

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mouloud Mammeri TIZI-OUZOU
Faculté du génie de la construction
Département de génie civil



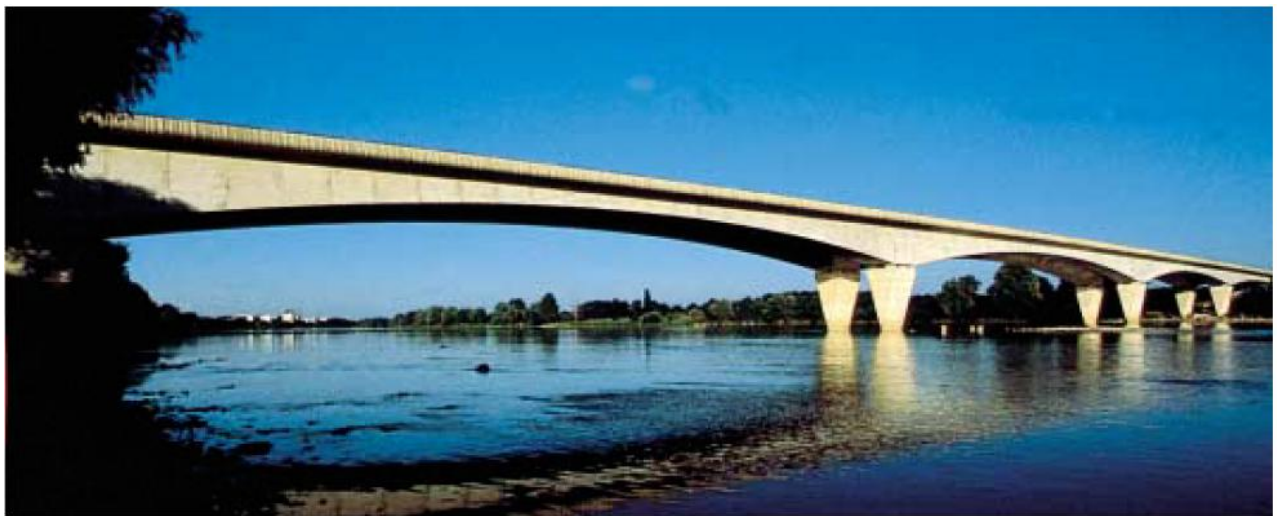
MEMOIRE DE MASTER RECHERCHE

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures et matériaux

Sujet

***Calcul non linéaire des poutres à précontrainte
extérieure***



ENCADRE PAR :
M^r MERAKEB

REALISE PAR :
M^{elle} AMRANE ALDJIA

Promotion 2012-2013



Remerciements

*Je remercie avant tous Allah
tout puissant, de m'avoir aidé et donné courage pour arriver au terme de ce travail
Je remercie également ma famille pour les sacrifices qu'elles ont
fait pour que je termine mes études.*

*Je remercie sincèrement mon promoteur Mr S. MERAKEB, pour ses judicieux
conseils. Quelques mots ne suffiront pas à exprimer ma profonde gratitude pour la
confiance que vous m'avez accordée en acceptant de m'encadrer. Je n'oublierai jamais
votre gentillesse, disponibilité, et vos encouragements mais surtout la qualité
scientifique exceptionnelle que vous avez su mettre au service de mon apprentissage.*

*j'adresse de chaleureux remerciements à tous les enseignants et
les travailleurs du département de Génie-Civil.*

*Je remercie également les membres des jurys pour l'effort qu'ils feront
dans le but d'examiner ce modeste travail.*

*Je remercie aussi tous mes amis pour leur aide, leur patience,
leur compréhension et leur encourage*

AMRANE ALDJIA



DEDICACES

Je dédie ce lapidaire travail :

- ✚ A La mémoire de ma très chère grand-mère que son âme repose en paix,*
- ✚ A mes très chers parents qui m'ont guidé durant les moments les plus pénibles de ce long chemin, ma mère qui a été à mes côtés et m'a soutenu durant toute ma vie, et mon père qui a sacrifié toute sa vie afin de me voir devenir ce que je suis.*
- ✚ A mes très chers frères et sœurs.*
- ✚ A toute ma famille sans exception et mes proches.*
- ✚ A toute la famille AMRANE ET AISSAT.*
- ✚ A tous mes amis(es) et à toute la promotion génie civil.*

ALDJIA



Table des matières

Résumé.....	xi
Introduction générale	1
Chapitre I Etude bibliographique	3
I.1 Introduction	3
I.2 Historique	3
I.3 Principe de la précontrainte extérieure	3
I.4 Méthode de remplacement d'un câble	4
I.5 Avantages et inconvénients	4
I.5.1 Avantages.....	4
I.5.2 Inconvénients	5
I.6 Les aciers de la précontrainte	5
I.6.1 Les armatures passives.....	5
I.6.2 Les armatures actives	6
I.7 Conduits.....	7
I.8 Protection anticorrosion.....	8
I.9 Les déviateurs	8
I.9.1 Système d'ancrage de précontrainte	10
I.10 Comportement des poutres en précontrainte extérieure	11
I.10.1 Essai de CEBTP (comportement en flexion)	12
I.10.2 Caractéristiques géométriques et physiques des poutres NM.....	12
I.10.3 Câbles extérieurs	14
I.10.4 Les essais américains (essai de l'université de Texas)	14
I.11 Conclusion	16
Chapitre II Etude d'une section en élasticité non linéaire.....	17
II.1 Introduction	17
II.2 Hypothèses de calcul	17

II.3	Modélisation du comportement des matériaux.....	17
II.3.1	Béton.....	17
II.3.2	Les aciers	20
II.4	Définition de l'état de déformation d'une section droite.....	23
II.4.1	Dérivabilité de l'opérateur Φ	26
II.4.2	Equilibre de la section	26
II.4.3	Méthode itérative de résolution et critère de convergence	26
II.5.	Organigramme de calcul	29
II.6.	Conclusion.....	30
Chapitre III	Etude d'une poutre isostatique à précontrainte extérieure	31
III.1	Introduction	31
III.2	Hypothèses et notions	31
III.2.1	Modélisation des sections.....	31
III.2.2	Définition du chargement.....	32
III.2.3	Etude de la précontrainte.....	32
III.3	Méthode de calcul.....	36
III.3.1	Calcul de la déformation du câble.....	36
III.3.2	Relation entre les déformations et déplacements d'un tronçon de poutre	36
III.3.3	Calcul itératif.....	37
III.4	Résultats et confrontation	38
III.4.1	Organigramme de calcul	41
III.5	Conclusion	41
Chapitre IV	Poutre hyperstatique à précontrainte extérieure	43
IV.1	Introduction	43
IV.2	Discrétisation par éléments finis.....	43
IV.3	Méthode de calcul d'une poutre hyperstatique.....	43
IV.3.1	Hypothèses et notation	43

IV.3.2	Définition des vecteurs contrainte et déformation	45
IV.3.3	Formation de la matrice de rigidité élémentaire	46
IV.3.4	Formation du vecteur chargement nodal dû à la précontrainte extérieure	47
IV.4	Résultats et confrontation	48
IV.5	Conclusion	50
	Conclusion générale.....	52
	Bibliographie.....	53

LISTE DES FIGURES

Figure	0-1:	Toron	standard	à	7 4			
fils.....								
Figure	0-2:		câble		5			
.....								
Figure	0-3 :	Déviation	échelonnés	(exemple de pont de Long Key)	7			
.....								
	Figure 0-4 :	Déviation multiple (tracé quasi-parabolique)			8			
	Figure 0-5 :	Tracé polygonal simplifié.			9			
	Figure 0-6:	Exemple de système d’ancrage à plaque VSL.....			11			
	Figure 0-7 :	Disposition du chargement pour les poutres NM.			11			
Figure 0-8 :	Caractéristiques géométriques et physiques des poutres NM.				12			
Figure 0-9 :	Disposition des armatures passives dans les poutres NM.....				13			
Figure 0-10:	Description générale de la poutre hyperstatique.....				13			
Figure 0-11 :	Disposition	des	armatures	passives	dans	la	section	14
transversale.....								
Figure 0-12 :	Configuration de chargement.							16
Figure 0-13 :	Comportement	du	béton	en	compression	selon	SARGIN.....	17
Figure 0-14 :	comportement	du	béton	avant	fissuration.....			18
Figure 0-15 :	Contribution	du	béton	tendu	après	fissuration	A.GRELAT.....	19
Figure 0-16 :	Comportement	des	aciers					20
naturels.....								
Figure 0-17 :	Diagramme	contrainte	–	déformation	des	aciers		20

écrouis.....	
Figure 0-18 : Diagramme contrainte – déformation d’un acier de précontrainte.	21
Figure 0-19 : Description de la section et diagramme contrainte- déformation.....	22
Figure 0-20 : Etat de déformation dans une section plane.....	23
Figure 0-21 : Représentation de l’état de déformation de la section.....	23
Figure 0-22 : Représentation d’un état de déformation dans une section quelconque.	26
Figure 0-23 : Représentation de la méthode de NEWTON-RAPHSON.....	27
Figure 0-24 : Organigramme simplifié de la recherche de l’équilibre d’une section.....	29
Figure 0-25 : Définition de la section par tables superposées.....	31
Figure 0-26 : Définition des variables pour le calcul de l’allongement d’un câble entre deux déviateurs	33
Figure 0-27 : Mise en évidence des effets du second ordre dans une poutre à précontrainte extérieure	36
Figure 0-28 : convergence autour du point d’équilibre.....	37
Figure 0-29 : courbes numérique et expérimentale de la poutre NM6.....	37
Figure 0-30 : courbes numérique et expérimentale de la poutre NM8.....	38
Figure 0-7 : courbes numérique et expérimentale de la: poutre NM10.....	38
Figure 0-8 : courbes numérique et expérimentale de la poutre NM11.....	39
Figure 0-9 : Organigramme de recherche de l’équilibre d’une poutre isostatique à précontrainte extérieure.....	42

Figure 0-31: position et géométrie de l'élément déformé.....	47
Figure 0-32 : Evaluation de la flèche à la section critique en fonction du chargement pour la travée nord (joints secs).	47
Figure 0-33 : Evaluation de la flèche à section critique en fonction du chargement pour la travée sud (joints époxy)	48

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 0-1 : Désignations conventionnelles, nuances et limites d'élasticité.....	4
Tableau 0-2: Caractéristiques des torons de précontrainte.....	5
Tableau 0-3 : Tableau représentatif des diamètres extérieurs des conduits en (mm).	6
Tableau 0-4 : Valeurs réglementaires de R_{min} pour câble.....	7
Tableau 0-5 : Principales caractéristiques des poutres NM.....	10

PRINCIPALES NOTATIONS

f_{cj} : résistance à la compression du béton à l'âge j ;

ε_0 : déformation de pic correspond à f_{cj} ;

E_{b0} : module élastique du béton à l'origine

f_{tj} : résistance du béton à la traction ;

ε_{ft} : déformation de traction correspondant à f_{tj} ;

ε_{rt} : déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu ;

E_{bt} : module d'élasticité longitudinal du béton.

E_a : module longitudinal de l'acier ;

ε_e : déformation limite élastique de l'acier ;

σ_{se} : contrainte limite élastique de l'acier ;

ε_{su} : déformation ultime de l'acier.

δu : raccourcissement à l'origine de la section

δw : rotation différentielle

ε_0 : prédéformation des câbles de précontrainte adhérente

v_1 : ordonnées des fibres extrêmes supérieures de la section

v_2 : ordonnées des fibres extrêmes inférieures de la section

$b(y)$: largeur de la fibre d'ordonnée y ,

y_{sj} : Ordonnée du lit d'acier j /Gz

A_{sj} : l'aire d'un lit d'armature longitudinale d'ordre j

M : moment de flexion appliqué sur la section

N : effort normal appliqué sur la section

Φ : Opérateur qui définit

Φ_t : Jacobienne de l'opérateur Φ .

I : moment d'inertie de la section /Gz

θ : angles que fait la tangente orientée de l'axe moyen de la poutre, pris à l'état déformé, par rapport à l'axe X.

X : abscisse du centre de gravité de la section

Y : ordonné du centre de gravité de la section

(M_1, M_2) : points de passage du câble au niveau des sections

l : longueur du tronçon de câble

e : excentricités des câbles dans le repère local aux sections.

Δl : allongement des câbles

ω : rotation de la section

ε_p : déformation du câble de précontrainte

F : tension du câble sur un tronçon quelconque

$u(x)$: déplacement horizontale d'une section d'abscisse x

$v(x)$: déplacement vertical d'une section d'abscisse x

$\theta(x)$: rotation d'une section d'abscisse x

N_p : effort normal dû à la précontrainte extérieure

M_p : moment dû à la précontrainte extérieure

N_{ext} : effort normal dû aux efforts extérieurs

M_{ext} : moment dû aux efforts extérieurs

L : longueur d'une poutre quelconque

n : nombre des itérations

$\{a_n\}$: paramètres généraux d'interpolation

$[P_n(x)]$: base polynomiale

$\{D_n\}$: vecteur de déplacement nodal

$[B]$: matrice de déformation

$\{F_n\}$: vecteur de chargement nodal.

$[K_e]$: matrice de rigidité linéaire d'un élément de poutre

H_i : forces nodales horizontales agissant sur les nœuds i

V_j : forces nodales verticales agissant sur les nœuds j

M_i : moments nodaux agissant sur les nœuds i

M_j : moments nodaux agissant sur les nœuds j

$\{q\}$: vecteur de chargement extérieur

f_x : forces réparties horizontales

f_y : forces réparties verticales

m : moment de flexion

Résumé

L'étude de comportement non-linéaire des structures à précontrainte extérieure nécessite la prise en considération des effets non-linéaire dus au comportement des matériaux, aux effets de second ordre et au glissement des câbles sur les déviateurs. Ces effets influent sur le comportement de la structure et sur le niveau de surtension des câbles de précontrainte.

La présentation de la technique et les essais publiés sur des poutres isostatiques et hyperstatique à précontrainte extérieure, constitue la première partie de cette étude. La deuxième partie, concerne le développement du modèle de calcul non-linéaire local puis de leur intégration dans le calcul global des structure à précontrainte extérieure (isostatiques et hyperstatiques) qui fera l'objet d'une validation par les résultats d'essais obtenus.

La comparaison entre les résultats calculés et ceux d'essais, a permis de tirer des conclusions sur le comportement global des poutres (déformation et résistance).

Mots clés

Effet de second ordre, non-linéarité, précontrainte extérieure, , glissement des câbles, déviateurs, isostatique, hyperstatique.

Introduction générale

Les nouvelles conceptions d'ouvrages ainsi que les besoins nés de la nécessité d'entretenir ou de renforcer les ouvrages anciens, de plus en plus sollicités, ont amené à repenser les techniques de précontrainte par des câbles placés à l'extérieur du béton.

Cette technique connaît actuellement un développement important pour la construction d'ouvrage d'art. L'expérience acquise, les avantages et les inconvénients ainsi que les problèmes à résoudre ont été largement discutés par BOUAFIA [1] [13][14] ,KACHI[9] VIRLOGEUX [3] , FOURE [2] [12] [14],.....etc.

Les structures à précontrainte extérieure présentent des incertitudes sur certains aspect de leur comportement. Un effort de recherche tant théorique qu'expérimental est donc nécessaire pour permettre de les comprendre et de les résoudre.

L'intérêt de prendre en compte le glissement des câbles au droit des déviateurs, dans l'analyse du comportement des structures, réside dans le fait que les effets induits sont non linéaires et irréversibles. Les principaux problèmes liés à ces effets, se manifestent par une modification de la surtension dans les câbles des part et 'autre des déviateurs, donc des efforts intérieurs générés par la présence des câbles de précontrainte, et, par conséquent, des déformations de la structure.

La présente étude a pour objet de construire un modèle de calcul capable de prédire le comportement des poutres à précontrainte extérieure en intégrant certains phénomènes liés à cette technique. En effet, le calcul proposé prend en compte d'un glissement parfait des câbles sur les déviateurs.

En ce qui concerne la non linéarité, le calcul proposé prend en compte deux types de non linéarités :

- La non linéarité mécanique du comportement réel des matériaux constitutifs (fissuration, plasticité,....etc.
- Les non linéarités géométriques, liées au comportement d'ensemble de la structure (effet de second ordre).

La présente étude est structurée comme suit :

- Le chapitre I: représente d'une part une revue bibliographique de l'état actuel des connaissances sur la précontrainte extérieure, et d'autre part l'analyse des

essais portant sur des poutres isostatiques et hyperstatiques à précontrainte extérieure. Cette analyse porte principalement sur les essais au CEBTP (poutres NM) et à l'Université du Texas à Austin (poutre hyperstatique).

- Le chapitre II: présente l'étude d'une section en béton armé en flexion composée en présentant les hypothèses de calculs, les relations entre efforts-déplacements pour une section et l'accroissement de N et M, et ensuite la méthode de résolution dans le cas non linéaire.
- Le chapitre III : présente d'une part les principales hypothèses qui ont été pris en compte dans le calcul non linéaire global d'une poutre isostatique à précontrainte extérieure en flexion, et d'autre part l'examen de la validation du modèle de calcul en flexion. Pour cela l'analyse est portée sur les poutres testées au CEBTP.
- Le chapitre IV : est consacré au calcul non linéaire d'une poutre hyperstatique à précontrainte extérieure par l'approche des éléments finis, dont nous présentons l'examen de la validation du modèle de calcul. Pour cela l'analyse est portée sur la poutre testée à l'université de Texas à Austin.
- Enfin, une conclusion générale termine ce travail, où nous présentons quelques remarques et perspectives pour des travaux futures.

Chapitre I Etude bibliographique

I.1 Introduction

L'utilisation de la précontrainte extérieure dans la construction des ponts connaît un développement spectaculaire après avoir été utilisée pour renforcer des ouvrages anciens.

On se propose alors, dans ce chapitre d'exposer certains points de connaissance concernant cette technique.

I.2 Historique

La précontrainte extérieure a vu ses premiers jours en France en 1928 et 1936. Etant donné que Freyssinet se fit connaître internationalement, la méthode ne s'est pas vraiment développée aussi vite que la précontrainte interne, mais néanmoins quelques ouvrages furent construits avec des câbles extérieurs.

Malheureusement, sur certains ouvrages des cas de corrosion ont été constatés. Ils étaient généralement dus à des problèmes de conception, ce qui a valu une mauvaise réputation à la technique, et les recherches ont été abandonnées.

Malgré tout, des progrès en précontrainte extérieure ont été réalisés au niveau des réparations ce qui a relancé la construction d'ouvrages avec des câbles externes. La technique fut massivement utilisée en France et aux Etats-Unis dans les années 80-90.

Aujourd'hui, les problèmes de corrosion sont dominés, et les producteurs de précontrainte proposent des solutions adaptées et agrémentées.

I.3 Principe de la précontrainte extérieure

La particularité de la précontrainte extérieure est la possibilité de remplacer les câbles, il est donc important de mettre en œuvre des unités qui se détendent et se démontent facilement sans endommager l'ouvrage. La précontrainte étant exposée aux agressions extérieures, il est primordial d'utiliser des câbles de bonne qualité. Les câbles les plus exploités sont injectés au coulis de ciment, plus économiques, ils sont aussi très efficaces pour la lutte contre la corrosion. De plus, leur remplacement est relativement aisé et se révèle plus propre que celui des câbles injectés de produits souples.

A l'opposé de la précontrainte adhérente, la précontrainte extérieure n'adhère à la structure de béton qu'en certains de ses points. Des organes d'ancrage des câbles sont prévus à cet effet.

I.4 Méthode de remplacement d'un câble

Le remplacement d'un câble de précontrainte extérieure est un marché spécifique, qui doit être réalisé par des professionnels. Il est composé de trois étapes :

- La plus délicate, qui consiste en la détention et le démontage des câbles;
- Le dégagement des parties remplaçables, et le réglage des nouvelles parties (au niveau des ancrages et déviateurs) ;
- La partie traditionnelle, qui consiste en la mise en place et la tension des nouveaux câbles.

I.5 Avantages et inconvénients

I.5.1 Avantages

La précontrainte extérieure ne s'est récemment développée que parce qu'elle présente des avantages multiples. Ils se situent plus, en fait, sur le plan de la qualité que sur celui de l'économie.

Ces avantages ont été largement discutés par plusieurs auteurs dont on peut citer : Y.BOUAFIA [1], B.FOURE [2], M.VIRLOGEUX [3] ainsi que beaucoup d'autre.

Les principaux avantages sont énumérés dans les points suivants :

- Amélioration du bétonnage : Etant donné que les câbles intérieurs sont supprimés, la descente du béton est facilitée ;
- Simplification de la mise en œuvre des gaines : Les gaines ne passant pas dans le béton, leur mise en place est plus simple ;
- Simplification de l'injection : Etant donné que les câbles ont un tracé rectiligne, leur injection est facilitée ;
- Diminution des pertes par frottement, par la simplification du tracé ;
- Possibilité de remplacement des câbles en cas de vieillissement ;
- Amélioration des résistances : Les câbles n'étant plus présents dans la section de béton, on peut profiter pleinement de la résistance de celle-ci ;
- Allègement de la structure : Les conditions de recouvrement des câbles internes ne devant pas être respectées, les sections peuvent dans certains cas être diminuées.

I.5.2 Inconvénients

Il y a lieu également, de citer un certain nombre d'inconvénients auxquels est assujettie l'utilisation de la précontrainte extérieure.

Ces inconvénients ont été également discutés, notamment par VIRLOGEUUX [3], B.FOURE [2], le groupe de travail du SETRA [5], AFPC [6], ITBTP [7].

Et parmi ces inconvénients, nous pouvons citer :

- Difficultés de réglage aux déviations ;
- Diminution de l'efficacité du câble : Cette diminution est due au tracé rectiligne du câble, ainsi qu'à l'impossibilité de mettre en œuvre une grande excentricité ;
- Gain en poids dans la section, compensé par le poids des ancrages et déviateurs : Le gain en poids n'est pas évident.

I.6 Les aciers de la précontrainte

Les aciers utilisés dans les ouvrages en béton précontrainte sont de deux natures différentes on distingue:

- Les aciers actifs qui créent et maintiennent la précontrainte sur le béton ;
- Les aciers passifs nécessaires pour reprendre les efforts tranchants, pour limiter la fissuration et pour servir d'aciers de montage afin de construire 'cage d'armatures' maintiennent les autres aciers.

I.6.1 Les armatures passives

Ce sont des armatures identiques à celles utilisées en béton armé. Elles ne sont mises en tension que par la déformation de l'élément. Les aciers généralement utilisés sont classés en plusieurs catégories :

- Barres rondes lisses.
- Barres à haute adhérence.
- Fils (fil à haute adhérence et fils lisses.
- Treillis soudés.

D'une façon générale, on distingue pour les armatures passives en béton précontraint les aciers passifs longitudinaux et les aciers passifs transversaux.

Les caractères des armatures passives à prendre en compte dans les calculs sont la section nominale de l'armature, le module d'Young et la limite d'élasticité.

Le tableau (I.1) donne les désignations conventionnelles, les nuances et les limites d'élasticité sur le marché.

Tableau I-1 : Désignations conventionnelles, nuances et limites d'élasticité

Type	Désignation	Limite d'élasticité
Ronds lisses	FeE215 FeE235	215 235
Barres HA	FeE400 FeE500	400 500
Fils tréfilés HA et treillis HA	FeTE500 TSHA	500
Treillis soudés lisses	TSL	500

I.6.2 Les armatures actives

Les aciers actifs sont les aciers de la précontrainte, on distingue :

Les fils :

On distingue les fils ronds et lisse et les fils non lisses. Leur diamètre maximal ne dépasse pas 12mm.

Les barres:

Elles sont définies comme étant de section supérieure aux fils (diamètre supérieur à 12mm). Les barres les plus courants ont un diamètre nominal de 26mm.

Les torons :

Les torons sont constitués d'un ensemble de 3ou7 fil de faible diamètre (2 à 4mm) enrôlés en hélice sur eux ou sur un fil central.

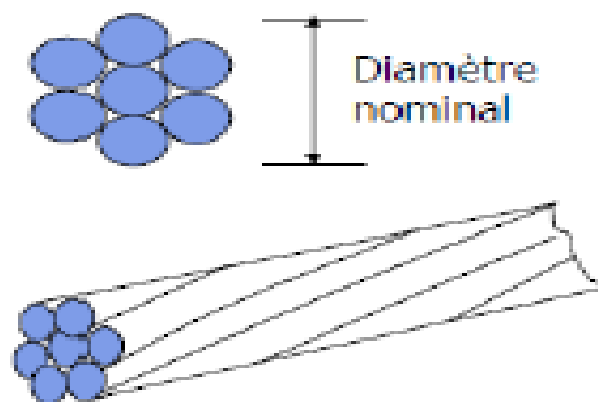


Figure I-1: Toron standard à 7 fils.

Les torons sont caractérisés par le nombre de fils (et la section du fil) et leur diamètre. Les caractéristiques des torons les plus courants sont données dans le tableau ci-dessous.

Tableau I-2: Caractéristiques des torons de précontrainte

Désignation	Diamètre (mm)	Section (mm ²)
T 13	12.5	93
T 13 S	12.9	100
T 15	15.2	139
T 15 S	15.7	150

Par exemple, T13 désigne un toron de 13 fils de diamètre 12.5mm chacun.

Les câbles :

Les câbles sont constitués de plusieurs torons en acier à haute résistance pour béton précontraint. Un câble est défini par le type et le nombre de torons et la classe de résistance.



Figure I-2: câble d'acier.

La figure I-2 montre un câble constitué de 12 torons, chaque toron contient 7 fils.

I.7 Conduits

Les conduits permettent la libre circulation du câble dans la structure, afin qu'il puisse s'allonger librement pendant la mise en tension. Il existe plusieurs types de conduits dans lesquels sont disposés les câbles :

- Gaine (métallique) nervurée en feuillard: épaisseur du feuillard: 0,3 à 0,6 mm, diamètre 25 à 130 mm;
- tube rigide en acier : épaisseur 1,5 à 2 mm;
- gaine nervurée en PEHD;
- tube en PEHD.

En pratique les unités et les conduits les plus couramment employés ont les diamètres extérieurs minimaux données par le tableau ci-après [5] :

Tableau I-3 : Tableau représentatif des diamètres extérieurs des conduits en (mm).

Câble	Tubes en acier	Tubes en polyéthylène
7T15	76,1	75
12T15	80	90
19T15	101,6	110
27T15	114,3	125
37T15	139,7	140

I.8 Protection anticorrosion

Les tubes métalliques doivent être protégés extérieurement par une peinture donnant une garantie d'anticorrosion de 4 ans au minimum [5].

I.9 Les déviateurs

Pour que les câbles extérieurs soient efficaces en flexion et à l'effort tranchant il faut qu'ils suivent un tracé bien défini (en fibre supérieure sur pile et en fibre inférieure dans la zone centrale des travées). Ce tracé est réalisé à l'aide des pièces de déviation qu'on appelle déviateurs qui donnent aux câbles un tracé en ligne brisée.

Un déviateur comprend :

- Un élément structural capable de reprendre l'effort exercé par le câble dans la zone de déviation.
- Un organe assurant la géométrie de la déviation.

Globalement, un déviateur doit satisfaire aux exigences suivantes [5] :

- Résister aux forces tant longitudinales que transversales que le câble lui applique et transmettre ces forces à l'ensemble de la structure.
- Sauf indication contraire du marché, permettre la démontrabilité du câble sans intervention traumatisante pour les éléments structuraux.

Dans la zone de déviation, le tracé théorique du câble, est un arc de cercle de rayon au moins égal à R_{min} (rayon minimum).

R_{min} est défini ci-après pour les câbles les plus courants.

Tableau I-4 : Valeurs réglementaires de R_{min} pour câble

Câble	R_{min} (m)
7T15	2,0
12T15	2,5
19T15	3,0
27T15	3,5
37T15	4,0

Les câbles peuvent être déviés un à un ou peuvent avoir tous un même tracé proche du tracé théorique.

Dans le premier cas la position des ancrages doit être choisie de façon à ce que les efforts de déviation se décomposent sans flexion secondaire sur l'âme et le hourdis inférieur.

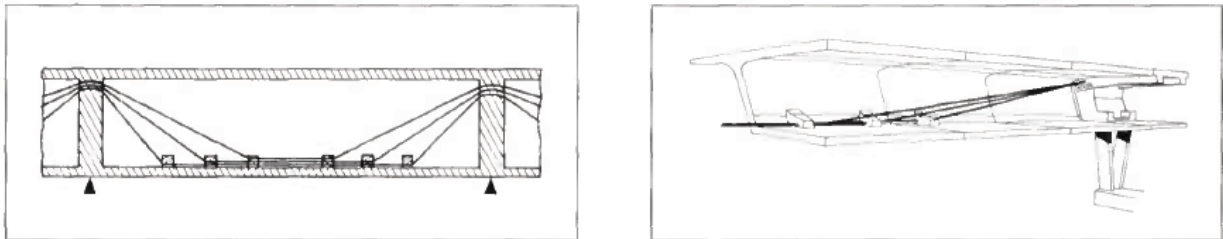


Figure I-3 : Déviation échelonnés (exemple de pont de Long Key).

Dans l'autre cas ce sont les entretoises qui permettent de dévier simultanément tous les câbles (voir figure I.4)

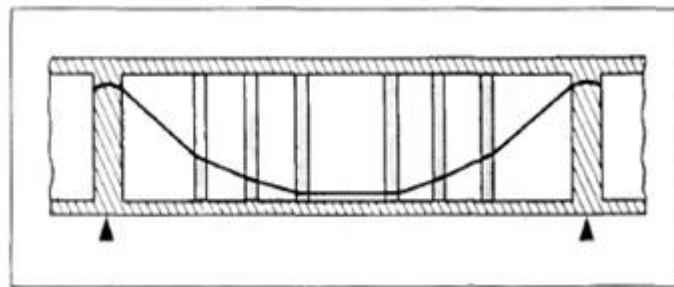


Figure I-4 : Déviation multiple (tracé quasi-parabolique)

Cependant, multiplier ces entretoises présente des inconvénients. Ces entretoises par leur poids, elles génèrent des efforts additionnels dans la structure et compliquent la réalisation. C'est pourquoi SETRA (service d'étude des routes et autoroutes) propose une limite fixée à deux entretoises déviateuses ce qui réduit l'efficacité du câble notamment vis-à-vis de l'effort tranchant et impose d'augmenter un peu l'épaisseur des âmes (figure I.5) [8].

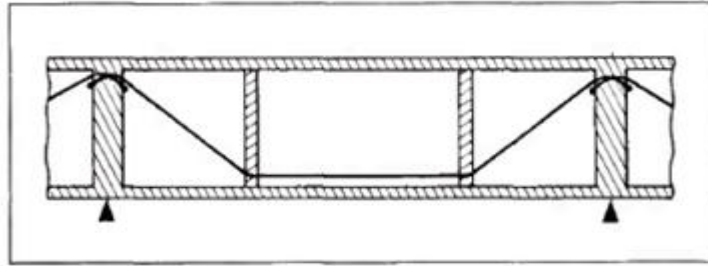


Figure I-5 : Tracé polygonal simplifié.

D'autre part, le problème majeur qu'on rencontre au niveau des zones de déviation est le comportement jusqu'à rupture de celle-ci ainsi que les cassures angulaires qui peuvent y apparaître.

Pour justement étudier le comportement d'un câble dans la zone de déviation, à la mise en tension et surtout à la rupture, des essais ont été effectués par B.FOURE [2] au C.E.B.T.P. à Saint Rémy – les Chevreuse. Les résultats de ces essais ont montré que les charges de rupture des câbles déviés ne sont pas significativement différentes de celles des câbles droits. La rupture ne se produit jamais dans la zone de déviation.

VIRLOGEUX [3] affirme aussi que si les rayons de courbure sont comparables à ceux mis en œuvre pour des câbles intérieurs au béton, il ne semble guère exister de raison de prendre des précautions particulières. Mais il faut tout de même tenir compte des points suivants [8] :

- En précontrainte extérieure on utilise des câbles de grande puissance et plus le nombre de torons est grand dans les zones de courbures, plus l'empellement est défavorable ;
- La tension réelle des câbles extérieurs est largement supérieure à celle des câbles intérieurs, du fait des faibles pertes de précontrainte par frottement.

I.9.1 Système d'ancrage de précontrainte

Ils constituent un organe essentiel puisqu'ils permettent d'assurer le maintien de l'effort de précontrainte dans les armatures après la mise en tension (la tête d'ancrage assure cette fonction). Ces systèmes ont été développés par des sociétés détentrices de procédés de précontrainte dans le monde et l'on peut citer :

- Freyssinet international;
- VSL (Vorspan system Losinger);
- DSI (Dywidag system international).

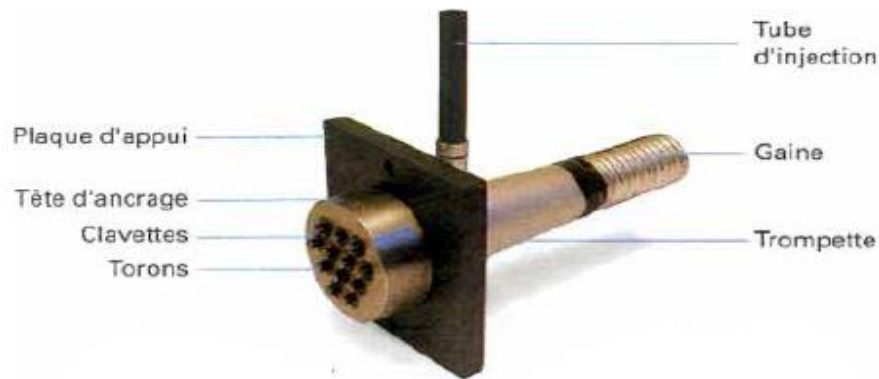


Figure I-6: Exemple de système d'ancrage à plaque VSL

Sur la figure I-6, on distingue la tête d'ancrage. Sa protection est assurée par un capot étanche définitif fixé mécaniquement. Ce capot reçoit lui-même une protection anticorrosion efficace [5], [8].

I.10 Comportement des poutres en précontrainte extérieure

Le comportement à la rupture des ponts, construits avec une précontrainte extérieure, n'était pas totalement prévisible. Des incertitudes spécifiques à cette technique existent, elles concernent certains problèmes structuraux tels que [9] :

- Le comportement de l'ensemble de la structure,
- La rupture des poutres en flexion, le comportement des câbles dans certaines zones sensibles (les déviateurs et les ancrages), ainsi que le glissement des câbles dans les zones de déviation ;
- Le comportement des câbles aux droits des déviateurs : surtension, concentrations locales des contraintes, perte de tension dans les déviateurs, effet de second ordre, ductilité, capacité résistante,... etc.) ;
- La rupture des éléments de déviation.

En effet, plusieurs centres de recherche ont entrepris des programmes de recherche expérimentale et théorique, pour trouver des réponses à ces incertitudes et d'observer l'ensemble des phénomènes liés au comportement des structures à précontrainte extérieure. Cela permet d'une part, de préciser les hypothèses de comportement local et d'autre part, de faire des vérifications du comportement global des structures (glissement des câbles sur les déviateurs) On peut citer dans cette étude:

- Les études menées au CEBTP [1], [13], [14], [21], [22] qui consistent en des études expérimentales et théoriques pour lesquelles le programme d'essai a

démarré en 1982. Elles ont porté essentiellement sur le comportement de poutres isostatiques ;

- Ainsi que les essais effectués à l'université de Texas à Austin [15], [16], [24], [25] sur une poutre hyperstatique à précontrainte extérieure.

I.10.1 Essai de CEBTP (comportement en flexion)

Un programme d'essais portant sur 11 poutres a été réalisé au CEBTP à partir de 1984. Il a pour but d'étudier le comportement global des poutres en béton précontraint en service et surtout à la rupture. Les poutres testées se différencient par [9] :

- Leurs types de construction (poutres monolithes et poutres à voussoirs préfabriqués) ;
- Le type de câblage, qui est soit totalement extérieur, soit mixte, soit totalement intérieur ;
- La quantité d'armatures passives correspondant à des armatures de peau imposées par les règles Françaises BPEL83 ;
- Type d'injection des câbles, au coulis de ciment ou à la cire pétrolière.

Les principales caractéristiques de ces poutres sont données au tableau suivant:

Tableau I-5 : Principales caractéristiques des poutres NM

Type	Poutre	Câble	Armatures passives	Injection
Voussoirs	NM1	Extérieur	W=1,05%	Non
	NM2	Extérieur	W=1,05%	Ciment
	NM3	Extérieur	W=1,05%	Cire
	NM4	Mixte	W=1,05%	Ciment
	NM5	Intérieur	W=1,05%	Ciment
Monolithes	NM6	Extérieur	W=0,02%	Ciment
	NM7	Mixte	W=0,02%	Ciment
	NM8	Extérieur	W=0,5%	Ciment
	NM9	Extérieur	W=0,02%	Cire
	NM10	Extérieur	W=0,77%	Ciment
	NM11	Extérieur	W=0,5%	Cire

I.10.2 Caractéristiques géométriques et physiques des poutres NM

Ce sont des poutres isostatiques de 6,75m de long avec une portée de 6m entre appuis. La figure (I.7) montre la disposition du chargement des poutres, la figure (I.8) montre les

caractéristiques géométriques des poutres et la figure (I.9) montre la disposition des armatures passives.

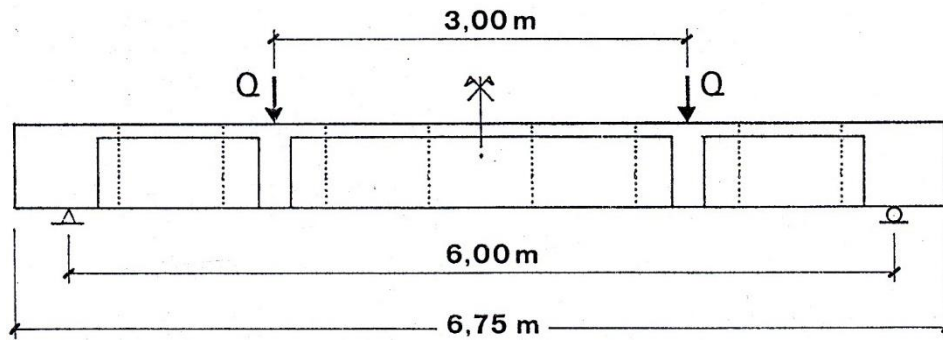


Figure I-7 : Disposition du chargement pour les poutres NM.

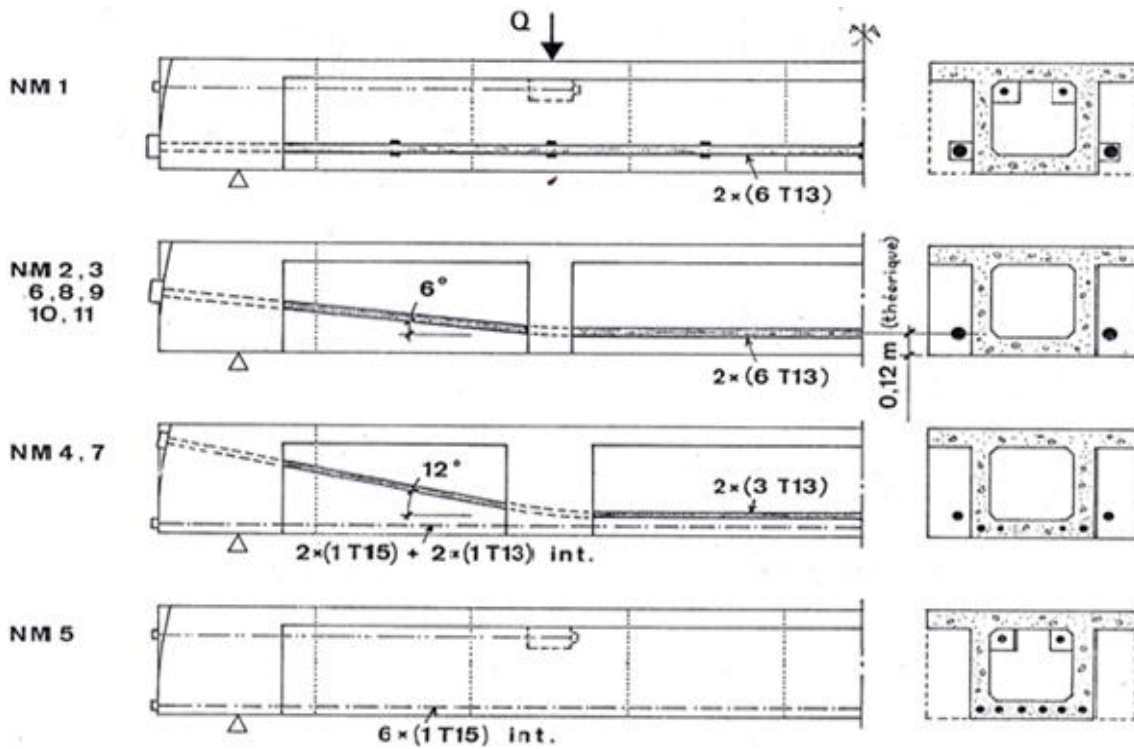


Figure I-8 : Caractéristiques géométriques et physiques des poutres NM.

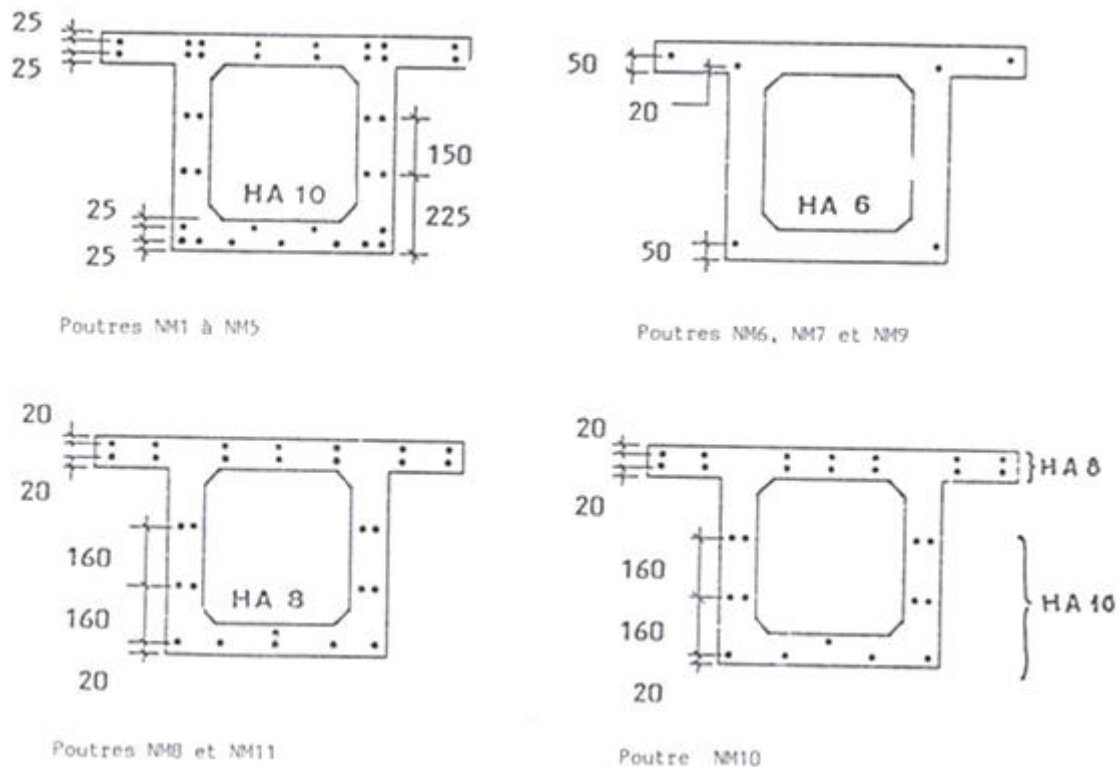


Figure I-9 : Disposition des armatures passives dans les poutres NM

I.10.3 Câbles extérieurs

Ils sont placés sous gaines souples en feuillard métallique ondulé pour l'injection au coulis de ciment et sous tubes métalliques, pour l'injection à la cire pétrolière, les gaines sont contenues au passage des déviateurs dans des tubes de réservation en aciers qui sont cintrés avec un rayon de 2m. Les parties cintrées noyées dans le béton du déviateur sont prolongées à leurs extrémités par des longueurs droites de 30mm. Situées à l'extérieur du béton, leur déformabilité permet ainsi d'atténuer les cassures angulaires des câbles éventuels [12].

I.10.4 Les essais américains (essai de l'université de Texas)

En raison du grand succès qu'a connu la précontrainte extérieure, le Texas State department of highways and publics transportation (TSDHPT) et la Federal Highway Administration (FHA) en commun accord avec l'université du Texas, a mené un programme de recherche sur le comportement des ponts à voussoirs, précontraints par des câbles extérieurs, aux états limites de service et ultime. Ce programme a porté sur une poutre continue à câblage extérieur [9].

Ce programme d'essai a porté sur une poutre continue géométriquement symétrique par rapport à son centre. La poutre est constituée de trois travées : travées nord, centrale et sud. La travée Nord a des joints secs, tandis que les deux autres ont des joints collés avec la résine époxy.

Chaque travée est constituée de dix voussoirs plus un voussoir sur pile à chaque appui. L'ancrage de tous les câbles est effectué dans les voussoirs sur pile. Les caractéristiques géométriques de la section transversale des voussoirs ainsi que la disposition des armatures passives sont montrées sur la figure (I-11).

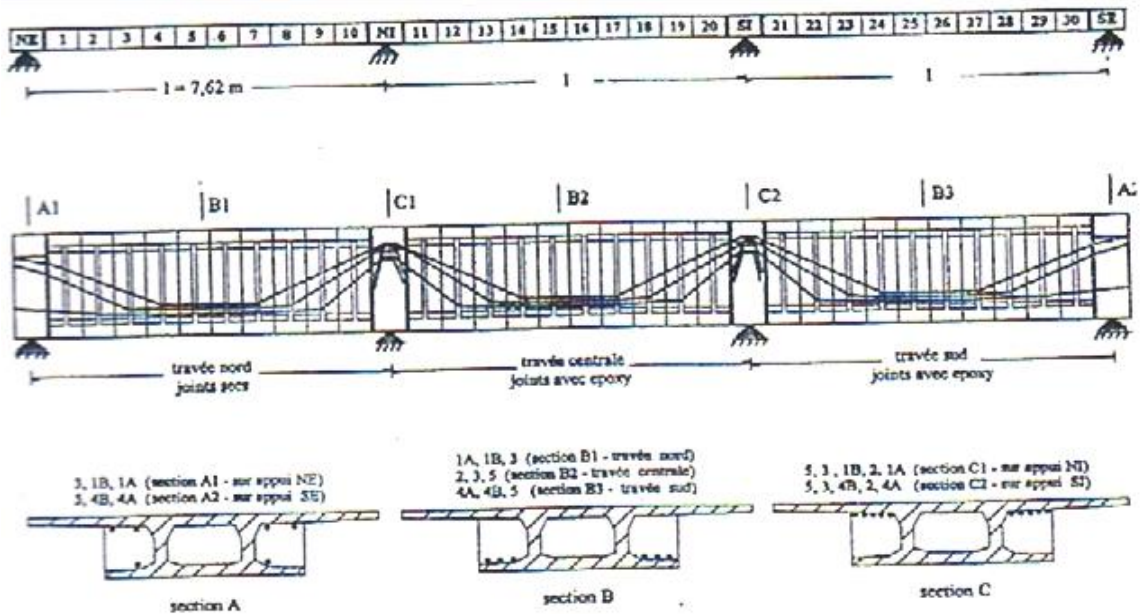


Figure I-10: Description générale de la poutre hyperstatique

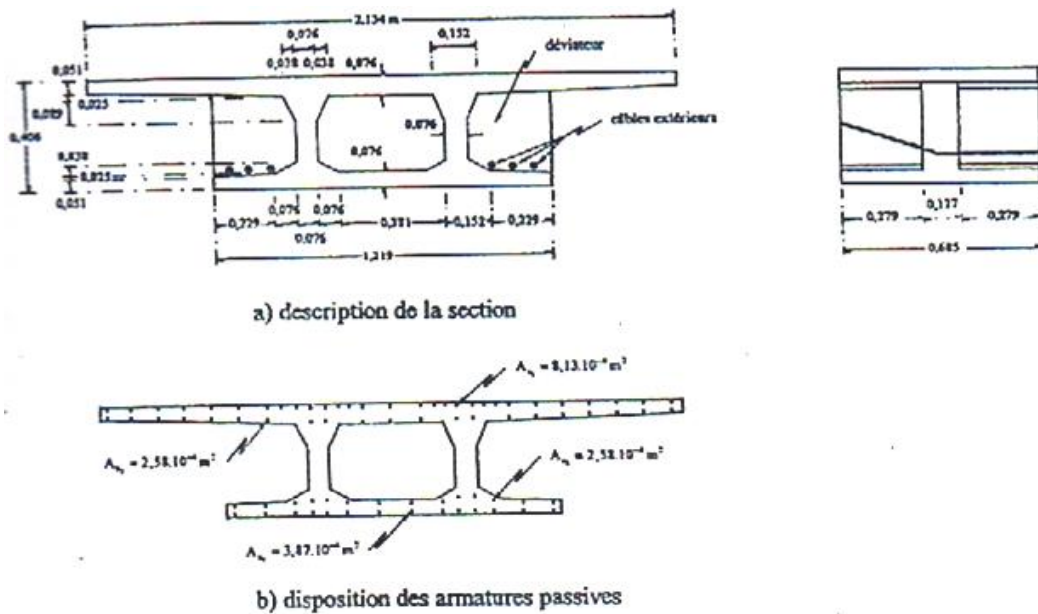


Figure I-11 : Disposition des armatures passives dans la section transversale



Figure I-12 : Configuration de chargement.

Les câbles extérieurs sont adhérents aux entretoises là où ils sont déviés et dans tous les voussoirs sur pile. Le tracé du câblage extérieur, sa localisation sur les appuis, ainsi que dans une section à mi-travée est montré sur la figure (I-10).

I.11 Conclusion

La technique de la précontrainte extérieure a fait l'objet de plusieurs études théoriques et expérimentales. Il en ressort que l'utilisation des câbles extérieurs au béton offre des avantages certains par rapport à la précontrainte intérieure classique quant à la facilité de mise en œuvre des éléments et surtout dans l'entretien et réparation des ouvrages : réduction de l'épaisseur des âmes et possibilité de remplacer les câbles défectueux.

Cependant, la structure à précontrainte extérieure présente des incertitudes sur certains aspects de leur comportement et pour trouver des réponses à ces incertitudes, des essais expérimentaux ont été effectués au CEBTP sur des poutres isostatiques ainsi que des essais américains (à l'université de Texas) sur des poutres continues hyperstatiques. Ces systèmes de poutres feront l'objet de modélisations numériques (chapitre III et IV) à l'issue desquelles les résultats numériques seront confrontés aux résultats d'essais.

Chapitre II Etude d'une section en élasticité non linéaire

II.1 Introduction

Sous un chargement instantané et croissant, une section en béton armé se fissure et se plastifie. Le calcul en élasticité linéaire ne permet plus d'évaluer les déformations réelles de la section. Ce chapitre est donc consacré au calcul d'une section non linéaire en béton armé.

II.2 Hypothèses de calcul

Nous nous intéresserons à l'étude d'une section droite d'un élément de poutre en béton armé à plan moyen chargée dans son plan et sollicitée en flexion composée. On admet les hypothèses de calcul suivantes :

- La section est étudiée dans l'hypothèse des petites déformations et du comportement élastique non linéaire. Elle est définie dans le repère principal G_{xyz} ; G étant le centre de gravité de la section.
- Une section plane avant déformation reste plane après déformation (hypothèse de Bernoulli) ;
- L'axe G_x est normal au plan de la section droite et de même orientation que la fibre moyenne de la poutre ;
- L'axe G_y est symétrique ;
- Le glissement relatif entre le béton et l'acier est négligé ;
- L'influence de l'effort tranchant est négligée ;
- Les efforts dans les aciers sont supposés agir au niveau de leur CDG.

II.3 Modélisation du comportement des matériaux

II.3.1 Béton

II.3.1.1 Comportement du béton en compression

Pour décrire le comportement réel du béton en compression, on admet un modèle élastique non linéaire qui est décrit par SARGIN [24]. L'allure générale de la courbe contrainte – déformation est donnée par le diagramme représenté à la figure II-1 suivante :

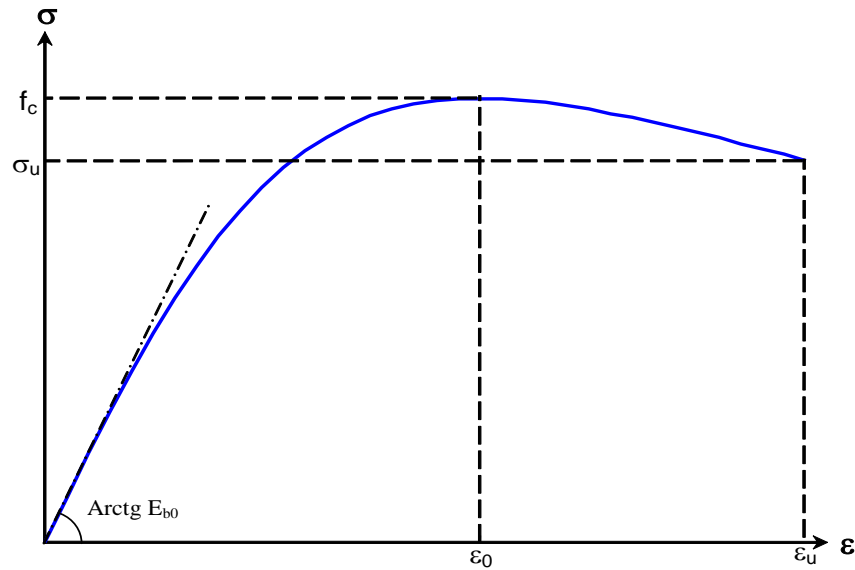


Figure II-1 : Comportement du béton en compression selon SARGIN[24].

La courbe est caractérisée par :

- Une branche ascendante, à concavité dirigée vers le bas admettant un module tangent initial E_{b0} et un maximum de contrainte qui correspond à la résistance à la compression f_c .
- Une branche descendante commençant par le maximum de la branche ascendante et qui se termine par le point $(\sigma_u, \varepsilon_u)$.

La contrainte est donnée par la relation suivante :

$$\sigma_{bc} = f_c \frac{k_b \bar{\varepsilon} + (k'_b - 1) \bar{\varepsilon}^2}{1 + (k_b - 2) \bar{\varepsilon} + k'_b \bar{\varepsilon}^2} \quad \text{II-1}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad \text{II-2}$$

Le paramètre k_b ajuste la branche ascendante de la loi et est donné par :

$$k_b = \frac{E_{b0} \varepsilon_0}{f_{cj}} \quad \text{II-3}$$

f_{cj} : Résistance à la compression du béton à l'âge j ;

ε_0 : Déformation de pic correspond à f_{cj} ;

E_{b0} : Module élastique du béton à l'origine ;

Le paramètre K'_b permet d'ajuster la forme de la branche décroissante de la courbe.

Avec $K'_b=0$, on obtient des courbes avec une branche qui descend brutalement, ce qui correspond à un béton ayant un comportement élastique fragile.

Pour $K'_b=1$, on obtient au contraire des courbes assez plates qui correspondent à un béton ayant un comportement ductile.

Pour un béton normal, on prend généralement $K'_b=K_b - 1$

II.3.1.2 Comportement du béton en traction

Généralement, dans la pratique (règlement), la résistance à la traction du béton ainsi que la contribution du béton tendu entre deux fissures sont négligées.

La prise en compte de la contribution du béton tendu entre les fissures, permet une représentation convenable de la déformabilité réelle d'un élément fissuré, ainsi qu'une estimation meilleure de la redistribution des efforts dans les structures hyperstatiques et dans les cas sensibles aux effets de second ordre. Elle permet ainsi de mieux estimer les déplacements.

Plusieurs modèles sont proposés dans la littérature. Dans le cadre de la présente étude nous avons utilisé la loi de GRELAT [25]. Elle attribue au béton tendu fissuré un diagramme fictif triangulaire à partir de l'axe neutre (fig. II-2).

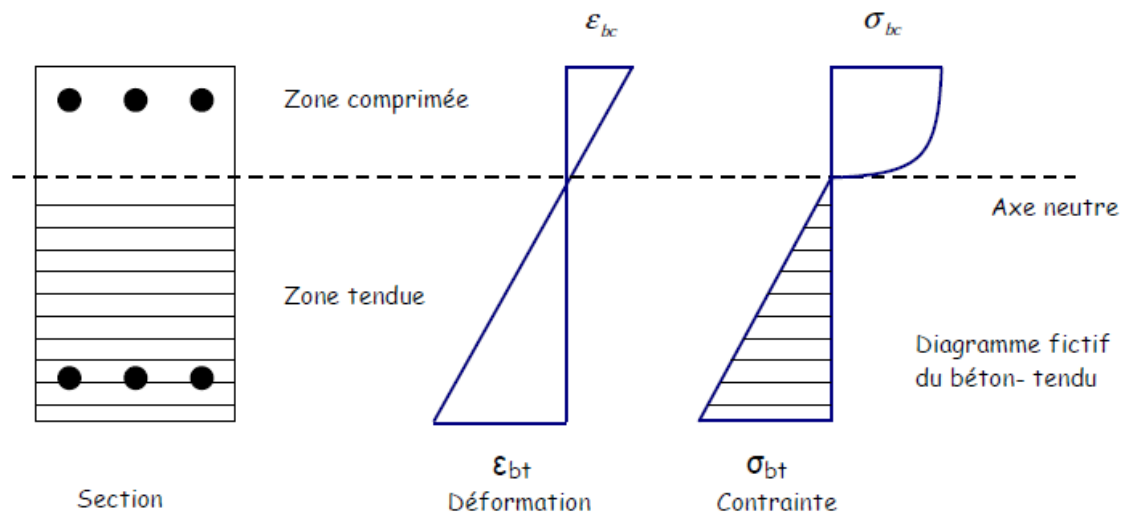


Figure II-2 : comportement du béton avant fissuration.

Les fibres du béton tendu sont affectées d'un module de déformation E_{bt} qui est défini à partir de la contrainte et de la déformation instantanée du bord tendu.

$$E_{bt} = \frac{\sigma_{bt}}{\varepsilon_{bt}} \quad \text{II-4}$$

Au-delà de la fissuration en traction on tient compte d'une participation du béton tendu situé entre deux fissures successives. La contrainte ne s'annule pas brusquement, mais, décroît selon une loi parabolique (fig. II-3). On étudie ainsi le comportement moyen d'une zone de poutre.

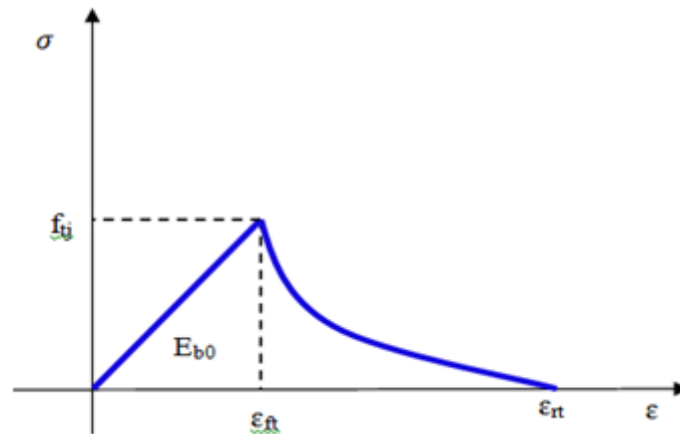


Figure II-3 : Contribution du béton tendu après fissuration A.GRELAT [25].

f_{tj} : résistance du béton à la traction ;

ε_{ft} : déformation de traction correspondant à f_{tj} ;

ε_{rt} : déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu ;

E_{bt} : module d'élasticité longitudinal du béton.

$$\sigma_{bt} = E_{b0} \cdot \varepsilon_{bt} \text{ Si } |\varepsilon_{bt}| \leq \varepsilon_{ft} \quad \text{II-5}$$

$|\varepsilon_{bt}| \leq \varepsilon_{rt}$ et $|\varepsilon_{bt}| \leq \varepsilon_{ft}$ fissuration avec participation du béton tendu.

$$\sigma_{bt} = \frac{f_{tj} (\varepsilon_{bt} - \varepsilon_{rt})^2}{(\varepsilon_{rt} - \varepsilon_{ft})^2} \quad \text{II-6}$$

$|\varepsilon_{bt}| \leq \varepsilon_{rt}$ et $|\varepsilon_{bt}| > \varepsilon_{ft}$ fissuration sans participation du béton tendu : $\sigma_{bt} = 0$

II.3.2 Les aciers

Le comportement de l'acier est représenté par une loi contrainte-déformation supposée identique en traction qu'en compression sous chargement monotone. On distingue les aciers passifs qui sont les aciers de béton armé et les aciers actifs ou aciers de précontrainte.

II.3.2.1 Comportement des aciers passifs

Pour ces aciers nous avons distingué les aciers naturels et les aciers écrouis.

A) **Les aciers naturels:** sont caractérisés par une loi de comportement élasto-plastique parfaite. On utilise ces aciers pour le calcul à l'état limite de résistance (ELU) ou l'évaluation précise des déformations n'est pas nécessaire.

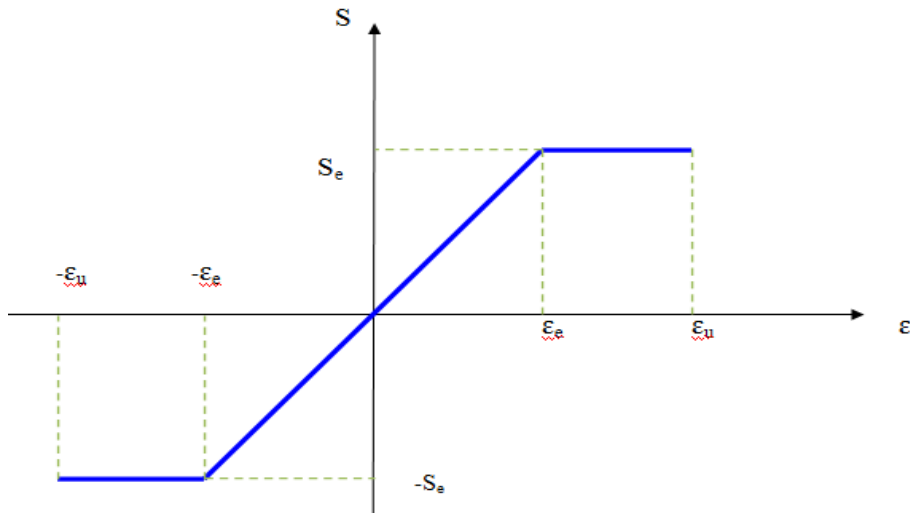


Figure II-4 : Comportement des aciers naturels

$$\sigma = E_a \cdot \varepsilon \quad \varepsilon \leq \varepsilon_e$$

$$\sigma = S_e \quad \varepsilon_e < \varepsilon \leq \varepsilon_{su}$$

$$\sigma = 0 \quad \varepsilon > \varepsilon_{su}$$

II-7

Du côté de la traction les relations se déduisent par symétrie.

Les déformations extrêmes sont fixées par le règlement BAEL à 10‰.

E_a : module longitudinal de l'acier ;

ε_e : déformation limite élastique de l'acier ;

σ_{se} : contrainte limite élastique de l'acier ;

ε_{su} : déformation ultime de l'acier.

B) **Aciers écrouis** : Dans les aciers écrouis et selon les règlements de béton armé (BAEL), on conserve une zone élastique linéaire jusqu'à 70% de la limite élastique. Au-delà, et jusqu'à des déformations d'environ 1%, on adopte une courbe du cinquième degré. Pour des déformations supérieures à 1%, on suppose un palier plastique à hauteur de $1.1S_e$, et ce jusqu'à la déformation limite de rupture de 4% (fig. II-5).

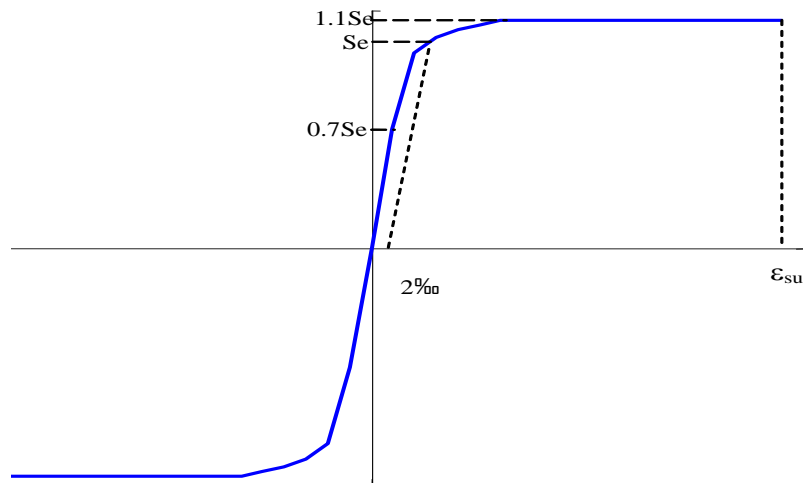


Figure II-5 : Diagramme contrainte – déformation des aciers écrouis

$$\sigma_s = E\varepsilon \quad 0 \leq \sigma_s \leq 0.7S_e$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_s}{E} + 0.823\left(\frac{\sigma_s}{S_e} - 0.7\right)^5 \quad 0.7S_e \leq \sigma_s \leq 1.1S_e \quad \text{II-8}$$

$$\sigma_s = 1.1S_e \quad \varepsilon \geq 0.01$$

II.3.2.2 Comportement des aciers actifs

Le comportement des armatures de précontrainte est représenté par la loi, du même type que celle des aciers écrouis de béton armé à savoir une phase linéaire jusqu'à 90% de la limite élastique, une courbe du cinquième degré suivi d'un palier plastique jusqu'à la rupture à hauteur de $1.06S_e$ et une déformation de 4%.

$$\sigma_s = E\varepsilon \quad 0 \leq \sigma_s \leq 0.9S_e$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_s}{E} + 100\left(\frac{\sigma_s}{S_e} - 0.9\right)^5 \quad 0.9S_e \leq \sigma_s \leq 1.06S_e \quad \text{II-9}$$

$$\sigma_s = 1.06S_e \quad \varepsilon \geq 0.01$$

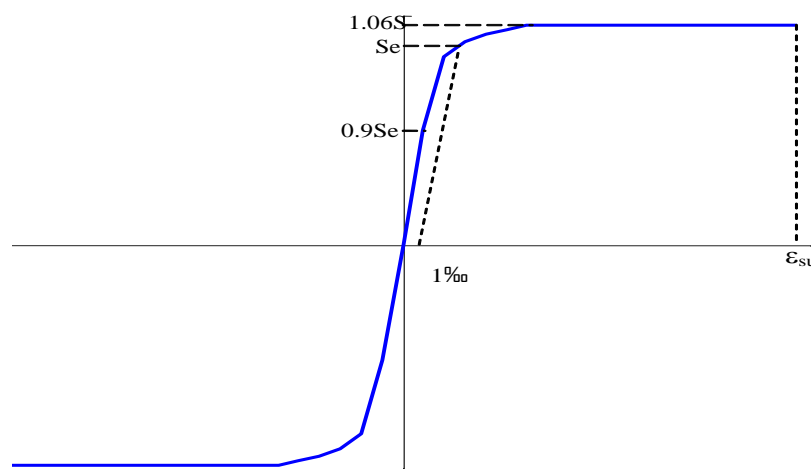


Figure II-6 : Diagramme contrainte – déformation d'un acier de précontrainte.

II.4 Définition de l'état de déformation d'une section droite

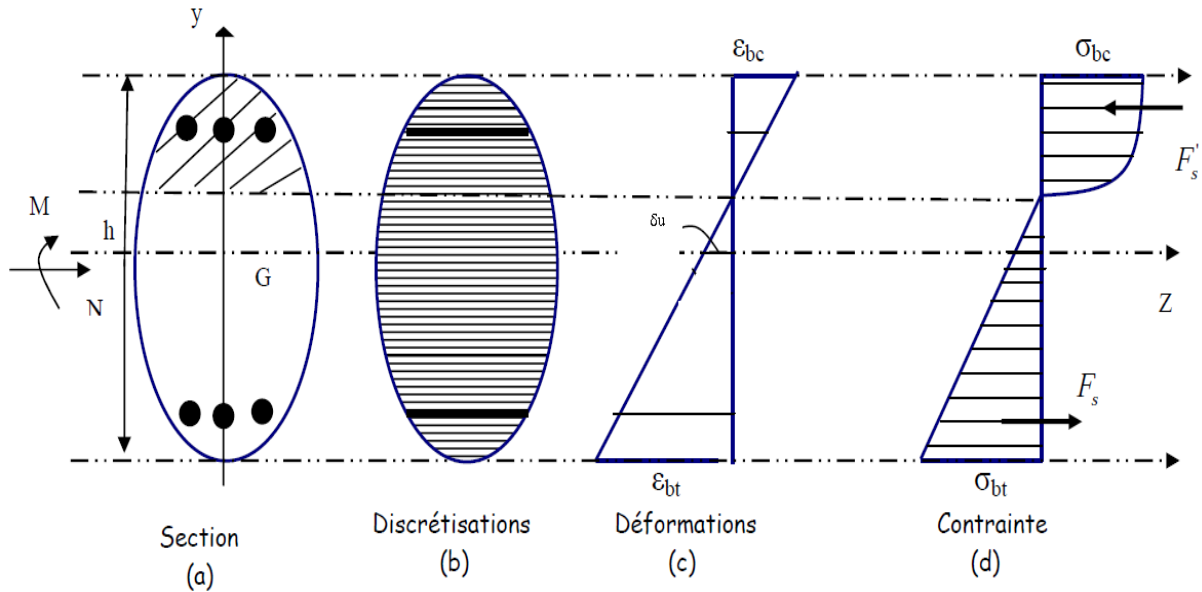


Figure II-7 : Description de la section et diagramme contrainte-déformation

On considère une section en béton armé, en équilibre sous un moment fléchissant M et un effort normal N agissant au centre géométrique G de la section.

Compte tenu de l'hypothèse de Bernoulli, nous pouvons associer à un état de déformation d'une section quelconque un ensemble de variables $(\delta u, \delta w)$, que nous assimilerons au vecteur de déformation $\{\delta\}$, qui nous permettra, une fois définies, de déduire la valeur de la déformation ε en tout point de la section. Si nous posons δu le raccourcissement à l'origine de la section et δw la rotation différentielle, la déformation (comptée positivement dans le sens de la compression) d'une fibre d'ordonnée y est donnée comme suit :

$$\varepsilon = \delta u + \delta w \cdot y \quad \text{II-10}$$

La déformation d'une barre d'acier d'ordre j et d'ordonnée y_{sj} est :

$$\varepsilon_{sj} = \varepsilon_0 - (\delta u + \delta w \cdot y_{sj}) \quad \text{II-11}$$

ε_0 est la prédéformation des câbles de précontrainte adhérente (nulle pour les aciers passifs). Pour les aciers, la déformation est comptée positivement s'il s'agit d'une traction.

Ces efforts internes, dits résistants, sont développés par le couple $(\delta u, \delta w)$ et donnés par les formules d'intégrations des contraintes sur toute l'aire de la section (Fig. II-8) :

$$N_{\text{int}} = \int_{v_1}^{v_2} \sigma_b(\delta u + \delta w \cdot y) b(y) dy + \sum_j \sigma_s(\varepsilon_{sj}) A_{sj}$$

II-12

$$M_{\text{int}} = \int_{v_1}^{v_2} \sigma_b(\delta u + \delta w \cdot y) b(y) y dy + \sum_j \sigma_s(\varepsilon_{sj}) y_{sj} A_{sj}$$

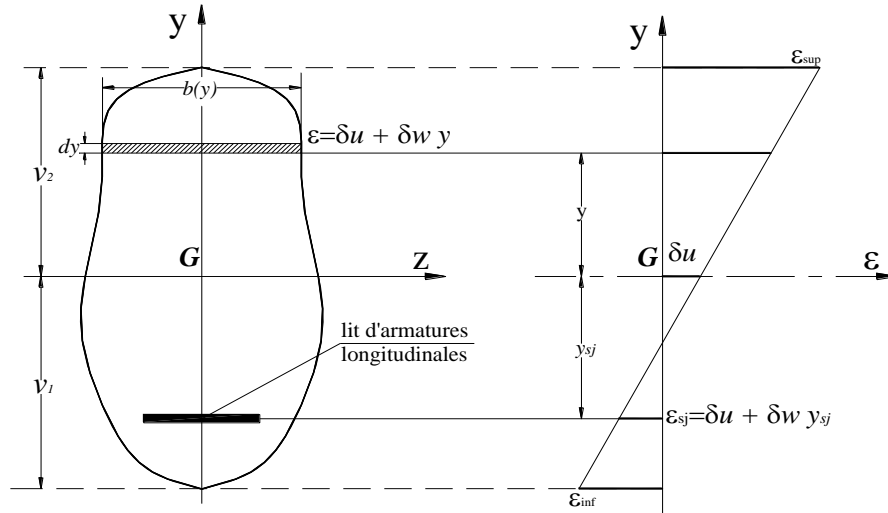


Figure II-8: Etat de déformation dans une section plane

- v_1 et v_2 sont les ordonnées des fibres extrêmes de la section,
- σ_b et σ_s sont respectivement les lois de comportement du béton et des aciers,
- $b(y)$ la largeur de la fibre d'ordonnée y ,
- y_{sj} et A_{sj} l'ordonnée et l'aire d'un lit d'armature longitudinale d'ordre j .

Il se peut que, à un état de déformation donné, la section de béton n'amorce une résistance aux efforts que sur une partie dite intègre (non rompue), et que l'autre partie soit rompue en traction ou en compression. Dans ce cas de figure, l'intégration des contraintes n'affecterait que la partie non rompue (Fig. II-9) ; les bornes d'intégration dans les formules (II-12) seront fonction de l'état de déformation de la section.

On peut associer à chaque état de déformation d'une section, un point appartenant à l'espace des déformations généralisées (Fig. II-10). Les droites de 1 à 4 sont des droites limites et découpent tout l'espace en plusieurs zones. Il est remarquable de relever que seule la zone I est la zone d'intégrité de la section. Les zones VI et VIII sont les zones de rupture complète. Seules les zones de II à V représentent un état de déformation où la section n'est que partiellement rompue ; elles peuvent néanmoins représenter un intérêt car il est démontré expérimentalement que la résistance optimale n'est pas encore atteinte dans la zone I.

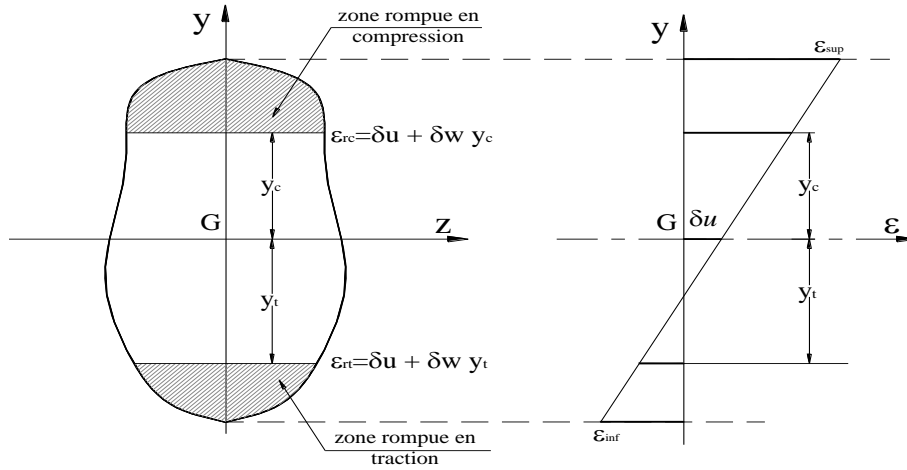


Figure II-9: Représentation de l'état de déformation de la section

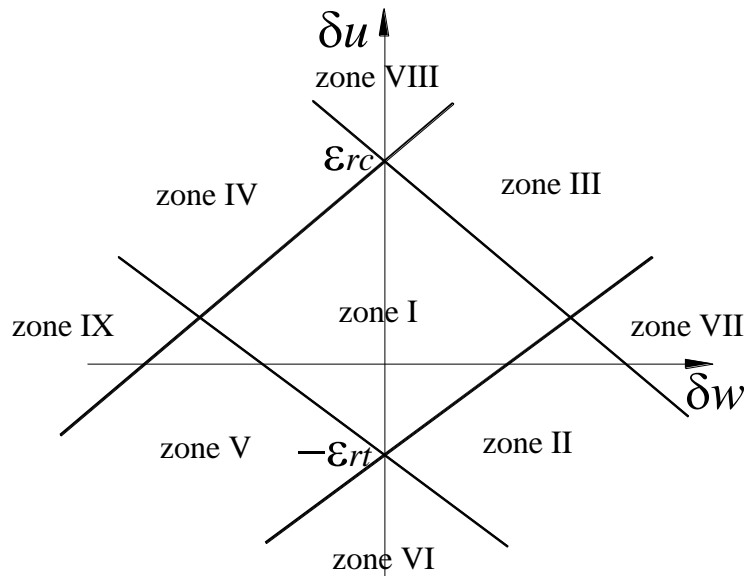


Figure II-10 : Représentation d'un état de déformation dans une section quelconque.

Sous forme condensée, et compte tenu des bornes d'intégration, l'équation (II-12) devient :

$$\begin{pmatrix} N_{int} \\ M_{int} \end{pmatrix} = \int_{y_t}^{y_c} \sigma_b (\delta u + \delta w \cdot y) b(y) \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} dy + \sum_j \sigma_{sj} (\varepsilon_{sj}) A_{sj} \begin{pmatrix} 1 \\ y_{sj} \end{pmatrix} \quad \text{II-13}$$

y_c (resp. y_t) est l'ordonnée de la fibre de béton au-delà/deçà de laquelle la rupture en compression (resp. en traction) s'est produite (Fig. II-9) si le point figuratif de l'état de déformation de la section est dans une zone de rupture partielle.

On définit ainsi le passage de l'espace de la déformation généralisée $(\delta u, \delta w)$ vers l'espace des efforts internes généralisés (N_{int}, M_{int}) par l'opérateur Φ :

$$\Phi : (\delta u, \delta w) \rightarrow (N_{int}, M_{int}) \quad \text{II-14}$$

L'opérateur Φ est continu partout dans le domaine d'intégrité de la section (zone I) car les fonctions, σ_b et σ_s , de comportement des matériaux le sont aussi.

II.4.1 Dérivabilité de l'opérateur Φ

En étudiant la continuité de l'opérateur Φ , nous pouvons postuler au calcul de ses dérivées partielles.

II.4.1.1 Définition

On appelle opérateur tangent Φ_t la matrice dont les composantes sont constituées par des dérivées partielles de l'opérateur Φ :

$$\Phi_t = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_{int}}{\partial \delta u} & \frac{\partial N_{int}}{\partial \delta w} \\ \frac{\partial M_{int}}{\partial \delta u} & \frac{\partial M_{int}}{\partial \delta w} \end{pmatrix} \quad \text{II-15}$$

Φ_t est appelé matrice Jacobienne de l'opérateur Φ .

II.4.2 Equilibre de la section

La structure étant soumise aux sollicitations extérieures, la réponse sera une réaction qui tend à équilibrer le système dans une configuration stable. Les équations d'équilibre sont les suivantes :

$$\begin{aligned} N_{int}(\delta u, \delta w) &= N_{ext} \\ M_{int}(\delta u, \delta w) &= M_{ext} \end{aligned} \quad \text{II-16}$$

Le problème consiste à trouver le couple $(\delta u, \delta w)$ solution du système d'équations d'équilibre (II-16).

II.4.3 Méthode itérative de résolution et critère de convergence

En élasticité non – linéaire, il est facile de calculer les efforts développés par une déformation donnée. Cependant il n'existe pas de méthode directe permettant de calculer les déformations produites par des efforts donnés. Elles se heurtent en général aux problèmes de convergence et ce, avant même que la structure n'atteigne sa limite optimale de résistance. On est donc contraint d'utiliser une méthode itérative pour la recherche de la solution en déformation.

Plusieurs méthodes sont proposées dans littérature. Dans le cadre de la présente étude nous avons utilisé la méthode de NEWTON-RAPHSON.

II.4.3.1 Méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson ou de Newton, est un cas particulier des méthodes dites du point fixe, dont le mode de convergence est quadratique. Elle consiste à équilibrer une partie des efforts extérieurs $\{\Delta F\}_i$ en linéarisant au voisinage de $\{F\}_i$ déduisant ainsi l'incrément de déformation $\{\Delta \varepsilon\}_i$.

On se propose de définir la suite $\{\varepsilon\}_i$ engendrée par les itérations de Newton-Raphson.

Les étapes suivies dans la résolution de l'équation (II-16), en supposant connue la déformation $\{\varepsilon\}_i$ à la $i^{\text{ème}}$ itération, sont les suivantes :

1. Calcul des efforts internes (N_i, M_i) développés par la déformation $(\delta u_i, \delta w_i)$, ainsi que les composantes de l'opérateur tangent Φ_i ;

$$\Phi : (\delta u_i, \delta w_i) \rightarrow (N_i, M_i)$$

2. Evaluation de l'incrément de déformation $\Delta\{\varepsilon\}$ en résolvant le système linéaire :

$$\Phi_i \cdot \begin{pmatrix} \Delta \delta u \\ \Delta \delta w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{ext} - N_i \\ M_{ext} - M_i \end{pmatrix} \quad \text{II-17}$$

3. Calcul de la déformation à l'étape $(i+1)$;

$$(\delta u_{i+1}, \delta w_{i+1}) = (\delta u_i, \delta w_i) + (\Delta \delta u, \Delta \delta w)$$

4. Vérification du critère de convergence en utilisant la norme des efforts ou celle des déformations.

On recommence le cycle à partir de l'étape (1) en posant comme nouvelle valeur de la déformation, la déformation calculée à l'étape (3) et ce, jusqu'à ce que l'effort normal N_i et le moment fléchissant M_i soient les plus proches possible respectivement de l'effort normal N_{ext} et du moment fléchissant M_{ext} extérieurs avec une précision suffisante.

On peut résumer les itérations de Newton-Raphson par l'équation suivante :

$$(\delta u_{i+1} \quad \delta w_{i+1}) = (\delta u_i \quad \delta w_i) + \Phi_i(\delta u_i, \delta w_i) \cdot \begin{Bmatrix} N_{ext} - N_i \\ M_{ext} - M_i \end{Bmatrix} \quad \text{II-18}$$

Le premier terme de la suite de Newton-Raphson doit être le plus proche possible de la solution si l'on veut accélérer la convergence. Pour cela, l'estimation dans le domaine linéairement élastique de la déformation convient parfaitement et elle est donnée par les équations :

$$\delta u_0 = \frac{N_{ext}}{ES_h} - \frac{M_{ext} - N_{ext} \cdot y_G}{EI_G} y_G$$

$$\delta w_0 = \frac{M_{ext} - N_{ext} \cdot y_G}{EI_G}$$

II-19

Où E , S_h , y_G , I_G sont les caractéristiques linéaires de la section homogénéisée.

L'interprétation géométrique de cette méthode est suggérée dans la figure (II-11).

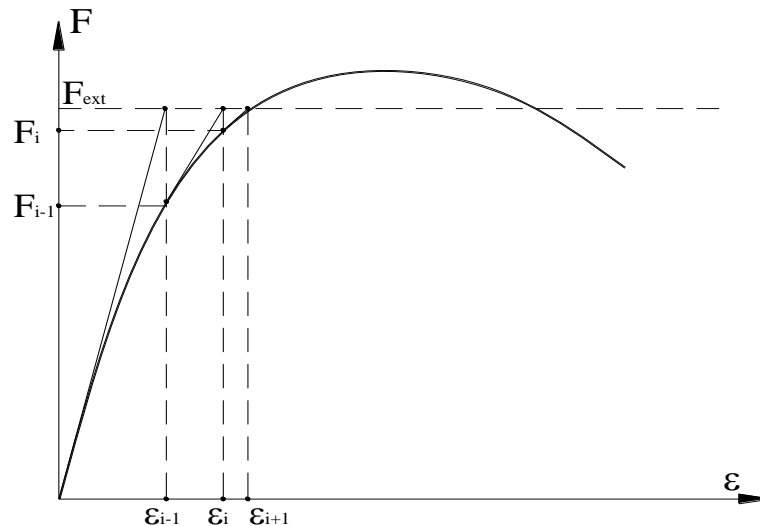


Figure II-11 : Représentation de la méthode de NEWTON-RAPHSON

II.4.3.2 Méthode de la corde (ou Newton-corde)

La méthode de la corde permet d'éviter qu'à chaque itération de l'équation II-18, on ait à évaluer Φ_t . Elle consiste à remplacer $\Phi_t(\{\varepsilon\}_i)$ par $\Phi_t(\{\varepsilon\}_0)$ dans l'équation II-17. Cette méthode a le mérite d'éviter la singularité éventuelle de la matrice Φ_t , lorsque les efforts internes dans la section approchent les limites optimales de résistance. Mais elle a l'inconvénient d'augmenter le nombre d'itérations nécessaires pour la convergence car le mode de convergence de cette méthode n'est pas quadratique mais plutôt linéaire.

D'une manière générale, les méthodes que nous avons exposées ne nous permettent pas d'aller au-delà du pic de la courbe ($M_{int} - \delta w$) ou ($N_{int} - \delta u$), ce qui correspond au tracé de la courbe descendante, pour la raison simple que l'opérateur tangent Φ_t devient singulier (c'est à dire son déterminant nul ou du moins très petit) et l'étape (2) de l'algorithme décrit ci-haut se soldera par un incrément de déformation important et par la suite l'évaluation de la déformation qui s'éloigne beaucoup du domaine d'intégrité de la section, ce qui induit la rupture de cette dernière (du moins celle des aciers) qui a pour conséquence l'effondrement du processus itératif et donc divergence des résultats.

II.5. Organigramme de calcul

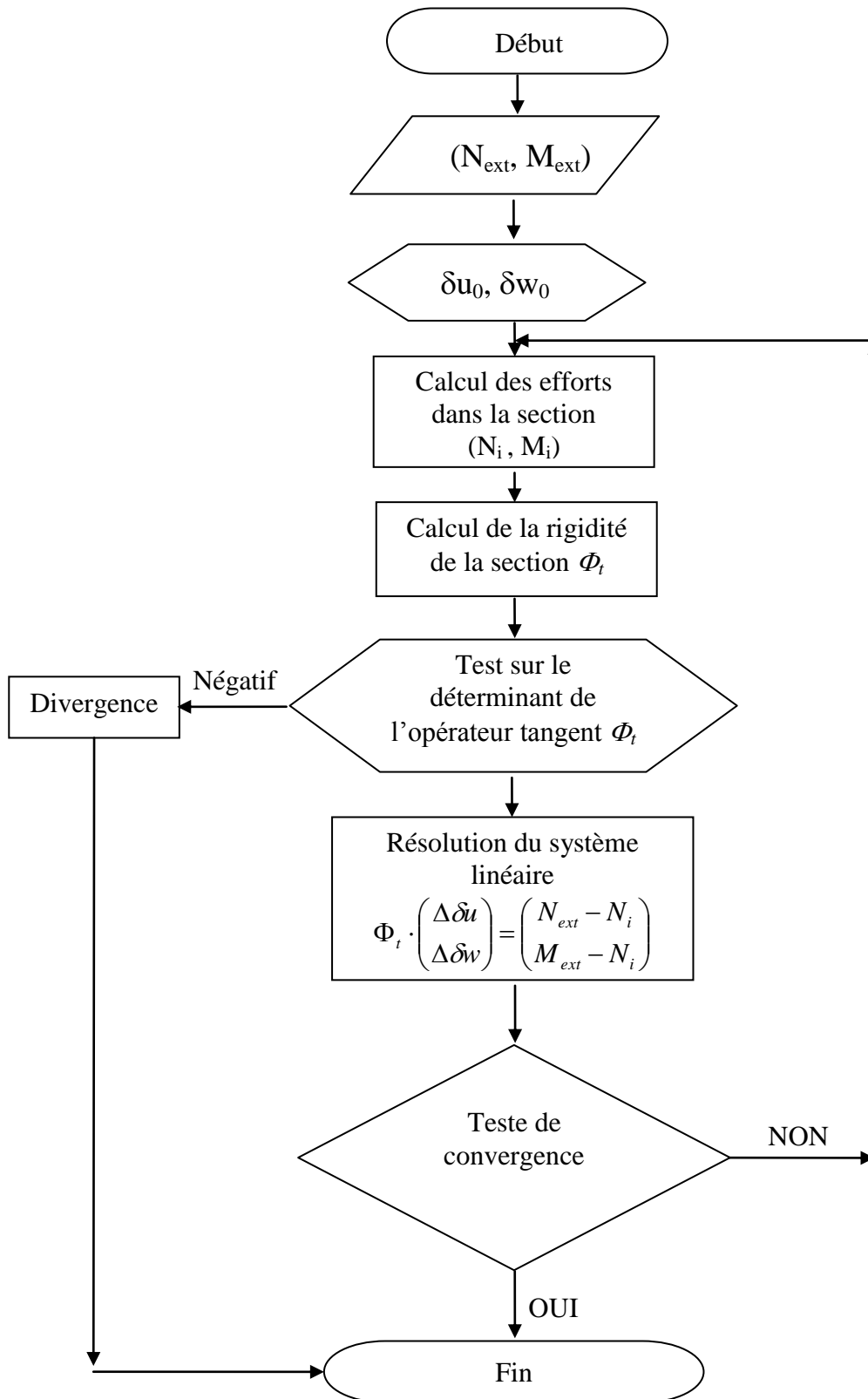


Figure II-12 : Organigramme simplifié de la recherche de l'équilibre d'une section

II.6. Conclusion

L'étude présentée jusqu'ici nous permet de simuler le comportement non linéaire des sections en béton armé en inversant l'opérateur Φ au moyen des itérations de Newton-Raphson. Cette méthode possède des inconvénients inhérents à l'emploi du module tangent de rigidité de la section. Le remplacement du module tangent par le module sécant nous permet d'atteindre ou de dépasser le pic des courbes d'interaction des sections.

Chapitre III Etude d'une poutre isostatique à précontrainte extérieure

extérieure

III.1 Introduction

Le calcul des sections est une étape importante dans l'étude des poutres. La non linéarité du comportement des poutres dérive en partie de celui des sections. L'intégration des déformations des sections nous permet alors de connaître le comportement en phase post-élastique des poutres en béton armé soumise à une précontrainte extérieure.

On se propose alors, dans ce chapitre, de rappeler certaines notions, les principales hypothèses prises en compte dans les calculs et exposer la méthode de calcul.

III.2 Hypothèses et notions

III.2.1 Modélisation des sections

Une section banale est définie dans le repère global OYZ par une superposition de plusieurs tables rectangulaires. Les données relatives à chaque rectangle sont explicitées par les coordonnées de ses sommets opposés. Les caractéristiques géométriques de la section (hauteur et largeur de chaque rectangle ainsi que sa position dans le repère global) sont ainsi automatiquement définies (fig. III-1).

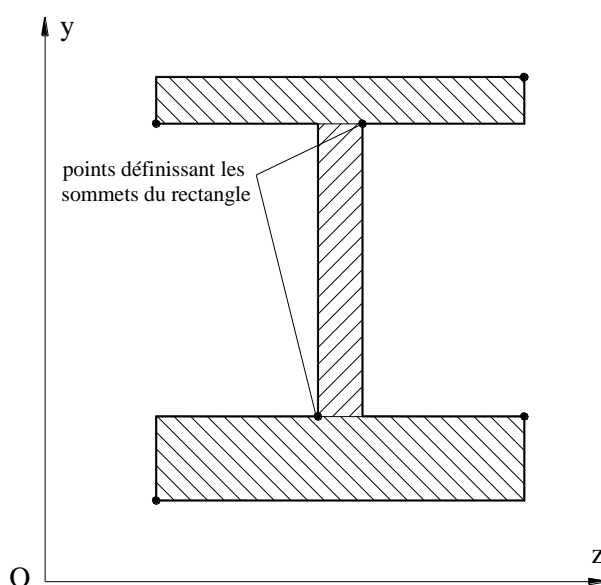


Figure III-1 : Définition de la section par tables superposées

Cette décomposition permet d'intégrer les efforts internes dans les sections et leurs rigidités en n'effectuant l'intégration que suivant une seule dimension : celle suivant laquelle les efforts sont appliqués.

Les positions des barres longitudinales d'armatures passives et actives sont données dans le repère global défini précédemment et les efforts dans ces aciers sont supposés être concentrés au niveau des centres de gravité de chaque armature.

III.2.2 Définition du chargement

La structure étudiée est supposée soumise à un système de chargement instantané, conservatif et concentré au niveau des sections dont l'abscisse est connue. Le chargement réparti est automatiquement transformé en charges nodales dans le cas de l'approche par élément finis (chapitre suivant) et en efforts internes dans les sections dans le cas de la poutre isostatique.

III.2.3 Etude de la précontrainte

Dans le cadre de cette étude, on se limite au cas de la précontrainte extérieure au béton. Celle-ci est définie géométriquement dans chaque tronçon de câble compris entre deux déviateurs successifs.

III.2.3.1 Géométrie de la précontrainte

Etant donné que le câble n'est fixé qu'en certains points de la structure dont les coordonnées sont définies dans le repère fixe, le tracé du câble est rectiligne sur chaque tronçon en supposant que son poids propre est négligeable devant les tensions mises en jeu.

Les sections de déviations sont supposées massives pour que les câbles extérieurs ne puissent créer un état de déformation très localisé (application du principe de Saint-Venant).

Entre deux déviateurs consécutifs (1) et (2), l'allongement du câble est donné par de simples considérations géométriques (fig. III-2).

Notons (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) les coordonnées du centre de gravité des deux sections, et θ_1 et θ_2 les angles que font les tangentes orientées de l'axe moyen de la poutre, pris à l'état déformé, par rapport à l'axe X.

Les points (M_1, M_2) de passage du câble au niveau des sections ont pour coordonnées :

$$\begin{aligned}
 M_1 & \begin{cases} X_1 - e_1 \sin \theta_1 \\ Y_1 + e_1 \cos \theta_1 \end{cases} \\
 M_2 & \begin{cases} X_2 - e_2 \sin \theta_2 \\ Y_2 + e_2 \cos \theta_2 \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{III-1}$$

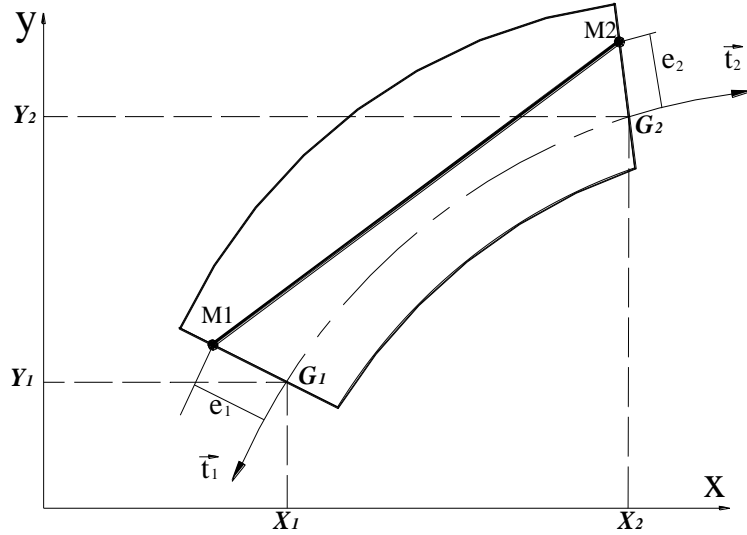


Figure III-2 : Définition des variables pour le calcul de l'allongement d'un câble entre deux déviateurs

La longueur du tronçon de câble est donc :

$$\begin{aligned}
 l_{12} &= \overline{M_1 M_2} \\
 &= \sqrt{(X_2 - X_1 + e_1 \sin \theta_1 - e_2 \sin \theta_2)^2 + (Y_2 - Y_1 + e_2 \cos \theta_2 - e_1 \cos \theta_1)^2}
 \end{aligned}
 \tag{III-2}$$

e_1 et e_2 sont les excentricités des câbles dans le repère local aux sections.

En posant l_{012} la longueur du tronçon à l'état non déformé,

$$l_{012} = \sqrt{(X_{02} - X_{01} + e_1 \sin \theta_{01} - e_2 \sin \theta_{02})^2 + (Y_{02} - Y_{01} + e_2 \cos \theta_{02} - e_1 \cos \theta_{01})^2}
 \tag{III-3}$$

l'allongement du câble peut donc être déduit par :

$$\Delta l_{12} = l_{12} - l_{012}$$

En faisant l'étude en petits déplacements pour une poutre rectiligne nous obtenons :

$$\Delta l_{12} = \sqrt{(X_2 - X_1 + e_1 \omega_1 - e_2 \omega_2)^2 + (Y_2 - Y_1 + e_2 - e_1)^2} - \sqrt{(X_{02} - X_{01})^2 + (e_2 - e_1)^2}
 \tag{III-4}$$

Avec ω_1 et ω_2 les rotations des sections (l'indice zéro correspond à l'état non déformé).

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= \theta_{01} + \omega_1 \\
 \theta_2 &= \theta_{02} + \omega_2
 \end{aligned}
 \tag{III-5}$$

III.2.3.2 Evaluation de la tension du câble

La tension initiale du câble de précontrainte, mesurée au vérin, est un paramètre parfaitement connu. Cependant, cette tension reste constante le long d'un tronçon quelle que soit la configuration déformée mais peut varier d'un tronçon à un autre. Cette variation est la conséquence de l'existence de frottement au droit des déviateurs dits déviateurs actifs. Le type de frottement qui existe est celui du frottement en courbe car les frottements en ligne, c'est à dire perte de tension par unité de longueur d'un câble, n'existe que dans la précontrainte adhérente ou intérieure au béton. Dans notre cas, la variation de la tension dans les câbles s'effectue brusquement à moins de considérer le contact structure-câble non ponctuel, ce que nous pouvons ignorer.

Cependant, la tension dans le câble est calculée en fonction de sa déformation déduite de son allongement donné en équation III-4,

$$\varepsilon_p = \frac{l_{12} - l_{012}}{l_{012}}$$

III.2.3.3 Glissement sur les déviateurs

Le comportement provoqué par le glissement des câbles n'est pas seulement non linéaire : il est aussi non réversible. Les démonstrations expérimentales ne manquent pas.

Ce phénomène est tellement complexe qu'il devient très intéressant de le cerner entre deux limites extrêmes qui sont :

- L'absence complète de frottement qui se traduit par l'égalisation des tensions d'un câble sur ses différents tronçons. Nous devons donc considérer la variation de la longueur totale du câble qui est la somme des variations de sa longueur sur chacun des tronçons ;
- Et le blocage total des glissements sur les déviateurs : ce peut être la situation normale si des dispositifs spéciaux sont installés pour empêcher tout glissement ; dans ce cas la variation de longueur du câble doit être considérée indépendamment pour chaque tronçon.

Il est aussi très intéressant de présenter une démonstration mathématique qui conduit à la résolution d'un système d'équilibre des différents tronçons de câble dans le cas de glissement parfait, en guise d'introduction pour le cas d'un frottement quantifié (existence d'un coefficient de frottement en courbe ni nul ni infini).

III.2.3.4 Effet du second ordre

Ce phénomène est la cause de la non linéarité géométrique de la structure. La déformation de chaque tronçon de câble entre deux sections de liaison (déviateurs) dépend des déplacements de ces sections qui induisent l'effet du second ordre. La formule qui donne le moment de précontrainte est la somme d'un terme linéaire qui est le produit de la tension du câble par son excentricité et d'un terme du second ordre issu du mouvement différentiel du câble par rapport à la structure. Les figures III-3-a et III-3-b nous donnent un aperçu sur l'influence du nombre de déviateurs sur le moment du second ordre et nous pouvons affirmer que théoriquement, cet effet diminue s'il existe un grand nombre de déviateurs et qu'il disparaît totalement dans le cas des câbles adhérents.

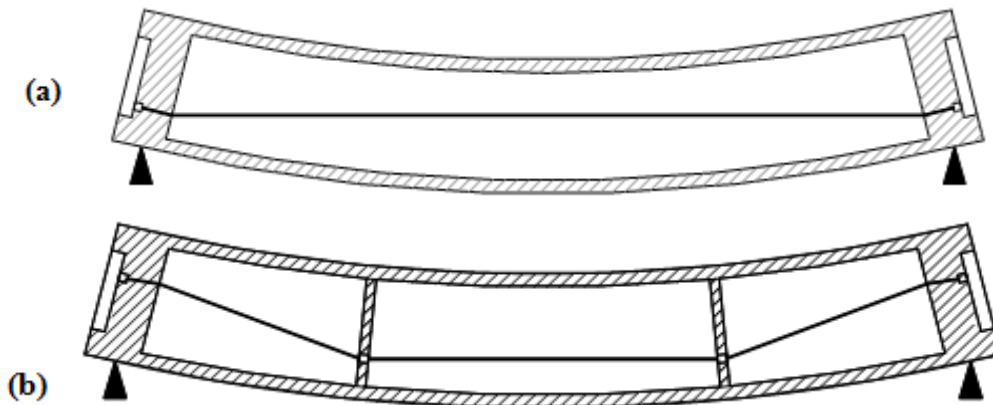


Figure III-3 : Mise en évidence des effets du second ordre dans une poutre à précontrainte extérieure

Supposant F la tension du câble sur un tronçon quelconque et $u(x)$, $v(x)$ et $\theta(x)$ les déplacements d'une section d'abscisse x . En projetant F sur le repère global nous obtenons les composantes F_x et F_y et en projetant ces dernières sur l'axe normal à la section considérée nous obtenons l'effort normal ; le moment de flexion sur une section d'abscisse x est ainsi obtenu en multipliant cet effort normal par son excentricité par rapport au CDG de la section selon les formules III-5 suivantes :

$$\begin{aligned}
 N_p(x) &= [(x_2 - x_1) \cos \theta + (y_2 - y_1) \sin \theta + e_2 \sin(\theta - \theta_2) - e_1 \sin(\theta - \theta_1)] \frac{F}{L_{12}} \\
 M_p(x) &= [(y_2 + e_2 \cos \theta_2 - y_1)(x_2 - x_1 + e_1 \sin \theta_1 - e_2 \sin \theta_2) - \\
 &\quad (x_2 - e_2 \sin \theta_2 - x_1)(y_2 - y_1 + e_2 \cos \theta_2 - e_1 \cos \theta_1)] \frac{F}{L_{12}}
 \end{aligned}
 \tag{III-6}$$

L'effet de la précontrainte est introduit par la méthode externe, c'est à dire comme une force extérieure agissant sur la structure en déformation à la seule différence que cette force varie avec la configuration déformée.

A la mise en tension et juste après rentrée d'ancrage, la précontrainte exerce sur une section de béton d'abscisse x un effort qu'on réduit à un torseur $\left\{ \begin{matrix} N_p \\ M_p \end{matrix} \right\}$ par rapport au CDG de la section.

Sous l'action de cette précontrainte et, éventuellement des sollicitations extérieures, la structure subit un état de déformation.

III.3 Méthode de calcul

III.3.1 Calcul de la déformation du câble

Du fait de l'absence de frottement dans les déviateurs, la tension du câble extérieur a la même valeur dans chacun de ses tronçons. Sous l'effet d'un chargement quelconque, provoquant une déformation de la structure. Elle est fonction de l'allongement total du câble.

III.3.2 Relation entre les déformations et déplacements d'un tronçon de poutre

En intégrant les déformations moyennant quelques hypothèses généralement admises dans la théorie des poutres, nous obtiendrons le déplacement en toute section de calcul. Parmi ces hypothèses, outre celle de la (planéité des sections), il y a celle qui stipule que toute section orthogonale à l'axe neutre avant déformation reste orthogonale après déformation.

Ces hypothèses sont compatibles à la théorie de transformation géométrique de Bresse [], qui lie les déformations généralisées $(\delta u, \delta w)$ aux déplacements généralisés (u, v, θ) .

Soit un système de barre dont l'état de déformation est parfaitement défini sur une section transversale par le couple de variables $(\delta u, \delta w)$, et soient $(u(x), v(x)$ et $\theta(x))$ et $(u(x_0), v(x_0)$ et $\theta(x_0))$ les déplacements généralisés de deux sections voisines respectivement d'abscisse x et x_0 . Les formules de déformations géométriques de Bresse sont données par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_0) - \int_{x_0}^x \delta u(\xi) \cdot d\xi \\ v(x) &= v(x_0) + \theta(x_0) \cdot (x - x_0) + \int_{x_0}^x \delta w(\xi) \cdot (x_0 - \xi) \cdot d\xi \\ \theta(x) &= \theta(x_0) + \int_{x_0}^x \delta w(\xi) \cdot d\xi \end{aligned} \quad \text{III-7}$$

Nous pouvons établir, dans le cas d'une poutre isostatique rectiligne, les relations générales entre les déplacements aux sections d'abscisses $x = 0$ et $x = L$ avec les restrictions de déplacement qu'imposent les conditions aux appuis en posant,

$$\begin{aligned} u(0) &= u_g = 0 \\ v(0) &= v_g = 0 \\ v(L) &= v_d = 0 \end{aligned} \quad \text{III-8}$$

Nous obtenons les formules suivantes :

$$\begin{aligned} u_d &= -\int_0^L \delta u(\xi) \cdot d\xi \\ \theta_g &= \frac{1}{L} \int_0^L \delta w(\xi) \cdot \xi \cdot d\xi \\ \theta_d &= \theta_g + \int_0^L \delta w(\xi) \cdot d\xi \end{aligned} \quad \text{III-9}$$

La flèche se calcule en adaptant la 2^{ème} relation III-6 aux conditions aux limites:

$$v(x) = \theta_d \cdot x - \int_0^x \delta w(\xi) \cdot \xi \cdot d\xi \quad \text{III-10}$$

La précontrainte extérieure est traitée par la méthode externe. En notant (N_{ext}, M_{ext}) les sollicitations dues aux actions autres que la précontrainte sur la section de béton, des armatures passives et des câbles de précontrainte intérieurs, les sollicitations exercées sur la section sont :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{ext} \\ M_{ext} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_p \\ M_p \end{Bmatrix} \quad \text{III-11}$$

III.3.3 Calcul itératif

Le calcul itératif de l'équilibre de la structure commence par une évaluation des efforts internes (N_{ext}, M_{ext}) induits par les charges extérieures sans la participation de la précontrainte. On calcule alors les déformations dans les sections de béton en inversant l'opérateur Φ de l'équation II-14. Grâce aux transformations III-9 et III-10 de Bresse, on déduit la déformée de la structure. Cette dernière nous servira pour calculer l'allongement des câbles de précontrainte et donc leur apport dans les sections sous forme d'un torseur (N_p, M_p) (formules III-6) pour corriger les efforts internes à l'aide de l'équation III-11. Les efforts internes ainsi obtenu nous permettent de recommencer le cycle jusqu'à ce que les

corrections deviennent petites. On atteint alors l'équilibre entre les charges extérieures et la précontrainte.

Le mode de convergence est de type alterné autour du point d'équilibre comme montré en figure III-4.

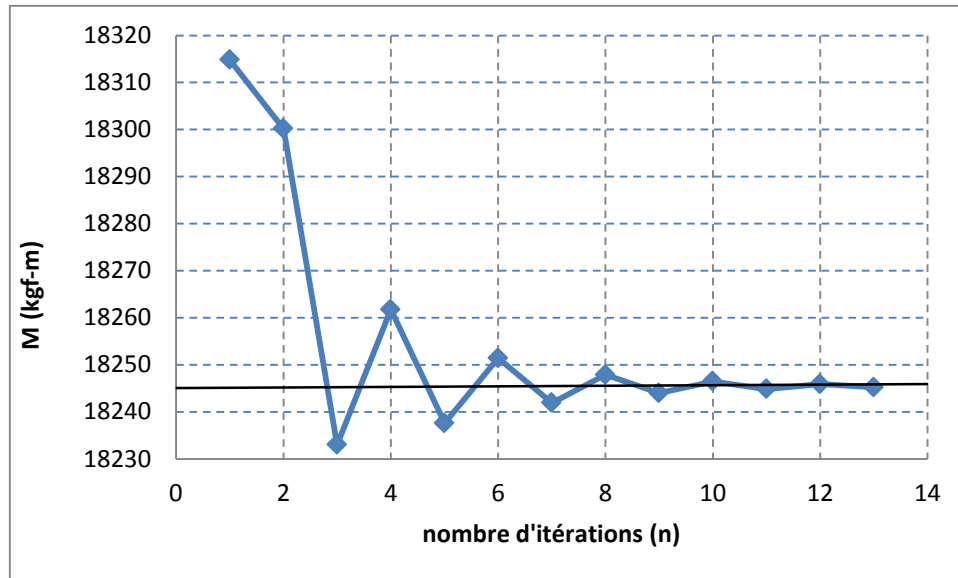


Figure III-4 : convergence autour du point d'équilibre

III.4 Résultats et confrontation

Les courbes obtenues nous ont permis uniquement de simuler la phase élastique à cause de la nature des itérations qui concernent le calcul des sections. Nous déduisons une différence de 5% à 6% entre les raideurs numérique et expérimentale probablement dues à certains phénomènes non pris en compte comme le glissement des câbles (la raideur numérique est plus grande que la raideur expérimentale car nous avons bloqué les câbles dans les déviateurs), le cisaillement... etc.

En revanche, la phase post-élastique n'a pas été atteinte car les contraintes ne se concentrent qu'au niveau de la section médiane (rupture numérique dans le calcul des sections) et que leur distribution ne se modifie pas en modifiant la charge. Nous verrons au chapitre suivant que cette particularité disparaît dans les poutres hyperstatiques.

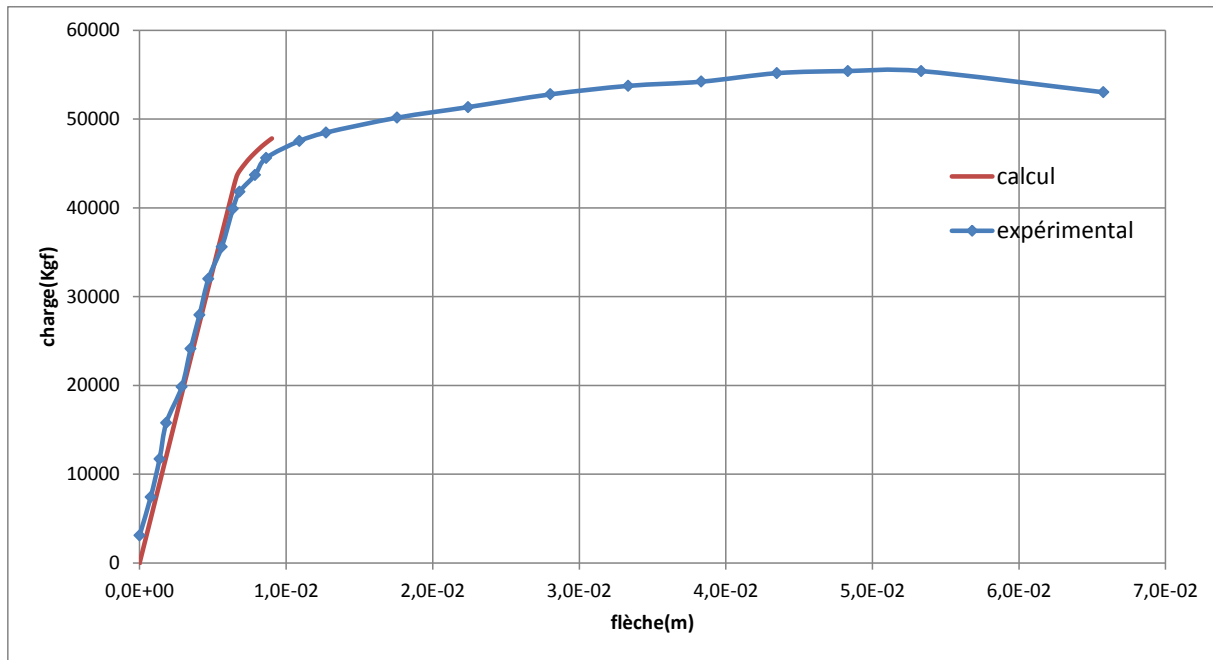


Figure III-5 : courbes numérique et expérimentale de la poutre NM6

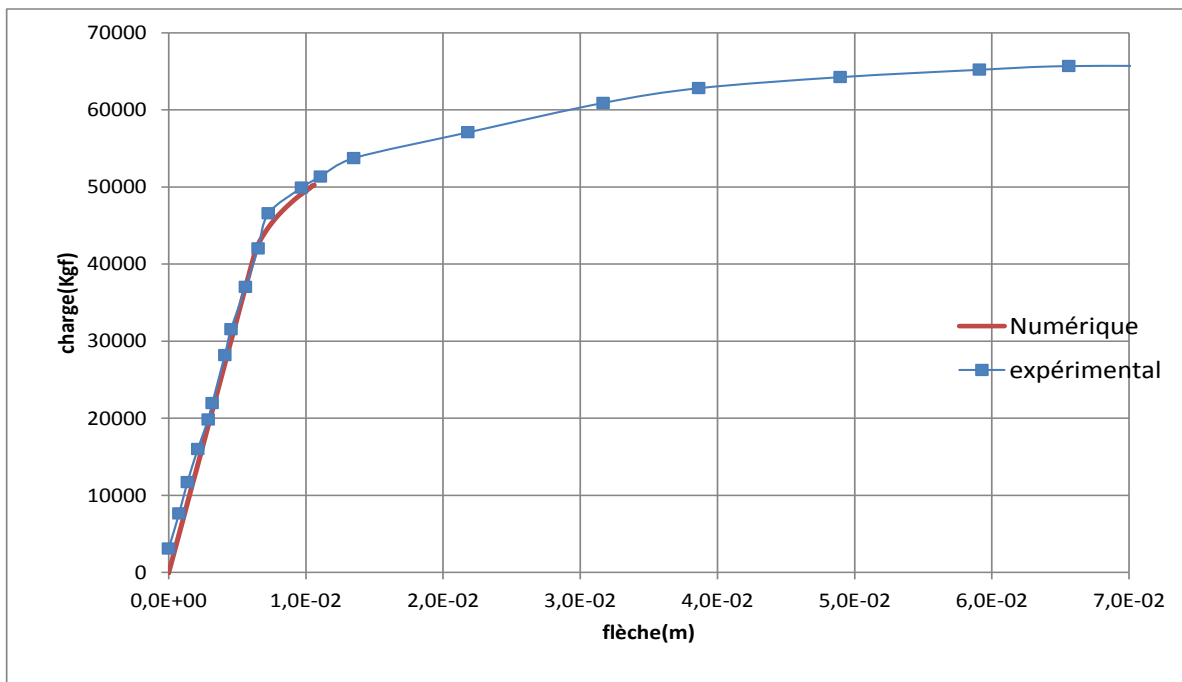


Figure III-6 : poutre NM8

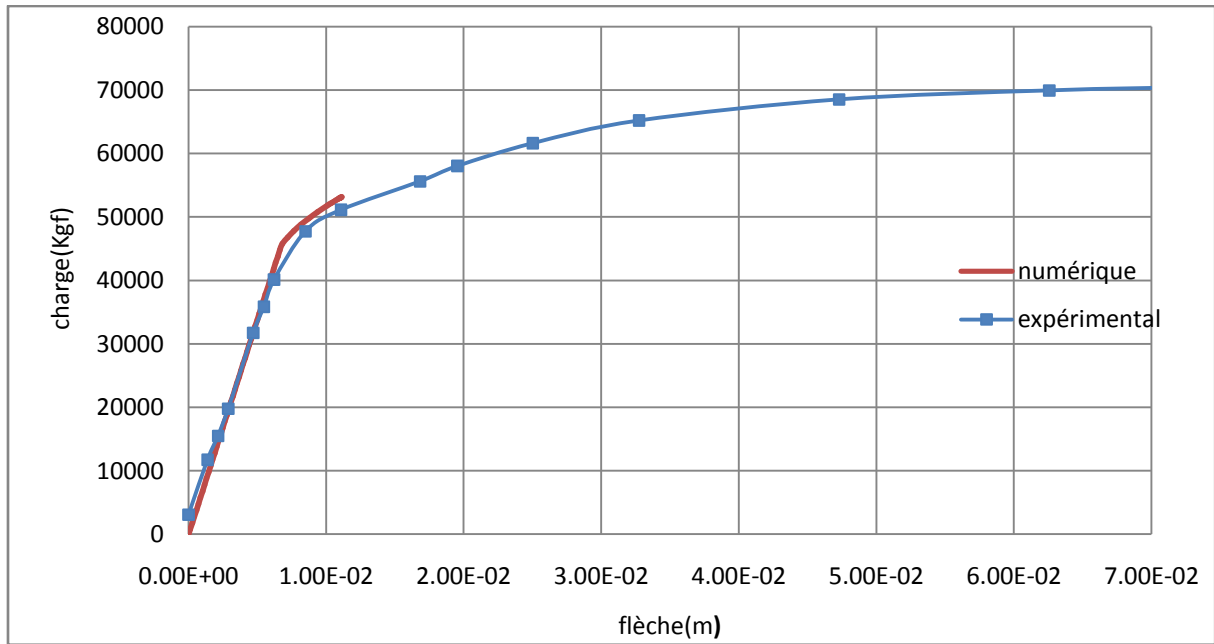


Figure III-7 : courbes numérique et expérimentale de la: poutre NM10

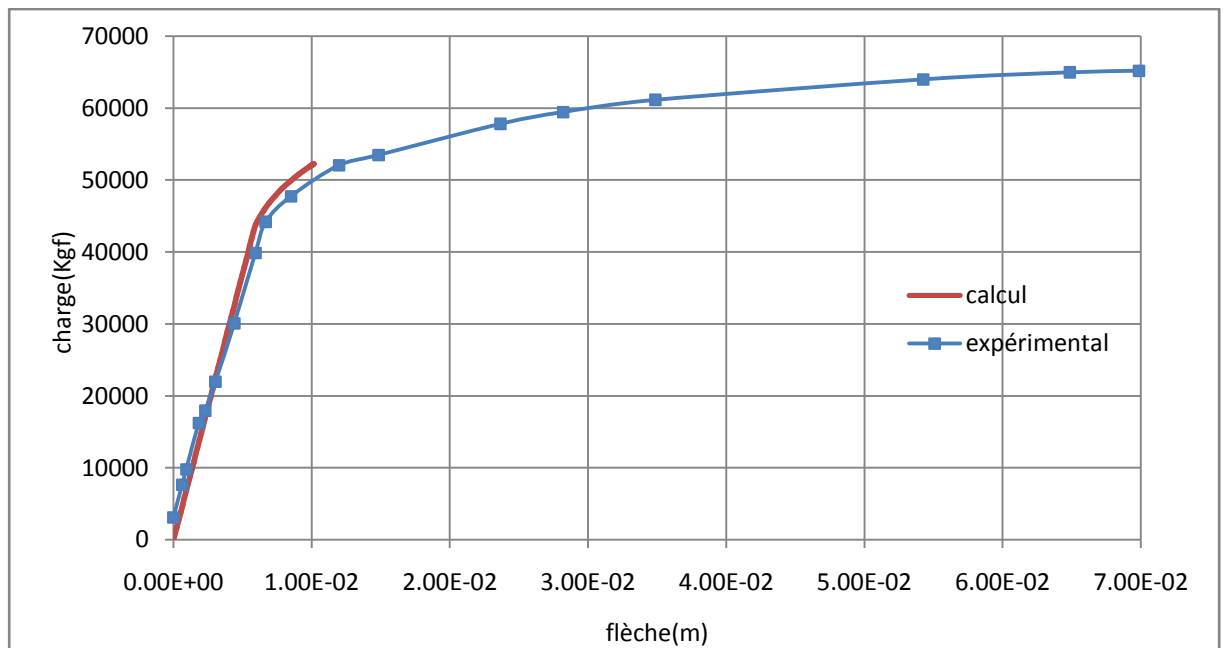


Figure III-8 : courbes numérique et expérimentale de la poutre NM11

III.4.1 Organigramme de calcul

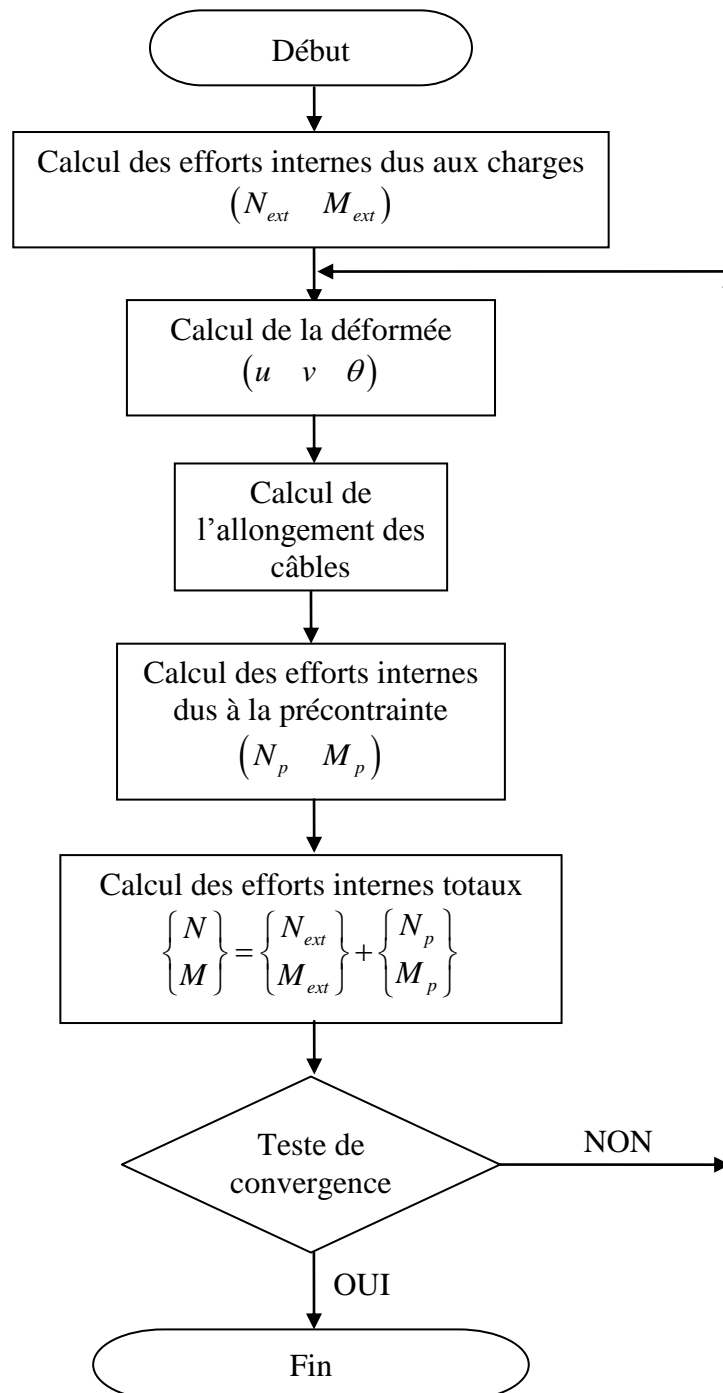


Figure III-9 : Organigramme de recherche de l'équilibre d'une poutre isostatique à précontrainte extérieure

III.5 Conclusion

Le calcul jusqu'à rupture des poutres isostatique à précontrainte extérieure diffère du calcul à la rupture classique des poutres précontraintes par des câbles intérieurs au béton, par le fait qu'il doit être global et non limité à la section de rupture [8].

Ceci tient compte aux particularités suivantes :

- 1- La variation des déformations d'un câble de précontrainte, par rapport à la déformation initiale à la mise en tension, est uniforme entre deux déviateurs ou ancrages successifs. Elle est égale à la variation de déformation moyenne du béton au niveau du câble (alors qu'elle est égale en toute section à la déformation locale du béton si le câble est adhérent). Donc pour évaluer la variation de tension des câbles extérieurs il faut bien connaître la déformation de toutes les sections du béton ;
- 2- Il faut tenir compte des effets du second ordre dû aux déplacements transversaux des câbles par rapport au béton ;
- 3- Il faut vérifier que les variations de tension des câbles n'entraînent pas de glissements sur les déviateurs. Sinon il faut en tenir compte dans le calcul des tensions des câbles. Ils agissent donc sur l'équilibre d'ensemble de la poutre. Ces glissements sont aussi des effets de second ordre.

Chapitre IV Poutre hyperstatique à précontrainte extérieure

IV.1 Introduction

La prise en compte des non linéarités mécanique et géométrique rend le problème non linéaire. La mathématisation du système mécanique conduit donc à un système non linéaire dont la solution est inaccessible de manière directe.

Nous nous intéresserons dans ce chapitre à l'étude d'une poutre hyperstatique, dont une variante n'est qu'une poutre isostatique (chapitre III), qui permettra de traiter les poutres continues par le formalisme des éléments finis et fera l'objet d'une autre méthode de recherche d'équilibre.

On se propose alors, dans ce chapitre de rappeler les principales hypothèses et notions prise en compte dans les calculs et exposer la méthode de calcul qui est basée sur la méthode des déplacements.

IV.2 Discrétisation par éléments finis

La poutre hyperstatique est modélisée par l'assemblage de plusieurs éléments finis reliant deux nœuds à trois degrés de liberté chacun (deux translations et une rotation). Les nœuds représentent les centres géométriques des sections transversales portés par les fibres moyennes des barres ; les connexions entre éléments se feront au niveau de ces centres.

Pour représenter correctement les effets dus aux non linéarités mécaniques, on subdivise chaque élément longitudinalement en plusieurs sections de Gauss (relatives aux points d'intégration de Gauss ou coefficients de Legendre).

Le choix des nœuds obéit à une règle de discrétisation permettant d'éviter que les points de discontinuité des fonctions d'efforts internes ou de changement brusque des caractéristiques des sections ne tombent sur une section banale d'un élément quelconque.

IV.3 Méthode de calcul d'une poutre hyperstatique

IV.3.1 Hypothèses et notation

Soit un élément de la structure, de nœud origine I_0 , de nœud extrémité J_0 , et $x_0y_0z_0$ le repère local de référence lié à la position initiale de l'élément. L'origine du système d'axe est en I_0 et l'axe x_0 pointe vers J_0 .

Sous sollicitations, l'élément s'est déplacé et déformé, et les nœuds I_0 et J_0 se sont déplacés en des points I et J (fig. IV-1).

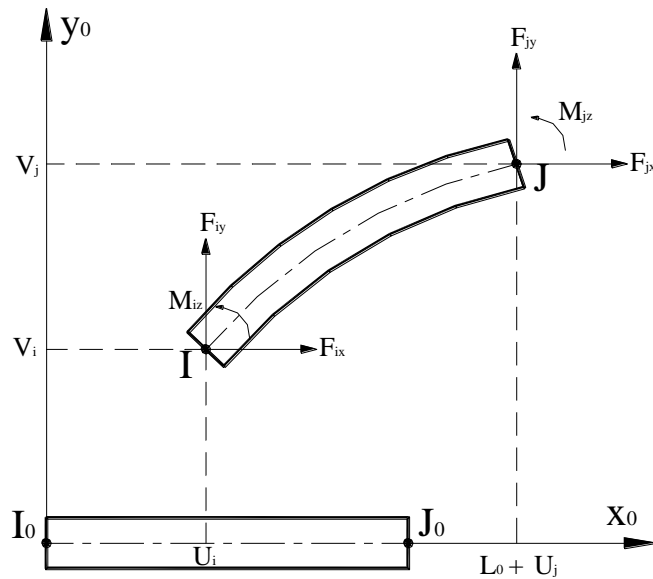


Figure IV-1: position et géométrie de l'élément déformé.

Pour approcher le champ de déplacement $\{U\}$ d'une manière unique, les fonctions d'interpolation doivent contenir six paramètres :

$$\begin{aligned} u(x) &= a_1 + a_2 x \\ v(x) &= a_3 + a_4 x + a_5 x^2 + a_6 x^3 \\ \theta(x) &= a_4 + 2a_5 x + 3a_6 x^2 \end{aligned} \tag{IV-1}$$

Sous forme condensée, les équations (IV-1) deviennent :

$$\langle u \quad v \quad \theta \rangle^T = [P_n(x)] \cdot \{a_n\} \tag{IV-2}$$

Avec $\{a_n\}$ les paramètres généraux d'interpolation et $[P_n(x)]$ la base polynomiale.

En écrivant les équations (IV.2) pour chaque nœud d'un élément (e) nous obtenons le système d'équation suivant :

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \tag{IV-3}$$

Après inversion de l'équation IV-3 et en portant le vecteur des paramètres généraux $\{a_n\}$ de l'équation IV-2 dans l'équation IV-3 nous obtenons la relation entre le vecteur de déplacement nodal $\{D_n\}$ et le déplacement dans une section quelconque d'abscisse x .

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{x}{L} & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\frac{x^2}{L^2}+2\frac{x^3}{L^3} & x-2\frac{x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2} & 0 & 3\frac{x^2}{L^2}-2\frac{x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2} \\ 0 & -6\frac{x}{L^2}+6\frac{x^2}{L^3} & 1-4\frac{x}{L}+3\frac{x^2}{L^2} & 0 & 6\frac{x}{L^2}-6\frac{x^2}{L^3} & -2\frac{x}{L}+3\frac{x^2}{L^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad \text{IV-4}$$

Sous forme condensée l'équation (IV-4) devient :

$$\{\delta\} = [\mathbf{N}] \cdot \{D_n\} \quad \text{IV-5}$$

IV.3.2 Définition des vecteurs contrainte et déformation

Les contraintes et les déformations sont ici des grandeurs généralisées. Le vecteur contrainte $\{\sigma\}$ est défini comme étant les efforts internes dans une section développés par le vecteur déformation $\{\varepsilon\}$. Ils sont liés par la transformation Φ définie au chapitre II (équation II-14).

Les relations entre la déformation généralisée et le déplacement généralisé à la section d'abscisse x sont données par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \delta w &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{aligned} \quad \text{IV-6}$$

En substituant u et v ou θ par leurs expressions tirées des équations IV-4 on obtient la relation entre la déformation $\{\varepsilon\}$ et les déplacements nodaux $\{D_n\}$.

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}] \{D_n\} \quad \text{IV-7}$$

Avec $[\mathbf{B}]$ la matrice de déformation donnée comme suit :

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & 0 & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \quad \text{IV-8}$$

IV.3.3 Formation de la matrice de rigidité élémentaire

Tout système mécanique évoluant vers un équilibre statique stable prend une configuration où l'énergie interne est stationnaire, c'est à dire minimale. Nous pouvons affirmer que l'équilibre du système est une fonctionnelle de l'énergie interne. Cette dernière est le travail des forces intérieures qui doit être égal à celui des forces extérieures, selon le principe des travaux virtuels.

En général, l'énergie totale d'un système physique est fonction de l'état du système et se compose de trois parties qui sont les énergies cinétique, potentielle et interne.

Ordinairement, la mécanique examine les systèmes immobiles lorsque leurs différents états (chimique, électromagnétique, thermique etc.) sont invariants dans le temps et l'espace. De plus, la variation de l'énergie potentielle de gravitation est considérée négligeable car le changement de position du système dans le champ de gravitation est insignifiant devant ces dimensions. Alors l'énergie totale du système se réduit à l'énergie interne. Celle-ci est la somme de plusieurs termes dont l'énergie intermoléculaire, c'est à dire l'énergie de l'attraction et de la répulsion mutuelle des particules qui constituent le système, est la seule qui influe d'une manière permanente sur l'équilibre final du système. L'expression de ces forces intermoléculaires à l'échelle macroscopique sont les contraintes qui induisent des déformations et donc du travail emmagasiné sous forme d'énergie potentielle que nous supposons réversible.

D'après le théorème des travaux virtuels, nous pouvons écrire, pour un élément de poutre, que le travail des forces intérieures (énergie de déformation) est égal au travail des forces extérieures.

$$\int_0^L \{\delta \varepsilon\}^T \cdot \{\sigma\} \cdot dx = \{\delta D_n\}^T \cdot \{F_n\} \quad \text{IV-9}$$

Avec :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} N_{\text{int}} \\ M_{\text{int}} \end{Bmatrix} \text{ et } \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta w \end{Bmatrix} \text{ liés par la relation } \{\sigma\} = \Phi(\{\varepsilon\})$$

$\{F_n\}$: est le vecteur de chargement nodal.

En substituant le vecteur-contrainte $\{\sigma\}$ et le vecteur- déformation $\{\varepsilon\}$ par leurs expressions, la relation IV-9 devient :

$$\int_0^L \{\delta D_n\}^T \cdot [\mathbf{B}]^T \cdot \Phi(\{\varepsilon\}) \cdot dx = \{\delta D_n\}^T \cdot \{F_n\} \quad \text{IV-10}$$

En opérant une simplification, nous obtenons un système de six équations à six inconnues qui sont les déplacements nodaux de l'élément considéré.

$$\int_0^L [\mathbf{B}]^T \cdot \Phi([\mathbf{B}]\{D_n\}) \cdot dx = \{F_n\} \quad \text{IV-11}$$

Si nous supposons que le comportement du matériau qui constitue le système mécanique suit la loi de Hooke, à savoir :

$$\Phi(\{\varepsilon\}) = \Phi_t(\{\varepsilon\}) \cdot \{\varepsilon\} = [\mathbf{D}] \cdot \{\varepsilon\} \quad \text{IV-12}$$

nous obtiendrons la formule classique qui donne la matrice de rigidité dans le domaine de comportement linéaire d'un élément :

$$\left(\int_0^L [\mathbf{B}]^T \cdot [D] \cdot [\mathbf{B}] \cdot dx \right) \cdot \{D_n\} = \{F_n\} \quad \text{IV-13}$$

Sous forme plus compacte nous écrivons :

$$[\mathbf{K}_e] \cdot \{D_n\} = \{F_n\} \quad \text{IV-14}$$

$[\mathbf{K}_e]$ est la matrice de rigidité linéaire d'un élément de poutre.

Le système IV-11 est non linéaire et ses inconnus sont les déplacements nodaux $\{D_n\}$. Nous avons déjà vu que l'opérateur Φ est non linéaire. Par conséquent, l'équation IV-11 est également non linéaire et on ne peut pas trouver le champ de déplacement correspondant au chargement nodal $\{F_n\}$ que par des méthodes indirectes, c'est à dire itératives. Le Jacobien de ce système est défini comme étant les dérivées partielles des composantes du vecteur-chargement nodal $\{F_n\}$ par rapport aux composantes du vecteur-déplacement nodal $\{D_n\}$. Le Jacobien de ce système n'est autre que la matrice de rigidité élémentaire de l'élément poutre. L'expression de la matrice de rigidité élémentaire est tellement complexe que nous avons préféré la calculer numériquement.

IV.3.4 Formation du vecteur chargement nodal dû à la précontrainte extérieure

Le vecteur de chargement nodal est constitué d'une partie fixe qui découle du chargement extérieur et d'une partie variable issue de la précontrainte qui dépend de la configuration déformée de la structure (effet du second ordre ou l'effet P- Δ).

$$\{F_n\} = \begin{Bmatrix} H_i \\ V_i \\ M_i \\ H_j \\ V_j \\ M_j \end{Bmatrix}$$

H_i et V_i sont les forces nodales horizontale et verticale agissant sur les nœuds i et j et M_i et M_j sont les moments nodaux. Les efforts nodaux de la précontrainte sont calculés par les formules du chapitre III (équations III-6). Les sections des déviateurs sont choisies comme étant des nœuds. Les efforts de précontraintes sont directement injectés dans le vecteur de chargement nodal. La partie fixe qui comporte des charges réparties est calculée par :

$$\{F_n\}_{\text{fixe}} = \int_0^L \mathbf{N} \{q\} dx \quad \text{IV-15}$$

Avec $\{q\}$ le vecteur de chargement fonction de x écrit sous la forme

$$\{q(x)\} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ m \end{Bmatrix}$$

f_x et f_y sont les forces réparties horizontale et verticale, et m est le moment de flexion répartie agissant sur la section d'abscisse x .

Pour le chargement extérieur des poutres étudiées, le vecteur $\{q\}$ se réduit à :

$$\{q(x)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ q \\ 0 \end{Bmatrix}$$

IV.4 Résultats et confrontation

Les poutres que nous avons choisies pour la simulation numérique sont celles décrites au chapitre I sur les poutres hyperstatiques (les essais américains). Les câbles de précontrainte possèdent trois tracés différents. Nous avons concentré la section des câbles sur un tracé moyen des câbles identique à celui du milieu.

Pour permettre l'étude et l'analyse du comportement d'une poutre continu à précontrainte extérieure, on a développé un programme informatique (poutre_hyperstatique)

rédigé en langage Fortran 90. On se propose donc dans ce qui suit, de valider les méthodes de calcul présentées précédemment. Nous présentons dans ce chapitre l'exemple de validation sur une poutre continue (essais de l'université du Texas à Austin), ces essais sont bien détaillés en chapitre I. Les résultats du calcul comparé à ceux expérimentaux sont donnés en figures IV-2 et IV-3 sous forme de l'évaluation de la flèche au niveau de la charge appliquée.

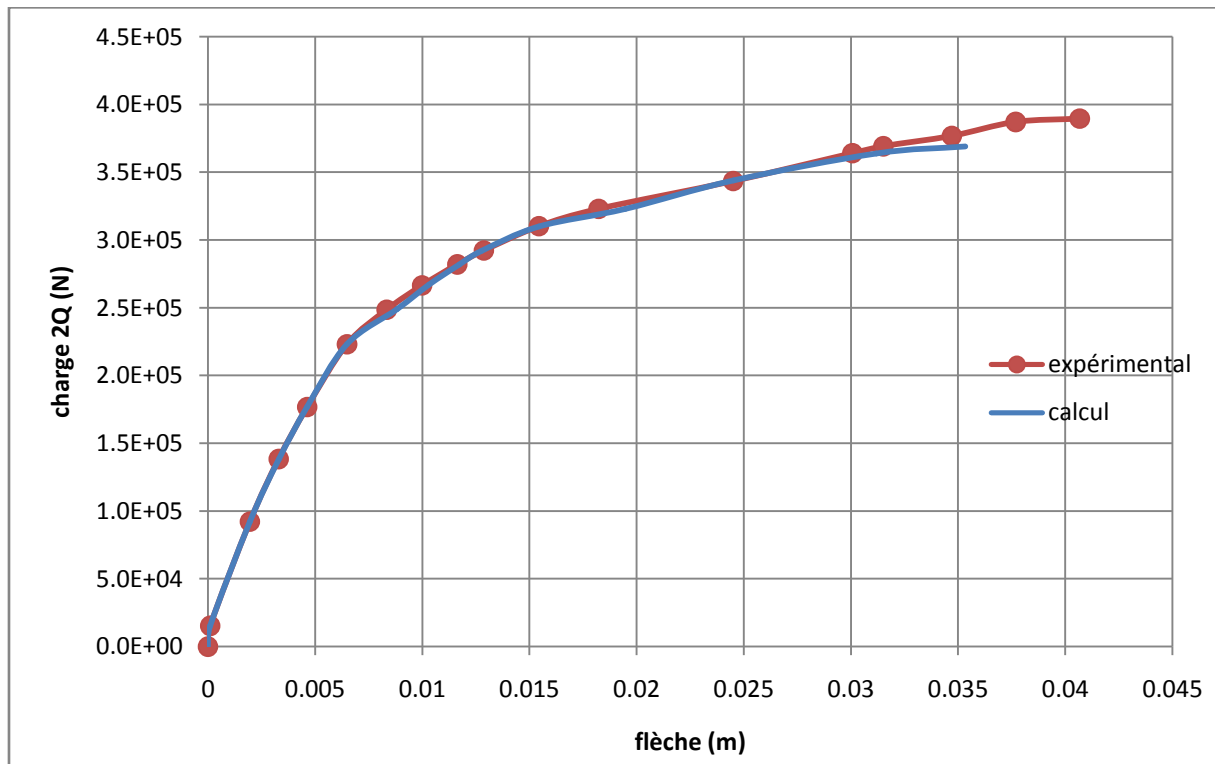


Figure IV-2 : Evaluation de la flèche à la section critique en fonction du chargement pour la travée nord (joints secs)

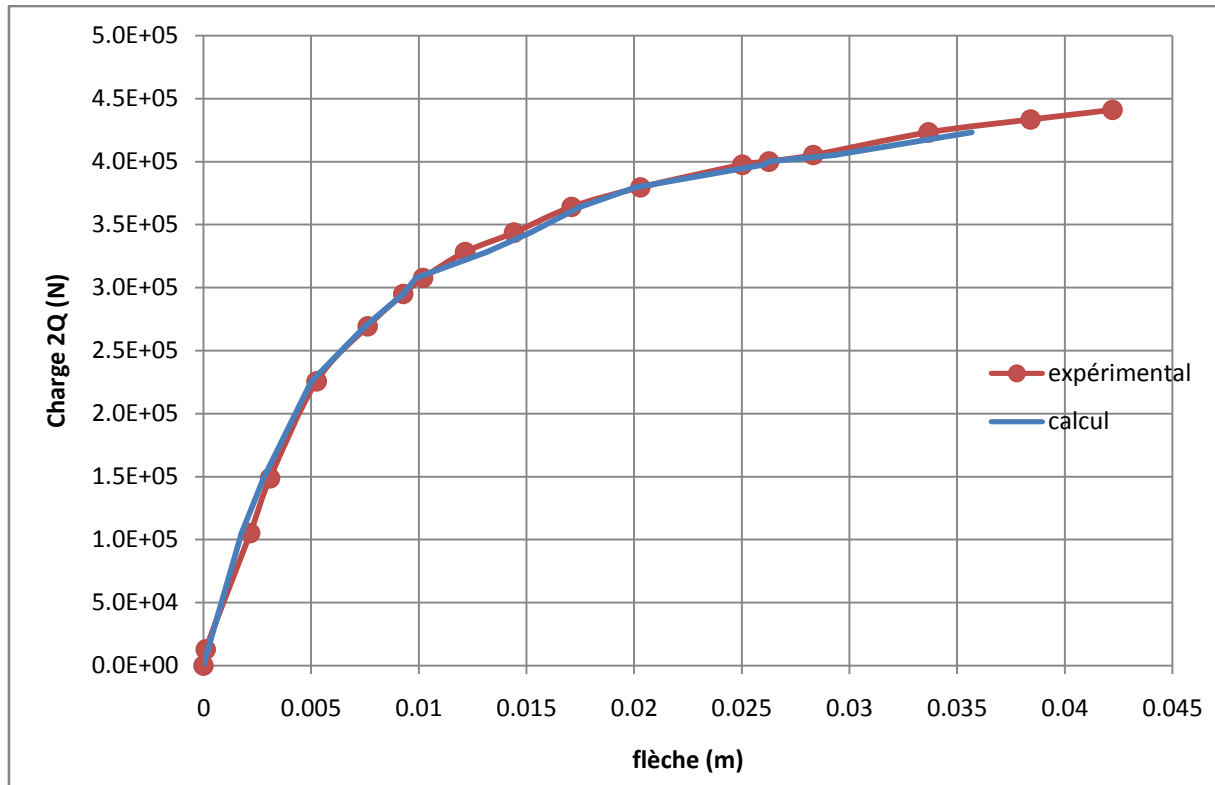


Figure IV-3 : Evaluation de la flèche à section critique en fonction du chargement pour la travée sud (joints epoxy)

On constate que le comportement de la poutre étudiée est bien approché par le calcul dans cette présente étude. La simulation montre une bonne estimation en termes de flèche et de charge ultime.

Cependant, la simulation numérique a franchi la phase élastique pour pénétrer dans la phase de ductilité en approchant la rupture réelle de la structure. Ceci montre que la rupture numérique n'a pas survécu dans le calcul des sections durant cette phase. Ce qui veut dire que la distribution des contraintes optimise la résistance, ce qui apparait bien dans la répartition des fissures observées lors campagnes expérimentales réalisées sur ce type de structures.

IV.5 Conclusion

Une simulation numérique par la méthode des éléments finis du comportement mécanique d'une poutre hyperstatique précontrainte par des câbles extérieurs a été effectuée. Les non-linéarités mécanique et géométrique ont été prises en compte. Nous avons pris le choix de fixer les câbles sur les déviateurs (adhérence parfaite ou glissement nul).

La validation numérique est réalisée sur les courbes issues des essais expérimentaux. Ces derniers sont effectués sur des poutres continues à 3 travées précontraintes par des câbles extérieurs ayant plusieurs tracés. Nous avons opté pour un seul tracé représentant un tracé médian.

Nous avons constaté que les courbes numériques peuvent simuler jusqu'à approcher beaucoup la rupture expérimentale. Ceci nous permet de confirmer un modèle du comportement basé sur la fissuration répartie.

Conclusion générale

L'étude de comportement non-linéaire des structures à précontrainte extérieure nécessite la prise en considération des effets non-linéaires dus au comportement des matériaux, aux effets de second ordre et au glissement des câbles sur les déviateurs. Ces effets influent sur le comportement de la structure et sur le niveau de surtension des câbles de précontrainte.

Dans le cadre de ce travail on s'est intéressé à la modélisation et à la simulation du comportement jusqu'à rupture des poutres (isostatiques et hyperstatiques) à précontrainte extérieure en intégrant les phénomènes cités précédemment liés à cette technique. Dont la méthode de calcul est basée sur une procédure de résolution itérative.

Le calcul des poutres NM à câblage extérieur avec un ferrailage passif varié et des formes de section transversales complexes permet de conclure que le modèle estime correctement le comportement des poutres précontraintes par des câbles extérieurs au béton dans le domaine élastique.

Le calcul de la poutre hyperstatique à câblage extérieur testé à l'université de Texas à Austin permet de noter que le modèle estime bien le comportement de ce type de poutre aussi bien dans le domaine élastique que dans le domaine post-élastique.

Les développements futurs de cette étude numérique, consistent à améliorer d'avantage le programme de calcul, on peut citer les orientations suivantes : Introduction des déformations dues à l'effort tranchant, prise en compte de l'adhérence béton-acier et prise en considération de l'ouverture des joints dans le cas des poutres à voussoirs préfabriqués ainsi que le glissement des câbles dans les déviateurs.

Les résultats obtenus au cours de cette étude nous encouragent à la poursuite dans cette même voie de façon à comprendre encore mieux les mécanismes du comportement d'une poutre fléchie à précontrainte mixte et les moyens de le modéliser.

Bibliographie

- [1] Y. Bouafia ; Resistance à l'effort tranchant des poutres en béton à précontrainte extérieure, Etude expérimentale et calcul à la rupture. Thèse de doctorat, Ecole Centrale des Arts et Manufactures, Paris, novembre 1991.
- [2] B. FOURE ; La précontrainte extérieure, le point de question d'aujourd'hui, 19 juin 1986.
- [3] VIRLOGEUX ; la précontrainte extérieure, innovation dans le domaine des ouvrages d'art en béton précontrainte. Annales de l'ITBTP décembre 1983.
- [4] JARTOUX P; LACROIX R., Development of externally pressing in bridges
ACI – 120, Ed NAAMAN R., et john BREEN, 1990.
- [5] Groupe de travail du SETRA.
- [6] Groupe de travail de l'AFPC.
- [7] Groupe de travail de l'Itbtp.
- [8] BARAHITI TASSADIT ; thèse d'ingénierie d'état : option C.H.A juillet 1993.
- [9] KACHI ; modélisation du comportement jusqu'à la rupture des poutres à précontrainte extérieures, thèse de doctorat d'état 2006.
- [10] DE BARABA Amandine ; méthode de dimensionnement aux EUROCODE d'ouvrages précontraints construits par encorbellement successifs ; Application de la méthode au cas d'un ouvrage dimensionnel selon code Colombien.
- [11] Y.GUYON ; construction en béton précontrainte classes état limites.
- [12] FOURE.B, REZENDE-MARTINE p.c. de HOWANGL.M ; problème de sécurité à rupture et de modélisation du comportement des poutres en béton à précontrainte extérieure. Annales de l'I.T.B.T.P. février 1991.
- [13] Y.BOUAFIA ; Simulation numérique de comportement moyen, jusqu'à la rupture d'une zone de poutre. Application au béton armé et/ou précontrainte et béton de fibres. Memoires de D.E.A. University Paris6, 1987.

[14] Y.BOUAFIA, KACHI.M.S ; shear strength of externally prestressed beams. Second international symposium of cement and concrete. Technology-Istanbul Turkey, September 2000.

[15] HINDI.A. ; KREGER.M; et BREEN.J; Enhancing the strength and ductility of post-tensioned segmental box-girder. Rapport de recherche n° 1209-2F. centre for transportation research. Université de Texas à Austin, avril 1999.

[16] HINDI.A. , KREGER.M. , et BREEN.J; Enhancing the strength and ductility of post-tensioned segmental box-girder. Workshop Behaviour of external prestressing in structures. Saint rémy-liés-Cheuvreuse 1993.

[17] LACARBONARA W, PAOLONE A, YABUNO H; Modeling of nonshallow prestressed beams towards asymptotic solution. Mechanics Research communications. 31.2004. PP 301-310.

[18] MACLEOD R, KREGER M, Et BREEN J; Strength and ductility of three-span externally post-tensioned segmental box girder model. ACI SP-120 ED. Antoine NAMANA et John BREEN, 1990

[19] YAGINUMA Y; Mechanical behavior of partially prestressed concrete beams with exterior cables. Transaction of Japan Concrete Institute, vol.9, 1987.

[20] GARCIA- VARGAS JA ; La précontrainte extérieure appliquée à des poutres hydrostatiques, Thèse de doctorat, Ecole Centrale des Arts et Manufactures. Saint-Rémy- Les-Cheuvreuse, France juin 1993.

[21] GARCIA- VARGAS JA, N. MENEZES, J.L TRINH; Effect of external prestressing in slipping at deviators on beam Behavior. Workshop Behaviour of external prestressing in structures. Saint Rémy-Lés-Cheuvreuse, juin 1993.

[22] REZENDI-MARTINS P.L ; Modélisation du comportement jusqu'à la rupture en flexion des poutres en béton à précontrainte extérieure ou mixte. Thèse de doctorat à l'Ecole Centrale de Paris, 1989.

[23] SARGIN.M (1971); stress-strain relationships for concrete and the analysis on the Structural concrete section», S.M study n°4, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Canada.

[24] Grelat A ; Analyse non linéaire des ossatures hyperstatique en béton armé Thèse de doctorat Ingénieur – Université PARISVI – 1987.

[25] JEAN ROUX ; résistance des matériaux par la pratique.