

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Mouloud Mammeri De Tizi-Ouzou



Faculté De Génie Electrique Et D'informatique  
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

**Mémoire de Fin d'Etudes  
De MASTER ACADEMIQUE**  
Spécialité : **Automatique et Informatique  
Industrielle**

*Présenté par*  
**Fatima AIT OUMEZIANE  
Abdelkader ABDMEZIEM**

Mémoire dirigé par Redouane KARA et codirigé par Saïd AMARI

Thème

**Contribution à l'évaluation de performances  
des Automates Temporisés avec Gardes en  
Utilisant l'algèbre des dioides**

*Mémoire soutenu publiquement le 03 juillet 2018 devant le jury composé de :*

**M Ahmed MAIDI**  
Pr, UMMTO, Président

**M Redouane KARA**  
Pr, UMMTO, Rapporteur

**M Saïd AMARI**  
HDR, U/Paris XIII/ France, Co\Rapporteur

**Mme Aldjia NAIT ABDESSELAM**  
MAA, UMMTO, Examineur

**Mme Hakima HAMRI**  
MAA, UMMTO, Examineur

---

# Remerciements

Nous tenons en premier lieu à remercier le bon Dieu pour le courage et la patience qu'il nous a donné afin de mener ce projet à terme.

Pour la réalisation de ce mémoire, nous tenons à exprimer notre gratitude à Monsieur KARA Redouane et Monsieur AMARI Saïd pour leur encadrement riche en conseils et en encouragements, ainsi que leur disponibilité et pour toute l'aide qu'ils nous ont apportée tout au long de notre travail.

Nos plus vifs remerciements vont aussi aux membres du jury qui ont bien voulu nous honorer en acceptant d'examiner notre travail.

Nos vifs remerciements vont aussi à tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail et à tous ceux qui nous ont aidé à vaincre les nombreuses difficultés rencontrées tout au long de la durée de ce mémoire.

Nous exprimons, enfin, notre infinie gratitude à nos chers parents et à nos frères et sœurs en reconnaissance de leurs sacrifices, aides, soutiens et encouragements.

*Fatima et Abdelkader*

# Dédicaces

A la mémoire de ma tante (Nana)

A ma mère (Yemma Azizen)

A mes chers parents

Fatima

A ma tendre et chère mère qui à toujours été là pour moi, et m'a toujours aimé et chérit  
« tu as tout sacrifié pour moi n'épargnant ni santé ni efforts. tu m'as donné un magnifique  
modèle de vigueur et de persévérance,

Je te suis redevable pour cette éducation dont je suis très fier.» .

A mon oncle Omar et sa femme Djamila qui m'ont tant aidé dans ma vie,  
et leurs enfants Menad, Saïd et Mehenna ainsi que Fadhila que je considère comme mes  
frères et sœurs .

A mon oncle Mouhand et sa femme Zahra et ses enfant Juba et Fatma avec qui j'ai grandi.

A toute ma grande famille, mes amis et à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour  
la réalisation de ce travail.

A mon amie et coéquipière Tima, avec elle on a surmonté beaucoup d'épreuves, ainsi qu'à  
toute sa famille.

A la mémoire de mon père.

Kader

## Résumé

Les travaux abordés dans ce manuscrit concernent la modélisation des systèmes à événements discrets à l'aide d'automates temporisés avec gardes (ATGs) en utilisant l'algèbre des dioïdes. Nous proposons des représentations alternatives pour les ATGs. Celles-ci traduisent l'évolution des automates de façon approximative, car seuls leurs comportements extrémaux sont décrits, mais il est escompté de pouvoir résoudre à l'aide de celles-ci des problèmes importants. Plus exactement, des équations récursives ont été définies dans l'algèbre  $(\max,+)$  et l'algèbre  $(\min,+)$  afin de décrire les comportements pire-cas et meilleur-cas des automates temporisés avec gardes.

**Mots clés:** automates Temporisés avec gardes, systèmes à événements discrets, évaluation des performances, présentation linéaire, L'algèbre des dioïdes.

## Abstract

The work presented in this manuscript deals with the modeling of discrete event systems using Timed Automata with Guards (TAGs) using the formalism of dioids algebra. We propose alternative representations for Timed Automata with Guards. These representations approximate the dynamics of TAGs, since only their extremal behaviors are described, but they are expected to make possible to solve important problems. More precisely, recursive equations are defined over  $(\max,+)$  and  $(\min,+)$  algebras to describe worst case and optimal case behaviors of TAGs.

**Keywords:** Timed automata with guards, discrete event systems, performance evaluation, linear representation, dioids algebra.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>11</b>
<b>1 Généralités</b>	<b>13</b>
1.1 Langage . . . . .	13
1.1.1 Notions de préfixe et de suffixe : . . . . .	14
1.1.2 Opération sur les langages : . . . . .	14
1.1.2.1 L'union : . . . . .	14
1.1.2.2 La concaténation . . . . .	15
1.1.3 L'étoile de Kleene : . . . . .	15
1.2 Automate . . . . .	16
1.2.1 Déterminisme : . . . . .	17
1.2.2 Atteignabilité : . . . . .	17
1.2.3 Coatteignabilité : . . . . .	18
1.2.4 Produit d'automates : . . . . .	18
1.3 Réseau de Petri : . . . . .	22
1.3.1 État d'un réseau de Petri : . . . . .	23
1.3.2 Propriétés . . . . .	24
1.3.3 Graphe d'événements temporisés : . . . . .	25
1.4 Théories des Dioïdes . . . . .	27
1.4.1 Théorème (Relation d'ordre) . . . . .	29
1.4.2 L'équation $x = ax \oplus b$ dans les dioïdes complets . . . . .	31
<b>2 Automate(max, +)</b>	<b>32</b>
2.1 Définition d'un automate (max,+) . . . . .	32
2.2 Représentation sous la forme d'équations d'état dans $\mathbb{R}_{max}$ . . . . .	36
2.3 Représentation sous la forme de séries formelles . . . . .	37
2.4 Évaluation de performances des SEDs . . . . .	38
2.4.1 Durée d'achèvement maximum pour les séquences d'une longueur donnée	38

2.4.2	Durée d'achèvement minimum pour les séquences d'une longueur donnée	39
2.5	Modélisation du comportement extrémal des automates $(\max,+)$	39
2.5.1	Représentations évaluant les dates d'achèvement	39
2.5.1.1	Dans l'algèbre $(\max,+)$	40
2.5.1.2	Dans l'algèbre $(\min,+)$	42
2.5.2	Représentations évaluant les longueurs des séquences	43
2.5.2.1	Dans l'algèbre $(\max,+)$	43
2.5.2.2	Dans l'algèbre $(\min,+)$	45
2.5.3	Représentations symétriques	46
2.5.3.1	Représentation symétrique évaluant les dates d'achèvement	46
2.5.3.2	Représentation symétrique évaluant les longueurs de séquences	48
<b>3</b>	<b>Automates Temporisés avec Gardes (ATGs)</b>	<b>51</b>
3.1	Définition d'un ATG	51
3.1.1	Composition parallèle	53
3.2	Représentation linéaire des ATGs	55
3.2.1	Composition parallèle	56
3.2.2	Représentations sous la forme d'équations d'état dans $\mathbb{R}_{max}$	58
3.2.3	Représentations sous la forme de séries formelles	59
3.3	Modélisation du comportement extrémal des ATGs	60
3.3.1	Représentations évaluant les dates d'achèvement	60
3.3.1.1	Dans l'algèbre $(\max,+)$	61
3.3.1.2	Dans l'algèbre $(\min,+)$	63
3.3.2	Représentations symétriques évaluant les dates d'achèvement	65
3.3.2.1	Dans l'algèbre $(\max,+)$	65
3.3.2.2	Dans l'algèbre $(\min,+)$	67
<b>4</b>	<b>Évaluation des performances des SEDs</b>	<b>70</b>
4.1	Calcul des bornes supérieures pour les dates d'achèvement	70
4.2	Calcul des bornes inférieures pour les dates d'achèvement	74
4.3	Calcul des bornes supérieures pour les longueurs de séquences	76
4.4	Calcul des bornes inférieures pour les longueurs de séquences	76
4.5	Application	77
4.5.1	Évaluation des dates d'achèvement	79
4.5.1.1	Dans $\overline{\mathbb{R}}_{max}$	81
4.5.1.2	Dans $\overline{\mathbb{R}}_{min}$	83
4.5.2	Évaluation des longueurs de séquences	85

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	6
4.5.2.1 Dans $\bar{\mathbb{Z}}_{max}$ . . . . .	89
4.5.2.2 Dans $\bar{\mathbb{Z}}_{min}$ . . . . .	90
<b>Conclusion générale</b>	<b>92</b>

# Table des figures

1.1	Exemple d'automate . . . . .	17
1.2	Automate coatteignable . . . . .	18
1.3	Automate déterministe $A_1$ . . . . .	21
1.4	Automate déterministe $A_2$ . . . . .	21
1.5	Résultat de la composition de deux automates $A = A_1 \times A_2$ . . . . .	21
1.6	L'automate $A$ final . . . . .	22
1.7	Représentation de deux machines et un stock . . . . .	22
1.8	Réseau de Petri RdP1 . . . . .	23
1.9	Réseau de Petri RdP 2 . . . . .	24
1.10	Exemple de blocage . . . . .	25
1.11	Graphe d'événement . . . . .	26
1.12	Graphe d'Evénement Temporisé . . . . .	27
2.1	Automate $(\max, +)$ $G_{2.1}$ . . . . .	33
2.2	Automate $(\max, +)$ , Non-déterministe $G_{2.2}$ . . . . .	35
2.3	Automate $(\max, +)G_{2.3}$ . . . . .	36
2.4	Automate $(\max, +)$ , déterministe $G_{2.4}$ . . . . .	41
2.5	Automate $(\max, +)$ , non-déterministe $G_{2.5}$ . . . . .	44
2.6	Automate $(\max, +)$ , non-déterministe $G_{2.6}$ . . . . .	48
3.1	Automate Temporisé avec Garde $G_{3.1}$ . . . . .	52
3.2	Automate Temporisé avec Garde $G_{3.2}$ . . . . .	54
3.3	Résultat de la composition parallèle d'ATGs $G_{3.1} \parallel G_{3.2}$ . . . . .	54
3.4	ATG final $G'_{3.1 \parallel 3.2}$ . . . . .	55
3.5	Automate Temporisé avec Garde $G_{3.3}$ . . . . .	61
3.6	Automate Temporisé avec Garde $G_{3.4}$ . . . . .	65
4.1	Automate Temporisé avec Garde $G_{4.1}$ . . . . .	72
4.2	Réseau de Petri représentant le jobshop . . . . .	78

4.3 L'ATG correspondant au RdP du jobshop . . . . . 78

# Liste des tableaux

2.1	Les éléments des dates d'achèvement d'un automate $(\max,+)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_{max}$ . . .	41
2.2	Les éléments des dates d'achèvement d'un automate $(\max,+)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_{min}$ . . .	42
2.3	Les éléments de la représentation évaluant les longueurs des séquences d'un automate $(\max,+)$ dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ . . . . .	44
2.4	Les éléments de la représentation évaluant les longueurs des séquences d'un automate $(\max,+)$ dans $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ . . . . .	45
2.5	Les éléments de la représentation symétrique évaluant les dates d'achèvement d'un automate $(\max,+)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_{max}$ . . . . .	47
2.6	Les éléments de la représentation symétrique évaluant les dates d'achèvement d'un automate $(\max,+)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_{min}$ . . . . .	48
2.7	Les éléments de la représentation symétrique évaluant les longueurs de séquences d'un automate $(\max,+)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_{max}$ . . . . .	49
3.1	Les éléments de la représentation évaluant les dates d'achèvement $\overline{x}_{sup}$ d'un ATG dans $\overline{\mathbb{R}}_{max}$ . . . . .	62
3.2	Les éléments de la représentation évaluant les dates d'achèvement $\overline{x}_{inf}$ d'un ATG dans $\overline{\mathbb{R}}_{max}$ . . . . .	62
3.3	Les éléments de la représentation évaluant les dates d'achèvement $\underline{x}_{sup}$ d'un ATG dans $\overline{\mathbb{R}}_{min}$ . . . . .	63
3.4	Les éléments de la représentation évaluant les dates d'achèvement $\underline{x}_{in}$ d'un ATG dans $\overline{\mathbb{R}}_{min}$ . . . . .	64
3.5	Les éléments de la représentation symétrique évaluant les dates d'achèvement $\overline{x}_{sup}$ d'un ATG dans $\overline{\mathbb{R}}_{max}$ . . . . .	66
3.6	Les éléments de la représentation symétrique évaluant les dates d'achèvement $\overline{x}_{inf}$ d'un ATG dans $\overline{\mathbb{R}}_{max}$ . . . . .	67
3.7	Les éléments de la représentation symétrique évaluant les dates d'achèvement $\underline{x}_{sup}$ d'un ATG dans $\overline{\mathbb{R}}_{min}$ . . . . .	68

3.8 Les éléments de la représentation symétrique évaluant les dates d'achèvement  
 $\underline{x}_{inf}$  d'un ATG dans  $\overline{\mathbb{R}}_{min}$  . . . . . 68

# Introduction générale

Un système à événement discret ( SED) est un système dynamique dont l'espace d'état est discret, il peut se définir de façon négative par opposition aux systèmes classiques dont l'évolution est continue et décrite par des équations différentielles. Dans les SEDs, les évolutions sont déclenchées par des événements, typiquement l'arrivée d'un client, d'un signal ou l'achèvement d'une tâche, ces événements donnent lieu à des phénomènes de synchronisation et de concurrence. les SEDs apparaissent de façon naturelle dans la modélisation des systèmes informatiques, des réseaux de télécommunications, des réseaux de transport ou des systèmes de production (lignes d'assemblages, atelier flexibles). L'étude des SEDs vise, entre autres, à analyser leurs comportements, identifier leurs propriétés et les commander. Pour ce faire, différents formalismes de modélisation sont utilisés dans la littérature (réseaux de Petri, automates à états finis, chaînes de Markov, . . .).

Dans la théorie initié par Ramdge et Wonham ([23],[24]), les SEDs sont modélisés par des machines à états finis et les événements correspondent à des lettres. Les modèles reposant sur l'algèbre  $(\max,+)$  s'intéressent au comportement temporisé des SEDs, alors que les automates modélisent naturellement les non-déterminismes inhérents aux conflits ou choix, les modèles  $(\max,+)$  permettent plutôt d'appréhender les SEDs avec un comportement déterministe.

Stéphane Gaubert a montré dans [7] que les automates avec multiplicités dans l'algèbre  $(\max,+)$ , aussi appelés automates  $(\max,+)$ , combinent ces deux approches : les concepts sur les automates à états finis peuvent être combinés avec les résultats de l'algèbre  $(\max,+)$  pour étudier à la fois les aspects logiques et temporisés des SEDs. En particulier, les automates  $(\max,+)$  ont été appliqués avec succès pour l'analyse de performances [7],[1],[3].

Néanmoins, les automates  $(\max,+)$  ne prennent en compte que les transitions pondérées uniques, qui ne sont pas adaptés à une application industrielle. Cela vient du fait que dans la pratique, un événement ne se produit pas exactement au même moment, et qu'une tâche n'a pas une durée exacte, et donc, il est plus réaliste d'utiliser des intervalles. Les automates

temporisés avec garde (ATGs) sont une classe d'automates temporisés [13] avec des gardes associées aux transitions sous formes d'intervalles de temps, ce qui permet de prendre en compte l'incertitude de certaines occurrences d'événement, et donc ils sont particulièrement efficaces pour gérer les intervalles comme la durée des tâches et les limites des occurrences.

Dans ce mémoire, nous proposons des représentations qui décrivent les comportements extrémaux des ATGs.

Il est organisé comme suit :

- Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions et notations de base concernant l'algèbre des dioïdes, les réseaux de Petri, les graphes d'événements temporisés et les automates.
- Le second chapitre est consacré aux automates  $(\max, +)$  et à leurs représentations. En premier lieu, nous présentons les définitions et les propriétés relatives aux automates  $(\max, +)$ . Par la suite, plusieurs représentations sont décrites à fin de modéliser les comportements extrémaux.
- le troisième chapitre introduit de nouvelles représentations apportées aux ATGs, Ces représentations permettent d'évaluer les durées d'achèvement des séquences. En premier lieu, nous définissons les ATGs, puis nous présentons la représentation introduite par Niguez dans [18], par la suite, nous nous intéressons à la modélisation du comportement extrémal des ATGs en définissant de nouvelles représentations.
- Dans le quatrième chapitre, nous abordons l'apport des nouvelles représentations à l'évaluation de performances des SEDs, en explicitant les indicateurs de performance. Enfin, une application est présentée pour illustrer et interpréter la portée de ces indicateurs sur un exemple d'atelier jobshop.

# Chapitre 1

## Généralités

### Introduction

Ce premier chapitre est consacré à une description brève des langages et de quelques propriétés et notions de base. Puis on s'intéresse aux automates, plus généralement, on définit notamment les opérations nécessaires pour la suite. Avec présentations des outils algébriques permettant de traiter une classe particulière de réseau de Petri (RdP). Par la suite, nous introduisons les graphes d'événements temporisés et pour finir, nous citerons des notions de l'algèbre des dioïdes.

Ces éléments sont tirés des références de base sur le sujet telles que [8], [15], [16], [17].

### 1.1 Langage

#### Définition 1

Un alphabet est un ensemble d'événements, aussi appelé lettre, qui est composé de tous les événements qui font évoluer un SED.

Une séquence d'événements forme un mot.

Par exemple, soit un alphabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$ . A partir de  $\Sigma$ , il est possible de construire une infinité de mots, tels que :  $b, aa, ca, bca, abbca, cbcacbcacb...$  que nous supposons finis.

Un ensemble de mots constitue un langage, ce dernier représente le comportement possible d'un SED.

La longueur du mot  $\omega$ , notée  $|\omega|$ , correspond au nombre d'événements qui le composent.

Le mot  $\epsilon$  est un mot vide qui ne contient aucun élément et dont la longueur est nulle, par convention.

Un langage ( $L$ ) peut être déterminé par l'énumération de tous les mots qui le compose.

**Exemple 1** Soit  $L1$  le langage fini constitué de tous les mots de deux éléments de l'ensemble défini précédemment.  $L1$  peut être décrit par l'ensemble :

$$L1 = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$$

### 1.1.1 Notions de préfixe et de suffixe :

Un mot  $u$  est dit préfixe d'un mot  $v$  s'il existe  $w \in \Sigma^*$  telle que  $u \cdot w = v$ .

Un mot est le préfixe de lui-même, et un mot de longueur nulle est un préfixe de tout les mots de  $\bar{L}$ . Un mot contient généralement plusieurs préfixes, un mot de longueur  $n$  admet  $(n + 1)$  préfixes, et le suffixe de  $v$  est  $w$ .

Le langage  $\bar{L}$  est la fermeture préfixielle du langage  $L$ . Ce langage est composé de tous les préfixes des mots de  $L$  :

$$\bar{L} = \{ w \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*, wv \in L \}$$

notez qu'un langage  $L$  est fermé par ses préfixes si  $L = \bar{L}$ .

**Exemple 2** Le mot  $u = abac$ . L'ensemble  $\bar{u}$  des préfixes de  $u$  s'écrit  $\bar{u} = \{\varepsilon, a, ab, aba, abac\}$ . La longueur du mot est  $|u| = 4$  et le cardinal de l'ensemble  $\bar{u}$  est bien égal à 5.

**Fermeture préfixielle :** Le langage  $\bar{L}$  est la fermeture préfixielle d'un langage  $L$ . Ce langage consiste en tous les préfixes des mots de  $L$  :

$$L = \{ s_1 \in \Sigma^* \mid \exists s_2 \in \Sigma^*; s_1 s_2 \in L \}$$

Quel que soit le langage  $L$  considéré,  $L$  est un sous-ensemble du langage  $\bar{L}$  (i.e.  $L \subseteq \bar{L}$ ). Si  $L = \emptyset$ , alors  $\bar{L} = \emptyset$ , et si  $L \neq \emptyset$ ; alors  $\varepsilon \in \bar{L}$ .

### 1.1.2 Opération sur les langages :

#### 1.1.2.1 L'union :

L'union de deux langages reviendrait à additionner les deux langages ainsi,  $L_1 \cup L_2 = L_1 + L_2$  et ses propriétés sont :

— l'union est commutative :

$$L_1 + L_2 = L_2 + L_1$$

— l'union est associative :

$$L_1 + (L_2 + L_3) = (L_1 + L_2) + L_3$$

— l'union possède un élément neutre qui est  $\{\varepsilon\}$ <sup>1</sup>, qui est un ensemble vide

$$L + \varepsilon = \varepsilon + L = L.$$

— l'union est idempotent c'est à dire :

$$\forall L \in \Sigma^* \rightarrow L + L = L.$$

*Remarque : toutes les propriétés que nous avons dans l'union, sont valables sur l'intersection mise à part qu'elle à le même sens algébrique que celle de l'algèbre standard.*

### 1.1.2.2 La concaténation

La concaténation des langages est définie par :

$$L_1, L_2 \subset \Sigma^*, L_1 \cdot L_2 \Rightarrow \{ \exists \omega_1 \in L_1, \exists \omega_2 \in L_2 ; \omega = \omega_1 \omega_2 \}.$$

Cette lois est associative mais *non commutative* et possède un élément *neutre*  $\{e\}$ <sup>2</sup>, de plus la concaténation est distributive sur l'union.

### 1.1.3 L'étoile de Kleene :

Soit  $D$  un dioïde complet et  $a$  un élément de  $D$ , l'étoile de Kleene de  $a$ , noté  $a^*$ , est définie comme suit :

$$a^* = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} a^k$$

avec  $a^0 = e$ .

**Exemple 3** Soit un langage  $L$  formé de deux mots :  $L = \{abc; cba\}$ .

- $L^0 = \{e\}$ ,
- $L^1 = LL^0 = \{abc, cba\}$ ,
- $L^2 = LL^1 = \{abcabc, abccba, cbaabc, cbacba\}, \dots$
- Ainsi,  $L^* = \{\varepsilon, abc, cba, abcabc, abccba, cbaabc, cbacba, \dots\}$ .

---

1. Si l'on compare avec les nombres,  $\varepsilon$  correspond à 0.  
 2. si l'on compare avec les nombres,  $e$  correspond à 1.

De la même façon l'étoile de Kleene d'une matrice carrée  $A \in D^{n \times n}$ , notée  $A^*$ , est définie par :

$$A^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A^i$$

avec  $A^0 = Id_n$  et  $Id_n$  désigne la matrice identité.

## 1.2 Automate

### Définition 2

Un automate  $A$  est un quintuplet  $A = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, Q_m)$  où :

$\Sigma$  : est un alphabet.

$Q$  : un ensemble d'états.

$\delta$  : une relation de transition de  $Q \times \Sigma \times Q$ .

$Q_0 \subset Q$  : un sous-ensemble d'états initiaux.

$Q_m \subset Q$  : un sous-ensemble d'états finaux.

*Si  $Q$  est fini,  $A$  est qualifié d'automate fini.*

On appelle *chemin*, une séquence telle que :

$$q_0(q_0, \delta_1, q_1)q_1(q_1, \delta_2, q_2)q_2 \dots q_{n-1}(q_{n-1}, \delta_n, q_n)q_n$$

où  $q_0 \in Q_0$ , et pour  $i = 1$  à  $n$ ,  $q_i \in Q$  et  $(q_{i-1}, \delta_i, q_i) \in \delta$ .

Le mot  $\omega = \delta_1\delta_2 \dots \delta_n \in \Sigma^*$  est appelé la *trace* de ce chemin. L'ensemble des traces des chemins de  $A$  est noté  $L(A)$ .

L'ensemble des traces des chemins de  $A$  qui permettent d'atteindre un état marqué  $q_n \in Q_m$ , est lui noté  $L_m(A)$ .

Les ensembles  $L(A)$  et  $L_m(A)$  sont des langages de  $\Sigma^*$ .

### Théorème

Soit  $\omega \in \Sigma^*$ . Alors il existe un automate  $A = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, Q_m)$  tel que  $L_m(A) = \omega$ . Si de plus  $\omega$  est fermé, on peut choisir  $\omega$  pour que  $L(A) = \omega$ .

**Exemple 4** Soit un automate  $A_1$ , avec  $\Sigma = \{\alpha, \beta\}$ ,  $Q = \{q_1, q_2\}$

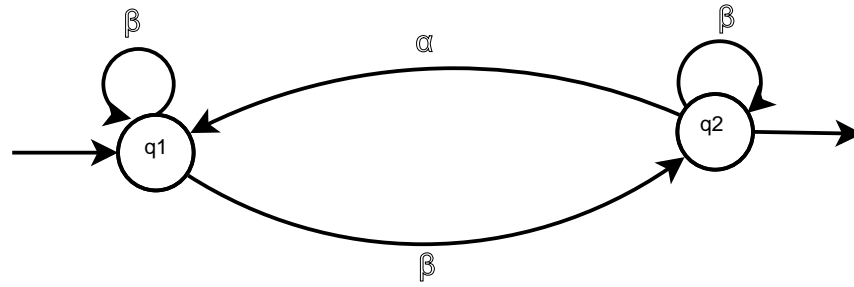


FIGURE 1.1 – Exemple d'automate

nous avons :  $Q_0 = \{q_1\}$ ,  $Q_m = \{q_2\}$

$V_1 = q_1(q_1, \alpha, q_2)q_2(q_2, \beta, q_1)q_1(q_1, \beta, q_1) \rightsquigarrow$  est un *chemin*.

Un chemin est dit *marqué* si  $q_m \in Q_m$

$V_2 = q_1(q_1, \alpha, q_2)q_2(q_2, \beta, q_1)q_1(q_1, \beta, q_1)q_1(q_1, \alpha, q_2)q_2$  est un chemin marqué.

### 1.2.1 Déterminisme :

Un automate est dit déterministe s'il y a une bijection entre l'ensemble des chemins de cet automate et l'ensemble des traces de ces chemins. Autrement dit, chaque trace correspond à un seul et unique chemin.

L'automate  $A = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, Q_m)$  est déterministe si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $Q_0 = \{q_0\}$  est réduit à un seul état initial.
- $\forall q, q', q'' \in Q, \forall \sigma \in \Sigma^*, \text{ si } (q, \sigma, q') \in \delta \text{ et } (q, \sigma, q'') \in \delta \text{ alors } q' = q''$ .

Si  $A$  est déterministe, on peut écrire :  $\delta(q, \sigma) = q'$  si  $(q, \sigma, q') \in \delta$

—  $\delta(q, \sigma) = q'$  est défini d'une manière unique.

—  $\delta(q, \sigma)$  peut ne pas être définie, on écrit  $\sigma(q, \sigma)!$  lorsque  $\exists q' / \delta(q, \sigma) = q'$

On peut alors étendre  $\delta$  à  $\Sigma^*$ , en écrivant :

$\delta(q, \epsilon) = q, \forall q \in Q$  et  $\delta(q, \omega\sigma) = \sigma(\delta(q, \omega))$  si  $\delta(q, \omega)!$  et  $\delta(q', \sigma)!$  avec  $\delta(q, \omega) = q'$

### 1.2.2 Atteignabilité :

Un état  $q \in Q$  est dit atteignable s'il est l'extrémité d'un chemin de l'automate.

$$\exists \omega \in \Sigma^* / \delta(q_0, \omega) = q$$

### 1.2.3 Coatteignabilité :

On dit qu'un état  $q \in Q$  est coatteignable si l'on peut atteindre un état marqué à partir de  $q$ ,

$$\exists \omega \in \Sigma^* / \delta(q, \omega) = q$$

**Propriété :** l'automate  $A$  est coatteignable si et seulement si  $\overline{L}_m(A) = L(A)$ .

#### Exemple 5

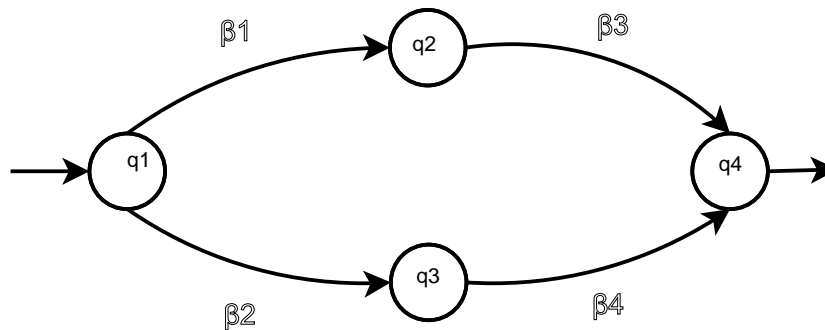


FIGURE 1.2 – Automate coatteignable

$$L_m(A) = \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_4$$

$$L(A) = 1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_4$$

$$\overline{L}_m(A) = 1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_4 = L(A)$$

*Remarques :*

- Un automate est dit atteignable (resp. coatteignable) si tous ses états sont atteignables (resp. coatteignables).
- Un automate est émondé (vivant) s'il est à la fois atteignable et coatteignable.

### 1.2.4 Produit d'automates :

Les systèmes que nous considérerons seront très souvent construits à partir de sous-systèmes élémentaires. Le fonctionnement global sera obtenu en composant les automates qui correspondent aux sous-systèmes.

Avant tout, nous définissons l'opérateur de projection.

Soit  $\Sigma_1, \Sigma_2$  deux alphabets non nécessairement disjoints. On définit la projection naturelle  $P_i : (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^* \Rightarrow \Sigma_i^*$ ,  $i = 1, 2$ , par :

$$P_i(\epsilon) := \epsilon$$

$$P_i(\sigma) := \begin{cases} \sigma & \text{si } \sigma \in \Sigma_i \\ \epsilon & \text{si } \sigma \notin \Sigma_i \end{cases}$$

$$P_i(\omega\sigma) := P_i(\omega)P_i(\sigma) \text{ pour } \omega \in (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*, \sigma \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

et l'application inverse  $P_i^{-1} : \Sigma_i^* \Rightarrow (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*$ ,  $i = 1, 2$  par :

$$P_i^{-1}(v) := \omega \in (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^* \mid P_i(\omega) = v$$

Les projections  $P_i$  et leurs inverses  $P_i^{-1}$  sont étendues classiquement aux langages pour :  $L \subset (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*$ .

$$P(L) = \{v \in \Sigma_i^* \mid \exists \omega \in L, P_i(\omega) = v\}$$

et pour  $L_i \subset \Sigma_i^*$ ,

$$P_i^{-1}(L_i) := \omega \in (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^* \mid \exists v \in L_i, P_i(\omega) = v.$$

Si  $L_1 \subset \Sigma_1^*$  et  $L_2 \subset \Sigma_2^*$  sont deux langages, on définit le produit de ces deux langages  $L_1 \times L_2$  par :

$$L_1 \times L_2 = P_1^{-1}(L_1) \cap P_2^{-1}(L_2).$$

On peut également exprimer ce produit en termes d'automates.

Soient deux automates, qu'on suppose déterministes,  $A_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{01}; Q_{m1})$  et  $A_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_{02}, Q_{m2})$ , L'automate déterministe produit, noté  $A_1 \times A_2$ , est défini par :

$$A_1 \times A_2 = A = (Q_1 \times Q_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \psi, (q_{01}, q_{02}); Q_{m1} \times Q_{m2})$$

$$\psi((q_1, q_2)\sigma) = \begin{cases} (\delta_1(q_1, \sigma), \delta_2(q_2, \sigma)) & \text{si } \sigma \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta_1(q_1, \sigma) \text{ et } \delta_2(q_2, \sigma) \\ (\delta_1(q_1, \sigma), q_2) & \text{si } \sigma \in \Sigma_1, \delta_1(q_1, \sigma) \text{ et } \\ & \sigma \notin \Sigma_2, \text{ ou } (\sigma \in \Sigma_2 \text{ et } \delta_2(q_2, \sigma) \text{ non défini}) \\ (q_1, \delta_2(q_2, \sigma)) & \text{si } \sigma \in \Sigma_2, \delta_2(q_2, \sigma) \text{ et } \\ & \sigma \notin \Sigma_1, \text{ ou } (\sigma \in \Sigma_1 \text{ et } \delta_1(q_1, \sigma) \text{ non défini}) \\ \text{non défini} & \text{autrement} \end{cases}$$

On vérifie aisément que

$$L(A) = P_1^{-1}[L(A_1)] \cap P_2^{-1}[L(A_2)].$$

$$L_m(A) = P_1^{-1}[L_m(A_1)] \cap P_2^{-1}[L_m(A_2)].$$

Le produit est commutatif et associatif, cependant une distinction ce fait régulièrement :

- Lorsque  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont égaux, on parle de produit synchrone. Une transition  $\psi((q_1, q_2), \sigma)$  existe dans l'automate produit si et seulement si  $\delta_1(q_1, \sigma)$  et  $\delta_2(q_2, \sigma)$  sont définis simultanément. Les deux automates sont donc synchronisés. Notons que les langages obtenus dans ce cas sont :

$$L(A) = L(A_1) \cap L(A_2).$$

$$L_m(A) = L_m(A_1)L_m(A_2).$$

- Lorsque  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont indépendants, on parle de *produit asynchrone*.

### Exemple 6 :( Composition de deux automates)

Soient deux automates  $A_1$  et  $A_2$  représentés respectivement sur la figure 1.3 et sur la figure 1.4.

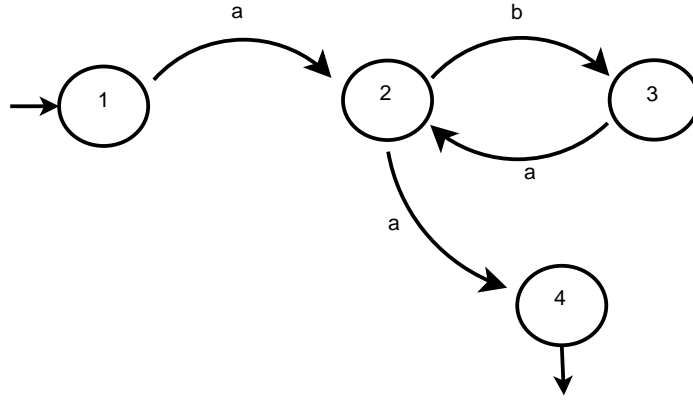


FIGURE 1.3 – Automate déterministe  $A_1$

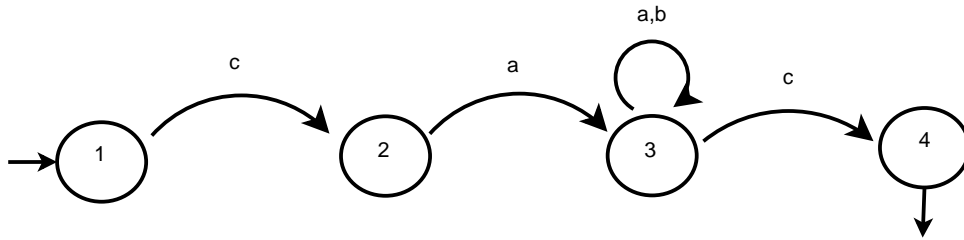


FIGURE 1.4 – Automate déterministe  $A_2$

Soit  $A$  l'automate résultant de la composition de  $A_1$  et de  $A_2$ , représenté sur la figure 1.5.  
 On a  $\Sigma_1 = \{a, b\}$  et  $\Sigma_2 = \{a, b, c\}$  respectivement les langages de  $A_1$  et  $A_2$ ,  
 Étant donné que  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \{\emptyset\}$ , au vue des figures 1.3 et 1.4, la composition de ces automates est une composition synchrone.

Le résultat est soumis ci bas :

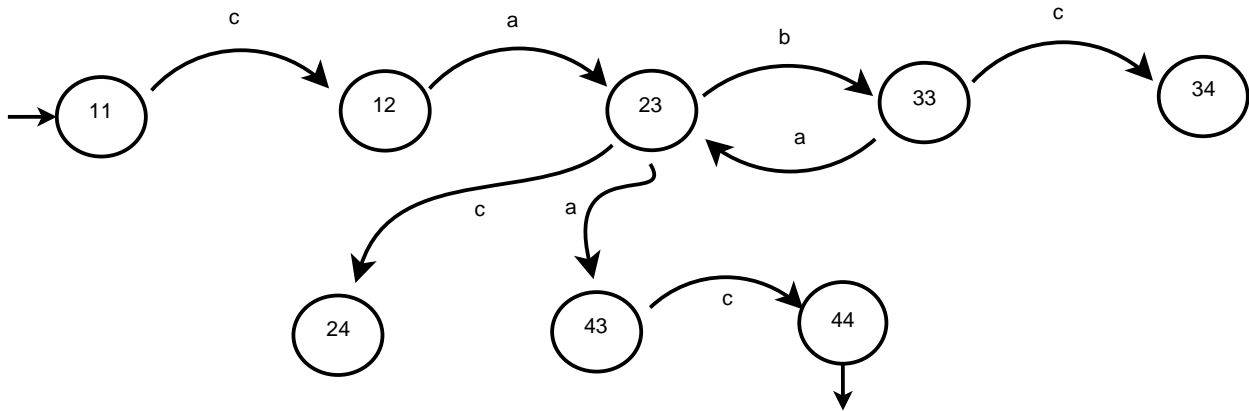


FIGURE 1.5 – Résultat de la composition de deux automates  $A = A_1 \times A_2$

On remarque bien que les états 24 et 34 ne sont pas coatteignable.

La figure suivante représente l'automate final sans les états non coatteignable.

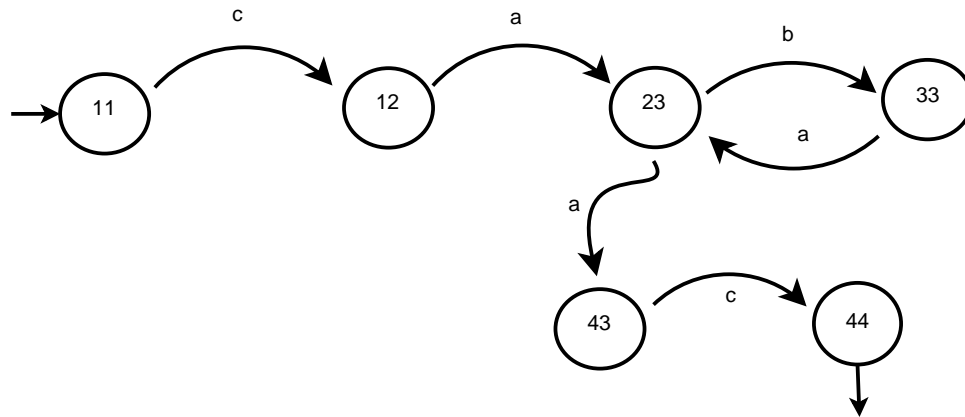


FIGURE 1.6 – L'automate  $A$  final

### 1.3 Réseau de Petri :

#### Définition 3

un réseau de Petri (RdP) est un graphe composé de deux types de sommets :

- *Les places* : modélisent des activités ou des conditions (représentées par des cercles ).
- *Les transitions* : modélisent les événements (l'arc/traits).

Les places et les transitions sont reliées par des *arcs*.

Chaque place peut contenir un nombre (éventuellement nulle ) de marques (ou jetons ).  
Le déplacement des jetons permet de modéliser la dynamique du système modélisé.

#### Exemple 7

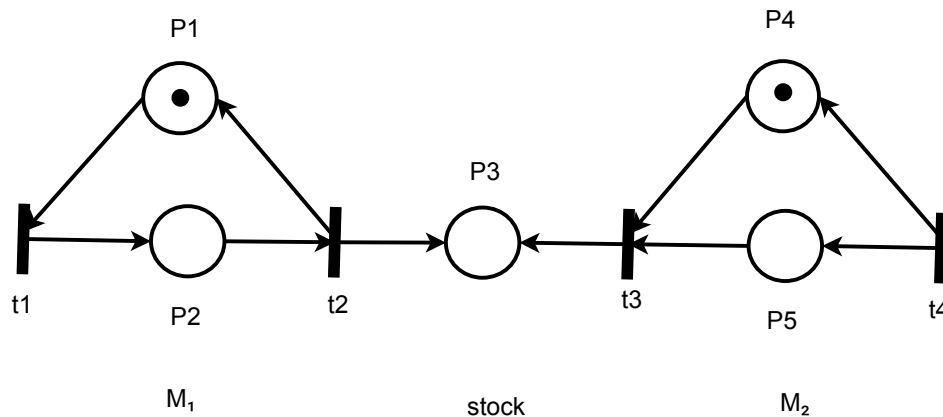


FIGURE 1.7 – Représentation de deux machines et un stock

Et si l'on prend les marquages de la Figure(1.7) à l'instant initial :

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 1.3.1 État d'un réseau de Petri :

L'état d'un RdP est modélisé par un vecteur de marquage, la composante  $m_n$  de ce vecteur décrit le marquage de la place  $n$  de ce réseau.

Le franchissement des transitions traduit le comportement dynamique du système modélisé. On dit qu'une transition  $t_j$  est validée, si et seulement si, les places en amont de cette transition sont toutes marquées.

Le franchissement de  $t_j$  consiste à retirer une marque de chaque place d'entrée et ajouter une marque à chaque place de sortie.

#### Exemple 8

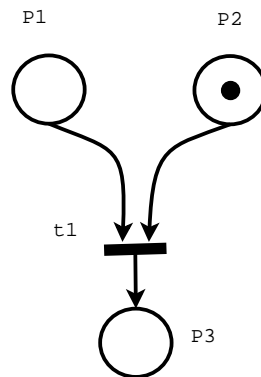


FIGURE 1.8 – Réseau de Petri RdP1

*Dans le RdP1,  $t_1$  n'est pas validé car une place n'est pas marquée ( $P_1$ ) et donc elle ne peut pas être franchie.*

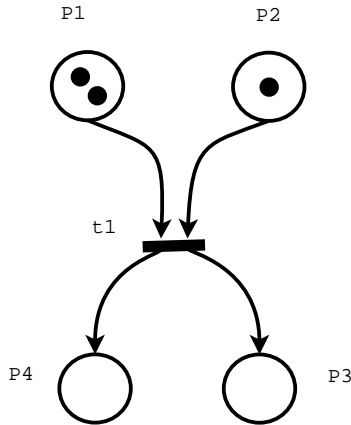


FIGURE 1.9 – Réseau de Petri RdP 2

Dans le RdP2,  $t_1$  est validé car  $P_1$  et  $P_2$  sont marquées donc franchissables.

### 1.3.2 Propriétés

**1-Bornitude :** Soit un RdP  $R$  et un marquage initial  $m_0$ . Une place  $P_j$  du réseau marqué<sup>3</sup>  $(R; m_0)$  est  $k$ -bornée si pour tout marquage  $m_i$  accessible depuis  $m_0$ ,  $m_i(P_j) \leq k$ , avec  $k \in \mathbb{N}$ .

**2-Vivacité :** Soit un RdP  $R$  et un marquage initial  $m_0$ , une transition  $t$  est vivante pour le réseau marqué  $(R; m_0)$  si pour tout marquage  $m$  accessible depuis  $m_0$ , il existe une suite de transitions  $F$ , comportant au moins une fois la transition  $t$ , et telle que  $F$  soit franchissable pour  $m$ .

Un RdP marqué  $(R; m_0)$  est dit vivant si toutes ses transitions sont vivantes.

**3-Blocage :** Un état  $m \in (R; m_0)$  est un état de blocage si, aucune transition n'est franchissable à partir de ce marquage.

---

3. Un réseau marqué est déterminé par la paire  $(R, m_0)$  formé d'un réseau de Petri  $R$  et d'un marquage initial  $m_0$ ,  $R$  étant un 5-tuplet  $(P, T, Pré, Post, \tau)$ , où :

- $P$  (resp.  $T$ ) est un ensemble non vide et fini de places (resp. transitions).
- $Pré : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$  une application d'incidence avant :  $Pré(p; c_q)$  contient la valeur entière  $m_{qp}$  associée à l'arc allant de la place  $p$  à la transition  $c_q$ .
- $Post : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$  une application d'incidence arrière :  $Post(p; c_q)$  contient la valeur entière  $m_{pq}$  associée à l'arc allant de la transition  $c_q$  à la place  $p$ .
- $\tau \in \mathbb{N}^P$  définit les temporisations associées aux places :  $\tau_p$  désigne la durée minimale de séjour d'un jeton dans la place  $p$ .

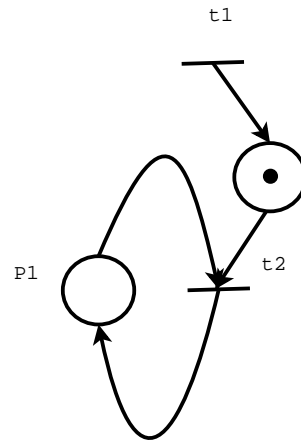


FIGURE 1.10 – Exemple de blocage

### 1.3.3 Graphe d'événements temporisés :

Un graphe d'événements est un RdP tel que de chaque place, il n'entre et ne sort qu'un seul arc, de plus tous les arcs ont un poids unitaire. Cette configuration permet de modéliser les phénomènes de synchronisation (plusieurs places aboutissant sur une même transition), mais en revanche, elle n'est pas utilisable pour l'interprétation de concurrence ou de conflit, par exemple, quand un jeton venant d'une transition, il peut servir à plusieurs places.

Ces conditions interdisent les configurations de la figure 1.11 (a1, a2, a3). Seul le réseau (b2), ou l'ensemble des transitions franchissables pour le marquage du graphe est  $\{t1, t2, t4\}$ . On peut tirer  $t1, t2, t4$  toutes les trois dans un ordre arbitraire. Cette propriété permet de définir un comportement déterministe du réseau, ou l'on passe au nouveau marquage  $m$  obtenu par tir de toutes les transitions franchissables pour les configurations données.

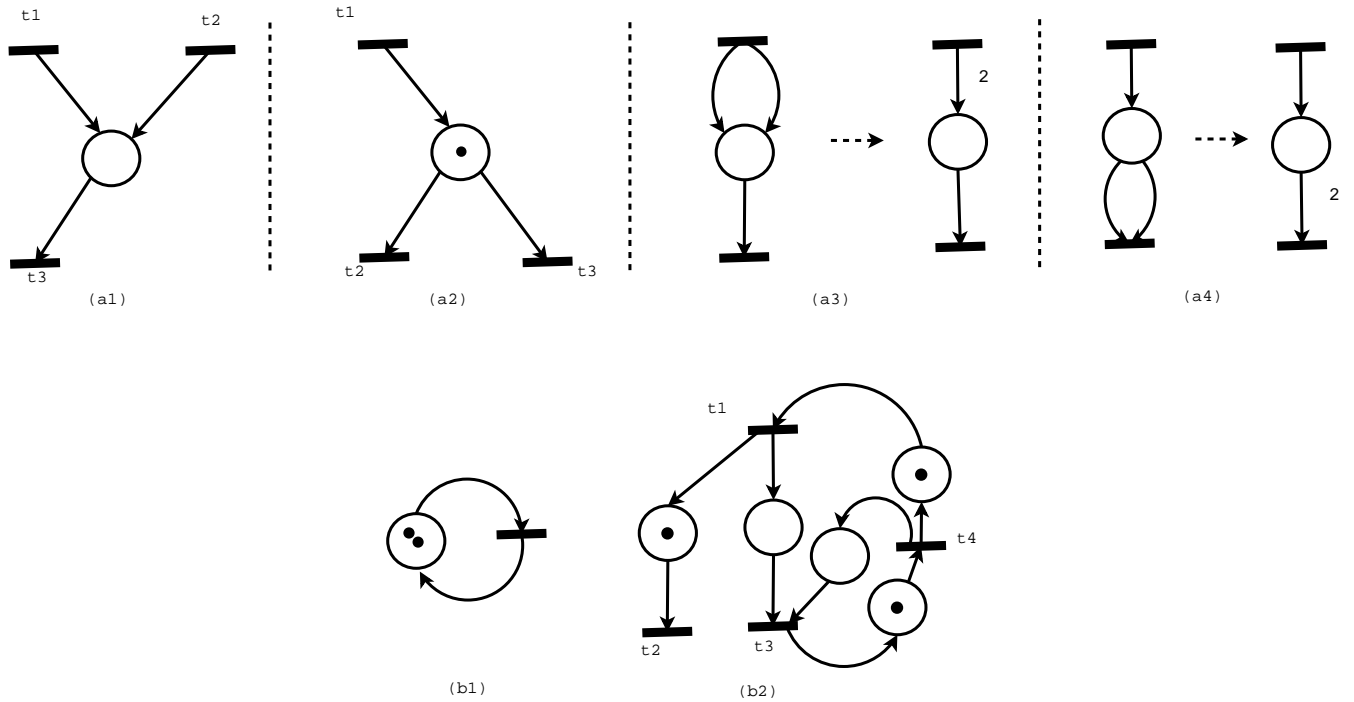


FIGURE 1.11 – Graphe d'événement

- Pour un graphe d'événements, la somme des marquages des places d'un circuit élémentaire est constante.
- On dit qu'un graphe est vivant, si et seulement si, pour tout marquage accessible  $m$  et toute transition  $t$ , il existe une séquence de franchissements à partir de  $m$  contenant  $t$ .
- Un graphe d'événements est vivant, si et seulement si, il ne contient pas de circuit sans jeton.
- On introduit le caractère temporisé en associant une durée aux places, elle représente le temps de séjour minimal et obligatoire de chaque jeton (on peut de manière équivalente associer le temps aux transitions).

**Exemple 9 :**

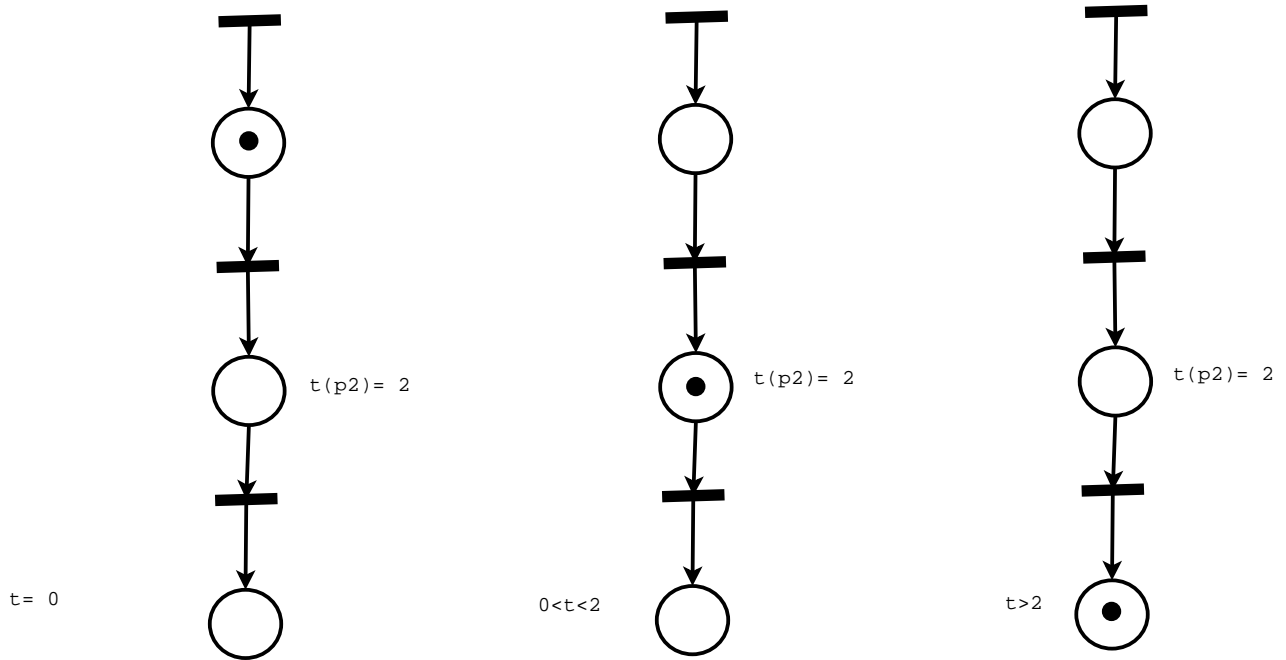


FIGURE 1.12 – Graphe d'Événement Temporisé

## 1.4 Théories des Dioïdes

### Définition 4 (Monoïde)

Un ensemble  $M$ , muni d'une loi de composition interne  $\oplus$ , est un monoïde si la loi est associative et possède un élément neutre. Si, de plus, la loi est commutative, le monoïde est commutatif.

Dans un monoïde, on appellera parfois loi "additive", la loi  $\oplus$ .

**Exemple 10** L'ensemble  $\mathbb{N}$  muni du produit usuel  $\times$  est un monoïde. L'élément neutre de  $(\mathbb{N}, \times)$  est 1. En outre,  $(\mathbb{N}, \times)$  est un monoïde commutatif.

### Définition 5 (Monoïde ordonné)

Un monoïde  $(M, \oplus)$  est dit ordonné lorsqu'on peut définir sur  $M$  une relation d'ordre (noté  $\succeq$ ) compatible avec la loi  $\oplus$ , telle que :

$$\forall a, b, c \in M; a \succeq b \Rightarrow a \oplus c \succeq b \oplus c$$

## Définition 6 (Monoïde idempotent)

Un monoïde  $(M, \oplus)$  est dit idempotent si la loi  $\oplus$  est commutative, associative et idempotente, c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\forall a \in M ; a \oplus a = a$$

### Théorème

Si  $(M; \oplus)$  est un monoïde idempotent, alors une relation d'ordre peut être définie par :

$$a \succeq b \Leftrightarrow a \oplus b = a$$

Un monoïde idempotent est donc un monoïde ordonné.

## Définition 7 (Semi-anneau)

On appelle semi-anneau un ensemble  $D$  muni de deux lois internes  $\oplus$  et  $\otimes$  telles que :

1.  $(D, \oplus)$  est un monoïde commutatif ( dont l'élément neutre est noté  $\varepsilon$  ).
  2.  $(D, \otimes)$  est un monoïde ( l'élément neutre noté  $e$  ).
  3. La loi multiplicative  $\otimes$  est distributive à droite et à gauche par rapport à la loi additive  $\oplus$ .
  4. L'élément  $\varepsilon$  est absorbant pour la loi  $\otimes$  ( $\forall a \in D, a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$ ).
- Si la loi  $\otimes$  est commutative, alors  $(D, \oplus, \otimes)$  est un semi-anneau commutatif.

*Remarque : à ne pas confondre l'élément neutre de  $\oplus$  et  $\otimes$  qui sont respectivement '  $\varepsilon$  ' et '  $e$  '.*

## Définition 8 ( Dioïde)

Un dioïde est un semi-anneau  $D$  muni de deux lois de compositions internes notées  $\oplus$  et  $\otimes$ , appelées respectivement "addition" et "multiplication", telle que :

- l'addition est associative :  $\forall a, b, c \in D, (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ .
- l'addition est commutative :  $\forall a, b \in D, a \oplus b = b \oplus a$ .
- l'addition admet un élément neutre noté  $\varepsilon$  :

$$\exists \varepsilon \in D, \forall a \in D \text{ et } a \neq \varepsilon, a \oplus \varepsilon = a.$$

- la multiplication est associative :  $a, b, c \in D, (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ .

- la multiplication admet un élément neutre noté  $e$  et appelé "identité" :  $\exists e \in D, \forall a \in D, a \otimes e = a = e \otimes a$ .
- la multiplication est distributive par rapport à l'addition :  $\forall a, b, c \in D, a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ .
- $\varepsilon$  est absorbant pour la multiplication :  $\forall a \in D, \varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$ .
- l'addition est idempotente :  $\forall a \in D, a \oplus a = a$ .

Un dioïde est dit *commutatif* si la multiplication est commutative.

### 1.4.1 Théorème (Relation d'ordre)

Dans un dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$ , la relation définie par :

$$a \succeq b \Leftrightarrow a = a \oplus b$$

est une relation d'ordre compatible avec les lois additive  $\oplus$  et multiplicative  $\otimes$ , c'est-à-dire :

$$a \succeq b \Rightarrow \forall c \in D; a \oplus c \succeq b \oplus c.$$

$$a \succeq b \Rightarrow \forall c \in D; a \otimes c \succeq b \otimes c \text{ et } c \otimes a \succeq c \otimes b.$$

La relation d'ordre est dite *totale* si

$$\forall a, b \in D; a \succeq b \text{ ou } b \succeq a$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'ordre d'un dioïde soit total, s'écrit de la façon suivante :

$$\forall a, b \in D; a \oplus b = a \text{ ou } b$$

Le dioïde est alors dit totalement *ordonné*.

**Exemple 11 (Algèbre (max ; +))** L'ensemble  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  muni du max, noté  $\oplus$ , et de l'addition usuelle, notée  $\otimes$  est un dioïde (on convient que  $\forall x \in \mathbb{R}, x \oplus (-\infty) = -\infty$  et donc  $x \otimes \varepsilon = \varepsilon$ ).

Les éléments neutres sont définis comme  $\varepsilon = -\infty$  et  $e = 0$ . Ce dioïde est noté  $\mathbb{R}_{max}$  et traditionnellement nommé *algèbre (max, +)*.

**Exemple 12 (Algèbre (min ; +))** L'ensemble  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  muni du min, noté  $\oplus$ , et de l'addition usuelle, notée  $\otimes$  est un dioïde pour lequel  $\varepsilon = +\infty$  et  $e = 0$  (on convient que  $\forall x \in \mathbb{R}, x \oplus (+\infty) = +\infty$  et donc  $x \otimes \varepsilon = \varepsilon$ ). Ce dioïde est noté  $\mathbb{R}_{min}$  et traditionnellement nommé *algèbre (min, +)*.

## Définition 9 (Dioïde complet)

Un dioïde est dit complet s'il est fermé pour les sommes infinies et si la loi  $\otimes$  distribue sur les sommes infinies, c'est-à-dire, si pour tout  $b \in D$  et tout sous-ensemble  $A \subseteq D$ ,

$$b \otimes \left( \bigoplus_{x \in A} x \right) = \bigoplus_{x \in A} (b \otimes x)$$

et

$$\left( \bigoplus_{x \in A} x \right) \otimes b = \bigoplus_{x \in A} (x \otimes b)$$

La borne supérieure d'un dioïde complet  $D$  existe et sera notée  $\top$ . Il correspond à la somme des éléments du dioïde  $\top = \bigoplus_{x \in D} x$ .

L'élément  $\top$  est donc absorbant pour l'addition :  $\top \oplus a = \top$ .

Rappelons néanmoins que, puisque  $\varepsilon$  est absorbant pour la loi  $\otimes$ , on a :

$$\top \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes \top = \varepsilon$$

**Exemple 13**  $\mathbb{R}_{max}$  n'est pas complet. Nous devons ajouter la borne supérieure  $\top = +\infty$  avec la convention  $(\top \otimes \varepsilon) = +\infty + (-\infty) = -\infty = \varepsilon$ . Ce nouveau dioïde complet est noté  $\overline{\mathbb{R}}_{max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}, \max, +)$ .

## Définition 10 (Dioïde matriciel)

Soit  $(D, \oplus, \otimes)$  un dioïde, on note  $D^{n \times n}$  l'ensemble des matrices carrées de dimension  $n$  à coefficients dans  $D$ . La somme et le produit de matrices sont définies par :

$$A \oplus B : (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$$

$$A \otimes B : (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{jk}$$

L'ensemble  $D^{n \times n}$  muni de ces deux opérations est un dioïde.

L'élément nul d'un dioïde matriciel est la matrice composée exclusivement de  $\varepsilon$  et est noté également  $\varepsilon$ .

L'élément unité est la matrice notée  $Id_n$  qui est composée de  $e$  sur la diagonale et de  $\varepsilon$  partout ailleurs.

Cette structure algébrique obéit aux axiomes d'un dioïde.

**Exemple 14** Soient A et B deux matrices dans l'algèbre  $(max, +)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} \max(1, 2) & \max(4, 0) \\ \max(5, 3) & \max(7, 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \max(1+2, 4+3) & \max(1+0, 4+2) \\ \max(5+2, 7+3) & \max(5+0, 7+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$$

### 1.4.2 L'équation $x = ax \oplus b$ dans les dioïdes complets

L'utilisation de l'algèbre des dioïdes nous ramène à résoudre certaines équations. On peut discerner un type, l'équation  $x = ax \oplus b$  ou  $x$  est l'inconnue.

#### Théorème

L'inéquation  $x \succeq ax \oplus b$  dans un dioïde complet admet une plus petite solution, égale à  $a^*b$ , ou  $a^*$  est définie dans [3] par :

$$a^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} a^n$$

En outre,  $\bar{x} = a^*b$  réalise l'égalité (c'est-à-dire  $\bar{x} = a\bar{x} \oplus b$ ).

**Équations implicites matricielles** considérons toujours l'équation :

$$x = Ax \oplus b$$

$A$  étant une matrice carrée et  $x, b$  deux vecteurs, tous à coefficients dans un dioïde complet  $D$ . On recherche ici un algorithme permettant de calculer l'étoile d'une matrice.

un calcul a été introduit dans [3] :

$$A^* = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} a^* \oplus a^*b(ca^*b \oplus d)^*ca^* & a^*b(ca^*b \oplus d)^* \\ (ca^*b \oplus d)^* & (ca^*b \oplus d)^* \end{bmatrix}$$

### Conclusion :

Outre l'intérêt théorique des structures algébriques des dioïdes, le but de ce chapitre est de présenter le cadre mathématique utile aux différentes approches d'étude des SED. notamment les langages et automates et leurs spécifications et leurs intérêt pour la suite qui est dédiées aux réseaux de Petri temporisés et plus particulièrement aux Graphes d'Événements Temporisés.

# Chapitre 2

## Automate( $\max, +$ )

### Introduction

Les automates à multiplicités dans le semi-anneau  $\mathbb{R}_{max}$ , encore appelés automates ( $\max, +$ ), ont été introduits par S. Gaubert dans [7] et appliqués à l'analyse de performances des systèmes à événements discrets.

Dans ce chapitre, nous introduisons les automates ( $\max, +$ ) en tant qu'outil de modélisation des SEDs, nous présentons, dans un premier temps, les définitions et les propriétés nécessaires pour la suite de notre mémoire. Ensuite, plusieurs représentations sont décrites à fin de modéliser les comportements extrémaux.

Ces éléments sont extraits de références de base sur le sujet telles que [7], [1], [6], [5],[9],[10],[11].

### 2.1 Définition d'un automate ( $\max, +$ )

un automate ( $\max, +$ ) est un 6-uplet  $G = (Q, \Sigma, Q_i, Q_f, \alpha, \mu)$ , où :

1.  $Q$  : est un ensemble fini d'états .
2.  $\Sigma$  : est un ensemble d'événements.
3.  $Q_i \subseteq Q$  : est un ensemble d'états initiaux.
4.  $Q_f \subseteq Q$  : est un ensemble d'états finaux.
5.  $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}_{max}^{|Q| \times |Q|}$  telle que  $\alpha_q \neq \varepsilon$  si  $q$  est un état initial.

6.  $\mu : \Sigma^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{max}^{|\mathcal{Q}| \times |\mathcal{Q}|}$  est un morphisme<sup>1</sup> sur le monoïde libre<sup>2</sup>  $\Sigma^*$  spécifique de façon unique par la famille de matrices  $\mu(a) \in \overline{\mathbb{R}}_{max}^{|\mathcal{Q}| \times |\mathcal{Q}|}$  et  $a \in \Sigma$  Et pour un mot  $\omega = a_1 a_2 \dots a_n$ .

on a  $\mu(\omega) = \mu(a_1 a_2 \dots a_n) = \mu(a_1) \dots \mu(a_n)$ .

Où le produit matriciel mis en jeu est celui de  $\overline{\mathbb{R}}_{max}^{|\mathcal{Q}| \times |\mathcal{Q}|}$ .

Un coefficient  $[\mu(a)]_{q'q} \neq \varepsilon$  signifie que, de l'état  $q'$ , l'occurrence de l'événement  $a$  provoque une transition vers d'état  $q$ .

**Exemple 1** Soit la figure 2.1

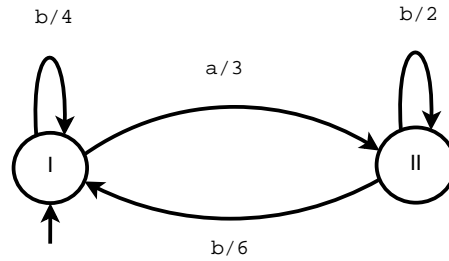


FIGURE 2.1 – Automate (max,+)  $G_{2.1}$

$$Q = \{I, II\}, Q_i = \{I\} \quad \alpha = \begin{pmatrix} e & \varepsilon \end{pmatrix}, \Sigma = \{a, b\},$$

$$\mu(a) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \mu(b) = \begin{pmatrix} 4 & \varepsilon \\ 6 & 2 \end{pmatrix},$$

Les séquences d'événements possibles sont les mots :  $b, a, ab, ba, abb, bab, babb, abba, abab, \dots$

## Déterminisme et ambiguïté

Un automate (max, +) est dit déterministe si :

- Il comporte un unique état initial, c'est-à-dire, qu'il existe un unique  $q \in Q$  tel que  $\alpha_q \neq \varepsilon$ .

---

1. Soient  $D$  et  $C$  deux dioïdes et  $\mu$  une application,  $\mu : D \rightarrow C$ . On dit que  $\mu$  est un morphisme si et seulement si :

$$\forall a, b \in D, \mu(a \oplus b) = \mu(a) \oplus \mu(b)$$

$$\mu(a \otimes b) = \mu(a) \otimes \mu(b).$$

2. Si  $\Sigma$  est un ensemble fini (alphabet), le monoïde libre  $\Sigma^*$  est défini par l'ensemble des séquences finies de lettres (mots) de  $\Sigma$ . Un mot  $\omega \in \Sigma^*$  peut être écrit comme une séquence  $\omega = a_1 a_2 \dots a_n$  avec  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Sigma$  et  $n$  un nombre naturel. Les langages formels sont des sous-ensembles du monoïde libre  $\Sigma^*$ . La concaténation de deux mots  $u$  et  $v$  est notée  $uv$ , et  $u^*$  désigne l'ensemble des mots de la forme  $u^n$  avec  $n$  un nombre naturel et  $u^0$  égal au mot vide  $\varepsilon$ .

-Depuis chaque état, l'occurrence d'un événement ne peut pas induire plusieurs transitions d'état possibles, c'est-à-dire, si pour tout  $a \in \Sigma$  chaque ligne de  $\mu(a)$  contient au plus un élément différent de  $\varepsilon$ .

**Exemple 2** *l'automate (max, +) de la figure 2.1 est un automate non-déterministe.*

L'automate est dit non-déterministe si ces conditions ne sont pas satisfaites, on retrouve plusieurs types d'automates non-déterministe à travers la notion d'ambigüité.

On introduit les notions suivantes afin de faciliter leur distinction.

Si  $[\mu(a)]_{pq} \neq \varepsilon$ , alors on note  $(p, a, q)$  la transition dans l'automate.

Soient  $m \geq 1$  et  $\pi = (q_0, a_1, q_1)(q_1, a_2, q_2) \dots (q_{m-1}, a_m, q_m)$  désignant une séquence de transitions. Où  $\pi$  est un chemin allant de  $q_0$  à  $q_m$ .

On note  $\sigma(\pi)$  le produit ( $\otimes$ ) des poids sur le chemin  $\pi$ , soit :

$$\sigma(\pi) = \bigotimes_{i=1}^m [\mu(a_i)]_{q_{i-1}q_i} = \sum_{i=1}^m [\mu(a_i)]_{q_{i-1}q_i} \quad (2.1)$$

Où  $\sum$  est la somme usuelle.

Soient  $p, q \in Q$  et  $\omega \in \Sigma^*$ . On note par  $p \xrightarrow{\omega} q$  l'ensemble des chemins qui vont de  $p$  vers  $q$  et dont les événements associés aux transitions successives forment le mot  $\omega$  ( il peut y avoir plusieurs chemins dans le cas d'un automate (max, +) non-déterministe). On peut montrer que :

$$[\mu(a_1 a_2 \dots a_m)]_{q_0 q_m} = \bigoplus_{\pi \in q_0 \xrightarrow{a_1 \dots a_m} q_m} \sigma(\pi). \quad (2.2)$$

Cela signifie que  $[\mu(a_1 a_2 \dots a_m)]_{q_0 q_m}$  est égal au maximum des poids des chemins qui vont de  $q_0$  à  $q_m$  et qui ont  $a_1 a_2 \dots a_m$  comme label.

**Exemple 3** soit l'automate (max, +), non-déterministe, de la figure 2.2, on prend l'exemple de la séquence d'événement  $\omega = aab$

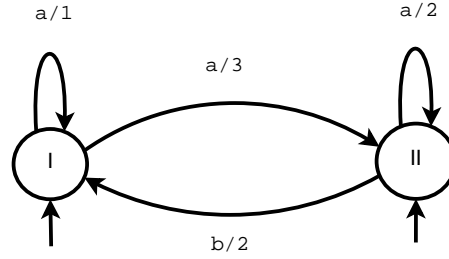


FIGURE 2.2 – Automate(max,+), Non-déterministe  $G_{2,2}$

on remarque bien que la séquence est reconnue par deux chemins allant de l'état I à l'état I.

On a :

1.  $\pi_1 = (I, a, II)(II, a, II)(II, b, I)$ ,
2.  $\pi_2 = (I, a, I)(I, a, II)(II, b, I)$ .

$$Q=Q_i = \{I, II\}, \Sigma = \{a, b\}, \alpha = \begin{pmatrix} e & e \end{pmatrix},$$

$$\mu(a) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \varepsilon & 2 \end{pmatrix}, \mu(b) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Et

$$\mu(a) \otimes \mu(a) \otimes \mu(b) = \begin{pmatrix} 7 & \varepsilon \\ 6 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Le terme  $\mu(aab)_{I,I} = 7$  donne bien le poids maximum entre les deux chemins ciblés ci-dessus.

Un automate  $(max,+)$  est dit *non-ambigu* si :

- chaque séquence  $\omega \in \Sigma^*$  est reconnue par au plus un chemin allant d'un état initial  $q_0 \in Q_i$  vers un état final  $q_f \in Q_f \subseteq Q$  (voir par exemple dans [5],[6]), soit :

$$|Q_i \xrightarrow{\omega} Q_f| \leq 1, \forall \omega \in \Sigma^*. \quad (2.3)$$

- pour chaque séquence  $\omega \in \Sigma^*$ , et pour une paire d'états  $(p, q) \in Q \times Q$  donnée, il existe au plus un chemin reconnaissant  $\omega$  et allant de  $p$  à  $q$  (voir exemple dans [12]), soit :

$$|p \xrightarrow{\omega} q| \leq 1, \forall \omega \in \Sigma^*, \forall p, q \in Q \quad (2.4)$$

Un automate  $(max,+)$  est dit *fortement non-ambigu* s'il existe au plus un chemin partant d'un état initial, reconnaissant une séquence  $\omega \in \Sigma^*$  et aboutissant à un état  $q$  donné, soit :

$$|Q_i \xrightarrow{\omega} q| \leq 1, \forall \omega \in \Sigma^*, \forall q \in Q \quad (2.5)$$

## 2.2 Représentation sous la forme d'équations d'état dans

$\mathbb{R}_{max}$

On peut décrire l'évolution et la dynamique des automates  $(max, +)$  à travers un vecteur  $x(\omega) \in \overline{\mathbb{R}}^{|Q| \times |Q|}$ ,  $\omega \in \Sigma^*$  défini par :

$$x(\omega) = \alpha \mu(\omega)$$

L'élément  $x(\omega)_q$ ,  $q \in Q$ , est la date à laquelle l'état  $q$  est atteint consécutivement à la séquence d'événements  $\omega$  partant d'un état initial, (avec la convention que  $[x(\omega)]_q = \varepsilon$  si l'état  $q$  n'est pas atteint quand la séquence  $\omega$  est achevée).

Dans [7], les éléments de  $x$  sont appelés des *dateurs généralisés*, on a :

$$\begin{cases} x(\epsilon) = \alpha \\ x(\omega a) = x(\omega) \mu(a) \end{cases} \quad (2.6)$$

où  $\epsilon$  est le mot de longueur nulle.

Cette représentation est une équation d'état  $(max, +)$  linéaire pour laquelle la dynamique dépend des lettres  $a \in \Sigma$  (labels associés aux événements).

**Exemple 4** Soit l'automate représenté sur la figure 2.3

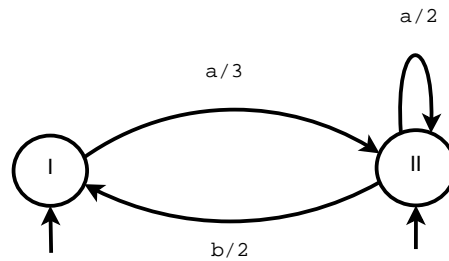


FIGURE 2.3 – Automate  $(max, +)G_{2.3}$

On applique la représentation 2.6 pour une séquence d'événement  $\omega = aab$

$$\Sigma = \{a, b\}, Q=Q_i=\{I, II\}, \alpha = \begin{pmatrix} e & e \end{pmatrix},$$

$$\mu(a) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & 2 \end{pmatrix}, \mu(b) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$[x(aab)] = [\alpha \otimes \mu(a) \otimes \mu(a) \otimes \mu(b)] = \begin{bmatrix} 7 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$[x(aab)]_I = 7$  signifie que la séquence  $aab$  permet d'atteindre l'état I à l'instant  $t = 7$ . Cette valeur est le maximum entre les poids des deux chemins qui reconnaissent  $aab$ .

L'élément  $[x(aab)]_{II} = \varepsilon$  indique que la séquence  $aab$  ne permet pas d'atteindre l'état II.

## 2.3 Représentation sous la forme de séries formelles

De façon équivalente, le vecteur des dateurs généralisé peut s'écrire sous forme de séries formelles, soit :

$$x = \bigoplus_{\omega \in \Sigma^*} x(\omega) \omega$$

Ce vecteur est la solution de 2.6 qui s'écrit :

$$x = \alpha \otimes \mu^* \tag{2.7}$$

avec :

$$\mu = \bigoplus_{a \in \Sigma} \mu(a) a$$

et

$$\mu^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mu^n.$$

Où par convention  $\mu^0 = Id$  et  $\mu^n = \mu^{n-1} \otimes \mu$ .

**Exemple 5** On obtient pour l'automate représenté sur la figure 2.3, le vecteur de séries formelles suivant :

$$x = \alpha \otimes (\mu(a) a \oplus \mu(b) b)^*$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} e & e \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon & 3a \\ 2b & 2a \end{pmatrix}^* \\
&= \left( (((3a \oplus e)(2a)^*) 2b)^* \quad ((2a)^* \oplus (5ba)^*)^* \right)
\end{aligned}$$

## 2.4 Évaluation de performances des SEDs

A fin d'évaluer les performances de certains SEDs, les automates  $(max, +)$  ont été utilisé dans plusieurs articles [1], [7], [9] à fin estimer *les durées d'achèvement maximum et minimum* pour les séquences d'une longueur donnée.

### 2.4.1 Durée d'achèvement maximum pour les séquences d'une longueur donnée

la durée d'achèvement maximum pour les séquences d'une longueur  $n$ , consiste à trouver le comportement selon le *pire cas* de certains systèmes.

Son calcul a été présenté dans [7] dans  $\overline{\mathbb{R}}_{max}$  comme suit :

$$\begin{aligned}
l_n^{worst} &= \bigoplus_{\omega \in \Sigma^n} \bigoplus_{p \in Q} [\alpha \mu(a_1) \dots \mu(a_n)]_p \\
&= \bigoplus_{p \in Q} [\alpha M^n]_p.
\end{aligned}$$

avec :

$$M = \bigoplus_{a \in \Sigma} \mu(a) \tag{2.8}$$

Dans 2.8, on évalue les dates auxquelles les états terminaux  $p$  sont atteints pour l'ensemble des séquences de  $n$  événements.

c'est-à-dire, la durée d'achèvement maximum pour les séquences de longueur  $n$ .

## 2.4.2 Durée d'achèvement minimum pour les séquences d'une longueur donnée

La durée d'achèvement minimum pour une séquence de longueur  $n$  est de trouver le comportement selon le *meilleur cas* de certains systèmes ou encore le *cas optimal*.

on retrouve dans [7] la formule du *cas optimal*, qui est décrite comme suit :

$$l_n^{opt} = \min_{\omega \in \Sigma^n} \min_{p \in Q} [x(\omega)]_p$$

L'algorithme présenté dans [7] ne s'applique qu'à une classe réduite d'automates ( $max, +$ ), à savoir les automates déterministes.

Dans [9], il est démontré que, dans le cas général, ce problème est  $Np$ -complet<sup>3</sup>.

## 2.5 Modélisation du comportement extrémal des automates ( $max, +$ )

### Notation 1

Pour un automate ( $max, +$ )  $G(Q, \Sigma, \alpha, \mu)$ , Soit  $H$  un ensemble des transitions, définit comme suit :

$$H = \left\{ (p, a, q) \in Q \times \Sigma \times Q \mid [\mu(a)]_{pq} \neq \varepsilon \right\}$$

Pour un état donné  $p \in Q$ , on définit l'ensemble  $H_p \subset H$  tel que :

$$H_p = \{ (r, a', s) \in H \mid r = p \}$$

L'ensemble  $H_p$  regroupe les transitions partant de l'état  $p$ .

### 2.5.1 Représentations évaluant les dates d'achèvement

Soit la matrice  $A \in D^{|H| \times |H|}$  ( $D$  peut correspondre à  $\overline{\mathbb{R}}_{max}$ , ou  $\overline{\mathbb{R}}_{min}$ ) définie dans [1] pour les indices  $j$  et  $k$  des transitions  $(p, a, q)$  et  $(r, a', s)$  dans  $H$  par :

$$A_{jk} = \begin{cases} [\mu(a')]_{rs} & \text{si } s = p \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.9)$$

---

3. En théorie de la complexité, un problème  $Np$ -complet est un problème de décision, une question mathématique dont la réponse est soit "oui", soit "non".

*Interprétation :*

$A_{jk} \neq \varepsilon$  signifie que la transition  $(p, a, q)$  (d'indice  $j$  dans  $H$ ) peut survenir consécutivement à l'occurrence de la transition  $(r, a', s)$  (d'indice  $k$  dans  $H$ ) dont la durée est égale à  $[\mu(a')]_{rs}$ ; sinon  $A_{jk} = \varepsilon$ .

**Exemple 7** Soit l'automate de la figure 2.3

$$H = \{(I, a, II), (II, a, II), (II, b, I)\}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ 3 & 2 & \varepsilon \\ 3 & 2 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Par exemple  $A_{1,3} = 2$  signifie que la transition  $(I, a, II)$  (d'indice 1) peut survenir consécutivement à l'occurrence de la transition  $(II, b, I)$  (d'indice 3) dont la durée est égale à 2 unités de temps.

On remarque que les lignes  $A$  correspondent aux transitions de même origine, on déduit que pour tout vecteur homogène<sup>4</sup>  $y \in D^{|H| \times 1}$ , le vecteur  $x = A \otimes y$  est aussi homogène.

La séquence de vecteurs homogènes  $x(n) \in D^{|H| \times 1}$  pour  $n \in \mathbb{N}$  a été défini dans [1] par :

$$\begin{cases} x(1)_{(p,a,q)} = \alpha_p & (p, a, q) \in H \\ x(n+1) = A \otimes x(n) & n \geq 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

### 2.5.1.1 Dans l'algèbre (max,+)

**Proposition 1** Soient  $\bar{A}$  et  $\bar{x}(n)$ , définis respectivement par 2.9 et 2.10 pour  $D = \overline{\mathbb{R}}_{max}$ . Alors  $\bar{x}(n+1)_p$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in Q$ , est l'élément maximum de  $\sigma_{n,p} = \{x(\omega)_p \mid |\omega| = n\}$ , c'est-à-dire, la durée d'achèvement maximum pour toutes les séquences de longueur  $n$  aboutissant à l'état  $p$ .

*Cette proposition montre comment la récurrence 2.10, formulée dans l'algèbre (max,+), concourt à la représentation du comportement "pire-cas" d'un automate (max,+)( voir la preuve dans [1]).*

---

4. Un vecteur  $x \in \overline{\mathbb{R}}_{max}^{|H| \times 1}$  est dit homogène si  $\forall p \in Q, \forall i, j \in H_p, x_i = x_j$ . En d'autres termes, l'élément  $x_i$  d'un vecteur homogène dépend uniquement de l'état d'origine de la transition  $i$ .

**Exemple 8** soit l'automate  $(max, +)$  de la figure 2.4

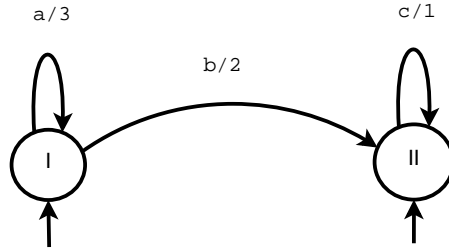


FIGURE 2.4 – Automate  $(max, +)$ , déterministe  $G_{2,4}$

On a :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{x}(n) = \begin{pmatrix} \bar{x}(n)_{(I,a,I)} \\ \bar{x}(n)_{(I,b,II)} \\ \bar{x}(n)_{(II,c,II)} \end{pmatrix}, \quad \bar{x}(1) = \begin{pmatrix} e \\ e \\ e \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}(n+1) = A \otimes \bar{x}(n), \quad \bar{x}(n+1) = \begin{pmatrix} 3 \otimes \bar{x}(n)_{(I,a,I)} \\ 3 \otimes \bar{x}(n)_{(I,a,I)} \\ 2 \otimes \bar{x}(n)_{(I,b,II)} \oplus 1 \otimes \bar{x}(n)_{(II,c,II)} \end{pmatrix}$$

Le tableau 2.1, qui suit, contient les premières valeurs obtenues grâce à cette récurrence dans  $\overline{\mathbb{R}}_{max}$ .

$n$	1	2	3	4	5	...
$\bar{x}(n)_{(I,a,I)}$	$e$	3	6	9	12	...
$\bar{x}(n)_{(I,b,II)}$	$e$	3	6	9	12	...
$\bar{x}(n)_{(II,c,II)}$	$e$	2	5	8	11	...

TABLE 2.1 – Les éléments des dates d'achèvement d'un automate  $(max, +)$  dans  $\overline{\mathbb{R}}_{max}$

Par exemple, les séquences possibles de longueur 4 et aboutissant à l'état II sont  $\{cccc, bccc, abcc, abc, aaab\}$ .

$$x(cccc)_{II} = 4, x(bccc)_{II} = 5, x(abcc)_{II} = 7, x(abc)_{II} = 9, x(aaab)_{II} = 11,$$

et donc

$$\sigma_{4,II} = \{4, 5, 7, 9, 11\}.$$

D'autre part, on a :

$$H_{II} = \{(II, c, II)\}.$$

et

$$x(5)_{II} = x(5)_{(II,c,II)} = 11,$$

On remarque bien que  $x(5)_{II}$  correspond à l'élément maximum de  $\sigma_{4,II}$ , qui est la durée d'achèvement maximum pour toutes les séquences de longueur 4 aboutissant à l'état II.

### 2.5.1.2 Dans l'algèbre( min,+)

**Proposition 2** Soient  $\underline{A}$  et  $\underline{x}(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , définis respectivement par 2.9 et 2.10 avec  $D = \overline{\mathbb{R}}_{min}$ . Alors  $\underline{x}(n+1)_p$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in Q$ , est un minorant de  $\sigma_{n,p} = \{x(\omega)_p \mid |\omega| = n\}$ , c'est-à-dire un minorant des durées d'achèvement des séquences de longueur  $n$  aboutissant à l'état  $p$ .

*Cette proposition contribue à la description du comportement optimal d'un automate (max,+). (voir la preuve dans [1]).*

**Exemple 9** Reprenons l'automate de la figure 2.4

$\underline{x}(n+1)_p$  donne le minimum des durées d'achèvement pour les séquences de longueur  $n$  aboutissant à l'état  $p$ .

Le tableau suivant contient les premières valeurs obtenues à l'aide de la récurrence 2.10 dans  $\overline{\mathbb{R}}_{min}$ .

$n$	1	2	3	4	5	...
$\underline{x}(n)_{(I,a,I)}$	e	3	6	9	12	...
$\underline{x}(n)_{(I,b,II)}$	e	3	6	9	12	...
$\underline{x}(n)_{(II,c,II)}$	e	1	2	3	4	...

TABLE 2.2 – Les éléments des dates d'achèvement d'un automate (max,+) dans  $\overline{\mathbb{R}}_{min}$

On a :

$$x(5)_{II} = x(5)_{(II,c,II)} = 4$$

On remarque bien que  $x(5)_{II}$  correspond à l'élément minimum de  $\sigma_{4,II}$ , qui est la durée d'achèvement minimum pour toutes les séquences de longueur 4 aboutissant à l'état II.

## 2.5.2 Représentations évaluant les longueurs des séquences

### Notation 2

Soit  $T \subset \mathbb{N}$  l'ensemble des temporisations associées aux événements :

$$T = \{\tau \mid \exists a \in \Sigma, \exists p \in Q, \exists q \in Q, \text{ avec } [\mu(a)]_{pq} = \tau\}$$

Soient les matrices  $E_\tau \in D^{|H| \times |H|}$  ( $D$  peut correspondre à  $\bar{\mathbb{Z}}_{min}$  ou  $\bar{\mathbb{Z}}_{max}$ ),  $\tau \in T$ , définies dans [1] pour les indices  $j$  et  $k$  des transitions  $(p, a, q)$  et  $(r, a', s)$  dans  $H$  par :

$$[E_\tau]_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } s = p \text{ et } [\mu(a')]_{rs} = \tau \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.11)$$

La séquence de vecteurs homogènes  $z(t) \in D^{|H| \times 1}$  pour  $t \in \mathbb{N}$  a été défini, par récurrence dans [1], comme suit :

$$\begin{cases} z(0)_{(p,a,q)} = \alpha_p & \text{pour tout } (p, a, q) \in H \\ z(t) = \bigoplus_{\tau \in T, \tau \leq t} E_\tau \otimes z(t - \tau) \oplus z(t - 1) & \text{pour } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

#### 2.5.2.1 Dans l'algèbre (max,+)

**Proposition 3** Soient  $\bar{E}_\tau$ ,  $\tau \in T$ , et  $\bar{z}(t)$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , définis respectivement par 2.11 et 2.12 avec  $D = \bar{\mathbb{Z}}_{max}$ . Alors  $\bar{z}(t)_p$ ,  $t \in \mathbb{N}$ ,  $p \in Q$ , est un majorant de l'ensemble  $\gamma_{t,p} = \{|\omega| \mid x(\omega)_p \leq t\}$ , c'est-à-dire, un majorant des longueurs des séquences permettant d'atteindre l'état  $p$  avant, ou à, la date  $t$ . Si l'automate est fortement non-ambigu, alors  $\bar{z}(t)_p$  est l'élément maximum de  $\gamma_{t,p}$ .

*Cette proposition permet d'évaluer la longueur maximum des séquences s'achevant avant une date donnée, et donc retrouver le cas optimal représenté par un automate (max,+). (voir la preuve dans [1]).*

**Exemple 10** Soit l'automate(max,+), non-déterministe, représenté sur la figure 2.5

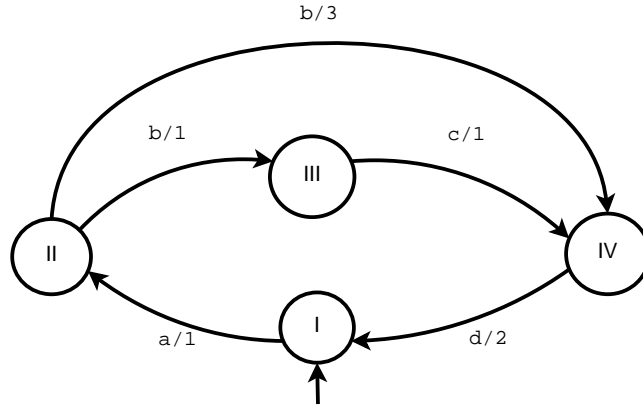


FIGURE 2.5 – Automate (max,+),non-déterministe  $G_{2.5}$

On a :

$$H = \{(I, a, II), (II, b, III), (III, c, IV), (II, b, IV), (IV, d, I)\}$$

$$T = \{1, 2, 3\}$$

Selon 2.11 et 2.12, on obtient :

$$\bar{E}_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \bar{E}_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$\bar{E}_3 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}, \bar{z}(t) = \begin{pmatrix} \bar{z}(t)_{(I,a,II)} \\ \bar{z}(t)_{(II,b,III)} \\ \bar{z}(t)_{(III,c,IV)} \\ \bar{z}(t)_{(II,b,IV)} \\ \bar{z}(t)_{(IV,d,I)} \end{pmatrix}, \bar{z}(0) = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ e \\ \varepsilon \\ e \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

Le tableau suivant présente les premières valeurs obtenues à l'aide de cette récurrence dans  $\bar{\mathbb{Z}}_{max}$ .

$t$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$\bar{z}(t)_{(I,a,II)}$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	3	3	3	3	...
$\bar{z}(t)_{(II,b,III)}$	$e$	$e$	$e$	$e$	$e$	4	4	4	...
$\bar{z}(t)_{(III,c,IV)}$	$\varepsilon$	1	1	1	1	1	5	5	...
$\bar{z}(t)_{(II,b,IV)}$	$e$	$e$	$e$	$e$	$e$	4	4	4	...
$\bar{z}(t)_{(IV,d,I)}$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	2	2	2	2	2	6	...

TABLE 2.3 – Les éléments de la représentation évaluant les longueurs des séquences d'un automate (max,+) dans  $\bar{\mathbb{Z}}_{max}$

Par exemple, les séquences permettant d'atteindre l'état IV avant la date  $t=6$  sont :  $\{b, bc\}$ .

On a alors

$$\gamma_{6,IV} = 1, 2.$$

D'autre part, on a :

$$\bar{z}(6)_{IV} = \bar{z}_{(IV,d,I)}(6) = 2,$$

qui correspond bien à l'élément maximum de  $\gamma_{6,IV}$ , c'est-à-dire, la longueur maximum des séquences permettant d'atteindre l'état IV avant la date  $t= 6$ .

### 2.5.2.2 Dans l'algèbre (min,+)

**Proposition 4 :** Soient  $\bar{E}_\tau$ ,  $\tau \in T$ , et  $\bar{z}(t)$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , définis respectivement par 2.11 et 2.12 avec  $D = \bar{\mathbb{Z}}_{min}$ . L'élément  $\underline{z}(t)_p$ ,  $t \in \mathbb{N}$ ,  $p \in Q$ , est un minorant de l'ensemble  $\gamma_{t,p} = \{|\omega| \mid x(\omega)_p \leq t\}$ , autrement dit, un minorant des longueurs de séquences possibles, permettant d'atteindre l'état  $p$  avant, ou à, la date  $t$ .

Si  $G$  est un automate  $(max,+)$  fortement non-ambigu, alors  $\underline{z}(t)_p$  est l'élément minimum de  $\gamma_{t,p}$ .(voir preuve dans [1])

**Exemple 11** On considère à nouveau l'automate  $(max,+)$  représenté sur la figure (2.5). Les matrices  $\underline{z}$  et  $\underline{E}_\tau$  sont des répliques dans  $\bar{\mathbb{Z}}_{min}$  de  $\bar{z}$  et  $\bar{E}_\tau$  données dans l'exemple précédent.

Le tableau 2.4 contient les premières valeurs obtenues pour  $\underline{z}(t)$ .

$t$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$\underline{z}(t)_{(I,a,II)}$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	3	2	2	2	...
$\underline{z}(t)_{(II,b,III)}$	$e$	$e$	$e$	$e$	$e$	$e$	$e$	$e$	...
$\underline{z}(t)_{(III,c,IV)}$	$\varepsilon$	1	1	1	1	1	1	1	...
$\underline{z}(t)_{(II,b,IV)}$	$e$	$e$	$e$	$e$	$e$	$e$	$e$	$e$	...
$\underline{z}(t)_{(IV,d,I)}$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	2	1	1	1	1	1	...

TABLE 2.4 – Les éléments de la représentation évaluant les longueurs des séquences d'un automate  $(max,+)$  dans  $\bar{\mathbb{Z}}_{min}$

Par exemple, les séquences permettant d'atteindre l'état IV avant la date  $t=7$  sont :  $\{b, bc, bcdabc\}$ .

On a alors

$$\gamma_{7,IV} = 1, 2, 6$$

D'autre part, on a :

$$\underline{z}(7)_{IV} = \underline{z}_{(IV,d,I)}(7) = 1$$

ce qui correspond à l'élément minimum de  $\gamma_{7,IV}$ .

## 2.5.3 Représentations symétriques

### 2.5.3.1 Représentation symétrique évaluant les dates d'achèvement

On définit  $y(\omega) \in \mathbb{R}_{max}$ ,  $\omega \in \Sigma^*$ , par :

$$y(\omega) = x(\omega)\beta$$

Où le vecteur  $\beta \in \overline{\mathbb{R}}_{max}^{|Q| \times 1}$  spécifie des délais finaux ([7]),  $\beta_q \neq \varepsilon$  si  $q$  est un état final, et  $\beta_q$  désigne le délai associé à cet état, et  $y(\omega)$  est la durée d'achèvement de la séquence  $\omega$ .

Dans [7]

$$\begin{cases} x(1)_{(p,a,q)} = \beta_p & \text{pour tout } (p, a, q) \in H \\ x(n+1) = A^T \otimes x(n) & \text{pour } n \geq 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

### A-Dans l'algèbre (max,+)

**Proposition 5** Soient  $\bar{A}$  et  $\bar{x}(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , définis respectivement par 2.9 et 2.13 avec  $D = \overline{\mathbb{R}}_{max}$ . Alors  $\bigoplus_{j \in H_p} \bar{x}(n+1)_j$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in Q$ , est l'élément maximum de  $\{[\mu(\omega) \otimes \beta]_p \mid |\omega| = n\}$ , c'est-à-dire, la durée d'achèvement maximum pour les séquences de longueur  $n$  partant de  $p$ . ( voir preuve dans [1]).

**Exemple 12** Soit l'automate représenté sur la figure 2.4

on a :

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 1 \end{pmatrix} \implies \bar{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}(n) = \begin{pmatrix} \bar{x}(n)_{(I,a,I)} \\ \bar{x}(n)_{(I,b,II)} \\ \bar{x}(n)_{(II,c,II)} \end{pmatrix},$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}(1) = \begin{pmatrix} e \\ e \\ e \end{pmatrix} \\ \bar{x}(n+1) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \otimes \bar{x}(n) \end{array} \right.$$

$$\bar{x}(n+1) = \begin{pmatrix} 3 \otimes \bar{x}(n)_{(I,a,I)} \oplus 3 \otimes \bar{x}(n)_{(I,b,II)} \\ 2 \otimes \bar{x}(n)_{(II,c,II)} \\ 1 \otimes \bar{x}(n)_{(II,c,II)} \end{pmatrix}$$

Le tableau suivant contient les premières valeurs obtenues.

$n$	1	2	3	4	5	...
$\bar{x}(n)_{(I,a,I)}$	$e$	3	6	9	12	...
$\bar{x}(n)_{(I,b,II)}$	$e$	2	3	4	5	...
$\bar{x}(n)_{(II,c,II)}$	$e$	1	2	3	4	...

TABLE 2.5 – Les éléments de la représentation symétrique évaluant les dates d'achèvement d'un automate (max,+) dans  $\overline{\mathbb{R}}_{max}$

Par exemple, la durée d'achèvement maximum pour les séquences de longueur 4 qui partent de l'état I est :

$$\bigoplus_{j \in H_1} \bar{x}(5) = \bar{x}(5)_{(I,a,I)} \oplus \bar{x}(5)_{(I,b,II)} = 12 \oplus 5 = 12$$

### B-Dans l'algèbre (min ,+)

**Proposition 6** Soient  $\underline{A}$  et  $\underline{x}(n)_j$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , définis respectivement par 2.9 et 2.13 avec  $D = \overline{\mathbb{R}}_{min}$ . Alors  $\bigoplus_{j \in H_p} \underline{x}(n+1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in Q$ , est un minorant de  $\left\{ [\mu(\omega) \otimes \beta]_p \mid |\omega| = n \right\}$ , c'est-à-dire, un minorant des durées d'achèvement des séquences de longueur  $n$  partant de  $p$ . ( voir [1])

**Exemple 13** On considère à nouveau l'automate représenté sur la figure 2.4

Les matrices  $\underline{x}(n)$ ,  $\underline{x}(n+1)$  et  $\underline{x}(1)$  sont des répliques dans  $\overline{\mathbb{R}}_{min}$  de  $\bar{x}(n)$ ,  $\bar{x}(n+1)$  et  $\bar{x}(1)$  données dans l'exemple précédent.

Le tableau 2.6 contient les premières valeurs obtenues grâce à cette récurrence dans  $\overline{\mathbb{R}}_{min}$ .

$n$	1	2	3	4	5	...
$\underline{x}(n)_{(I,a,I)}$	$e$	3	5	6	7	...
$\underline{x}(n)_{(I,b,II)}$	$e$	2	3	4	5	...
$\underline{x}(n)_{(II,c,II)}$	$e$	1	2	3	4	...

TABLE 2.6 – Les éléments de la représentation symétrique évaluant les dates d'achèvement d'un automate (max,+) dans  $\overline{\mathbb{R}}_{min}$

Le minimum des durées d'achèvement des séquences de longueur 4 qui partent de l'état I est obtenu comme suit :

$$\bigoplus_{j \in H_I} \underline{x}(5) = \underline{x}(5)_{(I,a,I)} \oplus \underline{x}(5)_{(I,b,II)} = 7 \oplus 5 = 5$$

### 2.5.3.2 Représentation symétrique évaluant les longueurs de séquences

**Proposition 7** Soient  $\overline{E}_\tau$ ,  $\tau \in T$ , les matrices définies dans 2.10, avec  $D = \overline{\mathbb{Z}}_{max}$ . La séquence de vecteurs  $\overline{\zeta}(t) \in \overset{|H|}{max} \overline{\mathbb{R}}$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , a été défini, par récurrence, dans [1] comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\zeta}(0)_{(p,a,q)} = \beta_p \quad \text{pour tout } (p,a,q) \in H \\ \overline{\zeta}(t) = \bigoplus_{\tau \in T, \tau \leq t} \overline{E}_\tau^T \otimes \overline{\zeta}(t-\tau) \oplus \overline{\zeta}(t-1) \quad \text{pour } t > 0 \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Où  $\bigoplus_{j \in H_p} [\overline{\zeta}(t)]_j$  majore les longueurs de séquences débutant par l'état  $p$  et se terminant avant, ou à, l'instant  $t$ .

**Exemple 14** On considère l'automate (max,+) représenté sur la figure 2.6.

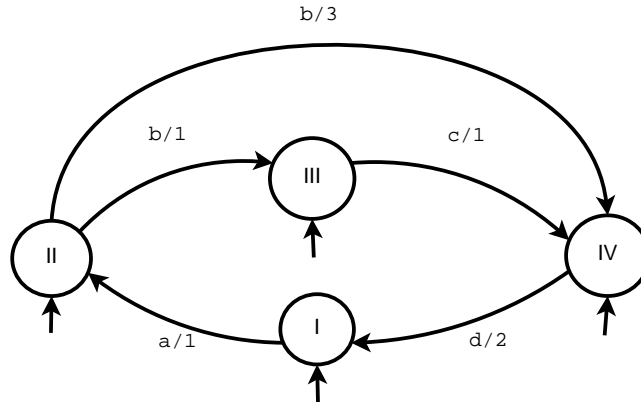


FIGURE 2.6 – Automate (max,+), non-déterministe  $G_{2.6}$

on a :

$$H = \{(I, a, II), (II, b, III), (III, c, IV), (II, b, IV), (IV, d, I)\}$$

$$T = \{1, 2, 3\}$$

$$\bar{E}_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \bar{E}_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\bar{E}_3 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}, \bar{\zeta}(t) = \begin{pmatrix} \bar{\zeta}(t)_{(I,a,II)} \\ \bar{\zeta}(t)_{(II,b,III)} \\ \bar{\zeta}(t)_{(III,c,IV)} \\ \bar{\zeta}(t)_{(II,b,IV)} \\ \bar{\zeta}(t)_{(IV,d,I)} \end{pmatrix}, \bar{\zeta}(0) = \begin{pmatrix} e \\ e \\ e \\ e \\ e \end{pmatrix}$$

Le tableau 2.7 contient les premières valeurs obtenues à l'aide de cette récurrence 2.14 dans  $\bar{\mathbb{R}}_{max}$

$t$	0	1	2	3	4	5	6	...
$\bar{\zeta}(t)_{(I,a,II)}$	$e$	1	2	3	3	4	5	...
$\bar{\zeta}(t)_{(II,b,III)}$	$e$	1	2	2	3	4	5	...
$\bar{\zeta}(t)_{(III,c,IV)}$	$e$	1	1	2	3	4	5	...
$\bar{\zeta}(t)_{(II,b,IV)}$	$e$	$e$	$e$	1	1	2	3	...
$\bar{\zeta}(t)_{(IV,d,I)}$	$e$	$e$	1	2	3	4	4	...

TABLE 2.7 – Les éléments de la représentation symétrique évaluant les longueurs de séquences d'un automate (max,+) dans  $\bar{\mathbb{R}}_{max}$

Par exemple, on obtient le maximum des longueurs de séquences débutant par l'état II et se terminant avant  $t = 6$  :

$$\bigoplus_{j \in H_{II}} [\bar{\zeta}(6)]_j = \bar{\zeta}(6)_{(II,b,IV)} \oplus \bar{\zeta}(6)_{(II,b,III)} = 5 \oplus 3 = 5$$

## Conclusion

Le comportement des automates (max,+) est représenté de deux manières dans la littérature : soit par les équations récurrentes 2.6 sur les événements (lettres), ou par, les séries

formelles 2.7 à coefficients dans  $\overline{\mathbb{R}}_{max}$ . De là, on retrouve de nombreux problèmes, restent difficiles à résoudre, ou même sont non décidables pour les automates  $(max, +)$  avec ces représentations ([9], [11]), à fin de contourner ces problèmes, de nouvelles représentations ont été introduites pour décrire les comportements extrémaux, ces représentations nous permettent de borner les durées d'achèvement des séquences en fonction de la longueur, et symétriquement, borner les longueurs des séquences en fonction de dates d'achèvement.

# Chapitre 3

## Automates Temporisés avec Gardes (ATGs)

### Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les représentations linéaires des automates  $(max,+)$ , à fin de déterminer les dates d'achèvement pour les pires et meilleurs cas, Néanmoins, les automates  $(max,+)$  ne prennent en compte que les transitions pondérées uniques (transitions associant une seule durée à un événement), qui ne sont pas adaptées à une application industrielle. Cela vient du fait que dans la pratique, un événement ne se produit pas exactement au même moment, et qu'une tâche n'a pas une durée exacte. Il est plus réaliste d'utiliser des intervalles pour décrire ces aspects.

les automates temporisés sont particulièrement efficaces pour gérer les intervalles comme la durée des tâches et les limites des occurrences. Ils ont été d'abord présenté dans [19] comme des automates temporisés qui utilisent la comparaison entre les valeurs d'horloges et les gardes de transitions pour régir les évolutions du système. une première extension de ces automates a été proposée dans [13]. Afin d'éviter que le système ne se transforme en blocages causés par le temps écoulé (plus de transition validée pour les valeurs d'horloge), des automates complétés par des invariants d'état, appelés Automates temporisés avec gardes (ATG), ont été introduits dans [7].

### 3.1 Définition d'un ATG

Soit  $G$  un automate temporisé avec garde défini par un 7-uplet  $G=(Q, \Sigma, Q_0, Q_m, Tra, Inv, C)$  ([18])

avec :

- $Q$  : est un ensemble fini d'états.
- $\Sigma$  : est un alphabet fini d'événements.
- $Q_0 \subseteq Q$  est l'ensemble des états initiaux.
- $Q_m \subseteq Q$  est l'ensemble des états finaux.
- $C$  : est un ensemble fini d'horloges.
- $Inv : Q \rightarrow C(C)$  est une contrainte sur l'horloge associé à un état ( invariant).
- $Tra : Tra \subseteq Q \times C(C) \times \Sigma \times 2^C \times Q$  est l'ensemble des transitions.

L'ensemble des transitions temporisées  $Tra$  doit être interprété comme suit, si

$$(q_{in}, garde, e, reset, q_{out}) \in Tra$$

alors, il y a une transition de  $q_{in}$  à  $q_{out}$  avec l'étiquette complète

$$(garde, e, reset)$$

où

$$garde \in C(C), e \in \Sigma \text{ et } reset \subseteq C.$$

**Exemple 1 :** Soit l'automate  $G_1$  représenté sur la figure 3.1

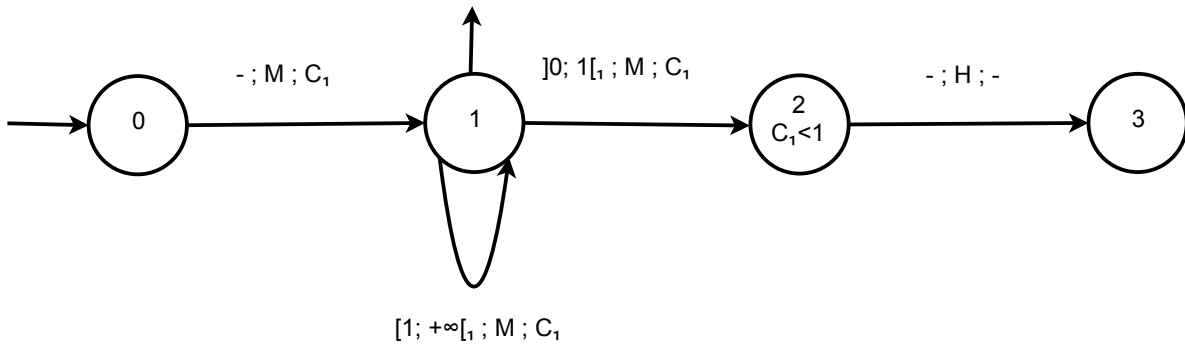


FIGURE 3.1 – Automate Temporisé avec Garde  $G_{3.1}$

$$Q = \{0, 1, 2, 3\}, \Sigma = \{M, H\}; Q_0 = \{0\}; Q_m = \{1\}$$

*Par souci de simplicité, lorsque le garde est  $[0; +\infty[$ , c'est-à-dire lorsqu'un événement peut survenir à tout moment, la notation - est utilisée à la place de  $[0; +\infty[$ .*

### 3.1.1 Composition parallèle

#### Définition 2

Considérons deux ATGs

$$G_1 = (Q_1, \Sigma_1, Q_{0,1}, Q_{m,1}, Tra_1, Inv_1, C_1)$$

et

$$G_2 = (Q_2, \Sigma_2, Q_{0,2}, Q_{m,2}, Tra_2, Inv_2, C_2),$$

$G_{1\parallel 2}$  est l'automate résultant de la composition parallèle

$$G_{1\parallel 2} = (Q_1 \times Q_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, Q_{0,1} \times Q_{0,2}, Q_{m,1} \times Q_{m,2}, Tra_{1\parallel 2}, Inv_{1\parallel 2}, C_1 \cup C_2)$$

Où :

- $Inv_{1\parallel 2} : Q_1 \times Q_2 \longrightarrow C(C_{1\parallel 2}) = C(C_1) \wedge C(C_2)$  avec  $Inv_{1\parallel 2}(q_1, q_2) \longrightarrow Inv_1(q_1) \wedge Inv_2(q_2)$
- $Tra$  est défini comme suit :

$$Tra_{1\parallel 2} \subseteq (Q_1 \times Q_2) \times C(C)_{1\parallel 2} \times (\Sigma_1 \times \Sigma_2) \times 2^{C_1 \cup C_2} \times (Q_1 \times Q_2)$$

avec :

- Pour tout  $e \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$  et si  $(q_{i,in}, garde, e, reset, q_{i,out}) \in Tra_i ; i=1,2$   
alors

$$((q_{1,in}, q_{2,in}), garde_1 \wedge garde_2, e, reset_1 \cup reset_2, (q_{1,out}, q_{2,out})) \in Tra_{1\parallel 2}$$

- Pour tout  $e_1 \in \Sigma_1 \setminus \Sigma_2, q_2 \in Q_2$  et si  $(q_{1,in}, garde_1, e_1, reset_1, q_{1,out}) \in Tra_1$   
alors

$$((q_{1,in}, q_2), garde_1, e_1, reset_1, (q_{1,out}, q_2)) \in Tra_{1\parallel 2}$$

- Pour tout  $e_2 \in \Sigma_2 \setminus \Sigma_1$  et  $q_1 \in Q_1$  et si  $(q_{2,in}, garde_2, e_2, reset_2, q_{2,out}) \in Tra_2$   
alors

$$((q_1, q_{2,in}), garde_2, e_2, reset_2, (q_1, q_{2,out})) \in Tra_{1\parallel 2}$$

**Exemple 2 :** Soit l'automate représenté sur la figure suivante ;

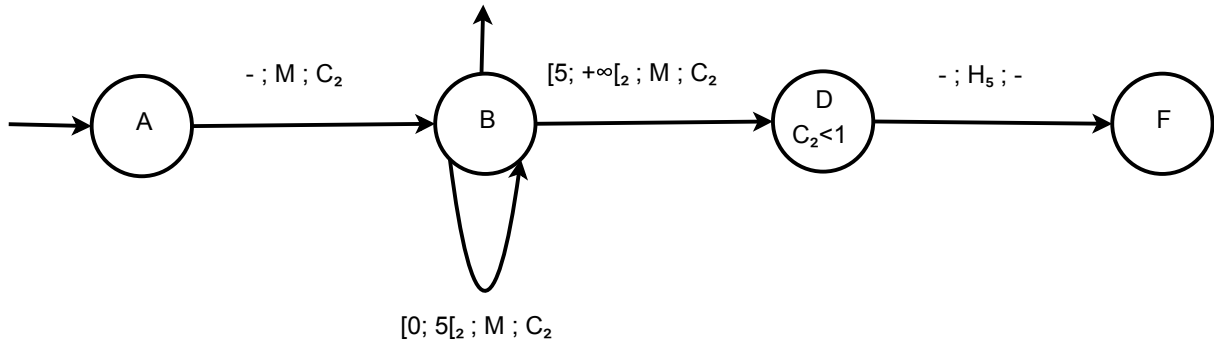


FIGURE 3.2 – Automate Temporisé avec Garde  $G_{3.2}$

la composition parallèle de  $G_1 || G_2$  est donnée par  $G_{1||2}$  représenté sur la figure 3.3.

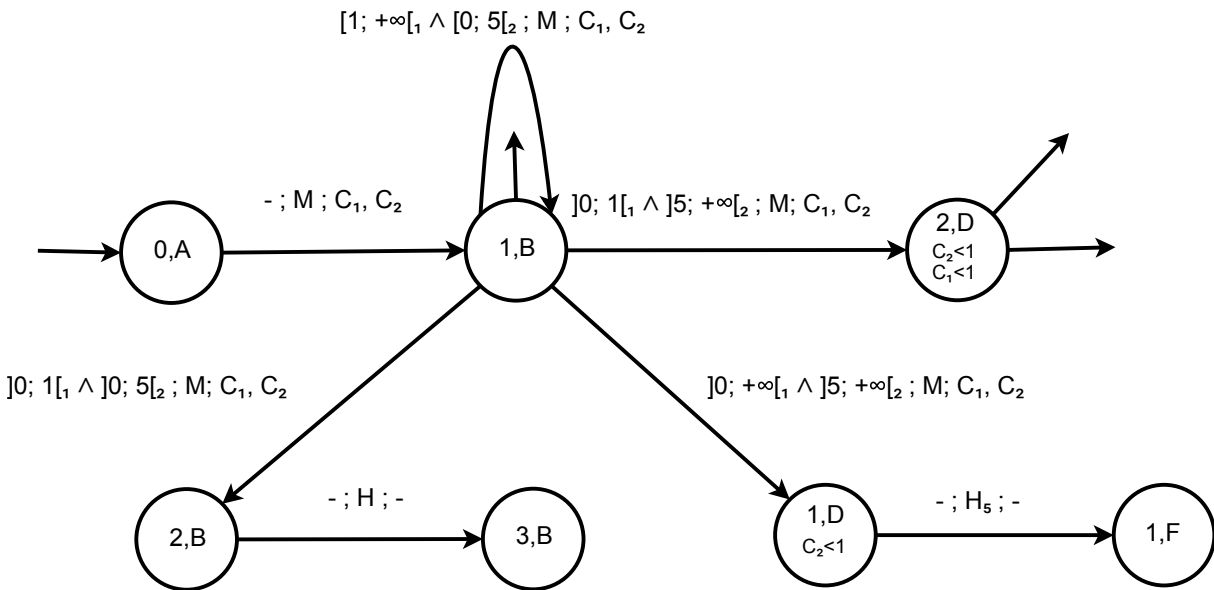
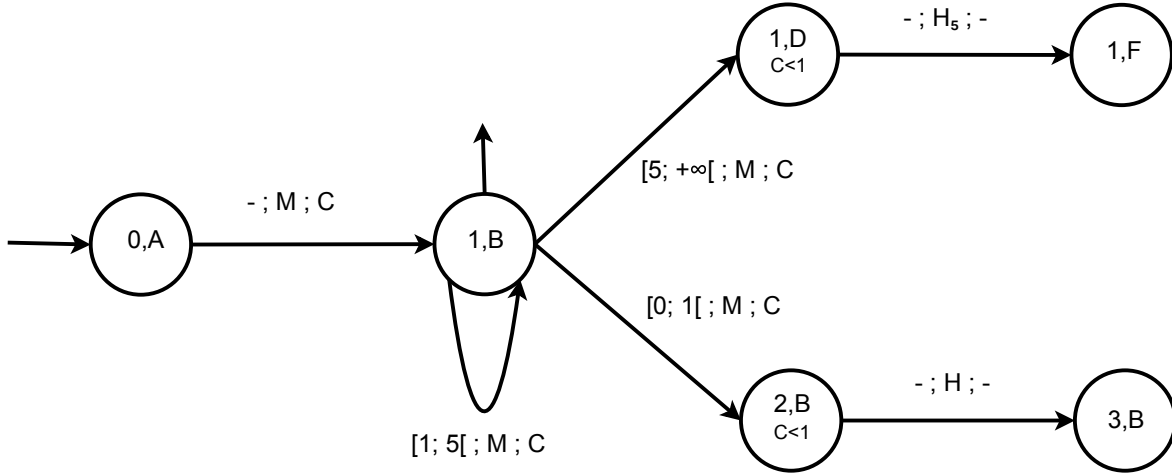


FIGURE 3.3 – Résultat de la composition parallèle d'ATGs  $G_{3.1||3.2}$

le résultat de l'intersection de  $[0; 1[ \wedge [5; +\infty[$  est l'ensemble vide, la garde ne peut jamais être validée et donc la transition associée peut être supprimée.


 FIGURE 3.4 – ATG final  $G'_{3.1||3.2}$ 

## 3.2 Représentation linéaire des ATGs

### Définition 3 [18]

Considérons un dioïde complet  $(D, \oplus, \otimes, \varepsilon, e)$  où  $\varepsilon$  (*resp.*  $e$ ) est l'élément neutre de  $\oplus$  (*resp.*  $\otimes$ ).

on peut définir un ATG comme un 7-uplet  $(Q, \Sigma, Tra, \alpha, \beta, \mu_{sup}, \mu_{inf})$

Où

— si  $q \in Q_0$  alors  $\alpha_q = e$  sinon  $\alpha_q = \varepsilon$ .

— si  $q \in Q_m$  alors  $\beta_q = e$  sinon  $\beta_q = \varepsilon$ .

—  $\mu_{sup} : \Sigma \rightarrow D^{|Q| \times |Q|}$ ,

$$[\mu_{sup}(a)]_{q_{in}q_{out}} = \begin{cases} \sup(\text{garde}) & \text{si } (q_{in}, \text{garde}, a, \text{reset}, q_{out}) \in Tra \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$$

—  $\mu_{inf} : \Sigma \rightarrow D^{|Q| \times |Q|}$ ,

$$[\mu_{inf}(a)]_{q_{in}q_{out}} = \begin{cases} \inf(\text{garde}) & \text{si } (q_{in}, \text{garde}, a, \text{reset}, q_{out}) \in Tra \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exemple 3 :** Pour l'ATG représenté sur la figure 3.2

on a :

$$Q = \{A, B, D, F\}, \Sigma = \{M, H5\}, Q_0 = \{A\}, Q_m = \{B\}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\mu_{sup}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon & T & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & T & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \mu_{sup}(H5) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\mu_{inf}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \mu_{inf}(H5) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Où  $T = +\infty$

### 3.2.1 Composition parallèle

#### Définition 4 [18]

Considérons deux ATGs définis comme suit :

$$G_1 = (Q_1, \Sigma_1, \alpha_1, \beta_1, \mu_{1,sup}, \mu_{1,inf})$$

et

$$G_2 = (Q_2, \Sigma_2, \alpha_2, \beta_2, \mu_{2,sup}, \mu_{2,inf})$$

$G_{1\parallel 2}$  est l'ATG résultant de la composition parallèle de  $G_1$  et  $G_2$

$$G_{1\parallel 2} = (Q_1 \times Q_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, Tra_{1\parallel 2}, \alpha_{1\parallel 2}, \beta_{1\parallel 2}, \mu_{1\parallel 2,sup}, \mu_{1\parallel 2,inf})$$

Où

$$\begin{aligned} \text{--- } \alpha_{1\parallel 2} &\in \overline{\mathbb{R}}_{max}^{1 \times |Q_1 \times Q_2|} \\ [\alpha_{1\parallel 2}]_{q_i \times q_j} &= \begin{cases} [\alpha_1]_{q_i} \oplus [\alpha_2]_{q_j} & \text{si } [\alpha_1]_{q_i} \neq \varepsilon \text{ et } [\alpha_2]_{q_j} \neq \varepsilon \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{--- } \beta_{1\parallel 2} \in \overline{\mathbb{R}}_{max}^{|Q_1 \times Q_2| \times 1}$$

$$[\beta_{1\parallel 2}]_{q_i \times q_j} = \begin{cases} [\beta_1]_{q_i} \oplus [\beta_2]_{q_j} & \text{si } [\beta_1]_{q_i} \neq \varepsilon \text{ et } [\beta_2]_{q_j} \neq \varepsilon \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{--- } \mu_{1\parallel 2, \text{sup}} = \Sigma \longrightarrow D^{|Q_1 \times Q_2| \times |Q_1 \times Q_2|}$$

-Pour tout  $e \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$

$$[\mu_{1\parallel 2, \text{sup}}(e)]_{(q_{1, \text{in}} \times q_{2, \text{in}}), (q_{1, \text{out}} \times q_{2, \text{out}})} = \begin{cases} \bigoplus_{i=1,2} [\mu_{i, \text{sup}}(e)]_{q_{i, \text{in}}, q_{i, \text{out}}} & \text{si } [\mu_{i, \text{sup}}(e)]_{q_{i, \text{in}}, q_{i, \text{out}}} \neq \varepsilon \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$$

-Pour tout  $e_1 \in \Sigma_1 \setminus \Sigma_2$  et  $q_2 \in Q_2$

$$[\mu_{1\parallel 2, \text{sup}}(e_1)]_{(q_{1, \text{in}} \times q_2), (q_{1, \text{out}} \times q_2)} = [\mu_{1, \text{sup}}(e_1)]_{q_{1, \text{in}}, q_{1, \text{out}}}$$

-Pour tout  $e_2 \in \Sigma_2 \setminus \Sigma_1$  et  $q_1 \in Q_1$

$$[\mu_{1\parallel 2, \text{sup}}(e_2)]_{(q_1 \times q_{2, \text{in}}), (q_1 \times q_{2, \text{out}})} = [\mu_{2, \text{sup}}(e_2)]_{q_{2, \text{in}}, q_{2, \text{out}}}$$

$$\text{--- } \mu_{1\parallel 2, \text{inf}} = \Sigma \longrightarrow D^{|Q_1 \times Q_2| \times |Q_1 \times Q_2|}$$

-Pour tout  $e \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$

$$[\mu_{1\parallel 2, \text{inf}}(e)]_{(q_{1, \text{in}} \times q_{2, \text{in}}), (q_{1, \text{out}} \times q_{2, \text{out}})} = \begin{cases} \bigoplus_{i=1,2} [\mu_{i, \text{inf}}(e)]_{q_{i, \text{in}}, q_{i, \text{out}}} & \text{si } [\mu_{i, \text{inf}}(e)]_{q_{i, \text{in}}, q_{i, \text{out}}} \neq \varepsilon \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$$

-Pour tout  $e_1 \in \Sigma_1 \setminus \Sigma_2$  et  $q_2 \in Q_2$

$$[\mu_{1\parallel 2, \text{inf}}(e_1)]_{(q_{1, \text{in}} \times q_2), (q_{1, \text{out}} \times q_2)} = [\mu_{1, \text{inf}}(e_1)]_{q_{1, \text{in}}, q_{1, \text{out}}}$$

-Pour tout  $e_2 \in \Sigma_2 \setminus \Sigma_1$  et  $q_1 \in Q_1$

$$[\mu_{1\parallel 2, \text{inf}}(e_2)]_{(q_1 \times q_{2, \text{in}}), (q_1 \times q_{2, \text{out}})} = [\mu_{2, \text{inf}}(e_2)]_{q_{2, \text{in}}, q_{2, \text{out}}}$$

**Exemple 4 :** Soit l'ATG représenté sur la figure 3.4

$$Q_1 \times Q_2 = ((0, A); (1, B); (2, B)); (3, B); (1, D); (1, F)); \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{M, H, H5\}$$

$$\alpha_{1\|2} = \left( e \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \right); \beta_{1\|2} = \left( \varepsilon \ e \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \right)$$

$$\mu_{1\|2,inf}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 0 & \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \mu_{1\|2,sup}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon & T & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & 1 & \varepsilon & T & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$\mu_{1\|2,inf}(H) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \mu_{1\|2,sup}(H) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & T & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$\mu_{1\|2,inf}(H5) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \mu_{1\|2,sup}(H5) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & T \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix},$$

### 3.2.2 Représentations sous la forme d'équations d'état dans $\mathbb{R}_{max}$

Dans le chapitre 2, nous avons défini *les dateurs généralisés* (2.6) qui ont été introduit dans [7], une nouvelle représentation a été défini dans [18]

$$\begin{cases} x_{sup}(\varepsilon) = \alpha \\ x_{sup}(\omega a) = x_{sup}(\omega) \otimes \mu_{sup}(a) \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} x_{inf}(\varepsilon) = \alpha \\ x_{inf}(\omega a) = x_{inf}(\omega) \otimes \mu_{inf}(a) \end{cases} \quad (3.2)$$

avec  $\varepsilon$  est le mot vide et  $a \in \Sigma$ .

**Exemple 5 :** Soit l'automate à la figure 3.1

on applique les représentations 3.1 et 3.2 sur une séquence d'événement  $\omega = MMMH$

$$\alpha = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$\mu_{sup}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon & T & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & T & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \mu_{sup}(H) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$x_{sup}(\omega) = \alpha \otimes \mu_{sup}(M) \otimes \mu_{sup}(M) \otimes \mu_{sup}(M) \otimes \mu_{sup}(H)$$

$$x_{sup}(\omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & T \end{pmatrix}$$

$$\mu_{inf}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \mu_{inf}(H) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$x_{inf}(\omega) = \alpha \otimes \mu_{inf}(M) \otimes \mu_{inf}(M) \otimes \mu_{inf}(M) \otimes \mu_{inf}(H)$$

$$x_{inf}(\omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

### 3.2.3 Représentations sous la forme de séries formelles

De façon équivalente, le vecteur *des dateurs généralisés* peut s'écrire sous forme de séries formelles, soit :

$$x = \bigoplus_{\omega \in \Sigma^*} x(\omega) \omega$$

Ce vecteur s'écrit :

pour la borne supérieure, on aura :

$$x_{sup} = \alpha \otimes \mu_{sup}^* \tag{3.3}$$

avec :

$$\mu_{sup} = \bigoplus_{a \in \Sigma} \mu_{sup}(a) a$$

et

$$\mu_{sup}^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mu_{sup}^n.$$

-Pour la borne inférieure, on aura :

$$x_{inf} = \alpha \otimes \mu_{inf}^* \quad (3.4)$$

avec :

$$\mu_{inf} = \bigoplus_{a \in \Sigma} \mu_{inf}(a) a$$

et

$$\mu_{inf}^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mu_{inf}^n.$$

Où par convention  $\mu^0 = Id$  et  $\mu^n = \mu^{n-1} \otimes \mu$ .

### 3.3 Modélisation du comportement extrémal des ATGs

Dans cette section, nous introduisons de nouvelles représentations linéaires à fin de modéliser le comportement extrémal des ATGs.

#### 3.3.1 Représentations évaluant les dates d'achèvement

Soit la matrice  $A \in D^{|H| \times |H|}$  ( $D$  peut correspondre à  $\overline{\mathbb{R}}_{max}$ , ou  $\overline{\mathbb{R}}_{min}$ ) définie pour les indices  $j$  et  $k$  des transitions  $(p, a, q)$  et  $(r, a', s)$  dans  $H$  par :

$$A_{jk,sup} = \begin{cases} [\mu_{sup}(a')]_{rs} & s = p \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.5)$$

$$A_{jk,inf} = \begin{cases} [\mu_{inf}(a')]_{rs} & s = p \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.6)$$

On considère deux vecteurs  $x_{sup}(n) \in D^{|H| \times 1}$  et  $x_{inf}(n) \in D^{|H| \times 1}$  pour  $n \in \mathbb{N}$  définis par :

$$\begin{cases} x(1)_{(p,a,q)} = \alpha_p & (p, a, q) \in H \\ x_{sup}(n+1) = A_{sup} \otimes x_{sup}(n) & n \geq 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} x(1)_{(p,a,q)} = \alpha_p & (p, a, q) \in H \\ x_{inf}(n+1) = A_{inf} \otimes x_{inf}(n) & n \geq 1 \end{cases} \quad (3.8)$$

### 3.3.1.1 Dans l'algèbre (max,+)

**Proposition 1** Soient  $\bar{A}_{sup}$  et  $\bar{A}_{inf}$ ,  $\bar{x}_{inf}(n)$  et  $\bar{x}_{sup}(n)$ , définis respectivement par 3.5, 3.6 et 3.8, 3.7 pour  $D = \bar{\mathbb{R}}_{max}$ . Alors  $[\bar{x}_{inf}(n+1)_p, \bar{x}_{sup}(n+1)_p]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in Q$ , est l'intervalle d'achèvement maximum pour toutes les séquences de longueur  $n$  aboutissant à l'état  $p$ .

**Exemple 6 :** Soit l'automate représenté sur la figure suivant

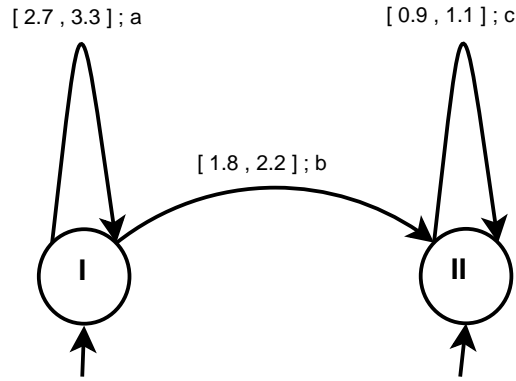


FIGURE 3.5 – Automate Temporisé avec Garde  $G_{3,3}$

$$\bar{A}_{sup} = \begin{pmatrix} 3.3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 3.3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2.2 & 1.1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{x}(n) = \begin{pmatrix} \bar{x}(n)_{(I,a,I)} \\ \bar{x}(n)_{(I,b,II)} \\ \bar{x}(n)_{(II,c,II)} \end{pmatrix}, \quad \bar{x}(1) = \begin{pmatrix} e \\ e \\ e \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_{sup}(n+1) = \bar{A}_{sup} \otimes \bar{x}(n), \quad \bar{x}_{sup}(n+1) = \begin{pmatrix} 3.3 \otimes \bar{x}(n)_{(I,a,I)} \\ 3.3 \otimes \bar{x}(n)_{(I,a,I)} \\ 2.2 \otimes \bar{x}(n)_{(I,b,II)} \oplus 1.1 \otimes \bar{x}(n)_{(II,c,II)} \end{pmatrix}$$

Le tableau 3.1, qui suit, contient les premières valeurs obtenues grâce à la récurrence 3.7 dans  $\bar{\mathbb{R}}_{max}$ .

$n$	1	2	3	4	5	...
$\bar{x}_{sup}(n)_{(I,a,I)}$	$e$	3.3	6.6	9.9	13.2	...
$\bar{x}_{sup}(n)_{(I,b,II)}$	$e$	3.3	6.6	9.9	13.2	...
$\bar{x}_{sup}(n)_{(II,c,II)}$	$e$	2.2	5.5	8.8	12.1	...

TABLE 3.1 – Les éléments de la représentation évaluant les dates d'achèvement  $\bar{x}_{sup}$  d'un ATG dans  $\bar{\mathbb{R}}_{max}$

$$\bar{A}_{inf} = \begin{pmatrix} 2.7 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2.7 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1.8 & 0.9 \end{pmatrix},$$

$$\bar{x}(n) = \begin{pmatrix} \bar{x}(n)_{(I,a,I)} \\ \bar{x}(n)_{(I,b,II)} \\ \bar{x}(n)_{(II,c,II)} \end{pmatrix}, \quad \bar{x}(1) = \begin{pmatrix} e \\ e \\ e \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_{inf}(n+1) = \bar{A}_{inf} \otimes \bar{x}(n), \quad \bar{x}_{inf}(n+1) = \begin{pmatrix} 2.7 \otimes \bar{x}(n)_{(I,a,I)} \\ 2.7 \otimes \bar{x}(n)_{(I,a,I)} \\ 1.8 \otimes \bar{x}(n)_{(I,b,II)} \oplus 0.9 \otimes \bar{x}(n)_{(II,c,II)} \end{pmatrix}$$

Le tableau 3.2, qui suit, contient les premières valeurs obtenues grâce à la récurrence 3.8 dans  $\bar{\mathbb{R}}_{max}$ .

$n$	1	2	3	4	5	...
$\bar{x}_{inf}(n)_{(I,a,I)}$	$e$	2.7	5.4	8.1	10.8	...
$\bar{x}_{inf}(n)_{(I,b,II)}$	$e$	2.7	5.4	8.1	10.8	...
$\bar{x}_{inf}(n)_{(II,c,II)}$	$e$	1.8	4.5	7.2	9.9	...

TABLE 3.2 – Les éléments de la représentation évaluant les dates d'achèvement  $\bar{x}_{inf}$  d'un ATG dans  $\bar{\mathbb{R}}_{max}$

Par exemple, les séquences possibles de longueur 4 et aboutissant à l'état II sont  $\{cccc, bccc, abcc, aabc, aaab\}$ .

$$\bar{x}_{sup}(cccc)_{II} = 4.4, \quad \bar{x}_{sup}(bccc)_{II} = 5.5, \quad \bar{x}_{sup}(abcc)_{II} = 7.7, \quad \bar{x}_{sup}(aabc)_{II} = 9.9, \quad \bar{x}_{sup}(aaab)_{II} = 12.1,$$

et donc

$$\sigma_{4,II;sup} = \{4.4, 5.5, 7.7, 9.9, 12.1\}.$$

D'autre part, on a :

$$H_{II} = \{(II, c, II)\}.$$

et

$$\bar{x}_{sup}(5)_{II} = \bar{x}_{sup}(5)_{(II,c,II)} = 12.1,$$

$$\bar{x}_{inf}(cccc)_{II} = 3.6, \bar{x}_{inf}(bccc)_{II} = 4.5, \bar{x}_{inf}(abcc)_{II} = 6.3, \bar{x}_{inf}(aabc)_{II} = 8.1, \bar{x}_{inf}(aaab)_{II} = 9.9,$$

et donc

$$\sigma_{4,II;inf} = \{3.6, 4.5, 6.3, 8.1, 9.9\}.$$

D'autre part, on a :

$$H_{II} = \{(II, c, II)\}.$$

et

$$\bar{x}_{inf}(5)_{II} = \bar{x}_{inf}(5)_{(II,c,II)} = 9.9,$$

$\bar{x}_{sup}(5)_{II}$  (*resp.*  $\bar{x}_{inf}(5)_{II}$ ) correspond à l'élément maximum de  $\sigma_{4,II;sup}$  (*resp.*  $\bar{x}_{inf}(5)_{II}$ ),  $[9.9; 12.1]$ , qui est l'intervalle d'achèvement maximum pour toutes les séquences de longueur 4 aboutissant à l'état II.

### 3.3.1.2 Dans l'algèbre $(\min, +)$

**Proposition 2** Soient  $\underline{A}_{sup}$  et  $\underline{A}_{inf}$ ,  $\underline{x}_{sup}(n)$  et  $\underline{x}_{inf}(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , définis respectivement par 3.6 et 3.5, 3.8 et 3.7 avec  $D = \overline{\mathbb{R}}_{min}$ . Alors  $[\underline{x}_{inf}(n+1)_p, \underline{x}_{sup}(n+1)_p]$   $n \in \mathbb{N}, p \in Q$ , est un minorant des intervalles d'achèvement des séquences de longueur  $n$  aboutissant à l'état  $p$ .

**Exemple 7 :** On applique les représentations 3.7 et 3.8 sur l'ATG représenté sur la figure 3.5

Le tableau 3.3, qui suit, contient les premières valeurs obtenues grâce à la récurrence 3.7 dans  $\overline{\mathbb{R}}_{min}$ .

$n$	1	2	3	4	5	...
$\underline{x}_{sup}(n)_{(I,a,I)}$	$e$	3.3	6.6	9.9	13.2	...
$\underline{x}_{sup}(n)_{(I,b,II)}$	$e$	3.3	6.6	9.9	13.2	...
$\underline{x}_{sup}(n)_{(II,c,II)}$	$e$	1.1	2.2	3.3	4.4	...

TABLE 3.3 – Les éléments de la représentation évaluant les dates d'achèvement  $\underline{x}_{sup}$  d'un ATG dans  $\overline{\mathbb{R}}_{min}$

Le tableau 3.4, qui suit, contient les premières valeurs obtenues grâce à la récurrence 3.8 dans  $\overline{\mathbb{R}}_{min}$ .

$n$	1	2	3	4	5	...
$\underline{x}_{inf}(n)_{(I,a,I)}$	$e$	2.7	5.4	8.1	10.8	...
$\underline{x}_{inf}(n)_{(I,b,II)}$	$e$	2.7	5.4	8.1	10.8	...
$\underline{x}_{inf}(n)_{(II,c,II)}$	$e$	0.9	1.8	2.7	3.6	...

TABLE 3.4 – Les éléments de la représentation évaluant les dates d'achèvement  $\underline{x}_{in}$  d'un ATG dans  $\overline{\mathbb{R}}_{min}$

Par exemple, les séquences possibles de longueur 4 et aboutissant à l'état II sont  $\{cccc, bccc, abcc, aabc, aaab\}$ .

$$\underline{x}_{sup}(cccc)_{II} = 4.4, \underline{x}_{sup}(bccc)_{II} = 5.5, \underline{x}_{sup}(abcc)_{II} = 7.7, \underline{x}_{sup}(aabc)_{II} = 9.9, \underline{x}_{sup}(aaab)_{II} = 12.1,$$

et donc

$$\sigma_{4,II;sup} = \{4.4, 5.5, 7.7, 9.9, 12.1\}.$$

D'autre part, on a :

$$H_{II} = \{(II, c, II)\}.$$

et

$$\underline{x}_{sup}(5)_{II} = \underline{x}_{sup}(5)_{(II,c,II)} = 4.4,$$

$$\underline{x}_{inf}(cccc)_{II} = 3.6, \underline{x}_{inf}(bccc)_{II} = 4.5, \underline{x}_{inf}(abcc)_{II} = 6.3, \underline{x}_{inf}(aabc)_{II} = 8.1, \underline{x}_{inf}(aaab)_{II} = 9.9,$$

et donc

$$\sigma_{4,II;inf} = \{3.6, 4.5, 6.3, 8.1, 9.9\}.$$

D'autre part, on a :

$$H_{II} = \{(II, c, II)\}.$$

et

$$\underline{x}_{inf}(5)_{II} = \underline{x}_{inf}(5)_{(II,c,II)} = 3.6,$$

$\underline{x}_{sup}(5)_{II}$  (*resp.*  $\underline{x}_{inf}(5)_{II}$ ) correspond à l'élément minimum de  $\sigma_{4,II;sup}$  (*resp.*  $\underline{x}_{inf}(5)_{II}$ ),  $[3.6; 4.4]$ , qui est l'intervalle d'achèvement maximum pour toutes les séquences de longueur 4 aboutissant à l'état II.

### 3.3.2 Représentations symétriques évaluant les dates d'achèvement

On a défini dans le chapitre 2,  $y(\omega) \in \overline{\mathbb{R}}_{max}$ ,  $\omega \in \Sigma^*$ , par :

$$y(\omega) = x(\omega)\beta$$

Où le vecteur  $\beta \in \mathbb{R}_{max}^{|Q| \times 1}$  spécifie des délais finaux ([7]),  $\beta_q \neq \varepsilon$  si  $q$  est un état final, et  $\beta_q$  désigne le délai associé à cet état, et  $y(\omega)$  est la durée d'achèvement de la séquence  $\omega$ .

On considère deux vecteurs  $x_{sup}(n) \in D^{|H| \times 1}$  et  $x_{inf}(n) \in D^{|H| \times 1}$  pour  $n \in \mathbb{N}$  définis par :

$$\begin{cases} x(1)_{(p,a,q)} = \beta_p & \text{pour tout } (p,a,q) \in H \\ x_{sup}(n+1) = A_{sup}^T \otimes x(n) & \text{pour } n \geq 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} x(1)_{(p,a,q)} = \beta_p & \text{pour tout } (p,a,q) \in H \\ x_{inf}(n+1) = A_{inf}^T \otimes x(n) & \text{pour } n \geq 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

#### 3.3.2.1 Dans l'algèbre (max, +)

**Proposition 3** Soient  $\overline{A}_{inf}$  et  $\overline{A}_{sup}$ ,  $\overline{x}_{inf}(n)$  et  $\overline{x}_{sup}(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , définis respectivement par 3.5,3.6 et 3.9,3.10 avec  $D = \overline{\mathbb{R}}_{max}$ . Alors  $[\bigoplus_{j \in H_p} \overline{x}_{inf}(n+1)_j, \bigoplus_{j \in H_p} \overline{x}_{sup}(n+1)_j]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in Q$ , est l'intervalle d'achèvement maximum pour les séquences de longueur  $n$  partant de  $p$ .

**Exemple 8** : soit l'automate suivant :

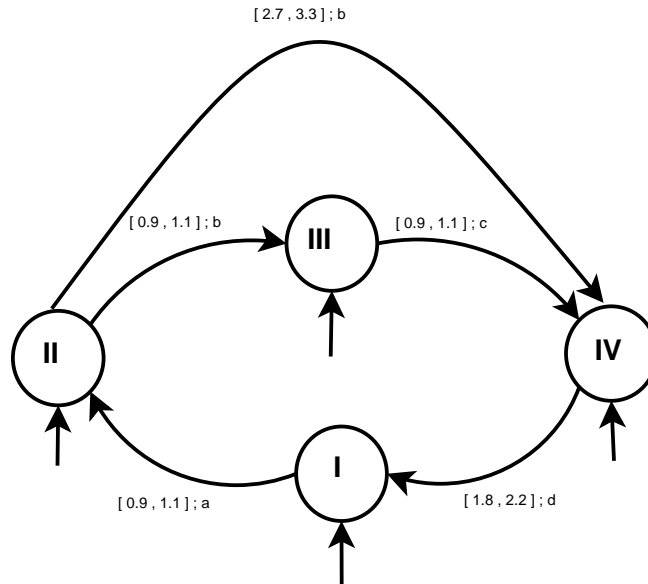


FIGURE 3.6 – Automate Temporisé avec Garde  $G_{3.4}$

$$\bar{A}_{sup} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2.2 \\ 1.1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1.1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1.1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 3.3 & 1.1 & \varepsilon \end{pmatrix}; \bar{A}_{sup}^T = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1.1 & 1.1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1.1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3.3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1.1 \\ 2.2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}(n) = \begin{pmatrix} x(n)_{(I,a,II)} \\ x(n)_{(II,b,III)} \\ x(n)_{(III,c,IV)} \\ x(n)_{(II,b,IV)} \\ x(n)_{(IV,d,I)} \end{pmatrix},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}(1) = \begin{pmatrix} e \\ e \\ e \\ e \\ e \end{pmatrix} \\ \bar{x}_{sup}(n+1) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1.1 & 1.1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1.1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3.3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1.1 \\ 2.2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \bar{x}(n) \end{array} \right.$$

Le tableau 3.5 contient les premières valeurs obtenues à l'aide de la récurrence 3.9 dans  $\bar{\mathbb{R}}_{max}$

$n$	1	2	3	4	5	...
$\bar{x}_{sup}(n)_{(I,a,II)}$	$e$	1.1	4.4	6.6	7.7	...
$\bar{x}_{sup}(n)_{(II,b,III)}$	$e$	1.1	2.2	4.4	5.5	...
$\bar{x}_{sup}(n)_{(III,c,IV)}$	$e$	3.3	5.5	6.6	9.9	...
$\bar{x}_{sup}(n)_{(II,b,IV)}$	$e$	1.1	3.3	4.4	7.7	...
$\bar{x}_{sup}(n)_{(IV,d,I)}$	$e$	2.2	3.3	6.6	8.8	...

TABLE 3.5 – Les éléments de la représentation symétrique évaluant les dates d'achèvement  $\bar{x}_{sup}$  d'un ATG dans  $\bar{\mathbb{R}}_{max}$

$$\bar{A}_{inf} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1.8 \\ 0.9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0.9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0.9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2.7 & 0.9 & \varepsilon \end{pmatrix}; \bar{A}_{inf}^T = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0.9 & 0.9 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0.9 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2.7 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0.9 \\ 1.8 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Le tableau 3.6 contient les premières valeurs obtenues à l'aide de la récurrence 3.10 dans  $\bar{\mathbb{R}}_{max}$

$n$	1	2	3	4	5	...
$\bar{x}_{inf}(n)_{(I,a,II)}$	$e$	0.9	1.8	5.4	6.3	...
$\bar{x}_{inf}(n)_{(II,b,III)}$	$e$	0.9	1.8	3.6	4.5	...
$\bar{x}_{inf}(n)_{(III,c,IV)}$	$e$	2.7	4.5	5.4	6.3	...
$\bar{x}_{inf}(n)_{(II,b,IV)}$	$e$	0.9	2.7	3.6	4.5	...
$\bar{x}_{inf}(n)_{(IV,d,I)}$	$e$	1.8	2.7	3.6	7.2	...

TABLE 3.6 – Les éléments de la représentation symétrique évaluant les dates d'achèvement  $\bar{x}_{inf}$  d'un ATG dans  $\bar{\mathbb{R}}_{max}$

Par exemple, l'intervalle d'achèvement maximum pour les séquences de longueur 2 qui partent de l'état II est :[2.7; 3.3]

$$\bigoplus_{j \in H_{II}} \bar{x}_{sup}(3) = \bar{x}_{sup}(3)_{(II,b,III)} \oplus \bar{x}_{sup}(3)_{(II,b,IV)} = 2.2 \oplus 3.3 = 3.3$$

$$\bigoplus_{j \in H_{II}} \bar{x}_{inf}(3) = \bar{x}_{inf}(3)_{(II,b,III)} \oplus \bar{x}_{inf}(3)_{(II,b,IV)} = 1.8 \oplus 2.7 = 2.7$$

### 3.3.2.2 Dans l'algèbre (min, +)

**Proposition 4** Soient  $\underline{A}_{inf}$  et  $\underline{A}_{sup}$ ,  $\underline{x}_{inf}(n)_j$  et  $\underline{x}_{sup}(n)_j$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , définis respectivement par 3.5,3.6 et 3.9,3.10 avec  $D = \bar{\mathbb{R}}_{min}$ . Alors  $[\bigoplus_{j \in H_p} \underline{x}_{inf}(n+1)_j, \bigoplus_{j \in H_p} \underline{x}_{sup}(n+1)_j]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in Q$ , est un minorant des intervalles d'achèvement des séquences de longueur  $n$  partant de  $p$ .

**Exemple 9 :** Reprenons l'automate de l'exemple précédent

Le tableau 3.7 contient les premières valeurs obtenues à l'aide de la récurrence 3.9 dans  $\bar{\mathbb{R}}_{min}$

$n$	1	2	3	4	5	...
$\underline{x}_{sup}(n)_{(I,a,II)}$	$e$	1.1	2.2	3.3	4.4	...
$\underline{x}_{sup}(n)_{(II,b,III)}$	$e$	1.1	2.2	4.4	6.6	...
$\underline{x}_{sup}(n)_{(III,c,IV)}$	$e$	3.3	5.5	7.7	12.1	...
$\underline{x}_{sup}(n)_{(II,b,IV)}$	$e$	1.1	3.3	5.5	9.9	...
$\underline{x}_{sup}(n)_{(IV,d,I)}$	$e$	2.2	4.4	8.8	8.8	...

TABLE 3.7 – Les éléments de la représentation symétrique évaluant les dates d'achèvement  $\underline{x}_{sup}$  d'un ATG dans  $\overline{\mathbb{R}}_{min}$

$$\underline{A}_{inf} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1.8 \\ 0.9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0.9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0.9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2.7 & 0.9 & \varepsilon \end{pmatrix}; \underline{A}_{inf}^T = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0.9 & 0.9 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0.9 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2.7 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0.9 \\ 1.8 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Le tableau 3.8 contient les premières valeurs obtenues à l'aide de la récurrence 3.10 dans  $\overline{\mathbb{R}}_{min}$

$n$	1	2	3	4	5	...
$\underline{x}_{inf}(n)_{(I,a,II)}$	$e$	0.9	1.8	2.7	4.5	...
$\underline{x}_{inf}(n)_{(II,b,III)}$	$e$	0.9	1.8	3.6	4.5	...
$\underline{x}_{inf}(n)_{(III,c,IV)}$	$e$	2.7	4.5	5.4	6.3	...
$\underline{x}_{inf}(n)_{(II,b,IV)}$	$e$	0.9	2.7	3.6	4.5	...
$\underline{x}_{inf}(n)_{(IV,d,I)}$	$e$	1.8	2.7	3.6	7.2	...

TABLE 3.8 – Les éléments de la représentation symétrique évaluant les dates d'achèvement  $\underline{x}_{inf}$  d'un ATG dans  $\overline{\mathbb{R}}_{min}$

L'intervalle d'achèvement minimum pour les séquences de longueur 2 qui partent de l'état II est  $:[1.8; 2.2]$

$$\bigoplus_{j \in H_1} \underline{x}_{sup}(3) = \underline{x}_{sup}(3)_{(I,a,II)} = 2.2$$

$$\bigoplus_{j \in H_1} \underline{x}_{inf}(3) = \underline{x}_{inf}(3)_{(I,a,II)} = 1.8$$

## Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre aux ATGs et à leurs comportements, nous avons proposés de nouvelles représentations linéaire à fin de modéliser le comportement des

ATGs, en utilisant l'algèbre des diïdes.

Le dernier chapitre, plus applicatif, s'appuiera sur les résultats de ce chapitre et du chapitre précédent pour présenter des éléments concourant à l'évaluation de performances des SEDs modélisés par des ATGs.

# Chapitre 4

## Évaluation des performances des SEDs

### Introduction

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à l'utilisation des représentations introduites dans le chapitre précédent pour l'évaluation de performances des SEDs.

Les deux premières sections portent sur les bornes concernant les durées d'achèvement des séquences et les sections 3 et 4 traitent de bornes sur les longueurs de séquences pouvant être achevées à une date donnée.

Afin d'illustrer les apports des résultats et démontrer leur applicabilité, ils sont mis en œuvre dans la dernière section pour l'étude d'un atelier jobshop<sup>1</sup>.

### 4.1 Calcul des bornes supérieures pour les dates d'achèvement

la durée d'achèvement maximum pour les séquences d'une longueur  $n$ , notée  $[l_{n,inf}^{worst}, l_{n,sup}^{worst}]$ , selon :

$$l_{n,sup}^{worst} = \bigoplus_{j \in H} [\bar{x}_{sup}(n+1)]_j = \bigoplus_{j \in H} [\bar{A}_{sup}^n \bar{x}(1)]_j \quad (4.1)$$

$$l_{n,inf}^{worst} = \bigoplus_{j \in H} [\bar{x}_{inf}(n+1)]_j = \bigoplus_{j \in H} [\bar{A}_{inf}^n \bar{x}(1)]_j \quad (4.2)$$

---

1. *Nom anglais qui désigne les ateliers à cheminements multiples dans lesquels les tâches successives des différents travaux requièrent des machines partagées selon des séquences possiblement dissemblables.*

Dans le chapitre 2, nous avons rappelé l'expression de la durée d'achèvement maximum pour les séquences de longueur  $n$  ( $l_n^{worst}$ ), qui a été introduite dans [7],

Dans cette partie, nous proposons une nouvelle représentation pour un intervalle donné ;

$$l_{n,sup}^{worst} = \bigoplus_{p \in Q} [\alpha M^n]_p$$

avec

$$M = \bigoplus_{a \in \Sigma} \mu_{sup}(a) \in \overline{\mathbb{R}}_{max}^{|\mathcal{Q}| \times |\mathcal{Q}|}$$

et

$$l_{n,inf}^{worst} = \bigoplus_{p \in Q} [\alpha M^n]_p$$

avec

$$M = \bigoplus_{a \in \Sigma} \mu_{inf}(a) \in \overline{\mathbb{R}}_{max}^{|\mathcal{Q}| \times |\mathcal{Q}|}$$

**Propriété :** Soient :

$A_{\bullet,k}$  la colonne de  $A$  d'indice  $k$ , avec  $k \in H$ ,

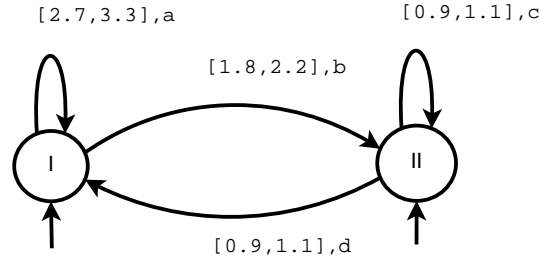
–  $H_k$  pour  $k = (r, a', s)$ , le sous-ensemble de  $H$  défini par  $H_k = \{(p, a, q) \in H, p = s\}$ , c'est-à-dire l'ensemble des transitions qui peuvent survenir consécutivement à la transition  $k$ .

–  $a_{\bullet,k}$  la valeur identique pour tous les éléments différents de  $\varepsilon$  dans la colonne  $A_{\bullet,k}$ .

$$[A_{sup}^n]_{\bullet,k} = \left[ \bigoplus_{j \in H_k} A_{\bullet,j;sup}^{n-1} \right] \otimes a_{\bullet,k} \text{ pour } n > 1 \quad (4.3)$$

$$[A_{inf}^n]_{\bullet,k} = \left[ \bigoplus_{j \in H_k} A_{\bullet,j;inf}^{n-1} \right] \otimes a_{\bullet,k} \text{ pour } n > 1 \quad (4.4)$$

**Exemple 1** Soit l'ATG illustré sur la figure 4.1


 FIGURE 4.1 – Automate Temporisé avec Garde  $G_{4,1}$ 

on a :

$$H = \{(I, a, I); (I, b, II); (II, c, II); (II, d, I)\}$$

et

$$A_{sup} = \begin{pmatrix} 3.3 & \varepsilon & \varepsilon & 1.1 \\ 3.3 & \varepsilon & \varepsilon & 1.1 \\ \varepsilon & 2.2 & 1.1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2.2 & 1.1 & \varepsilon \end{pmatrix}; A_{inf} = \begin{pmatrix} 2.7 & \varepsilon & \varepsilon & 0.9 \\ 2.7 & \varepsilon & \varepsilon & 0.9 \\ \varepsilon & 1.8 & 0.9 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1.8 & 0.9 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Soit  $k = (II, c, II)$

$$A_{(II, c, II); sup} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 1.1 \\ 1.1 \end{pmatrix}; A_{(II, c, II); inf} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 0.9 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

$$H_{(II, c, II)} = \{(II, c, II); (II, d, I)\}$$

$$a_{\bullet, (II, c, II); sup} = 1.1; a_{\bullet, (II, c, II); inf} = 0.9$$

Dans  $\overline{\mathbb{R}}_{max}$ , on obtient par exemple

$$\overline{A}_{sup}^3 = \begin{pmatrix} 9.9 & 6.6 & 5.5 & 7.7 \\ 9.9 & 6.6 & 5.5 & 7.7 \\ 8.8 & 5.5 & 4.4 & 6.6 \\ 8.8 & 5.5 & 4.4 & 6.6 \end{pmatrix}; \overline{A}_{inf}^3 = \begin{pmatrix} 8.1 & 5.4 & 4.5 & 6.3 \\ 8.1 & 5.4 & 4.5 & 6.3 \\ 7.2 & 4.5 & 3.6 & 5.4 \\ 7.2 & 4.5 & 3.6 & 5.4 \end{pmatrix}$$

On vérifie alors bien les relations 4.3 et 4.4 :

$$[\overline{A}_{sup}^4] = \left( \overline{A}_{\bullet,(\text{II},c,\text{II});sup}^3 \oplus \overline{A}_{\bullet,(\text{II},d,\text{I});sup}^3 \right) \otimes a_{\bullet,(\text{II},c,\text{II});sup}$$

$$[\overline{A}_{sup}^4] = \left( \left( \begin{pmatrix} 5.5 \\ 5.5 \\ 4.4 \\ 4.4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 7.7 \\ 7.7 \\ 6.6 \\ 6.6 \end{pmatrix} \right) \otimes 1.1 = \begin{pmatrix} 8.8 \\ 8.8 \\ 7.7 \\ 7.7 \end{pmatrix} \right)$$

$$[\overline{A}_{inf}^4] = \left( \overline{A}_{\bullet,(\text{II},c,\text{II});inf}^3 \oplus \overline{A}_{\bullet,(\text{II},d,\text{I});inf}^3 \right) \otimes a_{\bullet,(\text{II},c,\text{II});inf}$$

$$[\overline{A}_{inf}^4] = \left( \left( \begin{pmatrix} 4.5 \\ 4.5 \\ 3.6 \\ 3.6 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 6.3 \\ 6.3 \\ 5.4 \\ 5.4 \end{pmatrix} \right) \otimes 0.9 = \begin{pmatrix} 7.2 \\ 7.2 \\ 6.3 \\ 6.3 \end{pmatrix} \right)$$

Les relations sont également satisfaites dans  $\overline{\mathbb{R}}_{min}$ , on a :

$$\underline{A}_{sup}^3 = \begin{pmatrix} 6.6 & 4.4 & 3.3 & 4.4 \\ 6.6 & 4.4 & 3.3 & 4.4 \\ 6.6 & 4.4 & 3.3 & 4.4 \\ 6.6 & 4.4 & 3.3 & 4.4 \end{pmatrix}, \underline{A}_{inf}^3 = \begin{pmatrix} 5.4 & 3.6 & 2.7 & 3.6 \\ 5.4 & 3.6 & 2.7 & 3.6 \\ 5.4 & 3.6 & 2.7 & 3.6 \\ 5.4 & 3.6 & 2.7 & 3.6 \end{pmatrix}$$

$$[\underline{A}_{sup}^4] = \left( \overline{A}_{\bullet,(\text{II},c,\text{II});sup}^3 \oplus \overline{A}_{\bullet,(\text{II},d,\text{I});sup}^3 \right) \otimes a_{\bullet,(\text{II},c,\text{II});sup}$$

$$[\underline{A}_{sup}^4] = \left( \left( \begin{pmatrix} 3.3 \\ 3.3 \\ 3.3 \\ 3.3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4.4 \\ 4.4 \\ 4.4 \\ 4.4 \end{pmatrix} \right) \otimes 1.1 = \begin{pmatrix} 4.4 \\ 4.4 \\ 4.4 \\ 4.4 \end{pmatrix} \right)$$

$$[\underline{A}_{inf}^4] = \left( \overline{A}_{\bullet,(\text{II},c,\text{II});inf}^3 \oplus \overline{A}_{\bullet,(\text{II},d,\text{I});inf}^3 \right) \otimes a_{\bullet,(\text{II},c,\text{II});inf}$$

$$[\underline{A}_{inf}^4] = \left( \left( \begin{pmatrix} 2.7 \\ 2.7 \\ 2.7 \\ 2.7 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3.6 \\ 3.6 \\ 3.6 \\ 3.6 \end{pmatrix} \right) \otimes 0.9 = \begin{pmatrix} 3.6 \\ 3.6 \\ 3.6 \\ 3.6 \end{pmatrix} \right)$$

Dans  $\overline{\mathbb{R}}_{max}$ ,  $[\overline{x}_{inf}(n+1)_{(p,a,q)}; \overline{x}_{sup}(n+1)_{(p,a,q)}]$  donne l'intervalle le plus tardif à laquelle la

transition  $(p, a, q)$  peut survenir consécutivement à l'occurrence de  $n$  événements.

On peut alors affirmer que  $[\bar{x}_{inf}(n+1)_{(p,a,q)} + [\mu_{inf}(a)]_{pq}; \bar{x}_{sup}(n+1)_{(p,a,q)} + [\mu_{sup}(a)]_{pq}]$  est l'intervalle d'achèvement maximum pour les séquences de longueur  $(n+1)$  se terminant par l'événement  $a$  et aboutissant à l'état  $q$ .

On a donc la possibilité d'affiner l'indicateur (intervalle maximum d'achèvement pour une longueur de séquence donnée) en le spécifiant à des séquences se terminant par une sous-séquence d'événements  $\omega$  choisie. En effet,

$$\bar{x}_{sup}(n+1)_{(p,a,q)} + [\mu_{sup}(a)]_{pq} + [\mu_{sup}(\omega)]_{qr}$$

$$\bar{x}_{inf}(n+1)_{(p,a,q)} + [\mu_{inf}(a)]_{pq} + [\mu_{inf}(\omega)]_{qr}$$

permettent d'établir l'intervalle d'achèvement maximum pour les séquences de longueur  $n+1+|\omega|$  se terminant par la séquence  $a\omega$  et aboutissant à l'état  $r$ .

**Exemple 2** Prenons l'exemple de l'automate à la figure 3.6

$$\bar{x}_{sup}(4)_{(IV,d,I)} = 8.8; \bar{x}_{inf}(4)_{(IV,d,I)} = 7.2$$

$[7.2, 8.8]$  est l'intervalle d'achèvement maximum pour toutes les séquences de longueur 3 aboutissant à l'état I.

alors

$$\bar{x}_{sup}(4)_{(IV,d,I)} + [\mu_{sup}(d)]_{IV,I} = 8.8 + 2.2 = 11$$

$$\bar{x}_{inf}(4)_{(IV,d,I)} + [\mu_{inf}(d)]_{IV,I} = 7.2 + 1.8 = 9$$

$[9, 11]$  est l'intervalle d'achèvement maximum pour toutes les séquences de longueur 3 se terminant par l'événement  $d$  et aboutissant à l'état I.

## 4.2 Calcul des bornes inférieures pour les dates d'achèvement

Dans le chapitre 3, nous avons introduit une représentation qui permet d'obtenir l'intervalle d'achèvement minimum des séquences de longueur  $n$ , noté  $l_n^{opt}$ .

Dans  $\bar{\mathbb{R}}_{min}$ , à l'aide de cette représentation, on a :

$$l_{n,sup}^{opt} \geq \bigoplus_{j \in H} [\underline{x}_{sup}(n+1)]_j = \bigoplus_{j \in H} [A_{sup}^n \underline{x}(1)]_j \quad (4.5)$$

$$l_{n,inf}^{opt} \geq \bigoplus_{j \in H} [\underline{x}_{inf}(n+1)]_j = \bigoplus_{j \in H} [A_{inf}^n \underline{x}(1)]_j \quad (4.6)$$

Le minimum des durées d'achèvement pour les séquences de longueur  $n$  a été défini dans [7] comme suit :

$$l_n^{opt} = \min_{\omega \in \Sigma^n} \min_{p \in Q} [x(\omega)]_p$$

La procédure proposée dans [7] pour évaluer  $l_n^{opt}$  ne s'applique qu'aux automates  $(\max,+)$  déterministes.

Dans  $\overline{\mathbb{R}}_{min}$ ,  $[\underline{x}_{inf}(n+1)_{(p,a,q)} ; \underline{x}_{sup}(n+1)_{(p,a,q)}]$  minore la date à laquelle la transition  $(p,a,q)$  peut survenir consécutivement à  $n$  événements.

On peut alors affirmer que  $[\bar{x}_{inf}(n+1)_{(p,a,q)} + [\mu_{inf}(\omega)]_{pq} ; \bar{x}_{sup}(n+1)_{(p,a,q)} + [\mu_{sup}(\omega)]]$  est un minorant pour les intervalles d'achèvement des séquences de longueur  $(n + |\omega|)$  se terminant par la séquence  $\omega$  et aboutissant à l'état  $q$ .

**Exemple 3** Reprenons l'automate de la figure 4.1

$$\underline{x}_{sup}(3)_{(IV,d,I)} = 8.8; \underline{x}_{inf}(3)_{(IV,d,I)} = 3.6$$

$[7.2, 8.8]$  est l'intervalle d'achèvement maximum pour toutes les séquences de longueur 2 aboutissant à l'état I.

alors

$$\bar{x}_{sup}(3)_{(IV,d,I)} + [\mu_{sup}(d)]_{IV,I} = 8.8 + 2.2 = 11$$

$$\bar{x}_{inf}(3)_{(IV,d,I)} + [\mu_{inf}(d)]_{IV,I} = 3.6 + 1.8 = 5.4$$

$[9, 11]$  est l'intervalle d'achèvement maximum pour toutes les séquences de longueur 2, se terminant par l'événement  $d$  et aboutissant à l'état I.

### 4.3 Calcul des bornes supérieures pour les longueurs de séquences

La représentation introduite dans la Proposition 3, chapitre 2, permet de calculer un indicateur de performances qui permet d'évaluer le nombre maximum d'événements pouvant avoir lieu sur un intervalle de temps donné.

Dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$

$$\bigoplus_{j \in H} [\overline{z}(t)]_j$$

La valeur  $\overline{z}(t)_{(p,a,q)}$  majore les longueurs de séquences précédant la transition  $(p, a, q)$  et s'achevant avant, ou à, l'instant  $t$ .

Alors,  $\overline{z}(t)_{(p,a,q)} + 1$  est le majorant des longueurs de séquences se terminant par l'événement  $a$ , aboutissant à l'état  $q$  et s'achevant avant, ou à, l'instant  $t + [\mu(a)]_{pq}$ .

**Exemple 4** Dans l'exemple 10, chapitre 2, on a explicité la représentation de l'automate  $G_5$  (la figure 2.5) permettant d'évaluer les longueurs de séquences maximum s'achevant avant une date donnée.

$$\overline{z}(6)_{(III,c,IV)} = 5$$

Cette valeur correspond à la longueur maximum des séquences qui précèdent la transition  $(III,c,IV)$  et qui s'achèvent avant  $t=6$ .

Alors la longueur (non nulle) maximum des séquences se terminant par l'événement  $c$  et aboutissant à l'état IV avant, ou à, la date  $t=6$  est égale à 6.

### 4.4 Calcul des bornes inférieures pour les longueurs de séquences

Un indicateur de performance a été introduit dans [1] qui peut être assimilé à un compteur associé au comportement pire-cas, ce qui nous permet d'évaluer le nombre d'événements pouvant survenir sur un horizon de temps donné.

Un minorant pour les longueurs de séquences achevées à l'instant  $t$  est obtenu dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$  à l'aide de :

$$\bigoplus_{j \in H} [\underline{z}(t)]_j$$

$\underline{z}(t)_{(p,a,q)}$  minore les longueurs de séquences précédant la transition  $(p, a, q)$  et s'achevant avant, ou à, l'instant  $t$ .

On peut donc affirmer que  $\underline{z}(t)_{(p,a,q)} + 1$  minore les longueurs de séquences se terminant par l'événement  $a$ , aboutissant à l'état  $q$  et s'achevant avant, ou à, l'instant  $t + [\mu(a)]_{pq}$ .

**Exemple 5** Dans l'exemple 11, chapitre 2, on utilise la représentation qui évalue les longueurs s'achevant avant un instant  $t$  donné.

$$\underline{z}(6)_{(\text{III},c,\text{IV})} = 1$$

ce qui correspond à la longueur minimum des séquences aboutissant à l'état IV et s'achevant avant, ou à, la date  $t=6$ .

Il en résulte que la longueur minimum des séquences se terminant par l'événement  $c$  et aboutissant à l'état IV avant la date  $t=6$  est égale à 2.

## 4.5 Application

Dans cette section, nous illustrons les résultats de l'évaluation de performances, en les appliquant à un atelier Jobshop.

On considère un Jobshop (inspiré par l'exemple dans [7]) avec deux ressources R1, R2 exécutant deux types de jobs  $I_1, I_2$ .

Il y a 6 tâches élémentaires, notées  $a, b, c, d, e$  et  $f$ . La séquence de production pour le job  $I_1$  est  $abc$ , ce qui signifie que les tâches élémentaires  $a, b$  et  $c$  doivent être exécutées dans cet ordre afin d'achever la tâche  $I_1$ . La séquence de production pour le job  $I_2$  est  $def$ . Les ressources exécutent les tâches l'une après l'autre. Les tâches  $a$  et  $d$  (resp.  $c$  et  $f$ ) sont traitées en utilisant la ressource R<sub>1</sub> (resp. R<sub>2</sub>). Les deux ressources R<sub>1</sub> et R<sub>2</sub> sont nécessaires pour réaliser les tâches  $b$  et  $e$ . De plus, deux occurrences du même job ne peuvent pas être traitées simultanément.

On considère toutes les séquences possibles et un fonctionnement au plus tôt<sup>2</sup>, de plus, le système commence à fonctionner à la date 0.

---

2. On dit qu'un système à SED a un fonctionnement au plus tôt, si chaque événement survient dès qu'il est validé et que sa temporisation est écoulée

Le système peut être modélisé par le réseau de Petri temporisé de la figure 4.2

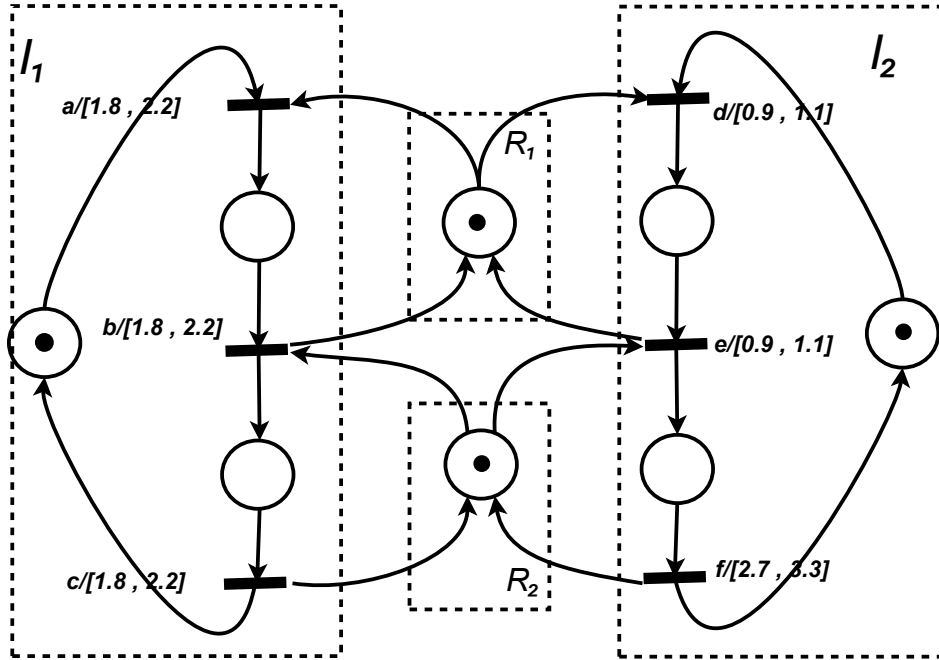


FIGURE 4.2 – Réseau de Petri représentant le jobshop

Ce réseau de Petri est uniquement proposé pour l'illustration (dans le but de clarifier les explications et fixer les idées) car le jobshop sera étudié à l'aide de l'ATG représenté sur la figure 4.3.

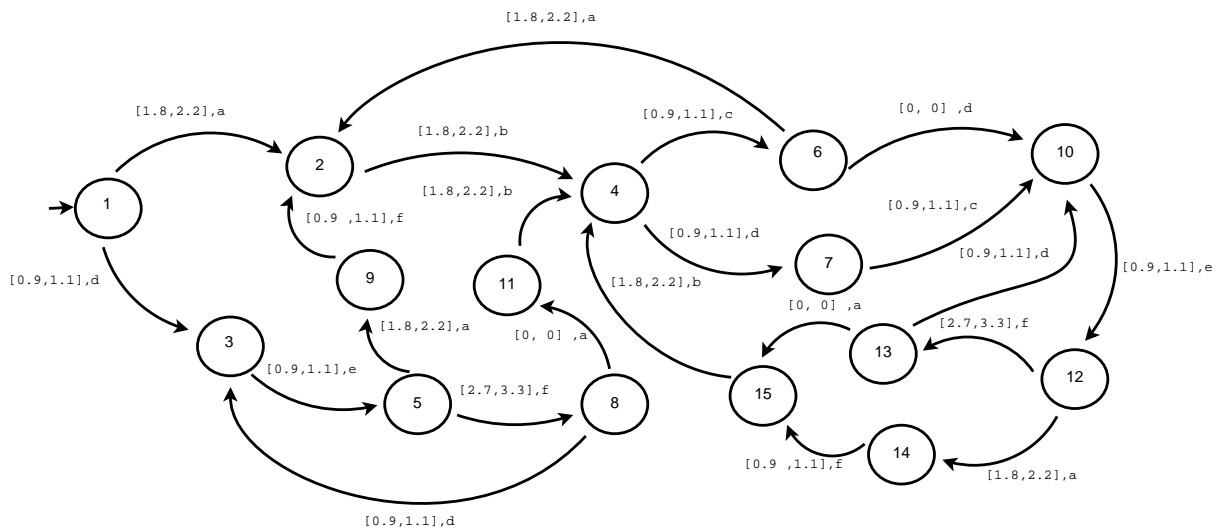


FIGURE 4.3 – L'ATG correspondant au RdP du jobshop







$$\bar{x}_{inf} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1.8 & \varepsilon & \varepsilon & 7.2 & \varepsilon & \varepsilon & 12.6 & \varepsilon & \varepsilon & 18 & \varepsilon & \varepsilon & 23.4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0.9 & \varepsilon & \varepsilon & 6.3 & \varepsilon & \varepsilon & 11.7 & \varepsilon & \varepsilon & 17.1 & \varepsilon & \varepsilon & 22.5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 3.6 & \varepsilon & \varepsilon & 9 & \varepsilon & \varepsilon & 14.4 & \varepsilon & \varepsilon & 19.8 & \varepsilon & \varepsilon & 25.2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 3.6 & \varepsilon & \varepsilon & 9 & \varepsilon & \varepsilon & 14.4 & \varepsilon & \varepsilon & 19.8 & \varepsilon & \varepsilon & 25.2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1.8 & \varepsilon & \varepsilon & 7.2 & \varepsilon & \varepsilon & 12.6 & \varepsilon & \varepsilon & 18 & \varepsilon & \varepsilon & 23.4 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1.8 & \varepsilon & \varepsilon & 7.2 & \varepsilon & \varepsilon & 12.6 & \varepsilon & \varepsilon & 18 & \varepsilon & \varepsilon & 23.4 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5.4 & \varepsilon & \varepsilon & 10.8 & \varepsilon & \varepsilon & 16.2 & \varepsilon & \varepsilon & 21.6 & \varepsilon & \varepsilon & 27 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5.4 & \varepsilon & \varepsilon & 10.8 & \varepsilon & \varepsilon & 16.2 & \varepsilon & \varepsilon & 21.6 & \varepsilon & \varepsilon & 27 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4.5 & \varepsilon & \varepsilon & 9.9 & \varepsilon & \varepsilon & 15.3 & \varepsilon & \varepsilon & 20.7 & \varepsilon & \varepsilon & 26.1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4.5 & \varepsilon & \varepsilon & 9.9 & \varepsilon & \varepsilon & 15.3 & \varepsilon & \varepsilon & 20.7 & \varepsilon & \varepsilon & 26.1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4.5 & \varepsilon & \varepsilon & 9.9 & \varepsilon & \varepsilon & 15.3 & \varepsilon & \varepsilon & 20.7 & \varepsilon & \varepsilon & 26.1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3.6 & \varepsilon & \varepsilon & 9 & \varepsilon & \varepsilon & 14.4 & \varepsilon & \varepsilon & 19.8 & \varepsilon & \varepsilon & 25.2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5.4 & \varepsilon & \varepsilon & 10.8 & \varepsilon & \varepsilon & 16.2 & \varepsilon & \varepsilon & 21.6 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4.5 & \varepsilon & \varepsilon & 9.9 & \varepsilon & \varepsilon & 15.3 & \varepsilon & \varepsilon & 20.7 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6.3 & \varepsilon & \varepsilon & 11.7 & \varepsilon & \varepsilon & 17.1 & \varepsilon & \varepsilon & 22.5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6.3 & \varepsilon & \varepsilon & 11.7 & \varepsilon & \varepsilon & 17.1 & \varepsilon & \varepsilon & 22.5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9 & \varepsilon & \varepsilon & 14.4 & \varepsilon & \varepsilon & 19.8 & \varepsilon & \varepsilon & 25.2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9 & \varepsilon & \varepsilon & 14.4 & \varepsilon & \varepsilon & 19.8 & \varepsilon & \varepsilon & 25.2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8.1 & \varepsilon & \varepsilon & 13.5 & \varepsilon & \varepsilon & 18.9 & \varepsilon & \varepsilon & 24.3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9 & \varepsilon & \varepsilon & 14.4 & \varepsilon & \varepsilon & 19.8 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Nous étudions le comportement pire cas du jobshop, ainsi le résultat de la proposition 1 du chapitre 3 :

$$\bigoplus_{j \in H_6 \cup H_8 \cup H_{13}} [\bar{x}_{sup}(n+1)]_j$$

$$\bigoplus_{j \in H_6 \cup H_8 \cup H_{13}} [\bar{x}_{inf}(n+1)]_j$$

donne les dates maximum auxquelles le système peut achever un nombre de jobs donnée. Par exemple, on obtient pour 5 jobs (n = 15) :

$$\bigoplus_{j \in H_6 \cup H_8 \cup H_{13}} [\bar{x}_{sup}(16)]_j = 33$$

$$\bigoplus_{j \in H_6 \cup H_8 \cup H_{13}} [\bar{x}_{inf}(16)]_j = 27$$

ce qui signifie que le temps d'exécution maximum pour 5 jobs est compris entre 27 et 33

unités de temps. Ceci correspond à l'intervalle du makespan<sup>3</sup> du pire ordonnancement.

4.5.1.2 Dans  $\overline{\mathbb{R}}_{min}$

$$\underline{x}_{sup} = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2.2 & \varepsilon & \varepsilon & 5.5 & \varepsilon & \varepsilon & 12.1 & \varepsilon & \varepsilon & 16.6 & \varepsilon & \varepsilon & 20.9 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1.1 & \varepsilon & \varepsilon & 7.7 & \varepsilon & \varepsilon & 14.3 & \varepsilon & \varepsilon & 20.9 & \varepsilon & \varepsilon & 27.5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4.4 & \varepsilon & \varepsilon & 7.7 & \varepsilon & \varepsilon & 12.2 & \varepsilon & \varepsilon & 16.5 & \varepsilon & \varepsilon & 20 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4.4 & \varepsilon & \varepsilon & 7.7 & \varepsilon & \varepsilon & 12.2 & \varepsilon & \varepsilon & 16.5 & \varepsilon & \varepsilon & 20 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2.2 & \varepsilon & \varepsilon & 8.8 & \varepsilon & \varepsilon & 15.4 & \varepsilon & \varepsilon & 22 & \varepsilon & \varepsilon & 28.6 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2.2 & \varepsilon & \varepsilon & 8.8 & \varepsilon & \varepsilon & 15.4 & \varepsilon & \varepsilon & 22 & \varepsilon & \varepsilon & 28.6 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6.6 & \varepsilon & \varepsilon & 9.9 & \varepsilon & \varepsilon & 14.4 & \varepsilon & \varepsilon & 18.7 & \varepsilon & \varepsilon & 22.2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6.6 & \varepsilon & \varepsilon & 9.9 & \varepsilon & \varepsilon & 14.4 & \varepsilon & \varepsilon & 18.7 & \varepsilon & \varepsilon & 22.2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5.5 & \varepsilon & \varepsilon & 8.8 & \varepsilon & \varepsilon & 13.3 & \varepsilon & \varepsilon & 17.6 & \varepsilon & \varepsilon & 21.1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5.5 & \varepsilon & \varepsilon & 12.1 & \varepsilon & \varepsilon & 18.7 & \varepsilon & \varepsilon & 25.3 & \varepsilon & \varepsilon & 31.9 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5.5 & \varepsilon & \varepsilon & 12.1 & \varepsilon & \varepsilon & 18.7 & \varepsilon & \varepsilon & 25.3 & \varepsilon & \varepsilon & 31.9 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4.4 & \varepsilon & \varepsilon & 11 & \varepsilon & \varepsilon & 17.6 & \varepsilon & \varepsilon & 24.2 & \varepsilon & \varepsilon & 30.8 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6.6 & \varepsilon & \varepsilon & 9.9 & \varepsilon & \varepsilon & 14.4 & \varepsilon & \varepsilon & 18.7 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5.5 & \varepsilon & \varepsilon & 12.1 & \varepsilon & \varepsilon & 18.7 & \varepsilon & \varepsilon & 25.3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7.7 & \varepsilon & \varepsilon & 11 & \varepsilon & \varepsilon & 15.5 & \varepsilon & \varepsilon & 19.8 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7.7 & \varepsilon & \varepsilon & 11 & \varepsilon & \varepsilon & 15.5 & \varepsilon & \varepsilon & 19.8 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 11 & \varepsilon & \varepsilon & 14.3 & \varepsilon & \varepsilon & 18.8 & \varepsilon & \varepsilon & 23.1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 11 & \varepsilon & \varepsilon & 14.3 & \varepsilon & \varepsilon & 18.8 & \varepsilon & \varepsilon & 23.1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9.9 & \varepsilon & \varepsilon & 13.2 & \varepsilon & \varepsilon & 17.7 & \varepsilon & \varepsilon & 22 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 11 & \varepsilon & \varepsilon & 14.3 & \varepsilon & \varepsilon & 18.8 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

---

3. Terme anglais utilisé dans le domaine de l'ordonnancement d'ateliers pour désigner le temps total nécessaire pour élaborer tous les produits en quantités requises.











4.5.2.1 Dans  $\bar{Z}_{max}$

$$\bar{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 7 & 7 & 7 & 7 & 10 & 10 & 10 & 10 & 13 & 13 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 7 & 7 & 7 & 7 & 10 & 10 & 10 & 10 & 13 & 13 & 13 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 8 & 8 & 8 & 11 & 11 & 11 & 11 & 14 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 8 & 8 & 8 & 11 & 11 & 11 & 11 & 14 \\ \varepsilon & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 11 & 11 & 11 \\ \varepsilon & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 11 & 11 & 11 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 3 & 3 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 9 & 9 & 9 & 12 & 12 & 12 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 3 & 3 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 9 & 9 & 9 & 12 & 12 & 12 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 9 & 9 & 9 & 12 & 12 & 12 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 9 & 9 & 9 & 9 & 12 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 9 & 9 & 9 & 9 & 12 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 10 & 10 & 10 & 13 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 10 & 10 & 10 & 13 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & 5 & 5 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 11 & 11 & 11 & 14 & 14 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & 5 & 5 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 11 & 11 & 11 & 14 & 14 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & 6 & 6 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 12 & 12 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & 6 & 6 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 12 & 12 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & 6 & 6 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 12 & 12 & 15 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 & 7 & 7 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 13 & 13 \end{pmatrix}$$

On décrit le comportement optimal du jobshop car on évalue, grâce au résultat de la proposition 3, chapitre 2 :

$$\bigoplus_{j \in H_6 \cup H_8 \cup H_{13}} [\bar{z}(t)]_j$$

le nombre maximum de jobs qui peuvent être exécutés jusqu'à une date  $t$  donnée. Par exemple, on obtient pour  $t=20$  :

$$\bigoplus_{j \in H_6 \cup H_8 \cup H_{13}} [\bar{z}(20)]_j = 14$$

Ce résultat signifie que 14 tâches peuvent être achevés avant l'instant 20.

4.5.2.2 Dans  $\bar{Z}_{min}$

$$\underline{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \varepsilon & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \varepsilon & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Grâce au résultat de la proposition 4, chapitre :

$$\bigoplus_{j \in H_6 \cup H_8 \cup H_{13}} [z(t)]_j$$

on décrit le pire comportement du jobshop car on évalue le nombre minimum de jobs qui peuvent être exécutés jusqu'à une date donnée.

Par exemple :

$$\bigoplus_{j \in H_6 \cup H_8 \cup H_{13}} [z(6)]_j = 3$$

Ce résultat signifie qu'à partir de l'instant 6, le nombre minimum de tâches réalisées est égal à 3, c'est-à-dire, un job.

## Conclusion

Dans ce chapitre, on a explicité des indicateurs de performance proposés au chapitre 2 et 3.

En premier lieu, on a mis en avant comment évaluer la durée d'achèvement maximum et minimum pour les séquences d'une longueur donnée.

On a ensuite exploité les représentations du chapitre 2 pour calculer les longueurs des séquences.

Enfin, nous avons illustré et interprété les indicateurs de performances en les appliquant à un ateliers Jobshop.

# Conclusion générale

On a introduit dans ce mémoire une méthodologie permettant l'évaluation des performances des automates temporisés avec gardes en utilisant l'algèbre Max-Plus.

Dans un premier temps, nous avons présenté les différentes représentations connues dans la littérature concernant plus précisément la théorie des automates pondérés dans l'algèbre  $(\max, +)$ , appelés automates  $(\max, +)$ . L'utilisation de cet outil de modélisation nous a permis d'obtenir des résultats dans le domaine de l'évaluation de performances.

Ensuite nous avons présenté une nouvelle modélisation formelle des automates temporisés avec des gardes (ATGs) par l'algèbre de dioïdes, des représentations du comportement extrémal. Ces représentations sont appliquées sur un système jobshop pour évaluer les performances.

Dans les travaux futurs, une extension du formalisme aux systèmes à horloges multiples pourrait être envisagée.

# Bibliographie

- [1] R. Boukra « Contributions à la modélisation, l'évaluation de performances et la commande des systèmes à événements discrets », thèse de doctorat, Université d'Angers, France, 2013.
- [2] S. Lahaye, J. Komenda, and J.-L. Boimond. Compositions of  $(\max,+)$  automata. In International Workshop on Discrete Event Systems (WODES 2012), Guadalajara, 2012.
- [3] Stéphane GAUBERT, « Introduction aux systèmes dynamiques à événements discrets », France, 1999.
- [4] Othman NASRI, « Propriétés Spectrales des Fonctions  $(\min, \max,+)$ , rapport de recherche, LISA, Angers, France, 2004.
- [5] I. Klimann, S. Lombardy, J. Mairesse et C. Prieur. Deciding unambiguity and sequentiality from a finitely ambiguous max-plus automaton. *Theor. Comput. Sci.*, vol. 327, 2004.
- [6] D. Kirsten et S. Lombardy. Deciding Unambiguity and Sequentiality of Polynomially Ambiguous Min-Plus Automata. In 26th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2009), pages 589–600, 2009.
- [7] S. Gaubert. Performance Evaluation of  $(\max,+)$  Automata. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, no. 12, pages 2014–2025, 1995.
- [8] F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder and J.-P. Quadrat, *Synchronization and Linearity (Vol 2)*, New York : Wiley, 1992.
- [9] Rong Su et Gerhard J. Woeginger. String execution time for finite languages : Max is easy, min is hard. *Automatica*, vol. 47, no. 10, pages 2326– 2329, 2011.
- [10] J. Komenda, S. Lahaye et J.-L. Boimond. Supervisory Control of  $(\max,+)$  Automata : A Behavioral Approach. *Discrete Event Dynamic Systems*, vol. 19, no. 4, pages 525–549, 2009.
- [11] J. Komenda, S. Lahaye, J.-L. Boimond. Controllability of  $(\max,+)$  Formal Power Series. IFAC Workshop on Dependable Control of Discrete Systems (DCDS), 2009, Bari, Italy.

- [12] M.-P. Béal, E. Czeizler, J. Kari et D. Perrin. Unambiguous automata. *Mathematics in Computer Science*, vol. 1, no. 4, pages 625–638, 2008.
- [13] Alur, R. and D.L. Dill. A theory of timed automata. *Theoretical Computer Science*, 126 :183{235, 1994.
- [14] Baccelli, F., G. Cohen, G.J. Olsder, and J.P. Quadrat. *Synchronization and Linearity. An Algebra for Discrete Event Systems*. Wiley.
- [15] Cohen, G., S. Gaubert, and J.P. Quadrat. From rst to second order theory of linear discrete event systems. In *Proceedings of the 12th IFAC World Conference*, volume 3, pages 331{334, Sidney, Australia, 1993.
- [16] Lafortune, S. and F. Lin. On tolerable and desirable behaviors in supervisory control of discrete event systems. *Discrete Event Dynamical Systems : Theory and Applications*, 1 :61{92, 1991.
- [17] Laurant Libeaut and J.J.Loiseau , commande de SED, théorie des langages commandables, France.
- [18] Niguez J., S. Amari and J.-M. Faure, « Analysis of timed automata with guards in dioids algebra ». 13th International Workshop on Discrete Event Systems (WODES'16), Xi'an, China. pp. 391 – 397. May 30 - June 1, 2016.
- [19] R. Alur, C. Courcoubetis and D. Dill, “Model-checking for realtime systems”, in *Proceedings of 5th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science, LICS'90*, pages 414-425, 1990.
- [20] S. Lahaye, J. Komenda et J.-L. Boimond. Modeling of timed Petri nets using deterministic (max,+) automata. *Rapport de recherche, LISA, Angers, France*, 2013.
- [21] L. Houssin, S. Lahaye, and J.-L. Boimond. Commande en juste-à-temps sous contraintes de systèmes (max,+)-linéaires. *Special issue of Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA)*, 39 :335–350, 2005.
- [22] J. Komenda, S. Lahaye, and J.-L. Boimond. Commande supervisée des automates (max,+). In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA 2010)*, Nancy, France, Juin 2010.
- [23] P. J. G. Ramadge et W. M. Wonham. Supervisory Control of a Class of Discrete Event Processes. *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 25, no. 1, pages 206–230, 1987.
- [24] P. J. G. Ramadge et W. M. Wonham. The control of discrete event systems. *Proceedings of The IEEE*, vol. 77, pages 81–98, 1989.