

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Spécialité

Mathématiques

Option

Probabilités et Statistique

Thème

Sur les processus de branchement uni et multi-types et leurs applications

Présenté par

AMEUR Koussaila

Sous la direction de

M^{me} MERABET Dalila

Devant le jury

BOUALAM	Karima	UMMTO	Présidente
MERABET	Dalila	UMMTO	Rapportrice
GRAICHE	Farid	UMMTO	Examineur

Remerciements

Je tiens d'abord à exprimer ma profonde gratitude et mes sincères reconnaissances à Madame MERABET Dalila pour sa disponibilité et son aide précieux tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Je remercie Madame BOUALAM Karima pour avoir accepté de présider le jury qui examinera ce travail. J'adresse également mes vifs remerciements à Monsieur GRAICHE

Farid pour avoir accepté de faire partie du jury de ce mémoire.

Je voudrais aussi remercier vivement l'ensemble de mes professeurs qui m'ont accompagné durant mon cursus universitaire.

Je remercie mes amis (es), ma famille et tous ceux et celles qui ont contribué à la réussite de ce travail.

Dédicaces

Je tiens à dédier ce travail

A mes très chers parents pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes études et pour leurs sacrifices et soutien durant tout mon parcours. Je le dédie aussi à l'ensemble des membres de ma famille et mes amis.

Table des matières

Introduction	1
1 Le processus de Galton-Watson uni-type	4
1.1 Introduction	4
1.2 Définition et propriétés	4
1.2.1 Le processus vu comme une chaîne de Markov	5
1.2.2 Fonction génératrice de Z_n	6
1.2.3 Le processus vu comme une Martingale	9
1.2.4 Le processus de Galton-Watson vu comme un arbre	10
1.3 Probabilité d'extinction	13
1.4 Comportement asymptotique du processus de Galton-Watson	22
1.4.1 Cas sous-critique (Analyse fine de l'extinction)	25
1.5 Distributions quasi-stationnaires et limite de Yaglom	28
1.5.1 Distributions quasi-stationnaires	29
1.6 Processus de Galton-Watson et marche aléatoire	31
1.6.1 Processus de contour	31
1.7 Processus de Galton-Watson avec immigration	35
2 Le processus de Galton-Watson multi-type	39
2.1 Introduction	39
2.2 Définition et exemple	39
2.3 Fonction génératrice	40
2.3.1 Moments d'ordre 1	41
2.3.2 Moments d'ordre 2	43
2.4 Régularité positive et singularité	43

TABLE DES MATIÈRES

2.5	Etats transitoires	44
2.6	Extinction de la population	46
2.7	Théorèmes limites	50
2.7.1	Cas sous-critique	50
2.7.2	Cas critique	52
2.7.3	Cas sur-critique	53
3	Un modèle épidémique par branchement multiple	55
3.1	Introduction	55
3.2	Modèle de base	56
3.3	Analyse du modèle de base	58
3.4	Modèle étendu	59
3.5	Application : épidémie de COVID-19 en Inde	60
3.6	Conclusion	63
	Conclusion	63
	Bibliographie	64

Introduction

La dynamique des populations étudie la répartition et le développement quantitatif de populations d'individus. Elle s'intéresse aux problèmes d'extinction d'une population ou à l'existence d'un éventuel état stationnaire. Elle étudie également les interactions entre différentes espèces.

Les processus de branchement sont des modèles fondamentaux en dynamique des populations. Un processus de branchement est un processus aléatoire, qui décrit l'évolution d'une ou plusieurs populations, comme les génotypes en génétique ou le type de particules, électrons, protons en physique, chacune composée d'un certain nombre d'individus spécifiques. Chaque individu d'une génération peut donner naissance à de nouveaux individus, selon des règles précisées par des distributions de probabilités spécifiques. Les processus de branchement concernent le suivi de l'évolution de la taille d'une population, dans laquelle les individus se reproduisent indépendamment. De ce fait, les processus de branchement sont des approches théoriques bien adaptées pour modéliser des dynamiques que l'on observe dans différents domaines d'application, ils interviennent

- En biologie (par exemple : cinétique des cellules, croissance bactériologique, réplication de l'ADN...) voir [5,6,7,13,23].
- En génétique des populations, en considérant l'héritage des allèles.
- En astrophysique, où par exemple les rayons cosmiques, qui impliquent à la fois des électrons et des photons en interaction, ont été étudiés dans [29].
- En épidémiologie (voir [19]), pour l'étude de l'évolution de la propagation de maladies infectieuses.

Ces processus constituent actuellement une branche importante dans la théorie des processus stochastique. D'une part, les questions mathématiques qu'ils soulèvent sont nombreuses et très riches de nouveaux concepts, et d'autre part ont des domaines d'application qui ne

cessent de s'élargir.

Les processus de branchement ont débuté en considérant le temps de façon discrète. Ils sont appelés processus de Galton-Watson, ou processus de Bienaymé-Galton-Watson. Ils ont été motivé à l'origine par l'étude de la probabilité d'extinction des noms de familles illustres en Grande-Bretagne. En 1845, Bienaymé [8], probabiliste et statisticien français, a considéré le problème d'extinction de la famille bien avant que Galton et Watson, en 1873 [15,38] ne le fassent connaître, et en trouvent la solution. Ils ont utilisé pour cela les fonctions génératrices.

Les processus de branchement en temps continu ont été introduits plus tardivement, par McKendrick en 1914 et surtout par Yule [41] en 1924 qui développe de manière détaillée un modèle mathématique de l'évolution des espèces en temps continu. Pour plus de détails sur ces premiers travaux, nous renvoyons au livre "Histoire des mathématiques et de la population de N.Bacaer [3]". Depuis cette époque, l'étude des processus de branchement en temps continu continue à se développer et beaucoup de questions, dont beaucoup sont liées à des problématiques biologiques, sont posées et non résolues.

L'étude du processus de Galton-Watson peut être considérablement raffiné. Le modèle lui même peut être enrichi et modifié afin de tenir compte de diverses situations d'intérêt (existence de types différents, survivance des individus à plusieurs générations, etc.).

Si l'on suppose qu'en plus du mécanisme de reproduction dans le processus de branchement, des individus (immigrants) peuvent arriver à chaque pas de temps de façon i.i.d, on obtient un processus de Galton-Watson avec immigration.

Il est intéressant du point de vu pratique de considérer la dynamique d'une population composée de sous-populations d'individus de types différents. Le type d'un individu est défini comme un attribut (ou un ensemble d'attributs). Des exemples classiques de tels types sont la taille à la naissance, le sexe, le génotype de l'individu. Le type peut affecter la distribution du nombre de descendants. Les distributions de descendance seront donc différentes.

Les processus de branchement multi-types sont des modèles stochastiques appropriés pour décrire le système dynamique de population en interaction, ainsi que certaines dynamiques en physique de particules. Ils jouissent d'un large éventail d'applications qui recouvrent des domaines aussi variés que la biologie (voir [34,39,23]), l'épidémiologie, la démographie, mais aussi la chimie et la physique des particules.

On trouvera de nombreux développements mathématiques concernant les processus de branchement dans les livres de Theodore Harris [18], de Krishna Athreya et Peter Ney [2], de Haccou Patsy, Jagers Peter, Vatutin Vladimir [37] et de C.J Mode [28].

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude des processus de branchement de Galton-Watson uni-type et multi-types. Au premier chapitre, nous présentons les différentes notions, propriétés, définitions et concepts de base de la théorie des processus de branchement uni-type en temps discret, la fonction génératrice étant l'outil principal pour calculer certains événements associés au processus, ou pour calculer les moments d'intérêt quand ils existent, tels que la moyenne et la variance.

Le chapitre 2 est consacré au cas multi-type. Dans ces modèles, une particule de type donné peut avoir des descendants de plusieurs types différents. La généralisation des résultats du chapitre 1 au cas multi-type utilise des méthodes très proches : la fonction génératrice jouera le même rôle fondamental.

Dans le troisième chapitre, nous présentons une application en épidémiologie, basée sur le processus multi-type.

Nous terminons ce mémoire par une conclusion et on ouvre quelques perspectives à ce travail.

Chapitre 1

Le processus de Galton-Watson uni-type

1.1 Introduction

Le processus de Galton-Watson, qui appartient à la famille des processus de branchement, est un modèle simple qui décrit l'évolution d'une population au fil des générations. Il se caractérise par le fait que chaque individu dans la population se reproduit indépendamment des autres individus avec une probabilité p appelée loi de reproduction. Le passage de la génération n à la génération $n + 1$ se fait de la manière suivante : les individus de la génération n donnent naissance à un nombre aléatoire d'enfants de loi p puis meurent.

1.2 Définition et propriétés

On considère une mesure de probabilité ($p = p_k, k \geq 0$) sur \mathbb{N} , et une famille dénombrable $(\xi_{n,i}, n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}^*)$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (v.a.i.i.d.) de loi \mathbf{p} .

On se donne également une v.a Z_0 indépendante de la famille $(\xi_{n,i})$.

Définition 1.1. [11]

Le processus de Galton-Watson est la suite de v.a $(Z_n, n \geq 0)$ définie par :

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{n,i}, \quad \forall n \geq 0 \quad (1.1)$$

Avec Z_0 est la taille de la population initiale, et chaque individu vivant à la date n donne

naissance à un nombre d'enfants de loi \mathbf{p} indépendant des autres individus. \mathbf{p} est appelée loi de reproduction, et Z_n représente le nombre d'individus vivants à la génération n .

1.2.1 Le processus vu comme une chaîne de Markov

Commençons par quelques rappels sur les chaînes de Markov.

Définition 1.2. [27]

Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans \mathbb{Z} est dite chaîne de Markov si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $j, i_0, \dots, i_n \in \mathbb{N}$, tel que $P(X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) > 0$, on a

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n).$$

La chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite homogène si

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) \dots = P(X_1 = j \mid X_0 = i) = P_{i,j}.$$

$P_{i,j}$ est appelée probabilité de transition de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$P = P_{i,j}$ est la matrice de transition associée à $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Revenons au processus de Galton-Watson.

L'évolution du processus $(Z_n, n \geq 0)$ vers la génération $n+1$ ne dépend pas de la génération n .

Proposition 1.1. [11]

Le processus de Galton-Watson (Z_n) de la définition 1.1 est une chaîne de Markov à valeurs dans \mathbb{N} de matrice de transition P définie par :

$$P = (p_{ij}, i, j \geq 0), \quad \text{où } p_{ij} = p_j^{*i}, \quad (1.2)$$

où $\mathbf{p}^{*k} = (p_j^{*k}, j \geq 0)$ désigne la puissance k -ième de convolution de la loi \mathbf{p} , caractérisée par

$$p_\ell^{*k} = \sum_{\substack{\ell_1 \dots \ell_k \in \mathbb{N} \\ \ell_1 + \dots + \ell_k = \ell}} \prod_{i=1}^k p_{\ell_i} \quad \forall \ell \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

La démonstration de ce résultat découle du lemme suivant, qui est une caractérisation pratique des chaînes de Markov.

Lemme 1.1. [11]

Soit $(\mathbb{U}, \mathcal{U})$ un espace mesurable quelconque. Soit un processus $(Z_n, n \geq 0)$ à valeurs dans \mathbb{N} défini par une v.a $Z_0 \in \mathbb{N}$ et la relation de récurrence

$$Z_{n+1} = F(Z_n, U_n), \tag{1.4}$$

où $F : \mathbb{N} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction mesurable et $(U_n, n \geq 0)$ est une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans \mathbb{U} , indépendante de Z_0 . Alors $(Z_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov.

Démonstration de la proposition 1.1. Le processus $(Z_n, n \geq 0)$ satisfait la relation de récurrence $Z_{n+1} = F(Z_n, U_n)$ avec $U_n = (\xi_{n,i}, i \geq 1)$ et $F(n, u) = \sum_{i=1}^n U_n = \sum_{i=1}^n \xi_{n,i}$, donc c'est une chaîne de Markov grâce au lemme précédent.

La probabilité de transition de i vers j est donnée d'après la preuve du lemme 1.1 par

$$p_{ij} = P(F(i, U_0) = j) = P\left(\sum_{k=1}^i \xi_{0,k} = j\right) = p_j^{*i}.$$

Remarque.

Une propriété immédiate, mais fondamentale, est que 0 est un état absorbant : si $Z_n = 0$, alors $Z_{n+1} = 0$.

Proposition 1.2. [27]

Si $P(1) = 1$, tous les états sont absorbants.

Si $P(1) < 1$, tous les états non nuls sont transitoires.

1.2.2 Fonction génératrice de Z_n

La fonction génératrice joue un rôle important dans l'étude du processus Galton-Watson. Nous commençons par rappeler quelques propriétés de base des fonctions génératrices.

Etude de la fonction génératrice

Définition 1.3. [33]

Soit X une v.a à valeurs dans \mathbb{N} , sa fonction génératrice G_X est définie par :

$$G_X(s) = E(s^X) = \sum_{n \geq 0} s^n P(X = n), \quad \forall s \in [-1, 1] \quad (1.5)$$

Propriété 1.1. [14]

G_X est une fonction analytique sur $] - 1, 1[$, convexe sur $[0, 1]$, strictement convexe sur $[0, 1]$ lorsque $P(X \geq 2) > 0$, et $G_X(0) = P(X = 0)$ et $G_X(1) = 1$. De plus G_X caractérise la loi de X puisque

$$P(X = k) = \frac{1}{k!} G_X^{(k)}(0), \quad \forall k \geq 0, \quad (1.6)$$

où $G_X^{(k)}$ est la dérivée k -ième de G_X .

Propriété 1.2. [33]

Si la v.a X possède une espérance (resp.une variance) finie, alors on obtient cette espérance (puis cette variance) à partir de la fonction génératrice de X , par les relations :

$$\begin{aligned} E(X) &= G'_X(1), \\ V(X) &= G''_X(1) - E(X)^2 + E(X) \\ &= G''_X(1) - G'_X(1)^2 + G'_X(1). \end{aligned}$$

Propriété 1.3. [33]

Si X et X' sont deux v.a indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} , alors

$$G_{X+X'}(s) = G_X(s)G_{X'}(s), \quad \forall s \in [-1, 1]. \quad (1.7)$$

Application au branchement uni-type

Etant donné une loi p sur \mathbb{N} , on notera $G = G_p$ la fonction génératrice d'une v.a. de loi p , appelée fonction génératrice de reproduction.

Etant donné le processus de Galton-Watson $(Z_n, n \geq 0)$ issu d'un unique ancêtre ($Z_0 = 1$), on définit pour tout $n \geq 0$

$$G_n(s) = E(s^{Z_n}) = \sum_k s^k P(Z_n = k), \quad \forall s \in [-1, 1], \quad (1.8)$$

la fonction génératrice de Z_n . Remarquons que $P(Z_n = 0) = G_n(0)$.

Nous commençons par le lemme suivant.

Lemme 1.2. [11]

Soit Y, X_1, X_2, \dots une suite de v.a indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} , telle que les X_i ont tous même loi. Soit g la fonction génératrice de X_1 et h la fonction génératrice de Y . Alors, la v.a

$$S = \sum_{i=1}^Y X_i$$

satisfait

$$\begin{aligned} E(s^S) &= h \circ g(s), \quad \forall s \in [-1, 1], \\ E(S) &= E(X_1)E(Y), \\ \text{Var}(S) &= \text{Var}(X_1)E(Y) + E(X_1)^2\text{Var}(Y), \\ E(S|Y) &= E(X_1)Y. \end{aligned}$$

On peut vérifier par récurrence que :

Proposition 1.3. [10]

Pour tout $n \geq 0$, la fonction génératrice G_n du processus de Galton-Watson ($Z_n, n \geq 0$), vérifie

$$G_n(s) = \underbrace{G \circ G \circ \dots \circ G}_{n \text{ fois}} = G^{(n)}(s) \quad (1.9)$$

où G la fonction génératrice de reproduction.

Si on note par m le nombre moyen d'enfants par individu, appelée moyenne de reproduction,

$$m = E(\xi) = G'(1) = \sum_{k \geq 1} kp_k$$

et σ^2 la variance de reproduction,

$$\sigma^2 = \text{Var}(\xi) = \sum_{k \geq 1} k^2 p_k - m^2 = G''(1) - G'(1) - G'(1)^2.$$

Alors, d'après le lemme 1.2.

$$E(Z_n) = mE(Z_{n-1}),$$

$$Var(Z_n) = \sigma^2 E(Z_{n-1}) + m^2 Var(Z_{n-1}).$$

Il est alors vérifiable par récurrence que :

Théorème 1.1. [10]

Dans le cas où $Z_0 = 1$, la moyenne et la variance de Z_n sont données par

1. $E(Z_n) = m^n$ pour tout $n \geq 0$,

2.

$$Var(Z_n) = \begin{cases} \sigma^2 m^{n-1} \frac{m^n - 1}{m - 1}, & \text{si } m \neq 1, \\ n\sigma^2 & \text{si } m = 1. \end{cases}$$

Remarquons que ces formules sont également vraies si $m = E(\xi) = +\infty$ et/ou $E(\xi^2) = +\infty$ (avec la convention dans ce cas que $\sigma^2 = +\infty$).

Dans la suite, sauf lorsque c'est explicitement mentionné, on supposera toujours que :

$$m = E(\xi) < \infty.$$

1.2.3 Le processus vu comme une Martingale

Commençons par rappeler la définition d'une martingale, sous-martingale et sur-martingale.

Définition 1.4. [31]

Un processus $(X_n, n \geq 0)$ est une martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ si

- X_n est \mathcal{F}_n -mesurable,
- $E(|X_n|) < \infty$ pour tout $n \geq 0$,
- $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ (resp. $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n$, $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n$) $\forall n \geq 0$ p.s.

Proposition 1.4. [27]

Soit $(Z_n, n \geq 0)$ un processus de Galton-Watson.

- (Z_n) est une martingale $\Leftrightarrow m = 1$.
- (Z_n) est une sous-martingale $\Leftrightarrow m > 1$.
- (Z_n) est une sur-martingale $\Leftrightarrow m < 1$.

Démonstration. Soit (\mathcal{F}_n) la filtration naturelle du processus (Z_n) : (Z_n) est adapté à (\mathcal{F}_n) et positif. On a

$$E(Z_{n+1}/\mathcal{F}_n) = E\left(\sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{n,i}/\mathcal{F}_n\right) = \sum_{i=1}^{Z_n} E(\xi_{n,i}) = Z_n E(\xi_n).$$

Car les $\xi_{n,i}$ sont indépendantes de Z_n . Donc

$$E(Z_{n+1}/\mathcal{F}_n) = mZ_n.$$

Le processus $(Z_n, n \geq 0)$ est alors

- Une martingale $\Leftrightarrow m = 1$.
- Une sous-martingale $\Leftrightarrow m > 1$.
- Une sur-martingale $\Leftrightarrow m < 1$.

1.2.4 Le processus de Galton-Watson vu comme un arbre

Etant donné un processus de branchement, il est assez naturel de construire l'arbre généalogique associé. Nous prenons ici le point de vue inverse et cherchons à donner une définition alternative des processus de Galton-Watson comme une variable aléatoire sur l'espace des arbres.

Soit U l'espace des suites finies $u = j_1, \dots, j_n$ d'entiers strictement positifs tel que

$$U = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathbb{N}^*)^n \tag{1.10}$$

où U est l'ensemble des arêtes (branches) et $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ est l'ensemble des entiers (strictement) positifs et la convention $(\mathbb{N}^*)^0 = \phi$ qu'on interprète comme étant la suite vide et qui, en partant du principe que n représente la génération, sera l'ancêtre de la population.

Pour $v = k_1, \dots, k_m \in U$, on note par uv la suite obtenue par concaténation de u et v , tel que $uv = j_1 \dots j_n k_1 \dots k_m$.

Définition 1.5. [11] (*Arbre et notation de Ulam-Harris-Neveu*)

Un arbre ω est un sous-ensemble de U qui satisfait les propriétés suivantes :

- (i) $\phi \in \omega$,
- (ii) si $uv \in \omega$, alors $u \in \omega$,
- (iii) $u \in \omega \Rightarrow \exists N_u(\omega)$ tel que $uj \in \omega, j \geq 1 \iff 1 \leq j \leq N_u(\omega)$.

On notera N au lieu N_ϕ et N_u la v.a qui peut être interprété comme le nombre d'enfants de u dans l'arbre. On notera également Ω l'ensemble des arbres muni de la tribu \mathcal{F} engendrée par les Ω_u pour $u \in U$, où $\Omega_u = \{\omega \in \Omega : u \in \omega\}$.

La propriété (i) exprime que l'ancêtre appartient à l'arbre, pour tout arbre ω . La propriété (ii) signifie que le "père" d'une arête de l'arbre appartient aussi à l'arbre. Enfin, la propriété (iii) indique qu'une arête u de l'arbre a exactement N_u enfants dans l'arbre qui sont les arêtes uj pour $j \in \{1, \dots, N_u\}$.

Une représentation graphique d'un arbre avec la notation précédente est donnée en figure 1.1.

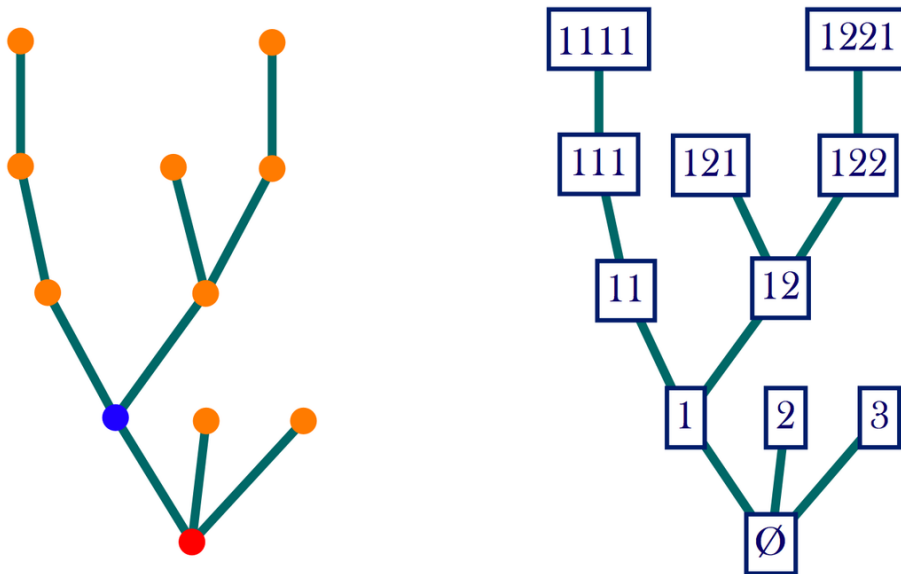


FIG. 1.1 – arbre et notation de Ulam-Harris-Neveu. Le noeud rouge représente l'ancêtre et on adopte la convention que les individus d'une même génération sont numérotés de gauche à droite. Le noeud bleu est donc le premier enfant de l'ancêtre (l'individu noté 1).

Terminologie des arbres :

- L'ancête est appelé également racine de l'arbre.
- Chaque $u \in \omega$ est appelé noeud ou sommet.
- Chaque $u \in \omega$ tel que $N_u = 0$ est appelé feuille de l'arbre.
- Les couples de noeuds $(u; v) \in \omega^2$ telle que $v = ui$ pour un certain $i \in \mathbb{N}^*$ sont appelés branches ou arêtes.

Pour tout entier n , la $n^{\text{ème}}$ génération est définie par :

$$z_n(\omega) = \{u \in \omega : |u| = n\}$$

et sa taille est

$$Z_n(\omega) = \text{Card } z_n(\omega)$$

En particulier, on a $Z_1 = N$. On peut également munir l'espace des arbres Ω d'une filtration \mathcal{F}_n engendrée par les z_m pour $0 \leq m \leq n$. C'est la tribu de toutes les informations disponibles à la génération n et avant.

L'espace Ω peut également être muni des translations

$$\begin{aligned} T_u : \Omega &\rightarrow \Omega \\ \omega &\mapsto T_u(\omega) = \{v \in U : uv \in \omega\}. \end{aligned}$$

$T_u(\omega)$ est le "sous-arbre" issu de l'arête u . Il est immédiat que $T_u(\omega)$ est encore un arbre.

Ainsi, pour tout n et k dans \mathbb{N} ,

$$Z_{n+k} = \sum_{u \in z_n} Z_k \circ T_u. \tag{1.11}$$

Proposition 1.5. [27] (*Propriété de branchement*)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Le processus de Galton-Watson $(Z_n, n \geq 0)$ défini par (1.1), associé à la mesure \mathbf{p} et avec $Z_0 = k$ a la même loi que le processus

$$\left(Z_n^{(1)} + Z_n^{(2)} + \dots + Z_n^{(k)}, n \geq 0 \right),$$

où $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots, Z^{(k)}$ sont des processus de Galton-Watson i.i.d. associés à la même mesure \mathbf{p} et issus de $Z_0^{(1)} = \dots = Z_0^{(k)} = 1$.

Démonstration. Pour $n \geq 0$ fixé, on note Z^n le processus $(Z_{n+k}, k \geq 0)$.

Remarquons que, d'après (1.12), le processus Z^n est égale au processus

$$\left(\sum_{u \in z_n} Z_k \circ T_u, k \geq 0 \right).$$

Or, conditionnellement à z_n , les processus $(Z_k \circ T_u, k \geq 0)$ pour $u \in z_n$ sont des processus de Galton-Watson issus d'un seul ancêtre i.i.d.

En particulier, pour tout sous-ensemble z de U formés de k suites de longueur n , le processus Z^n sachant $z_n = z$ a même loi que $Z^{(1)} + \dots + Z^{(k)}$.

En sommant sur tous les z possibles, on en déduit la propriété de branchement.

Corollaire 1.1. [27]

En particulier, si nous supposons que $Z_0 = k$, la fonction génératrice de Z_n est donnée par :

$$G_n(s) = G^n(s)^k = \mathbb{E}(s^{Z_n} | Z_0 = k), \quad \forall s \in [-1, 1].$$

Et

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(Z_n | Z_0 = k) = m^n k,$$

$$\mathbb{P}_k(Z_n \neq 0) \leq \mathbb{E}_k(Z_n) = m^n k.$$

Les deux premiers moments (qui peuvent être infinis) sont :

$$m = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k, \quad m_2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k.$$

1.3 Probabilité d'extinction

Comprendre le comportement au fil des générations est une étape très importante dans l'étude du processus de Galton-Watson. Il est nécessaire de savoir prédire l'extinction ou non d'une certaine population.

Remarquons tout d'abord que la probabilité pour qu'une variable aléatoire X soit nulle se

calcule à partir de sa fonction génératrice G_X par

$$P(X = 0) = G_X(0),$$

en effet,

$$G_X(0) = \sum_{k=0}^{\infty} 0^k P(X = k) = \mathbb{P}(X = 0).$$

Revenons à notre processus, ceci signifie que la probabilité pour que la descendance ait disparu à la génération n est $G_n(0)$.

La suite $(G_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante (si la génération n n'existe pas, il en va de même pour la génération $n + 1$), et bien sûr majorée par 1. Elle tend vers une limite qui représente la probabilité d'extinction du processus. On note cet événement

$$Ext = \{Z_n \rightarrow 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{Z_k = 0\}.$$

Puisque $Z_n = 0 \Rightarrow Z_{n+k} = 0, \forall k \geq 0$, on a

$$Ext = \{\exists n \geq 1 : Z_n = 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\},$$

et

$$P(Ext) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(0).$$

Théorème 1.2. [11]

La probabilité d'extinction $P(Ext)$ est la plus petite racine positive ou nulle de $G(s) = s$.

- Si $m \in [0, 1]$ alors $P(Ext) = 1$
- Si $m \in]1, +\infty]$ alors $P(Ext) < 1$

et il n'y a pas d'autre solution de $G(s) = s$ dans $[0, 1[$.

Démonstration. Puisque $G^{(n)}(0) = P(Z_n = 0)$ converge en croissant vers $P(Ext)$ et G continue sur $[0, 1]$, on a $G \circ G^{(n)}(0) \rightarrow G(P(Ext))$, et $G \circ G^{(n)}(0) = G^{(n+1)}(0)$, donc $P(Ext) = G(P(Ext))$. $P(Ext)$ est alors une solution de l'équation $G(s) = s$.

Soit $a \in [0, 1]$ tel que $G(a) = a$. Vérifions par récurrence que $G^{(n)}(a) \leq a$:

Pour $n = 1$, $G(a) = a$.

Supposons que $G^{(n)}(a) \leq a$. (*)

Vu que G est croissante, (*) implique que $G \circ G^{(n)}(a) \leq G(a)$, c.à.d $G^{(n+1)}(a) \leq a$.

Donc $G^{(n)}(a) \leq a, \forall n$. On déduit que $P(Ext)$ est la plus petite racine de $G(a) = a$ dans $[0,1]$.

- Si $m \leq 1$, on a pour tout $s < 1$,

$$(G(s) - s)' = G'(s) - 1 < G'(1) - 1 = m - 1 \leq 0.$$

Donc $G(s) - s$ est strictement décroissante. Puisque $G(1) = 1$, on en déduit que $G(s) > s$, pour tout $s \in [0, 1[$. 1 est donc le seul point fixe de G sur $[0, 1]$ et $P(Ext) = 1$.

- Si $m > 1$. Puisque $G'(s) = m$, on a alors $G(s) < s$, pour $s < 1$ dans un voisinage de 1.

Puisque G est continue sur $[0, 1]$ et que $G(0) > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires implique que : $\exists q \in [0, 1] / G(q) = q$.

Supposons que $\exists q_1$ et $q_2 : 0 \leq q_1 < q_2 < 1$ tel que $G(q_1) = q_1$ et $G(q_2) = q_2$.

La fonction $G(s) - s$ a alors 3 zéros : q_1, q_2 et 1. Cette fonction est strictement convexe, ce n'est donc pas possible. Il existe alors une unique solution.

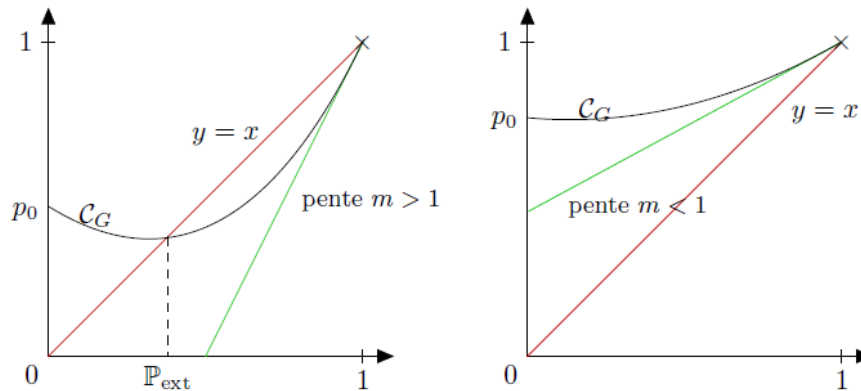


FIG. 1.2 – Graphe de la fonction génératrice G , à droite le cas $m < 1$ et à gauche le cas $m > 1$ avec $P(Ext)$ probabilité d'extinction.

Il est naturel de distinguer les cas $m > 1$ et $m \leq 1$. Mais lorsque $m = 1$, $Z_n \rightarrow 0$ p.s (ce cas est aussi particulier car $Var(Z_n)$ est infinie). On distingue donc trois cas : $m < 1$, $m > 1$ et $m = 1$.

On dira que le processus de Galton-Watson est :

1. **Sur-critique** si $m > 1$ (la population s'éteint avec une probabilité $p \in]0, 1[$),
2. **Critique** si $m = 1$ (la population s'éteint presque sûrement),
3. **Sous-critique** si $m < 1$ (la population s'éteint presque sûrement).

Exemples.

1) Loi de reproduction binomiale

Supposons que la loi de reproduction du processus de Galton-Watson suit la loi binomiale, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$ et pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ on a

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Notons $m = E(\xi)$ l'espérance et $\sigma^2 = Var(\xi)$ la variance de la loi binomiale

$$m = np, \quad \sigma^2 = np(1-p).$$

Posons G la fonction génératrice de la loi binomiale, pour tout $s \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (ps)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (1 + p(s-1))^n. \end{aligned}$$

Calculons la probabilité d'extinction :

D'après le théorème 1.2. pour déterminer la probabilité d'extinction il faut résoudre l'équation suivante : $G(s) = s$, $s \in [0, 1]$. On pose $n = 2$ pour faciliter les calculs.

$$G(s) = s \iff (p(s-1) + 1)^2 = s,$$

on développe, on obtient :

$$p^2 s^2 + (2p(1-p) - 1)s + (1-p)^2 = 0, \quad (1.12)$$

qui est une équation de second degré en s . On calcule le discriminant,

$$\Delta = (2p - 1)^2 \geq 0.$$

Le discriminant est nul si $p = 1/2$, donc on distingue deux cas :

1. Si $p = 1/2$, alors $\Delta = 0$, donc l'équation (1.12) admet une racine double,

$$s_{p=1/2} = \frac{-(2p(1-p) - 1)}{2p^2} = 1.$$

2. Si $p \neq 1/2$, alors $\Delta > 0$, donc l'équation (1.12) admet deux racines,

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{-(2p(1-p) - 1) + (2p - 1)}{2p^2} \\ &= 1, \\ s_2 &= \frac{-(2p(1-p) - 1) - (2p - 1)}{2p^2} \\ &= \left(\frac{p-1}{p}\right)^2. \end{aligned}$$

Pour $p = 1/2$, $m=1$ (cas critique) par le théorème 1.2. la probabilité d'extinction vaut 1 ($P(Ext) = 1$).

Pour $p \neq 1/2$, l'équation (1.12) admet deux racines, pour déterminer laquelle est la probabilité d'extinction, il faut distinguer deux cas suivant la valeur de la moyenne :

- Si $p < 1/2$, on aura $m < 1$ (cas sous-critique), donc $P(Ext) = 1$, c'est aussi la plus petite racine de l'équation (1.12), on vérifie que $s_1 < s_2$.

$$\text{On a : } s_2 = \left(\frac{p-1}{p}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2.$$

$$\text{Or } p < 1/2 \Rightarrow 1/p > 2 \Rightarrow \left(1 - 1/p\right)^2 > 1, \text{ donc } s_2 > s_1.$$

Par conséquent, s_1 est la plus petite racine, et puisque $s_1 = 1$, on retrouve bien le résultat.

- Si $p > 1/2$, on aura $m > 1$ (cas sur-critique), donc $P(Ext) \in [0, 1[$. Dans ce cas,

on vérifie que $s_2 < s_1 = 1$, on a : $s_2 = \left(\frac{p-1}{p}\right)^2 = (1 - 1/p)^2$

Or $1/2 < p < 1 \Rightarrow 0 < (1 - 1/p)^2 < 1 \Rightarrow s_2 < s_1$.

Par conséquent, s_2 est la plus petite racine, et $P(Ext) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^2$.

On obtient donc la probabilité d'extinction suivante en fonction de p :

$$P(Ext) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \leq \frac{1}{2}, \\ \left(\frac{p-1}{p}\right)^2 & \text{si } p > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

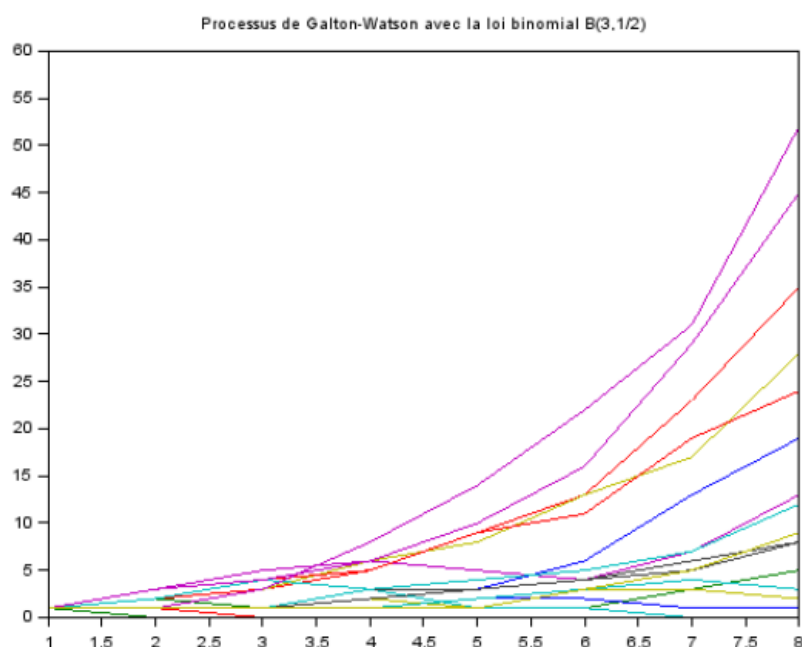


FIG. 1.3 – Exemple de trajectoires du processus de Galton-Watson avec la loi de reproduction binomiale $B(3,1/2)$.

2) Loi de reproduction géométrique décalée $\mathcal{G}(p)$

Supposons que la loi de reproduction est la loi géométrique décalée de paramètre p , $p \in [0, 1]$

$$P(\xi = k) = p(1 - p)^k, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Notons m son espérance définie par

$$m = \frac{1-p}{p}.$$

Posons G la fonction génératrice de la loi géométrique décalé donnée pour tout $s \in [-1, 1]$ par

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{k \geq 0} p(1-p)^k s^k \\ &= p \sum_{k \geq 0} (s(1-p))^k \\ &= \frac{p}{1-s(1-p)}. \end{aligned}$$

Calculons la probabilité d'extinction. D'après le théorème 1.2. pour déterminer la probabilité d'extinction il faut résoudre l'équation suivante

$$G(s) = s, \quad \forall s \in [0, 1].$$

$$G(s) = s \iff \frac{p}{1-s(1-p)} = s.$$

On développe on obtient

$$(1-p)s^2 - s + p = 0. \tag{1.13}$$

Calculons le discriminant

$$\Delta = (2p-1)^2 \geq 0.$$

Le discriminant est nul si $p = 1/2$, par conséquent, on distingue deux cas :

1. Si $p = 1/2$, $\Rightarrow \Delta = 0$, d'où l'équation (1.13) admet une racine double :

$$s_{p=1/2} = \frac{1}{2(1-p)} = 1.$$

2. Si $p \neq 1/2$, $\Rightarrow \Delta > 0$, d'où l'équation (1.13) admet deux racines :

$$s_1 = \frac{p}{(1-p)},$$

$$s_2 = 1.$$

Lorsque $p \geq 1/2$, $\Rightarrow m \leq 1$ (cas sous-critique) par le théorème 1.2. la probabilité d'extinction vaut 1 ($P(Ext) = 1$).

Lorsque $p < 1/2$, $\Rightarrow m > 1$ (cas sur-critique) $\Rightarrow P(Ext) \in [0, 1[$, c'est aussi la plus petite racine ($s_1 < s_2$). Donc, $P(Ext) = s_1 = \frac{p}{1-p}$.

On obtient donc la probabilité d'extinction suivante en fonction de p :

$$P(Ext) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \geq \frac{1}{2}, \\ \frac{p}{1-p} & \text{si } p < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

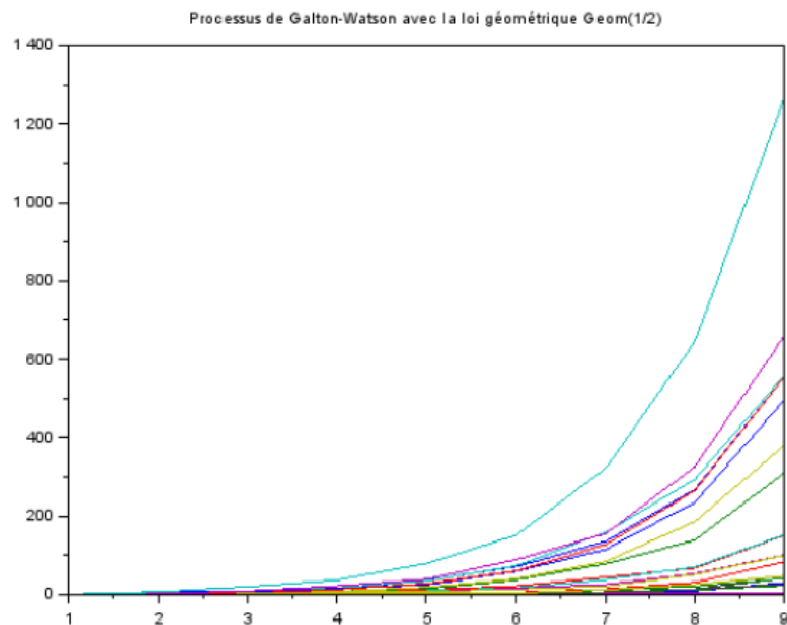


FIG. 1.4 – Exemple de trajectoires du processus de Galton-Watson avec la loi de reproduction géométrique $G(1/2)$.

3) loi de reproduction Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Supposons que la loi de reproduction soit la loi de Poisson de paramètre λ , pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $\lambda > 0$,

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp^{-\lambda}.$$

Notons m l'espérance et σ^2 la variance de la loi de Poisson

$$m = \lambda, \quad \sigma^2 = \lambda.$$

La fonction génératrice de la loi de Poisson, pour tout $s \in [0, 1]$, est $G(s) = \exp(\lambda(s - 1))$.

Calculons la probabilité d'extinction :

Si $\lambda \leq 1$, alors la probabilité d'extinction vaut 1

Si $\lambda > 1$, alors la probabilité d'extinction s est l'unique solution sur $]0, 1[$ de l'équation $\lambda = \frac{\ln s}{s-1}$.

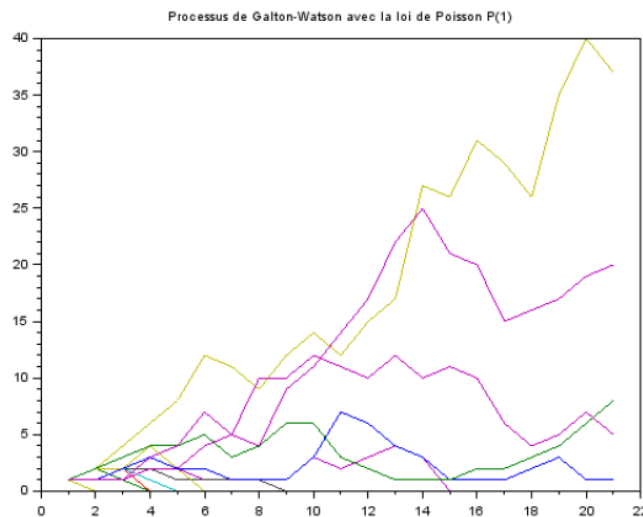


FIG. 1.5 – Exemple de trajectoires du processus de Galton-Watson avec la loi de reproduction poisson $\mathcal{P}(1)$.

1.4 Comportement asymptotique du processus de Galton-Watson

On considère le processus $(W_n, n \geq 0)$ défini par

$$W_n = \frac{Z_n}{m^n} \quad \forall n \geq 0, \quad (1.14)$$

où $(Z_n, n \geq 0)$ est un processus de Galton-Watson et $m < \infty$.

Proposition 1.6. [2]

Le processus $(W_n, n \geq 0)$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$. Elle converge presque sûrement vers une v.a W à valeurs dans $[0, +\infty[$ quand $n \rightarrow +\infty$. Dans le cas particulier où $m \leq 1$, la v.a W est p.s nulle.

Démonstration. La v.a. Z_n est clairement \mathcal{F}_n -mesurable et on a $E(Z_n) = m^n < \infty$, et en utilisant la définition 1.3, on obtient

$$\begin{aligned} E(W_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= E\left(\frac{Z_{n+1}}{m^{n+1}}|\mathcal{F}_n\right) \\ &= \frac{1}{m^{n+1}}E(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\ &= \frac{1}{m^{n+1}}E\left(\sum_{i=1}^{Z_n}\xi_{n,i}|\mathcal{F}_n\right) \\ &= \frac{1}{m^{n+1}}\sum_{i=1}^{Z_n}E(\xi_{n,i}|\mathcal{F}_n) \\ &= \frac{1}{m^{n+1}}\sum_{i=1}^{Z_n}E(\xi_{n,i}) = \frac{1}{m^{n+1}}mZ_n = \frac{Z_n}{m^n} = W_n \quad \text{car les } \xi_{n,i} \text{ sont indépendents,} \end{aligned}$$

(W_n) est donc une martingale.

D'après la propriété des martingale qui stipule que toute martingale positive converge p.s quand $n \rightarrow +\infty$ vers une v.a finie p.s, on a

$$W_n \rightarrow W \quad p.s.$$

Si $m \leq 1$, $P(Ext) = 1 = P(\exists n \geq 0 / Z_n = 0) = P(\exists n \geq 0 / W_n = 0)$ et $W_{n+k} = 0$ pour tout $k \geq 0$.

Si $W_n = 0$, alors $W = 0$ p.s.

Théorème 1.3. [2]

Soit $(Z_n, n \geq 0)$ un processus de Galton-Watson. On suppose que $Z_0 = 1$, $m > 1$ et la variance de reproduction σ^2 est finie. Alors W_n converge p.s et dans $L^2(\Omega)$ vers une v.a $W > 0$ telle que

$$E(W) = 1 \quad \text{et} \quad Var(W) = \frac{\sigma^2}{m^2 - m}.$$

De plus, $\{W = 0\} = Ext$ p.s.

Démonstration du théorème 1.3.

On utilise les martingales.

(W_n) est bien une martingale (d'après la proposition 1.6) donc,

$$E(W_n) = E(W_0) = E\left(\frac{Z_0}{m^0}\right) = E(Z_0) = 1, \quad \text{et} \quad E(Z_n) = m^n E(W_n) = m^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Et aussi, (W_n) est une martingale positive donc elle converge p.s. vers une v.a. W intégrable. On sait que (W_n^2) est une sous-martingale, la décomposition de Doob [31] de (W_n^2) s'écrit alors :

$$W_n^2 = M_n + A_n,$$

où (M_n) est une martingale et $A_n = \sum_{l=1}^n E(W_l^2 | \mathcal{F}_{l-1}) - W_{l-1}^2$ avec $A_0 = 0$.

On vérifie que $A_n = \sum_{l=1}^n E((W_l - W_{l-1})^2 | \mathcal{F}_{l-1})$.

En effet,

$$E((W_l - W_{l-1})^2 | \mathcal{F}_{l-1}) = E((W_l)^2 | \mathcal{F}_{l-1}) + E((W_{l-1})^2 | \mathcal{F}_{l-1}) - 2E((W_l W_{l-1}) | \mathcal{F}_{l-1}).$$

On a

$$E((W_l W_{l-1}) | \mathcal{F}_{l-1}) = W_{l-1} E(W_l | \mathcal{F}_{l-1}) = W_{l-1} W_{l-1} = W_{l-1}^2,$$

$$E((W_{l-1}^2) | \mathcal{F}_{l-1}) = W_{l-1}^2,$$

d'où $E((W_l - W_{l-1})^2 | \mathcal{F}_{l-1}) = E((W_l^2) | \mathcal{F}_{l-1}) - W_{l-1}^2$.

On note $A_n = \langle W \rangle_n$ le crochet de $(W)_n$. On introduit les v.a. $\eta_{n,i} = \xi_{n,i} - m$.

On a :

$$\begin{aligned} Z_n - mZ_{n-1} &= (\xi_{n,1} - m) + (\xi_{n,2} - m) + \dots + (\xi_{n,Z_{n-1}} - m) \\ &= \eta_{n,1} + \eta_{n,2} + \dots + \eta_{n,Z_{n-1}}, \end{aligned}$$

par indépendance de $\eta_{n,i}$

$$\begin{aligned} E\left((Z_n - mZ_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) &= E\left((\eta_{n,1} + \dots + \eta_{n,Z_{n-1}})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) \\ &= E\left((\eta_{n,1} + \dots + \eta_{n,Z_{n-1}})^2\right) \\ &= E\left(\left(\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \eta_{n,i}\right)^2\right) \\ &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \eta_{n,i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \text{Var}(\eta_{n,i}) \\ &= Z_{n-1}\sigma^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E\left((W_n - W_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) &= E\left(\left(\frac{Z_n}{m^n} - \frac{Z_{n-1}}{m^{n-1}}\right)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{m^{2n}} E\left((Z_n - mZ_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{m^{2n}} \sigma^2 Z_{n-1} \\ &= \frac{1}{m^{2n}} \sigma^2 W_{n-1} m^{n-1} \\ &= \frac{\sigma^2}{m^{n+1}} W_{n-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\langle W \rangle_n = \sigma^2 \sum_{l=1}^n \frac{W_{l-1}}{m^{l+1}}.$$

Pour $m > 1$, montrons que $E(\lim_{n \rightarrow \infty} \langle W \rangle_n) < \infty$.

$$\begin{aligned}
 E\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \langle W \rangle_n\right) &= E(\langle W \rangle_\infty) \\
 &= E\left(\sigma^2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{W_{l-1}}{m^{l+1}}\right) \\
 &= \sigma^2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{E(W_{l-1})}{m^{l+1}} \\
 &= \sigma^2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{m^{l+1}} \\
 &= \sigma^2 \frac{1}{m(m-1)} < \infty.
 \end{aligned}$$

D'après l'inégalité maximale de Doob [31], on a $E(\sup_{0 \leq l \leq n} W_l^2) \leq 4E(W_n^2)$. Puisque $E(W_n^2) = E(M_n) + E(\langle W \rangle_n)$ et $E(M_n) = E(M_0) = E(W_0^2) = E(Z_0^2) = 1$, d'où

$$E\left(\sup_{0 \leq l \leq n} W_l^2\right) \leq 4(E(\langle W \rangle_n) + 1).$$

La convergence monotone implique

$$E\left(\sup_n W_n^2\right) \leq 4(E(\langle W \rangle_\infty) + 1) < \infty$$

donc (W_n) est bornée dans L^2 , par conséquent : (W_n) converge dans L^2 vers W . Comme (W_n) converge aussi dans L^1 , on a $E(W) = 1$ et

$$Var(W) = E(W^2) - 1 = E(M_n) + E\langle W \rangle_\infty - 1 = 1 + \frac{\sigma^2}{m(m-1)} - 1 = \frac{\sigma^2}{m(m-1)}.$$

1.4.1 Cas sous-critique (Analyse fine de l'extinction)

Dans le cas sous-critique (i.e. lorsque $m < 1$), nous souhaitons étudier finement les propriétés du temps d'extinction en fonction de la condition initiale (la taille de la population initiale (i)). Supposons que $m_2 < \infty$ et notons comme précédemment $\sigma^2 = Var(\xi)$.

Proposition 1.7. [27]

Pour tout $i, n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{i(1-m)m^{n+1}}{\sigma^2(1-m^n) + m^{n+1}(1-m)} \left(1 - \frac{(i-1)m^n}{2}\right) \leq \mathbb{P}_i(Z_n > 0) \leq im^n.$$

Pour n assez grand, on a

$$\frac{m(1-m)}{\sigma^2} im^n \leq \mathbb{P}_i(Z_n > 0) \leq im^n.$$

Il est intéressant d'un point de vue écologique d'étudier le temps moyen d'extinction d'une population sous-critique en fonction de la taille de la population initiale. Le résultat suivant va répondre à cette question pour une population sous-critique initialement très grande.

Proposition 1.8. [27]

Considérons un processus de Galton-Watson $(Z_n)_n$ sous-critique ($m < 1$) et tel que $Z_0 = i$. Supposons de plus que $\sigma^2 < \infty$ et posons $c_1 = \frac{(1-m)m}{\sigma^2}$. Soit T_0 le temps d'atteinte de 0 du processus $(Z_n)_n$. Alors, pour i suffisamment grand,

$$\left(\frac{\ln i - \ln \ln i}{|\ln m|}\right) \left(1 - \frac{1}{i^{c_1}}\right) \leq \mathbb{E}_i(T_0) \leq \frac{\ln i}{|\ln m|} + \frac{2-m}{1-m}.$$

Corollaire 1.2. [27]

Dans les mêmes conditions que ci-dessus, nous avons

$$\mathbb{E}_i(T_0) \underset{i \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln i}{\ln m}.$$

Remarque. Ce corollaire a des conséquences importantes : même si au temps 0, la population est extrêmement grande, elle va s'éteindre rapidement si le nombre moyen d'enfants par individu est inférieur à 1. En effet, $\ln i$ est négligeable devant i quand $i \rightarrow \infty$.

Exemple. *Application à l'extinction des baleines noires en Atlantique du Nord.* [37]

On souhaite modéliser l'évolution d'une population de baleines (femelles), on s'intéresse à leur loi de reproduction. L'unité de temps est un an.

En 1994, des études statistiques estimaient leur nombre à 150. On suppose que l'on connaît (i.e. que l'on a pu estimer statistiquement) la probabilité $\beta \in [0, 1]$ qu'une baleine meure et la probabilité d'avoir un petit "femelle" (en un an) $\alpha \in [0, 1]$. D'après les données des sections précédentes, la loi de reproduction est donnée par

$$\begin{aligned} p_0 &= P(Z_n = 0) = \beta, \\ p_1 &= P(Z_n = 1) = (1 - \beta)(1 - \alpha), \\ p_2 &= P(Z_n = 2) = (1 - \beta)\alpha. \end{aligned}$$

En 1994, des estimations ont montré que $p_0 \approx 0.06$ et $\alpha \approx 0.038$. Alors

$$m = p_1 + 2p_2 = (1 - \beta)(1 + \alpha) = 0.976 < 1,$$

c'est-à-dire le processus de Galton-Watson est bien dans le cas sous-critique, avec

$$\sigma^2 = p_1 + 4p_2 \approx 0.095.$$

Cherchons pendant combien d'années nous pouvons être certain qu'avec 99% de chances, il n'y aura pas extinction. On fait le calcul en appliquant la proposition 1.7. On obtient ainsi

$$P(Z_n > 0 | Z_0 = 150) \geq 0.99 \quad \text{ds que} \quad 0.99 \leq \frac{m(1-m)}{\sigma^2} im^n$$

Ce qui est équivalent à

$$n \leq \frac{\ln \left(\frac{0.99\sigma^2}{(1-m)im} \right)}{\ln m}.$$

Par conséquent

$$n \leq 150.$$

Ainsi, avec 99% de chances et si il n'y a pas de changement environnemental, les baleines survivront jusqu'en 2144.

Cherchons maintenant dans combien d'années les baleines auront 99% de chances d'avoir

disparu. On a

$$P\left(Z_n = 0 \mid Z_0 = 150\right) \geq 0.99 \quad \text{dès que} \quad im^n \leq 0.01$$

$$\Leftrightarrow n \geq 395.$$

Ainsi, nous pouvons assurer avec 99% de chances que si il n'y a pas de changement environnemental, les baleines auront disparu en 2389.

Le corollaire 1.2 appliqué à $m = 0.976$ et $i = 150$ donne $E_i(T_0) \simeq 206$.

1.5 Distributions quasi-stationnaires et limite de Yaglom

Nous allons énoncer ici les résultats qui décrivent plus finement le comportement des processus de Galton-Watson avant leur extinction, dans les cas sur-critique, critique et sous-critique. Ce sont des résultats difficiles, que nous admettrons.

Le premier résultat est un raffinement du théorème 1.3. dans le cas sur-critique.

Théorème 1.4. [22]

Supposons $m \in]1, \infty[$ et $Z_0 = 1$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) $P(W = 0) = P(Ext)$,
- (ii) $E(W) = 1$,
- (iii) $W_n \rightarrow W$ dans L^1 lorsque $n \rightarrow \infty$,
- (iv) $E(\sup_n W_n) < \infty$,
- (v) $\sum_{k=2}^{\infty} (k \log k) p_k < \infty$, c'est-à-dire $E(\xi \log^+ \xi) < \infty$.

Le second résultat décrit le comportement stationnaire d'un Galton-Watson sous-critique au temps n sur l'événement de non survie au temps n .

Théorème 1.5. [40]

Supposons $0 < m < 1$ et $Z_0 = 1$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = j \mid Z_n > 0) = Q(j), \quad \forall j \geq 1, \tag{1.15}$$

où Q est une loi de probabilité sur \mathbb{N} . On appelle Q la limite de Yaglom du processus de Galton-Watson.

Le résultat suivant traite le cas critique. On sait déjà (théorème 1.1) que, dans ce cas, $P(Z_n \rightarrow 0) = 1$, $E(Z_n) = 1$ et $Var(Z_n) \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, ce qui suggère que Z_n est grand lorsqu'il n'est pas nul.

Théorème 1.6. [10]

Si $m = 1$ et $\sigma^2 < \infty$, alors

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} nP(Z_n > 0) = \frac{2}{\sigma^2}$,

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\frac{Z_n}{n} \mid Z_n > 0\right) = \frac{\sigma^2}{2}$,

(iii) Pour tout $u \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Z_n}{n} \leq u \mid Z_n > 0\right) = 1 - e^{-2u/\sigma^2}$.

Autrement dit, conditionnellement à la non-extinction, Z_n/n converge en loi vers une v.a. exponentielle de paramètre $2/\sigma^2$.

1.5.1 Distributions quasi-stationnaires

Nous avons vu que dans les cas sous-critique ou critique, le processus de Galton-Watson $(Z_n)_n$ s'éteint presque-sûrement. Mais le temps nécessaire à l'extinction peut être très long (par exemple dans le cas critique). On peut alors dans certains cas observer une apparente stationnarité de la population, alors que celle-ci est en voie d'extinction. Ainsi, une étude faite sur des serpents à sonnettes en Arizona (cf. Renault, Ferrière, Porter, non publié), montre que la moyenne du nombre de descendants vaut $m = 0,91$. Le processus est donc très nettement sous-critique. L'étude expérimentale montre toutefois qu'après une phase de décroissance violente de la population, celle-ci semble s'être stabilisée. Notre but dans ce paragraphe est de donner un sens mathématique à cette stabilité avant extinction. Par analogie avec la recherche d'une probabilité invariante (ou stationnaire).

Nous allons introduire les notions de distribution quasi-stationnaire d'un processus de Galton-Watson et l'existence d'une limite de Yaglom.

Soit $(Z_n)_n$ une chaîne de Markov sur \mathbb{N} absorbée en 0. Nous supposons de plus qu'elle

atteint 0 presque-sûrement. Notons par T_{ext} le temps d'atteinte de 0. Ainsi,

$$P(T_{ext} < +\infty) = 1 \tag{1.16}$$

Pour toute probabilité $Q = (Q_j)_{j \geq 1}$ sur \mathbb{N}^* , nous noterons $P_Q = \sum_{j \geq 1} Q_j P_j$.

Définition 1.6. [27]

Une probabilité Q sur \mathbb{N}^* est une probabilité ou distribution quasi-stationnaire pour le processus Z , si elle vérifie pour tout $j \geq 1$ et pour tout n ,

$$P_Q(Z_n = j | T_{ext} > n) = Q_j.$$

Remarque. Remarquons que l'événement conditionnant $\{T_{ext} > n\} = \{Z_n \neq 0\}$ a une probabilité qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini puisque T_{ext} est fini, presque-sûrement. On conditionne donc par un événement de plus en plus rare, quand n augmente.

Proposition 1.9. [27]

Soit Q une probabilité quasi-stationnaire sur \mathbb{N}^* . Alors il existe un nombre réel $\rho(Q) \in (0, 1)$ tel que

$$P_Q(T_{ext} > n) = \rho(Q)^n.$$

Ainsi, si le processus est issu d'une distribution quasi-stationnaire, son temps d'extinction suit une loi géométrique de paramètre $\rho(Q)$.

Démonstration. Par la propriété de Markov, nous avons

$$\begin{aligned} P_Q(T_{ext} > n + k) &= E_Q\left(P_{Z_n}(T_{ext} > k) \mathbb{1}_{T_{ext} > n}\right) \\ &= P_Q(T_{ext} > n) E_Q\left(P_{Z_n}(T_{ext} > k) | (T_{ext} > n)\right). \end{aligned}$$

Par la définition 1.5, nous avons

$$E_Q\left(P_{Z_n}(T_{ext} > k) | T_{ext} > n\right) = P_Q(T_{ext} > k).$$

Ainsi, pour tous n, k ,

$$P_Q(T_{ext} > n + k) = P_Q(T_{ext} > n)P_Q(T_{ext} > k).$$

Un raisonnement élémentaire invoquant (1.17) permet de conclure.

Théorème 1.7. [27]

Soit $(Z_n)_n$ une chaîne de Galton-Watson et m la moyenne de sa loi de reproduction.

- (i) Il n'y a pas de distribution quasi-stationnaire si la chaîne est critique ou surcritique.
- (ii) Si la chaîne est sous-critique, il existe une limite de Yalgom $Q = (Q_j)_{j \geq 1}$ sur \mathbb{N}^* , telle que $\forall i, j \geq 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_i(Z_n = j | Z_n > 0) = Q_j.$$

De plus, la fonction génératrice H de Q est l'unique solution de l'équation :

$$1 - H(G(s)) = m(1 - H(s)), \quad \forall s \in [0, 1],$$

où

$$H(s) = \sum_{j \geq 1} Q(j)s^j, \quad \forall s \in [0, 1].$$

- (iii) Il y a une infinité de distribution quasi-stationnaire pour une chaîne de Galton-Watson sous-critique.

1.6 Processus de Galton-Watson et marche aléatoire

Le but de cette partie est de présenter une description d'un arbre par une marche aléatoire, qui permettent d'obtenir des propriétés généalogiques dans les arbres de Galton-Watson.

1.6.1 Processus de contour

On reprend ici la notation de Hulam-Harris-Neveu de la section 1.2.4. Nous commençons par décrire un algorithme d'exploration de l'arbre, qui vise à explorer la totalité de l'arbre et à construire une marche, appelée "processus de contour", qui code l'arbre et qui est

particulièrement bien adapté à l'étude des propriétés généalogiques de la population décrite par l'arbre.

On rappelle d'abord la notion de marche.

Définition 1.7. [11] (*Marches et marches aléatoires*)

- Etant donnée une suite $(x_k, k \geq 1)$ dans \mathbb{Z} , on appelle marche de pas $(x_k, k \geq 1)$ la suite $(s_n, n \geq 0)$ définie par :

$$s_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n=0; \\ \sum_{k=1}^n x_k, & \text{si } n > 1. \end{cases} \quad (1.17)$$

On associe de même la marche $(s_n, 0 \leq n \leq t)$ à un vecteur de pas $(x_k, 0 \leq k \leq t)$ de taille t .

- Une marche aléatoire est une marche $(S_n, n \geq 0)$ de pas aléatoire $(X_k, k \geq 1)$ i.i.d :

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n=0; \\ \sum_{k=1}^n X_k, & \text{si } n > 1. \end{cases} \quad (1.18)$$

Une marche aléatoire arrêtée au temps T est une marche de pas $(X_k, 0 \leq k \leq T)$ pour une suite $(X_k, k \geq 1)$ i.i.d.

Définition 1.8. [11] (*Parcours d'exploration par "contour"*)

Soit l'arbre $\omega \in \Omega$. On considère l'algorithme d'exploration suivant. On pose $v_0(\omega) = \emptyset$ (étape 0 de l'algorithme). Supposons avoir construit $v_0(\omega), v_2(\omega), \dots, v_k(\omega) \in \omega$ pour un certain $k \geq 0$. Alors

- Si $v_k(\omega)$ a un enfant qui n'a pas encore été visité par l'algorithme (c'est-à-dire qui n'est pas l'un des v_0, \dots, v_k), alors on pose $v_{k+1}(\omega)$ le premier enfant (pour l'ordre lexicographique) de $v_k(\omega)$ qui n'a pas encore été visité;
- Si $v_k(\omega)$ n'a pas d'enfants ou si tous ses enfants ont déjà été visités,
 - Si $v_k(\omega) = \emptyset$ l'algorithme s'arrête à l'étape k ;
 - Si $v_k(\omega) \neq \emptyset$ alors on pose $v_{k+1}(\omega)$ le parent de $v_k(\omega)$

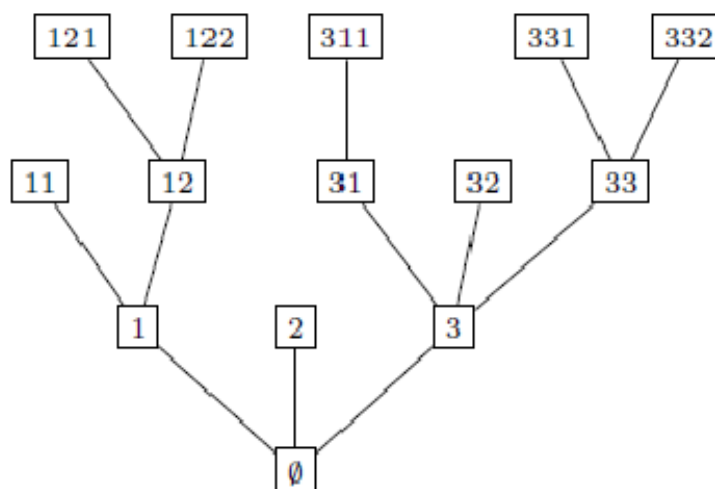


FIG. 1.6 – Un arbre fini avec la notation de Ulam-Harris-Neveu

On note $T(\omega)$ le nombre d'étapes de l'algorithme. Ainsi, l'algorithme s'arrête à l'étape $T(\omega) - 1$. Par exemple, le parcours d'exploration par contour de l'arbre de la figure 1.3 est donné par l'abscisse de la figure 1.4. Dans cet exemple $v_0 = \emptyset, v_1 = 1, v_2 = 11, v_3 = 11, \dots, v_{26} = \emptyset$ et $T(\omega) = 27$.

On observe que chaque arête de l'arbre est parcourue deux fois, d'abord en descendant en profondeur puis en remontant vers la racine. Ainsi, $T(\omega)$ est égale au double du nombre d'arêtes plus 1. On remarque qu'un arbre comporte un noeud de plus que son nombre d'arêtes. Le nombre d'arêtes de l'arbre est donné par

$$Y = \sum_{n \geq 0} Z_n = \sum_{n=0}^{T_{Ext}-1} Z_n, \quad T_{ext} \text{ est le temps d'atteinte de } 0.$$

Donc

$$T(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{T_{Ext}-1} Z_n - 1.$$

Définition 1.9. [11]

Soit $\omega \in \Omega$ et $(v_n, 0 \leq n \leq T-1)$ la suite des noeuds visités dans l'algorithme d'exploration de ω de la définition 1.8. Le processus de contour $(C_n, n \in \{0, 1, \dots, T\})$ de ω est défini par :

$$C_n = \begin{cases} |v_n|, & 0 < n < T-1; \\ -1, & n=T. \end{cases} \quad (1.19)$$

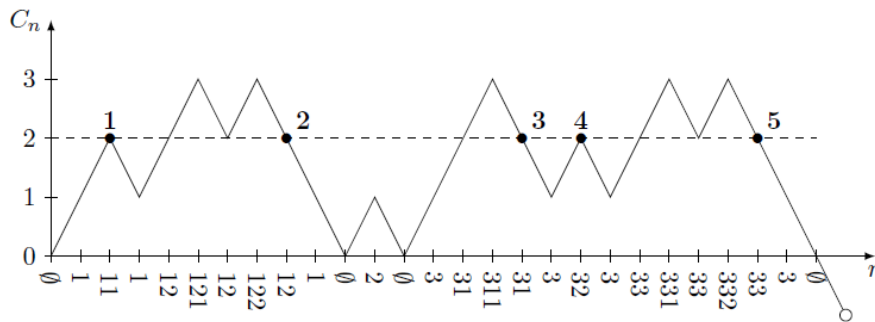


FIG. 1.7 – Le processus de contour de l'arbre de la figure 1.3

En abscisse se trouve la suite des noeuds visités par l'algorithme de parcours de contour. Les individus vivants à la génération 2 sont indiqués par des \bullet , à l'instant de leur dernière visite par le processus de contour. Ils sont numérotés de 1 à 5 dans l'ordre de leur visite. On remarque que les nouveaux individus sont visités par le processus d'exploration dans l'ordre lexicographique. On parle de parcours par *contour* car la suite des noeuds visités par l'algorithme est donnée par la suite des noeuds visités quand on fait le tour de l'arbre en partant à gauche de la racine. Lorsque l'arbre ω est infini, l'algorithme ne s'arrête pas et en général tous les noeuds de l'arbre ne sont pas visités.

Remarquons qu'on a toujours $C_0 = |\emptyset| = 0$. Le processus de contour associé à l'arbre de la figure 1.6 est représenté dans la figure 1.7. Il est clair d'après la définition 1.8 que le processus de contour est une marche dont les pas sont soit 1 soit -1, issue de 0 et arrêtée à son premier temps d'atteinte de -1.

Lorsque l'arbre est fini, le passage du processus de contour à l'arbre qui lui correspond peut se visualiser d'une manière assez commode : supposons que l'on enduise de colle le dessous de la courbe du processus de contour de la figure 1.7, et que l'on écrase la courbe

dans la direction horizontale. Les parties du processus de contour qui sont en face les unes des autres seront alors collées, et on obtient l'arbre de la figure 1.6 en dépliant les parties non-collées. Inversement, si on se donne un arbre comme celui de la figure 1.6, on obtient le processus de contour en découpant en deux toutes les arêtes dans le sens de la longueur, sauf les extrémités des arêtes qui sont des feuilles. Lorsque l'on étire la courbe ainsi obtenue, on retrouve la figure 1.7.

Ceci suggère que l'application qui à un arbre associe son processus de contour est une bijection entre l'ensemble des arbres finis et l'ensemble des marches de pas ± 1 issues de 0 et arrêtées en -1 .

1.7 Processus de Galton-Watson avec immigration

L'idée des modèles présentés dans cette partie est de fournir une modélisation explicite de l'évolution d'une population. Si l'on suppose qu'en plus du mécanisme de reproduction dans le processus de branchement, des individus (immigrants) peuvent arriver à chaque pas de temps de façon i.i.d., on obtient un processus de Galton-Watson avec immigration.

Définition 1.10. [27]

On se donne une mesure de probabilité \mathbf{q} sur \mathbb{N} et on considère une suite de v.a ($\zeta_k, k \geq 0$) i.i.d de loi q , on construit le processus de Galton-Watson avec immigration ($Z_n^I, n \geq 0$), avec p la loi de reproduction et q la loi d'immigration, comme suit

$$\begin{cases} Z_0^I = 0, \\ Z_{n+1}^I = \zeta_n + \sum_{i=1}^{Z_n^I} \xi_{n,i}, \quad \forall n \geq 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

L'exposant I est pour "immigration".

Remarquons que chaque migrant arrivé à une certaine date n se reproduit ensuite comme un processus de Galton-Watson standard.

On voit comme précédemment que ($Z_n^I, n \geq 0$) est une chaîne de Markov et que, si $H_n(s)$ est la fonction caractéristique de Z_n^I , on a pour tout $n \geq 0$,

$$H_{n+1}(s) = H(s)(H_n \circ G(s)), \quad \forall s \in [-1, 1], \quad (1.21)$$

où $H(s)$ est la fonction génératrice de \mathbf{q} , c'est à dire $H(s) = H_1(s)$. On déduit alors facilement par récurrence que

$$H_n(s) = \prod_{k=0}^n H \circ G^k(s), \quad \forall s \in [-1, 1], \quad (1.22)$$

avec la convention que $G^0(s) = s$.

Les résultats principaux de cette section sont les deux théorèmes suivants.

Théorème 1.8. [27]

Supposons que $m < 1$. Notons $\log^+ \zeta = \sup(\log \zeta, 0)$. On a alors les résultats suivants :

$$\begin{aligned} E(\log^+ \zeta) < \infty &\Rightarrow (Z_n^I, n \geq 0) \text{ converge en loi,} \\ E(\log^+ \zeta) = \infty &\Rightarrow (Z_n^I, n \geq 0) \text{ converge en probabilité vers } +\infty, \end{aligned}$$

$$\text{où } \log^+(x) = \begin{cases} \log(x) & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Théorème 1.9. [36]

supposons que $m > 1$. On a alors les résultats suivants :

$$\begin{aligned} E(\log^+ \zeta) < \infty &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} m^{-n} Z_n^I \text{ existe et finie p.s.,} \\ E(\log^+ \zeta) = \infty &\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} c^{-n} Z_n^I = +\infty \text{ pour tout } c > 0 \text{ p.s.} \end{aligned}$$

Pour prouver ces théorèmes, nous allons utiliser les propositions suivantes :

Proposition 1.10. [11]

Soient X, X_1, X_2, \dots des variables aléatoires indépendantes et de même loi. Alors p.s. :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } E[X] < \infty, \\ \infty & \text{si } E[X] = \infty. \end{cases}$$

Proposition 1.11. [11]

Soit X, X_1, X_2, \dots des variables aléatoires indépendantes et de même loi. Alors, pour tout $c \in]0, 1[$, p.s. :

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{X_n} c^n < \infty \quad \text{si } E[X] < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{X_n} c^n = \infty \quad \text{si } E[X] = \infty.$$

Démonstration du théorème 1.8.

Soit \mathcal{G} la tribu engendrée par les v.a. $(\zeta_n, n \geq 0)$ (la tribu de l'immigration). Soit $Z_{n,k}$ le nombre de descendants au niveau n des particules immigrées à l'instant k . Ainsi à l'instant n , le nombre total de sommets est $\sum_{k=1}^n Z_{n,k}$. Les v.a. $Z_{n,k}$ pour n fixé sont indépendantes et la loi de $Z_{n,k}$ ne dépend que de $n - k$. De plus, pour tous i_1, \dots, i_n tels que $i_k \geq k$, les v.a. $Z_{i_1,1}, \dots, Z_{i_n,n}$ sont indépendantes. Donc Z_n a la même loi que $T_n = \sum_{k=1}^n Z_{2k-1,k}$. $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante.

Notons Z_∞ sa limite. Prouvons que Z_∞ est finie p.s. ou infinie p.s.

Notons $\mathcal{K}_n = \sigma(Z_{2k-1,k}; k \geq n)$. Comme pour tout k , $Z_{2k-1,k}$ est finie p.s., on a : $Z_\infty = \infty$ si et seulement si pour tout n , $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=n}^k Z_{2j-1,j} = \infty$, donc l'événement $\{Z_\infty = \infty\}$ appartient à \mathcal{K}_n pour tout n . Or les variables $Z_{2k-1,k}$ sont indépendantes. On en déduit par la loi du tout ou de rien que $P(Z_\infty = \infty) \in \{0, 1\}$, i.e. Z_∞ est finie p.s. ou infinie p.s.

Nous allons montrer que $Z_\infty < \infty$ p.s. si et seulement si $E[\log^+ \zeta] < \infty$.

Supposons que $E[\log^+ \zeta] < \infty$. On a :

$$E[Z_\infty | \mathcal{G}] = \sum_{k=1}^{\infty} m^{k-1} E \left[\frac{Z_{2k-1,k}}{m^{k-1}} | \mathcal{G} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k m^{k-1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{\log^+ \zeta_k} m^{k-1}.$$

Comme $(m < 1)$, la proposition 1.11 assure que la suite $\langle \sum_{k=1}^n e^{\log^+ \zeta_k} m^{k-1} \rangle$ converge p.s. : Z_∞ est finie p.s.

Supposons $Z_\infty < \infty$ p.s.. Écrivant $Z_{2k-1,k} = \sum_{i=1}^{\zeta_k} Y_k(i)$, où $Y_k(i)$ désigne la population de la $(k - 1)^{\text{ème}}$ génération d'un processus de Galton-Watson ordinaire, les $Y_k(i)$ étant indépendantes et identiquement distribuées.

Par conséquent, $Z_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\zeta_k} Y_k(i) < \infty$ p.s., donc seul un nombre fini de $Y_k(i)$ sont non nulles.

Quitte à conditionner par la suite $(\zeta_k)_{k \geq 1}$, le lemme de Borel-Cantelli dans le cas d'indépen-

dance assure alors que $\sum_k \sum_{i \leq \zeta_k} P(Y_k(i) \geq 1) < \infty$, et comme $Y_k(i)$ a même loi que \tilde{Z}_{k-1} (où \tilde{Z}_i est la $i^{\text{ème}}$ génération d'un processus de Galton-Watson classique), $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \mathbf{P}(\tilde{Z}_{k-1} \geq 1) < \infty$ p.s. Or $\mathbf{P}(\tilde{Z}_{k-1} \geq 1) \geq P(\xi > 0)^{k-1}$, donc $\sum_{k=1}^{\infty} e^{\log \zeta_k} P(\xi > 0)^k < \infty$ p.s. Par la proposition 1.11, il vient : $E[\log^+ \zeta] < \infty$.

Par conséquent, si $E[\log^+ \zeta] < \infty$, i.e. si $Z_{\infty} < \infty$ p.s., alors, puisque $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement (et donc en loi) vers Z_{∞} et que Z_n et T_n suivent la même loi, $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers Z_{∞} .

Si $E[\log^+ \zeta] < \infty$, i.e. si $Z_{\infty} = \infty$ p.s., alors $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers l'infini. En effet, pour tout $A > 0$, $P(Z_n > A) = E[I_{\{T_n > A\}}]$, donc par le théorème de convergence dominée, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n > A) = 1$.

Démonstration du théorème 1.9.

Supposons d'abord que $E(\log^+ \zeta) = \infty$. D'après la proposition 1.10, $\limsup \frac{\zeta_n}{c^n} = \infty$ p.s. Puisque $Z_n^I \geq \zeta_n$, on en déduit directement le résultat.

Supposons maintenant que $E(\log^+ \zeta) < \infty$. Soit \mathcal{G} la tribu engendrée par les v.a. $(\zeta_n, n \geq 0)$ (la tribu d'immigration). Pour $k \leq n$, on note $Z_{n,k}$ le nombre de descendants à la génération n des particules immigrantes à l'instant k . Le nombre total de sommets à l'instant n est

$$Z_n^I = \sum_{k=1}^n Z_{n,k}.$$

On déduit que

$$E \left[\frac{Z_n^I}{m^n} \middle| \mathcal{G} \right] = E \left[\frac{1}{m^n} \sum_{k=1}^n Z_{n,k} \middle| \mathcal{G} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{m^k} E \left[\frac{Z_{n,k}}{m^{n-k}} \middle| \mathcal{G} \right].$$

Or, pour tout $k \geq 1$, le processus $(Z_{n,k}/m^{n-k}, n \geq k)$ est un processus de Galton-Watson (sans immigration) issu de ζ_{k-1} individus lorsque $n = k$. Donc

$$E \left[\frac{Z_n^I}{m^n} \middle| \mathcal{G} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{\zeta_{k-1}}{m^k}.$$

D'après la proposition 1.11, cette suite converge p.s., et donc, par Fatou, $\liminf Z_n^I/m^n < \infty$ p.s. Enfin, puisque, sachant \mathcal{G} , $\liminf Z_n^I/m^n$ est une sous-martingale d'espérance p.s. bornée, elle converge p.s.

Chapitre 2

Le processus de Galton-Watson multi-type

2.1 Introduction

Dans le premier chapitre, nous avons considéré des populations de même type, il est intéressant d'un point de vue pratique de suivre l'évolution d'une population composée de sous-populations de types différents. Nous supposons que les individus prennent un nombre fini K de types différents. Le processus de Galton-Watson multi-type décrit une population dans laquelle pour chaque type $j \in \{1, \dots, K\}$, un individu de type j génère à la génération suivante, indépendamment des autres, un K -uplet décrivant la répartition de ses descendants.

2.2 Définition et exemple

Soit le processus $(X_n, n \geq 0)$ à valeurs vectorielles

$$X_n = (X_n^1, \dots, X_n^K)^t$$

décrivant le nombre d'individus de chaque type à la génération n qui est une valeur dans \mathbb{N}^K .

Supposons que la distribution initiale soit définie par le vecteur $(X_0^1, \dots, X_0^K)^t$. La première génération sera alors définie par le vecteur $(X_1^1, \dots, X_1^K)^t$, où pour $k \in \{1, \dots, K\}$

$$X_1^k = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{X_0^j} Y_j^k(i) \quad (2.1)$$

La variable aléatoire $Y_j^k(i)$ représente le nombre d'enfants de type k issus du i -ième individu de type j . On suppose l'indépendance des descendance aléatoires correspondant à des types j différents.

Pour j fixé, les vecteurs aléatoires $Y_j^1, \dots, Y_j^k, \dots, Y_j^K$ sont indépendants. De plus, pour chaque j, k , chaque vecteur $(Y_j^k(i), 1 \leq i \leq X_0^j)$ est composé de variables aléatoires indépendantes et de même loi.

Définition 2.1. [27]

Les processus (X_n) définis par

$$X_n = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{X_{n-1}^j} Y_j^k(i) \quad (2.2)$$

sont des chaînes de Markov homogènes appelées processus de Galton-Watson multi-types et font partie de la classe des processus de branchement multi-types.

Exemple 1.

Soit la population composée de deux types : \heartsuit et \spadesuit . Nous avons 5 individus pour une certaine génération. A la génération suivante nous obtenons :

première génération : $\heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit \quad \spadesuit \quad \spadesuit$
 deuxième génération : $(\heartsuit, \heartsuit) \quad (\heartsuit, \spadesuit) \quad (\heartsuit, \spadesuit, \spadesuit) \quad (\heartsuit, \spadesuit, \spadesuit) \quad (\spadesuit)$

Nous aurons donc :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2.3 Fonction génératrice

Comme dans le cas uni-type, les fonctions génératrices vont jouer le même rôle fondamental pour les processus de Galton-Watson multi-types.

Définition 2.2. [27]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout type $j \in \{1, \dots, K\}$ et $s = (s_1, \dots, s_K) \in [0, 1]^K$

la j -ième fonction génératrice $f_n^j(s)$ qui déterminera la distribution du nombre de descendants de chaque type à la génération n produit par une particule de type j est

$$f_n^j(s) = E(s_1^{X_n^1} \dots s_K^{X_n^K} | X_0 = e_j) = \sum_{i_1 \dots i_K \geq 0} p_n^j(i_1, \dots, i_K) s_1^{i_1} \dots s_K^{i_K} \quad (2.3)$$

où $e_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t$ tel que 1 est à la j -ième composante et $p_n^j(i_1 \dots i_K)$ est la probabilité qu'un parent de type j produise i_1 descendants de type 1, ..., i_K descendants de type K à la génération n .

La fonction génératrice de X_n sera notée f_n telle que $f_n(s) = (f_n^1(s), \dots, f_n^K(s))$.

Les formules de récurrence sont données par la proposition suivante.

Proposition 2.1. [18]

Pour tout $j \in \{1 \dots K\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $s = (s_1, \dots, s_K) \in [0, 1]^K$

$$\begin{cases} f_{n+1}^j(s) = f_1^j(f_n^1(s), \dots, f_n^K(s)) = f_n^j(f_1^1(s), f_1^2(s), \dots, f_1^K(s)) \\ f_0^j = s_j. \end{cases} \quad (2.4)$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$f_{n+N}(s) = f_n(f_N(s)) \quad (2.5)$$

La démonstration de cette proposition est une généralisation de la démonstration de la proposition 1.3 sur les fonctions génératrices du processus uni-type du chapitre 1.

2.3.1 Moments d'ordre 1

Définition 2.3. [2]

Soit M la matrice qui décrit la reproduction moyenne dans la population, définie par :

$$M = (m_{kj})_{k,j \in \{1 \dots K\}}, \quad (2.6)$$

où $m_{kj} = E(Y_j^k)$ est le nombre moyen d'individus de particule k issus d'un individu de type j .

Ces moments peuvent aussi s'écrire sous la forme suivante

$$m_{kj} = E(X_1^j | X_0 = e_j) = \frac{\partial f_1^k}{\partial s_j}(\mathbf{1}), \quad \text{où } \mathbf{1} = (1, \dots, 1) \quad (2.7)$$

M est appelée matrice de reproduction moyenne.

Remarque.

- La somme des coefficients de la k -ième ligne représente le nombre moyen d'individu de type k à chaque reproduction.
- La somme des coefficients de la j -ième colonne représente le nombre moyen d'individus issus d'un individu de type j .

Proposition 2.2. [27]

L'espérance du nombre d'individus de type k à la génération n vérifie

$$E(X_n^k) = E(E(X_n^k | X_{n-1})) = \sum_{j=1}^K m_{kj} E(X_{n-1}^j) = (ME(X_{n-1}))_k, \quad (2.8)$$

où $(ME(X_{n-1}))_k$ est la k -ième ligne de la matrice $ME(X_{n-1})$.

Ainsi, nous avons l'égalité

$$E(X_n) = ME(X_{n-1}) = M^n E(X_0). \quad (2.9)$$

Démonstration.

On a

$$E(X_n^k | X_{n-1}) = E\left(\sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{X_{n-1}^j} Y_j^k(i) \mid X_{n-1}\right) = \sum_{j=1}^K E(Y_j^k) X_{n-1}^j = \sum_{j=1}^K m_{kj} X_{n-1}^j.$$

Donc

$$E(X_n^k) = E(E(X_n^k | X_{n-1})) = \sum_{j=1}^K m_{kj} E(X_{n-1}^j) = (ME(X_{n-1}))_k.$$

Par conséquent

$$E(X_n) = ME(X_{n-1}) = M^n E(X_0).$$

2.3.2 Moments d'ordre 2

Les moments d'ordres supérieurs, lorsqu'ils existent, peuvent être définis par les dérivées n -ième de $f_n(s)$ en $\mathbf{1}$. Pour le moment d'ordre deux c'est la dérivée seconde de $f_n(s)$.

On utilisera ces notations

$$q_n^k(i, j) = \frac{\partial^2 f_n^k}{\partial s_i \partial s_j}(\mathbf{1}), \quad i, j, k = 1, \dots, K \quad (2.10)$$

et on définit la matrice

$$Q_n^k = \{q_n^k(i, j)\}, \quad (2.11)$$

le vecteur de matrices

$$Q_n = (Q_n^1, \dots, Q_n^k), \quad (2.12)$$

les formes quadratiques

$$Q_n^k[s] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k s_i q_n^k(i, j) s_j, \quad (2.13)$$

et les vecteurs de formes quadratiques

$$\begin{aligned} Q_n[s] &= (Q_n^1[s] \dots Q_n^k[s]), \\ Q[s] &\equiv Q_1[s]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.4 Régularité positive et singularité

Définition 2.4. [18]

La matrice M est dite positivement régulière s'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que tous les éléments de la matrice M^{n_0} sont strictement positifs.

Si M est positivement régulière, on dit que le processus de Galton-Watson multi-type est positivement régulier.

Définition 2.5. [18]

Le processus de Galton-Watson multi-type est dit singulier si les fonctions génératrices $f^1(s), \dots, f^K(s)$ sont linéaires en s (sans termes constants). C'est à dire $f(s) = As^t$, où A est une matrice à éléments positifs. Dans ce cas chaque individu a exactement un descendant.

2.5 Etats transitoires

On dit qu'un état $x \in \mathbb{N}^K$ est transitoire s'il existe un $n \geq 0$ tel que

$$P(X_n = x | X_0 = x) < 1, \quad (2.15)$$

ou bien, d'une façon équivalente

$$P(X_n = x \text{ une infinie de fois} | X_0 = x) = 0. \quad (2.16)$$

Nous allons montrer que pour un processus positivement régulier, tous les états sont transitoires.

Soit S l'ensemble des types j tel que

$$P(X_n = 0 | X_0 = e_j) = 0, \quad e_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t \text{ et } n = 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

Les éléments de S sont notés $1, 2, \dots, r$.

Si j n'est pas dans S , alors $P(X_n = 0 | X_0 = e_j)$ est positive pour tout n suffisamment grand.

Nous aurons besoin de ce lemme (la régularité positive n'est pas obligatoire dans ce lemme).

Lemme 2.1. [18]

Si S n'est pas vide, alors

$$P(X_{n+1}^1 + \dots + X_{n+1}^K \geq X_n^1 + \dots + X_n^K) = 1 \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.18)$$

Théorème 2.1. [18]

Si le processus (X_n) est positivement régulier et non singulier, alors tous les états non nuls sont transitoires.

Démonstration. On distingue deux cas :

Fixons $x \in \mathbb{N}^K$.

– Cas 1 : S est vide

Pour tout j , nous avons $P(X_n = 0 | X_0 = e_j) > 0$ pour n suffisamment grand.

De la définition du processus, la probabilité $P(X_n = 0 | X_0 = x)$ est positive pour un certain n . L'état x ne peut pas se produire après que 0 se produit. x est donc transitoire.

– Cas 2 : S est non vide

Supposons d'abord que la matrice M est positive.

Pour un vecteur w , soit $\pi(w)$ la somme des r premières composantes de w .

Nous allons montrer qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$P(\pi(X_{n_0}) > \pi(x) | X_0 = x) > 0. \quad (2.19)$$

Pour $n > n_0$, (2.19) et le lemme 2.1 impliquent que

$$P(X_n = x | \pi(X_{n_0}) > \pi(x)) = 0.$$

Ce qui impliquera que x est transitoire.

Supposons d'abord que $r = K$. Dans ce cas, puisque le processus est non singulier, il existe un $i \in \{1, \dots, K\}$ tel que $P(\pi(X_1) > 1 | X_0 = e_i) > 0$.

Si $w \in \mathbb{N}^K$ tel que $w_i \geq 0$, alors de la définition du processus, on a

$$P(\pi(X_2) > \pi(w) | X_1 = w) > 0.$$

Vu que la matrice M est positive, on a $P(X_1^i \geq 1 | X_0 = x) > 0$. De plus,

le lemme 2.1 implique que $P(\pi(X_2) \geq \pi(X_1)) = 1$. Par conséquent, (2.19) est vraie pour $n_0 = 2$.

Considérons maintenant le cas où $1 \leq r < K$. Soit $X_0 = 0$.

On se donne un vecteur $w \in \mathbb{N}^K$ avec $X_1 = w$. Posons $X_2 = X_2' + X_2''$ avec X_2' est le nombre de descendants des r premières composantes de w et X_2'' est le nombre de descendants des $k - r$ dernières composantes de w . Du lemme 2.1 nous avons $P(\pi(X_2' \geq \pi(w))) = 1$. Pour la même raison on a $P(\pi(w) \geq \pi(x)) = 1$.

Vu que M est positive, on a $P(X_1^{r+1} > 0) > 0$, ce qui implique $P(\pi(X_2' > 0)) > 0$. Pour $n_0 = 2$, l'équation (2.19) est vraie ($\pi(X_2) = \pi(X_2') + \pi(X_2'')$).

Ainsi, le théorème est vérifié pour M positive.

On considère maintenant le cas où $\exists N \in \mathbb{N}$ telle que M^N est à éléments positifs.

On a $E(X_n) = M^n E(X_0)$. On peut obtenir $E(X_{n+N}|X_N) = X_N M^n$, $n = 0, 1, \dots$

En utilisant cette équation, on a pour X_N fixé, la distribution conditionnelle de X_{n+N} est celle de la somme $X_N^1 + \dots + X_N^K$. Par conséquent, les vecteurs aléatoires X_0, X_N, X_{2N}, \dots représentent un processus de Galton-Watson (appelé N-processus) de matrice de reproduction moyenne M^N .

Nous allons montrer par l'absurde que (X_N) est non singulier. Supposons que le processus (X_N) est singulier, les fonctions génératrices sont donc linéaires, on a alors $f_N^j(0, \dots, 0) = 0$ pour $j = 1, \dots, K$.

Comme le processus (X_n) est non singulier, il existe au moins une fonction f_n^j non linéaire. Supposons que c'est f_1^1 . On voit alors que $f_2^1(s) = f_1^1(f_1^1(s))$ est non linéaire.

On peut montrer par récurrence que f_N^j est non linéaire, ce qui est une contradiction avec l'hypothèse. Le processus (X_N) est donc non singulier, la matrice associée à X_N est positive, l'équation (2.19) est alors vraie pour un certain n_0 .

Le théorème est vérifié pour (X_n) non singulier.

2.6 Extinction de la population

Il est clair que la probabilité d'extinction du processus Galton-Watson multi-type dépend de l'encêtre X_0 . Il y aura extinction de la population à un certain temps n s'il y a extinction de chaque type. c'est à dire, pour tout $j \in \{1, \dots, K\}$, $X_n^j = 0$.

Définition 2.6. [18]

Soit q^j la probabilité d'extinction de la population s'il y a initialement un objet de type j , $j = 1, \dots, K$

$$q^j = P(X_n = 0 \text{ pour un certain } n | X_0 = e_j). \quad (2.20)$$

On note par \mathbf{q} le vecteur (q^1, \dots, q^K) et $\mathbf{1}$ est le vecteur $(1, \dots, 1)$.

Enonçons le théorème fondamental suivant.

Théorème 2.2. [27] (*Théorème de Perron-Frobenius*)

Soit M une matrice carrée d'ordre K positivement régulière, alors

1. Il existe un unique nombre réel $\lambda_0 > 0$ tel que :

- λ_0 est une valeur propre simple de M ,
- Toute valeur propre λ est telle que $|\lambda| \leq \lambda_0$.

La valeur propre λ_0 est appelée valeur propre dominante de M .

2. Le vecteur propre à gauche $u = (u_1 \dots u_K)$ et le vecteur propre à droite $v = (v_1 \dots v_K)$ correspondant à la valeur propre λ_0 peuvent être choisis tels que

$$u_k > 0, \quad v_k > 0, \quad \sum_{k=1}^K u_k = 1, \quad \sum_{k=1}^K u_k v_k = 1$$

Dans ces conditions, les vecteurs propres sont uniques. De plus,

$$M_n = \lambda_0^n A + B^n, \tag{2.21}$$

où $A = (v_k u_j)_{j,k \in \{1, \dots, K\}}$ et B sont des matrices telles que

- $AB = BA = 0$
- Il existe des constantes $\rho \in]0, \lambda_0[$ et C telles que les éléments de la matrice B^n n'excèdent pas $C\rho^n$.

Remarque.

On peut vérifier que $A = (v_k u_j)_{j,k \in \{1, \dots, K\}}$ satisfait : $Av = v$, $A^t u = u$ et $A^n = A$ pour tout n .

Théorème 2.3. [18]

Supposons que le processus $(X_n, n \geq 0)$ est positivement régulier et non sigulier. Soit λ_0 la valeur propre dominante de la matrice de reproduction M .

- Si $\lambda_0 \leq 1$ alors $\mathbf{q} = \mathbf{1}$
- Si $\lambda_0 > 1$ alors $\mathbf{q} < \mathbf{1}$ ($q_i < 1$ pour tout $i = 1, \dots, K$)

Et \mathbf{q} est la plus petite racine positive de l'équation $s = f(s)$: pour toute autre solution positive \mathbf{q}^* on a $\mathbf{q}_i \leq \mathbf{q}_i^*$ pour tout $i = 1, \dots, K$.

On dira que le processus (X_n) est :

- sous-critique si $\lambda_0 < 1$,
- critique si $\lambda_0 = 1$,
- sur-critique si $\lambda_0 > 1$.

Théorème 2.4. [18]

Supposons que le processus $(X_n, n \geq 0)$ est positivement régulier et non sigulier.

- i) Pour tout vecteur $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_K)$ de dimension K à éléments positifs tel que $\|\mathbf{s}\| \leq \mathbf{1}$ mais $\mathbf{s} \neq \mathbf{1}$, avec $\|\mathbf{s}\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_K|\}$, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\mathbf{s}) = \mathbf{q}. \quad (2.22)$$

- ii) Les seules solutions positives de l'équation $f(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$ avec $\|\mathbf{s}\| \leq \mathbf{1}$ sont $\mathbf{1}$ et \mathbf{q} .

Exemple 2.

On considère une population de l'unx. Au début de leur vie, ces animaux sont juvéniles, en grandissant ils deviennent aptes à la reproduction s'ils sont en meute, sinon ils seront flottants. La population est donc composée de trois types :

- Juvénile (J)
- Flottant (F)
- Reproducteur (R).

Soient $\alpha, \rho, \sigma \in [0, 1]$. Un individu passe :

- de l'état J à l'état F avec une probabilité σ
- de l'état J à l'état J avec une probabilité $1 - \sigma$
- de l'état F à l'état R avec une probabilité α
- de l'état F à l'état F avec une probabilité $1 - \alpha$
- de l'état R à l'état F avec une probabilité ρ .
- Un individu R se reproduit avec une probabilité ρ et donne naissance à un nombre aléatoire de juvéniles qui suit une loi de poisson de paramètre m .

Pour $s = (s_1, s_2, s_3)$, nous aurons

- $f_1^1(s)$ la fonction génératrice qui détermine la distribution du nombre de descendants du type J à la première génération telle que $f_1^1(s) = \sigma s_2 + (1 - \sigma)s_1$
- $f_1^2(s)$ la fonction génératrice qui détermine la distribution du nombre de descendants du type F à la première génération telle que $f_1^2(s) = \alpha s_3 + (1 - \alpha)s_2$

- $f_1^3(s)$ la fonction génératrice qui détermine la distribution du nombre de descendants du type R à la première génération telle que $f_1^3(s) = e^{m(s_1-1)}\rho s_3 + (1-\rho)s_2$.

La matrice de reproduction moyenne est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \sigma & 0 & \rho m \\ \sigma & 1 - \alpha & 1 - \rho \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

L'hypothèse " M^2 est à coefficients positifs" est facile à vérifier.

Il existe donc un $n_0 = 2$ tel que la matrice M^2 est à coefficients positifs. La matrice M est donc positivement régulière. Ce qui veut dire que les hypothèses du théorème de Perron-Frobenius sont vérifiées.

Il est difficile de trouver la valeur propre dominante par un calcul élémentaire sauf dans des cas particuliers. Si on prend l'exemple ou $m = 1$, nous pouvons montrer que $\lambda = 1$ est une valeur propre et que le polynôme caractéristique pour $\lambda \in \mathbb{C}$ vaut

$$\det(M - \lambda I) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + (\sigma + \alpha - 1)\lambda + \alpha(\sigma + \rho - 1)).$$

En particulier si $(\sigma + \alpha - 1)^2 - 4\alpha(\sigma + \rho - 1) < 0$, alors 1 est la racine simple de la matrice M. Cela entraîne que si $m = 1$, le processus est critique.

Afin de simplifier le problème, nous allons supprimer les individus flottants (le type F). Nous aurons donc la matrice de reproduction moyenne

$$M = \begin{pmatrix} s_1 & m \\ s_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Elle vérifie aussi les hypothèses du théorème de Perron-Frobenius. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\det(M - \lambda I) = -\lambda(s_1 - \lambda) - s_2 m \sigma.$$

Le discriminant $\Delta = (s_1)^2 + 4\rho m s_2 > 0$, et la racine positive vaut $\lambda_0 = \frac{s_1 + \sqrt{\Delta}}{2}$.

On a alors

$$\lambda_0 > 1 \Leftrightarrow 1 - s_1 - m s_2 < 0$$

$$\lambda_0 < 1 \Leftrightarrow 1 - s_1 - m s_2 > 0$$

$$\lambda_0 = 1 \Leftrightarrow 1 - s_1 - ms_2 = 0.$$

Ainsi, la population va s'éteindre si $1 - s_1 - ms_2 > 0$, et se développer avec une probabilité positive si $1 - s_1 - ms_2 < 0$. La valeur propre pour la moyenne de reproduction est donc $m = \frac{1-s_1}{s_2}$.

2.7 Théorèmes limites

2.7.1 Cas sous-critique

Des résultats analogues au théorème de Yaglom dans la section 1.5. ont été établis par A.Joffe et F.Spitzer en 1967 [21].

Nous allons énoncer ces résultats dans le cas où les moments d'ordre 2 existent. Le cas général a été étudié dans [21] (dont les démonstrations sont techniquement très difficiles).

Théorème 2.5. [2]

Si $\lambda < 1$ et $E(\|X_1\|^2) < \infty$, alors quand $n \rightarrow \infty$

$$\lambda^{-n}v.[1 - f_n(s)] \rightarrow Q(s) > 0, \quad \|s\| < 1, \quad (2.23)$$

où $Q(\cdot)$ est décroissante.

De plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{-n}[1 - f_n(s)] = Q(s)u. \quad (2.24)$$

avec v est le vecteur propre à gauche et u le vecteur propre à droite associés à λ .

Pour démontrer ce résultat, on a besoin du lemme suivant qui est une version du critère de convergence d'un produit de nombres pour les matrices.

Lemme 2.2. [2]

Soit P une matrice strictement positive de valeur propre dominante 1 associée aux vecteurs propres u (à droite) et v (à gauche) tel que $u.v = \mathbf{1}$ et $u.\mathbf{1} = \mathbf{1}$. Soit (A_n) , $0 \leq A_n \leq P$ une suite donnée de matrices, définissons

$$B_n = \prod_{k=0}^n (P - A_k),$$

et soit x un vecteur fixe tel que $x \geq 0$ et $B_n x \neq 0$ pour tout $n \geq 1$. Alors

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$ implique $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n x / (v \cdot (B_n x)) = u$, la convergence étant uniforme pour $x \geq 0, B_n(x) \neq 0$,
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n x = x_0$, existe toujours,
- (iii) $x_0 \neq 0$ si et seulement si $\sum A_k < \infty$.

Démonstration du théorème 2.5.

On peut montrer qu'il existe une fonction de valeur matricielle positive $A(s)$ telle que

$$1 - f(s) = (1 - s)(M' - A(s)). \quad (2.25)$$

Si $E(\|X_n\|^2) < \infty$ alors

$$A(s) = O(\|1 - s\|). \quad (2.26)$$

Par (2.25)

$$\lambda^{-(n+1)} v \cdot [1 - f_{n+1}(s)] = \lambda^{-n} v \cdot [1 - f_n(s)] - \lambda^{-(n+1)} [1 - f_n(s)] A(f_n(s)),$$

on voit que $\lambda^{-n} v \cdot [1 - f_n(s)]$ décroît en n . Cela prouve que la limite (2.23) existe. Notons cette limite $Q(s)$.

De (2.25) on a par récurrence

$$\lambda^{-n} [1 - f_n(s)] = (1 - s) \prod_{i=0}^{n-1} \left\{ \frac{M^t}{\lambda} - \frac{A(f_i(s))}{\lambda} \right\}. \quad (2.27)$$

Le lemme 2.2 (ii) implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{-n} [1 - f_n(s)] \equiv V(s) \text{ existe.} \quad (2.28)$$

Par (2.26), $A[f_i(s)] = O(\|1 - f_i(s)\|)$, qui est égale à $O(\lambda^i)$ par (2.28).

Par conséquent $\sum A[f_i(s)] < \infty$, et par le lemme 2.2 (iii) on conclue que $V(s) \neq 0$

Finalement le lemme 2.2 (i) appliqué à (2.27) implique

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - f_n(s)}{v \cdot [1 - f_n(s)]} = u. \quad (2.29)$$

Ainsi

$$V(s) = Q(s)u \neq 0.$$

En utilisant ce résultat, on peut démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.6. [2]

Si $\lambda < 1$ et $E(\|X_1\|^2) < \infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{-n} P\{X_n \neq 0 | X_0 = k\} = Q(0)(k.u), \quad (2.30)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_n = j | X_0 = k, X_n \neq 0\} = v(j) \quad (2.31)$$

existent indépendamment de k et ce sont des mesures de probabilités.

2.7.2 Cas critique

Comme dans le cas uni-type, on s'intéresse au comportement stationnaire d'un processus de Galton-Watson multi-type critique au temps n sur l'événement de non-extinction (survie). En normalisant par n , la loi limite de $(\frac{X_n}{n})$ est aussi exponentielle. Un premier théorème a été établi par Mullikin en 1963 [29], sous une hypothèse de moments d'ordre 3. Le résultat suivant sous une condition de moments d'ordre 2 est dû à A.Joffe et F.Spitzer (1967).[21].

Théorème 2.7. [2]

Si $\lambda = 1$, et $E(\|X\|^2) < \infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nP(X_n \neq 0 | X_0 = j) = \frac{j.u}{v.Q[u]},$$

où $Q[u]$ est définie par (2.14).

Le second résultat donne la loi limite du processus multi-type conditionnellement à la non-extinction dans le cas critique.

Théorème 2.8. [2]

Si $\lambda = 1$ et $E(\|X_1\|^2) < \infty$, et si $w.v > 0$, alors $\frac{(X_n.w)}{n}$ conditionnée par $X_n \neq 0$ converge vers une v.a de densité

$$f(x) = \frac{1}{\gamma_1} e^{\frac{-x}{\gamma_1}}, \quad (2.32)$$

où $\gamma_1 = \frac{v.w}{v.Q[u]}$

Si le vecteur w dans le théorème 2.8. est orthogonal à v , alors $\frac{(X_n.w)}{n}$ conditionnellement à $X_n \neq 0$ tend vers 0 en loi. Le coefficient normalisateur dans ce cas est remplacé par \sqrt{n} .

Théorème 2.9. [2]

Si $\lambda = 1$ et $E(\|X_1\|^2) < \infty$, et si $w.v = 0$, alors $\frac{(X_n.w)}{\sqrt{n}}$ conditionnée par $X_n \neq 0$ converge vers une v.a de densité

$$f_2(x) = \frac{1}{2\gamma_2} e^{\frac{|x|}{\gamma_2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \gamma_2 > 0. \quad (2.33)$$

2.7.3 Cas sur-critique

Dans cette section, on suppose que le processus est positivement régulier et non singulier. Nous avons.

Théorème 2.10. [2]

Si $\lambda > 1$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{X_n}{\lambda^n} \right) = vW \quad p.s.,$$

où W est une v.a positive telle que $P(W > 0) > 0$ si et seulement si

$$E(X_1^j \log X_1^j) < \infty, \quad 1 \leq j \leq k. \quad (2.34)$$

Ce résultat a été d'abord obtenu par H. Kesten et B.Stigum en 1966 [22]. Harris en 1963 [18], avait établi la convergence presque sûre de $\frac{X_n}{\lambda^n}$ vers $v.W$ sous l'hypothèse d'existence des moments d'ordre 2 de X_n qui simplifie considérablement la démonstration. Une troisième approche plus générale a été proposée par Athreya en 1970 [2], elle est basée sur le théorème suivant qui utilise les propriétés des martingales.

Théorème 2.11. [2]

Soit $W_n = (u.X_n)\lambda^{-n}$ et \mathbb{F}_n une σ -algèbre engendrée par $\{X_i, i = 1, \dots, n\}$. Alors $\{(W_n, \mathbb{F}_n); n \geq 0\}$ est une martingale positive, et par conséquent $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ existe presque sûrement, (sa limite est définie dans le théorème 2.10.).

Chapitre 3

Un modèle épidémique par branchement multiple

3.1 Introduction

L'épidémiologie est un domaine important, où la modélisation a donné d'importants résultats permettant de prédire l'évolution et la propagation de certaines maladies infectieuses. Les modèles compartimentaux font partie des premiers modèles mathématiques à avoir été utilisés en épidémiologie. L'idée est de diviser une population en plusieurs classes épidémiologiques (compartiments). Ces modèles sont déterministes, cependant les interactions entre les individus ne sont pas toujours uniformes mais possèdent un caractère aléatoire intrinsèque, donc il peut être parfois pertinent de rendre probabiliste un modèle. Parmi les modèles stochastiques, les processus de branchement occupent une place importante dans l'application à l'épidémiologie.

L'épidémie actuelle de coronavirus remet l'épidémiologie au premier plan. Plusieurs modèles compartimentaux ont été proposés (voir [4,9,26]).

Un modèle stochastique utilisant le processus de branchement uni-type a été proposé dans [17], il a été appliqué à l'évolution de l'épidémie de coronavirus en Algérie et en France.

La littérature relative aux processus de branchement multi-types est beaucoup moins riche que celle du cas uni-type et il y a peu de travaux concernant l'estimation des paramètres de ces modèles. On peut citer entre autres l'article de S. Pénisson [35] en 2014, où des estimateurs des paramètres d'une épidémie modélisée par un branchement multiple ont

été proposés. A. Ouari [33] en 2018 s'est intéressée à la construction de modèles paramétriques de processus de branchement uni et multi-types qui sont destinés à être utilisés pour l'inférence sur ces processus.

Dans ce chapitre, nous présentons un modèle basé sur un processus de branchement de Galton-Watson multi-type proposé par A.K. Laha dans l'article [25] paru en septembre 2021. Les résultats obtenus pour ce modèle ont été utilisés pour la modélisation de l'épidémie du covid-19.

3.2 Modèle de base

Supposons que l'épidémie des maladies infectueuses commence par un seul individu (cas) infecté non détecté, cet individu infecte alors X_1 individus, où X_1 est supposé suivre une distribution de Poisson de paramètre λ (notée $P(\lambda)$). On suppose que ces individus ont une probabilité p d'être détecté et que les événements "détectés" sont indépendants les uns des autres. On note X_1^{ID} le nombre d'individus infectés détectés et X_1^{IND} le nombre d'individus infectés non détectés. Ainsi $X_1 = X_1^{ID} + X_1^{IND}$ avec $X_1^{ID} \sim P(\lambda p)$ et $X_1^{IND} \sim P(\lambda(1-p))$, X_1^{ID} et X_1^{IND} sont indépendantes. On note par X_1^C la variable aléatoire qui représente le nombre de cas observés à la première génération. Ainsi, $X_1^C = X_1^{ID}$. Supposons que chacun des X_1^{ID} individus avait infecté W_2^i individus avant d'être détectés, $i = 1, \dots, X_1^{ID}$. On suppose de plus que les v.a W_2^i sont mutuellement indépendantes de loi $P(\lambda)$.

Les individus X_1^{IND} infectent U_2^i individus, où les v.a U_2^i sont mutuellement indépendantes de loi $P(\lambda)$.

Comme précédemment, on suppose que ces individus infectés sont détectés avec une probabilité p indépendamment les uns des autres.

Soit $U_2^i = Y_2^i + Z_2^i$, où Y_2^i sont les individus infectés qui sont détectés, et Z_2^i sont les individus infectés qui ne sont pas détectés. La deuxième génération aura alors trois types d'individus différents :

- Les individus X_2^{ID} : infectés et détectés (ID)
- Les individus X_2^{IND} : infectés et non détectés (IND)
- Les individus X_2^{IQ} : infectés et mis en quarantaine (IQ).

On peut représenter ces variables aléatoires comme suit :

$$X_2^{ID} = \sum_{k=0}^{X_1^{IND}} Y_2^k, \quad Y_2^k \sim P(\lambda p), \quad (3.1)$$

$$X_2^{IND} = \sum_{k=0}^{X_1^{IND}} Z_2^k, \quad Z_2^k \sim P(\lambda(1-p)), \quad (3.2)$$

$$X_2^{IQ} = \sum_{k=0}^{X_1^{ID}} W_2^k, \quad W_2^k \sim P(\lambda). \quad (3.3)$$

Le nombre de cas à la deuxième génération est $X_2^C = X_2^{ID} + X_2^{IQ}$.

Le processus se poursuit de sorte que à la n-ième génération on aura :

$$X_n^{ID} = \sum_{k=0}^{X_{n-1}^{IND}} Y_n^k, \quad Y_n^k \sim P(\lambda p), \quad (3.4)$$

$$X_n^{IND} = \sum_{k=0}^{X_{n-1}^{IND}} Z_n^k, \quad Z_n^k \sim P(\lambda(1-p)), \quad (3.5)$$

$$X_n^{IQ} = \sum_{k=0}^{X_{n-1}^{ID}} W_n^k, \quad W_n^k \sim P(\lambda). \quad (3.6)$$

Le nombre de cas à la génération n est $X_n^C = X_n^{ID} + X_n^{IQ}$. Soit $S_n^C = \sum_{i=1}^n X_i^C$ le nombre total de cas cumulé jusqu'à la génération n. On peut noter que pour la plupart des épidémies (y compris le COVID-19) les nombres S_n^C et X_n^C sont les seules informations disponibles publiquement.

Il a été vu dans le chapitre 2 que dans un processus de Galton-Watson multi-type, la matrice de reproduction moyenne et sa valeur propre dominante de Perron-Frobenius détermine l'extinction de ce processus (voir la section 2.6 du chapitre 2). Pour le processus considéré, la matrice de reproduction moyenne M de valeur propre dominante est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ \lambda p & \lambda(1-p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où m_{ij} : le (i, j) -ième élément de la matrice M , est le nombre moyen de descendants du j -ième type d'un parent du i -ième type. On désigne ici les types ID, IND et QI en tant que types 1, 2 et 3, respectivement. La matrice M n'est pas régulière et donc l'application directe du résultat n'est pas appropriée.

3.3 Analyse du modèle de base

Dans cette section, on donne des résultats évaluant les moments de nos variables d'intérêts $E(X_n^{IND})$, $E(X_n^{ID})$, $E(X_n^C)$ et $E(S_n^C)$.

Théorème 3.1. *[25]*

Pour $n \geq 2$, nous avons

- (a) $E(X_n^{IND}) = \lambda^n (1 - p)^n$
- (b) $E(X_n^{ID}) = \lambda^n p (1 - p)^{n-1}$
- (c) $E(X_n^C) = \lambda^n p (2 - p) (1 - p)^{n-2}$
- (d) $E(S_n^C) = \lambda p \left[1 + \lambda (2 - p) \frac{1 - (\lambda(1-p))^{n-1}}{1 - \lambda(1-p)} \right]$

Remarque.

Notons $\lambda p = \mu$, on obtient

$$E(X_n^C) = \mu (\lambda - \mu)^{n-2} (2\lambda - \mu),$$

et

$$E(S_n^C) = \mu \left[1 + (2\lambda - \mu) \frac{1 - (\lambda - \mu)^{n-1}}{1 - (\lambda - \mu)} \right],$$

d'où l'on voit que

$$E(S_n^C) < \infty \text{ si } \lambda - \mu < 1.$$

Cela implique que lorsque $\lambda - \mu < 1$, le nombre moyen de nouveaux cas tend vers zéro pour un n suffisamment grand. Ce qui veut dire que l'épidémie s'éteint à long terme.

3.4 Modèle étendu

Dans cette section, on généralise le modèle présenté dans la section 3.2 en tenant compte de la variation de λ et p au fils des générations. On suppose que $X_1 \sim P(\lambda_1)$ et $X_1 = X_1^{ID} + X_1^{IND}$, où $X_1^{ID} \sim P(\lambda_1 p_1)$, $X_1^{IND} \sim P(\lambda_1(1 - p_1))$ et X_1^{ID} et X_1^{IND} sont indépendantes. En suivant le processus décrit dans la section 3.2 avec la variation de λ et p , on obtient

$$X_2^{ID} = \sum_{k=0}^{X_1^{IND}} Y_2^k, \quad Y_2^k \sim P(\lambda_2 p_2), \quad (3.7)$$

$$X_2^{IND} = \sum_{k=0}^{X_1^{IND}} Z_2^k, \quad Z_2^k \sim P(\lambda_2(1 - p_2)), \quad (3.8)$$

$$X_2^{IQ} = \sum_{k=0}^{X_1^{ID}} W_2^k, \quad W_2^k \sim P(\lambda_2). \quad (3.9)$$

A la génération n , on aura

$$X_n^{ID} = \sum_{k=0}^{X_{n-1}^{IND}} Y_n^k, \quad Y_n^k \sim P(\lambda_n p_n), \quad (3.10)$$

$$X_n^{IND} = \sum_{k=0}^{X_{n-1}^{IND}} Z_n^k, \quad Z_n^k \sim P(\lambda_n(1 - p_n)), \quad (3.11)$$

$$X_n^{IQ} = \sum_{k=0}^{X_{n-1}^{ID}} W_n^k, \quad W_n^k \sim P(\lambda_n). \quad (3.12)$$

Comme précédemment, le nombre de cas à la génération n est $X_n^C = X_n^{ID} + X_n^{IQ}$ avec la convention que $X_1^{IQ} = 0$ et $S_n^C = \sum_{i=1}^n X_i^C$ le nombre total de cas cumulé jusqu'à la génération n .

Théorème 3.2. [25]

Pour $n \geq 2$, on a

- (a) $E(X_n^{IND}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(1 - p_i)$.
- (b) $E(X_n^{ID}) = \lambda_n p_n \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i(1 - p_i)$.

(c) $E(X_n^C) = \lambda_{n-1}\lambda_n\{(1 - p_{n-1})p_n + p_{n-1}\} \prod_{i=1}^{n-2} \lambda_i(1 - p_i)$. où $\prod_{i=1}^0 \lambda_i(1 - p_i) = 1$ par convention.

3.5 Application : épidémie de COVID-19 en Inde

Dans cette section, on applique d’abord le modèle de base de la section 3.2 aux données de COVID-19 de l’Inde. Les informations sont données sur le nombre cumulé de cas confirmés de COVID-19 à des intervalles de 10 jours pour la période du 1^{er} février 2020 au 31 mai 2020. Le choix de l’intervalle de 10 jours est guidé par l’hypothèse que toute personne qui est détectée infectée le sera dans la période de 10 jours. Il est aussi rapporté, dans l’article [26], que la période d’incubation médiane estimée de COVID-19 est de 5.1 jours. Le choix d’une période de 10 jours est donc un délai raisonnable qu’une personne infectée soit détectée. De plus, on suppose que grâce au processus approfondi de recherche de contacts, toutes les personnes qui sont infectées par un patient détecté seraient identifiées et mises en quarantaine afin qu’elles n’infectent aucun autre individu. Les données utilisées pour cette analyse sont présentées dans le tableau 3.1.

Date	génération n	Nb cumulé de cas	Nb de nouveaux cas dans les 10 derniers jours
Fev-01	2	1	1
Fev-11	3	3	2
Fev-21	4	3	0
Mar-02	5	5	2
Mar-12	6	82	77
Mar-22	7	402	321
Avr-01	8	2059	1657
Avr-11	9	8453	6394
Avr-21	10	20080	11627
Mai-01	11	37257	17177
Mai-11	12	70767	33501
Mai-21	13	118225	47458
Mai-31	14	190649	72424

TAB. 3.1 – Evolution des cas de COVID-19 en Inde entre le 1er février et le 31 mai 2020.

Afin de s’adapter au modèle décrit dans la section 2.3, on doit estimer les paramètres inconnus $\lambda > 0$ et $0 < p < 1$ sur la base des données ci-dessus. On suppose que le premier cas

CHAPITRE 3. UN MODÈLE ÉPIDÉMIQUE PAR BRANCHEMENT MULTIPLE

de COVID-19 est détecté dans la deuxième génération pour être cohérent avec l'hypothèse du modèle selon laquelle le processus d'infection commence par un seul individu infecté non détecté. On utilise la méthode des moindres carrés pour estimer la valeur des paramètres inconnus.

On minimise $L(\lambda, p)$ par rapport à λ et p

$$L(\lambda, p) = \sum_{k=2}^{14} [x_k^C - \lambda^k p(2-p)(1-p)^{k-2}]^2, \quad (3.13)$$

où x_k^C est le nombre de cas confirmés observés à la génération k .

La minimisation de $L(\lambda, p)$ se fait par la résolution du système

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\lambda, p)}{\partial \lambda} = 0, \\ \frac{\partial L(\lambda, p)}{\partial p} = 0. \end{cases}$$

Soit $r_k = x_k^C - \lambda^k p(2-p)(1-p)^{k-2}$, $\alpha_k = k(\lambda(1-p))^{k-2}$ et $\beta_k = (\lambda(1-p))^{k-3}(kp^2 - 2kp + 2)$.

On obtient le système d'équations non-linéaires suivant :

$$\begin{cases} \sum_{k=2}^{14} r_k \alpha_k = 0 \\ \sum_{k=2}^{14} r_k \beta_k = 0 \end{cases}$$

Après la résolution, on obtient les estimateurs des moindres carrés $\hat{\lambda} = 17.068$ et $\hat{p} = 0.907$, la valeur de l'erreur quadratique moyenne (RMSE) est de 1834,82 et les valeurs réelles et ajustées obtenues à partir du modèle sont illustrées à la figure 3.1 ci-dessous.

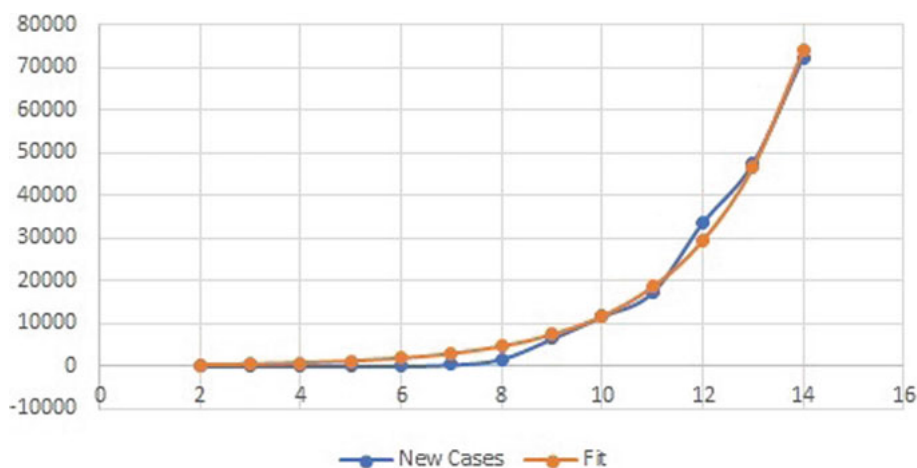


FIG. 3.1 – Les valeurs réelles et ajustées (fit) obtenues à l'aide du modèle de base

CHAPITRE 3. UN MODÈLE ÉPIDÉMIQUE PAR BRANCHEMENT MULTIPLE

Comme le modèle de base ne peut pas prendre en compte la variabilité possible des paramètres λ et p , on utilise maintenant le modèle étendu de la section 3.4 où l'on peut prendre en compte l'éventuel changement des valeurs des paramètres avant et après le confinement national. On suppose que jusqu'à la génération $k = 7$, c'est-à-dire avant la période d'annonce du confinement, les valeurs des paramètres étaient λ_1 et p_1 alors que celles à partir de la génération $k = 8$ sont λ_2 et p_2 . Puisque le but de déclarer le confinement était de réduire la propagation de l'infection, on impose la contrainte $\lambda_2 \leq \lambda_1$. De plus, étant donné que des plans et des efforts plus intenses pour détecter les cas de COVID-19 ont également été mis en place, on impose $p_1 \leq p_2$ comme autre contrainte. Comme précédemment, on obtient les estimations par les moindres carrés des quatre paramètres $\lambda_1 = 3.167$, $\lambda_2 = 2.946$, $p_1 = 0.123$ et $p_2 = 0.471$. La valeur de l'erreur quadratique moyenne (RMSE) est de 1251.49, qui est bien inférieure au modèle de base, ce qui indique un meilleur ajustement. La même conclusion peut être tirée en inspectant visuellement la figure 3.2.

Une caractéristique intéressante de ce modèle est qu'il peut être utilisé pour comprendre l'impact d'une intervention telle que le confinement. Ceci peut être obtenu en calculant l'écart entre les nombre cumulés de cas si les valeurs des paramètres étaient les mêmes (c'est-à-dire si $\lambda_2 = \lambda_1$ et $p_2 = p_1$) et lorsque les paramètres sont différents. En utilisant l'idée ci-dessus, nous constatons que sans le confinement, le nombre cumulé attendu de cas confirmés aurait été de 567865 de plus).

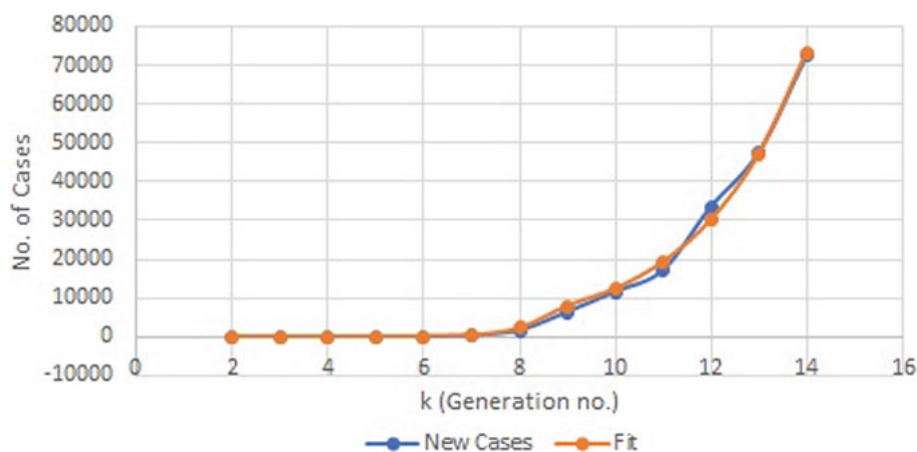


FIG. 3.2 – Les valeurs réelles et ajustées obtenues à l'aide du modèle étendu avec un changement de paramètres qui s'est produit à $k = 7$.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté deux modèles de processus de branchement multi-type pour l'étude de la propagation d'une épidémie de maladie infectieuse prenant en compte la mise en quarantaine et la recherche des cas contacts, le second modèle étant une extension du premier. Le modèle étendu permet de déterminer l'impact des interventions visant à ralentir la propagation de la maladie. Les modèles sont ensuite appliqués aux données publiquement disponibles sur l'épidémie de COVID-19 en Inde. Le modèle étendu semble mieux s'adapter aux données disponibles que le modèle de base.

Conclusion

Le travail de ce mémoire a porté sur l'étude du processus de Galton-Watson en temps discret.

En premier lieu, on a abordé le processus de Galton-Watson uni-type, où on a cité les notions de base tel que la fonction génératrice, la probabilité d'extinction, le comportement asymptotique et la marche aléatoire, par la suite on a introduit la notion d'immigration afin de comprendre l'évolution des populations.

En deuxième lieu, on s'est intéressé au processus de Galton-Watson multi-type. Par la généralisation des notions du cas uni-type, on a vu le rôle fondamental de la fonction génératrice, le calcul de la probabilité d'extinction qu'on a illustré avec l'exemple de l'extinction de la population de lynx pour mieux comprendre cette notion et nous avons énoncé quelques théorèmes limites.

A la fin, nous avons présenté un modèle basé sur le processus de branchement multi-type qui a été ensuite appliqué à l'évolution de l'épidémie du coronavirus.

Comme perspectives, on peut essayer de proposer l'étude des processus multi-types en prenant en compte d'autres aspects dans la dynamique de la population tels que l'immigration et la mutation avec une échelle de temps continu.

L'intérêt de développer des méthodes d'inférence statistiques propres à ces modèles est de grande actualité. Proposer des approches d'estimation paramétrique pour les processus de branchement serait une perspective importante, en vue d'éventuelles applications en biologie et surtout en épidémiologie. Les modèles présentés dans le chapitre 3 peuvent être étendus davantage pour prendre en compte d'autres paramètres et d'autres types.

Bibliographie

- [1] J. Angst. Modèles aléatoires en biologie. Université de Rennes 1, (2012).
- [2] K.B. Athreya, P.E. Ney. Branching processes. Springer, (1972).
- [3] N. Bacaer. Histoire des mathématiques et de populations. Le sel et le fer, Cassini, (2008).
- [4] N. Bacaer. Un modèle mathématique des débuts de l'épidémie de Coronavirus en France. *Math. model. Nat. Phenom* 15 (2020) 29.
- [5] V. Bansaye. Cell contamination and branching processes in a random environment with immigration. *Advances in Applied Probability*, 41(4) :1059-1081, (2009).
- [6] V. Bansaye. Proliferating parasites in dividing cells : Kimmel's branching model revisited. *The Annals of Applied Probability*, pages 967-996, (2008).
- [7] J. Berestycki, V. Bansaye. Large deviations for branching processes in random environment. arXiv preprint arXiv :0810.4991, (2008).
- [8] I.J. Bienaymé. De la loi de multiplication et de la durée des familles. *Soc. Philomat. Paris Extraits, Sér, 5* : 37-39 (1845).
- [9] T. Boulmezaoued. Un modèle de prédiction de l'épidémie Covid-19 et une stratégie ZigZag pour le contrôler. hal 02561051, (2020).
- [10] D. Chafai. F. Malrieu. Recueil de modèles aléatoires. Springer (2015).
- [11] N. Champagnat. Processus de Galton-Watson et applications en dynamique des populations. Notes de cours, (2015).
- [12] C.R. Darwin, *On the Origin of Species by Means of Natural Selection*. John Murray, London, (1859).
- [13] C. Dombry, C. Mazza, V. Bansaye. Phenotypic diversity and population growth in fluctuating environment : a MBPRE approach. arXiv preprint arXiv :0912.1194, (2018).

BIBLIOGRAPHIE

- [14] R. Forien, G. Pang, E. Pardoux. Estimating the state of the covid-19 in France using a model with memory. The royal society publishing, (2021).
- [15] F. Galton. Problem 4001. Educational Times, (1873).
- [16] I.I. Ghikman, A.V. Skorohod. The theory of stochastic processes. Springer, (1975).
- [17] S. Guendoud. Sur quelques modèles aléatoires célèbres en biologie. Mémoire de master, (2020).
- [18] T.E. Harris. The theory of branching processes. Berlin Springer (1963).
- [19] C. Jacob. Branching Processes : Their Role in epidemiology. International journal of environmental research and public health, 7(3) : 1186-1204, (2010).
- [20] P. Jagers, F.C. Klebaner, S. Sagitov. On the path to extinction. Proceedings of the National Academy of Sciences, (2007)
- [21] A. Joffe, F. Spitzer. On multitype branching processes with $\lambda \leq 1$. Journal of mathematical analysis and applications 19, 409-430, (1967).
- [22] H. Kesten, B.P. Stigum. A limit theorem for multidimensional Galton-Watson processes. The annals of mathematical statistics 37(5) : 1211-1223, (1966).
- [23] M. Kimmel, D.E. Axelrod. Branching processes in biology. Springer, (2002).
- [24] B. Klein, P.D.M. Macdonald. The multitype continuous-time markov branching process in a periodic environment. Advances in Applied Probability, (1980).
- [25] A.K. Laha. A Multi-type Branching Process Model for Epidemics with Application to COVID-19 in India. Strategic Management, Decision Theory, and Decision Science, pp 51-58, Springer, (2021).
- [26] S.A. Lauer, K.H. Grantz, Q. Bi, F.K. Jones, Q. Zheng, H.R. Meredith, A.S. Azman, N.G. Reich, J. Lessler. The incubation period of coronavirus disease 2019 (covid-19) from publicly reported confirmed cases : estimation and application, (2020).
- [27] S. Méléard. Modèles Aléatoires en Ecologie et Evolution. Springer, (2016).
- [28] C.J. Mode. Multitype branching processes : theory and applications. volume 34. American Elsevier Pub. Co, (1971).
- [29] T.W. Mullikin. Limiting distributions for critical multitype branching processes with discrete time. TAMS 106,469-494, (1963).

BIBLIOGRAPHIE

- [30] A.V. Nagaev. On Estimating the Expected Number of Direct Descendants of a Particle in a Branching Process. *Theory of Probability and its Applications* 12 314-320, (1967).
- [31] J. Neveu. *Martingales à temps discret*. Masson, (1972).
- [32] J. Neveu. Arbres et processus de Galton-Watson. *Annales de l'I. H. P*, (1986).
- [33] A. Ouaari. Modèles paramétriques de processus de branchement uni et multi-types. Thèse de doctorat. Université Montpellier, (2018)..
- [34] A.G. Pakes. Biological applications of branching processes. *Handbook of statistics*, (2003).
- [35] S. Péniisson. Estimation of the infection parameter of an epidemic modeled by a branching process. *Electronic Journal of Statistics* 8(2) :2158-2187, (2014).
- [36] E. Seneta. On the supercritical Galton-Watson process with immigration. *Math. Biosci.* 7, 9-14, (1970).
- [37] V.A. Vatutin, P. Haccou, P. Jagers. *Branching processes : variation, growth, and extinction of populations*. Cambridge University Press, (2005)
- [38] H.W. Watson, F. Galton. On the probability of the extinction of families. *The Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland*, (1875).
- [39] X. Wu. *Branching processes with biological applications*. PhD thesis, Rice University, (2010).
- [40] B.P. Yaglom. Certain limit theorems of the theory of branching stochastic process. *Doki. Akad. Nauk. SSSR (n. s)* 56, 795-798, (1947).
- [41] G.U. Yule. A mathematical theory of evolution, based on the conclusions of Dr. J.C. Willis. *Philos. R. Soc. London, Ser. B* 213 :21-87, (1924).

Résumé :

Ce mémoire porte sur les processus de Galton-Watson uni-type et multi-types. Au premier chapitre nous avons étudié le cas uni-type ou nous avons énoncé les différentes notions, propriétés, définitions et concepts de base de ces processus, puis nous avons présenté ces caractéristiques que nous avons illustré avec des exemples.

Au second chapitre on s'est intéressé au cas multi-type que nous avons détaillé grâce à la généralisation des résultats du premier chapitre et on a proposé des exemples d'application.

Dans le dernier chapitre, nous avons présenté un modèle sur le processus de Galton-Watson qui a été appliqué à l'évolution du coronavirus en Inde.

Mots clés :

- Processus de Galton-Watson
- Chaîne de Markov
- Génération
- Fonction génératrice
- Arbre
- Notation de Ulam-Harris-Neveu
- Probabilité d'extinction
- Comportement asymptotique
- Marche aléatoire
- Processus de contour
- Immigration
- Régularité positive
- Singularité
- Epidémiologie
- Individu