  sont notées respectivement  $\hat{X}(t_k/t_{k-1})$  et  $P(t_k/t_{k-1})$ .

**Phase de correction** : elle consiste à mettre à jour l'estimation de l'état et de la matrice de covariance de l'erreur. Ainsi, les mesures réalisées à l'instant  $t_k$  sont utilisées pour corriger les estimations  $\hat{X}(t_k/t_{k-1})$  et  $P(t_k/t_{k-1})$  en minimisant l'erreur d'estimation. Les estimations ainsi corrigées, obtenues à l'instant  $t_k$ , sont notées  $\hat{X}(t_k/t_k)$  et  $P(t_k/t_k)$  et égales à :

$$\begin{aligned}K(t_k) &= P(t_k/t_{k-1}) \tilde{C}^T \left[ \tilde{C} P(t_k/t_{k-1}) \tilde{C}^T + R \right]^{-1} \\ \hat{X}(t_k/t_k) &= \hat{X}(t_k/t_{k-1}) + K(t_k) \left[ y(t_k) - \tilde{C} \hat{X}(t_k/t_{k-1}) \right] \\ \hat{P}(t_k/t_k) &= \left[ I - K(t_k) \tilde{C} \right] \hat{P}(t_k/t_{k-1})\end{aligned}\quad (3.49)$$

où  $K(t)$  est la matrice des gains du filtre de Kalman, et les matrices  $P_{0/0}$ ,  $Q$  et  $R$  constituent les paramètres de réglages de ce dernier.

Il est clair que le filtre de Kalman donne les estimations des mesures correspondant aux positions  $z_j = j \Delta L = j l \Delta z$  ( $j = 1, \dots, N_f$ ) avec  $\Delta L = L/N_f$ . Rappelons que l'implantation de la loi de commande synthétisée nécessite les mesures aux points  $z = L - 5\Delta z$  and  $z = L$ . Dans le cas où la mesure considérée, pour calculer la loi de commande, ne coïncide avec aucune des estimées fournies par le filtre de Kalman, une technique d'interpolation peut être utilisée pour déterminer l'estimée de la mesure à la position

correspondant à l'emplacement de capteur. Ce problème peut être surmonté par un choix approprié du nombre entier  $N_f$ .

Le réglage des paramètres du filtre de Kalman, c'est-à-dire des matrices  $P_{0/0}$ ,  $Q$ , et  $R$ , est réalisé en procédant à des tests de type essai-erreur, et les valeurs finales retenues sont :

$$R = 0.001, \quad Q = 0.05 I_{(2N_f \times 2N_f)}, \quad P_{0/0} = 0.01 I_{(2N_f \times 2N_f)} \quad (3.50)$$

où  $I$  est une matrice identité. Le nombre de points de discrétisation considéré pour le modèle approximé (3.46) est  $N_f = 40$ . La diminution de  $N_f$  au-dessous de cette valeur, fixé comme un seuil, augmente l'erreur d'estimation, ce qui se répercute négativement sur les performances de la commande.

Notons que, en se référant aux équations du filtre (3.48), et dans le but de minimiser l'effet des erreurs de mesure affectant la température  $T_0(t)$  (perturbation mesurable), sur le processus de l'estimation, cette dernière a été filtrée à l'aide d'un filtre à facteur d'oubli à moyenne mobile (Maidi *et al.*, 2008a).

Les résultats de simulation obtenus sont résumés dans les Figures 3.20–3.22. La Figure 3.20 montre que le filtre de Kalman assure une bonne estimation de la mesure correspondant au point  $z = L - \Delta L$ , ce qui se traduit par de bonnes performances de poursuite (Figure 3.21) et une variation acceptable pour la grandeur manipulée (Figure 3.20).

A la lumière des résultats obtenus, il ressort que le filtre de Kalman offre de meilleures performances par rapport à la technique du filtrage à base des filtres à facteur d'oubli. Ainsi, la comparaison entre la Figure 3.18 et la Figure 3.21, et entre la Figure 3.19 et la Figure 3.22 montre que la sortie poursuit très correctement la consigne imposée, et la variable manipulée est plus amortie avec le filtre de Kalman.

Enfin, comme indiqué précédemment, l'échangeur de chaleur est sujet à des variations paramétriques et il est alors intéressant d'évaluer les performances du correcteur, avec le filtre de Kalman, face aux erreurs de modélisation (modèle-système) dues aux variations paramétriques. Ainsi, les Figures 3.23–3.25 donnent les résultats obtenus pour une variation paramétrique introduite, à l'instant  $t = 5$  s, après avoir imposé une consigne de  $y^d(t) = 50^\circ\text{C}$  à l'instant  $t = 1$  s.

Malgré la perturbation paramétrique introduite, il est remarquable que le filtre de Kalman assure une estimation correcte pour la température au point  $z = L - \Delta L$  (Figure 3.23).

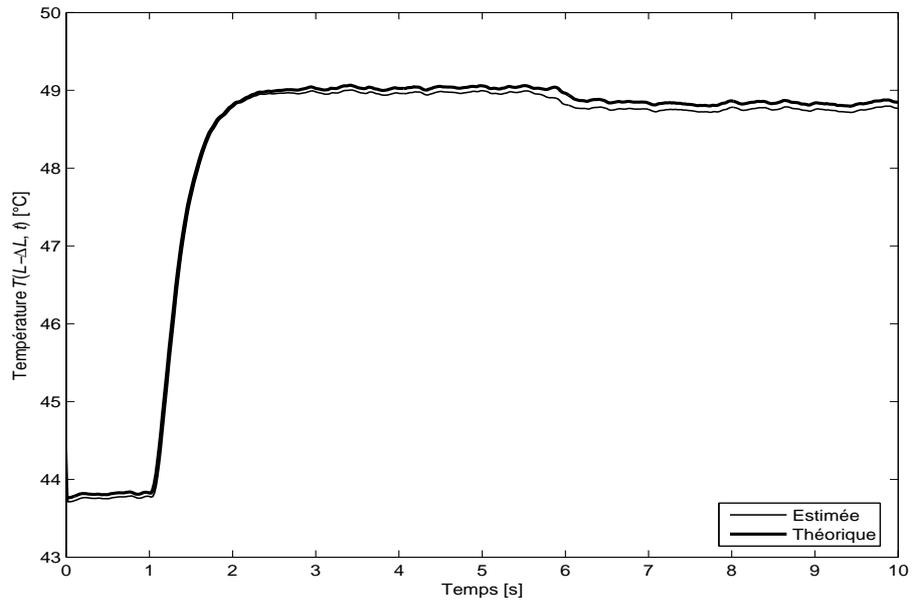


FIG. 3.20 – Estimation de la température au point  $z = L - \Delta L$  ( $\Delta L = 5 \Delta z$ ) par le filtre de Kalman.

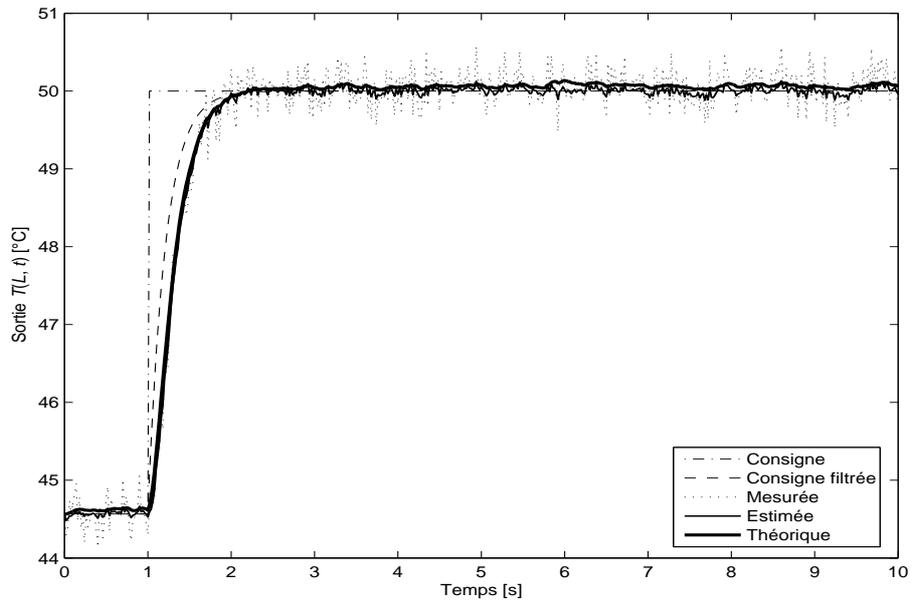


FIG. 3.21 – Estimation de la température au point  $z = L$  par le filtre de Kalman.

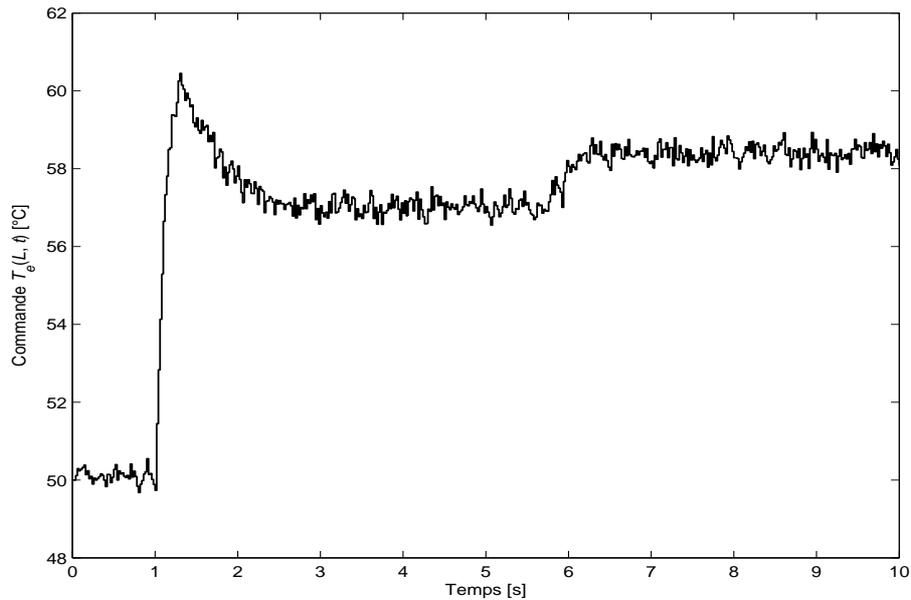


FIG. 3.22 – Variable manipulée dans le cas de l’estimation des mesures par le filtre de Kalman.

Par conséquent, une poursuite de consigne satisfaisante est obtenue (Figure 3.24) avec une commande présentant des variations qui restent physiquement admissibles (Figure 3.25).

### 3.5.2 Manipulation de la vitesse du fluide externe

Dans cette section, les performances de la stratégie de commande basée sur la manipulation de la vitesse du fluide externe, c’est-à-dire la loi de commande (3.33), est évaluée. Le test de simulation effectué concerne la poursuite de consigne et le rejet de la perturbation. Les paramètres du correcteur obtenus par placement de pôles minimisant un critère ITAE sont :  $\tau_1 = 3.06$  s,  $\tau_2 = 0.5$  s<sup>2</sup>,  $Kc = 18.91$ , and  $\tau_I = 0.882$  s. Pour l’implantation, la discrétisation de la loi de commande (3.33) a été réalisée en considérant les schémas de différences finies suivants :

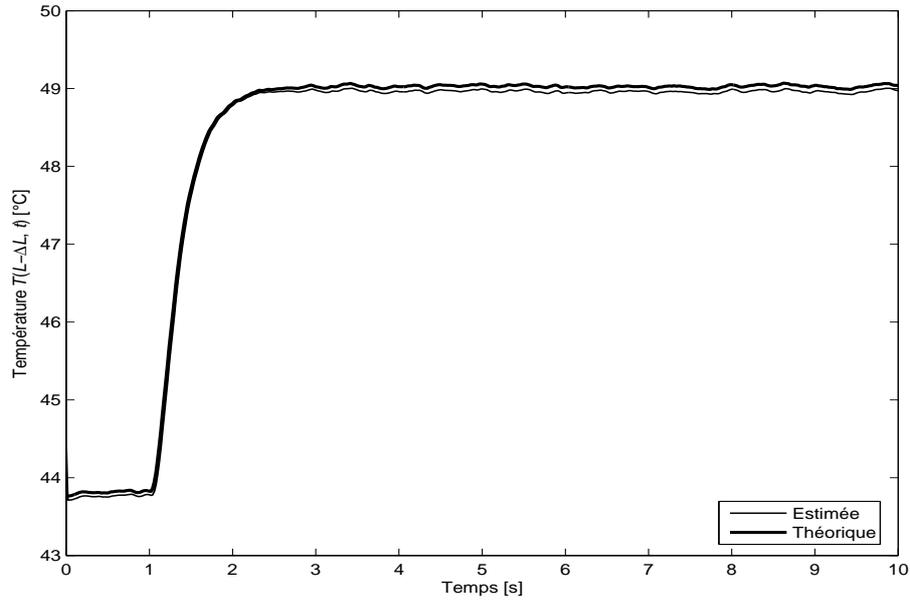


FIG. 3.23 – Estimation de la température au point  $z = L - \Delta L$  ( $\Delta L = 5 \Delta z$ ), par le filtre de Kalman, pour le changement paramétrique :  $a$  ( $-25\%$ ),  $v$  ( $-25\%$ ),  $a_e$  ( $+25\%$ ),  $v_e$  ( $+25\%$ ).

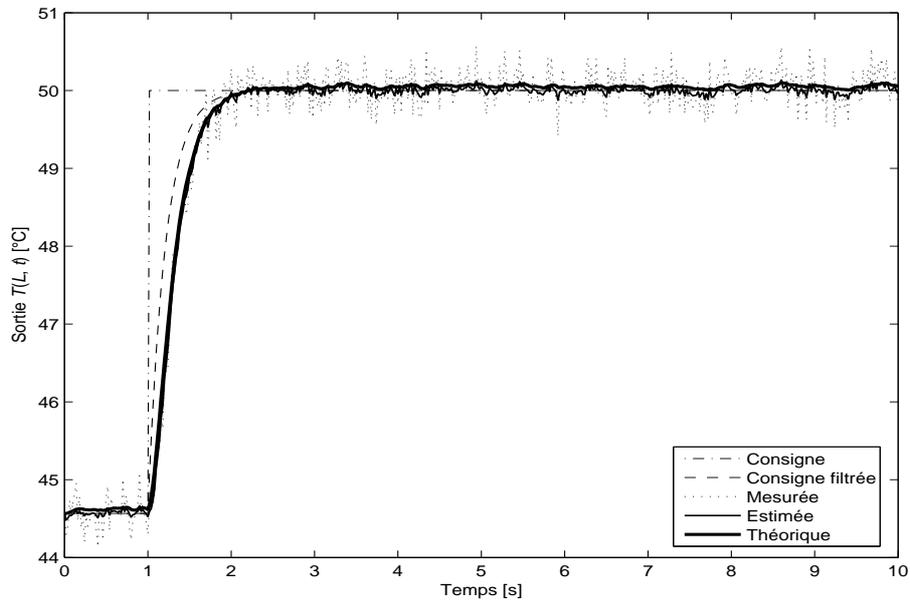


FIG. 3.24 – Estimation de la température au point  $z = L$ , par le filtre de Kalman, pour le changement paramétrique :  $a$  ( $-25\%$ ),  $v$  ( $-25\%$ ),  $a_e$  ( $+25\%$ ),  $v_e$  ( $+25\%$ ).

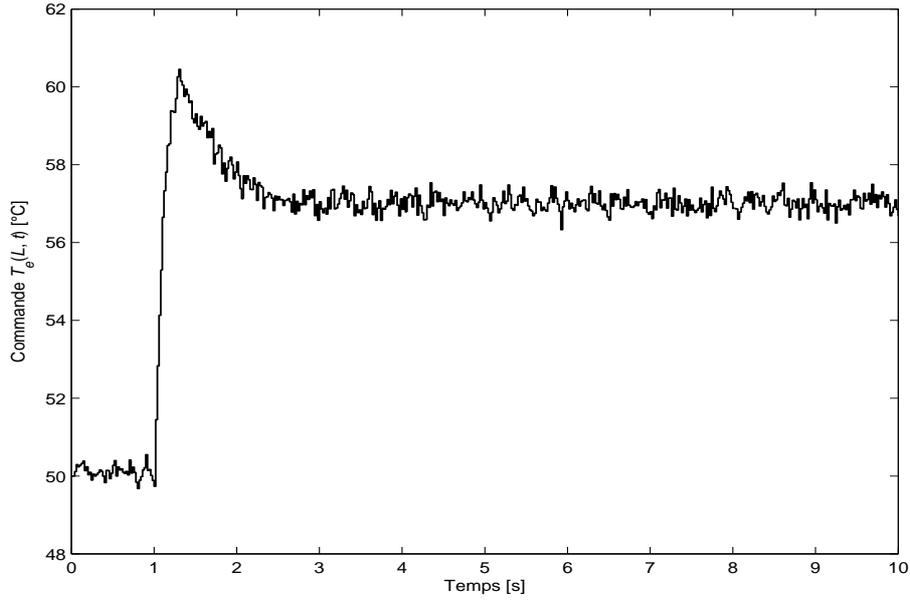


FIG. 3.25 – Variable manipulée dans le cas de l’estimation des mesures, par le filtre de Kalman, pour le changement paramétrique :  $a$  ( $-25\%$ ),  $v$  ( $-25\%$ ),  $a_e$  ( $+25\%$ ),  $v_e$  ( $+25\%$ ).

$$\left. \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} \right|_{z=L} = \frac{T(L,t) - T(L - \Delta L, t)}{\Delta L} \quad (3.51)$$

$$\left. \frac{\partial T_e(z,t)}{\partial z} \right|_{z=L} = \frac{T_e(L,t) - T_e(L - \Delta L, t)}{\Delta L} \quad (3.52)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} \right|_{z=L} = \frac{2T(L,t) - 5T(L - \Delta L, t) + 4T(L - 2\Delta L, t) - T(L - 3\Delta L, t)}{\Delta L^2} \quad (3.53)$$

Comme cela a été souligné précédemment, la capacité du correcteur à poursuivre une consigne désirée dépend de la température du fluide externe à la frontière  $T_e(L, t)$  qui doit être maintenue constante (Maidi *et al.*, 2008a). Dans le test réalisé, la température d’entrée du fluide externe est  $T_e(L, t) = 50^\circ\text{C}$ . Cette section reprend les mêmes conditions de simulation et les mêmes valeurs pour les paramètres de l’échangeur considérées dans les sections précédentes.

Ainsi, un changement de consigne correspondant à  $y^d(t) = 47^\circ\text{C}$  est spécifié à l’instant  $t = 1\text{ s}$ , suivi d’une variation de  $-20\%$  de la température d’entrée du fluide interne  $T_0(t) = T(0, t)$ . Cette dernière représente la perturbation affectant le système. La Figure 3.26 montre que le correcteur assure la poursuite de consigne et le rejet de perturbation. Néanmoins, la poursuite de consigne est réalisée plus lentement, et une influence significative de la perturbation est observée sur la sortie commandée par rapport au cas de la manipulation de la température d’entrée du fluide externe où la poursuite est assurée

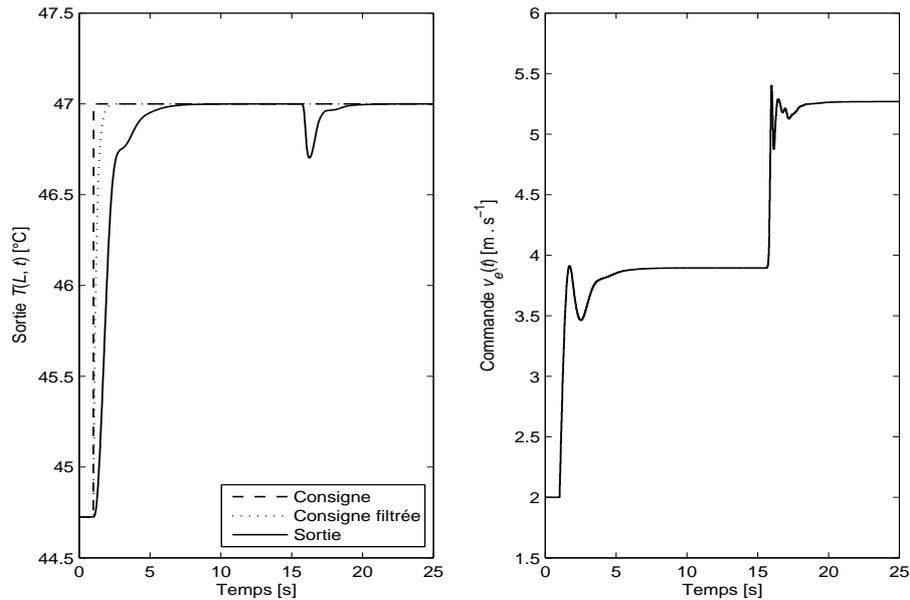


FIG. 3.26 – Poursuite de consigne et rejet de la perturbation dans le cas de la manipulation de la vitesse du fluide externe. Gauche : Sortie commandée. Droite : Variable manipulée.

plus rapidement (Figure 3.5), avec une sortie qui reste quasiment insensible à l’effet de perturbation (Figure 3.7). De plus, l’examen de la Figure 3.26 montre qu’une variation raide de la grandeur manipulée se manifeste pour assurer un rejet de perturbation.

L’ajustement des paramètres des correcteurs, pour améliorer le temps de réponse, conduit à des sorties oscillantes et qui deviennent plus prononcées en présence de la perturbation, de même pour la grandeur manipulée  $v_e(t)$  qui présente des variations rapides néfastes pour l’actionneur.

Ce dernier test de simulation confirme la supériorité de la première stratégie basée sur la manipulation de la température  $T_e(L, t)$ , et corrobore les arguments avancés pour justifier le choix de cette dernière comme variable manipulée.

## 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, deux stratégies de commande à la frontière, basée sur des notions de commande géométrique, d’un échangeur de chaleur à contre-courant ont été étudiées et comparées.

La première stratégie de commande consiste à commander la température du fluide interne, à la sortie de l’échangeur, en manipulant la température du fluide externe à l’entrée de l’enveloppe. La variation de la température de fluide interne à l’entrée de l’échangeur, et les variations paramétriques sont considérées comme des perturbations affectant le système. Dans la deuxième stratégie de commande, la vitesse d’écoulement

du fluide externe est utilisée comme la variable manipulée tandis que sa température à la frontière est maintenue constante. Notons que la première stratégie a fait objet d'une étude plus approfondie vu les avantages qu'elle offre par rapport à la deuxième.

La synthèse de la loi de commande a été réalisée en considérant un modèle distribué à deux EDP. Ce modèle décrit les variations spatio-temporelles des températures des deux fluides, interne et externe, qui caractérisent le comportement dynamique de l'échangeur de chaleur à contre-courant.

En utilisant la notion de degré relatif, des lois de commande ont été déduites simplement par le calcul des dérivées temporelles successives de la sortie commandée. Les lois de commande obtenues permettent d'imposer un certain comportement dynamique entre une entrée externe et la sortie commandée. Pour assurer une robustesse suffisante face aux erreurs de modélisation, traduites par exemple par des variations paramétriques ou la prise en compte de l'influence de la dynamique de la paroi, cette entrée externe a été définie moyennant un correcteur PI classique.

Les résultats de simulation montrent que la température de l'échangeur du fluide interne à la sortie de l'échangeur à contre-courant peut être parfaitement commandée selon la première stratégie, en manipulant la température du fluide externe à l'entrée, ce qui correspond à une commande à la frontière. La poursuite et la régulation sont parfaitement et avantageusement assurées par rapport au cas où la vitesse est manipulée.

L'avantage remarquable de la première stratégie réside dans l'insensibilité de la variable commandée à la perturbation affectant le système, et la robustesse affichée par le correcteur face aux erreurs significatives de modélisation. Du point de vue pratique, il a été démontré que l'implantation peut être réalisée aisément en utilisant deux capteurs distants.

Notons également que le problème de la présence des erreurs de mesures, dû à l'effet du bruit et à la position du capteur, a été examiné dans le cas de la première stratégie de commande. Suivant les mesures disponibles, deux approches ont été proposées pour l'implantation. Ainsi, le filtrage à moyenne mobile est considéré lorsque les deux mesures requises, pour l'implantation de la loi de commande, sont disponibles. Dans le cas où seule la mesure relative à la grandeur commandée est disponible, le filtre de Kalman a été utilisée pour estimer les mesures requises. Ces deux approches ont été discutées et comparées. Les résultats de simulation obtenus montrent que les deux approches donnent des performances acceptables, mais ces dernières sont nettement améliorées avec le filtre de Kalman.

Les résultats obtenus dans ce présent chapitre démontrent que la commande géométrique convient et s'adapte parfaitement pour la commande des systèmes hyperboliques suivant la stratégie de post-approximation. Ceci motive son application à d'autres types de SPD. Ainsi, le chapitre suivant présente une extension de la commande géométrique

aux systèmes hyperboliques de deuxième ordre en temps dont le comportement est régi par l'équation d'ondes.

# Chapitre 4

## Commande géométrique d'un système hyperbolique de second ordre en temps

### 4.1 Introduction

Si de nombreuses applications industrielles relèvent d'une modélisation par des EDP de premier ordre en temps, d'autres applications sont modélisées par des EDP de deuxième ordre en temps. L'une des EDP la plus rencontrée est l'équation d'ondes qui modélise souvent, et correctement, les phénomènes de propagation d'ondes et des vibrations. Les systèmes dont la dynamique est régie par l'équation d'ondes sont souvent linéaires et de type hyperbolique (Allaire, 2005).

Comme l'équation d'ondes est de deuxième ordre en temps, la commande de ces systèmes devient très difficile, et peu de techniques de commande ont été proposées dans la littérature.

Dans ce chapitre, une simple approche pour la commande géométrique de l'équation d'ondes quasi-linéaire sera développée. L'idée de base consiste à écrire l'équation d'ondes, hyperbolique, sous forme d'un ensemble d'EDP hyperboliques linéaires de premier ordre en temps. Cette transformation permet d'exploiter la théorie de la commande géométrique développée pour les systèmes hyperboliques (Christofides et Daoutidis, 1996b; Christofides, 2001; Wu et Liou, 2001; Shang *et al.*, 2005; Maldi *et al.*, 2005, 2007, 2008a). L'étude menée dans le chapitre 3 constitue une illustration de cette théorie.

Ainsi, la première partie du chapitre est réservée pour le développement, d'une manière générale, de la démarche proposée pour l'obtention de la loi de commande géométrique pour des systèmes à comportement dynamique décrit par une équation d'ondes. La deuxième partie illustre la démarche proposée par un exemple d'application portant sur la commande du déplacement d'une corde vibrante tendue. Le problème de commande consiste à synthétiser une loi de commande géométrique (une force) permettant de déplacer le point milieu de la corde à une position désirée.

## 4.2 Commande Géométrique de l'équation d'ondes

La théorie de commande des systèmes à paramètres distribués (SPD) fait l'objet d'une intense activité scientifique, en particulier, les systèmes décrits par des EDP du premier ordre en temps (diffusion-convection-réaction). Néanmoins, l'examen de la production scientifique consacrée à la commande des systèmes décrits par des EDP de deuxième ordre en temps, traduisant les phénomènes de propagation d'ondes ou de vibrations, montre que les résultats sur le plan de la commande restent insuffisants. Ceci peut se justifier par la nature même de ces EDP.

La plupart des contributions relatives à la commande de l'équation d'ondes portent sur la commande aux frontières (Morgül, 1994; Alli et Singh, 2000; Morgül, 2002; Bastos, 1999; Gunzburger et Nicolaidis, 1989; Gugat, 2002; Glowinski et He, 2003; Lagnese et Leugering, 2003; Bui, 2005; Deng *et al.*, 2007; Wang, 2007). Le cas de la commande distribuée est rarement abordé (Vancostenoble, 2000; Bamieh et Voulgaris, 2005) car la prise en compte de la nature distribuée des variables caractéristiques complexifie davantage le problème de commande. Les problèmes les plus abordés concernent la stabilisation (Morgül, 1994, 2002; Glowinski et He, 2003; Deng *et al.*, 2007) et la commandabilité (Gunzburger et Nicolaidis, 1989; Bastos, 1999; Bui, 2005; Wang, 2007; Vancostenoble, 2000).

Concernant le problème de commande, peu de techniques ont été développées. Ainsi, le problème de commande optimale a été étudié par Gugat (2002), et Lagnese et Leugering (2003) dans le cas d'une commande aux frontières, et par Bamieh et Voulgaris (2005) dans le cas d'une commande distribuée. Alli et Singh (2000), en utilisant la technique des lieux de racines, proposent une approche pour la conception d'un correcteur de type Proportionnel-Dérivé avec retard.

Dans la suite de l'exposé, des concepts de commande géométrique seront utilisés pour développer une approche de conception de lois de commande, de nature distribuée, pour des systèmes modélisés par une équation d'ondes.

## 4.3 Formulation du problème de commande

Un SPD modélisé par une équation d'ondes est représenté dans l'espace d'état par le modèle :

$$\frac{\partial x^2(z, t)}{\partial t^2} = \mu^2 \frac{\partial x^2(z, t)}{\partial z^2} + u(z, t), \quad \text{pour } 0 < z < L \quad (4.1)$$

muni des conditions aux limites :

$$x(0, t) = l_0(t), \quad x(L, t) = l_L(t) \quad (4.2)$$

et des conditions initiales :

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad \frac{\partial x(z, 0)}{\partial t} = \dot{x}_0(z) \quad (4.3)$$

avec  $\mu > 0$ .

La variable à commander  $y(t)$ , en manipulant la commande  $u(z, t)$ , est une fonction de l'état  $x(z, t)$  donnée comme suit :

$$y(t) = \mathcal{C}\left(h(x(z, t))\right) \quad (4.4)$$

où  $h$  est une fonction lisse ayant comme variable d'état  $x(z, t)$ , et  $\mathcal{C}(\cdot)$  est un opérateur linéaire borné qui dépend des performances désirées.

Pour la suite du développement, et sans perte de généralités, on considère que la sortie  $y(t)$  est une observation par moyennage spatial (cf. relation (1.8)) :

$$y(t) = \mathcal{C}(x(z, t)) = \int_0^L c(z) x(z, t) dz \quad (4.5)$$

et la commande  $u(z, t)$  est supposée distribuée, c'est-à-dire de la forme (cf. relation (1.5)) :

$$u(z, t) = b(z) u_d(t) \quad (4.6)$$

où  $b(z)$  et  $c(z)$  sont des fonctions lisses.

Le problème de commande consiste à déterminer la loi de commande  $u_d(t)$  permettant d'assurer les performances désirées pour la sortie commandée  $y(t)$ , tout en assurant la stabilité du système bouclé. Pour ce faire, on propose de réduire l'équation d'ondes (4.1) en un ensemble d'EDP hyperboliques, et ensuite d'aborder le problème de synthèse par la méthodologie proposée par Christofides et Daoutidis (1996a), et Christofides (2001).

Notons que dans la formulation du problème de commande, les deux fonctions  $b(z)$  et  $c(z)$  doivent être spécifiées et définies dans des espaces fonctionnels appropriés (Curtain et Zwart, 1995). Rappelons que les fonctions  $b(z)$  et  $c(z)$  caractérisent respectivement les systèmes d'actionneurs et de capteurs. Ces dernières dépendent des performances désirées, des données du problème, et influencent les propriétés de commandabilité et d'observabilité du système (Curtain et Zwart, 1995). Leur choix conditionne l'existence de la solution du problème de commande formulé.

Dans la présente étude, pour garantir l'obtention de la loi de commande géométrique, les fonctions  $b(z)$  et  $c(z)$  doivent vérifier la condition suivante (Maidi *et al.*, 2008c) :

$$\int_0^L c(z) b(z) dz \neq 0 \quad (4.7)$$

En effet, cette condition (4.7) revient à assurer l'existence du degré relatif de la sortie  $y(t)$  par rapport à la variable manipulée  $u_d(t)$ . Cette condition est démontrée dans la section 4.4.3.

## 4.4 Obtention de la loi de commande

Avant d'aborder le problème de synthèse de la loi de commande, on doit examiner la commandabilité du système. Cette propriété dépend non seulement du système considéré, mais aussi de la dimension de l'espace d'état et du type de la commande choisie, c'est-à-dire de la fonction  $b(z)$  (El Jai et Amouroux, 1990; Curtain et Zwart, 1995). Comme l'équation d'ondes est de deuxième ordre en temps, et caractérise la dynamique des systèmes de dimension infinie, il est très difficile de démontrer la propriété de commandabilité pour ces derniers (Gunzburger et Nicolaidis, 1989; Bastos, 1999; El Jai et Amouroux, 1990; Curtain et Zwart, 1995; Bui, 2005; Wang, 2007; Vancostenoble, 2000). De plus la complexité du cadre de la dimension infinie amène à considérer deux concepts de commandabilité distincts : commandabilité exacte et commandabilité approximative (Ray, 1989; El Jai et Amouroux, 1990; Curtain et Zwart, 1995).

Un système est dit exactement commandable si l'état final désiré  $x^d(z, t)$  peut être atteint de n'importe quel état initial  $x_0(z)$ . Il est dit approximativement commandable si l'état initial nul  $x_0(z) = 0$  peut être transféré dans un voisinage arbitraire de l'état désiré  $x^d(z, t)$  (Ray, 1989). El Jai et Amouroux (1990), et Curtain et Zwart (1995) donnent la plupart des résultats et des définitions relatifs aux SPD linéaires, particulièrement, ceux de premier ordre en temps.

Il est à noter que pratiquement tous les systèmes physiques possèdent la propriété de commandabilité approximative, ce qui est totalement suffisant pour la conception d'un correcteur adéquat (Ray, 1989).

### 4.4.1 Commandabilité d'un système modélisé par une équation d'ondes

Les propriétés fondamentales des systèmes modélisés par une équation d'ondes sont amplement étudiés dans (Curtain et Zwart, 1995, page 165). Ainsi, il a été démontré que le système (4.1) est approximativement commandable si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$\int_0^1 b(\tilde{z}) \phi_i(\tilde{z}) d\tilde{z} \neq 0, \quad \tilde{z} = \frac{z}{L}, \quad \text{pour } i \geq 1 \quad (4.8)$$

Les fonctions  $\phi_i(z)$  représentent les fonctions propres de l'opérateur différentiel spatial de l'EDP (4.1) obtenues par la résolution du problème aux valeurs propres associé donné par (cf. section 1.5.1) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial z^2} &= -\lambda \phi(z) \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(L) &= 0\end{aligned}\tag{4.9}$$

La résolution de ce système conduit au résultat suivant :

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\mu^2 \pi^2}{L^2} i^2, \quad i = \pm 1, \pm 2, \dots \\ \phi(z) &= \theta \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda} z}{\mu}\right) \\ &= \theta \sin\left(\frac{i \pi z}{L}\right), \quad i = \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}\tag{4.10}$$

où  $\theta$  est une constante telle que la condition d'orthogonalité donnée par les relations (1.14) soit vérifiée, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \theta^2 \sin(i \pi z) \sin(j \pi z) &= 1, \quad \text{pour } i = j \\ \int_0^1 \theta^2 \sin(i \pi z) \sin(j \pi z) &= 0, \quad \text{pour } i \neq j\end{aligned}\tag{4.11}$$

ce qui conduit à  $\theta = 2$ .

Ainsi, les fonctions propres sont données par :

$$\phi_i(\tilde{z}) = \sqrt{2} \sin(i \pi \tilde{z})\tag{4.12}$$

La condition (4.8) montre clairement que la commandabilité du système dépend de type de commande choisie caractérisée par la fonction  $b(z)$ . En somme, le choix de  $b(z)$ , ou le type de commande, doit se faire d'une manière à satisfaire la condition de commandabilité approximative (4.8), et la condition de l'existence du degré relatif (4.7) pour concevoir une commande géométrique suivant l'approche proposée dans ce présent chapitre.

#### 4.4.2 Réduction de l'équation d'ondes

La démarche proposée pour concevoir une commande géométrique, de type distribuée, est basée sur la réduction de l'équation d'ondes, qui est de deuxième ordre en temps, à un ensemble de trois EDP hyperboliques de premier ordre en temps. Ceci permet d'appliquer aisément les concepts de commande géométrique tels qu'ils sont abordés par Christofides

et Daoutidis (1996b), et Christofides (2001). Dans la suite du développement, les fonctions  $b(z)$  et  $c(z)$  sont supposées répondre aux conditions (4.8) et (4.7).

Il est simple de démontrer que l'introduction du nouveau vecteur d'état suivant (Wang, 2007) :

$$\begin{aligned} X_r(z, t) &= \left[ X_{r_1}(z, t), X_{r_2}(z, t), X_{r_3}(z, t) \right]^T \\ &= \left[ x(z, t), \frac{\partial x(z, t)}{\partial t}, \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right]^T \end{aligned} \quad (4.13)$$

permet de réduire l'équation d'ondes (4.1) à un système de trois équations hyperboliques de premier ordre en temps, linéaires, suivant (Maidi *et al.*, 2008c) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_{r_1}(z, t)}{\partial t} &= X_{r_2}(z, t) \\ \frac{\partial X_{r_3}(z, t)}{\partial t} &= \frac{\partial X_{r_2}(z, t)}{\partial z} \\ \frac{\partial X_{r_2}(z, t)}{\partial t} &= \mu^2 \frac{\partial X_{r_3}(z, t)}{\partial z} + b(z) u_d(t) \end{aligned} \quad (4.14)$$

avec des conditions initiales  $X_r(z, 0)$  et aux limites appropriées  $X_r(z, t)$ ,  $z \in \Omega$ . La spécification de ces dernières n'est pas requise pour la conception de la loi de commande.

Du fait de la linéarité du système d'EDP (4.14), on démontrera, par la suite, que la loi de commande  $u_d(t)$  prend la forme (Maidi *et al.*, 2008c) :

$$u_d(t) = -\mathcal{Q}\left(X_r(z, t)\right) + \mathbf{q}(b(z)) \nu(t) \quad (4.15)$$

où  $\nu(t)$  représente une entrée externe.

Pour des considérations d'implantation, la loi de commande (4.15) doit être exprimée en fonction de l'état original  $x(z, t)$  du système à commander donné par l'équation (4.1). Ainsi, les relations liant les variables caractéristiques de l'état  $X_r(z, t)$  et l'état original  $x(z, t)$ , données par (4.13), permettent d'écrire la loi de commande (4.15), sous la forme implantable suivante (Maidi *et al.*, 2008c) :

$$u_d(t) = -\mathcal{S}(x(z, t)) + \mathbf{s}(b(z)) \nu(t) \quad (4.16)$$

où  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathcal{S}$ , et  $\mathbf{s}$  sont des opérateurs différentielles linéaires bornés.

Pour déterminer la loi de commande  $u_d(t)$  sous la forme (4.15), la notion du degré relatif sera également utilisée.

### 4.4.3 Degré relatif

Du fait de la linéarité de la relation (4.6), il ressort que le degré relatif de la sortie  $y(t)$  par rapport à l'entrée  $u(z, t)$  est préservé par rapport à l'entrée  $u_d(t)$ . Le degré relatif du système (4.14) est déterminé en considérant les dérivées temporelles successives de la sortie (4.4), calculées comme suit (Maidi *et al.*, 2008c) :

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{C}(x(z, t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\mathcal{C}(x(z, t)) = \mathcal{C}\left(\frac{\partial x(z, t)}{\partial t}\right) \\ &= \mathcal{C}\left(X_{r_2}(z, t)\right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy^2(t)}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\mathcal{C}\left(X_{r_2}(z, t)\right) = \mathcal{C}\left(\frac{\partial X_{r_2}(z, t)}{\partial t}\right) \\ &= \mu^2 \mathcal{C}\left(\frac{\partial X_{r_3}(z, t)}{\partial z}\right) + \mathcal{C}(b(z)) u_d(t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

comme

$$\mathcal{C}(b(z)) = \int_0^L c(z) b(z) dz \neq 0, \quad (4.19)$$

le degré relatif  $\sigma$  de la sortie  $y(t)$  par rapport à l'entrée  $u_d(t)$  est égal à 2.

De la même manière, en substituant la loi de commande (4.16) dans le système (4.14), on démontre que cette loi de commande préserve le degré relatif du système en boucle fermée, c'est-à-dire entre la sortie  $y(t)$  et l'entrée externe  $\nu(t)$ . Par conséquent, le comportement dynamique du système en boucle fermée est caractérisé par l'équation différentielle suivante :

$$\tau_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \tau_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \nu(t) \quad (4.20)$$

où les paramètres  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont choisis de manière à assurer la stabilité du système et les performances spécifiées pour la boucle fermée (Christofides et Daoutidis, 1996a; Christofides, 2001), par exemple en utilisant un placement de pôles minimisant le critère ITAE (Corriou, 2004).

### 4.4.4 Expression générale de la loi de commande

La loi de commande  $u_d(t)$ , sous la forme (4.15), est déduite (Maidi *et al.*, 2008c) en substituant les expressions des termes  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2}$  et  $\frac{dy(t)}{dt}$  données respectivement par les

relations (4.18) et (4.17) dans la relation (4.20), d'où :

$$u_d(t) = \frac{1}{\tau_2 \mathcal{C}(b(z))} \times \left\{ \nu(t) - \mathcal{C}(X_{r_1}(z, t)) - \tau_1 \mathcal{C}(X_{r_2}(z, t)) - \tau_2 \mu^2 \mathcal{C}\left(\frac{\partial X_{r_3}(z, t)}{\partial z}\right) \right\} \quad (4.21)$$

Sous la forme (4.16), cette dernière s'écrit comme suit (Maidi *et al.*, 2008c) :

$$u_d(t) = \frac{1}{\tau_2 \mathcal{C}(b(z))} \times \left\{ \nu(t) - \mathcal{C}(x(z, t)) - \tau_1 \mathcal{C}\left(\frac{\partial x(z, t)}{\partial t}\right) - \tau_2 \mu^2 \mathcal{C}\left(\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}\right) \right\} \quad (4.22)$$

ce qui donne, par identification avec la relation (4.16), les opérateurs différentiels suivants :

$$\mathcal{S}(\cdot) = \left[ \tau_2 \int_{\Omega} c(z) b(z) dz \right]^{-1} \left[ \mathcal{C}(\cdot) + \tau_1 \mathcal{C}\left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial t}\right) + \tau_2 \mu^2 \mathcal{C}\left(\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z^2}\right) \right] \quad (4.23)$$

$$\mathbf{s}(\cdot) = \left[ \tau_2 \int_{\Omega} c(z) b(z) dz \right]^{-1} \quad (4.24)$$

Il est à noter que l'implantation de la loi de commande (4.22) nécessite des différentiations de l'état du système  $x(z, t)$ , par rapport aux variables temps et espace, ce qui requiert une estimation globale ou partielle de ce dernier. Dans ce cas, une attention doit être accordée pour le choix de la fonction  $c(z)$  qui conditionne l'observabilité du système (El Jai et Amouroux, 1990; Curtain et Zwart, 1995).

Notons aussi que des modifications peuvent être opérées sur la loi de commande pour tenir compte de la consigne désirée  $y^d(t)$  (Isidori, 1995; Corriou, 2004). Ceci dépend de l'équation d'évolution du système. Ce point sera abordé dans l'exemple d'application de la section suivante.

## 4.5 Application à une corde vibrante

La capacité de poursuite de consigne du correcteur proposé, en présence d'une incertitude paramétrique, sera illustrée par une application portant sur la commande du déplacement vertical d'une corde vibrante schématisée sur la Figure 4.1.

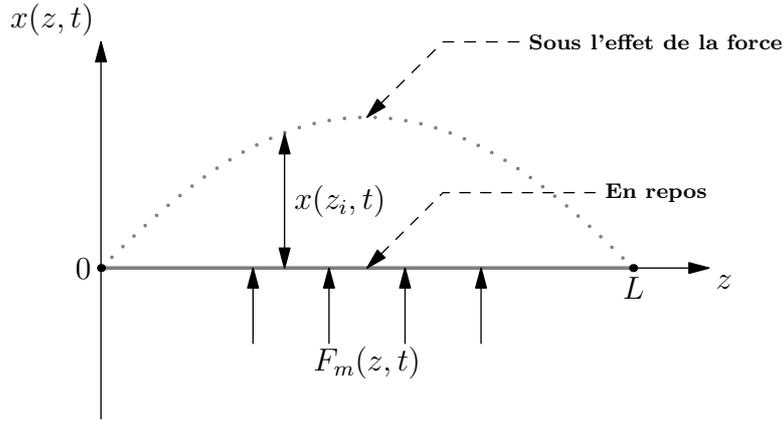


FIG. 4.1 – Déplacement d'une corde vibrante.

### 4.5.1 Description et modèle de la corde

La corde supposée uniforme, de longueur  $L$ , et de densité massique  $\rho_m$ , exprimée en unité de masse par unité de longueur, est fixée, d'une manière tendue, à ses extrémités  $z = 0$  et  $z = L$ . Le déplacement  $x$ , par rapport à l'axe  $z$ , est une fonction des variables temps  $t$  et espace  $z$ .

Pour les déplacements faibles de la corde, on suppose que la tension  $\Gamma$  dans la corde reste constante, et la force de gravité est trop faible par rapport à la tension  $\Gamma$  ( $\rho_m \mathbf{g} L \ll \Gamma$ , où  $\mathbf{g}$  est l'accélération de la pesanteur). Ceci permet de négliger la force de gravité, puisque le déplacement de la corde n'est pas notablement affecté. Par conséquent, la corde reste soumise uniquement à la force distribuée  $F_m(z, t) = b(z) f_{m_d}(t)$  exprimée en unité de force par unité de longueur (Maidi *et al.*, 2008c).

Dans ces conditions, le déplacement  $x(z, t)$  de la corde est décrit par l'équation d'ondes comme suit (Curtain et Zwart, 1995; Allaire, 2005; Maidi *et al.*, 2008c) :

$$\rho_m \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} = \Gamma \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + F_m(z, t) \quad (4.25)$$

La force  $F_m(z, t)$  est supposée maximale au milieu de la corde, et son action décroît en s'approchant de ses extrémités, et deviendra nulle en ces deux points, c'est-à-dire  $F_m(0, t) = F_m(L, t) = 0$ . Cette distribution peut être caractérisée par une fonction de Bézier quadratique de la forme :

$$b(z) = \rho_m z (L - z) \quad (4.26)$$

Initialement, la corde est en repos ( $F_m(z, t) = 0$ ), ce qui correspond aux conditions initiales suivantes :

$$x(z, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (4.27)$$

et comme la corde est fixée aux extrémités  $z = 0$  et  $z = L$ , ceci donne les conditions aux limites de Dirichlet suivantes :

$$x(0, t) = 0, \quad x(L, t) = 0 \quad (4.28)$$

### 4.5.2 Loi de commande pour la corde

L'objectif de la commande consiste à déterminer une loi de commande  $f_{m_d}(t)$ , c'est-à-dire une force, permettant de positionner le point milieu, déplacement au point  $z = L/2$ , de la corde à une position désirée donnée  $y^d(t)$ . Par conséquent, la sortie commandée prend la forme suivante :

$$y(t) = \int_0^L \delta\left(z - \frac{L}{2}\right) x(z, t) dz = x\left(\frac{L}{2}, t\right) \quad (4.29)$$

par identification dans la relation (4.5), il vient  $c(z) = \delta(z - L/2)$ . La fonction  $\delta(\cdot)$  désigne la distribution de Dirac.

Dans ce cas, il est facile de démontrer que le choix effectué pour  $b(z)$  et  $c(z)$  vérifie les conditions (4.8) et (4.7). Ainsi, la solution du problème de commande posé peut être abordée par l'approche proposée.

En posant  $\mu^2 = \Gamma/\rho_m$ , et en tenant compte de l'entrée externe  $\nu(t)$ , la relation (4.4) donne la loi de commande suivante (Maidi *et al.*, 2008c) :

$$\begin{aligned} f_{m_d}(t) &= \frac{1}{\tau_2 b(L/2)} \times \left\{ \nu(t) - x(L/2, t) \right. \\ &\quad \left. - \tau_1 \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} \Big|_{z=L/2} - \tau_2 \frac{\Gamma}{\rho_m} \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} \Big|_{z=L/2} \right\} \\ &= \frac{4}{\tau_2 \rho_m L^2} \times \left\{ \nu(t) - y(t) \right. \\ &\quad \left. - \tau_1 \frac{\partial y(t)}{\partial t} - \tau_2 \mu^2 \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} \Big|_{z=L/2} \right\} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Pour tenir compte de l'entrée de référence  $y^d(t)$ , cette loi de commande sera modifiée de la manière suivante (Kravaris et Kantor, 1990b; Isidori, 1995; Corriou, 2003, 2004) :

$$\begin{aligned} f_{m_d}(t) &= \frac{4}{\tau_2 \rho_m L^2} \times \left\{ \nu(t) - \left[ y(t) - y^d(t) \right] \right. \\ &\quad \left. - \tau_1 \left[ \frac{\partial y(t)}{\partial t} - \left( \frac{\partial y(t)}{\partial t} \right)^d \right] - \tau_2 \mu^2 \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} \Big|_{z=L/2} \right\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Cette dernière peut être vue comme la somme de trois termes (Maidi *et al.*, 2008c) :

$$f_{m_d}(t) = \frac{4}{\tau_2 \rho_m L^2} \left[ \nu(t) + f_{m_d}^P(t) + f_{m_d}^S(t) \right] \quad (4.32)$$

avec :

$$\begin{aligned} f_{m_d}^P(t) &= -[y(t) - y^d(t)] - \tau_1 \left[ \frac{\partial y(t)}{\partial t} - \left( \frac{\partial y(t)}{\partial t} \right)^d \right], \quad (\text{terme assurant la poursuite}) \\ f_{m_d}^S(t) &= -\tau_2 \mu^2 \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} \Big|_{z=L/2}^d, \quad (\text{terme lié à la convexité}) \end{aligned}$$

Le placement de pôles est réalisé par le choix des paramètres  $\tau_1$  et  $\tau_2$ . Comme  $f_{m_d}^S(t)$  correspond à la dérivée spatiale de deuxième ordre, sa nature diffère de celles des autres termes, puisqu'elle est liée à la convexité de la corde. Démontrons que le terme  $f_{m_d}^S(t)$  est proportionnel à la valeur stationnaire de la consigne désirée  $y^d(t)$ .

En régime statique, le modèle de la corde prend la forme :

$$0 = \mu^2 \frac{\partial^2 x(z)}{\partial z^2} + z(L - z) f_{m_d}^S \quad (4.33)$$

La solution de ce modèle stationnaire vérifiant les conditions aux limites (4.28) est donnée par :

$$x(z) = \frac{f_{m_d}^S}{12 \mu^2} (z^4 - 2Lz^3 + L^3 z) \quad (4.34)$$

et pour  $z = \frac{L}{2}$ , on a :

$$y^d = x\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5L^4}{192 \mu^2} f_{m_d}^S \quad (4.35)$$

d'où :

$$f_{m_d}^S = \frac{192 \mu^2}{5 L^4} y^d \quad (4.36)$$

On constate effectivement que  $f_{m_d}^S$  dépend linéairement de la valeur stationnaire de la consigne  $y^d(t)$ .

La loi de commande (4.32) permet d'exploiter des techniques de commande robuste, pour le système linéaire entrée externe  $\nu(t)$ –sortie commandée  $y(t)$  afin d'améliorer ses performances en présence des erreurs de modélisation et des différentes incertitudes possibles. Dans cette application, pour assurer une erreur asymptotique nulle, en présence d'une incertitude paramétrique sur le paramètre  $\Gamma$ , l'entrée externe  $\nu(t)$  est définie par un correcteur PI (Kravaris et Kantor, 1990b; Isidori, 1995; Corriou, 2004), c'est-à-dire :

$$\nu(t) = K_c \left[ y^d(t) - y(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t (y^d(\xi) - y(\xi)) d\xi \right] \quad (4.37)$$

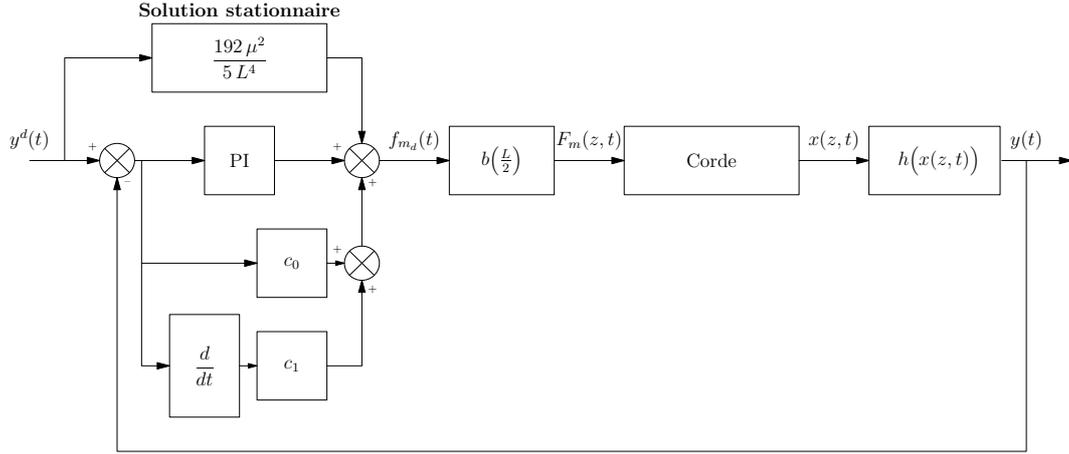


FIG. 4.2 – Stratégie de commande du déplacement de la corde.

où  $K_c$  et  $\tau_I$  sont respectivement le gain proportionnel et la constante intégrale du correcteur PI.

La Figure 4.2 donne la stratégie de commande finale adoptée pour la commande du déplacement de la corde.

### 4.5.3 Évaluation des performances du correcteur

Dans cette section, les performances du correcteur en poursuite sont évaluées en présence d'une incertitude paramétrique. L'implantation de la loi de commande (4.32) est réalisée sous sa forme discrète en considérant une période d'échantillonnage  $\Delta t = 0.25$  s. La dérivée spatiale de deuxième ordre est discrétisée par la différence finie centrée donnée comme suit :

$$\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} = \frac{x(z + \Delta z, t) - 2x(z, t) + x(z - \Delta z, t)}{(\Delta z)^2}, \quad \Delta z \leq z \leq L - \Delta z \quad (4.38)$$

et un nombre de points de discrétisation  $N = 21$  est considéré.

Les paramètres du système et du correcteur sont résumés respectivement dans les Tableaux 4.1 et 4.2. Les paramètres du correcteur sont déterminés par la technique de placement de pôles, et le paramètre  $\tau_1$  est choisi faible, puisque la corde montre une forte sensibilité au changement de consigne qui tend à osciller, à cause des larges variations de la dérivée de la sortie commandée dans la loi de commande (4.31). Ces variations peuvent être réduites par un filtrage adéquat.

En plus, pour éviter les fortes oscillations de la corde dues à des changements brusques de la grandeur de consigne, les deux grandeurs  $f_{m_d}^s(t)$  et  $y^d(t)$  sont filtrées par un filtre de deuxième ordre de constante de temps égale à 2 s, et d'un facteur d'amortissement égal à

Désignation	Symbole	Valeur
Densité massique de la corde	$\rho_m$	$0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$
Tension dans la corde	$\Gamma$	$20 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Longueur de la corde	$L$	1 m

TAB. 4.1 – Paramètres de la corde.

	Retour d'état		Correcteur PI	
Paramètre	$\tau_1$	$\tau_2$	$K_c$	$\tau_I$
Valeur	$\frac{0.005}{\kappa \omega_0}$	$\frac{1}{2.15 \kappa \omega_0}$	$2.15 (1 - \kappa) \omega_0^2$	$0.5 \frac{K_c}{\omega_0^3}$

$$\omega_0 = 1.1 \sqrt{f_{m_d}^s(t)}$$

TAB. 4.2 – Paramètres de réglage de correcteur pour  $\kappa = 0.8$ .

1.2.

L'incertitude paramétrique est introduite dans le calcul du terme  $f_{m_d}^s(t)$  de la loi de commande (4.32). Ainsi, une erreur de  $-20\%$  a été considérée pour le paramètre  $\Gamma$  lors de la résolution itérative de l'équation (4.33) donnant  $f_{m_d}^s(t)$  pour une consigne désirée  $y^d(t)$  donnée.

La Figure 4.3, montre que l'entrée en régime stationnaire  $f_{m_d}^s(t)$  dépend linéairement de la consigne désirée  $y^d(t)$ .

Le test de simulation effectué, pour évaluer les performances du correcteur, concerne le problème de poursuite et consiste à imposer deux échelons de consigne aux instants  $t = 100\text{s}$  et  $t = 200\text{s}$  correspondant respectivement à  $y^d(t) = 8\text{mm}$  et  $y^d(t) = 4\text{mm}$ . La Figure 4.4 montre que la sortie converge, mais d'une manière lente, vers la référence désirée, en dépit de l'incertitude paramétrique introduite dans le calcul de  $f_{m_d}^s(t)$ , et la grandeur de commande (Figure 4.5) présente des variations physiquement acceptables. De plus, la Figure 4.6 montre que les profils du déplacement  $x(z, t)$ , aux instants  $t = 100\text{s}$  et  $t = 200\text{s}$ , sont réalistes et prennent la forme du profil imposée par le choix de la fonction  $b(z)$ . Les allures des profils obtenus prouvent que l'effet de la force  $u(z, t)$  ou respectivement  $f_{m_d}^s(t)$  est distribué, puisque cette dernière est maximale au milieu de la corde et décroît en allant vers les extrémités de la corde où elle deviendra nulle. Le tracé tridimensionnel de l'évolution spatio-temporelle du déplacement de la corde (Figure 4.7) durant la poursuite de référence confirme le bon comportement et la performance du correcteur.

Un autre point qui mérite d'être évoqué est l'apport du troisième terme  $f_{m_d}^s(t)$  de la loi de commande synthétisée. Les Figures 4.9–4.8, confirme que ce terme joue un rôle

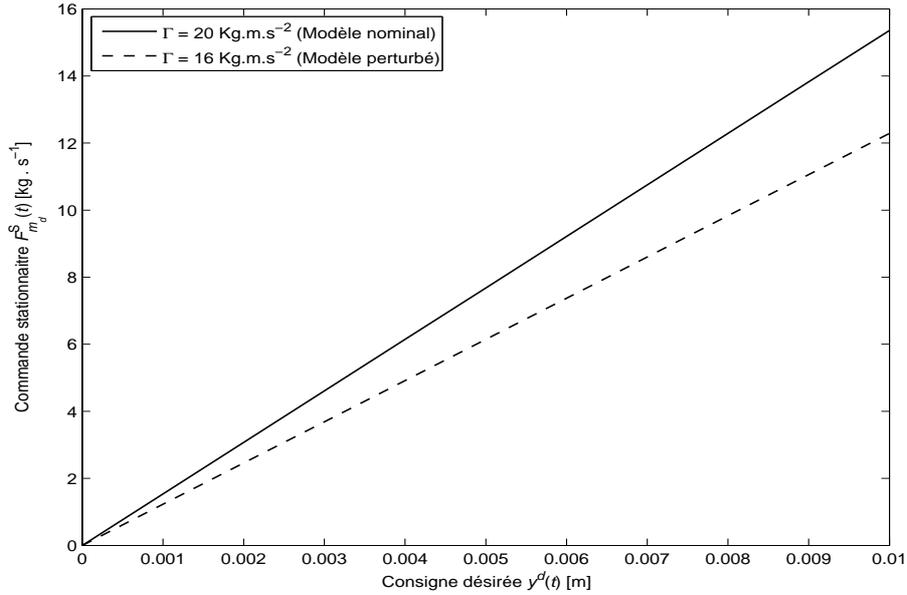


FIG. 4.3 – Commande stationnaire en fonction de la consigne désirée pour une incertitude de  $-20\%$  sur le paramètre  $\Gamma$ .

important dans la commande. Les deux autres termes,  $\nu(t)$  et  $f_{m_d}^P(t)$  sont nécessaires pour obtenir exactement la trajectoire désirée, puisque la sortie est obtenue en considérant que le terme  $f_{m_d}^S(t)$  présente un écart permanent.

Notons encore qu'une convergence rapide vers la consigne désirée peut être obtenue en diminuant la valeur du paramètre  $\kappa$  du Tableau 4.2. Ceci permet d'accorder plus d'importance à l'action du correcteur PI par rapport à celle du retour d'état.

Maintenant, dans le cas où la solution stationnaire  $f_{m_d}^S(t)$  est calculée sans incertitudes paramétriques, la sortie commandée (Figure 4.10) suit très correctement la consigne désirée, et la variation de la commande  $f_{m_d}(t)$  reste physiquement admissible (Figure 4.11). Ce cas mérite d'être signalé bien qu'il présente peu d'intérêt par rapport au test de la robustesse examiné qui correspond à la réalité pratique.

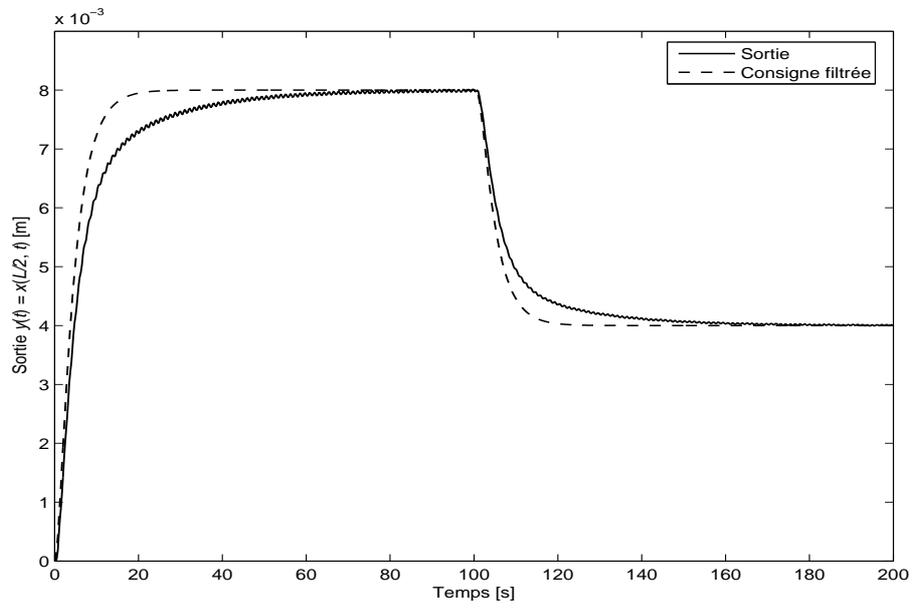


FIG. 4.4 – Évolution de la sortie commandée.

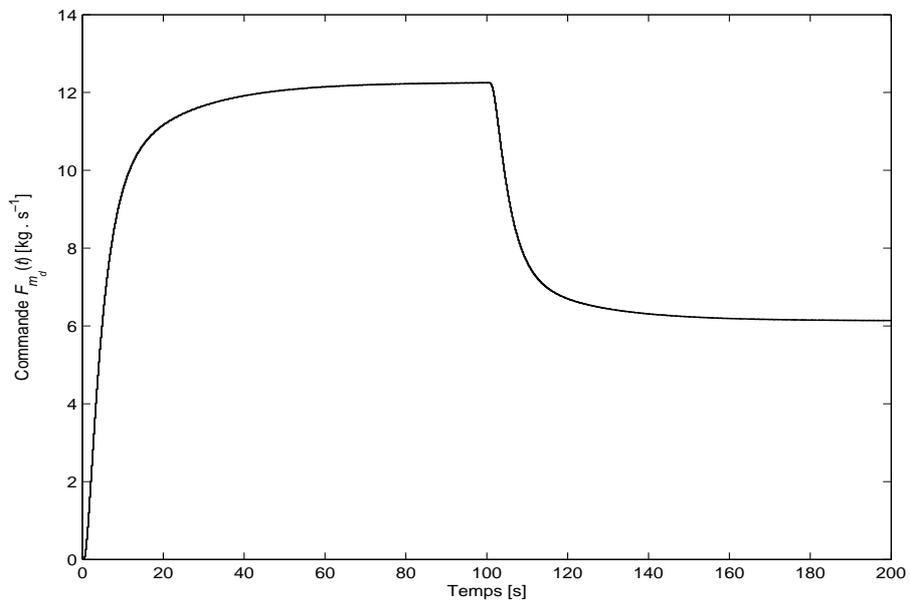


FIG. 4.5 – Évolution de la variable manipulée.

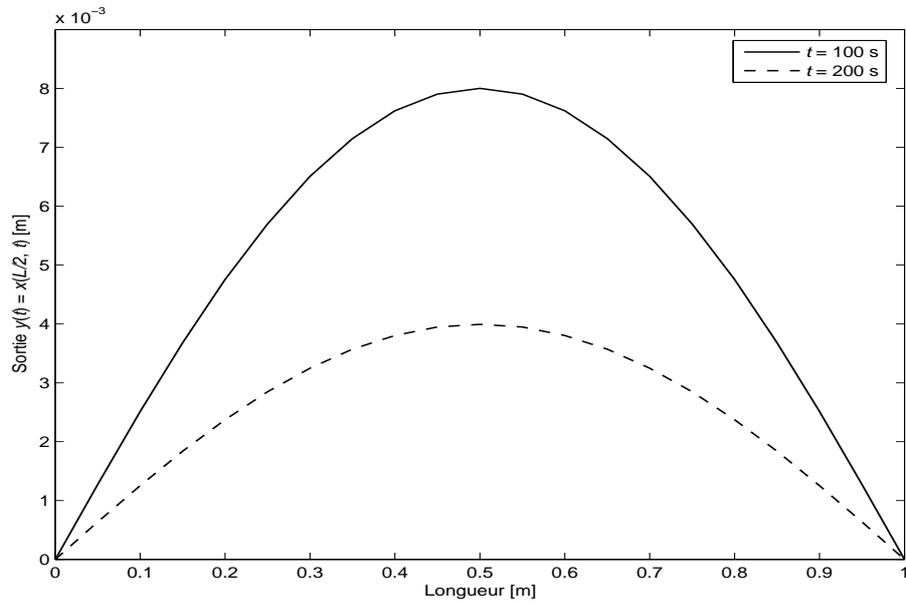


FIG. 4.6 – Profils du déplacement.

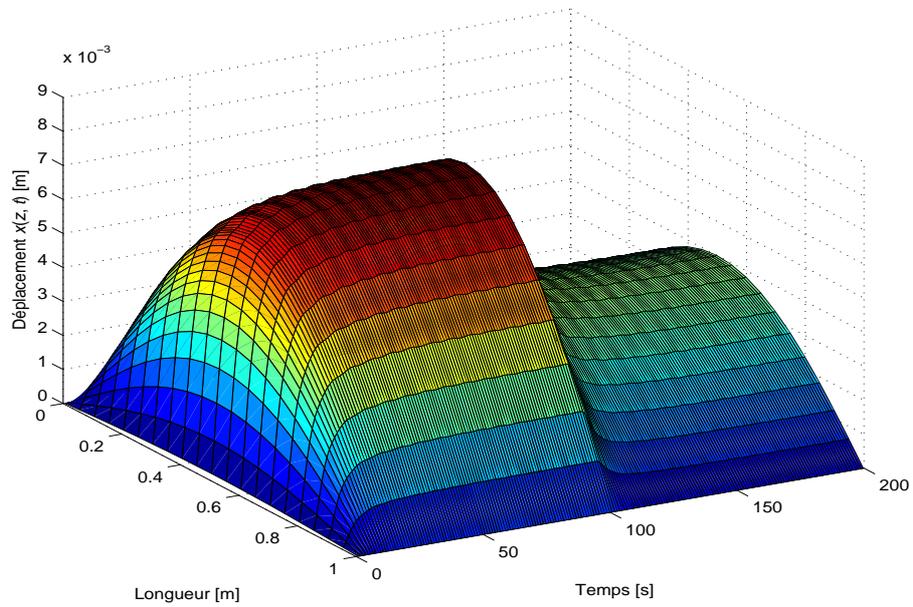


FIG. 4.7 – Évolution spatio-temporelle du déplacement de la corde.

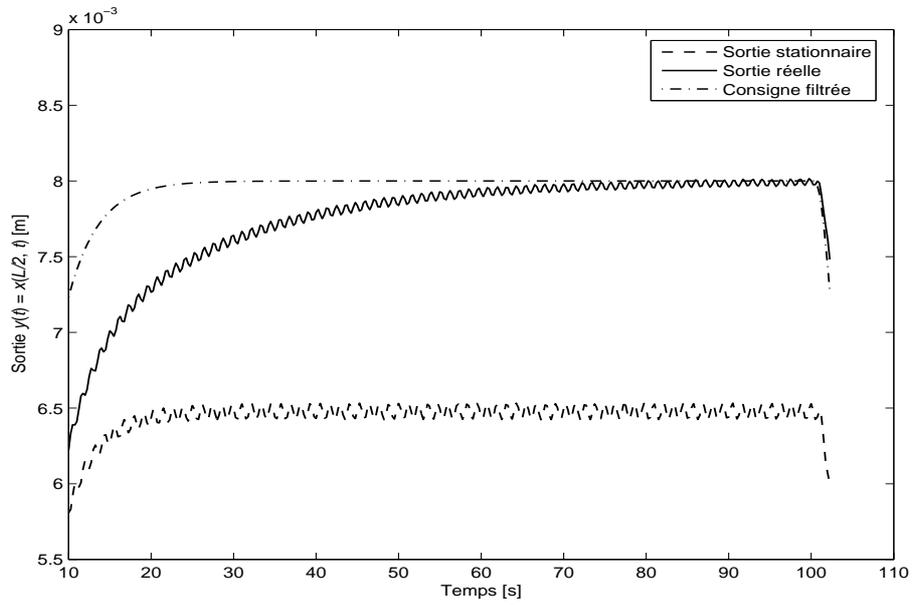


FIG. 4.8 – Comparaison entre la sortie réelle et la sortie stationnaire avec consigne.

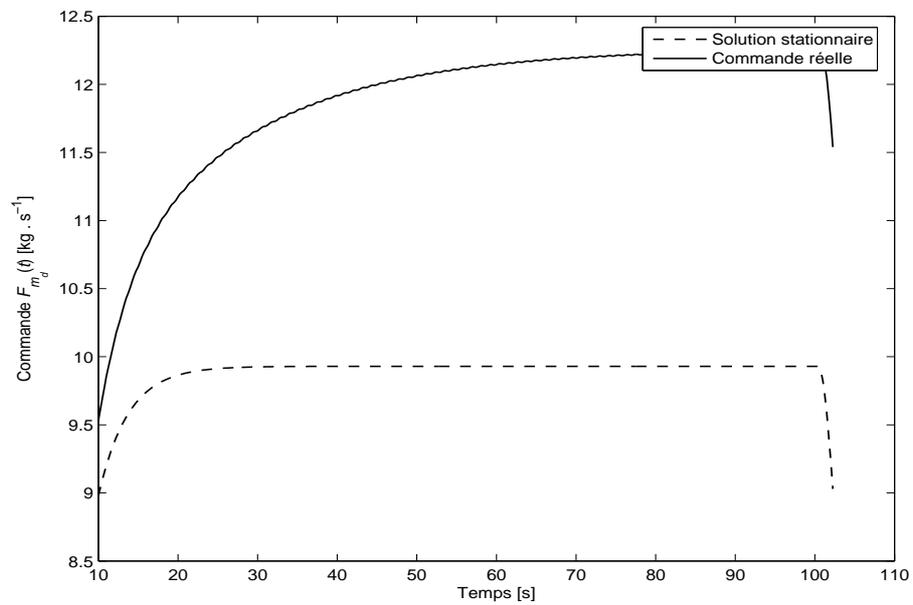


FIG. 4.9 – Comparaison entre la commande réelle et la commande stationnaire.

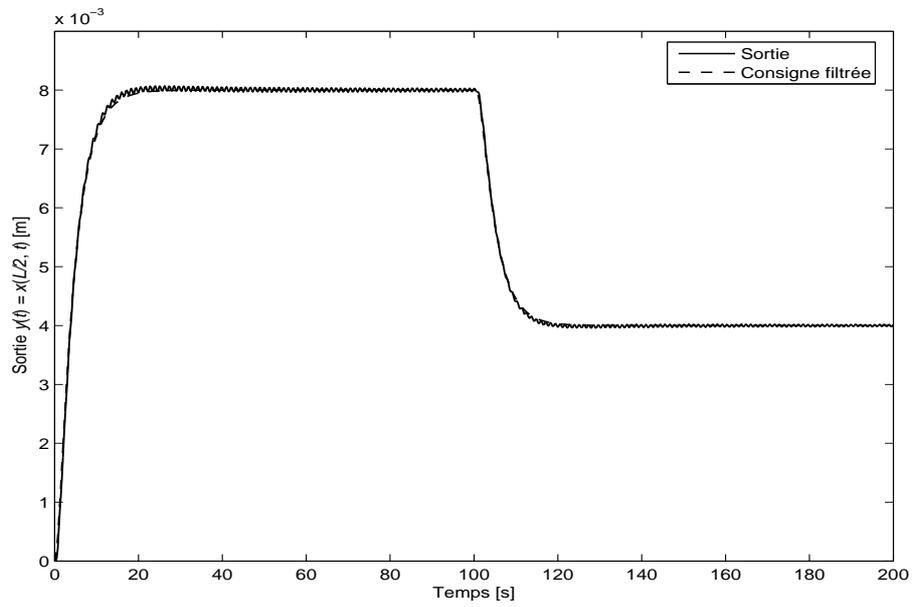


FIG. 4.10 – Évolution de la sortie commandée sans incertitudes.

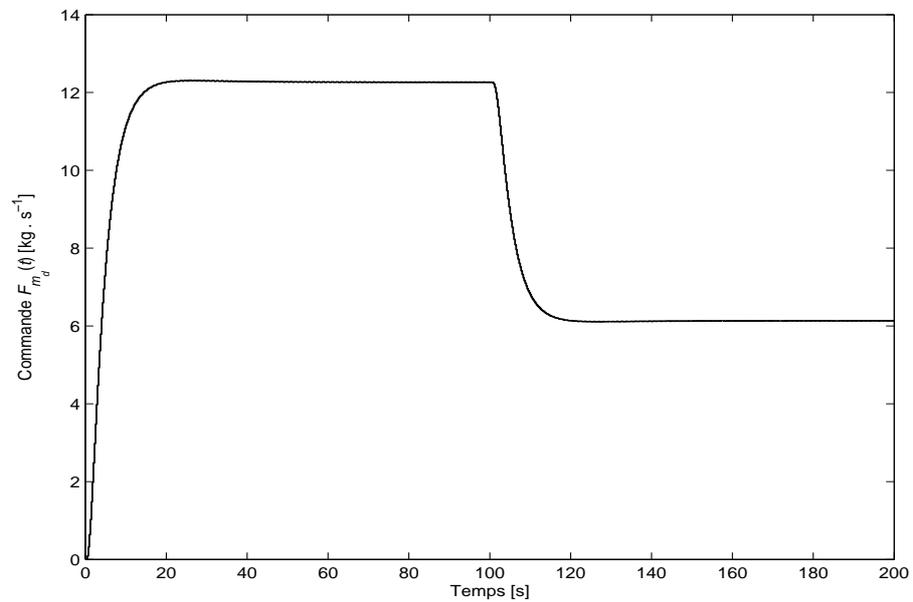


FIG. 4.11 – Évolution de la variable manipulée sans incertitudes.

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une démarche de synthèse d'une loi de commande géométrique distribuée a été proposée pour les systèmes physiques dont le comportement dynamique est régi par une équation d'ondes. Cette dernière est une EDP de deuxième ordre par rapport au temps.

Ainsi, après avoir introduit les conditions relatives au degré relatif et à la commandabilité du système, une expression générale du retour d'état a été déduite en réduisant l'équation d'ondes à un ensemble de trois EDP hyperboliques linéaires du premier ordre en temps linéaires. Cette approche peut être facilement généralisée aux systèmes hyperboliques d'ordre plus élevé vu que cette réduction est toujours réalisable.

L'approche proposée pose des conditions liées au degré relatif et à la propriété de commandabilité du système. Ces dernières dépendent directement des fonctions caractérisant le système d'actionneurs et de capteurs. Il est important de noter que ces dernières doivent être choisies de façon à assurer les propriétés de commandabilité et d'observabilité, qui sont importantes pour la commande du système, en plus de la condition d'existence du degré relatif à vérifier pour concevoir une loi de commande géométrique.

L'approche proposée a été illustrée par une application concernant la commande du déplacement d'une corde vibrante où un correcteur PI a été introduit pour assurer une robustesse à des éventuelles erreurs de modélisation et aux incertitudes paramétriques. Les résultats de la simulation obtenus, en considérant une incertitude paramétrique significative sur la tension de la corde, ont démontré la justesse et les performances de la stratégie de commande proposée.

# Conclusion générale

Les performances de la commande d'un système à paramètres distribués (SPD) de type hyperbolique basées sur la stratégie de pré-approximation, qui consiste à approximer le modèle EDP original, de dimension infinie, par un système à paramètres localisés (EDO), de dimension finie, est limitée principalement par deux facteurs :

- la pré-approximation conduit, en général, à des conclusions inexactes sur les propriétés fondamentales (commandabilité, observabilité et stabilité) du système original,
- la séparation des modes de l'opérateur différentiel du système original en deux parties : modes lents, capturant la dynamique du système, et modes rapides est difficile à établir vu que ces derniers sont regroupés le long d'une droite parallèle à l'axe imaginaire du plan complexe. Ceci amène à considérer un système de dimension finie très élevée pour la conception du correcteur, ce qui complique davantage l'étape de synthèse et surtout d'implantation. L'utilisation des méthodes de réduction, du modèle ou du correcteur, ne présente aucun secours et l'approche de réduction est totalement déconseillée pour la commande des systèmes hyperboliques.

Ces problématiques sont des contraintes importantes pour l'application des commandes développées pour des systèmes à paramètres localisés, puisque l'étape de synthèse est basée essentiellement sur un modèle EDO qui est sensé de traduire correctement le comportement dynamique du modèle EDP. Ceci n'est pas le cas avec un modèle EDO approximant un système hyperbolique.

Afin de concevoir des systèmes de commande pour les systèmes hyperboliques, l'utilisation de la stratégie de post-approximation basée sur le modèle à paramètres distribués est la plus recommandée. Cette dernière a été considérée dans cette thèse, et l'objectif consiste à proposer des approches de commande dont la synthèse est faite directement en considérant le modèle EDP, ce qui permet d'accroître les performances des systèmes à commander.

Pour rester dans un contexte de recherche appliquée et pour favoriser le développement de solutions viables en pratique, des applications à des systèmes physiques, parmi les plus rencontrés dans la littérature, ont été considérées. Il s'agit d'un échangeur de chaleur à température d'enveloppe homogène, d'un échangeur de chaleur à contre-courant, et d'une corde vibrante.

Les objectifs spécifiques suivants ont été considérés :

- application des techniques de commande moderne pour les systèmes hyperboliques basées sur la stratégie de post-approximation,
- étendre la stratégie de post-approximation à des systèmes à paramètres distribués (SPD) d'ordre deux en temps (équation d'ondes).

**Le chapitre 1** a présenté les différentes notions relatives aux SPD, et une synthèse d'une recherche bibliographique axée principalement sur les différentes approches de commande proposées dans la littérature. Ainsi, après avoir défini les SPD, le modèle général et la classification de ces derniers ont été présentés, le chapitre a présenté un état de l'art sur les stratégies de commande des SPD scindées en deux catégories, en l'occurrence la stratégie de pré-approximation et de post-approximation. Comme l'étude est limitée aux systèmes de type convection-réaction, le chapitre a abordé, brièvement, la méthode des lignes utilisée pour l'objectif de simulation en boucle fermée.

**Le chapitre 2** a présenté une approche d'optimisation des paramètres d'adaptation d'une commande PI floue distribuée d'un échangeur de chaleur à température d'enveloppe homogène. Tout d'abord le modèle de l'échangeur de chaleur considéré a été présenté suivi de la formulation du problème de commande sous forme d'un problème d'optimisation avec contraintes. La fonction objectif est un critère de performances, et les contraintes sont représentées d'une part par les relations de passage entre le PI classique et le PI Flou, et d'autre part par le modèle de l'échangeur de chaleur muni de la condition initiale et de la condition aux limites. Il a été démontré que l'introduction des relations de passages simplifie le problème d'optimisation, initialement formulé avec trois variables de décision, en réduisant le nombre de ces dernières à une seule variable. Cette approche permet de considérer un modèle de dimension finie sans se soucier de sa dimension, qui doit être élevée, puisque la résolution se fait d'une manière numérique en utilisant des techniques d'optimisation réputées puissantes sur des ordinateurs dotés d'une grande puissance et rapidité de calcul. Cette approche a été appliquée avec succès pour commander une température moyenne d'un échangeur de chaleur par la manipulation de la température de l'enveloppe considérée distribuée et homogène.

**Le chapitre 3** a présenté une stratégie de commande originale par post-approximation. Il s'agit d'une commande géométrique à la frontière d'un échangeur de chaleur à contre-courant dont la dynamique est décrite par deux EDP. Il a été démontré qu'une loi de commande de nature distribuée peut être obtenue par un choix judicieux des variables caractéristiques du système. Ainsi, après avoir présenté le modèle de l'échangeur de chaleur à contre-courant, deux stratégies de commande à la frontière, basées sur la commande géométrique, ont été proposées, étudiées et

comparées. La première stratégie considère comme variable manipulée la température du fluide externe à l'entrée de l'échangeur. Dans la deuxième stratégie, c'est la vitesse du fluide externe qui est manipulée. L'objectif était de commander la température du fluide interne à la sortie de l'échangeur. L'étude a été présentée d'une manière approfondie dans le cas de la manipulation de la température d'entrée du fluide externe. Cette stratégie de commande a été privilégiée dans l'étude effectuée, puisqu'elle échappe à la complexité de la variation du régime hydrodynamique qui nécessite une adaptation, souvent difficile à concevoir, des paramètres du correcteur.

**Le chapitre 4** a présenté également une stratégie de commande originale par post-approximation d'un système hyperbolique de second ordre en temps, c'est-à-dire un système décrit par une équation d'ondes traduisant les phénomènes de propagations et de vibrations. Par réduction de l'équation d'ondes à un ensemble d'équations hyperboliques du premier ordre, une loi de commande géométrique de nature distribuée a été obtenue. Ainsi, après avoir présenté l'équation d'ondes, et formulé le problème de commande, des conditions relatives à la synthèse ont été imposées et expliquées. Puis l'expression de la loi de commande a été déduite et donnée sous forme d'un retour d'état faisant intervenir des opérateurs spatio-temporels. Cette approche de commande a été illustrée par une application portant sur la commande du déplacement d'une corde vibrante, où la loi de commande développée a été modifiée de manière à tenir compte de la grandeur de référence.

En résumé, les résultats obtenus montrent bien que l'utilisation d'un modèle EDP assure un accroissement des performances des systèmes hyperboliques en assurant une commande de qualité en poursuite, en régulation, et vis-à-vis des incertitudes paramétriques ou de modélisation. Quoique la logique floue donne de résultats appréciables, l'utilisation du modèle direct dans la synthèse s'avère compliquée à cause de la nature heuristique de cette technique de commande, c'est pourquoi des techniques de synthèse basée sur l'optimisation numérique sont plus recommandées. La commande géométrique, basée sur la notion du degré relatif, se présente comme l'approche la plus adaptée au problème de commande, par la stratégie de post-approximation, des systèmes hyperboliques lorsque ce degré relatif existe.

Le travail effectué dans cette thèse a permis de réaliser les contributions suivantes dans le domaine de la commande des SPD de type hyperbolique :

- application de la logique floue à la commande des SPD,
- proposition d'une stratégie de commande géométrique à la frontière des systèmes hyperboliques à conditions aux limites non homogènes,
- application de la commande géométrique à des systèmes hyperboliques de second ordre en temps.

Bien que ces contributions constituent des réponses fructueuses à des problèmes de commande souvent rencontrés, néanmoins le travail présenté est loin de répondre à toutes les questions relatives à la commande des SPD hyperboliques. Les solutions présentées sont très intéressantes et constituent un ensemble d'idées qui peuvent être adoptées ou explorées pour développer d'autres approches de commande de la stratégie de post-approximation.

Pour terminer, certains points sur la commande des systèmes hyperboliques présentés dans cette thèse peuvent être aussi explorés tels que :

- l'application de la logique floue en considérant d'autres types de commande et/ou d'observations,
- l'application de la commande géométrique à la frontière, telle qu'elle a été abordée dans le chapitre 3, à des systèmes présentant des non-linéarités tels que les réacteurs chimiques.
- l'étude de la commande géométrique des systèmes d'ordre supérieur par rapport en temps et à l'espace sujet à des conditions aux limites non homogènes.

En somme, la commande des SPD par la stratégie de post-approximation constitue un domaine de recherche prometteur, avec ses différents axes allant de la modélisation à la synthèse de lois de commande, en passant par la simulation et l'analyse des propriétés fondamentales.

# Bibliographie

- M. A. ABDELGHANI-IDRISSI, M. A. ARBAOUI, L. ESTEL et J. RICHALET : Predictive functional control of a counter current heat exchanger using convexity property. *Chemical Engineering and Processing*, 40:449–457, 2001.
- A. ADROVER, G. CONTINILLO, S. CRESCITELLI, M. GIONA et L. RUSSO : Wavelet-like collocation method for finite-dimensional reduction of distributed systems. *Computers and Chemical Engineering*, 24(12):2687–2703, 2000.
- K. ALHUMAIZI : Comparison of finite difference methods for the numerical simulation of reacting flow. *Computers and Chemical Engineering*, 28(9):1759–1769, 2004.
- G. ALLAIRE : *Analyse Numérique et Optimisation*. Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2005.
- H. ALLI et T. SINGH : On the feedback control of the wave equation. *Journal of Sound and Vibration*, 234:625–640, 2000.
- S. ALOTAIBI, M. SEN, B. GOODWINE et K. T. YANG : Controllability of cross-flow heat exchanger. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47(5):913–924, 2004.
- J. ALVAREZ-RAMIREZ, I. CERVANTES et R. FEMAT : Robust controllers for a heat exchanger. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 36:382–388, 1997.
- W. F. AMES : *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Academic Press, San Diego, 1992.
- C. ANTONIADES et P. D. CHRISTOFIDES : Integrating nonlinear output feedback control and optimal actuator/sensor placement for transport-reaction processes. *Chemical Engineering Science*, 56(15):4517–4535, 2001.
- A. ANTOULAS et D. C. SORENSEN : Approximation of large-scale dynamical systems : An overview. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 11(5):1093–1121, 2001.

- M. A. ARBAOUI, L. VERNIÈRES-HASSIMI, D. SEGUIN et M. A. ABDELGHANI-IDRISSI : Counter-current tubular heat exchanger : modeling and adaptive predictive functional control. *Applied Thermal Engineering*, 27(13):2332–2338, 2007.
- A. ARMAOU : *Nonlinear Order Reduction and Control of Dissipative Partial Differential Equation Systems : Methods and Applications to Transport-Reaction Processes and Fluid Flows*. Doctoral Dissertation, Chemical Engineering, University of California, 2001.
- A. ARMAOU et M. A. DEMETRIOU : Optimal actuator/sensor placement for linear parabolic PDEs using spatial image  $h_2$  norm. *Chemical Engineering Science*, 61(22):7351 – 7367, 2006.
- K. ATKINSON et W. HAN : *Theoretical Numerical Analysis. A Functional Analysis Framework*. Springer, 2001.
- J. A. ATWELL et B. B. KING : Proper orthogonal decomposition for reduced basis feedback controllers for parabolic equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 33(1–3):1–19, 2001.
- J. A. ATWELL et B. B. KING : Reduced order controllers for spatially distributed systems via proper orthogonal decomposition. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(1):128 – 151, 2005.
- J. P. BABARY et W. PELCZEWSKI : *Commande Optimale des Systèmes Continus Déterministes*. Masson, Paris, 1985.
- Y. BAI, H. ZHUANG et D. WANG : *Advanced Fuzzy Logic Technologies in Industrial Applications*. Springer, 2006.
- M. J. BALAS : Trends in large space structure control theory : Fondest hopes, wildest dreams. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(3):522–535, 1982.
- M. BALDEAA et P. DAOUTIDIS : Dynamics and control of autothermal reactors for the production of hydrogen. *Chemical Engineering Science*, 62(12):3218–3230, 2007.
- A. BALOGH et M. KRSTIC : Advances in robust and nonlinear control of distributed parameter systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 16(16):731–732, 2006.
- B. BAMIEH et P. G. VOULGARIS : A convex characterization of distributed control problems in spatially invariant systems with communication constraints. *Systems and Control Letters*, 54:575–583, 2005.

- B. BANDYOPADHYAY, H. UNBEHAUEN et B. M. PATRE : A new algorithm for compensator design for higher-order system via reduced model. *Automatica*, 34(7):917–920, 1998.
- V. BARBU : *Analysis and Control of Nonlinear Infinite Dimensional Systems*. Academic Press, US, 1992.
- W. D. BASTOS : Exact boundary control for the wave equation in a polyhedral time-dependent domain. *Applied Mathematics Letters*, 12:1–5, 1999.
- E. BENDERSKY et P. D. CHRISTOFIDES : Optimization of transport-reaction processes using nonlinear model reduction. *Chemical Engineering Science*, 55(19):4349 –4366, 2000.
- A. BENSOUSSAN, G. DA PRATO, M. C. DELFOUR et S. K. MITTER : *Representation and Control of Infinite Dimensional Systems*. Birkhäuser, Boston, 2006.
- L. G. BLERIS et M. V. KOTHARE : Low-order empirical modeling of distributed parameter systems using temporal and spatial eigenfunctions. *Computers and Chemical Engineering*, 29(4):817–827, 2005.
- O. BOUBAKER et J. P. BABARY : On SISO and MIMO variable structure control of nonlinear distributed parameter systems : application to fixed bed reactors. *Journal of Process Control*, 13(8):729–737, 2003.
- O. BOUBAKER, J. P. BABARY et M. KSOURI : MIMO sliding mode control of a distributed parameter denitrifying biofilter. *Applied Mathematical Modelling*, 25(8):671–682, 2001.
- A. T. BUI : On the exact controllability of the wave equation with interior and boundary control. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 125:19–35, 2005.
- J. A. BURNS et B. B. KING : A reduced basis approach to the design of low-order feedback controllers for nonlinear continuous systems. *Journal of Vibration and Control*, 4(3):297 – 323, 1998.
- J. CARVAJAL, G. CHEN et H. OGMEN : Fuzzy PID controller : Design, performance, evaluation, and stability analysis. *International Journal of Information Sciences*, 123: 249–270, 2000.
- G. CHEN, I. LASCIEKA et J. ZHOU : *Control of Nonlinear Distributed Parameter System*. CRC Press, 1999.
- J. CHOI et K. S. LEE : Model predictive control of cocurrent first-order hyperbolic PDE systems. *Industrial and Engineering Chemical Research*, 44(6):1812–1822, 2005.

- P. D. CHRISTOFIDES : Robust control of parabolic PDE systems. *Chemical Engineering Science*, 53(16):2949–2965, 1998.
- P. D. CHRISTOFIDES : *Nonlinear and Robust Control of PDE Systems : Methods and Applications to Transport-Reaction Processes*. Birkhäuser, Boston, 2001.
- P. D. CHRISTOFIDES : Control of distributed parameter systems. *Computers and Chemical Engineering*, 26(7-8):939–940, 2002.
- P. D. CHRISTOFIDES : Control of complex process systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 14(2):87–88, 2004.
- P. D. CHRISTOFIDES : Control of multiscale and distributed process systems. *Computers and Chemical Engineering*, 29(4):687–918, 2005.
- P. D. CHRISTOFIDES et P. DAOUTIDIS : Feedback control of hyperbolic PDE systems. *AIChE Journal*, 42:3063 – 3086, 1996a.
- P. D. CHRISTOFIDES et P. DAOUTIDIS : Nonlinear control of diffusion-convection-reaction processes. *Computers and Chemical Engineering*, 20:S1071–S1076, 1996b.
- P. D. CHRISTOFIDES et P. DAOUTIDIS : Robust control of hyperbolic PDE systems. *Chemical Engineering Science*, 53(1):85 – 105, 1998.
- P. G. CIARLET et J. L. LIONS : *Handbook of Numerical Analysis : Finite Difference Methods, Part 1, Solution Equations in  $R^1$  Part 1*, volume 1. Elsevier, 1990.
- J. P. CORRIOU : *Commande des Procédés*. Lavoisier, Tec & Doc, Paris, 2003.
- J. P. CORRIOU : *Process control - Theory and applications*. Springer, London, 2004.
- P. CRUZ, A. MENDES et F. D. MAGALHÃES : Using wavelets for solving PDEs : an adaptive collocation method. *Chemical Engineering Science*, 56(10):3305 – 3309, 2001.
- R. F. CURTAIN et A. J. PRITCHARD : *Functional Analysis in Modern Applied Mathematics*. Academic Press, 1997.
- R. F. CURTAIN et H. ZWART : *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- T. DAMAK : Procedure for asymptotic state and parameter estimation of nonlinear distributed parameter bioreactors. *Applied Mathematical Modelling*, 31(7):1293 – 1307, 2007.

- E. J. DAVISON, P. A. TAYLOR et J. D. WRIGHT : On the application of tuning regulators to control a commercial heat exchanger. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25:361–375, 1980.
- M. A. DEMETRIOU et F. FAHROO : Model reference adaptive control of structurally perturbed second-order distributed parameter systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 16(16):773–799, 2006.
- C. DENG, Y. LIU, W. JIANG et F. HUANG : Exponential decay rate for a wave equation with Dirichlet boundary control. *Applied Mathematics Letters*, 20:861–865, 2007.
- L. DING, T. GUSTAFSSON et A. JOHANSSON : Model parameter estimation of simplified linear models for a continuous paper pulp digester. *Journal of Process Control*, 17(2):115 – 127, 2007.
- D. DOCHAIN, J. P. BABARY et M. N. TALI-MAAMAR : Modelling and adaptive control of nonlinear distributed parameter bioreactors via orthogonal collocation. *Automatica*, 28(5):873 – 883, 1992.
- D. DOCHAIN, N. TALI-MAAMAR et J. P. BABARY : On modelling, monitoring and control of fixed bed bioreactors. *Computers and Chemical Engineering*, 21(11):1255 – 1266, 1997.
- J. M. DOUGLAS : *Process Dynamics and Control*, volume 1. Prentice-Hall, 1972.
- S. DUBLJEVIC, P. MHASKAR, N. H. EL-FARRA et P. D. CHRISTOFIDES : Predictive control of transport-reaction processes. *Computers and Chemical Engineering*, 29(11–12):2335 – 2345, 2005.
- P. DUFOUR, D. J. MICHAUD, Y. TOURÉ et P. S. DHURJATI : A partial differential equation model predictive control strategy : application to autoclave composite processing. *Computers and Chemical Engineering*, 28(4):545 – 556, 2004.
- P. DUFOUR, Y. TOURÉ, D. BLANC et P. LAURENT : On nonlinear distributed parameter model predictive control strategy : on-line calculation time reduction and application to an experimental drying process. *Computers and Chemical Engineering*, 27(11):1533 – 1542, 2003.
- D. DUGDALE et P. WEN : Controller optimization of a tube heat exchanger. *In Proceedings of the 4th World Congress On Intelligent Control and Automation*, pages 54–58, Shanghai, P. R. China, June 10-14, 2002.
- A. EL JAI et Marcel AMOUROUX : *Automatique des Systèmes Distribués*. Hermès, Paris, 1990.

- A. EL JAI et A. J. PRITCHARD : *Capteurs et Actionneurs dans l'Analyse des Systèmes Distribués*. Masson, Paris, 1986.
- L. ESTEL, F. BAGUI, M. A. ABDELGHANI-IDRISSI et C. THENARD : Distributed state estimation of a counter current heat exchanger under varying flow rate. *Computers and Chemical Engineering*, 24(1):53–60, 2000.
- K. A. EVANS : *Reduced Order Controllers for Distributed Parameter Systems*. Phd thesis, Blacksburg, Virginia, Blacksburg, Virginia, 2003.
- J. C. FRIEDLY : *Dynamic Behaviour of Processes*. Prentice-Hall, New Jersey, 1972.
- J. P. GAUTHIER et C. Z. XU :  $H_\infty$  control of a distributed parameter system with non-minimum phase. *International Journal of Control*, 53:45–79, 1991.
- R. GLOWINSKI et J. W. HE : Dirichlet feedback control for the stabilization of the wave equation : a numerical approach. *Systems & Control Letters*, 48:177–190, 2003.
- E. GÓMEZ-RAMÍREZ : *Simple Tuning of Fuzzy Controllers*. Springer, 2007.
- D. GRAHAM et R. C. LATHROP : The synthesis of optimum response : Criteria and standard forms. *AIEE Transactions Part II*, 72(?):273–288, 1953.
- M. D. GRAHAM et I. G. KEVREKIDIS : Alternative approaches to the Karhunen-Loève decomposition for model reduction and data analysis. *Computers and Chemical Engineering*, 20(5):495 – 506, 1996.
- M. S. GREWAL et A. P. ANDREWS : *Kalman Filtering : Theory and Practice Using Matlab*. John Wiley and Sons, 2001.
- M. GUGAT : Analytic solutions of  $l^\infty$  optimal control problems for the wave equation. *Journal of Optimization Theory and Application*, 114(2):397–421, 2002.
- P. K. GUNDEPUDI et J. C. FRIEDLY : Velocity control of hyperbolic partial differential equation systems with single characteristic variable. *Chemical Engineering Science*, 53(24):4055 – 4072, 1998.
- M. D. GUNZBURGER et R. A. NICOLAIDES : An algorithm for the boundary control of the wave equation. *Automatica*, 2:225–228, 1989.
- J. HAHN et T. F. EDGAR : An improved method for nonlinear model reduction using balancing of empirical gramians. *Computers and Chemical Engineering*, 26(10):1379 – 1397, 2002.

- S. HAMDI, W. H. ENRIGHT, Y. OUELLET et W. E. SCHIESSER : Method of lines solutions of the extended boussinesq equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 183(2):327 – 342, 2005.
- E. M. HANCZYC et A. PALAZOGLU : Nonlinear control of a distributed parameter process : the case of multiple characteristics. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 34: 4406–4412, 1995.
- M. HEINKENSCHLOSS : Optimization and control of distributed systems. *Systems and Control Letters*, 48(3–4):157, 2003.
- K. A. HOO et D. ZHENG : Low-order control-relevant models for a class of distributed parameter systems. *Chemical Engineering Science*, 56(23):6683 – 6710, 2001.
- J. M. HOWIE : *Fundamentals of Semigroup Theory*. Oxford University Press, 1995.
- B. HU, K. I. GEORGE et R. G. GOSINE : New methodology for analytical and optimal design of fuzzy PID controllers. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 7(5):521–539, 1999.
- A. ISIDORI : *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- A. J. ISSAKSSON et S. F. GRAEBE : Analytical PID parameter expression for higher order systems. *Automatica*, 35(6):1121–1130, 1999.
- A. A. JALALI, C. S. SIMS et P. FAMOURI : *Process Dynamics and Control*. Springer, 2006.
- J. JANTZEN : *Foundations of Fuzzy Control*. John Wiley and Sons, 2007.
- A. KALANI et P. D. CHRISTOFIDES : Nonlinear control of spatially inhomogenous aerosol processes. *Chemical Engineering Science*, 54(13–14):2669 – 2678, 1999.
- I. KARAFYLLIS et P. DAOUTIDIS : Control of hot spots in plug flow reactors. *Computers and Chemical Engineering*, 26(7–8):1087 – 1094, 2002.
- T. KATAYAMA, T. ITOH, M. OGAWA et H. HAMAMOTO : Optimal tracking control of a heat exchanger with change in load condition. *In Proceeding of the 29th Conference on Decision and Control*, pages 1584–1589, Honolulu, Hawaii, 1990.
- G. M. KEPLER, H. T. TRAN et H. T. BANKS : Reduced order model compensator control of species transport in a CVD reactor. *Optimal Control Applications and Methods*, 21 (4):143 – 160, 2000.
- C. KRAVARIS et J. C. KANTOR : Geometric methods for nonlinear process control. 1. background. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 29:2295–2310, 1990a.

- C. KRAVARIS et J. C. KANTOR : Geometric methods for nonlinear process control. 2. controller synthesis. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 29:2310–2323, 1990b.
- J. KRISHNAN, O. RUNBORG et I. G. KEVREKIDIS : Bifurcation analysis of nonlinear reaction-diffusion problems using wavelet-based reduction techniques. *Computers and Chemical Engineering*, 28(4):557 – 574, 2004.
- J. E. LAGNESE et G. LEUGERING : Time-domain decomposition of optimal control problems for the wave equation. *Systems & Control Letters*, 48:229–242, 2003.
- I. LASIECKA : Control of systems governed by partial differential equations. a historical perspective. *In Proceedings of 34th IEEE Conference on Decision and Control*, 48:2792–2797, New Orleans, LA, 1995.
- I. LASIECKA et R. TRIGGIANI : *Control Theory for Partial Differential Equations : Volume 1, Abstract Parabolic Systems : Continuous and Approximation Theories*. Cambridge University Press ; 1 edition, 2000a.
- I. LASIECKA et R. TRIGGIANI : *Control Theory for Partial Differential Equations : Volume 2, Abstract Hyperbolic-like Systems over a Finite Time Horizon : Continuous and Approximation Theories*. Cambridge University Press ; 1 edition, 2000b.
- A. LE POURHIET : *Résolution Numérique des Equations aux Dérivées Partielles. Une Première Approche*. Cépaduès, Toulouse, 1988.
- T. T. LEE, F. Y. WANG et R. B. NEWELL : Dynamic simulation of bioreactor systems using orthogonal collocation on finite elements. *Computers and Chemical Engineering*, 23(9):1247 – 1262, 1999.
- L. LEFÈVRE, D. DOCHAIN, S. F. de AZEVEDO et A. MAGNUS : Optimal selection of orthogonal polynomials applied to the integration of chemical reactor equations by collocation methods. *Computers and Chemical Engineering*, 24(12):2571 – 2588, 2000.
- H.-X. LI, X.-X. ZHANG et S.-Y. LI : A three-dimensional fuzzy control methodology for a class of distributed parameter systems. *IEEE Transactions on Fuzzy systems*, 15 (3):470–481, 2007.
- M. LI et P. D. CHRISTOFIDES : An input/output approach to the optimal transition control of a class of distributed chemical reactors. *Chemical Engineering Science*, 62 (11):2979 – 2988, 2007a.

- M. LI et P. D. CHRISTOFIDES : Optimal control of diffusion-convection-reaction processes using reduced-order models. *Computers and Chemical Engineering, In press*, doi :10.1016/j.compchemeng.2007.10.018, 2007b.
- H. C. LIM et R. J. FANG : Optimal feedback control of a class of linear tubular processes. *AIChE Journal*, 18(2):282–286, 1972.
- J. LIN et F. L. LEWIS : Two-time scale fuzzy logic controller of flexible link robot arm. *Fuzzy Sets and Systems*, 139(1):125–149, 2003.
- J. L. LIONS : *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, 1968.
- Y. LIU : *Grey-box Identification of Distributed Parameter Systems*. Doctoral thesis, The Royal Institute of Technology, Sweden, 2005.
- Y. LIU et E. W. JACOBSEN : On the use of reduced order models in bifurcation analysis of distributed parameter systems. *Computers and Chemical Engineering*, 28(1–2):161 – 169, 2004.
- H. V. LY et H. T. TRAN : Modeling and control of physical processes using proper orthogonal decomposition. *Mathematical and Computer Modelling*, 33(1–3):223 – 236, 2001.
- A. MAIDI, M. DIAF et J.-P. CORRIOU : Commande géométrique d’un réacteur tubulaire. *10ème congrès de la Société Française de Génie des Procédés, septembre 2005, Toulouse, France. In Récents Progrès en Génie des Procédés, Lavoisier-SFGP, Paris*, Vol. 92, 2005.
- A. MAIDI, M. DIAF et J.-P. CORRIOU : Commande géométrique aux frontières d’un échangeur de chaleur. *11ème congrès de la Société Française de Génie des Procédés, Octobre 2005, Saint-Étienne, France. In Récents Progrès en Génie des Procédés, Lavoisier-SFGP, Paris*, Vol. 96, 2007.
- A. MAIDI, M. DIAF et J.-P. CORRIOU : Boundary geometric control of a counter-current heat exchanger. *Journal of Process Control*, In Press, 2008a.
- A. MAIDI, M. DIAF et J.-P. CORRIOU : Distributed geometric control of wave equation. *17th IFAC World Congress*, July 6-11, Seoul, Korea, 2008b.
- A. MAIDI, M. DIAF et J.-P. CORRIOU : Optimal linear PI fuzzy controller design of a heat exchanger. *Chemical Engineering and Processing*, 47(5):938–945, 2008c.
- Y. S. N. MALLESWARARAO et M. CHIDAMBARAM : Non-linear controllers of a heat exchanger. *Journal of Process Control*, 2:17–21, 1992.

- E. H. MAMDANI et S. ASSILIAN : An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International Journal of Man-Machine Studies*, 7:1–13, 1975.
- I. V. MELNIKOVA : *Abstract Cauchy Problems : Three Approaches*. Chapman and Hall/CRC, Canada, 2001.
- B.S. MOON : Equivalence between fuzzy logic controllers and PI controllers for single input systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 69:105–113, 1995.
- Ö. MORGÜL : A dynamic control law of the wave equation. *Automatica*, 30:1785–1792, 1994.
- Ö. MORGÜL : An exponential stability result for the wave equation. *Automatica*, 38:731–735, 2002.
- P. NEITTAANMÄKI et D. TIBA : *Optimal Control of Nonlinear Parabolic Systems. Theory, Algorithms, and Applications*. MerceL Dekker, New York, 1994.
- S. OMATU et J. H. SEINFELD : *Distributed Parametr Systems. Theory and Applications*. Clarendon Press, Oxford, 1989.
- K. M. PASSINO et S. YURKOVICH : *Fuzzy Control*. Addison Wesley, Menlo Park, 1997.
- S. POHJOLAINEN et I. LÄTTI : Robust controller for boundary control systems. *International Journal of Control*, 38:1189–1197, 1983.
- Cash J. R. : Efficient time integrators in the numerical method of lines. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 183(2):259–274, 2005.
- A. RACHID : *Systèmes de Régulation*. Masson, Paris, 1997.
- W. H. RAY : *Advanced Process Control*. Butterworths, Boston, 1989.
- W. H. RAY et B. A. OGUNNAIKE : *Process Dynamics, Modeling and Control*. Oxford University Press, New York, 1994.
- M. RENARDY et R. C. ROGERS : *An Introduction to Partial Differential Equations*. Springer, 1993.
- S. RENOU : *Commande Non-Linéaire d'un Système Décrit par des Équations Paraboliques : Application au Procédé de Blanchiment*. Thèse PhD., École Polytechnique de Montréal, Canada, 2000.
- S. RENOU, M. PERRIER, D. DOCHAIN et S. GENDRON : Solution of the convection-dispersion-reaction equation by a sequencing method. *Computers and Chemical Engineering*, 27(5):615 – 629, 2003.

- L. REZNIK : *Fuzzy Controllers Handbook*. Elsevier, Canada, 1997.
- D. I. SAGIAS, E. N. SARAFIS, C. I. SIETTOS et G. V. BAFAS : Design of a model identification fuzzy adaptive controller and stability analysis of nonlinear processes. *Fuzzy Sets and Systems*, 121(1):169–179, 2001.
- H. SHANG, J. F. FORBES et M. GUAY : Feedback control of hyperbolic distributed parameter systems. *Chemical Engineering Science*, 60:969 – 980, 2005.
- S. Y. SHVARTSMAN et I. G. KEVREKIDIS : Nonlinear model reduction for control of distributed systems : A computer-assisted study. *AIChE Journal*, 44(7):1579 – 1595, 1998.
- D. SIMON : *Optimal State Estimation : Kalman,  $H_\infty$ , and Nonlinear Approaches*. John Wiley & Sons, New Jersey, 2006.
- A. SINGH et J. HAHN : Effect of finite-dimensional approximation on observability analysis of distributed parameter models. In *8th International IFAC Symposium on Dynamics and Control of Process Systems*, volume 3. Cancun, Mexico, June 6-8 2007.
- P. SOORAKSA et G. CHEN : Mathematical modeling and fuzzy control of a flexible-link robot arm. *Mathematical and Computer Modelling*, 27(6):73–93, 1998.
- K. S. TANG, K. F. MAN, G. CHEN et S. KWONG : An optimal fuzzy PID controller. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 48(4):757–765, 2001.
- D. UCIŃSKI : *Optimal Measurement Methods for Distributed Parameter System Identification*. CRC Press, New York, 2004.
- J. VANCOSTENOBLE : Exact controllability of a damped wave equation with distributed controls. *Acta Math. Hungar*, 89(1–2):71–92, 2000.
- A. VISIOLI : *Practical PID Control*. Springer, 2006.
- W. WALDRAFF, D. DOCHAIN, S. BOURREL et A. MAGNUS : On the use of observability measures for sensor location in tubular reactor. *Journal of Process Control*, 8:497–505, 1998.
- L.-X. WANG : *A Course in Fuzzy Systems and Control*. Pearson US Imports and PHIPEs, 1996.
- Z. WANG : Exact boundary controllability for non-autonomous quasilinear wave equation. *Mathematical methods in the applied sciences*, 30:1311–1327, 2007.

- Z. WOO, H. CHUNG et J. LIN : A PID type fuzzy controller with self-tuning scaling factors. *Fuzzy Sets and Systems*, 115:321–326, 2000.
- A. V. WOUWER, P. SAUCEZ et W. E. SCHIESSER : Simulation of distributed parameter systems using a matlab-based method of lines toolbox : Chemical engineering applications. *Industrial and Engineering Chemical Research*, 43(14):3469 – 3477, 2004.
- W. WU et C. LIOU : Output regulation of nonisothermal plug-flow reactors with inlet perturbations. *Computers and Chemical Engineering*, 25:433–443, 2001.
- L. XIA, J.A. De ABREU-GARCIA et T.T. HARTLEY : Modeling and simulation of a heat exchanger. In *IEEE International Conference on Systems Engineering*, pages 453–456. 1-3 August, 1991.
- C. Z. XU et J. P. GAUTHIER : Analyse et commande d’un échangeur thermique à contre-courant. *APII*, 25:377–396, 1991.
- Y. XUAN et W. ROETZEL : Dynamics of shell-and-tube heat exchangers to arbitrary temperature and step flow variations. *AIChE Journal*, 39:413–421, 1993.
- R. R. YAGER et D. P. FILEV : *Essentials of Fuzzy Modeling and Control*. John Wiley & Sons, 1994.
- E. YESIL, M. GÜZELKAYA et İ. ESKIN : Self tuning fuzzy PID type load and frequency controller. *Energy Conversion and Management*, 45:377–390, 2004.
- H. ZHANGA et D. LIU : *Fuzzy Modeling and Fuzzy Control*. Birkhäuser, 2006.
- D. ZHENG et K. A. HOO : System identification and model-based control for distributed parameter systems. *Computers and Chemical Engineering*, 28(8):1361 – 1375, 2004.

**Résumé :** Les systèmes à paramètres distribués (SPD) sont des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles (EDP) de type hyperbolique ou de type parabolique. Pour la commande des SPD, deux stratégies de commandes sont possibles : la stratégie de pré-approximation, et la stratégie de post-approximation. La stratégie de pré-approximation consiste à approximer le modèle EDP par un modèle EDO (équations aux dérivées ordinaires) afin d'appliquer les techniques de commande développées pour les systèmes à paramètres localisés (SPL). Cette approximation est réalisée soit par l'approximation des EDP, soit par l'approximation des solutions des EDP régissant la dynamique du système. La stratégie de pré-approximation engendre une perte d'informations sur les propriétés fondamentales du système (commandabilité, observabilité, et stabilité), et conduit souvent à des correcteurs difficiles à implanter vu leur dimension. La stratégie de post-approximation consiste à utiliser directement le modèle EDP pour la conception de la loi de commande, l'approximation n'est envisagée que pour la mise en oeuvre de la commande conçue. Cette stratégie de commande est la plus indiquée pour la commande des SPD car elle permet de prendre en compte l'intégralité de l'état du système qui est en réalité de dimension infinie. Dans cette thèse, des approches de commande des SPD de type hyperbolique basées sur la stratégie de post-approximation sont proposées.

**Mots clés :** système à paramètres distribués, équations aux dérivées partielles, commande floue, commande géométrique, échangeur de chaleur, équation d'ondes.

---

**Abstract :** Fundamental modeling of distributed process systems typically leads to distributed parameter systems (DPS) represented by hyperbolic and parabolic partial differential equations (PDE). To control the DPS, two strategies are possible. The first one is termed early lumping which simply discretizes the PDE model at the earliest opportunity into an approximate model consisting of a set of ordinary differential equations (ODE). This strategy allows the direct use of the design control methodologies developed for lumped parameter systems (LPS). Through early lumping, one quickly loses the fundamental control theoretical properties (controllability, observability and stability), and that leads to high dimensionality controller. The second strategy termed late lumping takes full advantage of available distributed parameter control theory and uses the full PDE model for control design, and control system equations are lumped for reasons of numerical integration in implementation. In this thesis, control approaches based on the late lumping strategy are proposed.

**Keywords :** distributed parameter system, partial differential equations, fuzzy control, geometric control, heat exchanger, wave equation.