

RÉPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU
FACULTÉ DU GÉNIE DE LA CONSTRUCTION
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE



MEMOIRE

Présenté Pour Obtenir Le Diplôme De Master Académique
En Génie Mécanique
OPTION : "Construction Mécanique "

THÈME

Comportement inélastique des structures porteuses

Présenté par : **HANOUTI SARA**

Devant le jury :

M^r : **ASMA. F**

M^r : **DJEBBAR. A**

M^r : **ILLOUL. C**

M^r : **ZIANI. H**

UMMTO: President

UMMTO: Promoteur

UMMTO: Examineur

UMMTO: Examineur

Promotion 2015/2016

Remerciements

Je remercie tout d'abord Dieu qui m'a guidé et qui m'a donné la force et la volonté de réaliser ce travail.

Au terme de ce travail, il m'est très agréable d'exprimer toute ma gratitude, ma reconnaissance et mes très vifs remerciements à Monsieur DJEBBAR Arezki. Professeur au département de génie mécanique de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Pour avoir accepté de diriger ce travail. L'attention, les conseils avisés, et surtout la grande disponibilité dont il a fait preuve m'ont beaucoup aidé.

Je tiens également à remercier l'ensemble des membres du jury d'avoir accepté d'examiner ce travail, je leur suis très reconnaissante d'y avoir consacré une partie de leur temps si précieux.

Mes remerciements sont adressés à l'ensemble du corps enseignant au département de génie mécanique qui a contribué à ma formation.

Que mes camarades trouvent ici toute ma reconnaissance pour le temps passé en leurs compagnies ainsi que tous mes amis avec qui j'ai partagé des moments inoubliables pendant mes études.

Enfin mes pensées vont vers mes parents, mes trois sœurs, mon frère. C'est grâce à leur soutien que j'ai pu faire mes études, leurs encouragements permanents. Bref c'est à eux que je dois tout.

Dédicaces

Je dédie ce travail :

À ma mère et mon père

À mon frère et mes sœurs en particulier

Samira

À mon neveu Samy et sa sœur Sarah

À mon beau frère

À mes cousins et cousines

À mes amis, et toute personne m'ayant aidé
de près ou de loin.

Table des Matières

1.1 Evolution du calcul en plasticité	1
1.2 Problématique	1
1.3 Objectifs du mémoire.....	1
1.4 Structuration du mémoire	2

CHAPITRE I MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

I.1-Introduction	3
I. 2-Déformations d'un milieu continu	3
I. 3- Contraintes dans un milieu continu.....	7
I. 3.1-Tenseur des contraintes de Cauchy.....	7
I. 3.2-Equilibre ; champs de contrainte statiquement admissibles.....	9
I.3.3- Le Principe des Puissances Virtuelles (P.P.V.).....	11
I.4- Elasticité.....	12
I.4.1- Comportement élastique en transformation infinitésimale.....	12
I.4.2- Problème d'élasticité HPP.....	13

CHAPITRE II COMPORTEMENTS DES MATERIAUX

II.1-Introduction	15
II.2- Diversité des comportements.....	15
II.3-Modèles rhéologiques.....	18
II.4-Mise en évidence expérimentale du comportement élastoplastique ;	
II.4.1-L'expérience de charge-décharge.....	21
II.5-Décomposition de la transformation élastoplastique ; notion de configuration relâchée.....	26
II.6-Critère de plasticité en transformation infinitésimale ; fonction de charge	26
II.6.1-Domains d'élasticité initial et actuel et fonction de charge.....	26
II.6.2-Cas des matériaux isotropes.....	29
II.7-Formulation de la loi de comportement ; règle d'écoulement plastique.....	30
II.7.1-Décomposition additive de la déformation totale linéarisée.....	30
II.7.2-Principe du travail plastique maximal ; règle de normalité.....	33
II.7.3-Identification du paramètre M à partir de l'essai de traction simple.....	35
II.7.4-Le cas de la plasticité parfaite.....	36
II.7.5-Cas du matériau isotrope.....	37

CHAPITRE III DEUX CRITERES DE PLASTICITE USUELS VON MISES ET TRESCA

III.1-Introduction.....	39
III.2-Critère de Von Mises.....	40
III.2.1-Domaine d'élasticité.	40
III.2.2-Règle d'écoulement plastique (matériau standard)	41
III.3-Critère de Tresca.....	42
III.3.1-Domaine d'élasticité.	42
III.3.2-Règle d'écoulement plastique.....	43

CHAPITRE IV ANALYSE INELASTIQUE DES STRUCTURES

IV.1-Introduction.....	45
IV.2-Un exemple simple de structure.....	45
IV.2.1-Phase de comportement élastique.....	46

IV.2.2-Phase élastoplastique.....	48
IV.2.3- Charge limite et ruine plastique.....	49
IV.2.4-Décharge de la structure. Etat résiduel.....	50
IV.2.5-Récapitulation.....	52
IV.3-Généralisation au cas des systèmes en milieu continu tridimensionnel.....	53
IV.3.1-Position du problème d'évolution élastoplastique.....	53
IV.4-Cas des systèmes soumis à un mode de chargement à un nombre fini de paramètres.....	55
IV.5-Un exemple de résolution: la flexion élastoplastique d'une poutre cylindrique.....	57
IV.5.1- Phase élastique.....	58
IV.5.2-Phase élastoplastique.....	59
IV.5.3-Solution en zone élastique.....	60
IV.5.4-Solution dans les zones plastiques.....	60
IV.5.5-Analyse de la décharge ; état résiduel.....	62
IV.6-Exemple de calcul d'un portique.....	63
IV.6.1-Analyse statique.....	63
IV.6.2-Calcul élastique.....	64
IV.6.3-Evolution élastoplastique.....	65
IV.6.4-Charge limite et mécanisme de ruine plastique.....	66
IV.6.5-Décharge et état résiduel de la structure.....	67
IV. 6.6-Interprétation de l'état résiduel.....	68

CHAPITRE V ROTULES ET MECANISMES

V.1-Introduction.....	71
V.2-Formation de rotules plastiques.....	71
V.3- Charges de ruine et mécanismes de ruine pour des éléments de structures.....	72
V. 3.1-Exemple d'une poutre en charpente métallique.....	72
V.4-Théorèmes fondamentaux de l'analyse plastique des structures.....	73
4.1Théorème de la limite inferieure.....	74
V.4.2-Théorème de la limite supérieure.....	74
V.4.3-Théorème de la l'unicité.....	74
V.5- Méthodes utilisées pour le calcul des charges de ruine pour des éléments structuraux ou structures simples.....	74
V. 5.1-Calcul de la charge de ruine en utilisant le théorème des moments libre et de réactions.....	74
V.5.2-Calcul de la charge de ruine en utilisant le principe des travaux virtuels.....	75
V.6-Exemples d'application.....	75
V.6.1.1-Poutre simplement appuyée.....	75
a)- Théorème des moments libre et de réactions.....	75
b)- Principe des travaux virtuels.....	75
V. 6.1.2-Poutre encastrée à une extrémité et appuyée à l'autre ou console retenue.....	77
a)- Théorème des moments libre et de réactions.....	78
b)- Principe des travaux virtuels.....	78
V.6.1.3-Poutre doublement encastrée.....	78
a)- Théorème des moments libre et de réactions.....	79
b)- Principe des travaux virtuels.....	80
V.6.1.4-Poutre continue soumise à un chargement concentré.....	80
a)- Théorème des moments libre et de réactions.....	81
b)- Principe des travaux virtuels.....	82

V.7- Détermination des charges de ruine et mécanismes de ruine d'un portique simple.....	83
V.7.1-Méthode « pas à pas »	83
V.7.2-Caractéristiques du portique.....	83
7.3-Traitement du portique.....	84
V.8-Méthode cinématique.....	87
V.8.1-Beam mechanism.....	88
V.8.2-Sway mechanism.....	89
V.8.3-Combined mechanism.....	91
V.8.4-Effets du rapport $\lambda V/\lambda H$	91
V.8.5-Construction des diagrammes d'interaction.....	92
V.9-Procédé du calcul de la charge de ruine d'un portique hyperstatique.....	93
V.10-Optimisation au calcul de la charge de ruine.....	97
V.a-Première approche.....	97
V.b-Deuxième approche.....	98
V.c-Troisième approche (solution exacte)	98
Conclusion générale.	101
Références bibliographiques	

Liste des figures

Figure a.1 : Déplacement d'un point matériel entre deux configurations.....	3
Figure a.2 : Mouvement de rotation infinitésimale autour de l'axe 3 Ox	5
Figure a.3 : Mouvement de glissement simple en transformation infinitésimale.....	6
Figure a.4 : Contraintes normale et tangentielle sur une facette.....	7
Figure a.5 : Trièdre des directions principales et contraintes principales associées.....	8
Figure a.6 : Représentation d'un état de contrainte dans le plan de Mohr.....	8
Figure a.7 : Condition de saut à la traversée d'une surface de discontinuité d'un champ de contrainte.....	9
Figure a.8 : (a) surface libre de contrainte ; (b) surface soumise à une pression uniforme.....	10
Figure a.9 : (a) contact sans frottement ; (b) encastrement.....	11
Figure a.10 : Surface de discontinuité d'un champ de vitesse virtuel.....	11
Figure a.11 : Données relatives au <i>chargement</i> d'un système en milieu continu 3D.....	13
Figure a.12 : Structure générale d'un problème d'élasticité H.P.P.....	14
Figure b.1 : Courbes contrainte-déformation pour l'acier.....	15
Figure b.2 : Ecouissage de matériaux ductiles à gauche et matériaux fragiles à droite.....	16
Figure b.3 : Courbe contrainte-déformation.....	17
Figure b.4 : Essai de fluage déformation-temps	17
Figure b.5 : Fluage contrainte-temps	18
Figure b.5 : Courbe expérimentale de traction d'une éprouvette d'acier.....	21
Figure b.6 : Diagramme $\sigma - \varepsilon$ pour un matériau élastoplastique avec écouissage.....	22
Figure b.7 : Evolution des courbes de traction d'une éprouvette d'aluminium en fonction de la vitesse de sollicitation.....	23
Figure b.8 : Courbes $\sigma - \varepsilon$ représentatives des comportements (a) élastique non-linéaire et (b) Elastoplastique.....	24
Figure b.9 : Schéma de comportement élastoplastique parfait.....	25
Figure b.10 : Exemples d'essais "multiaxiaux".....	25
Figure b.11 : Détermination expérimentale du domaine d'élasticité initial en traction compression d'un matériau à l'aide d'un essai de traction-compression-torsion (d'après Bui, 1969).....	26
Figure b.12 : Configurations successives d'un élément de volume matériel au cours d'un cycle charge-décharge élastoplastique.....	27
Figure b.13 : Domaine d'élasticité initial et actuel.....	28
Figure b.14 : Modèles d'écouissage "isotrope" et "cinématique".....	29
Figure b.15 : Isotropie plastique d'un matériau.....	31
Figure b.16 : Séquences plastiques le long d'un trajet de chargement dans l'espace des contraintes.....	32
Figure b.17 : Différents cas de chargement incrémental.....	33
Figure b.18 : Projections normale et tangentielle à la surface de charge de l'incrément de contrainte	34
Figure b.19 : Illustration du principe du travail plastique maximal.....	34
Figure b.20 : Cycle charge-décharge élémentaire dans un essai de traction simple.....	36
Figure b.21 : Ecriture de la loi de comportement pour un matériau élastique parfaitement plastique standard.....	37
Figure c.1 : Représentation géométrique dans l'espace des contraintes principales de la décomposition d'un tenseur en parties sphérique et déviatorique.....	39
Figure c.2 : Domaine d'élasticité relatif au critère de Von Mises.....	40

Figure c.3 : Interprétation géométrique de la règle d'écoulement associée pour un critère de Von Mises.....	41
Figure c.4: Section par un plan déviateur du domaine d'élasticité relatif à un critère de Tresca.....	43
Figure c.5 : Règle d'écoulement plastique pour un matériau de Tresca : (a) régime de face, (b) régime d'arête.....	44
Figure d.1 : Calcul élastoplastique d'un système réticulé.....	45
Figure d.2 : Diagramme de comportement élastique parfaitement plastique de la barre n°i.....	46
Figure d.3 : Réponse de la structure en phase élastique et évolution des efforts dans les barres.....	47
Figure d.4 : Phase élastoplastique de comportement de la structure.....	48
Figure d.5 : Charge limite et mécanisme de ruine plastique.....	50
Figure d.6 : Efforts résiduels rétablissant élastiquement la compatibilité géométrique de la structure.....	52
Figure d.7 : Mise en évidence des différentes phases de comportement de la structure.....	52
Figure d.8 : Données relatives au chargement d'un système en milieu continu 3D.....	53
Figure d.9 : Structure générale d'un problème d'évolution élastoplastique.....	55
Figure d.10 : Evolution élastoplastique d'un système en matériau élastique parfaitement plastique dans le cas d'un mode de chargement à m paramètres.....	56
Figure d.11 : Flexion élastoplastique d'une poutre cylindrique.....	57
Figure d.12 : Diagrammes de contrainte dans les différentes phases d'évolution élastoplastique du problème de la flexion.....	59
Figure d.13.....	63
Figure d.14.....	64
Figure d.15.....	65
Figure d.16.....	66
Figure d.17.....	67
Figure d.18.....	67
Figure d.19.....	68
Figure d.20 : Diagramme «moment-courbure» d'une poutre en flexion élastoplastique.....	69
Figure d.21 : Décharge élastique totale de la poutre et diagramme des contraintes résiduelles.....	70
Figure e.1 : facteur de forme pour quelques sections usuelles.....	72
Figure e.2 : Comportement d'une poutre en charpente métallique sous charge croissante.....	73
Figure e.3: Poutre simplement appuyée.....	76
Figure e.4 : Poutre encastrée d'un coté, et simplement appuyée de l'autre.....	77
Figure e.5 : Poutre encastrée à ses deux extrémités.....	79
Figure e.6 : Poutre continue sous charges ponctuelles.....	81
Figure e.7 : Mécanisme de ruine des travées extrêmes.....	81
Figure e.8 : Mécanisme de ruine pour la travée du milieu.....	82
Figure e.9 : Portique simple à une travée et un niveau.....	84
Figure e.10: Détermination du mécanisme de ruine d'un portique simple par la méthode « pas à pas ».....	85
Figure e.11 : Courbe facteur de charge λ en fonction du déplacement horizontal du portique simple.....	87
Figure e.12 : Portique simple à une travée et un niveau.....	87
Figure e.13 : « Beam mechanism ».....	88
Figure e.14 : « Sway mechanism ».....	89
Figure e.15: « Combined mechanism ».....	90
Figure e.16 : diagramme des moments fléchissants poutre B-D.....	90
Figure e.17 : Diagramme des moments fléchissants total du portique simple au moment de la ruine.....	91
Figure e.18 : Diagramme d'interaction du portique simple.....	92

Figure e.19 : présentation du portique témoin testé par Boukeloua [9].....	93
Figure e.20 : Portique soumis à deux charges concentrées.....	93
Figure e.21 : Mécanisme de poutre relatif au portique de la figure e.20.....	94
Figure e.22 : Mécanisme de panneau relatif au portique de la figure e.20.....	94
Figure e.23 : Mécanisme optimal avec les discontinuités de taux de rotation aux sections..... potentiellement critiques.....	96
Figure e.24 : Distribution de moments fléchissants associée à la charge de ruine du portique.....	97
Figure e.25 : Poutre encastrée appuyée simplement.....	98
Figure e.26 : charge concentrée au milieu de la poutre.....	98
Figure e.27 : deux charges ponctuelles.....	99
Figure e.28 : Charge répartie.....	99

Liste des notations

E_s	Module de déformation longitudinal (Module de Young)
H	Charge concentrée horizontale
H_c	Charge horizontale de ruine
h	Hauteur d'étage
I	Moment d'inertie de la section totale.
K	Rigidité
l	Travée de la poutre.
M	Moment fléchissant de la poutre
M_p	Moment plastique de la section
M_{pb}	Moment plastique de la poutre
M_{pc}	Moment plastique du poteau
M_r	Moment de rupture de la section
m	Nombre de mécanismes élémentaires de ruine.
N	Nombre de rotule plastique
P	Charge concentrée
P_c	Charge de ruine
P_e	Charge à la limite élastique
P_r	Charge à la limite de rupture
p	Nombre de sections critiques
k	Nombre de redondance ou degré d'hyperstaticité
V	Charge concentrée verticale
V_c	Charge verticale de ruine
$\alpha = \lambda V / \lambda H$	Rapport entre la charge concentrée verticale et la charge concentrée horizontale.
δ_e	Déplacement au seuil élastique
δ_r	Déplacement à la rupture
θ	Rotation plastique
λ	Facteur de charge
λ_c	Facteur de charge de ruine
λ_i	Facteur de charge de l'étape i .
λ_l	Limite inférieure du facteur de charge
λ_u	Limite supérieure du facteur de charge
χ_e	Courbure élastique de la déformée
χ_r	Courbure de rupture de la déformée
Δ	Déplacement virtuel

1- L'évolution du calcul en plasticité

Depuis une soixante-dizaine d'années on s'intéresse de plus en plus au comportement non élastique des éléments porteurs soumis à l'action des charges en deçà de la limite élastique.

Cependant, lorsque la valeur de la contrainte limite élastique (contrainte d'écoulement) est dépassée, la loi de proportionnalité n'est pas longtemps valable. Aussi, la relation charge-contrainte maximale ne peut plus être utilisée avec sécurité pour décrire la déformation maximale. Il faut alors trouver une nouvelle relation qui exprime de façon sûre le rapport entre la charge et la déformation maximale d'une membrure dont le comportement n'est plus élastique.

Par cette voie, le calcul plastique a connu une évolution, et la principale préoccupation des ingénieurs était de déterminer la charge de ruine réelle d'une structure sollicitée dans le domaine plastique et les mécanismes de ruine. Ainsi montrer avec exactitude la marge de sécurité pour tous types de structures.

La détermination du moment plastique de chaque travée se faisant à partir du moment isostatique, un formulaire n'est pas nécessaire pour calculer le moment en tout point comme c'était le cas en élasticité, le calcul peut être manuel et graphique, ce qui permet de visualiser le mécanisme de ruine par la mise en place des sections plastifiées ou rotules plastiques.

1-2 Problématique

Autant que possible l'ingénieur a intérêt à déterminer la rigidité d'une structure dont il est appelé à faire le projet. Aussi il aimerait prévoir avec exactitude les charges de ruine et les mécanismes de ruine pour des éléments de structures ou structures mais le calcul non-linéaire devient complexe et confronté à de nombreuses contraintes dès que le nombre de niveaux ou de travées dépasse l'unité, pour les raisons suivantes :

- Augmentation du degré d'hyperstaticité.
- Augmentation du nombre de sections critiques (sections potentielles pour la formation de rotules plastiques).
- Augmentation du nombre de mécanismes de ruine élémentaires ou mécanismes partiels de ruine.
- Augmentation du nombre de combinaisons de ces différents mécanismes élémentaires.
- Lourdeur des calculs avec l'augmentation des risques d'erreurs sans garantie d'obtention des vrais mécanismes de ruine.

1-3 Objectifs Du Mémoire

Il est proposé dans le présent mémoire d'étudier le comportement du critère charge-déformation des membrures portantes qui ont été soumises à des charges de valeurs suffisantes pour causer des déformations irréversibles, quand la force cesse d'agir où bien en poursuivant le chargement jusqu'à la ruine des structures en acier en considérant un comportement indépendant du temps.

Par la suite définir un modèle de comportement rigide parfaitement plastique pour le calcul des charges de ruine des structures, avec illustration par des exemples de structures portantes allant des poutres simples à une travée jusqu'au calcul des charges de ruine des portiques, des expériences menées par des ingénieurs en génie civil variant les paramètres de charge et de géométrie pour mettre en exergue leur influence sur la charge de ruine et les mécanismes de ruine.

Introduction

1-4 Structuration du mémoire

Le Chapitre I : consiste à faire des rappels de mécanique des milieux continus qui se rapporte aux petites déformations, en première partie. En deuxième partie, la mécanique des structures

Le Chapitre II : explique les différents comportements des matériaux lors des essais mécaniques ainsi que les modèles rhéologiques associés à ces comportements.

Le Chapitre III : cite les deux critères de plasticité pour les matériaux isotropes Tresca et Von Mises.

Le Chapitre IV : Analyse des structures dans les différentes phases du chargement par des exemples illustratifs.

Le Chapitre V : explique la formation des rotules plastiques et mécanismes de ruine en s'appuyant sur des exemples de calcul.

Et enfin une conclusion générale.

I.1-MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

I.1-Introduction

Des rappels de Mécanique des Milieux Continus et des Structures sont indispensables à la bonne compréhension du phénomène de «Plasticité et Calcul à la rupture»
 Cette partie a pour objectif de rappeler brièvement les notions essentielles de *Mécanique des Milieux Continus* ainsi que de *Mécanique des Structures*, considérées comme des prérequis dont il est fait abondamment usage tant dans le problème de Plasticité, que dans celui de Calcul à la Rupture : déformations linéarisées, contraintes, équilibre, puissances virtuelles, problèmes d'élasticité.

I.2-Déformations d'un milieu continu

Se plaçant dans le référentiel d'un observateur matérialisé par un repère cartésien orthonormé $Ox_1 x_2 x_3$, on désigne par Ω_0 (resp. Ω_t) le domaine géométrique occupé par un milieu continu dans sa configuration *initiale* à l'instant $t=0$ (resp. *actuelle* à l'instant t), ainsi que par $\underline{X} = OM_0$ et $\underline{x} = OM_t$ les vecteurs décrivant la position d'un point matériel quelconque dans ces mêmes configurations (figure a.1). On définit alors le vecteur *déplacement* de ce point entre ses deux configurations par :

$$\underline{\xi}(\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t) - \underline{X} \quad (1.1)$$

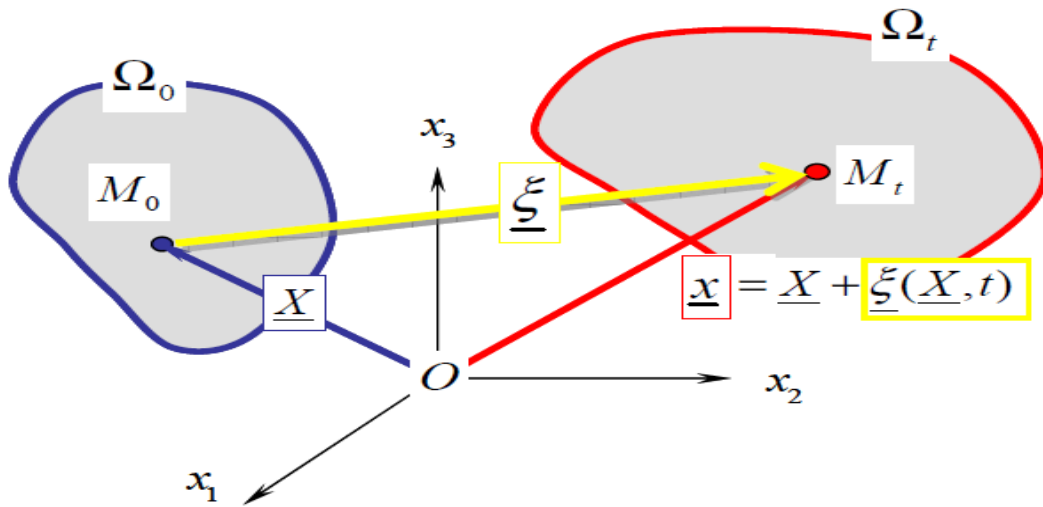


Figure a.1. Déplacement d'un point matériel entre deux configurations

Se plaçant dans l'hypothèse de transformation infinitésimale définie en tout point par :

$$\|\underline{\nabla} \underline{\xi}\| \ll 1 \Leftrightarrow \forall (i, j), \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| \ll 1 \quad (1.2)$$

le tenseur des déformations linéarisées s'écrit en tout point :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X}, t) = 1/2 \left\{ \underline{\nabla} \underline{\xi} + {}^t \underline{\nabla} \underline{\xi} \right\}(\underline{X}, t) \quad (1.3)$$

soit en composantes dans le repère cartésien orthonormé :

$$\forall (i, j) \quad \varepsilon_{ij} = 1/2 \left\{ \frac{\partial \xi_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial X_i} \right\} \quad (1.4)$$

ces déformations étant des *grandeurs sans dimension, petites devant l'unité* compte tenu de l'hypothèse de transformation infinitésimale (1.2). En pratique, on peut alors confondre les coordonnées initiales X_i et actuelles x_i^1 , et écrire :

$$\boxed{\forall (i, j) \quad \varepsilon_{ij} = 1/2 \left\{ \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right\} = 1/2 \{ \xi_{i,j} + \xi_{j,i} \}} \quad (1.5)$$

Etant donné un champ de déformations $\underline{\varepsilon}$ quelconque, un tel champ est dit *géométriquement compatible* s'il dérive au sens de la relation (1.5) d'un champ de déplacement. Les *conditions de compatibilité géométrique* d'un tel champ s'écrivent en coordonnées cartésiennes orthonormées:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{ij,kl} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}, \dots \quad (1.6)$$

En *Plasticité* la question de l'*incompatibilité géométrique des déformations plastiques* est une question essentielle. [1]

On définit la *vitesse* à l'instant t d'un point matériel comme la dérivée par rapport au temps du déplacement de ce point :

$$\underline{U}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial t}(\underline{X}, t) = \underline{\dot{\xi}}(\underline{X}, t) \quad (1.7)$$

soit en tenant compte de l'hypothèse de transformation infinitésimale :

$$\underline{U}(\underline{x}, t) = \underline{\dot{\xi}}(\underline{x}, t) \quad (1.8)$$

et le *tenseur des taux de déformation* s'écrit :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) = 1/2 \left\{ \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{U} + {}^t \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{U} \right\}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\underline{x}, t) \quad (1.9)$$

ou encore en composantes :

$$\boxed{\forall (i, j) \quad d_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} = 1/2 \left\{ \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right\} = 1/2 \{ U_{i,j} + U_{j,i} \}} \quad (1.10)$$

➤ **Exemples.**

- a) *Mouvement de rotation plan* (figure a.2). Un tel mouvement est défini en coordonnées cylindriques par un champ de déplacement de la forme :

$$\underline{\xi}(\underline{x}, t) = \alpha(t)r\underline{e}_\theta \quad (1.11)$$

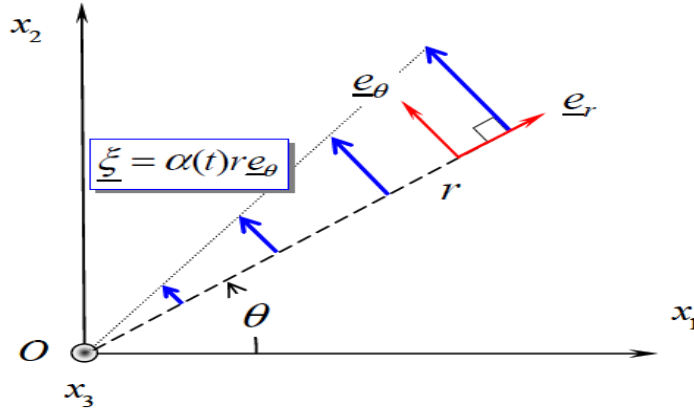


Figure a.2. Mouvement de rotation infinitésimale autour de l'axe 3 Ox

D'où

$$\begin{aligned} d\underline{\xi} &= \alpha(\underline{e}_\theta dr - r d\theta \underline{e}_r) = \alpha[\underline{e}_\theta(\underline{e}_r \cdot d\underline{x}) - \underline{e}_r(\underline{e}_\theta \cdot d\underline{x})] = \alpha(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r - \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta) \cdot d\underline{x} \\ \Rightarrow \underline{\text{grad}} \underline{\xi} &= \alpha(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r - \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta) \end{aligned} \quad (1.12)$$

et la condition de *transformation infinitésimale* (1.2) s'écrit :

$$|\alpha(t)| \ll 1 \quad (1.13)$$

Dans ces conditions on en déduit que le *champ des déformations est nul* :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = 1/2 \left\{ \underline{\text{grad}} \underline{\xi} + {}^t \underline{\text{grad}} \underline{\xi} \right\} = 0 \quad (1.14)$$

On obtient de même pour les *vitesse* :

$$\underline{U}(\underline{x}, t) = \dot{\underline{\xi}}(\underline{x}, t) = \dot{\alpha}(t)r\underline{e}_\theta \quad (1.15)$$

où α est la *vitesse de rotation*, et donc :

$$\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = 1/2 \left\{ \underline{\text{grad}} \dot{\underline{\xi}} + {}^t \underline{\text{grad}} \dot{\underline{\xi}} \right\} = 1/2 \left\{ \underline{\text{grad}} \underline{U} + {}^t \underline{\text{grad}} \underline{U} \right\} = 0 \quad (1.16)$$

b) *Mouvement de glissement simple* (figure a.3). Le champ de déplacement s'écrit :

$$\underline{\xi}(\underline{x}, t) = 2\gamma(t)x_2\underline{e}_1 \quad (1.17)$$

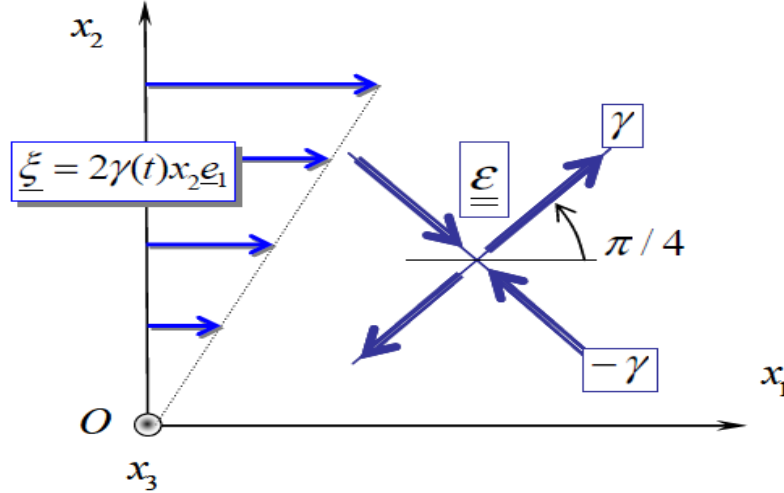


Figure a.3. Mouvement de glissement simple en transformation infinitésimale

d'où d'après (1.5) et (1.10) :

$$\underline{\varepsilon} = \gamma(t)(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) \Rightarrow \underline{d} = \dot{\gamma}(t)(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) \quad (1.18)$$

Les *valeurs principales* de la déformation dans le plan $Ox_1 x_2$ sont $+\gamma$ et $-\gamma$ associées respectivement aux deux bissectrices du repère, la troisième direction Ox_3 étant associée à une déformation nulle (déformation plane). Les résultats sont similaires pour le taux de déformation. [1]

Les déformations se produisent à *volume constant*, puisque la *déformation volumique* en tout point est nulle :

$$\text{tr} \underline{\varepsilon} = \varepsilon_{ii} = \xi_{i,i} = \text{div} \underline{\xi} = 0 \quad (1.19)$$

la condition étant identique pour le *taux de déformation volumique* :

$$\text{tr} \underline{d} = d_{ii} = U_{i,i} = \text{div} \underline{U} = 0 \quad (1.20)$$

I.3-Contraintes dans un milieu continu

I.3.1- Tenseur des contraintes de Cauchy

Les contraintes dans un milieu continu sont définies sur la *configuration actuelle* de ce milieu par un champ de *tenseurs symétriques du second ordre*, noté $\underline{\underline{\sigma}}$ (contraintes de *Cauchy*):

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1.21)$$

de sorte que le vecteur-contrainte agissant sur une facette matérielle de ce milieu de normale unitaire $\underline{n}$ s'écrit :

$$\underline{T}(\underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \sigma_{ij} n_j \underline{e}_i \quad (1.22)$$

de sorte que σ_{ij} peut s'interpréter comme la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur contrainte agissant sur la facette de normale $\underline{e}_j$:

$$\underline{e}_i \cdot \underline{T}(\underline{e}_j) = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_j = \sigma_{ij} \quad (1.23)$$

Le vecteur-contrainte sur une facette quelconque peut se décomposer en une *contrainte normale* (positive en traction) et une *contrainte tangentielle* à la facette (figure a.4) :

$$\underline{T}(\underline{n}) = \sigma \underline{n} + \underline{\tau} \quad \text{avec} \quad \underline{\tau} \cdot \underline{n} = 0 \quad (1.24)$$

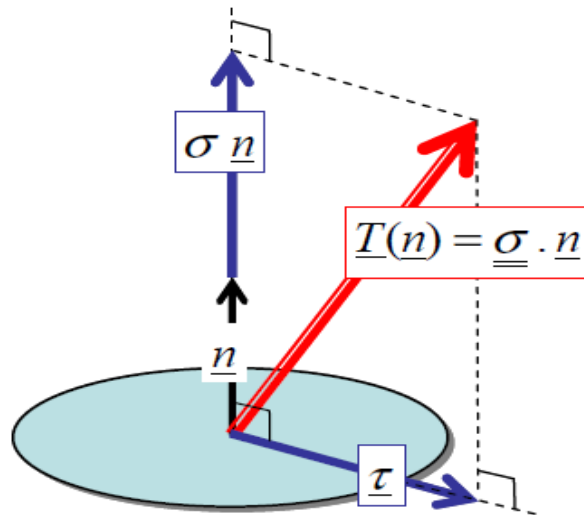


Figure a.4. Contraintes normale et tangentielle sur une facette [2]

Compte tenu de la symétrie du tenseur des contraintes, il existe trois directions *perpendiculaires* de vecteurs unitaires (n_1, n_2, n_3) pour lesquelles la contrainte tangentielle sur les facettes correspondantes s'annule :

$$k = 1, 2, 3 \quad \underline{T}(n_k) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}_k = \sigma_k \underline{n}_k \quad (1.25)$$

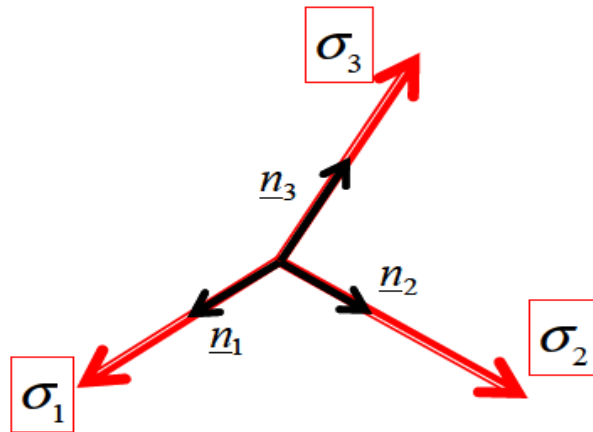


Figure a.5. Trièdre des directions principales et contraintes principales associées

de sorte que l'on peut écrire :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_1 \underline{n}_1 \otimes \underline{n}_1 + \sigma_2 \underline{n}_2 \otimes \underline{n}_2 + \sigma_3 \underline{n}_3 \otimes \underline{n}_3 \quad (1.26)$$

σ_k désignant la *contrainte principale* correspondant à la *direction principale* associée à $\underline{n}_k$ (figure a.5).

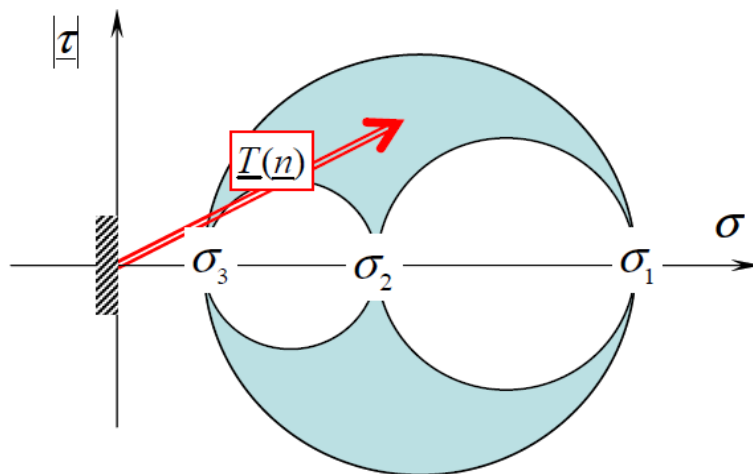


Figure a.6. Représentation d'un état de contrainte dans le plan de Mohr

La représentation d'un état de contrainte dans le *plan de Mohr* est illustrée sur la figure 6. Etant donné un tel état de contrainte dont les valeurs principales sont telles que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, vecteur-contrainte agissant sur une facette quelconque est tel que son extrémité parcourt le domaine compris entre le «grand» cercle de Mohr de diamètre $\sigma_1 - \sigma_3$ et les deux «petits»

Le tenseur des contraintes peut être décomposé comme suit en parties *sphérique* et *déviatorique*:

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + 1/3 \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad \text{soit} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{s}} + 1/3 (\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} \quad (1.27)$$

où $\underline{\underline{s}}$ désigne le *déviateur de contrainte*, qui est de trace nulle, et $\underline{\underline{I}}$ est le tenseur identité.[2]

I.3.2- Equilibre ; champs de contrainte statiquement admissibles

Dans le cas où le champ de contrainte de Cauchy est continûment différentiable par rapport aux coordonnées d'espace, les équations d'équilibre, s'écrivent dans le cas de la statique (c'est-à-dire en négligeant les force d'inertie) en coordonnées cartésiennes orthonormées :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = 0 \quad (1.28)$$

soit en notation intrinsèque :

$$\boxed{\text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{\underline{F}} = 0} \quad (1.29)$$

où $\underline{\underline{F}}$ désigne la *densité volumique d'efforts extérieurs à distance*.

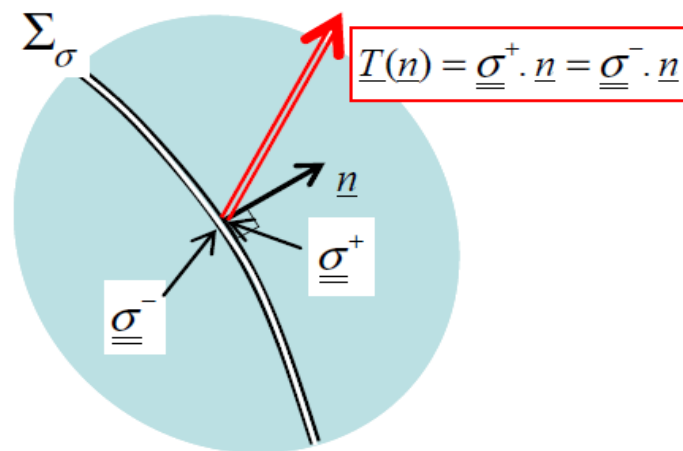


Figure a.7. Condition de saut à la traversée d'une surface de discontinuité d'un champ de contrainte.

Cette équation d'équilibre doit être complétée par l'équation aux discontinuités valable dans le cas où le champ de contrainte est discontinu au travers d'une surface. Cette équation s'écrit :

$$(\underline{\sigma}^+ - \underline{\sigma}^-) \cdot \underline{n} = [\underline{\sigma}] \cdot \underline{n} = 0 \quad (1.30)$$

où $[\underline{\sigma}] = \underline{\sigma}^+ - \underline{\sigma}^-$ représente la *discontinuité de contrainte* au franchissement la surface de discontinuité Σ_σ en suivant la normale $\underline{n}$ à cette surface (figure a.7). En d'autres termes, la condition (1.30) exprime la *continuité du vecteur-contrainte* à la traversée de cette surface.

Un champ de contrainte est alors dit *statiquement admissible* (S.A.) s'il vérifie :

- l'équation d'équilibre (1.29) avec des forces de volume données $\underline{F} = \underline{F}^d$ en tout point où il est continûment différentiable ;
- l'équation aux discontinuités (1.30) à la traversée des surfaces de discontinuité Σ_σ de ce champ ;
- les *conditions aux limites en contraintes*, qui peuvent être définies comme suit :

$$T_i(\underline{x}) = \sigma_{ij}(\underline{x}) n_j(\underline{x}) = T_i^d(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in S_T \quad (1.31)$$

où S_T désigne la partie de la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω occupé par le milieu continu sur laquelle la $i^{\text{ème}}$ composante T_i du vecteur-contrainte agissant en tout point de cette frontière est donnée.

Quelques exemples couramment rencontrés de telles conditions aux limites en contrainte sont donnés ci-dessous.

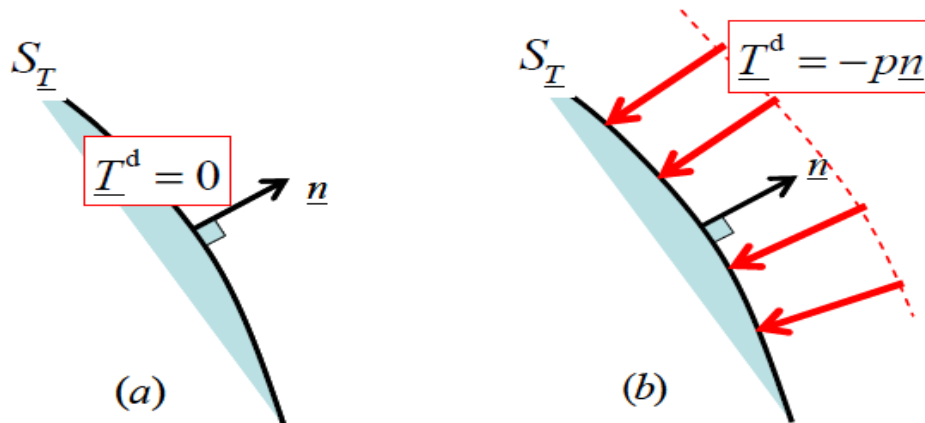


Figure a.8. (a) : surface libre de contrainte ; (b) : surface soumise à une pression uniforme

- a) *Surface libre de contrainte* (figure a.8(a)) : nullité du vecteur-contrainte (mais pas du tenseur des contraintes !) :

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{T}(\underline{n}) = \underline{T}^d = 0 \quad (1.32)$$

b) Surface soumise à une pression uniforme p (figure a.8.(b)) :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T}(\underline{n}) = \underline{T}^d = -p\underline{n} \quad , \quad p \geq 0 \quad (1.33)$$

c) Surface en contact sans frottement avec une paroi (figure a.9.(a)). La condition aux limites en contrainte consiste à écrire que la contrainte tangentielle est nulle, la contrainte normale étant indéterminée :

$$\underline{T}(\underline{n}) - \underline{\sigma} \underline{n} = \underline{\tau}^d = 0 \quad (1.34)$$

d) Surface en contact parfaitement adhérent avec une paroi : encastrement (figure a.9.(b)). Il n'y a aucune condition portant sur le vecteur-contrainte, qui reste arbitraire.

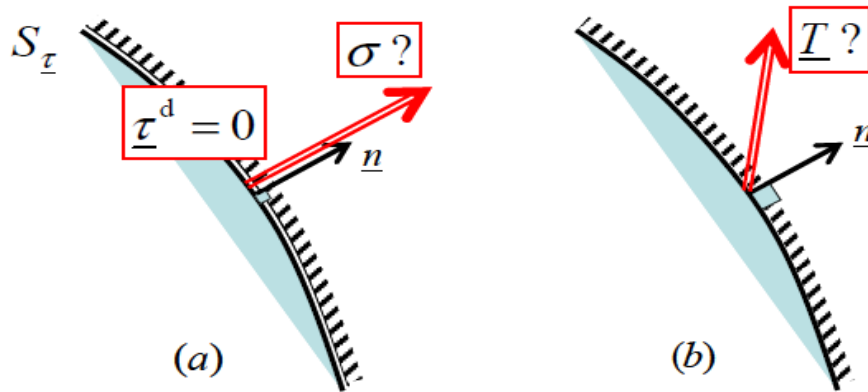


Figure a.9. (a) : contact sans frottement ; (b) : encastrement.

I.3.3- Le Principe des Puissances Virtuelles (P.P.V.)

On désigne par $\hat{U}$ un champ de vecteurs quelconque défini sur la configuration actuelle du milieu continu. Un tel champ vectoriel est appelé *champ de vitesses virtuelles*¹, dont il est essentiel de préciser qu'il n'est *a priori* astreint à aucune des limitations imposées aux mouvements réels et aux champs de vitesses associées (liaisons, condition d'incompressibilité, etc.). Un tel champ peut en particulier comporter des *surfaces de discontinuité*, notées Σ_U (figure11). [2]

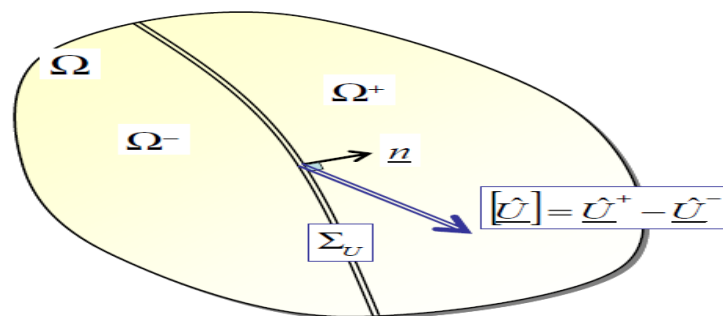


Figure a.10. Surface de discontinuité d'un champ de vitesse virtuel

On montre alors (par simple application du théorème de la divergence) que pour tout champ de vitesse virtuel $\hat{\underline{U}}$ et tout champ de contrainte vérifiant l'équation d'équilibre (1.29) et l'équation aux discontinuités (30), la *puissance virtuelle des efforts extérieurs* appliqués au système Ω , définie par :

$$\boxed{P_e(\hat{\underline{U}}) = \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \hat{\underline{U}} \, dS + \int_{\Omega} \rho \underline{F} \hat{\underline{U}} \, d\Omega} \quad (1.35)$$

est égale à la *puissance virtuelle de déformation*, dont l'expression est donnée par :

$$\boxed{P_d(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} : \hat{\underline{d}}) \, d\Omega + \int_{\Sigma_v} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) [\hat{\underline{U}}] \, d\Sigma} \quad (1.36)$$

où $\hat{\underline{d}}$ est le *taux de déformation virtuel* :

$$\hat{\underline{d}} = 1/2 \left\{ \underline{\underline{\text{grad} \hat{\underline{U}}}} + {}^t \underline{\underline{\text{grad} \hat{\underline{U}}}} \right\} \quad (1.37)$$

et $[\hat{\underline{U}}]$ le saut de vitesse virtuelle à la traversée de la surface de discontinuité de vitesse en suivant la normale $\underline{n}$ (figure a.10). Le P.P.V. s'écrit donc :

$$\forall \hat{\underline{U}} \quad , \quad \forall \underline{\underline{\sigma}} \text{ tel que } \begin{cases} \text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{F} = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \Sigma_{\sigma} \\ [\underline{\underline{\sigma}}] \underline{n} = 0 & \text{sur } \Sigma_{\sigma} \end{cases}$$

$$\boxed{P_e(\hat{\underline{U}}) = P_d(\hat{\underline{U}})} \quad (38)$$

Il est important de noter que le P.P.V. n'exprime rien d'autre que la *dualisation mathématique des équations d'équilibre*. Il n'a en particulier aucun rapport avec de quelconques considérations énergétiques ou thermodynamiques. Il constitue en revanche un outil essentiel de l'approche cinématique par l'extérieur du *Calcul à la Rupture* .[1]

I.4-Elasticité

I.4.1- Comportement élastique en transformation infinitésimale

Dans l'hypothèse où le milieu continu est en *transformation infinitésimale isotherme* (température maintenue constante), le *comportement élastique* d'un matériau s'exprime par une relation de type :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (1.39)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}$ désigne la contrainte de Cauchy dans la configuration actuelle, $\underline{\underline{\sigma}}_0$ la contrainte dans l'état initial, tandis que $\underline{\underline{\varepsilon}}$ représente la déformation (linéarisée) calculée entre les deux configurations.

$\underline{\underline{C}}$ est le tenseur des *modules d'élasticité*, caractéristique du comportement du matériau.

Dans le cas où ce dernier est *isotrope*, l'équation (1.39) devient :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \lambda(\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}} \quad (1.40)$$

où d'une autre manière

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) - \frac{\nu}{E}\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0)\underline{\underline{I}} \quad (1.41)$$

faisant apparaître les *coefficients de Lamé* λ et μ , ainsi que le *module d'Young* E et le *coefficient de Poisson* ν , entre lesquels existent les relations suivantes :

$$\begin{aligned} E &= \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} & ; & \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \\ \lambda &= E \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & ; & \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (1.42)$$

ces coefficients étant astreints à respecter les conditions suivantes :

$$E > 0, \quad \mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0, \quad -1 < \nu < 1/2 \quad (1.43)$$

I.4.2- Problème d'élasticité HPP

Un problème d'élasticité formulé dans le cadre de l' *Hypothèse des Petites Perturbations* (qui inclut notamment celle de *transformation infinitésimale*) repose sur trois types de données :

- Données relatives à la *géométrie* du domaine Ω occupé par le milieu continu.
- Données relatives au *comportement élastique* du matériau, à travers la connaissance du tenseur

des modules d'élasticité, ou des coefficients (λ, μ) ou (E, ν) dans le cas isotrope, ainsi que du champ de contrainte initial $\underline{\underline{\sigma}}_0$.

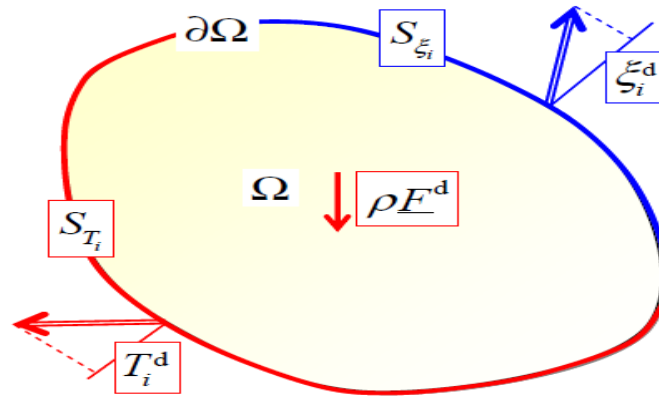


Figure a.11 : Données relatives au *chargement* d'un système en milieu continu 3D.

- Données relatives au *chargement* portant d'une part sur le champ de *forces de volume* $\underline{\underline{F}}^d$ défini en tout point de Ω , d'autre part sur les *conditions aux limites* qui peuvent s'exprimer de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\xi_i(\underline{x}) &= \xi_i^d(\underline{x}) & \forall \underline{x} \in S_{\xi_i} \\ T_i(\underline{x}) &= T_i^d(\underline{x}) & \forall \underline{x} \in S_{T_i}\end{aligned}\quad (1.44)$$

Où S_{T_i} et S_{ξ_i} forment une *partition* de $\partial\Omega$ (figure a.11)

$$\partial\Omega = S_{T_i} \cup S_{\xi_i}, \quad S_{T_i} \cap S_{\xi_i} = \emptyset \quad (1.45)$$

Les relations (1.45) expriment qu'en tout point du bord $\partial\Omega$ doivent être données 3 composantes orthogonales entre elles pour l'ensemble des deux vecteurs contrainte $\underline{T}$ et déplacements $\underline{\xi}$.

Ces données permettent de définir l'ensemble des champs de contraintes *statiquement admissibles* (S.A.) avec les données en efforts d'une part :

$$\mathcal{S} = \left\{ \underline{\sigma} \text{ S.A. avec } \underline{F}^d, T_i^d \right\} \quad (1.46)$$

c'est-à-dire vérifiant les équations d'équilibre et les conditions aux limites en contrainte, l'ensemble des champs de déplacements *cinématiquement admissibles* (C.A.) d'autre part avec les données en déplacements :

$$\mathcal{C} = \left\{ \underline{\xi}; \quad \xi_i = \xi_i^d \text{ sur } S_{T_i} \right\} \quad (1.47)$$

Dans ces conditions, la *solution d'un problème d'élasticité H.P.P.* est constituée du couple $(\underline{\xi}, \underline{\sigma})$ formé par un champ de déplacement C.A. et un champ de contrainte S.A., associés en tout point par la loi de comportement élastique, comme indiqué sur le schéma de la (figure a.12). On démontre l'*unicité* d'une telle solution. Deux méthodes de résolution directe sont possibles :

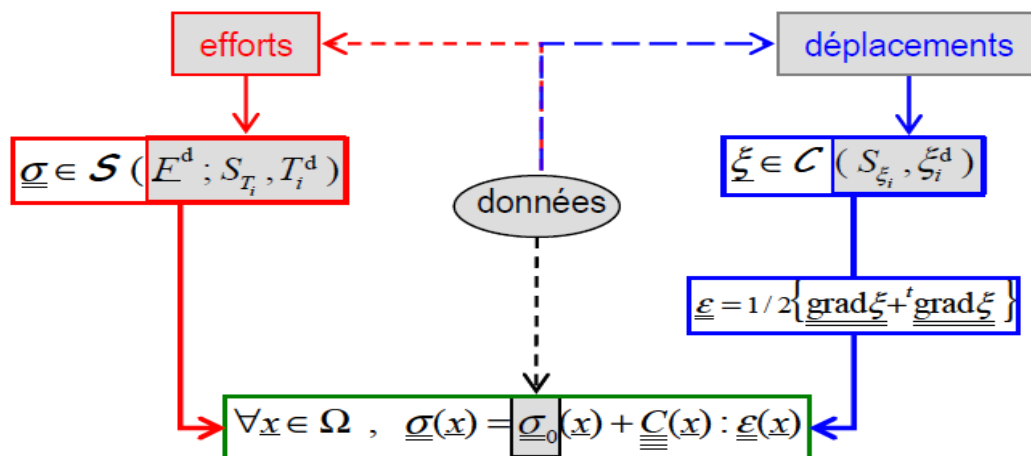


Figure a.12. Structure générale d'un problème d'élasticité H.P.P.[2]

II.1-Introduction

Il existe une infinité de matériaux, à chacun des caractéristiques et des comportements distincts des autres, ce qui nous intéresse le plus dans ce domaine c'est les caractéristiques mécaniques notamment la dureté, l'élasticité, l'isotropie ...etc.

II.2- Diversité des comportements

Le but de ce paragraphe est double : d'une part, nous allons décrire quelques-uns des comportements types ; d'autre part, nous allons introduire la terminologie utilisée pour caractériser ces comportements.

Pour les métaux à température ambiante, le comportement est convenablement décrit par la courbe de traction, résultat de l'essai de traction. On fait croître la force F et on mesure l'allongement longitudinal εL .

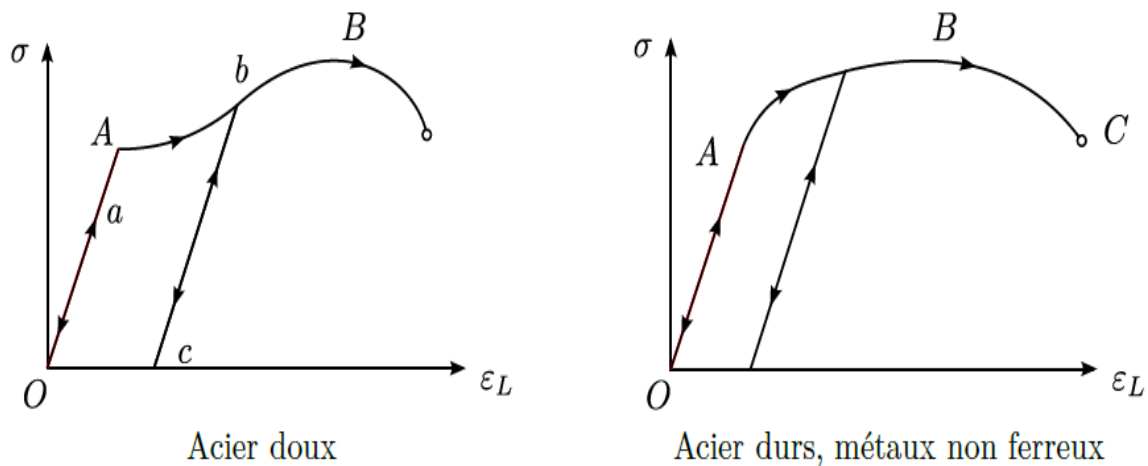


Figure b.1. courbes contrainte-déformation pour l'acier

La courbe se divise en trois régions. La région OA correspond à un comportement élastique linéaire, dont les deux caractéristiques essentielles sont :

- réversibilité : si, arrivé au point a on diminue la contrainte, on redescend suivant la même courbe ;
- linéarité : la contrainte est proportionnelle à la déformation.

Cette région correspond à la déformation réversible du réseau cristallin.

À partir du seuil A, on entre dans la zone AB de comportement plastique, essentiellement caractérisé par son irréversibilité : si, arrivé en b on décharge, alors on redescend, non pas le long de la courbe de charge bA , mais sur une droite bc parallèle à OA. En fait le comportement est alors à nouveau élastique tant que l'on ne redépasse pas le nouveau seuil b .

En particulier, on déduit que la déformation plastique entre A et b a eu comme effet d'élargir la région élastique. C'est le phénomène d'écrouissage.

Le point B correspond à l'apparition de la striction —instabilité géométrique qui conduit à la localisation de la déformation. La contrainte _ diminue alors jusqu'à rupture.

En fait, il s'agit de la contrainte apparente, c'est-à-dire ramenée à la surface initiale et la contrainte vraie ramenée à la surface réelle de la striction, elle, continue à augmenter. De toute façon, la déformation n'est plus homogène, et cette portion de courbe ne décrit pas directement le comportement. Qui plus est, l'hypothèse des petites déformations n'est plus vérifiée.[4]

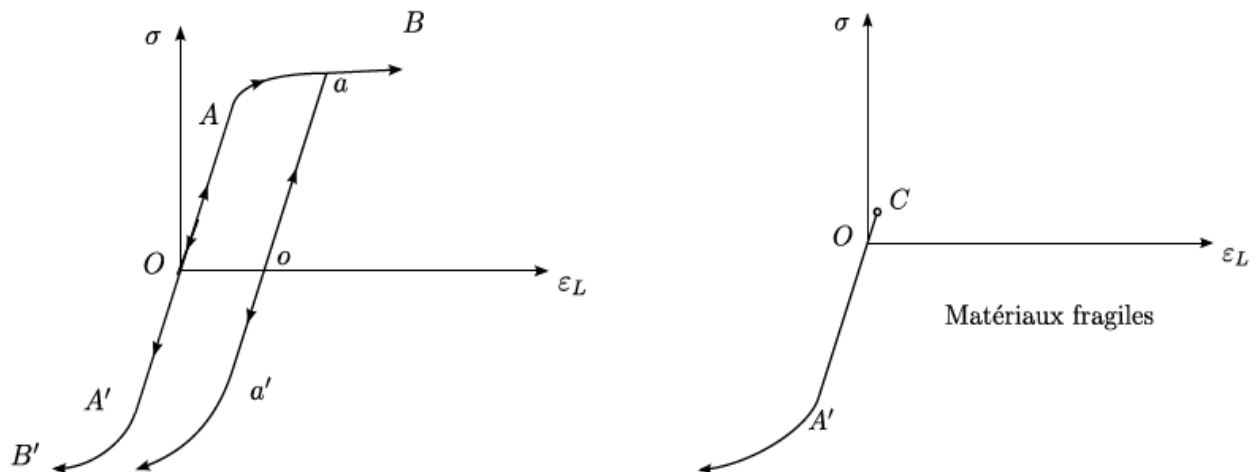


Figure b.2: Ecrouissage de matériaux ductiles à gauche et matériaux fragiles à droite

En compression simple, on obtient en général un comportement symétrique $OA0B0$ (figure b.2)(mais sans striction). Pour certains matériaux fragiles (béton, fonte, roches, etc.), cependant, on obtient en compression simple un comportement ductile, comme celui que nous avons décrit, et en traction simple, un comportement fragile conduisant à rupture très rapide. Pour les métaux, on observe souvent l'effet Bauschinger : après une précharge OAa en traction, l'écrouissage qui se traduit par une augmentation du seuil en traction, entraîne également une diminution du seuil en compression, alors qu'au départ les deux étaient approximativement égaux.

La courbe de traction permet également de décrire le comportement d'autres matériaux, comme le caoutchouc, (comportement élastique non linéaire en première approximation) ou les sols, on représente alors le résultat d'un essai triaxial à p fixé, qui présentent un comportement de type élastoplastique avec une région élastique très réduite et avec ou sans pic suivant que le matériau est initialement plus ou moins tassé.[4]

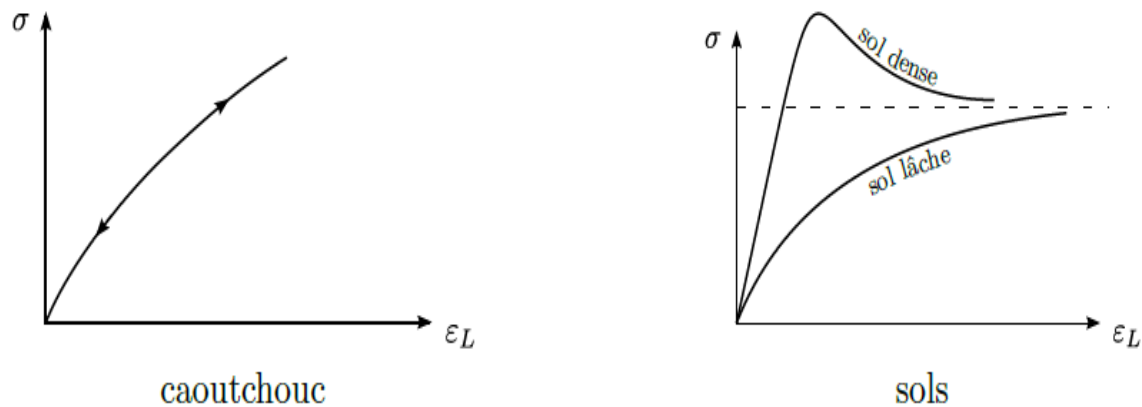


Figure b.3 : courbe contrainte-déformation

Pour des matériaux comme les matières plastiques ou les métaux à haute température, la courbe de traction perd toute signification car elle dépend de manière cruciale de la vitesse de déformation. On caractérise alors le comportement par des essais de fluage et de relaxation.

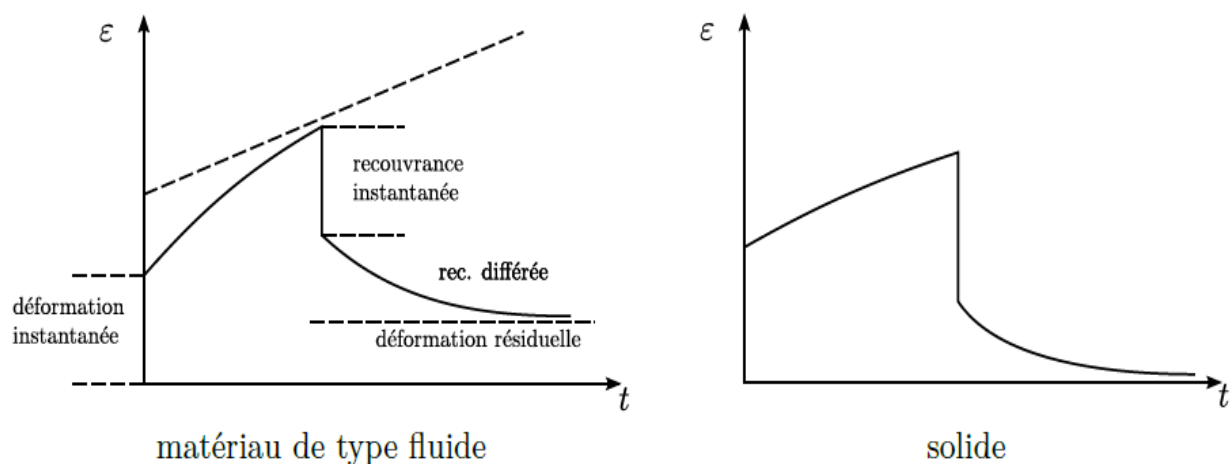


Figure : b.4 essai de fluage déformation-temps

Pour l'essai de fluage, toujours en traction ou compression simple, on impose une contrainte constante et on observe la déformation en fonction du temps : l'application de la contrainte s'accompagne d'une déformation instantanée, puis la déformation se poursuit, puis se stabilise, soit vers une constante, soit vers un état de fluage stationnaire à vitesse de déformation constante.

Si à un instant t_0 on relâche la contrainte, alors la déformation se décompose en trois parties :

- une déformation instantanée (recouvrance instantanée),
- une déformation obtenue progressivement (recouvrance différée),
- une déformation résiduelle qui subsiste, cette dernière pouvant disparaître pour un matériau de type solide.

L'essai de relaxation consiste à appliquer une déformation constante, et à observer la contrainte nécessaire

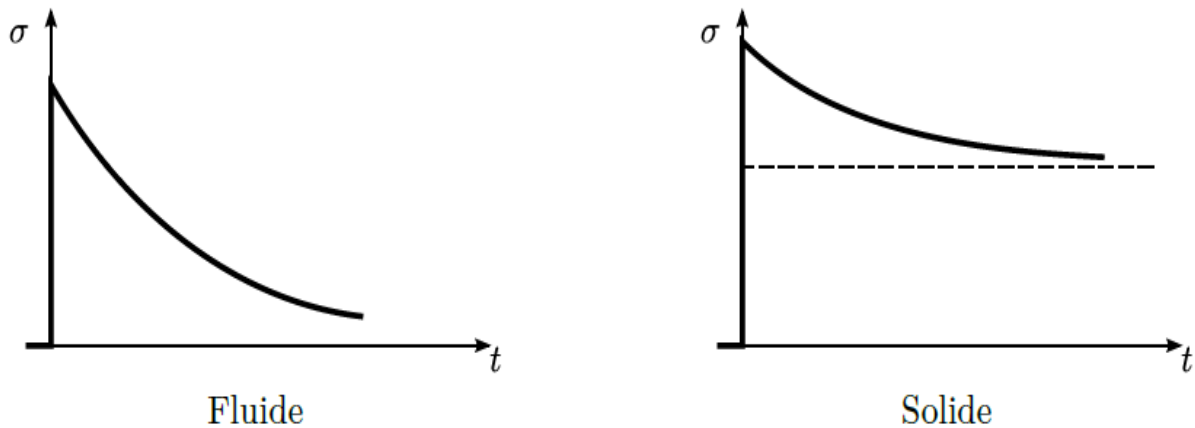
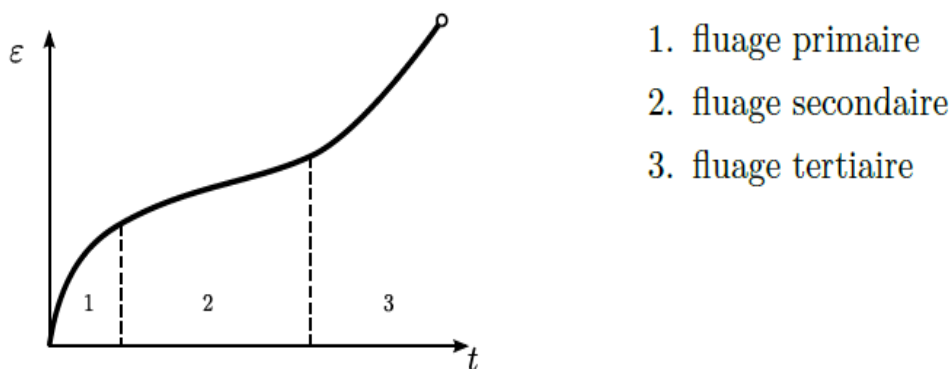


Figure b.5 : fluage contrainte-temps

Si l'on pousse plus loin l'essai de fluage, on voit apparaître après le fluage primaire (régime transitoire) et le fluage secondaire (régime stabilisé) une zone de fluage tertiaire qui correspond au phénomène d'*endommagement* (détérioration du matériau qui conduit à la rupture).



Ce type de comportement dépendant du temps est appelé *viscoplastique* ou *viscoélastique*, selon qu'il existe ou non un seuil en dessous duquel le comportement peut être considéré comme élastique. En première approximation, les matières plastiques ont un comportement viscoélastique et les métaux à haute température, un comportement viscoplastique.[4]

II.3- Modèles rhéologiques

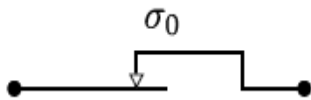
Il est important de savoir construire des modèles mathématiques de comportement décrivant, au moins qualitativement, les différents types de comportement que nous venons de présenter. Les modèles rhéologiques forment une classe déjà très vaste de tels modèles. Ils s'obtiennent par combinaison de trois modèles élémentaires

– le ressort, modèle de comportement élastique



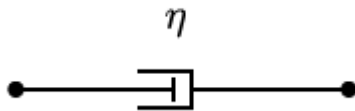
$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.1)$$

– le patin, modèle de comportement plastique



$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = 0 & \text{si } |\sigma| < \sigma_0 \\ \dot{\varepsilon} > 0 & \text{si } |\sigma| = \sigma_0 \\ \dot{\varepsilon} < 0 & \text{si } |\sigma| = -\sigma_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

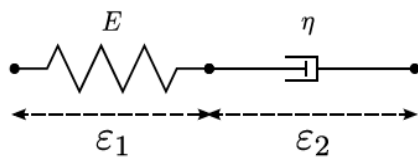
– l'amortisseur, modèle de comportement visqueux



$$\sigma = \varepsilon\mu \quad (2.3)$$

Les modèles rhéologiques s'obtiennent par montage en parallèle (les contraintes s'additionnent, les déformations sont les mêmes) ou en série (les déformations s'additionnent, les contraintes sont les mêmes).

Le comportement viscoélastique peut être représenté par une combinaison de ressorts et d'amortisseurs. – par montage en série d'un ressort et d'un amortisseur, on obtient le modèle de Maxwell :



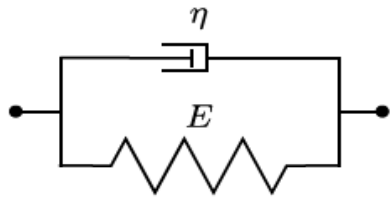
$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon_1 = \eta\dot{\varepsilon}_2 \\ \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{cases} \quad (2.4)$$

ou en éliminant ε_1 et ε_2

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (2.5)$$

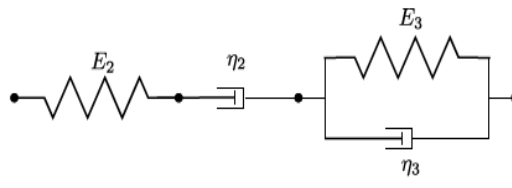
qui est la loi de comportement sous forme différentielle, on voit que, connaissant l'histoire de σ (ou de ε), on peut en déduire la valeur à l'instant t de ε (ou de σ par intégration de l'équation différentielle (2.5) ;

– par montage en parallèle d'un ressort et d'un amortisseur, on obtient le modèle de Kelvin-Voigt



$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon_1 = \eta_2\dot{\varepsilon}_2 = E_3\varepsilon_3 + \eta_3\dot{\varepsilon}_3 \\ \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \end{cases} \quad (2.6)$$

– par montage en série d'un modèle de Maxwell et d'un modèle de Kelvin-Voigt, on obtient le modèle de Burgers



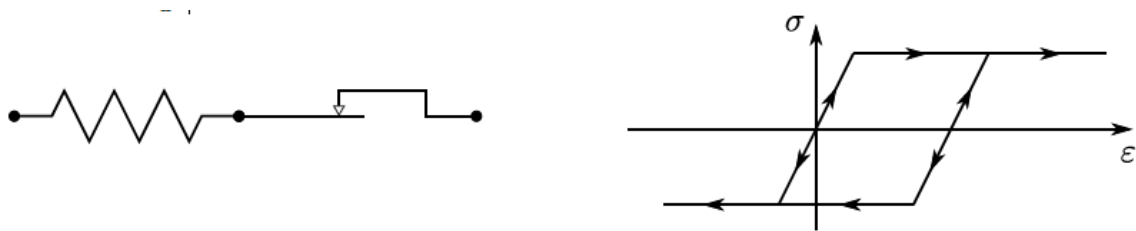
$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (2.7)$$

En éliminant ε_1 , ε_2 et ε_3 , il vient

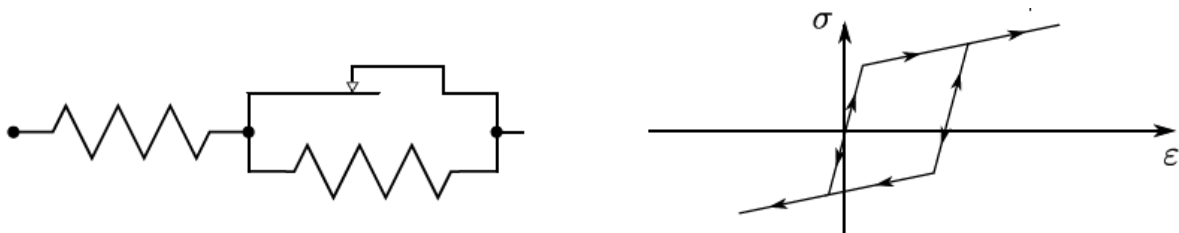
$$\ddot{\varepsilon} + \frac{E_3}{\eta_3}\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E_1}\ddot{\sigma} + \left(\frac{E_3}{\eta_3 E_1} + \frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_3} \right) \dot{\sigma} + \frac{E_3}{\eta_2 \eta_3} \sigma \quad (2.8)$$

forme différentielle de la loi de comportement. En particulier, on obtient en fluage une courbe qui représente qualitativement le comportement de certaines matières plastiques. Et ainsi de suite.

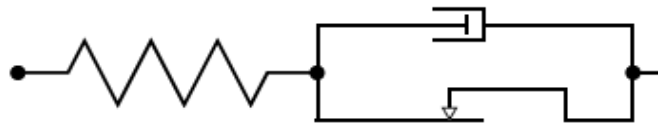
Les comportements élasto-plastiques s'obtiennent par combinaison de ressorts et de patins.
– par montage en série d'un ressort et d'un patin, on obtient un modèle élasto-plastique sans écrouissage



– on obtient un modèle avec écrouissage linéaire par le montage suivant



Enfin, on peut obtenir des comportements viscoplastiques par des combinaisons des trois éléments de base. Par exemple, le modèle de Bingham permet de décrire le comportement du goudron et de certaines pâtes.[4]



De manière générale, le choix d'un modèle représentant le comportement d'un matériau réel est un problème difficile. Le comportement des matériaux réels est complexe et nous n'en avons présenté qu'une esquisse très incomplète.

Même pour des matériaux aussi courants que l'acier, de nombreux aspects du comportement restent mal connus et il est impossible de construire un modèle représentant le comportement d'un matériau donné en toutes circonstances. Dans chaque problème, il convient de choisir le modèle le plus simple conduisant à des résultats satisfaisants pour l'utilisation qu'on veut en faire.[4]

Dans certains cas, en particulier si l'on recherche une grande fiabilité, il conviendra de faire le calcul avec une loi de comportement très sophistiquée, prenant en compte tous les risques de ruine possibles, ces calculs étant rendus possibles par les développements de l'informatique. Dans d'autres cas, par contre, on pourra se satisfaire d'approximations plus grossières et c'est la raison d'être des modèles élémentaires qui feront l'objet de la suite de ce chapitre.

II.4-Mise en évidence expérimentale du comportement élastoplastique

II.4.1- l'expérience de charge-décharge

La figure b.6 représente la courbe-type d'un essai de traction simple d'une éprouvette d'acier, donnant l'évolution de l'effort de traction F (rapporté à la section initiale de l'éprouvette S_0) en fonction de l'allongement relatif $\Delta l / l_0$, mesuré dans la partie centrale de l'éprouvette.

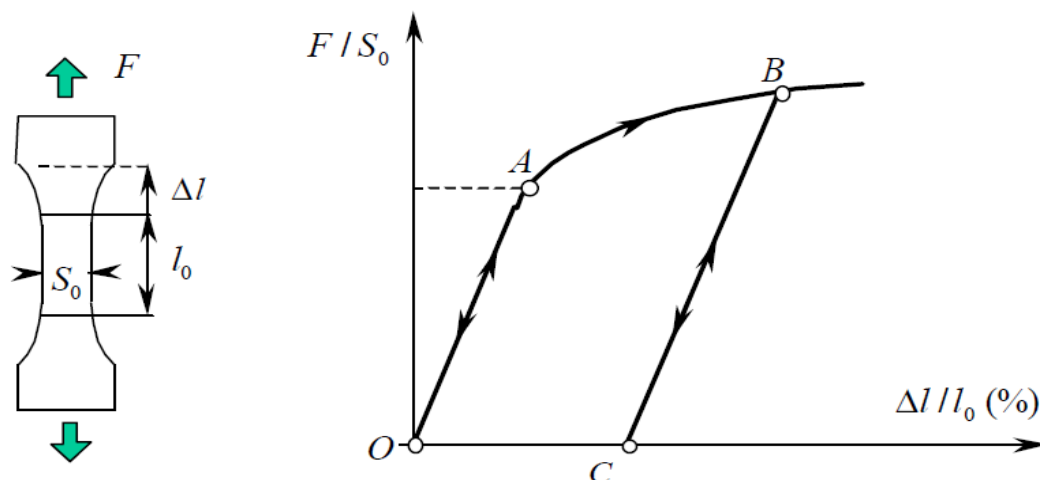


Figure b.6 : Courbe expérimentale de traction d'une éprouvette d'acier.

L'analyse d'une telle expérience fait apparaître les caractéristiques suivantes :

- La *réversibilité* de la réponse en allongement de l'éprouvette dans la partie diagramme, c'est-à-dire tant que l'effort F demeure inférieur à un seuil correspondant à l'ordonnée du point A , appelé *seuil d'élasticité initial*. Cette réversibilité se traduit par une relation de proportionnalité entre l'effort et l'allongement, caractéristique du comportement *élastique*, (linéaire) du matériau constitutif.
- L'*irréversibilité* de la réponse de l'éprouvette apparaît dès lors que l'on poursuit le chargement au-delà du seuil d'élasticité initial jusqu'à un point B , puis que l'on effectue une décharge complète ($F=0$) jusqu'au point C . La courbe BC de décharge est différente de la courbe OAB de première charge, de sorte qu'au point C subsiste un allongement *rémanent*. C'est la manifestation du *comportement plastique* du matériau constitutif.
- Rechargeant l'éprouvette à partir de ce nouvel état déchargé, on constate que le point représentatif dans le diagramme parcourt en sens inverse le segment BC de décharge. L'ordonnée du point B représente le nouveau seuil d'élasticité, appelé *seuil d'élasticité actuel*, au-delà duquel apparaît de nouveau la plasticité. L'augmentation du seuil d'élasticité constitue le phénomène d'*écrouissage*. [5]

Ces observations expérimentales appellent un certain nombre de commentaires :

- a) Les champs de contrainte et de déformation dans la partie médiane de l'éprouvette étant homogènes (ce qui suppose notamment l'homogénéité du matériau constitutif à l'échelle de l'éprouvette), F / S_0 et $0 \Delta l / l$ peuvent s'interpréter respectivement comme la *contrainte uniaxiale* de traction σ subie *localement* par le matériau, et la *déformation linéarisée* correspondante ε selon l'axe de l'éprouvette, supposée en transformation infinitésimale ($0 < \Delta l / l < 1$).

On obtient ainsi le diagramme «contrainte-déformation» de la figure b.7, homologue de celui de la figure 1, mais caractérisant cette fois-ci le comportement *local* du matériau sous sollicitation *uniaxiale* de traction. La valeur de la déformation correspondant à l'allongement résiduel consécutif au cycle charge-décharge, s'appelle la *déformation plastique*, notée ε_p .

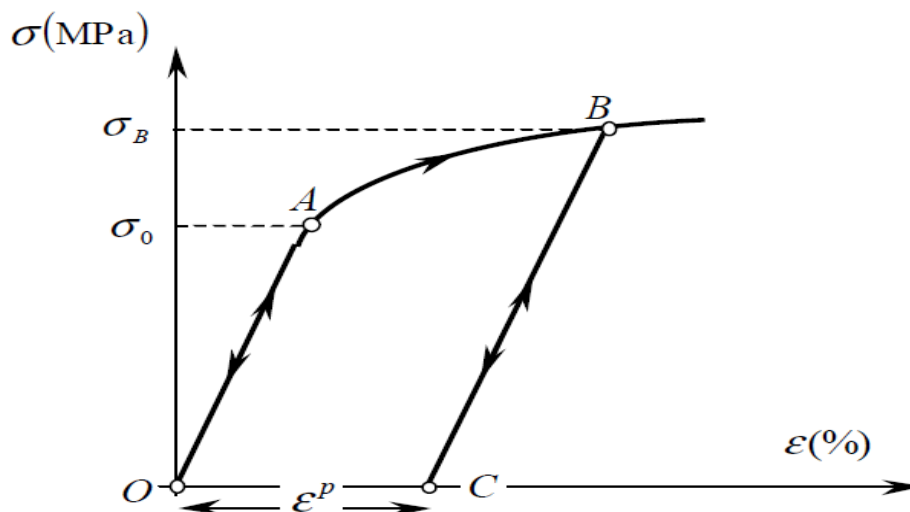


Figure b.7 : Diagramme $\sigma - \varepsilon$ pour un matériau élastoplastique avec écrouissage.

- b) Une caractéristique importante du modèle de comportement élastoplastique mis en évidence par des expériences telles que celle décrite ci-dessus, est l'*indépendance par rapport au temps physique*. C'est-à-dire que les diagrammes précédents ne dépendent pas de la vitesse à laquelle sont effectuées les phases de charge-décharge successives, ce qui revient à négliger les effets de *vieillesse* et de *viscosité* du matériau. Cette propriété est bien vérifiée par exemple pour des métaux à température ordinaire, comme l'illustre la figure b.8 qui représente

différentes courbes de traction d'une éprouvette d'aluminium, montrant qu'un effet de viscosité n'apparaît que pour des sollicitations très rapides. Il convient en revanche de prendre en compte un tel effet, à travers un modèle viscoplastique, dès que la température s'élève (enceintes de réacteurs nucléaires, procédés de formage «à chaud», dégagements thermiques dans les massifs rocheux etc.).

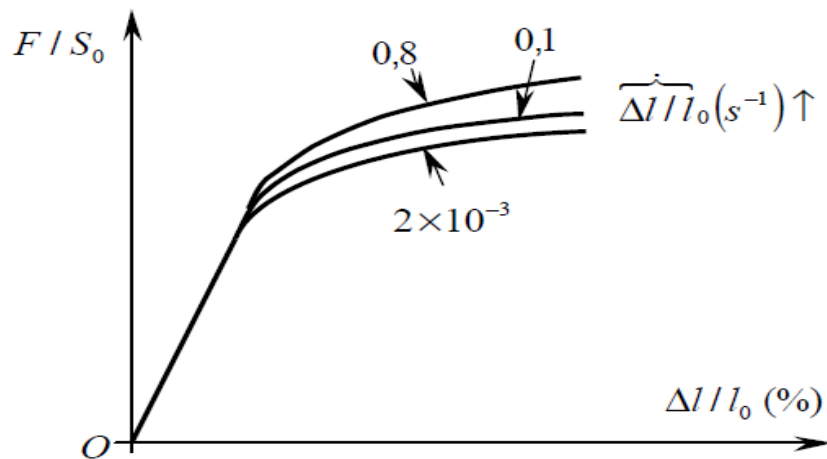


Figure b.8 : Evolution des courbes de traction d'une éprouvette d'aluminium en fonction de la vitesse de sollicitation.

c) La notion centrale caractérisant le comportement plastique d'un matériau est celle d'irréversibilité et non pas celle de *non-linéarité*, même si les deux notions coïncident dans le cas où l'élasticité du matériau est *linéaire* dans le cadre de la transformation infinitésimale. La mise en évidence de cette irréversibilité nécessite l'application d'un cycle charge-décharge, seul à même de faire apparaître une déformation plastique au terme de ce cycle. La figure b.9 montre la différence essentielle existant entre un modèle élastique non linéaire et un modèle élastoplastique, en dépit de la similitude des courbes de première charge.

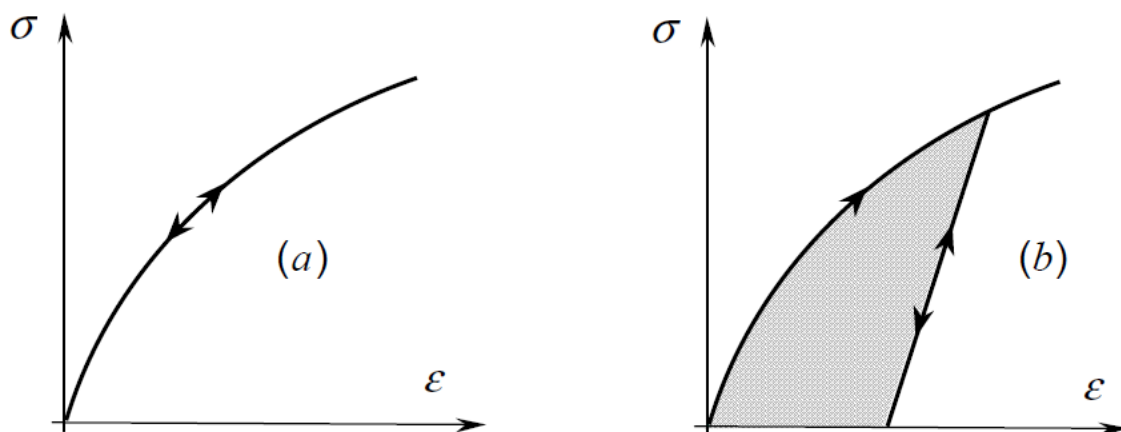


Figure b.9 : Courbes $\sigma - \varepsilon$ représentatives des comportements (a) élastique non-linéaire et (b) Elastoplastique

Sur le plan énergétique, cette irréversibilité se traduit par le fait que le travail fourni au cours d'un cycle charge-décharge (proportionnel à l'aire hachurée sur la figure b.9(b)) est

strictement positif, autrement dit que le travail fourni dans la phase de chargement n'est pas entièrement récupéré à la décharge.

d) Bien que les mécanismes physiques microscopiques qui sont à l'origine de la plasticité des matériaux observés à l'échelle macroscopique, soient parfois très différents (propagation de défauts dans le réseau cristallin pour les métaux, réarrangement des grains dans le cas des sols), le point de vue du mécanicien ici adopté va permettre de développer une présentation unifiée de ce comportement en termes de contraintes et déformations dans le cadre de la modélisation milieu continu tridimensionnel.

e) Un cas particulier important de comportement élastoplastique est celui du matériau *élastique parfaitement plastique* pour lequel la courbe contrainte-déformation comporte un palier horizontal. La figure b.10 donne une représentation schématisée d'un tel comportement pour lequel le seuil d'élasticité σ_0 demeure constant, c'est-à-dire que l'écrouissage du matériau disparaît. Ce modèle idéal du matériau élastoplastique parfait est souvent associé à la notion de *ductilité*, par opposition à celle de *fragilité* qui évoque l'idée de rupture brutale de l'élément de matière lorsque le seuil d'élasticité est atteint.

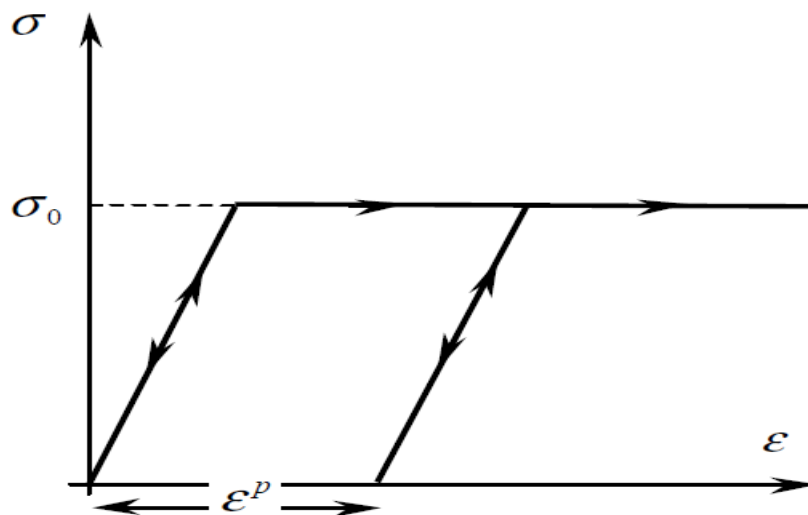


Figure b.10 : Schéma de comportement élastoplastique parfait.

Il existe de multiples procédés expérimentaux qui permettent d'accéder au comportement des matériaux soumis à des sollicitations plus complexes que la simple traction-compression uniaxiale précédemment examinée. Citons par exemple l'essai "*triaxial de révolution*" utilisé couramment pour les sols, roches ou bétons, schématisé sur la figure b.11(a), ou bien l'essai de "*traction-compression-torsion*" représenté sur la figure b.11(b), employé pour tester des matériaux métalliques ou composites sous sollicitation de *traction-compression-cission* obtenue en chaque point en exerçant sur un tube mince un effort axial de traction (compression) combiné à un couple de torsion.[5]

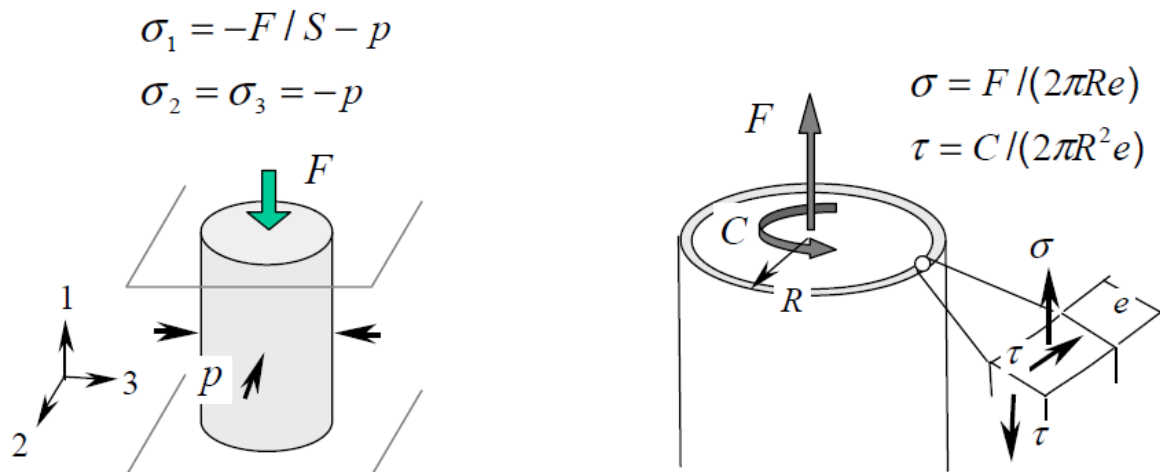


Figure b.11 : Exemples d'essais "multiaxiaux".

La figure b.12 représente dans le plan (σ, τ) un domaine de forme elliptique, déterminé expérimentalement à l'aide de ce dernier essai, à l'intérieur duquel le comportement du tube et donc localement du matériau, demeure *élastique*. Dès que le point représentatif du chargement franchit le seuil du domaine, appelé *domaine d'élasticité initial*, pour revenir ensuite à l'état déchargé ($\sigma = \tau = 0$), il subsiste un allongement et une rotation résiduels. L'écrouissage du matériau se traduit par une modification du domaine d'élasticité, qualifié d'*actuel*.

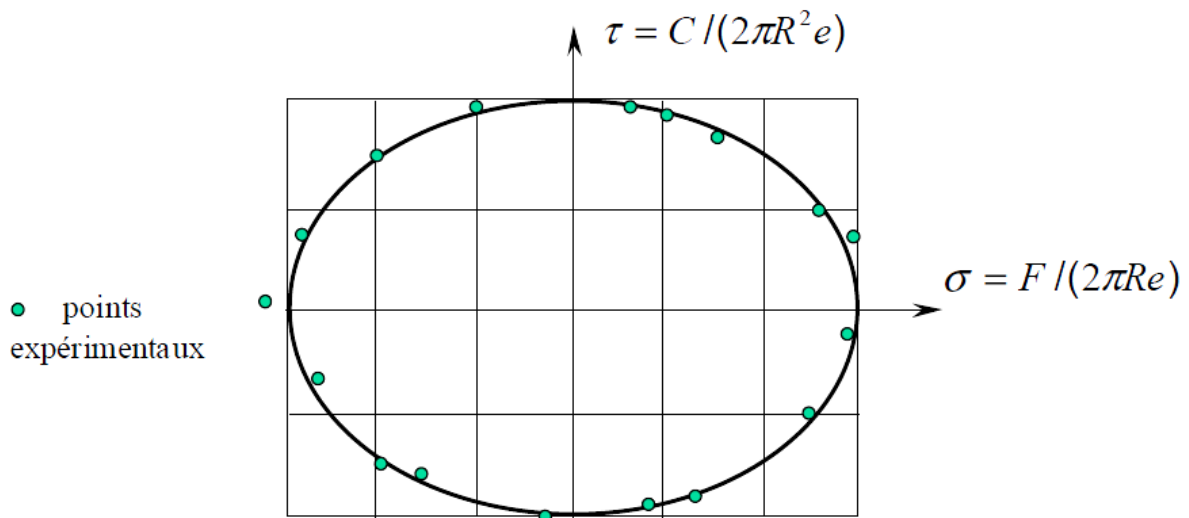


Figure b.12 : Détermination expérimentale du domaine d'élasticité initial en traction compression d'un matériau à l'aide d'un essai de traction-compression-torsion (d'après Bui, 1969). [2]

II.5-Décomposition de la transformation élastoplastique ; notion de configuration relâchée.

Examinons plus précisément les transformations successives subies par l'élément de matière $d\Omega_0$ au cours d'un cycle charge-décharge dans les expériences décrites précédemment. La figure b.13 représente schématiquement la séquence des transformations subies par un élément de volume lors d'une telle expérience de charge-décharge. On désigne ainsi respectivement par :

- $d\Omega_0$: l'élément de volume dans la *configuration initiale* (état non chargé);
- $d\Omega_t$: le même élément au terme de la phase de chargement (*configuration actuelle*) ;
- $d\Omega^R_t$: la configuration atteinte par ce même élément après *déchargement complet*.

Adoptant la terminologie employée par Lee (1969) ou Mandel (1971), nous appellerons cette dernière configuration la *configuration relâchée*. Nous introduisons alors classiquement les outils permettant de décrire les transformations entre ces différentes configurations:

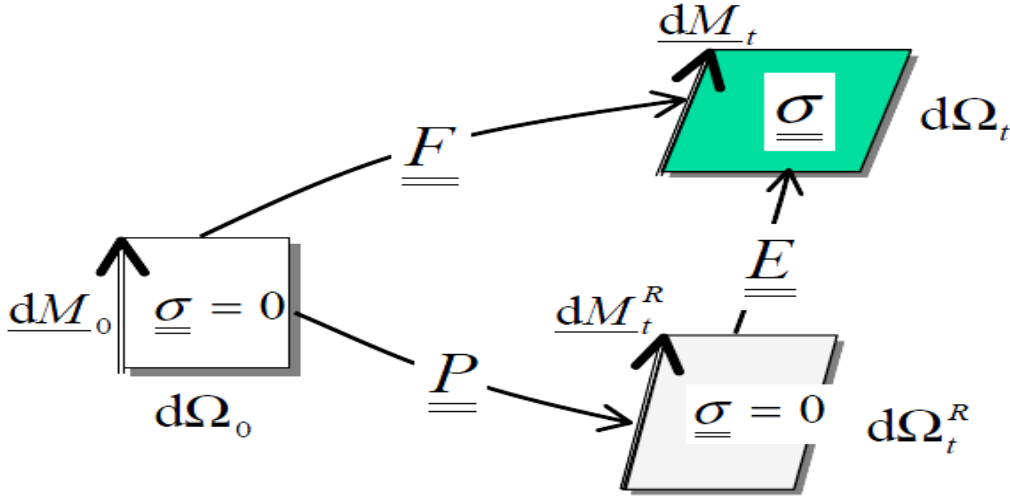


Figure b.13 : Configurations successives d'un élément de volume matériel au cours d'un cycle charge-décharge élastoplastique.

- $\underline{F}$ désigne le gradient de la transformation (homogène tangente) faisant passer de $d\Omega_0$ à $d\Omega_t$

Il permet de calculer le transporté $\underline{dM}_t$ dans la configuration actuelle d'un vecteur matériel élémentaire quelconque $\underline{dM}_0$ attaché à $d\Omega_0$:

$$\underline{dM}_t = \underline{F} \cdot \underline{dM}_0 \quad (2.9)$$

- $\underline{E}$ et $\underline{P}$ représentent respectivement les gradients des transformations faisant passer de $d\Omega^R_t$ à $d\Omega_t$ et de $d\Omega_0$ à $d\Omega^R_t$. Ils sont définis par les relations :

$$\underline{dM}_t = \underline{E} \cdot \underline{dM}_t^R \quad (2.10)$$

et

$$\underline{dM}_t^R = \underline{P} \cdot \underline{dM}_0 \quad (2.11)$$

Dans le cas où le comportement du matériau est *purement élastique*, $\underline{P}$ se réduit à l'identité $\underline{I}$ (ou éventuellement à un tenseur orthogonal, c'est-à-dire tel que ${}^t\underline{P} \cdot \underline{P} = \underline{I}$), de sorte que les configurations *initiale* et *relâchée* coïncident à un mouvement rigidifiant près. La mise en évidence expérimentale du comportement plastique correspond au fait que la transformation $\underline{P}$, dite *plastique*, est associée à une *déformation* non nulle (${}^t\underline{P} \cdot \underline{P} \neq \underline{I}$). La transformation $\underline{E}$, dite *élastique*, est la partie réversible de la transformation $\underline{F}$, récupérée à la décharge.

Une telle modélisation suppose d'apporter la réponse à deux questions complémentaires:

- Pour quelles sollicitations, exprimées localement en termes de contraintes, la plastification du matériau, c'est-à-dire son irréversibilité au cours d'un cycle charge-décharge, se manifeste-telle?

C'est la question du *critère de plasticité*.

- Comment traduire cette irréversibilité du point de vue des déformations? C'est la question de la *règle d'écoulement plastique*. Ces deux aspects constitutifs de la loi de comportement élastoplastique vont être successivement abordés.

II.6-Critère de plasticité en transformation infinitésimale ; fonction de charge

Etant donnée l'hypothèse de transformation infinitésimale qui impose que les déformations et les rotations subies par l'élément de matière soient simultanément petites, permettant alors de confondre les représentants lagrangien (i.e. défini sur la configuration initiale $d\Omega_0$) et eulérien (i.e. défini sur la configuration actuelle $d\Omega_t$) de l'état de contrainte, la condition de plasticité va porter sur le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\sigma}$ qui décrit l'état de sollicitation du matériau.[4]

II.6.1-Domains d'élasticité initial et actuel et fonction de charge.

L'interprétation des expériences décrites précédemment, conduites dans le cadre de la transformation infinitésimale, a permis de mettre en évidence l'existence d'un *domaine d'élasticité initial* (généralement convexe) du matériau, dans l'espace des contraintes assimilé à R_6 (figure b.14).

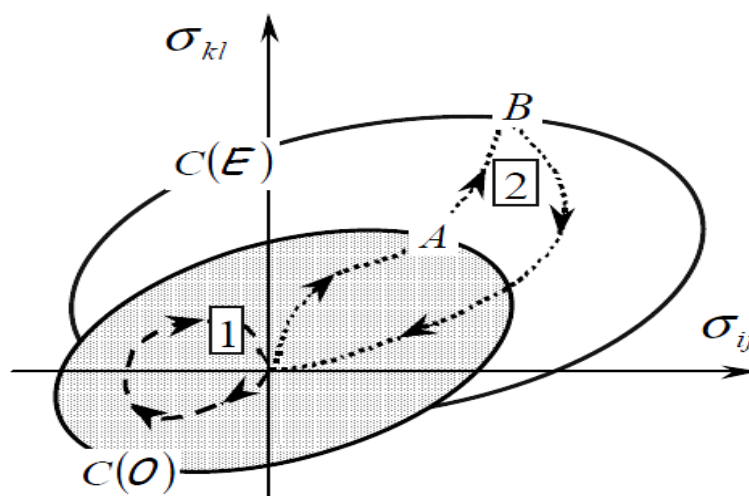


Figure b.14 : Domaine d'élasticité initial et actuel.

Ce domaine $C(0)$ est tel qu'au terme de tout *cycle de chargement*, représenté par une courbe fermée (telle que (1) sur la figure) contenue dans le domaine, n'apparaît aucune déformation plastique. A l'inverse, le suivi d'un trajet de chargement tel que (2), au cours duquel le seuil d'élasticité représenté par la frontière de $C(0)$ est franchi, va engendrer des déformations plastiques. Il en résulte également une modification du domaine d'élasticité, appelé *domaine d'élasticité actuel* $C(E)$ manifestation *phénoménologique*, à l'échelle de la modélisation macroscopique, de l'*écrouissage* du matériau, symbolisé par E .

Il est alors commode de caractériser ces domaines par la donnée d'une *fonction de charge*, notée $f(\underline{\sigma}, E)$, telle que, pour un état d'écrouissage donné E

- $f(\underline{\sigma}, E) < 0$ si $\underline{\sigma}$ est à l'intérieur de $C(E)$;
 - $f(\underline{\sigma}, E) = 0$ si $\underline{\sigma}$ est situé sur la frontière de $C(E)$
 - $f(\underline{\sigma}, E) > 0$ si $\underline{\sigma}$ est à l'extérieur de $C(E)$.
- (2.12)

On observera que la seule situation physiquement possible correspond à $f(\underline{\sigma}, E) \leq 0$, c'est à dire que le point représentatif de l'état de contrainte ne peut jamais être extérieur au domaine d'élasticité *actuel*. Ainsi, la portion AB du trajet de chargement 2 correspond au franchissement de la frontière du domaine $C(0)$ ($f(\underline{\sigma}, E=0) > 0$), mais à l'«entraînement» de la frontière du domaine actuel $C(E)$ ($f(\underline{\sigma}, E) = 0$), les paramètres d'écrouissage E évoluant avec $\underline{\sigma}$ dans cette phase de «charge plastique». On utilise fréquemment dans les calculs de structures deux modèles simplifiés d'écrouissage:

- Celui de l'écrouissage "*isotrope*" (figure b.15(a)) dans lequel le domaine $C(E)$ est obtenu par homothétie de centre l'origine et de rapport $\lambda(E) \geq 1$ à partir du domaine initial. On peut alors adopter comme fonction de charge:

$$f(\underline{\sigma}, E) = f_0(\lambda^{-1}(E)\underline{\sigma}) \quad (2.13)$$

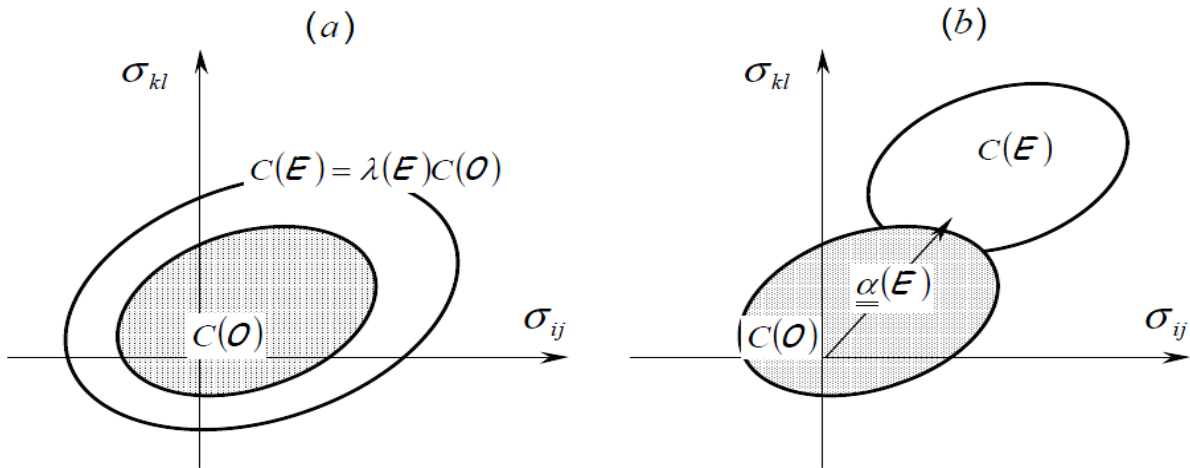


Figure b.15: Modèles d'écrouissage "*isotrope*" et "*cinématique*".

Celui de l'écrouissage "*cinématique*" (figure b.15(b)) où le domaine actuel est obtenu par translation d'une quantité $\underline{\alpha}$ ($\underline{E}$) du domaine initial, ce dont il est possible de rendre compte par la fonction de charge:

$$f(\underline{\sigma}, \underline{E}) = f_0(\underline{\sigma} - \underline{\alpha}(\underline{E})) \quad (2.14)$$

A un domaine d'élasticité actuel $C(\underline{E})$ donné, correspond une infinité de choix possibles pour la fonction de charge, qui respecte les conditions (2.12). Il conviendra alors de vérifier que la formulation de la loi de comportement est indépendante du choix effectué.

Le cas de la *plasticité parfaite* correspond à la situation où le domaine d'élasticité est *fixe*, de sorte qu'il n'y a plus lieu de distinguer les domaines d'élasticité initial et actuel. La fonction de charge n'est plus alors argumentée par des paramètres d'écrouissage.[4]

II.6.2- Cas des matériaux isotropes

La fonction de charge apparaît alors comme une fonction des seuls *invariants principaux* de $\underline{\sigma}$:

$$I_1 = \text{tr} \underline{\sigma}, \quad I_2 = 1/2 \text{tr} \underline{\sigma}^2, \quad I_3 = 1/3 \text{tr} \underline{\sigma}^3 \quad (2.15)$$

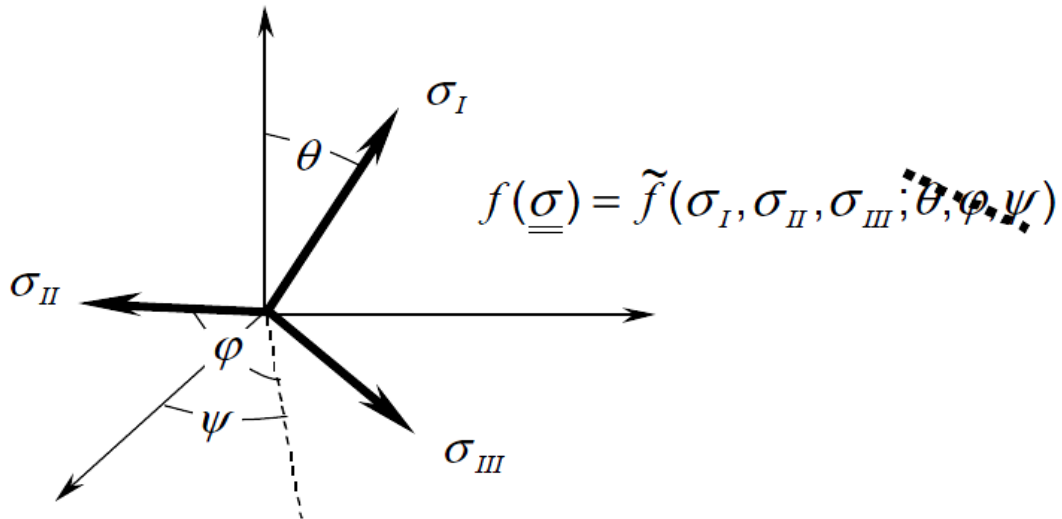


Figure b.16: Isotropie plastique d'un matériau.

ou de manière équivalente, et plus concrète, des seules *contraintes principales* notées $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$, puisque la propriété d'isotropie du matériau traduit le fait (vérifiable expérimentalement) que la condition d'apparition de la plasticité ne fait nullement intervenir l'*orientation* du trièdre des directions principales de $\underline{\sigma}$ par rapport à un trièdre de directions matérielles (figure b.16):

$$f(\underline{\sigma}) = \tilde{f}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) \quad (2.16)$$

Il en résulte en particulier que le domaine d'élasticité, qui peut être représenté dans l'espace R^3 des contraintes principales possède dans cet espace une symétrie ternaire autour de l'axe des

contraintes isotropes ($\sigma I = \sigma II = \sigma III$) puisque $f_{\sim}$ est une fonction *symétrique* de ses arguments.

Les critères de plasticité usuels (Tresca, von Mises, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager : sont des critères isotropes.[4]

II.7-Formulation de la loi de comportement ; règle d'écoulement plastique

II.7.1-Décomposition additive de la déformation totale linéarisée

Compte tenu de la décomposition multiplicative valable dans le cas général, la *déformation totale* de Green-Lagrange entre $d\Omega_t$ et $d\Omega_0$ peut s'écrire sous la forme

$$\underline{\underline{\Delta}} = \frac{1}{2} [\underline{\underline{F}}^t \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}] = \underline{\underline{P}}^t \cdot \underline{\underline{\Delta}}^e \cdot \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{\Delta}}^p \quad (2.17)$$

où l'on a introduit :

$$\underline{\underline{\Delta}}^e = \frac{1}{2} (\underline{\underline{E}}^t \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{I}}) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\Delta}}^p = \frac{1}{2} (\underline{\underline{P}}^t \cdot \underline{\underline{P}} - \underline{\underline{I}}) \quad (2.18)$$

qui représentent respectivement les déformations associées à la transformation élastique $\underline{\underline{E}}$ et à la transformation plastique $\underline{\underline{P}}$.

L'hypothèse de *transformation infinitésimale* dans laquelle nous nous sommes placés implique alors par définition :

$$\|\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{1}}\| \ll 1 \quad \text{et} \quad \|\underline{\underline{P}} - \underline{\underline{1}}\| \ll 1 \quad (2.19)$$

et donc au second ordre près :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (2.20)$$

où $\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ désignent les déformations *linéarisées*. La décomposition *multiplicative* devient en transformation infinitésimale une décomposition de type *additif*, faisant apparaître la déformation totale de l'élément de volume d'un matériau élastoplastique comme la somme d'une partie *élastique*, récupérable à la décharge, et d'une partie *plastique* acquise au terme du cycle de chargement. Il s'agit donc maintenant d'évaluer séparément ces deux contributions en fonction de la sollicitation σ appliquée, ou plus précisément du trajet de sollicitation.

Pour ce qui est de la partie *élastique* de cette déformation, l'hypothèse couramment admise et bien vérifiée expérimentalement, consiste à admettre que les propriétés élastiques du matériau ne sont pas affectées par la déformation plastique acquise par le matériau. Dans le cas de l'essai de traction schématisé sur la figure b.7 cette hypothèse de "découplage" se traduit par le fait que la pente de la droite élastique de première charge (égale au module d'Young du matériau) est égale à celle de la droite de décharge élastique. Il en résulte que :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\sigma}} \quad (2.21)$$

où $\underline{\underline{\Lambda}}$ désigne le *tenseur des complaisances élastiques*, c'est-à-dire dans le cas *isotrope* :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} \quad (2.22)$$

E et ν désignant le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau.

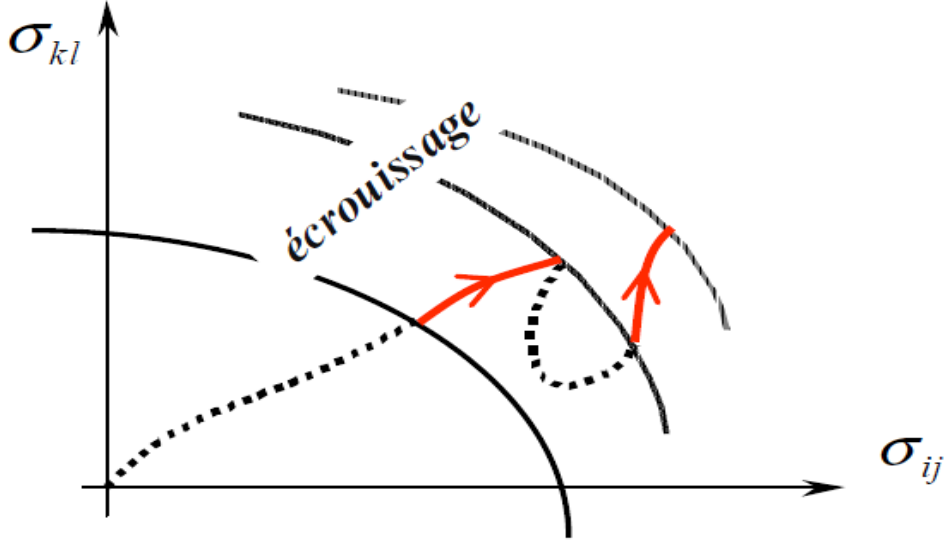


Figure b.17 : Séquences plastiques le long d'un trajet de chargement dans l'espace des contraintes.

L'évaluation de la partie *plastique* de cette déformation est plus délicate. Elle n'est pas comme la partie élastique une fonction bi-univoque de l'état de contrainte, mais dépend *a priori* du trajet de chargement, et plus précisément, le long de ce trajet, des "séquences de charge plastique" caractérisées par le fait que le point représentatif de l'état de contrainte reste sur la frontière du domaine d'élasticité actuel, qu'il «entraîne dans son mouvement» (portions de courbe en trait plein sur la figure b.17). Pour un état d'écrouissage donné, il est alors possible de raisonner en termes d'accroissements infinitésimaux à partir d'un état de contrainte, mettant ainsi en évidence le *caractère incrémental* de la loi de comportement élastoplastique.[4]

Se référant à la figure b.18, plusieurs cas de figure se présentent selon la *position* de $\underline{\underline{\sigma}}$ par rapport à la frontière du domaine d'élasticité actuel, et la *direction* de l'incrément de sollicitation $d\underline{\underline{\sigma}}$.

- Cas n°1. $\underline{\underline{\sigma}}$ est à l'intérieur du domaine d'élasticité : $f(\underline{\underline{\sigma}}, E) < 0$. L'incrément de déformation est alors *purement élastique*, d'où en tenant compte de (2.20) et (2.21)

$$d\underline{\underline{\varepsilon}} = d\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{\Lambda}} : d\underline{\underline{\sigma}} \quad (2.23)$$

- Cas n°2. L'état de contrainte est *sur la frontière* du domaine d'élasticité $f(\underline{\underline{\sigma}}, E) = 0$, l'incrément $d\underline{\underline{\sigma}}$ étant dirigé *vers l'intérieur* du domaine, ce que l'on peut caractériser par :

$$d_{\underline{\underline{\varepsilon}}} f = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : d\underline{\underline{\sigma}} \leq 0 \quad (2.24)$$

La formule (2.19) est encore applicable.

- Cas n°3. Cas de la *charge plastique*. $d\underline{\underline{\sigma}}$ est orienté vers l'extérieur de $C(E)$ à partir d'un état de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ situé sur la frontière de $C(E)$:

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{E}}) = 0 \text{ avec } d_{\underline{\underline{\varepsilon}}} f = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : d\underline{\underline{\sigma}} > 0 \quad (2.25)$$

Dans ce cas :

$$d\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\Lambda}} : d\underline{\underline{\sigma}} + d\underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (2.26)$$

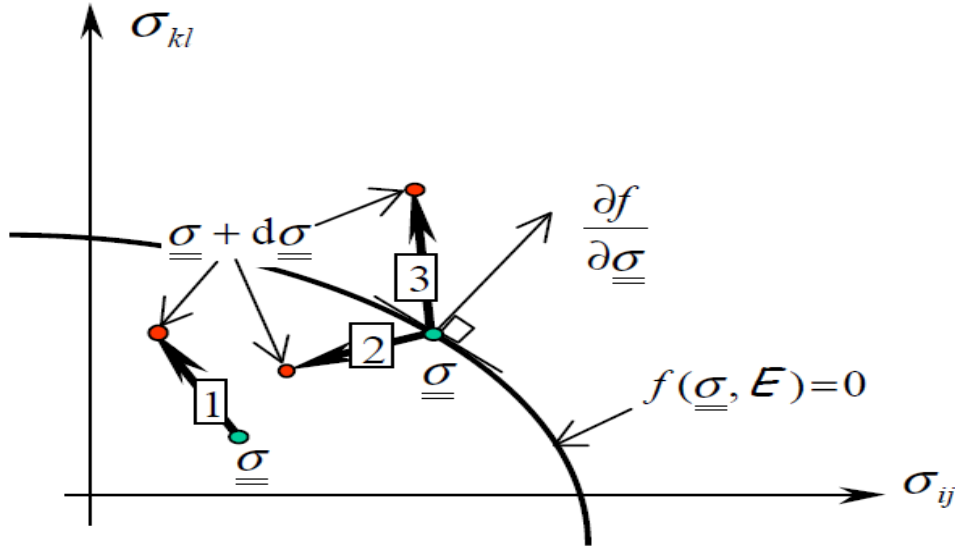


Figure 13 : Différents cas de chargement incrémental.

Il nous reste alors à préciser l'expression de l'incrément de déformation plastique $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$. Celui-ci dépend *a priori* de l'état d'écrouissage actuel du matériau (qui détermine en particulier le domaine d'élasticité actuel $C(E)$), de l'état de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ et de l'incrément de chargement appliqué $d\underline{\underline{\sigma}}$ à partir de cet état. Il ne dépend pas en revanche, conformément à l'hypothèse faite d'indépendance de la loi de comportement par rapport au temps physique, de la vitesse avec laquelle cet incrément est appliqué :

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \underline{\underline{F}}[\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{E}}, d\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\dot{\sigma}}}] \quad (2.27)$$

La condition de *continuité* du comportement entre le cas n°2 de la décharge élastique et celui n°3 de la charge plastique impose en outre :

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^p \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad d_E f \rightarrow 0 \quad (2.28)$$

c'est-à-dire qu'il n'y a pas de déformation plastique dans le cas où $d\underline{\underline{\sigma}}$ est appliqué *tangentielllement* à la frontière du domaine d'élasticité. Il en résulte que $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ ne dépend de $d\underline{\underline{\sigma}}$ qu'au travers de sa projection, notée $d\underline{\underline{\sigma}}^n$, sur la normale extérieure (figure b.19). Sa projection $d\underline{\underline{\sigma}}^t$ sur le plan tangent n'induisant en effet aucune déformation plastique, en raison de l'argument de continuité invoqué précédemment ("charge neutre"). Ce résultat implique que $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ peut se mettre sous la forme.

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \underline{\underline{H}}(\underline{\underline{\sigma}}, E) d_E f \quad (2.29)$$

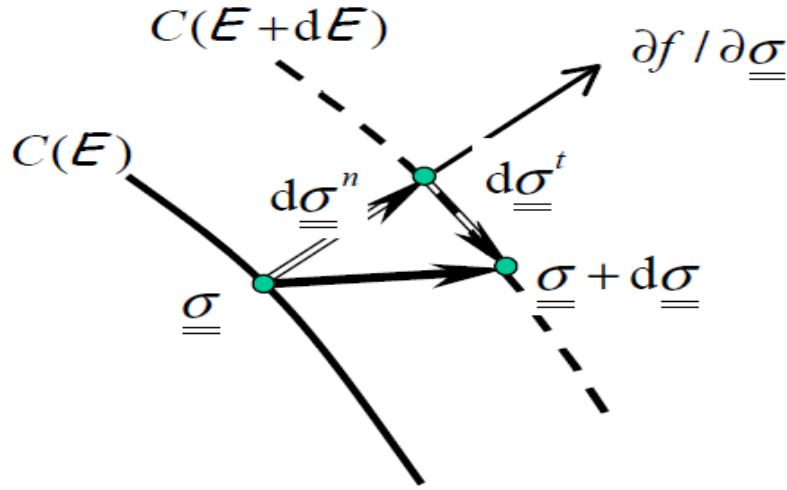


Figure b.19 : Projections normale et tangentielle à la surface de charge de l'incrément de contrainte $d\underline{\underline{\sigma}}$.

II.7.2-Principe du travail plastique maximal ; règle de normalité.

Ce principe, énoncé par Hill (1950), indique que pour un état de contrainte "plastiquement admissible" (c'est-à-dire appartenant au domaine d'élasticité $C(E)$) et un incrément de sollicitation donnés, l'incrément de déformation plastique $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ correspondant vérifie la propriété suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \sup \{ \underline{\underline{\sigma}}^* : d\underline{\underline{\varepsilon}}^p ; \underline{\underline{\sigma}}^* \in C(E) \} \quad (2.30)$$

$\underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ a la dimension d'un *travail élémentaire par unité de volume*, d'où la dénomination du principe. Ce principe a deux conséquences, illustrées sur la figure b.20.

Lorsque $\underline{\underline{\sigma}}$ est strictement à l'intérieur du convexe d'élasticité $C(E)$, $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = 0$. On retrouve l'expression (2.23) de la loi de comportement.

Lorsque $\underline{\underline{\sigma}}$ est sur la frontière de $C(E)$, la propriété (2.30) exprime que $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ est tel qu'il rend maximum le produit scalaire $\underline{\underline{\sigma}}^* : d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$. Il s'ensuit que p de $\underline{\underline{\sigma}}$ est *normale extérieure* à $C(E)$ en $\underline{\underline{\sigma}}$, ce que l'on peut écrire :

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}) \quad \text{avec } d\lambda \geq 0 \quad (2.31)$$

où $d\lambda$ désigne le *multiplicateur plastique*

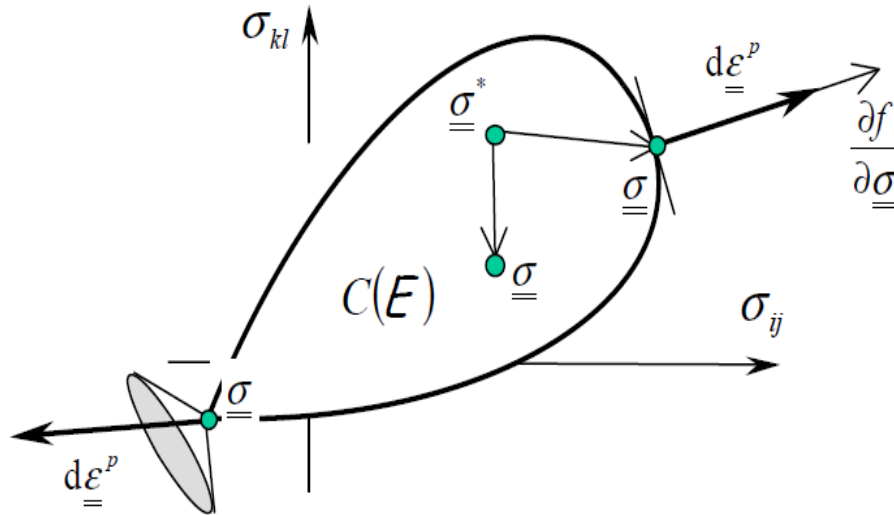


Figure b.20 : Illustration du principe du travail plastique maximal.

$f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{E}}) < 0$	$d\underline{\underline{\varepsilon}} = d\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{\Lambda}} : d\underline{\underline{\sigma}}$	
$f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{E}}) = 0$	$d_{\underline{\underline{E}}} f \leq 0$	$d\underline{\underline{\varepsilon}} = d\underline{\underline{\varepsilon}}^e$
	$d_{\underline{\underline{E}}} f > 0$	$d\underline{\underline{\varepsilon}} = d\underline{\underline{\varepsilon}}^e + d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \frac{1}{M(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{E}})} d_{\underline{\underline{E}}} f \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}, \quad M > 0$

- Dans le cas où la frontière du domaine comporte un point singulier (figure b.20), l'équation (2.31) doit être remplacée par :

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^p \in \partial_{\underline{\underline{E}}} f \quad (2.32)$$

où $\partial_{\underline{\underline{E}}} f$ désigne le *cône des normales extérieures* à $C(\underline{\underline{E}})$ en $\underline{\underline{\sigma}}$. La *règle de normalité* (1.24) associée à l'expression générale (2.29) précédemment établie, permet en définitive d'écrire $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ sous la forme :

$$d\varepsilon^p = \frac{1}{M(\underline{\sigma}, E)} d\varepsilon f \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}, \quad M > 0 \quad (2.33)$$

Le tableau ci-dessus récapitule les différentes situations relatives à l'écriture de la loi de comportement élastoplastique pour un matériau écrouissable obéissant au *principe du travail plastique maximal* (matériau *standard*).

II.7.3-Identification du paramètre M à partir de l'essai de traction simple.

Dans cet essai, l'état de contrainte en tout point de l'éprouvette est homogène *uniaxial*, de la forme:

$$\underline{\sigma} = \sigma_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \quad (2.34)$$

L'expression générale (2.33) donne alors:

$$d\varepsilon_{11}^p = \frac{1}{M(\sigma_{11}, E)} d\varepsilon f \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}} = \frac{d\sigma_{11}}{M} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}} \right)^2 \quad (2.35)$$

soit:

$$\frac{d\sigma_{11}}{d\varepsilon_{11}^p} = \frac{M}{(\partial f / \partial \sigma_{11})^2} \quad (2.36)$$

Le rapport $M = d\sigma_{11} / d\varepsilon_{11}^p$, appelé *module d'écrouissage*, est mesuré expérimentalement en effectuant un cycle élémentaire de charge-décharge (voir figure b.21). On obtient alors:

$$d\varepsilon_{11}^p = d\varepsilon_{11} - d\varepsilon_{11}^e = \frac{d\sigma_{11}}{E_t} - \frac{d\sigma_{11}}{E} \quad (2.37)$$

soit:

$$M = \frac{d\sigma_{11}}{d\varepsilon_{11}^p} = \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right)^{-1} \quad (2.38)$$

où E désigne le module d'Young et E_t le module tangent (pente locale de la courbe de charge). Par comparaison de (2.32) et (2.33) le module d'écrouissage vaut ainsi:

$$M = \frac{M}{(\partial f / \partial \sigma_{11})^2} \quad (2.39)$$

Cette dernière relation montre que la dimension physique de la grandeur M introduite dans l'expression de la règle d'écoulement plastique (2.33) dépend directement du choix fait pour la fonction de charge. En vertu de (2.34), elle ne possède la dimension d'un module d'élasticité ou d'écrouissage que si l'on fait le choix d'une fonction de charge ayant la dimension d'une contrainte.

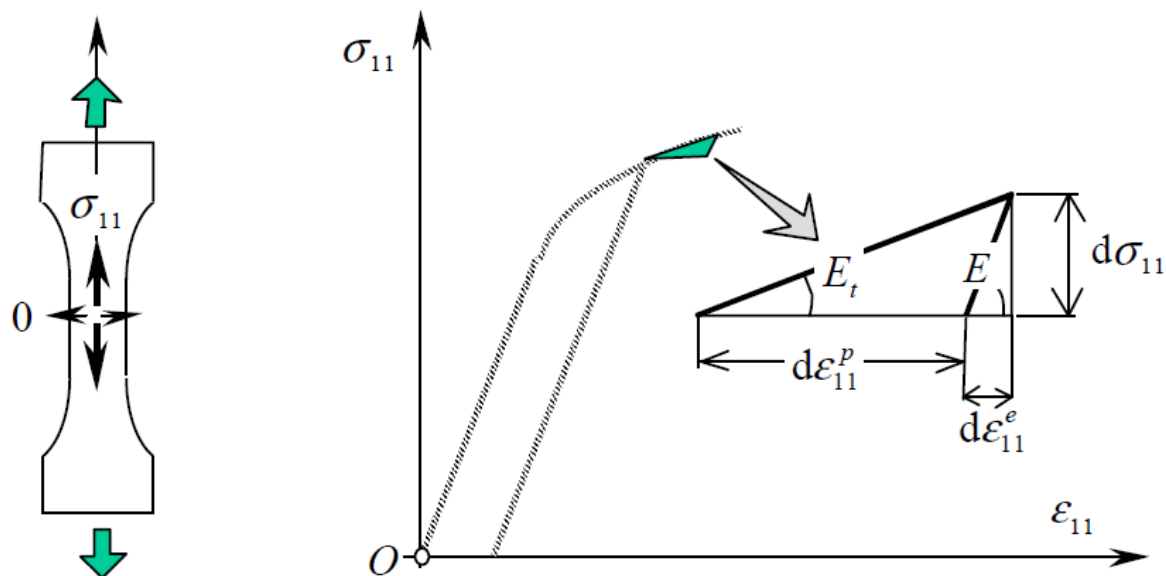
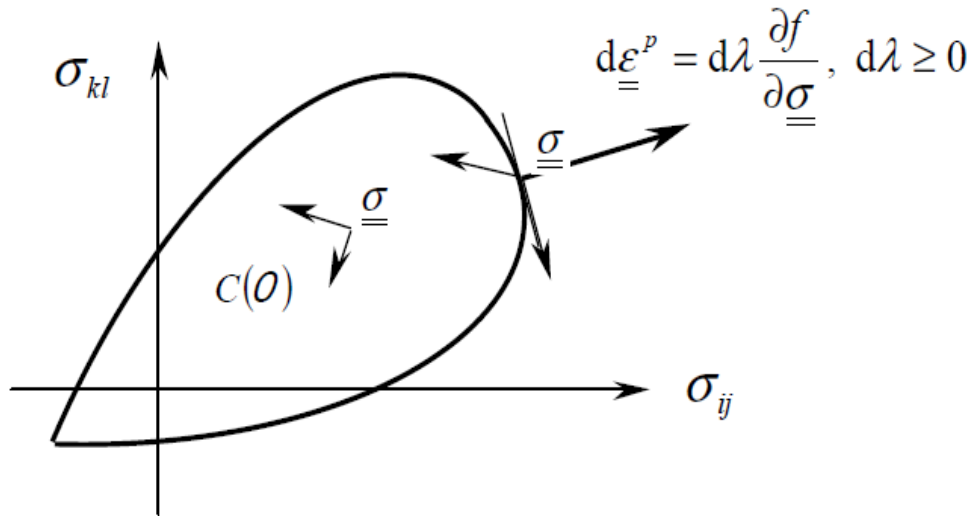


Figure b.16: Cycle charge-décharge élémentaire dans un essai de traction simple.

Remarque. Le principe du travail plastique maximal qui nous a permis de préciser l'orientation de l'incrément de déformation plastique, est bien vérifiée expérimentalement pour les métaux. Il est en revanche sujet à caution pour ce qui concerne des matériaux de type sols, roches ou bétons ("géomatériaux"). Dans ce cas l'expression (2.29) demeure valable, mais l'orientation de $p \, d\varepsilon$, c'est-à-dire du tenseur $H(\sigma, E)$, doit être spécifiée autrement que par la règle de normalité (matériaux non standards).[4]

II.7.4- Le cas de la plasticité parfaite

Nous plaçant toujours dans le cas du matériau obéissant au principe du travail plastique maximal, le caractère non écrouissable du matériau implique que dans l'expression (2.33) le paramètre M , proportionnel ainsi que nous venons de le voir au *module d'écrouissage* M , s'annule, de même qu'au numérateur l'incrément de fonction de charge df , puisque le point représentatif de l'état de contrainte ne peut plus sortir du domaine d'élasticité fixe $C(0)$. Cela signifie que l'amplitude $d\lambda = df/M$ de l'incrément du multiplicateur plastique, et donc de la déformation plastique reste *indéterminée*, bien que toujours positive en raison de la règle de normalité. Le tableau ci-dessous associé à la figure b.22 récapitule les différentes écritures de la loi de comportement selon la situation rencontrée.



$f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0$	$d\underline{\underline{\varepsilon}} = d\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{\Lambda}} : d\underline{\underline{\sigma}}$	
$f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$	$df \leq 0$	$d\underline{\underline{\varepsilon}} = d\underline{\underline{\varepsilon}}^e$
	$df = 0$	$d\underline{\underline{\varepsilon}} = d\underline{\underline{\varepsilon}}^e + d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}, d\lambda > 0$

Figure b.22 : Ecriture de la loi de comportement pour un matériau élastique parfaitement plastique standard.[4]

II.7.5- Cas du matériau isotrope

La fonction de charge s'écrivant dans ce cas comme une fonction des seuls invariants principaux de $\underline{\underline{\sigma}}$

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \hat{f}(I_1 = \text{tr} \underline{\underline{\sigma}}, I_2 = \frac{1}{2} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}}^2, I_3 = \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}}^3) \quad (2.40)$$

l'écriture de la règle d'écoulement plastique (2.33) dans le cas où le matériau obéit au principe du travail plastique maximal devient :

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = d\lambda \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial I_1} \underline{\underline{1}} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial I_2} \underline{\underline{\sigma}} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial I_3} \underline{\underline{\sigma}}^2 \right) \quad (2.41)$$

Cette dernière expression montre que $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ a les mêmes directions principales que $\underline{\underline{\sigma}}$, tandis que, si l'on suppose que le matériau est également isotrope du point de vue de ses propriétés élastiques, soit :

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \frac{1+\nu}{E} d\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{tr } d\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}} \quad (2.42)$$

(E : module d'Young, ν : coefficient de Poisson), l'incrément de déformation élastique $d\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ a les mêmes directions principales que l'incrément de charge $d\underline{\underline{\sigma}}$. En outre il résulte de (2.41) que :

$$d\varepsilon_K^p = d\lambda \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial I_1} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial I_2} \sigma_K + \frac{\partial \hat{f}}{\partial I_3} \sigma_K^2 \right) \quad (2.43)$$

où $d\varepsilon^K$ (respectivement σ^K), avec $K = I, II, III$, désignent les valeurs principales de $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ (respectivement $\underline{\underline{\sigma}}$). D'où en observant que :

$$I_1 = \sum_{K=I}^{III} \sigma_K, \quad I_2 = \frac{1}{2} \sum_{K=I}^{III} \sigma_K^2, \quad I_3 = \frac{1}{3} \sum_{K=I}^{III} \sigma_K^3 \quad (2.44)$$

et donc

$$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_K} = 1, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \sigma_K} = \sigma_K, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \sigma_K} = \sigma_K^2 \quad (2.45)$$

il vient

$$d\varepsilon_K^p = d\lambda \frac{\partial \hat{f}}{\partial \sigma_K} (I_1, I_2, I_3) = d\lambda \frac{\partial \hat{f}}{\partial \sigma_K}, \quad d\lambda \geq 0 \quad (2.46)$$

ce qui signifie en particulier que la règle de normalité est valable dans l'espace des valeurs principales de $\underline{\underline{\sigma}}$ et $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$. [4]

III.1- Introduction

Comme nous l'avons vu, la fonction de charge d'un matériau obéissant à un critère de *plasticité parfaite isotrope* s'écrit :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \tilde{f}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) \leq 0 \quad (3.1)$$

Où $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ sont les contraintes principales. Le domaine d'élasticité peut donc être représenté dans R_3 . Dans cet espace, la décomposition de la contrainte en parties *sphérique* et *déviatorique* d'un tenseur des contraintes

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{s}} + 1/3(\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} \quad (3.2)$$

peut être représentée de la façon suivante (figure c.1). Le vecteur $\underline{OM}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ étant associé à $\underline{\underline{\sigma}}$, et $\underline{e}_\Delta (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, vecteur *unitaire* porté par l'axe trisecteur Δ , à $\underline{I}/\sqrt{3}$, il vient :

$$\underline{OH} = (\underline{OM} \cdot \underline{e}_\Delta) \underline{e}_\Delta = (\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}) \underline{e}_\Delta / \sqrt{3} \quad (3.3)$$

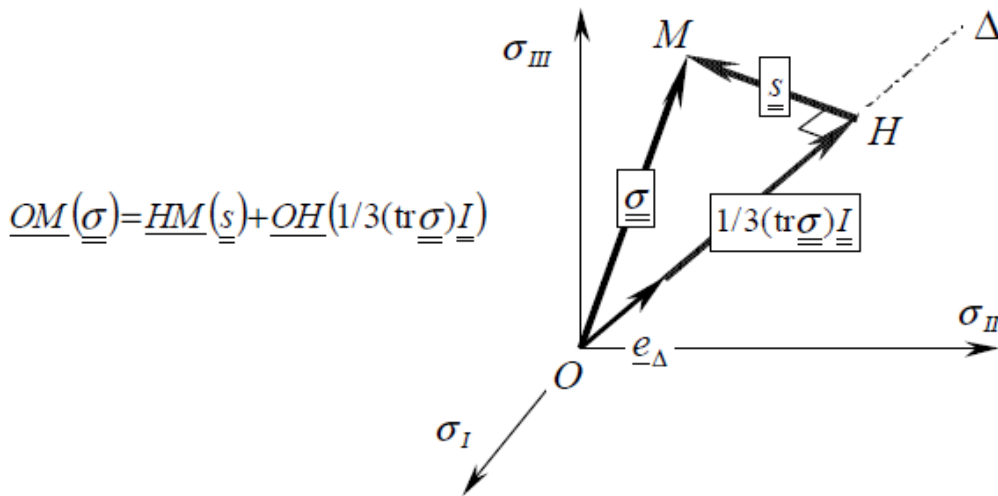


Figure c.1. Représentation géométrique dans l'espace des contraintes principales de la décomposition d'un tenseur en parties sphérique et déviatorique [4]

de sorte que le vecteur $\underline{OH}$ de composantes $(\text{tr} \underline{\underline{\sigma}} / 3, \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} / 3, \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} / 3)$ représente dans l'espace des contraintes principales la partie *sphérique* du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$, la partie *déviatorique* étant associée au vecteur $\underline{OM} - \underline{OH} = \underline{HM}$. Ce dernier est perpendiculaire à l'axe Δ .

III.2-Critère de Von Mises

III.2.1- Domaine d'élasticité.

La fonction de charge relative à un tel critère s'écrit :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \left(\frac{1}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \right)^{1/2} - k = \left(\frac{1}{2} s_{ij} s_{ji} \right)^{1/2} - k = \left(\frac{1}{2} (s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2) \right)^{1/2} - k \quad (3.4)$$

où (s_I, s_{II}, s_{III}) désignent les valeurs principales de $\underline{\underline{s}}$ et k représente la *limite d'élasticité en cisssion simple*. Dans l'espace des contraintes principales, le module du vecteur $\underline{\underline{HM}}$ est égal à:

$$HM = (s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2)^{1/2} \quad (3.5)$$

de sorte que le critère de Von Mises peut également s'écrire

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \Leftrightarrow HM \leq k\sqrt{2} \quad (3.6)$$

Le domaine d'élasticité est un cylindre circulaire d'axe Δ et de rayon $k\sqrt{2}$ (figure c.2).

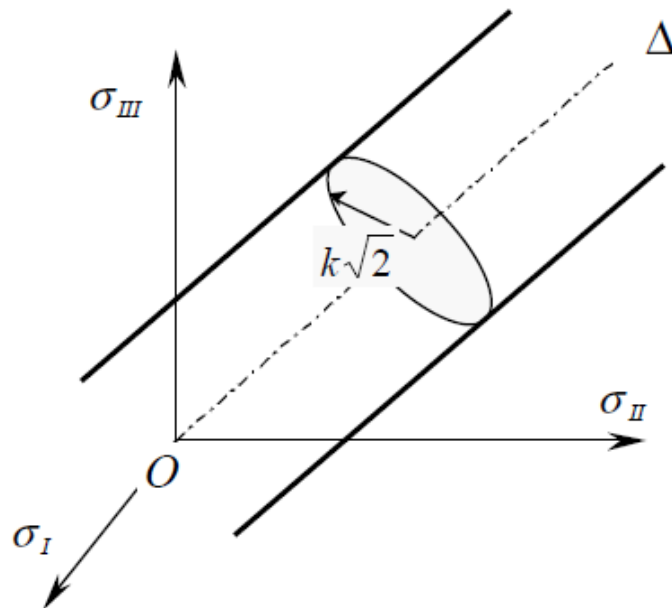


Figure c.2. Domaine d'élasticité relatif au critère de Von Mises

III.2.2- Règle d'écoulement plastique (matériau standard)

Partant de l'expression générale

$$\underline{\underline{d}}^p = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \lambda \geq 0 \quad \text{si } f(\underline{\underline{\sigma}}) = \dot{f}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \quad (3.7)$$

Tenant compte de (3.4), il vient

$$df = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : d\underline{\underline{\sigma}} = \frac{d(1/2 \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}})}{2(1/2 \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}})^{1/2}} = \frac{\underline{\underline{s}} : d\underline{\underline{s}}}{2k} = \frac{\underline{\underline{s}}}{2k} : d\underline{\underline{\sigma}} \quad \forall d\underline{\underline{\sigma}} \quad (3.8)$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{\underline{\underline{s}}}{2k} \quad (3.9)$$

et par conséquent, puisque le multiplicateur plastique λ est indéterminé

$$\underline{\underline{d}}^p = \lambda \underline{\underline{s}} \quad \lambda \geq 0 \quad \text{si } (1/2 \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}})^{1/2} = k \quad \text{et} \quad \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = 0 \quad (3.10)$$

Cette règle d'écoulement peut s'interpréter géométriquement en remarquant d'une part que $\underline{\underline{d}}^p$ a les mêmes directions principales que $\underline{\underline{\sigma}}$, et que dans l'espace des contraintes principales le vecteur associé à $\underline{\underline{d}}^p$ est *normale extérieure* à la surface de charge cylindrique, donc perpendiculaire à l'axe Δ , et même plus précisément *colinéaire* au vecteur associé à $\underline{\underline{s}}$ (figure c.3)

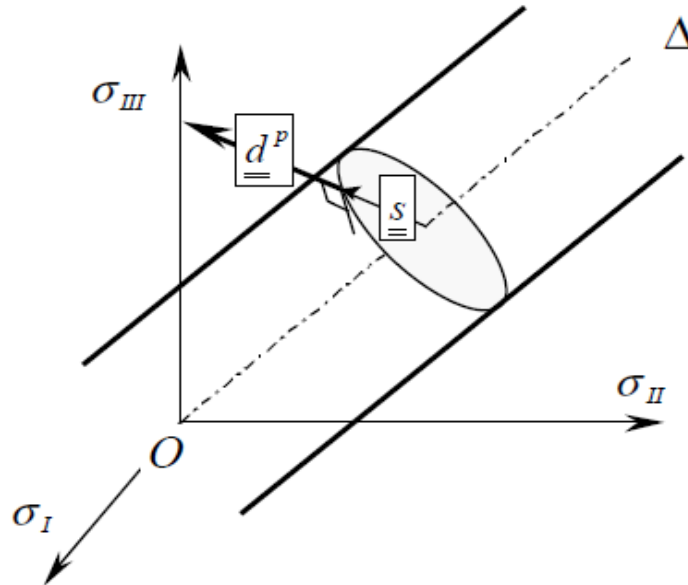


Figure c.3. Interprétation géométrique de la règle d'écoulement associée pour un critère de Von Mises

La relation (3.10) implique en particulier que

$$\text{tr}(\underline{\underline{d}}^p) = \text{tr}(\underline{\underline{\dot{\lambda}}}_s) = 0 \quad (3.11)$$

signifiant ainsi que le matériau est *plastiquement incompressible*. [4]

III.3-Critère de Tresca

III.3.1- Domaine d'élasticité.

La fonction de charge d'un tel critère s'écrit :

$$\hat{f}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = \sup_{K,L=I,II,III} \{\sigma_K - \sigma_L\} - \sigma_0 \leq 0 \quad (3.12)$$

où $\sigma_0 = 2C$ représente la limite d'élasticité en *traction simple* du matériau, C désignant sa *cohésion*. Dans l'espace des contraintes principales le domaine d'élasticité est représenté par un cylindre d'axe Δ . En effet étant donné un point $M(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ appartenant à ce domaine, c'est-à-dire vérifiant l'inégalité (3.12), ce dernier contient toute la droite passant par M et parallèle à Δ constituée des points de la forme $M'(\sigma_I + \alpha, \sigma_{II} + \alpha, \sigma_{III} + \alpha)$, puisqu'il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \forall \alpha \quad \hat{f}(\sigma_I + \alpha, \sigma_{II} + \alpha, \sigma_{III} + \alpha) = \\ \sup_{K,L=I,II,III} \{\sigma_K + \alpha - \sigma_L - \alpha\} - \sigma_0 = \hat{f}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Il reste alors à préciser la section de ce cylindre en se plaçant dans un *plan déviateur* quelconque, perpendiculaire à Δ (figure c.4). L'expression (3.12) fait apparaître que le critère de Tresca consiste à *limiter la différence entre les contraintes principales extrêmes*, la contrainte principale intermédiaire n'intervenant pas dans un tel critère. L'espace des contraintes principales peut être ainsi subdivisé en six régions égales délimitées par les trois plans passant par Δ et contenant respectivement les trois axes principaux. Chacune de ces régions correspond à un classement d'ordre donné entre les contraintes principales. [5]

Plaçons nous par exemple dans la région où σ_I et σ_{III} sont les contraintes principales majeure et mineure, tandis que σ_{II} est la contrainte principale intermédiaire. Le critère de Tresca s'écrit alors

$$\sigma_I - \sigma_{III} - \sigma_0 \leq 0 \quad (3.14)$$

La restriction du domaine d'élasticité à cette région est donc délimitée par le plan d'équation $\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_0$ parallèle à Δ et à l'axe $O\sigma_{II}$. Effectuant le même raisonnement pour les cinq autres régions, il apparaît que la frontière du domaine d'élasticité est un *hexagone régulier* représenté sur la figure c.4.

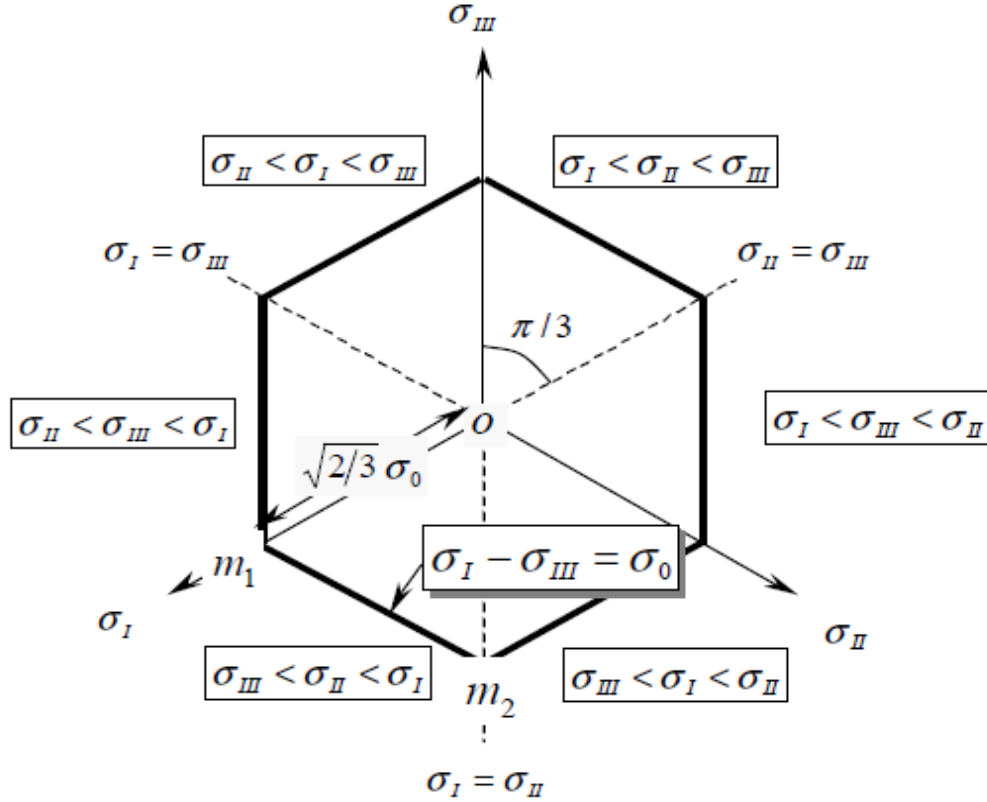


Figure c.4. Section par un plan déviateur du domaine d'élasticité relatif à un critère de Tresca

La dimension de cet hexagone est caractérisée par la distance $om_1 = om_2$, où m_1 désigne la trace dans le plan déviateur de l'arête du cylindre hexagonal, parallèle à l'axe Δ , qui passe par le point $(\sigma_I = \sigma_0, \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0)$ correspondant à limite d'élasticité en traction uniaxiale. Cette distance n'est autre que la norme du déviateur associé à cet état de contrainte ($s_I = 2\sigma_0/3$, $s_{II} = s_{III} = -\sigma_0/3$)

$$om_1 = om_2 = (s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 \quad (3.15)$$

III.3.2- Règle d'écoulement :

$$d_K^p = \lambda \frac{\partial \hat{f}}{\partial \sigma_K}, \quad \lambda \geq 0 \quad (3.16)$$

Deux cas doivent être distingués selon la position de l'état de contrainte sur la surface de charge hexagonale.

- *Régime de face* (figure c.5(a)). Le point est situé sur une face du polyèdre (segment $m_1 m_2$ à l'exclusion des extrémités). La fonction de charge s'écrit dans ce cas

$$\hat{f}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = \sigma_I - \sigma_{III} - \sigma_0 = 0 \quad (3.17)$$

d'où en vertu de (3.16)

$$d_I^p = \dot{\lambda} \geq 0 \quad d_{II}^p = 0 \quad d_{III}^p = -\dot{\lambda} \quad \text{lorsque} \quad \dot{f}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = \dot{\sigma}_I - \dot{\sigma}_{III} = 0 \quad (3.18)$$

De même sur la «face» $m_2 m_3$

$$d_I^p = 0 \quad d_{II}^p = \dot{\mu} \geq 0 \quad d_{III}^p = -\dot{\mu} \quad \text{lorsque} \quad \dot{f}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = \dot{\sigma}_{II} - \dot{\sigma}_{III} = 0 \quad (3.19)$$

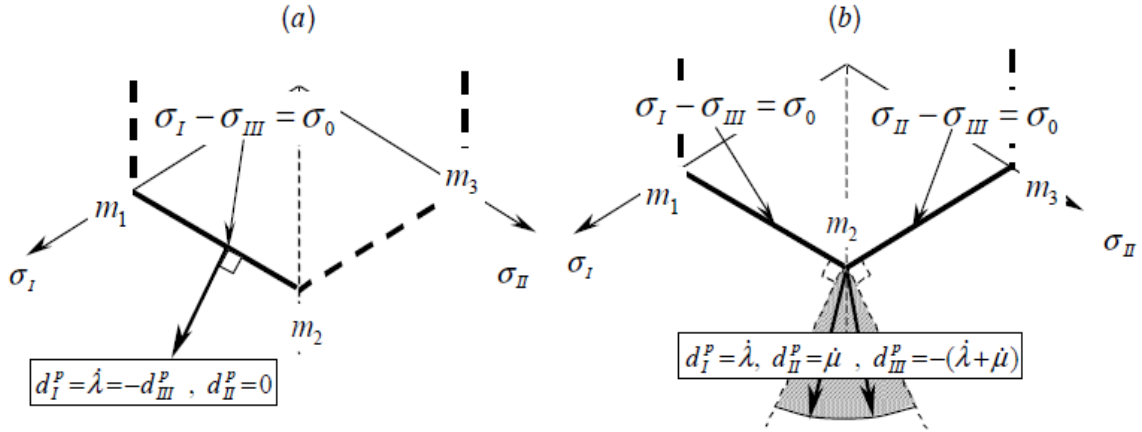


Figure c.5. Règle d'écoulement plastique pour un matériau de Tresca : (a) régime de face, (b) régime d'arête

• *Régime d'arête* (figure c.5(b)). Le point est situé sur une arête du polyèdre (point m_2). La fonction de charge s'écrit dans ce cas

$$\sigma_I - \sigma_{III} - \sigma_0 = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{II} - \sigma_{III} - \sigma_0 = 0 \quad (3.20)$$

Le vecteur représentant le taux de déformation plastique appartient au *cône des normales extérieures* en ce point, c'est-à-dire qu'il est *combinaison convexe* des vecteurs correspondant aux régimes des «faces» $m_1 m_2$ et $m_2 m_3$. Soit

$$d_I^p = \dot{\lambda} \geq 0 \quad d_{II}^p = \dot{\mu} \geq 0 \quad d_{III}^p = -(\dot{\lambda} + \dot{\mu}) \quad \text{lorsque} \quad \dot{\sigma}_I = \dot{\sigma}_{II} = \dot{\sigma}_{III} \quad (3.21)$$

On observe que dans tous les cas, la *condition d'incompressibilité plastique* est bien vérifiée

$$\text{tr} \underline{\underline{d}}^p = \sum_K d_K^p = 0 \quad (3.22)$$

ce qui se traduit géométriquement par le fait que le vecteur associé au taux de déformation plastique reste perpendiculaire à l'axe Δ . [5]

IV.1-Introduction

Ce chapitre interprète des exemples de structures sollicitées en traction, afin d'expliquer les différentes phases par lesquelles se présentent les premières déformations jusqu'à la ruine totale de la structure en question.

IV.2-Un exemple simple de structure

Soit un système réticulé, représenté figure d.1, formé de trois barres verticales identiques (longueur l), numérotées de 1 à 3, fixées à leur extrémité supérieure (points A' , B' et C') par des articulations sans frottement, et reliées entre elles en partie inférieure à un barreau *rigide*, les points A , B et C représentant également des articulations *sans frottement*. Les seules contraintes "généralisées" du système sont donc les efforts N , $i=1,2,3$ de traction-compression dans les barres. Le chargement est constitué d'une force verticale d'intensité Q , comptée positivement vers le bas, appliquée au point D milieu de BC , et croissant progressivement à partir de zéro ($Q: 0^-$).

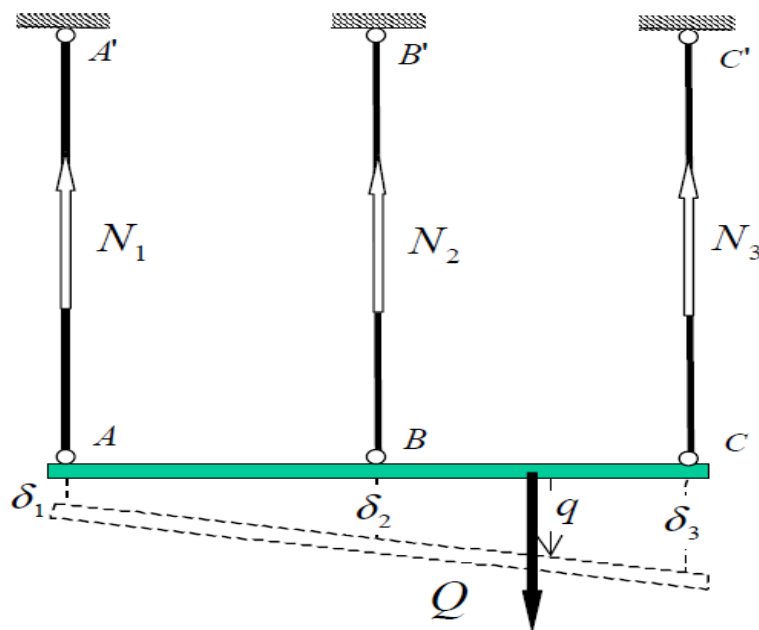


Figure d.1 : Calcul élastoplastique d'un système réticulé.[6]

Les barres ont un comportement **élastique parfaitement plastique** schématisé par le diagramme (N_i , d_i) de la figure d.2. S désigne la section des barres, E le module d'Young du matériau constitutif, supposé homogène, et L la limite d'élasticité en traction-compression. Le tableau ci-dessous, récapitule les différentes écritures de la loi de comportement élastoplastique pour la barre n° i . On observe en particulier que le principe du travail plastique maximal se traduit ici par le fait que la barre s'allonge ou se raccourcit) plastiquement lorsque la limite d'élasticité étant atteinte en traction, la valeur de l'effort est maintenue constante.

$f(N_i)= N_i -L < 0$	$\dot{\delta}_i = \dot{\delta}_i^e = \frac{\dot{N}_i l}{ES}$	
$f(N_i)=N_i-L=0$	$\dot{f} = \dot{N}_i \leq 0$	$\dot{\delta}_i = \dot{\delta}_i^e$
	$\dot{f} = \dot{N}_i = 0$	$\dot{\delta}_i = \underbrace{\dot{\delta}_i^e}_{=0} + \dot{\delta}_i^p = \dot{\lambda} (\partial f / \partial N_i) = +\dot{\lambda} \geq 0$
$f(N_i)=N_i+L=0$	$\dot{f} = \dot{N}_i \leq 0$	$\dot{\delta}_i = \dot{\delta}_i^e$
	$\dot{f} = \dot{N}_i = 0$	$\dot{\delta}_i = \underbrace{\dot{\delta}_i^e}_{=0} + \dot{\delta}_i^p = \dot{\lambda} (\partial f / \partial N_i) = -\dot{\lambda} \leq 0$

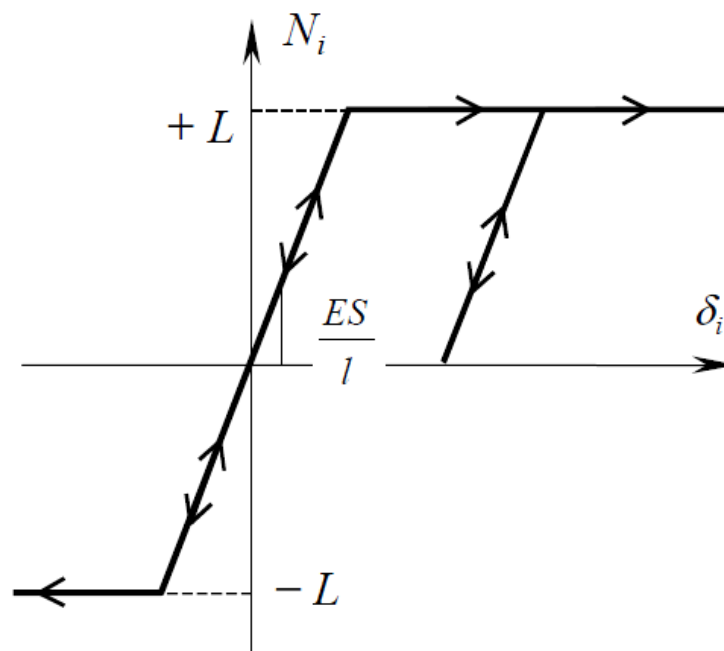


Figure d.2 : Diagramme de comportement élastique parfaitement plastique de la barre n°i.

L'état **initial** de la structure étant supposé **naturel** ($N=0$, $i=1,2,3$ $i=0$ pour $Q=0$), on cherche à déterminer l'évolution du système à mesure que le chargement Q augmente à partir de la valeur nulle.

IV.2.1-Phase de comportement élastique

Les équations permettant de mener à bien la résolution du problème sont classiquement :
 _ **Les équations d'équilibre**, valables indépendamment de la loi de comportement des barres. Elles résultent ici de l'équilibre global en *résultante* (verticale) et en *moment* (par exemple par rapport au point d'application de la charge) du barreau horizontal soumis à l'action de la charge Q et des efforts N_i exercés par les barres. Soit immédiatement :

$$\begin{cases} Q = N_1 + N_2 + N_3 \\ N_3 = N_2 + 3N_1 \end{cases} \quad (4.1)$$

Le système est **hyperstatique d'ordre un**.

_ Les **relations de comportement**. Faisant l'hypothèse que les efforts restent strictement à l'intérieur du domaine d'élasticité, elles s'écrivent :

$$\delta_i = \frac{N_i l}{ES} \quad i=1,2,3 \quad (4.2)$$

_ La relation de **compatibilité géométrique** entre allongements consiste ici tout simplement à exprimer que les points A, B, C restent alignés :

$$\delta_1 + \delta_3 - 2\delta_2 = 0 \quad (4.3)$$

Elle permet, à travers les relations (4.2), de rajouter une troisième équation au système (4.1), dont la résolution donne alors :

$$N_1 = Q/12, \quad N_2 = Q/3, \quad N_3 = 7Q/12 \quad (4.4-a)$$

$$\delta_1 = Ql/12ES, \quad \delta_2 = Ql/3ES, \quad \delta_3 = 7Ql/12ES, \quad (4.4-b)$$

le déplacement vertical q du point d'application du chargement valant dès lors :

$$q = (\delta_2 + \delta_3) / 2 = 11Ql / 24ES \quad (4.5)$$

Cette solution n'est valable que dans la mesure où le comportement des barres demeure *purement élastique*, c'est-à-dire tant que $N_3 < L$, soit :

$$Q < Q^e = 12L/7 \quad (4.6)$$

Q^e représente la **limite d'élasticité** initiale de la structure. Elle correspond à la plastification en traction de la barre n°3. La réponse globale de la structure, représentée sous la forme d'une courbe donnant l'effort Q en fonction du déplacement q de son point d'application est représentée sur la figure 3a, tandis que l'évolution correspondante des efforts des trois barres est donnée sur la figure 3b.

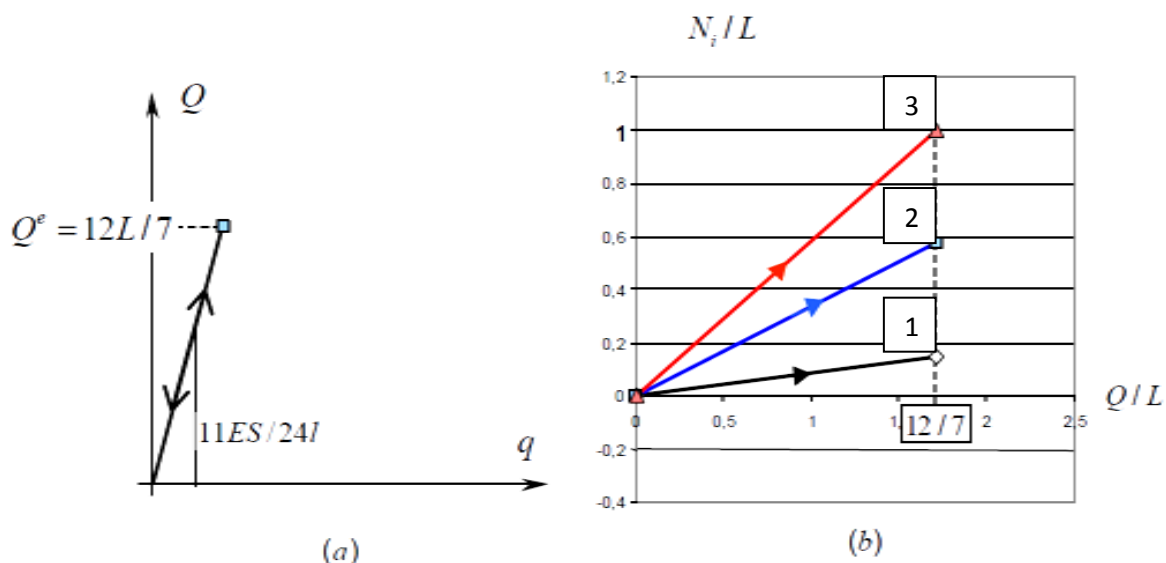


Figure d.3 : Réponse de la structure en phase élastique et évolution des efforts dans les barres [6]

IV.2.2- Phase élastoplastique

Poursuivant le chargement au-delà de la limite d'élasticité du système, on fait l'hypothèse de travail, qu'il conviendra de vérifier *a posteriori*, que la **barre n°3 reste plastifiée en traction**

$$N_3 = +L \text{ pour } Q > Q^e \quad (4.7)$$

Cette hypothèse nous permet alors de déterminer les efforts dans les deux autres barres à partir des *équations d'équilibre* (4.1) :

$$N_1 = -Q/2 + L, \quad N_2 = 3Q/2 - 2L \quad (4.8)$$

Le comportement des barres n°s 1 et 2 restant élastique il vient en vertu de (4.2)

$$\delta_1 = (-Q/2 + L)l/ES, \quad \delta_2 = (3Q/2 - 2L)l/ES \quad (4.9)$$

d'où en tenant compte de la relation de *compatibilité géométrique* (4.3) :

$$\delta_3 = (7Q/2 - 5L)l/ES \quad (4.10)$$

Cette dernière relation montre que la loi de comportement de la barre n°3 et en particulier la **règle d'écoulement plastique** est bien vérifiée. En effet de façon générale, cette loi, exprimée en **taux de variation**, s'écrit :

$$\dot{\delta}_3 = \dot{\delta}_3^e + \dot{\delta}_3^p \quad (4.11)$$

c'est-à-dire dans le cas présent ($N_3 = +L, N_3 = 0$):

$$\dot{\delta}_3 = \dot{\delta}_3^p \geq 0 \quad (4.12)$$

Cette relation est bien vérifiée puisque d'après (4.10) :

$$\dot{\delta}_3 = 7/2 \frac{l\dot{Q}}{ES} \text{ avec } \dot{Q} \geq 0 \quad (4.13)$$

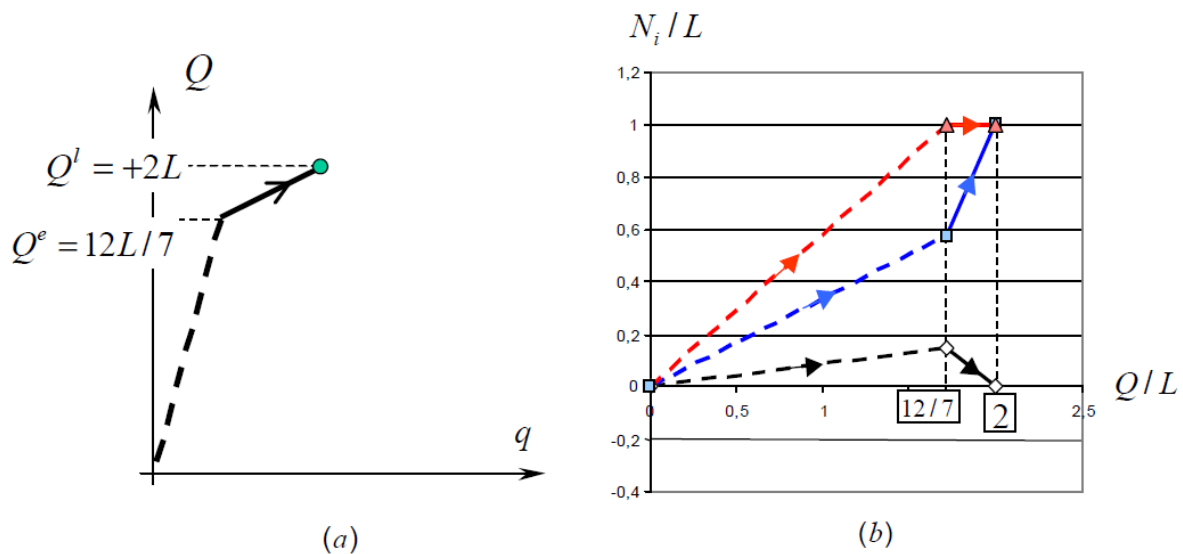


Figure d.4 : Phase élastoplastique de comportement de la structure [6]

Le *théorème d'unicité* en contraintes du problème d'évolution, que nous expliciterons ultérieurement, permet de montrer qu'il s'agit bien de **la solution du problème** tant que les efforts dans les barres n°s 1 et 2 restent dans le domaine élastique :

$$N_1 = -Q/2 + L \leq L \quad \text{et} \quad N_2 = 3Q/2 - 2L \leq L \quad (4.14)$$

Soit

$$Q \leq 2L \quad (4.15)$$

La valeur $Q^l = 2L$ correspond à la *plastification* de la barre n° 2 en *traction* ($N = +L$) 2 , l'effort dans la barre n°1 s'annulant pour cette valeur du chargement (voir figure d. 4(b)).

IV.2.3- Charge limite et ruine plastique

Nous allons tout d'abord montrer qu'il est impossible de poursuivre le chargement au-delà de la valeur $Q^l = +2L$. Le raisonnement est le suivant. L'équilibre du barreau rigide en moment par rapport au point A donne :

$$Q = 2/3 N_2 + 4/3 N_3 \quad (4.16)$$

Les valeurs des efforts dans les barres 2 et 3 étant astreintes à demeurer inférieures à la limite d'élasticité en traction ($+L$), il résulte *nécessairement* de (4.16) que Q doit rester *inférieur (ou égal)* à $+2L$. Il s'agit d'un raisonnement de **calcul à la rupture**, fondé sur l'écriture de la compatibilité entre l'**équilibre** du système (réduit ici à l'équation d'équilibre en moment (4.16)) et la **résistance** de ses éléments constitutifs (les barres 2 et 3).

Il convient de noter que le raisonnement ci-dessus démontre seulement *qu'il n'est pas possible de dépasser* la valeur $Q^l = +2L$, le calcul d'évolution en phase élastoplastique ayant montré que cette valeur est effectivement atteinte.[6]

Si l'on *maintient* la charge à la valeur $Q^l = +2L$, soit $Q = Q^l$, $\dot{Q} = 0$

L'évolution correspondante des efforts dans les barres est dans ce cas :

$$N_1 = 0, \quad N_2 = N_3 + L, \quad \dot{N}_i = 0 \quad (4.17)$$

d'où d'après la loi de comportement :

$$\dot{\delta}_1 = \dot{\delta}_1^e = 0, \quad \dot{\delta}_2 = \dot{\delta}_2^p = \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\delta}_3 = \dot{\delta}_3^p = \dot{\mu} \geq 0 \quad (4.18)$$

les multiplicateurs plastiques λ et μ étant reliés entre eux par la relation de compatibilité géométrique des taux d'allongement déduite de (4.3) :

$$\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_3 - 2\dot{\delta}_2 = 0 \Rightarrow \dot{\mu} = 2\dot{\lambda} \quad (4.19)$$

d'où

$$\dot{q} = (\dot{\delta}_2 + \dot{\delta}_3)/2 = 3\dot{\lambda}/2 \geq 0 \quad (4.20)$$

Les barres 2 et 3 *s'allongent plastiquement sous charge constante*, tandis que la barre n°1 restant de longueur invariable, le barreau rigide est animé d'un mouvement de rotation autour du point A (figure d.5).

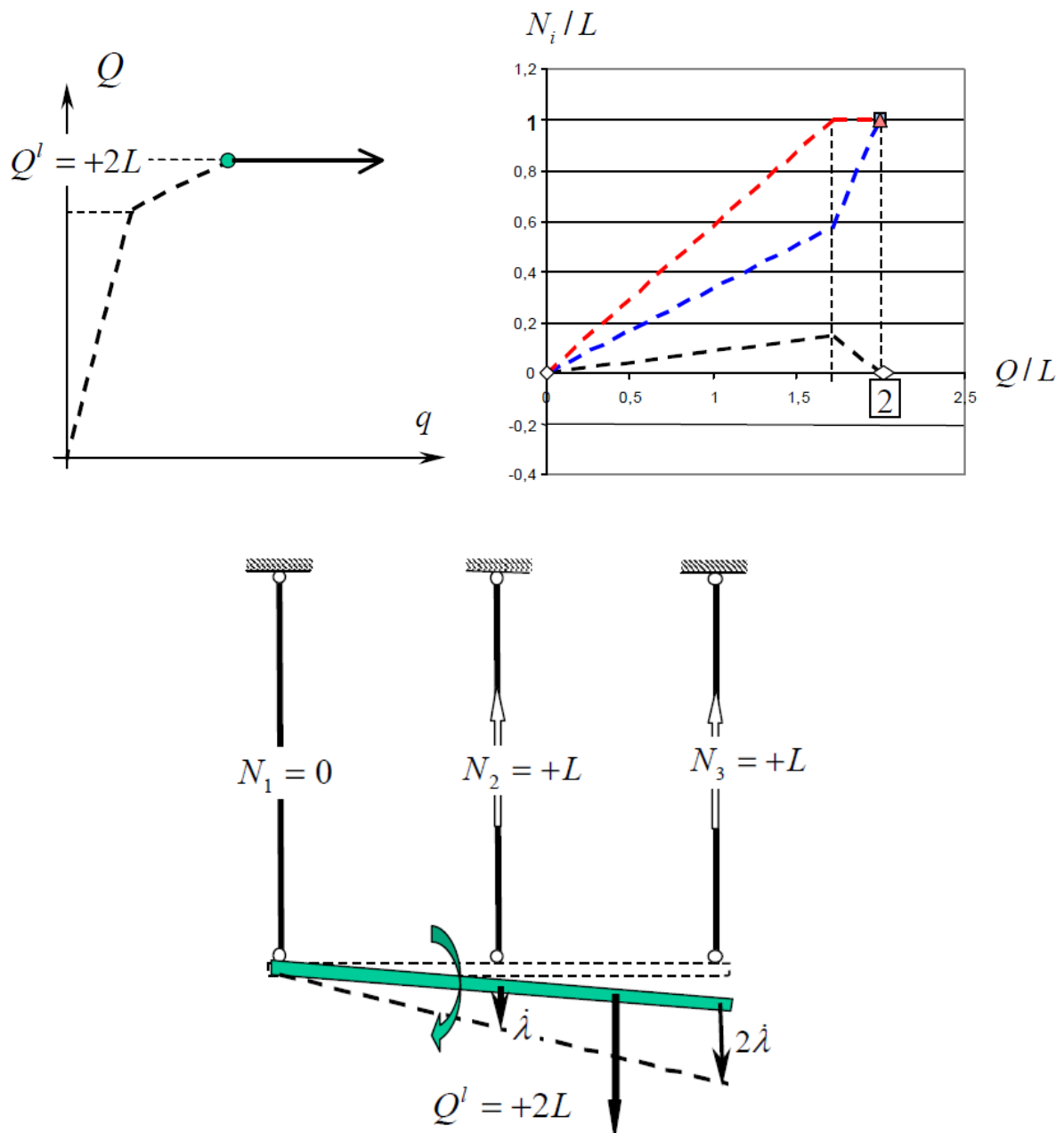


Figure d.5 : Charge limite et mécanisme de ruine plastique

Il y a donc apparition d'un **mécanisme d'écoulement plastique libre**, ou de **ruine plastique** de la structure. Il vient se superposer aux allongements déjà acquis par les différentes barres au moment d'atteindre la **charge limite**. Bien entendu l'analyse ici faite suppose que les *changements de géométrie soient négligeables* (allongements des barres petits devant leur longueur).

IV.2.4- Décharge de la structure. Etat résiduel

On effectue une décharge de la structure à partir de la charge limite Q^l , immédiatement avant que ne se produise l'écoulement plastique libre de la structure. Adoptant l'hypothèse que cette décharge est *élastique*, et raisonnant en accroissements en posant :

$$\begin{cases} Q = Q^l + \Delta Q, \Delta Q < 0; & N_i = N_i(Q^l) + \Delta N_i \\ \delta_i = \delta_i(Q^l) + \Delta \delta_i; & q = q(Q^l) + \Delta q \end{cases} \quad (4.21)$$

il apparaît immédiatement que les accroissements (algébriques) ΔN_i , $\Delta \delta_i$ et Δq sont donnés par les équations (4.4) et (4.5) dans lesquelles Q est remplacé par ΔQ . D'où immédiatement :

$$\begin{cases} N_1 = \Delta Q / 12 & N_2 = L + \Delta Q / 3 & N_3 = L + 7\Delta Q / 12 \\ \delta_1 = l\Delta Q / 12ES & \delta_2 = l(L + \Delta Q / 3) / ES & \delta_3 = l(2L + 7\Delta Q / 12) / ES \\ q = l(3L / 2 + 11\Delta Q / 24) / ES \end{cases} \quad (4.22)$$

L'état **résiduel** de la structure, est obtenu dans le cas de la **décharge totale** : $\Delta Q = -Q^l = -2L$. Il vient alors compte tenu de (4.22)

$$\begin{cases} N_1^r = -L / 6 & N_2^r = L / 3 & N_3^r = -L / 6 \\ \delta_1^r = -lL / 6ES & \delta_2^r = lL / 3ES & \delta_3^r = 5lL / 6ES \\ q^r = 7lL / 12ES \end{cases} \quad (4.23)$$

L'hypothèse de décharge élastique est bien vérifiée, les efforts dans les barres restant toujours à l'intérieur du domaine d'élasticité. On remarque bien évidemment que les **efforts résiduels** N_i^r forment un système **auto-équilibré** (c'est-à-dire satisfaisant les équations d'équilibre (4.1) avec $Q=0$), tandis que les **allongements résiduels** δ_i^r respectent la condition de compatibilité géométrique (4.3). Par contre les **allongements plastiques** δ_i^p acquis par les barres au cours de la phase de chargement valent :

$$\delta_1^p = \delta_2^p = 0, \quad \delta_3^p = lL / ES \quad (4.24)$$

Ils ne sont donc pas géométriquement compatibles, et c'est précisément cette **incompatibilité géométrique** qui est à l'origine de l'apparition d'**efforts résiduels**. En effet, intégrant sur l'ensemble du cycle charge-décharge la loi de comportement de chacune des barres :

$$\dot{\delta}_i = \dot{\delta}_i^e + \dot{\delta}_i^p = \dot{N}_i l / ES + \dot{\delta}_i^p \quad (4.25)$$

il vient :

$$\delta_i^r = N_i^r l / ES + \delta_i^p \quad (4.26)$$

Cette dernière relation fait clairement apparaître que ce sont les **déformations** (allongements) **élastiques dues aux efforts résiduels** qui, en se superposant aux **allongements plastiques**, **rétablissent la compatibilité géométrique** de la structure (voir figure d.6).[6]

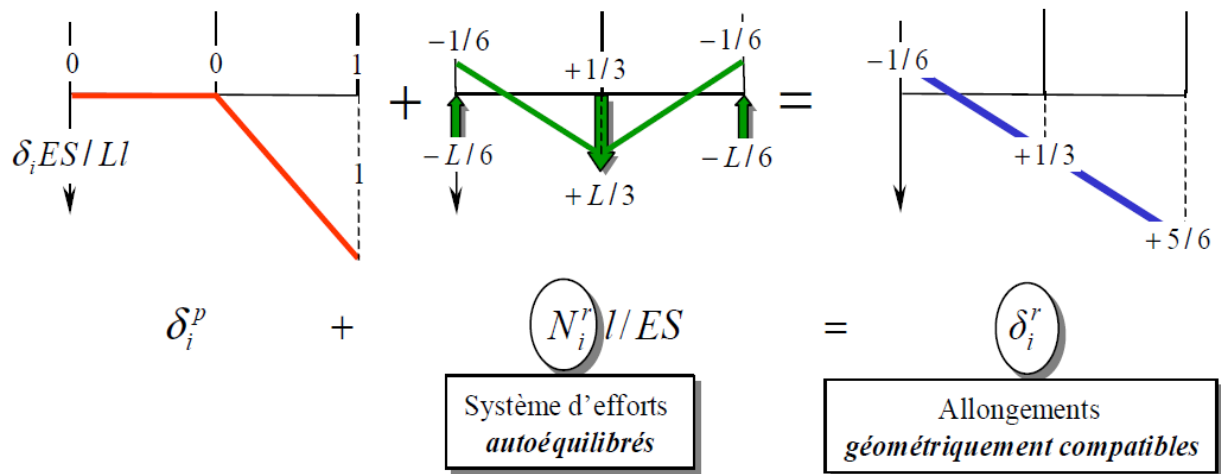


Figure d.6 : Efforts résiduels rétablissant élastiquement la compatibilité géométrique de la structure.

IV.2.5- Récapitulation

La figure d.7(a) qui représente la courbe de première charge, décrit la *réponse globale* de la structure. Elle comporte trois parties. Le segment 1 correspondant à la phase élastique, le segment 2, de pente inférieure, relatif à la réponse élastoplastique, et la demi-droite horizontale 3 correspondant à l'écoulement plastique libre du système. L'évolution des efforts dans les barres en fonction des différentes phases de ce comportement est donnée par la figure d.7(b).

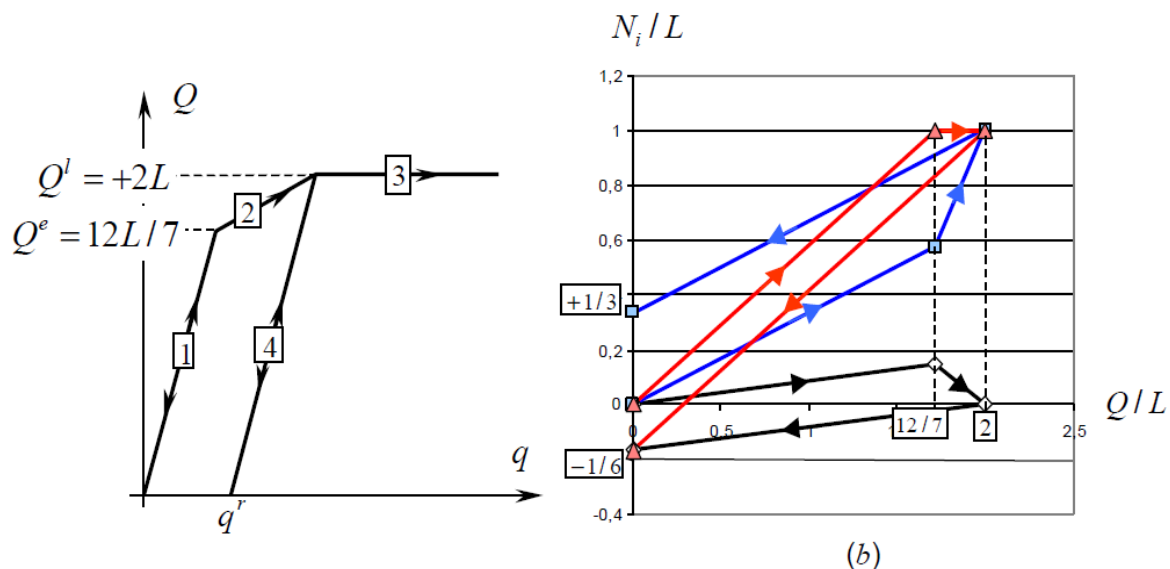


Figure d.7 : Mise en évidence des différentes phases de comportement de la structure.

La phase de décharge élastique est représentée par le segment de droite 4. Le déplacement résiduel du point d'application de la charge est donné par (4.23). Interprétant ce diagramme de la même façon que nous avons interprété au chapitre I la courbe de traction simple d'une éprouvette, il apparaît un *écrouissage global* de la structure, qui se manifeste par la modification du seuil d'élasticité initial qui peut augmenter jusqu'à atteindre la charge limite. On peut d'ailleurs facilement montrer sur cet exemple simple que cet écrouissage est de type

"cinématique", c'est-à-dire que le *domaine d'élasticité actuel* est un segment obtenu par simple translation du domaine d'élasticité *initial* $[-12L/7, +12L/7]$.

IV.3-Généralisation au cas des systèmes en milieu continu tridimensionnel

IV.3.1- Position du problème d'évolution élastoplastique

Le système occupant un domaine Ω de bord $\partial\Omega$ dans l'espace R^3 (Figure d.8), son chargement est défini à tout instant $t \in [0, T]$ par la donnée :

- _ d'un champ de **forces volumiques** $\underline{F}^d(\underline{x}, t)$ défini en tout point $\underline{x}$ de Ω et à tout instant t ;
- _ de **conditions aux limites** portant sur 3 composantes orthogonales entre elles pour l'ensemble des deux vecteurs contrainte T et déplacements $\underline{x}$ en chaque point $\underline{x}$ de Ω . Soit pour $i=1,2,3$:

$$\begin{aligned}\xi_i(\underline{x}, t) &= \xi_i^d(\underline{x}, t) & \forall \underline{x} \in S_{\xi_i} \\ T_i(\underline{x}, t) &= T_i^d(\underline{x}, t) & \forall \underline{x} \in S_{T_i}\end{aligned}\quad (4.27)$$

Où S_{T_i} et S_{ξ_i} forment une *partition* de $\partial\Omega$, indépendante de t :

$$\partial\Omega = S_{T_i} \cup S_{\xi_i}, \quad S_{T_i} \cap S_{\xi_i} = \emptyset \quad (4.28)$$

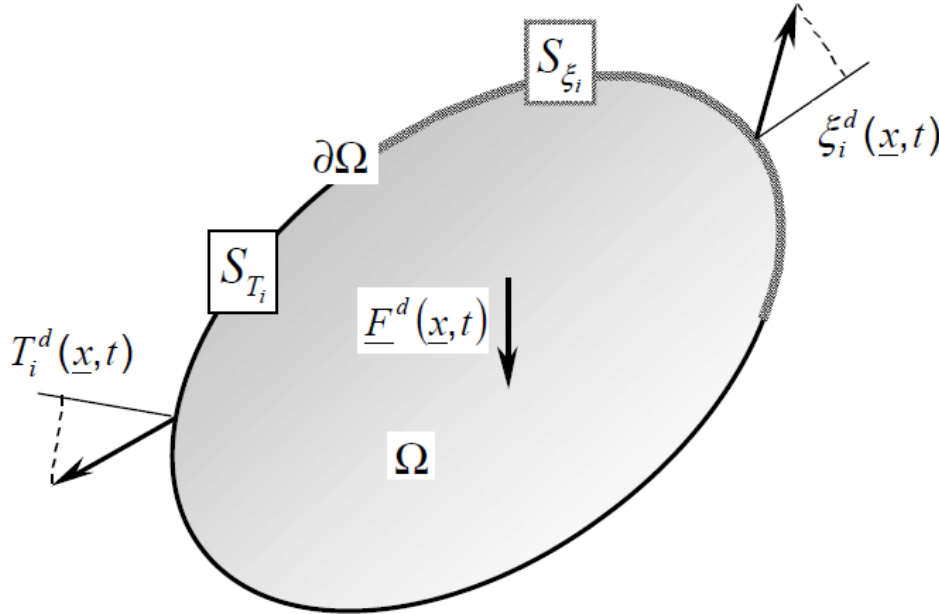


Figure d.8 : Données relatives au chargement d'un système en milieu continu 3D.[2]

On introduit alors

- _ L'ensemble (espace affine) $S(t)$ des champs de contrainte **statiquement admissibles (s.a.)** avec les **données en effort** à l'instant t , c'est-à-dire vérifiant

$$\begin{aligned}\text{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) + \rho \underline{F}^d(\underline{x}, t) &= 0 & \forall \underline{x} \in \Omega \\ \sigma_{ij}(\underline{x}, t) n_j &= T_i^d(\underline{x}, t) & \forall \underline{x} \in S_{T_i} \quad i=1,2,3\end{aligned}\quad (4.29)$$

soit :

$$\underline{\mathcal{S}}(t) = \{ \underline{\sigma} \text{ s.a. avec } \underline{F}^d(t), \underline{T}_i^d(t) \} \quad (4.30)$$

_ L'espace affine des champs de déplacement **cinématiquement admissibles (c.a.)** avec les données en déplacement à l'instant t, c'est-à-dire vérifiant les conditions aux limites :

$$\underline{\xi}_i(\underline{x}, t) = \underline{\xi}_i^d(\underline{x}, t) \quad \forall \underline{x} \in S_{\xi_i} \quad i=1,2,3 \quad (4.31)$$

$$\underline{\mathcal{C}}(t) = \{ \underline{\xi} \text{ c.a. avec } \underline{\xi}_i^d(t) \} \quad (4.32)$$

Nous nous limiterons dans ce qui suit au cas du matériau **élastique parfaitement plastique standard**, la loi de comportement, formulée en vitesse, s'écrit en tout point :

$$f(\underline{\sigma}(\underline{x}, t); \underline{x}) \leq 0 \quad (4.33)$$

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}(\underline{x}, t) + \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}[\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t), \underline{x}], \quad \lambda \geq 0 \quad (4.34)$$

avec

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) = 1/2 \{ \underline{\underline{grad}} \underline{\underline{\dot{\xi}}}(\underline{x}, t) + {}^t \underline{\underline{grad}} \underline{\underline{\dot{\xi}}}(\underline{x}, t) \} \quad (4.35)$$

On introduit enfin l'ensemble (convexe) des champs $\underline{\underline{s}}$ "**plastiquement admissibles**"

$$\underline{\mathcal{P}} = \{ \underline{\underline{\sigma}} ; \forall \underline{x} \in \Omega, f(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}), \underline{x}) \leq 0 \} \quad (4.36)$$

Il reste alors à préciser l'**état initial** du système (correspondant à $\underline{\underline{s}}(\underline{x}, t=0) = 0$) en se donnant le champ de contrainte correspondant :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t=0) = \underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{x}) \quad (4.37)$$

qui doit être **statiquement et plastiquement admissible**

$$\underline{\underline{\sigma}}^0 \in \underline{\mathcal{S}}(t=0) \cap \underline{\mathcal{P}} \quad (4.38)$$

Résoudre un tel problème d'évolution élastoplastique consiste alors à déterminer un couple $(\underline{\underline{\sigma}}(t), \underline{\underline{\xi}}(t))$, $t \in [0, T]$ vérifiant l'ensemble des conditions suivantes

$$\underline{\underline{\sigma}}(t=0) = \underline{\underline{\sigma}}^0 \quad (4.39)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) \in \underline{\mathcal{S}}(t) \cap \underline{\mathcal{P}}, \quad \underline{\underline{\xi}}(t) \in \underline{\mathcal{C}}(t)$$

ainsi que la **loi de comportement** (4.34) reliant en tout point x et s à travers (4.34) et (4.35). Le schéma de la figure d.9 représente la structure générale d'un problème d'évolution élastoplastique.

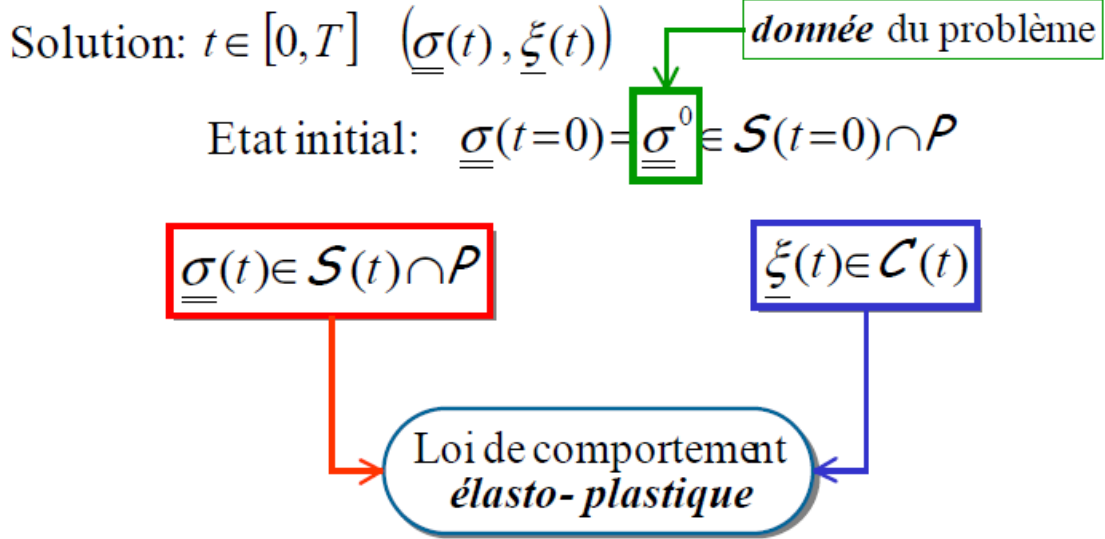


Figure d.9 : Structure générale d'un problème d'évolution élastoplastique [2]

Remarque. Les inconnues du problème étant les champs $\underline{\underline{x}}$ et $\underline{\underline{s}}$, auxquels se rajoute le champ des *multiplieurs plastiques* l , les équations locales dont nous disposons sont :

- l'équation d'équilibre (4.29) ;
- l'équation de comportement (2.34) (à travers (2.35)).

soit un jeu de $3+6=9$ équations scalaires pour $6+3+1=10$ inconnues scalaires (s, x, l). La *dixième équation* est fournie par la condition de plasticité qui stipule qu'en tout point où le multiplicateur plastique est *strictement positif* ($l > 0$ arbitraire) s est astreint à vérifier :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} = 0 \quad (4.40)$$

c'est-à-dire que le point représentatif de l'état de contrainte se déplace sur la surface de charge (fixe). Cela nous conduit à penser que le problème est bien posé et qu'il possède une solution. On admettra ici l'**existence** et l'**unicité de l'évolution en contrainte** de cette dernière (voir pour plus de précisions sur cette question Halphen et Salençon, 1987).

IV.4-Cas des systèmes soumis à un mode de chargement à un nombre fini de paramètres

On s'intéresse ici plus particulièrement au cas où les données relatives au chargement du système dépendent linéairement de m paramètres scalaires $\underline{Q} = (Q_i, i = 1, \dots, m)$ appelés **paramètres de chargement**, de sorte que la puissance des forces extérieures peut à tout instant s'écrire :

$$P_{(e)}(\underline{U}) = \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \underline{U} \, da + \int_{\Omega} \rho \underline{F} \cdot \underline{U} \, d\Omega = \underline{Q} \cdot \dot{\underline{U}} \quad (4.41)$$

où $\underline{U}$ désigne un champ de vitesse cinématiquement admissible avec les données en déplacement (vitesse) du problème :

$$\underline{U}_i(\underline{x}, t) = \dot{\underline{\xi}}_i^d(\underline{x}, t) \quad \forall \underline{x} \in S_{\xi_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.42)$$

tandis que $\underline{q}(\underline{U})$ représente le vecteur des **vitesse généralisées** associé par dualité à $\underline{Q}$ dans l'expression de cette puissance. Il s'agit par exemple de la vitesse de déplacement verticale du point d'application de la charge Q dans le cas de la structure réticulée, traité au début de ce chapitre. Généralisant les résultats obtenus à cette occasion, on établit les propriétés suivantes.

a) Partant d'un **état initial** caractérisé par $Q=0$, l'évolution du système demeure **élastique** tant que le **trajet de chargement** (représenté par une courbe dans l'espace des chargements Q (figure 10) demeure à l'intérieur d'un domaine, appelé **domaine d'élasticité initial du système**. Sa frontière est une surface formée de l'ensemble des chargements Q_e qui correspondent au **seuil d'élasticité** du système.

b) Poursuivant le chargement sur un trajet qui *franchit* la frontière du domaine d'élasticité initial, on observe une **irréversibilité du système** qui se traduit par le fait qu'au terme d'un cycle mécanique de *charge-décharge* (courbe fermée dans l'espace des Q), les déplacements du système, et en particulier le déplacement **résiduel** généralisé $\underline{q} = \oint \underline{q} dt$, ne sont pas nuls. On constate par ailleurs un **écrouissage** du système qui se manifeste par une transformation du domaine d'élasticité initial en **domaine d'élasticité actuel** (domaine en pointillé sur la figure d.10).

Comme cela a clairement été constaté sur l'exemple de la structure réticulée, l'origine de cet écrouissage doit être recherchée dans l'**incompatibilité géométrique des déformations plastiques**. Plus précisément, désignant par ε_p le champ des déformations plastiques engendrées au cours du cycle charge-décharge, on peut écrire la relation homologue de (4.26)₁:

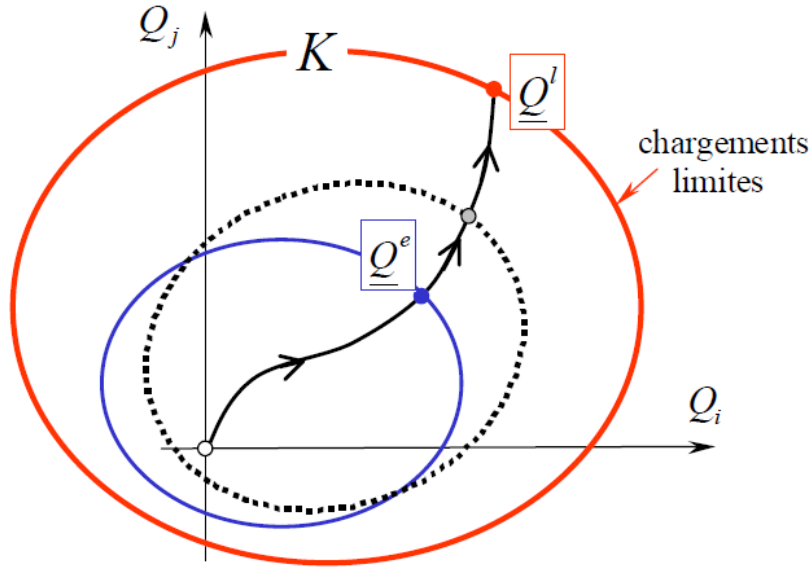


Figure d.10 : Evolution élastoplastique d'un système en matériau élastique parfaitement plastique dans le cas d'un mode de chargement à m paramètres

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^r = \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\sigma}}^r + \underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (4.43)$$

qui traduit le fait que le **champ de contrainte résiduel** $\underline{\underline{\sigma}}^r$ (champ équilibrant $Q=0$) rétablit, par le biais des déformations élastiques qui lui sont associées, la compatibilité géométrique des **déformations résiduelles** $\underline{\underline{\varepsilon}}^r$, cinématiquement admissibles avec $\underline{\underline{q}}^r$. L'existence de ce champ de contrainte résiduel modifie le domaine d'élasticité du système.

c) Cette phase de comportement élastoplastique s'achève lorsque le long du trajet de chargement, la charge Q atteint une valeur limite, au-delà de laquelle il n'est plus possible d'assurer simultanément l'équilibre du système et le respect du critère de plasticité en tout point.

C'est le **chargement limite** Q_l . L'ensemble de ces chargements constitue la frontière d'un domaine K (figure d.10) dont la détermination repose sur un raisonnement du **calcul à la rupture**, identique à celui effectué au paragraphe 1.3. Il est important de bien noter d'un tel domaine K ne dépend que de la **géométrie** du système, de son **chargement** et du **critère de plasticité**. Il est en revanche **indépendant** :

- de l'**état initial** du système ;
- des **modules d'élasticité** du matériau constitutif ;
- du **trajet de chargement** suivi jusqu'au chargement limite.

Lorsque le chargement limite est effectivement atteint, le système continue de se déformer sous charge constante: il y a apparition d'un **mécanisme d'écoulement plastique libre** ou de ruine plastique. De façon qualitative, cela signifie que les zones entrées en plasticité sont suffisamment étendues pour que le *champ des taux de déformations plastiques* $\underline{d}_p = \underline{\varepsilon}_p$ devienne *géométriquement compatible*, induisant alors la ruine plastique du système.

IV.5-Un exemple de résolution: la flexion élastoplastique d'une poutre cylindrique

On considère un élément de poutre assimilé à un solide ayant la forme d'un cylindre de longueur l et de section rectangulaire (hauteur $2h$ et épaisseur b), représenté sur la figure d. 11, constitué d'un matériau homogène *élastique isotrope* (module d'Young E , coefficient de Poisson ν), *parfaitement plastique standard*, le critère de plasticité étant celui de von Mises

$$f(\underline{\sigma}) = (1/2 \underline{s} : \underline{s})^{1/2} - k \leq 0 \quad (4.44)$$

où $\underline{s} = \underline{\sigma} - 1/3(\text{tr} \underline{\sigma}) \underline{1}$ désigne le *déviateur de contrainte*, et k la limite d'élasticité.

Ce solide est soumis à un processus de chargement caractérisé par le jeu de données suivant :

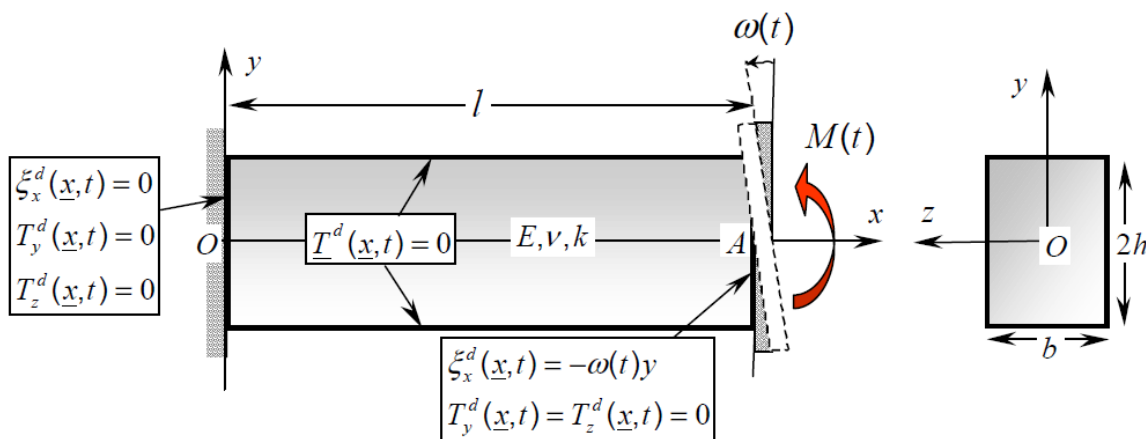


Figure d.11 : Flexion élastoplastique d'une poutre cylindrique [4]

En supposant bien entendu que les changements de géométrie demeurent négligeables (hypothèse dite des "petites perturbations").

Données du problème :

- forces de volume nulles :

$$\underline{F}^d(\underline{x}, t) = 0 \quad (4.45)$$

- faces latérales libres de contrainte :

$$\underline{T}^d(\underline{x}, t) = 0 \quad (4.46)$$

- section extrémité $\Sigma(x=0)$ en contact *sans frottement* avec un plan *indéformable* :

$$\xi_x^d(\underline{x}, t) = 0, \quad T_y^d(\underline{x}, t) = T_z^d(\underline{x}, t) = 0 \quad (4.47)$$

- section extrémité $\Sigma(x=l)$ en contact *sans frottement* avec un poinçon *indéformable* auquel on impose une rotation $\omega(t)$ autour de l'axe Az :

$$\xi_x^d(\underline{x}, t) = -\omega(t)y, \quad T_y^d(\underline{x}, t) = T_z^d(\underline{x}, t) = 0 \quad (4.48)$$

L'expression de la puissance des efforts extérieurs s'exerçant sur cet élément de poutre dans un champ de vitesse cinématiquement admissible avec les données en déplacements du problème, s'écrit alors d'après (4.41) :

$$P_{(e)}(\underline{U}) = \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \underline{U} \, da + \int_{\Omega} \rho \underline{F} \cdot \underline{U} \, d\Omega = - \int_{\Sigma(x=l)} \underline{T}_x \dot{\omega} y \, dy dz = \overbrace{\left(- \int_{\Sigma(l)} \underline{T}_x y \, dy dz \right)}^M \dot{\omega} \quad (4.49)$$

faisant ainsi apparaître le moment M autour de l'axe Az des efforts appliqués par le poinçon sur la section extrémité $\Sigma(x=l)$, dit **moment de flexion**, comme *l'unique paramètre de chargement* du système. La vitesse généralisée associée n'est autre que la **rotation** ω de ce même poinçon.

IV.5.1- Phase élastique

Partant d'un état initial ($\omega(t=0) = 0$) *naturel* $\underline{\sigma}_0 = 0$, on fait progressivement croître la rotation ω du poinçon. On rappelle ci-après la solution en *phase élastique* du problème précédent

- *Solution en contrainte* (figure d.12(a)) :

$$\underline{\sigma}(\underline{x}, t) = -E \frac{\omega}{l} y \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (4.50)$$

- *Solution en déplacement* :

$$\xi_x = -\frac{\omega}{l} xy, \quad \xi_y = \frac{\omega}{2l} (x^2 - \nu(z^2 - y^2)), \quad \xi_z = \nu \frac{\omega}{l} yz \quad (4.51)$$

La valeur correspondante du moment de flexion est :

$$M = - \int_{\Sigma(x=l)} y \sigma_{xx} \, dx dy = E \frac{\omega}{l} I_z \quad (4.52)$$

$I_z = 2/3 bh^3$ désigne l'*inertie géométrique* de la section autour de l'axe Az . Le rapport $\chi = \omega / l$ représentant la *courbure moyenne* de la poutre, la relation (4.52) s'interprète comme une *relation moment-courbure*. EI_z est la *rigidité à la flexion* de la poutre.

Cette phase élastique est valable tant que le champ de contrainte (4.50) vérifie en tout point le critère de plasticité de von Mises (4.44)

$$f(\underline{\sigma}) = (\sigma_{xx}^2 / 3)^{1/2} - k \leq 0 \quad \text{soit} \quad |\sigma_{xx}| = E \frac{\omega}{l} |y| \leq k\sqrt{3} \quad \forall y \in [-h, +h] \quad (4.53)$$

c'est-à-dire tant que $E\omega \leq \frac{K\sqrt{3}}{h}$ ou encore compte tenu de (4.49) :

$$M \leq M^e = k\sqrt{3} \frac{I_z}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}} bkh^2 \quad (4.54)$$

Cette valeur du moment de flexion représente la *limite d'élasticité initiale* du système. Elle correspond à l'entrée en plasticité des «fibres» extrêmes supérieures ($y=+h$) en *compression* et des fibres extrêmes inférieures ($y=-h$) en *traction* (figure d.12(b)).

IV.5.2-Phase élastoplastique

Poursuivant le chargement au-delà de la limite d'élasticité initiale du système, c'est-à-dire faisant croître le paramètre de chargement M au-delà de la valeur M_e , on fait l'hypothèse, vérifiable *a posteriori*, que le champ de contrainte demeure *uniaxial* de la forme :

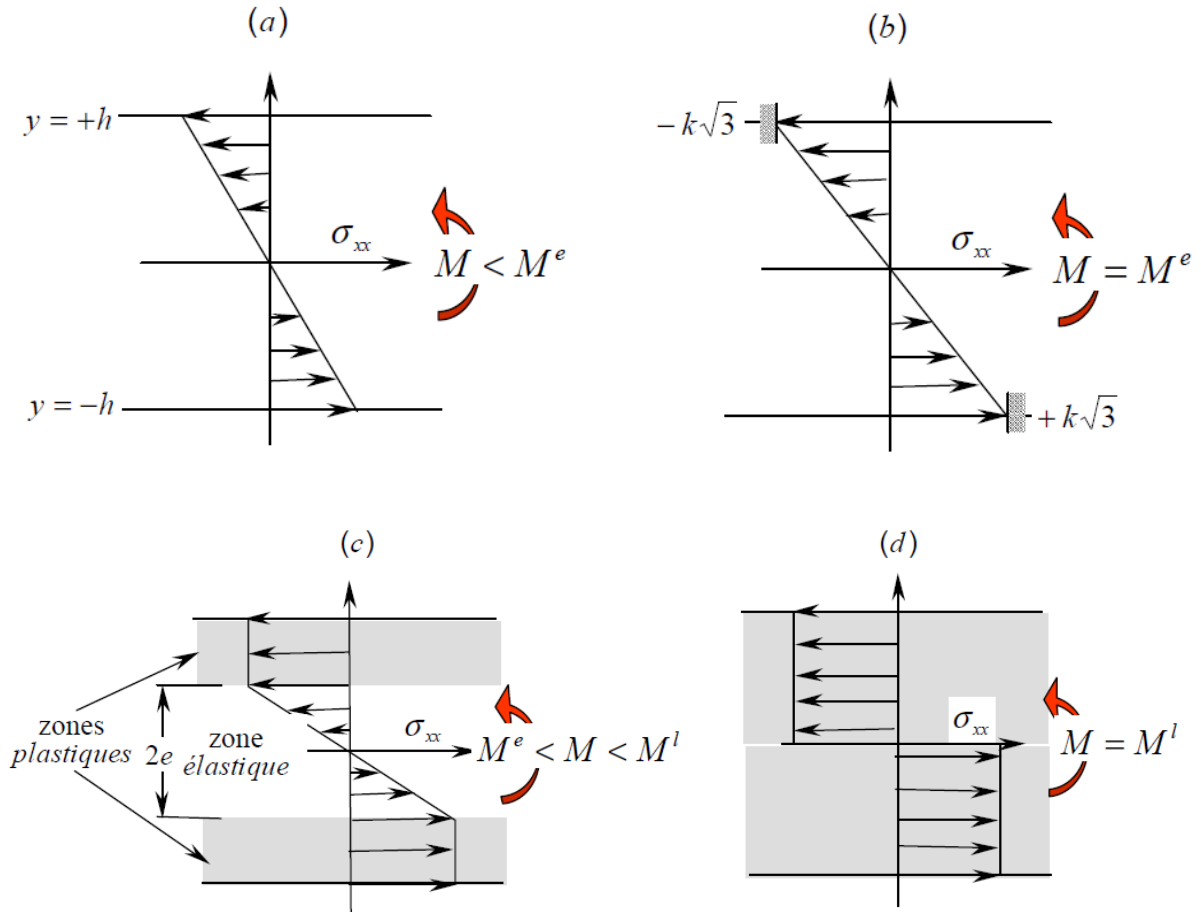


Figure d.12 : Diagrammes de contrainte dans les différentes phases d'évolution élastoplastique du problème de la flexion [4]

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (4.55)$$

Avec

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} -k\sqrt{3} & \text{si } +e \leq y \leq +h \\ -k\sqrt{3} \frac{y}{e} & \text{si } -e \leq y \leq +e \\ +k\sqrt{3} & \text{si } -h \leq y \leq -e \end{cases} \quad (4.56)$$

c'est-à-dire que l'épaisseur de la poutre est subdivisée en trois parties : un «**noyau élastique**» d'épaisseur $2e$ situé entre les plans $y = \pm e$, et deux **zones plastiques** où le matériau a atteint sa limite d'élasticité en *compression* ($+e \leq y \leq +h$) et en *traction* ($-h \leq y \leq -e$) (voir figure d.12(c)). Ce champ est bien statiquement admissible avec les données en efforts du problème, équilibrant la valeur suivante du paramètre de chargement

$$M(e) = - \int_{\Sigma(x=l)} y \sigma_{xx} dx dy = bk\sqrt{3} \left[h^2 - \frac{e^2}{3} \right] \quad (4.57)$$

La valeur du moment varie entre la limite d'élasticité correspondant à $e=h$ et une valeur maximale correspondant à la *plastification complète de la section* de la poutre ($e=0$: figure d.12(d))

$$M^e = \frac{2}{\sqrt{3}} bkh^2 = M(e=h) \leq M(e) \leq M(e=0) = \sqrt{3} bkh^2 = \frac{3}{2} M^e \quad (4.58)$$

IV.5.3-Solution en zone élastique ($-e \leq y \leq +e$)

Elle correspond simplement à la solution *élastique* du problème de flexion d'une poutre d'épaisseur $2e$, données par les expressions (4.50) et (4.51) valables pour $-e \leq y \leq +e$. Comparant en particulier les deux expressions du champ de contrainte dans cette zone données respectivement par (4.50) et (5.56), il vient alors immédiatement

$$e = \frac{kl\sqrt{3}}{\omega E} \quad (4.59)$$

L'expression de la loi *moment-courbure* en phase élastoplastique se calcule alors très simplement à partir de (4.57) et (4.59)

$$M(\chi = \omega/l) = bkh^2 \sqrt{3} \left[1 - \left(\frac{k}{Eh\chi} \right)^2 \right] \quad (4.60)$$

c'est-à-dire encore

$$M(\chi = \omega/l) = \frac{3M^e}{2} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\chi^e}{\chi} \right)^2 \right] \quad (4.61)$$

où $\chi_e = k \sqrt{3} / hE$ et $M_e = 2bkh^2 / \sqrt{3}$ désignent les valeurs de la courbure et du moment de flexion correspondant à la limite d'élasticité initiale. La figure d.14 représente un tel **diagramme**

moment-courbure, tracé dans le plan des variables adimensionnelles $(M/M_e, \chi/\chi_e)$, associé aux expressions (4.52) en phase élastique et (4.63) en phase élastoplastique. On remarque que le moment de flexion tend vers une valeur asymptotique égale à :

$$M^l = 3M^e / 2 \quad (4.62)$$

correspondant à la *plastification totale* de la section de la poutre ($e \rightarrow 0$: figure d.12). Cette valeur n'est autre que la **charge limite**. Il convient d'observer que cette charge limite n'est atteinte qu'*asymptotiquement*, c'est-à-dire en théorie pour une valeur infinie de la courbure, pour laquelle on sortirait alors du cadre des petites perturbations. En pratique, la relation (4.61) montre par exemple que la valeur du moment est égale à près de 99% de la charge limite lorsque

$$\chi = 5\chi_e.$$

IV.5.4-Solution dans les zones plastiques ($-h \leq y \leq -e$ et $+e \leq y \leq +h$)

Il nous reste à mettre en évidence la solution dans les zones plastiques situées de part et d'autre du noyau élastique, et plus particulièrement la *solution en vitesse*, le champ de contrainte étant constant, donné par les première et troisième lignes de (4.56). Nous allons démontrer, qu'à certaines conditions que nous expliciterons, le champ de vitesse défini par

$$\dot{\xi}_x = -\frac{\dot{\omega}}{l}xy, \quad \dot{\xi}_y = \frac{\dot{\omega}}{2l}\left(x^2 - \frac{1}{2}(z^2 - y^2)\right), \quad \dot{\xi}_z = \frac{\dot{\omega}}{2l}yz \quad (4.63)$$

constitue bien la solution en vitesse du problème. Ce champ est tout d'abord *cinématiquement admissible* avec les conditions aux limites en vitesse du problème caractérisées par la vitesse de rotation ω du poinçon. Par ailleurs le champ de taux de déformation s'écrit :

$$\underline{\underline{d}} = -\frac{\dot{\omega}}{l}y\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{\dot{\omega}}{2l}y(\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \quad (4.64)$$

de sorte que la loi de comportement élastoplastique (4.34), tenant compte de (4.44) et (4.56), est bien vérifiée. En effet, puisque dans ces zones $\underline{\underline{\sigma}} = 0$, $\underline{\underline{d}}p = \underline{\underline{d}}$ défini par (4.64) est bien de la forme

$$\underline{\underline{d}}^p = \dot{\lambda} \underline{\underline{s}} = \dot{\lambda} \begin{cases} -k/\sqrt{3}(2\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) & \text{si } +e \leq y \leq +h \\ +k/\sqrt{3}(2\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) & \text{si } -h \leq y \leq -e \end{cases} \quad (4.65)$$

d'où par identification avec (4.64)

$$\dot{\lambda} = \begin{cases} +\frac{\sqrt{3}\dot{\omega}y}{2kl} & \text{si } +e \leq y \leq +h \\ -\frac{\sqrt{3}\dot{\omega}y}{2kl} & \text{si } -h \leq y \leq -e \end{cases} \geq 0 \quad (4.66)$$

démontrant ainsi la **positivité** du multiplicateur plastique puisque $\omega \geq 0$.

La dernière vérification porte sur la *continuité* (ou *discontinuité plastique* éventuelle) entre zone élastique et plastiques à la traversée des plans d'équation $y = \pm e$, séparant le noyau élastique des zones plastiques. Considérant par exemple le plan $y = e$, la *discontinuité de vitesse* à travers ce plan vaut

$$[\underline{\underline{\xi}}](x=e) = \underline{\underline{\xi}}(x=e^+) - \underline{\underline{\xi}}(x=e^-) = (v-1/2)\frac{\dot{\omega}}{2l}[(z^2 - e^2)\underline{e}_y - 2ez\underline{e}_z] \quad (4.67)$$

Une telle discontinuité ne pourrait être admissible qu'en étant de nature purement plastique ; et donc en raison de la *règle d'écoulement plastique, tangentielle* au plan de discontinuité, ce qui n'est pas le cas, hormis dans la situation particulière du matériau *élastiquement incompressible* ($\nu = 1/2$), où cette discontinuité s'annule. On trouvera dans Ducomet (1980) une mise en évidence de la solution complète de ce problème dans le cas du matériau élastiquement compressible, dans laquelle il apparaît notamment que le champ de contrainte solution ne peut rester uniaxial.[4]

IV.5.5- Analyse de la décharge ; état résiduel

On supposera ici pour simplifier que la décharge est effectuée à partir d'une valeur de la courbure χ^* pour laquelle la valeur correspondante du moment de flexion est pratiquement égale à la charge limite (figure d.12), c'est-à-dire que la poutre est plastifiée sur toute la hauteur (figure d.12). Le champ de contrainte correspondant est

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \begin{cases} -k\sqrt{3}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x & \text{si } 0 < y \leq +h \\ +k\sqrt{3}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x & \text{si } -h \leq y < 0 \end{cases} \quad (4.68)$$

Faisant l'hypothèse, vérifiable *a posteriori*, que cette phase de décharge est entièrement *élastique*, les calculs effectués en 4.1. demeurent valables à la condition de remplacer la valeur de M par

celle de sa variation $\Delta M \leq 0$ à partir de $M = M^l$. La variation correspondante du champ de contrainte vaut ainsi

$$\Delta \underline{\underline{\sigma}} = -\frac{\Delta M}{I_z} y \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (4.69)$$

d'où en particulier le **champ de contrainte résiduel** obtenu pour une **décharge totale** ($\Delta M = -M^l$) :

$$\underline{\underline{\sigma}}^r = \underline{\underline{\sigma}}^* + \frac{M^l}{I_z} y \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (4.70)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^r = \begin{cases} k\sqrt{3}\left(\frac{3y}{2h}-1\right)\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x & \text{si } 0 < y \leq +h \\ k\sqrt{3}\left(\frac{3y}{2h}+1\right)\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x & \text{si } -h \leq y < 0 \end{cases} \quad (4.71)$$

Le diagramme de contrainte correspondant est représenté sur la figure d.13. Il s'agit d'un *champ d'autocontrainte*, c'est-à-dire équilibrant un moment de flexion nul. La courbure résiduelle est donnée par

$$\chi^r = \chi^* - \frac{M^l}{EI_z} = \chi^* - \frac{3\sqrt{3}k}{2Eh} \quad (4.72)$$

L'apparition de ces contraintes résiduelles est liée à l'*incompatibilité géométrique* du champ

des déformations plastiques acquises lors de la phase de chargement jusqu'à $M(\chi^*) = M_l$.

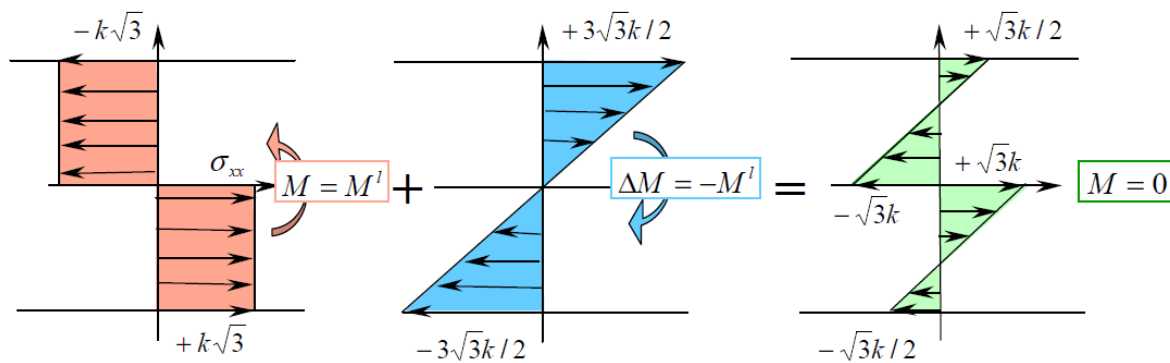


Figure d.13 : Décharge élastique totale de la poutre et diagramme des contraintes résiduelles [4]

IV.6-Exemple de calcul d'un portique

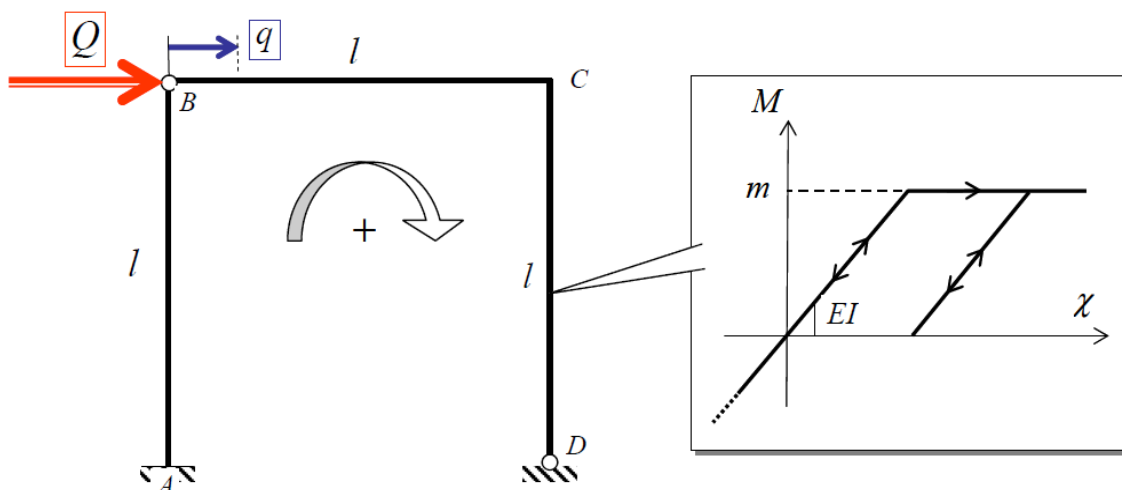


Figure d.14 [7]

On considère le portique représenté sur la figure d.14, constitué d'une travée horizontale de longueur l en appui sur deux poteaux verticaux de même longueur l . Les liaisons aux points B et D sont des *articulations sans frottement* (moment nul). La loi de comportement des différentes barres est représentée sur la partie droite de la figure d.14, sous la forme d'un diagramme «moment-courbure» de type élastique (rigidité à la flexion EI) *parfaitement plastique standard*, de moment limite m en flexion positive ou négative. Une charge horizontale d'intensité Q est appliquée au point B .

IV.6.1- Analyse statique

Le problème étudié est *hyperstatique d'ordre 1* comme indiqué sur la figure d.14. On peut ainsi prendre la valeur Y de la réaction d'appui verticale en D comme *inconnue hyperstatique*, la composante horizontale étant égale à $-Y$: il suffit pour montrer cela d'écrire

l'équilibre en moment par rapport au point B de la portion BCD du portique, qui exige que la réaction d'appui passe par ce point. Les diagrammes de moments *statiquement admissibles* sont représentés sur la partie droite de cette figure. On obtient dans un repère orthonormé ayant l'appui A pour origine :

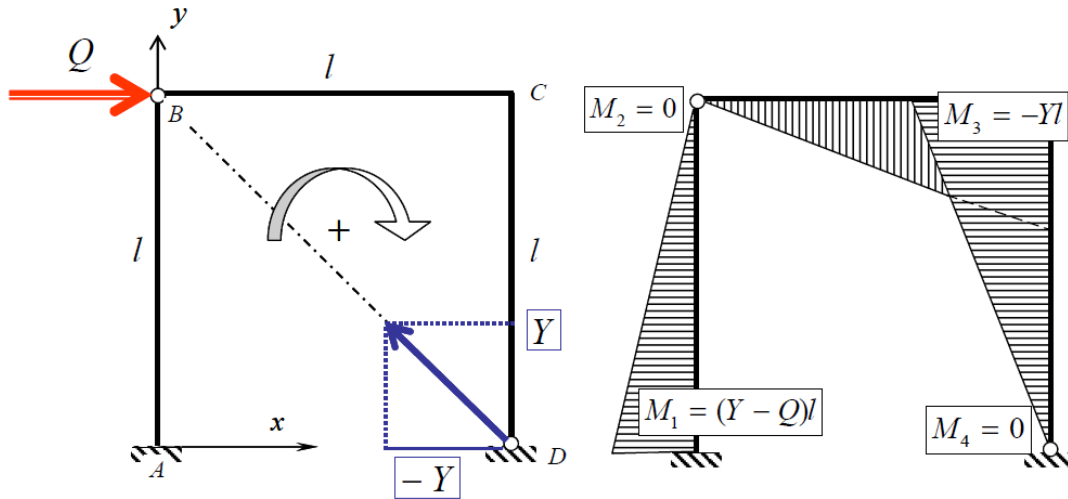


Figure d.15

- Poteau AB :

$$M(y) = (Y - Q)(l - y) \text{ avec } M_1 = (Y - Q)l \quad (4.73)$$

- Travée BC :

$$M(x) = -Yx \quad M_2 = 0 \text{ et } M_3 = -Yl \quad (4.74)$$

- Poteau CD :

$$M(y) = -yY \text{ avec } M_4 = 0 \quad (4.75)$$

IV.6.2- Calcul élastique

L'état initial étant supposé *naturel* (diagramme des moments nuls pour $Q=0$), l'énergie complémentaire de la structure s'écrit :

$$W^*[M(s)] = \int_A^D \frac{M^2(s)}{2EI} ds \quad (4.76)$$

$$W^*(Y, Q) = \frac{1}{2EI} \left\{ \int_0^l (Y - Q)^2 (l - y)^2 dy + 2 \int_0^l (-Yx)^2 dx \right\} = \frac{l^3}{6EI} [(Y - Q)^2 + 2Y^2] \quad (4.77)$$

Le théorème du potentiel minimum nous permet alors de calculer l'inconnue hyperstatique :

$$\frac{\partial W^*}{\partial Y} = \frac{l^3}{3EI} (3Y - Q) = 0 \quad \text{d'où} \quad Y = \frac{Q}{3} \quad (4.78)$$

tandis que le *théorème de Castigliano* nous permet de calculer le *déplacement horizontal* q du point d'application du chargement :

$$\boxed{q} = \frac{d}{dQ} W^* \left[Y = \frac{Q}{3}; Q \right] = \boxed{\frac{2Ql^3}{9EI}} \quad (4.79)$$

Le point le plus sollicité étant l'encastrement A, où $M_1 = -2Ql/3$, la limite d'élasticité vaut:

$$M_1 = -2Q^e l/3 = -m \quad \text{soit} \quad \boxed{Q^e = \frac{3m}{2l}} \quad (4.80)$$

tandis que la valeur correspondante du déplacement est :

$$\boxed{q^e} = \frac{2Q^e l^3}{9EI} = \boxed{\frac{ml^2}{3EI}} \quad (4.81)$$

Le diagramme des moments correspondant est représenté sur la figure d.16(a).

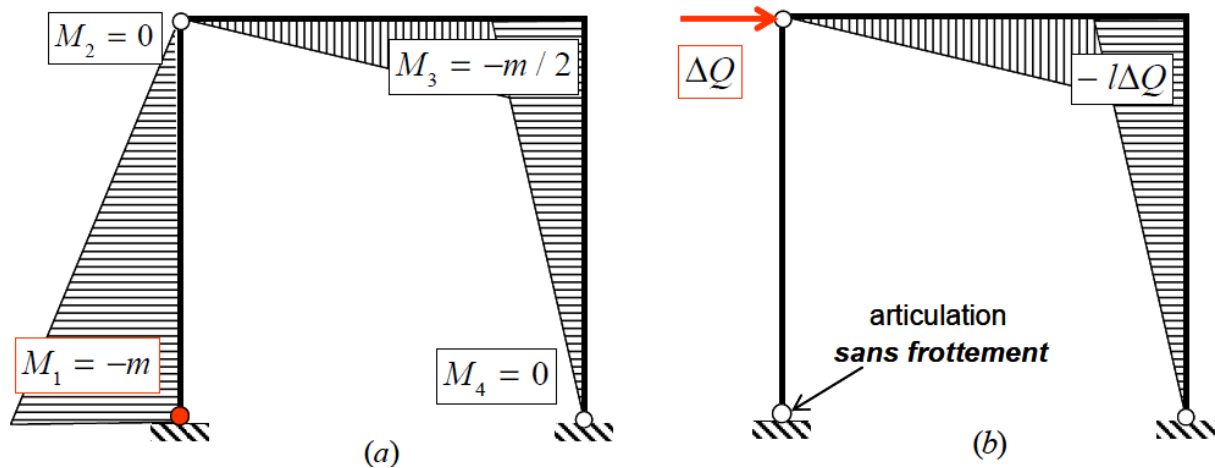


Figure d.16

IV.6.3- Evolution élastoplastique

Poursuivant le chargement au-delà de la limite d'élasticité ($Q = Q_e + \Delta Q$, $\Delta Q \geq 0$), on fait l'hypothèse de *formation d'une rotule plastique* en A, de sorte que :

$$M_1 = -m, \quad \Delta M_1 = 0 \quad (4.82)$$

La solution du problème d'évolution dans cette phase élastoplastique se fait classiquement en superposant à la solution correspondant à la limite d'élasticité (figure d.16 (a)) celle du *problème isostatique associé* (figure d.16 (b)) : celui-ci correspond à un portique pour lequel l'encastrement de l'appui A est remplacé par une articulation sans frottement, tandis que le chargement appliqué est égal à l'incrément de charge ΔQ au-delà de la limite d'élasticité. Le

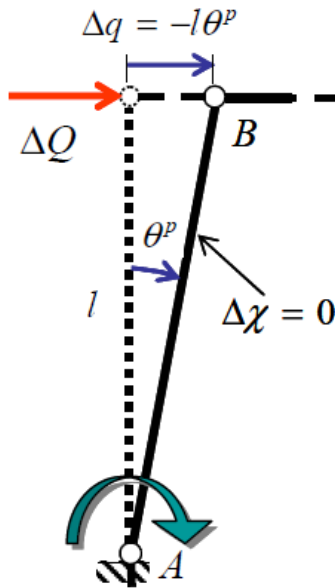
théorème de Castigliano appliquée à ce problème isostatique permet de calculer l'incrément de déplacement Δq pendant cette phase élastoplastique :

$$W^*(\Delta Q) = 2 \frac{1}{2EI} \int_0^l (\Delta Q x)^2 dx = \frac{\Delta Q^2 l^3}{3EI} \quad (4.83)$$

d'où :

$$\Delta q = \frac{dW^*}{d(\Delta Q)} = \frac{2\Delta Q l^3}{3EI} \quad (4.84)$$

Il reste à vérifier la règle d'écoulement plastique au point A, où s'est formée la *rotule plastique*. Or la *discontinuité de rotation plastique*, notée θ_p , n'est autre que la discontinuité de rotation à l'endroit de l'articulation sans frottement en A pour le problème isostatique associé. Dans ce problème, le diagramme des moments dans le poteau AB étant nul, il n'y a aucune variation de courbure, de sorte que ce poteau est animé d'un mouvement de corps rigide autour de l'articulation sans frottement A, comme indiqué sur le schéma ci-dessous. Compte tenu de la relation (4.84), il vient alors :



$$\Delta q = \frac{2\Delta Q l^3}{3EI} = -l\theta^p \quad (4.85)$$

$$\text{d'où :} \quad \theta^p = -\frac{2\Delta Q l^2}{3EI} \quad (4.86)$$

$$\text{soit:} \quad \dot{\theta}^p = -\frac{2\dot{Q} l^2}{3EI} \leq 0 \quad (4.87)$$

Le signe négatif de la vitesse de discontinuité de rotation plastique est bien en cohérence avec le fait que $M_1 = -m$.

IV.6.4 -Charge limite et mécanisme de ruine plastique

La solution précédente est valable tant que le moment M_3 au point C reste supérieur au moment limite de plastification négative, soit :

$$M_3 = -\frac{m}{2} - l\Delta Q \geq -m \Rightarrow \Delta Q \leq \frac{m}{2l} \quad (4.88)$$

d'où la *charge limite* de la structure :

$$Q \leq Q^l = Q^e + \frac{m}{2l} = \frac{2m}{l} \quad (4.89)$$

le déplacement correspondant étant égal à :

$$q^l = q^e + \Delta q = \frac{2ml^2}{3EI} \quad (4.90)$$

et le diagramme des moments fléchissants associé est représenté sur la figure d.17 (a).

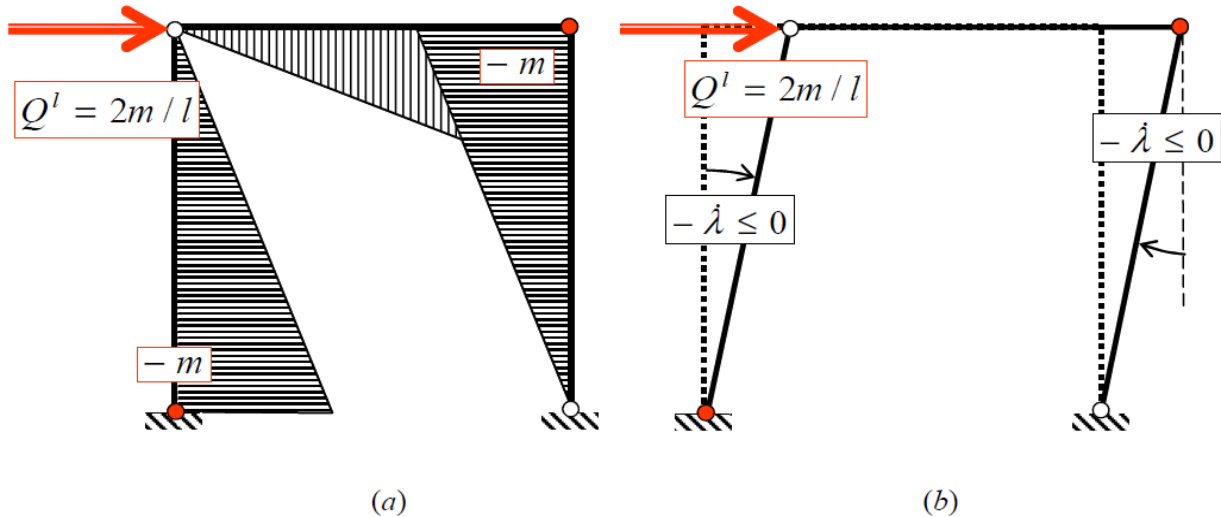


Figure d.17

L'apparition d'une seconde rotule plastique au point C correspond à la formation d'un *mécanisme d'écoulement plastique libre* sous charge maintenue constante (figure d.17 (b)), le signe négatif des rotules plastiques étant compatible avec la règle d'écoulement. Le mécanisme correspondant est appelé «*mécanisme de panneau*»

IV.6.5 -Décharge et état résiduel de la structure

Ayant tout juste atteint la charge limite de la structure et sans que le mécanisme de ruine ne se développe, on procède à une *décharge* de la structure : $Q = Q^l + \Delta Q$, $\Delta Q \leq 0$. Supposant qu'une telle décharge demeure *élastique* jusqu'à la décharge *totale* ($\Delta Q = -2m/l$), les *moments résiduels* aux points A et C sont :

$$M_1^r = -m - \frac{2(-2m/l)}{3} = \frac{m}{3}, \quad M_3^r = -m - \frac{(-2m/l)}{3} = -\frac{m}{3} \quad (4.91)$$

le diagramme des moments résiduels *autoéquilibré*, c'est-à-dire en équilibre avec un chargement nul, est représenté sur la figure d.18 .

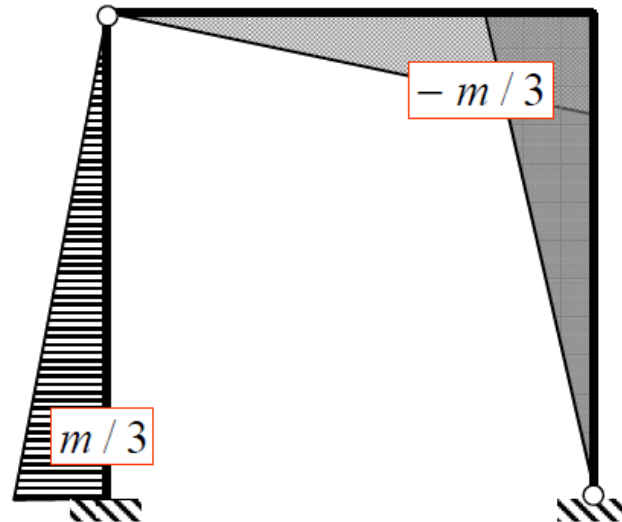


Figure d.18

Le déplacement résiduel du point d'application de la charge se calcule comme suit :

$$q^r = q^l + \frac{2l^3(-2m/l)}{9EI} = \frac{2ml^2}{9EI} \quad (4.92)$$

Le diagramme charge-déplacement correspondant au cycle complet de charge-décharge, ainsi que l'évolution correspondante des moments fléchissants aux points A et C, sont représentés sur la figure d.19.

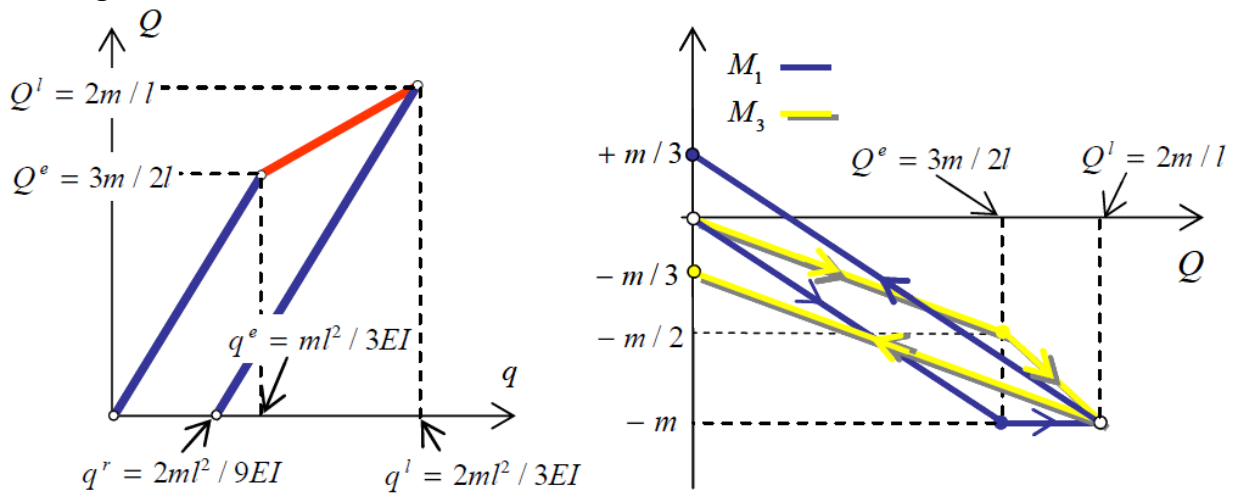


Figure d.19

IV.6.6- Interprétation de l'état résiduel

La discontinuité de rotation plastique au point A accumulée pendant la phase élastoplastique jusqu'au moment où la charge limite est atteinte, vaut :

$$\theta^{p, \max} = -\frac{2l^2}{3EI} (Q^l - Q^e) = -\frac{ml}{3EI} \quad (4.93)$$

Le champ de déformation plastique correspondant, localisé en ce seul point, est manifestement *géométriquement incompatible* comme l'illustre la figure d.20, où son intégration à partir de l'appui A le long de la structure aboutit par exemple à une position de l'extrémité inférieure droite du portique décalée d'une distance égale $l\theta_{p,\max}$ par rapport à l'appui fixe D.

Afin de rétablir cette compatibilité géométrique, c'est-à-dire de déplacer l'extrémité inférieure droite du portique afin de l'amener au point C, il convient d'exercer un effort d'intensité *horizontale* X , incliné à 45° comme indiqué sur la figure d.20, de manière à respecter l'équilibre. La valeur de cet effort résulte d'un calcul élastique sur la structure isostatique obtenue en libérant la liaison en C. Il suffit pour cela de calculer l'énergie élastique de contrainte correspondant à l'application de cet effort, soit avec le diagramme de moments fléchissants engendré par cet effort (figure d.20) :

$$W^*(X) = 3 \frac{1}{2EI} \int_0^l X^2 x^2 dx = \frac{X^2 l^3}{2EI} \quad (4.94)$$

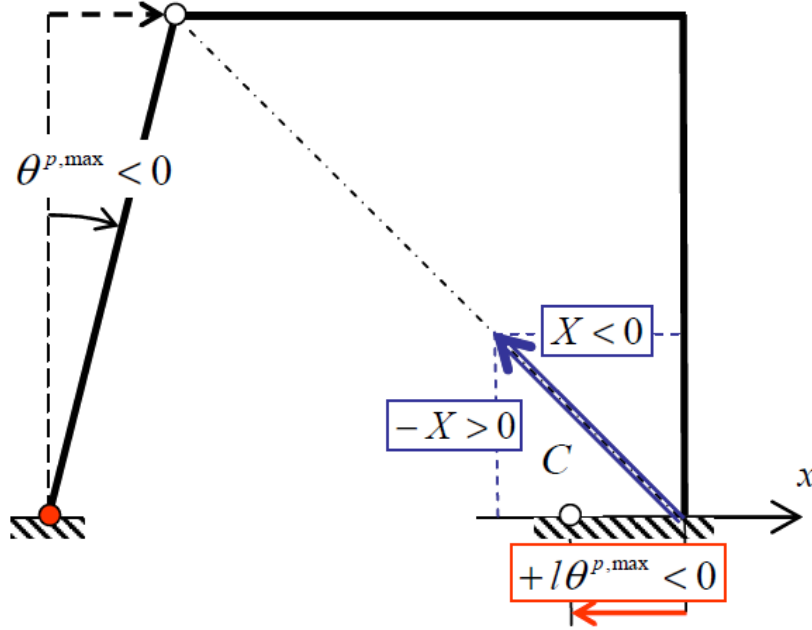


Figure d.20

et donc par application du théorème de Castigliano :

$$\frac{dW^*}{dX} = \frac{Xl^3}{EI} = +l\theta^{p,\max} = -\frac{ml^2}{3EI} \Rightarrow X = -\frac{m}{3l} \quad (4.95)$$

Il en résulte que les moments fléchissants aux points A et C valent :

$$M_1 = \frac{m}{3}, \quad M_3 = -\frac{m}{3} \quad (4.96)$$

ce qui correspond bien aux valeurs des moments résiduels. Ce sont donc bien ces efforts résiduels qui par le biais des déformations élastiques qu'elles engendrent permettent de rétablir la compatibilité géométrique de la structure.[7]

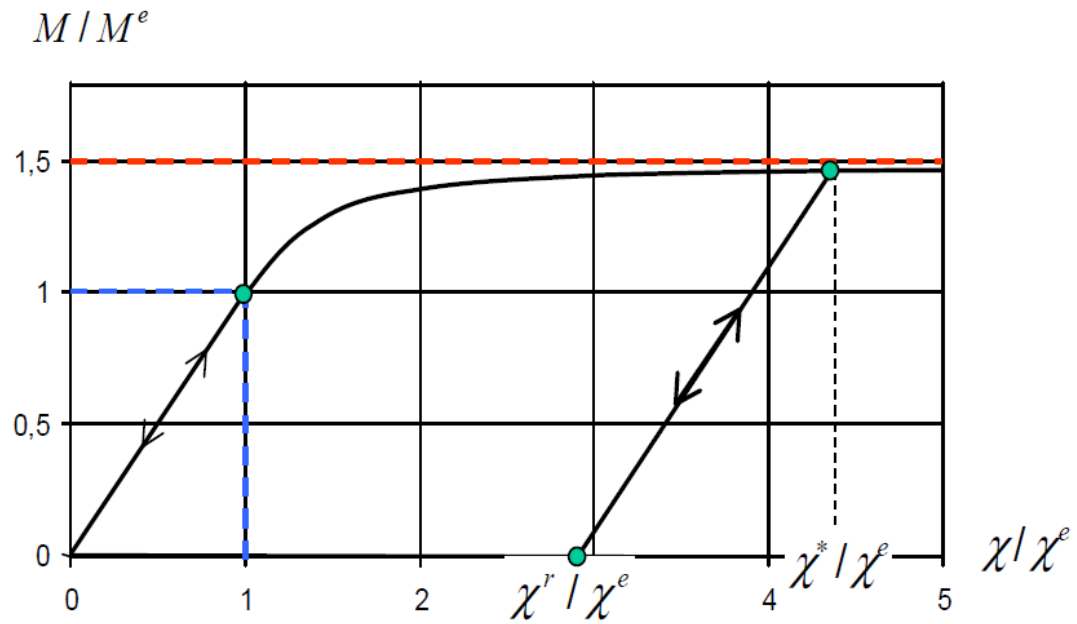


Figure d.21 : Diagramme «moment-courbure» d'un poutre en flexion elastoplastique [7]

V.1-Introduction

Le calcul élastique consiste à vérifier la résistance des sections et des éléments en considérant que toutes les fibres restent dans le domaine élastique

Le calcul plastique permet d'exploiter la ductilité de l'acier par des «incursions» plus ou moins grandes dans le domaine plastique sans dépasser l'ELU de la structure.

Pour mener un calcul plastique, il est nécessaire que le matériau ait des caractéristiques suffisantes de ductilité. Ceci permet de garantir une capacité à subir des déformations permanentes tout en maintenant un certain niveau de résistance.

Le calcul plastique des structures associé aux états limites ultimes exploite les réserves de résistance de l'acier à différents niveaux :

- Le matériau est suffisamment ductile
- La section classe ou facteur de forme
- L'élément de structure dont le degré d'hyperstaticité est strictement positif, capacité de rotation et maintien où bien instabilité.

Le *degré d'hyperstaticité* de la structure, noté k , est le nombre de variables indépendantes de type effort (appelées *inconnues hyperstatiques*), dont dépendent les distributions d'efforts intérieurs autoéquilibrées¹. La structure est dite «hyperstatique» si k est strictement positif, «isostatique» si $k=0$. [8]

V.2-Formation de rotules plastiques :

Lorsque l'on augmente les charges appliquées sur une poutre, le moment de flexion, dans la section critique, continue à croître jusqu'à ce que le moment parfaitement plastique dans la section soit atteint. Puisque le moment résistant ne peut pas être augmenté au-delà du moment parfaitement plastique (c'est-à-dire au-delà du moment où la résistance à la déformation commence) Les deux parties de chaque côté de la section peuvent tourner l'une par rapport à l'autre tandis que le moment dans la section reste invariable. Ainsi une section dans une poutre, celle où s'exerce le moment parfaitement plastique, agit comme une rotule et on l'appelle ordinairement *rotule plastique*. Baker compare une rotule plastique à une rotule ordinaire qui possède une quantité constante de frottement. La rotule plastique est appelée par certains auteurs pivot plastique. [5]

La valeur de la rotule plastique est facile à calculer pour une section quelconque d'une poutre donnée. La répartition des contraintes, lorsque la rotule plastique entre en jeu et la valeur de k qui est le rapport de M_p/M_e sont indiquées sur la figure e.1 pour plusieurs sections transversales de poutres dans le cas de flexion pure.

Une rotule plastique peut aussi prendre naissance en présence de forces de flexion et des forces axiales, en présence de flexion et de cisaillement, ou en présence de flexion, de forces axiales et de cisaillement. Dans la plupart des applications les deux effets de la charge axiale et de l'effort tranchant sont négligés dans l'analyse parfaitement plastique des poutres et des portiques. Une charge axiale P peut être négligée en toute sécurité si elle est inférieure à $0.10 \sigma_e A$. [5]

Plusieurs chercheurs ont étudié l'influence de l'effort tranchant et l'influence simultanée de l'effort tranchant de la charge axiale sur le moment à l'endroit de la rotule plastique ; ces chercheurs ont trouvé que l'influence de l'effort tranchant V peut être négligée en toute sécurité si ce dernier est inférieur à $0.20 V_e$, où $V_e = \tau_e A = \sigma_e A/2$.

De plus dans notre thème nous allons considérer les sollicitations en flexion pure.

La formation d'une rotule plastique en un endroit donné d'une structure ne signifie pas que la structure continuera à se déformer sous la charge qui a donné naissance à la rotule plastique. Les déformations continueront sans limites à la seule condition que la formation de la rotule plastique donnée transforme la structure en mécanisme. *Un mécanisme est constitué toute les fois que les rotules plastiques peuvent être remplacées par des pivots réels et que la structure où chaque partie de la structure est libre de se mouvoir.* La validité de cette définition sera mieux expliquée par des exemples.[5]

section						
$\alpha = M_p/M_e$	1,0	1,1-1,15	1,27	1,5	1,7	2

Figure e.1: facteur de forme pour quelques sections usuelles. [5]

V.3 -Charges de ruine et mécanismes de ruine pour des éléments de structures

V.3.1- Exemple d'une poutre en charpente métallique

Soit une poutre en charpente métallique, chargée au milieu de sa portée par une force concentrée, P , figure.e.2.

Dans un premier temps, la répartition des contraintes au niveau de la section médiane (section critique) est linéaire. C'est la phase élastique du comportement du matériau, si on augmente la charge, les contraintes ne sont plus proportionnelles aux déformations et les fibres extrêmes se plastifient graduellement de bas en haut et de haut en bas figure.e.2(c), la section se plastifie entièrement quand le moment fléchissant de cette dernière atteint le moment plastique M_p , et une rotule plastique se forme au niveau de cette section critique. A cet effet, la poutre est constituée de deux éléments rigides reliés par une articulation figure.e.2(d). On dit qu'il y a plastification totale de la section et la poutre se transforme en un mécanisme figure e.2(b).

Il est facile de trouver la charge de ruine, P_c , de la poutre et ce en égalant le moment maximum dû à la charge appliquée au moment plastique M_p .

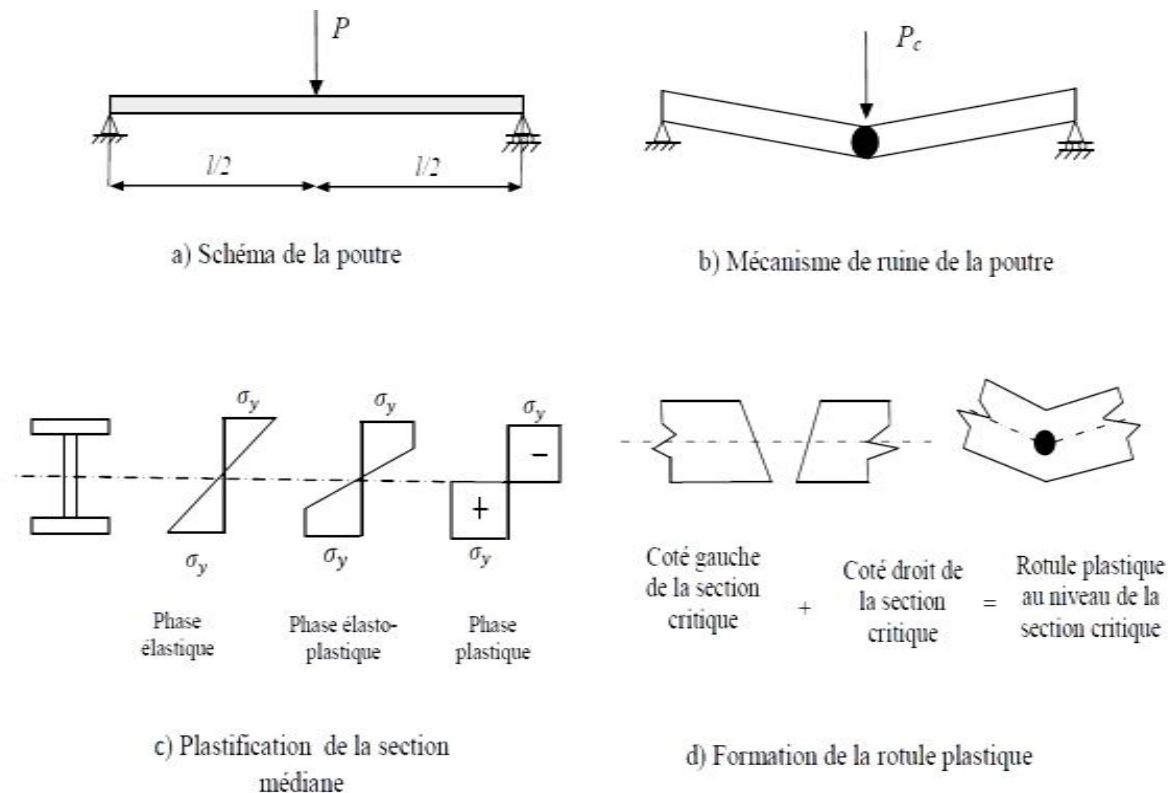
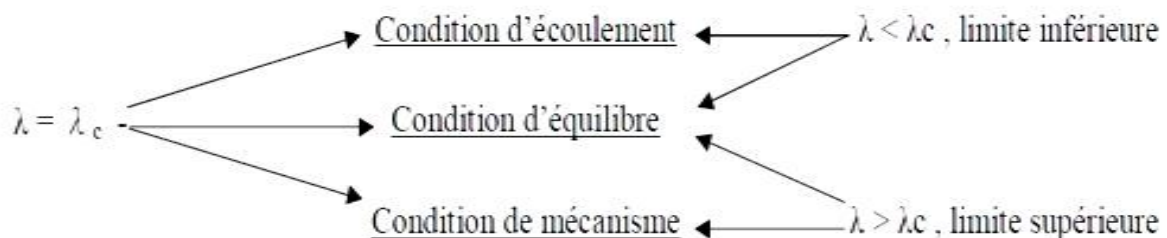


Figure e.2 : Comportement d'une poutre en charpente métallique sous charge croissante.

Déterminons d'abord le nombre de liaisons surabondantes. Ce nombre est donné par le nombre de réactions qui doivent être supprimées pour rendre la structure statiquement déterminée. Un total de $r+1$ rotules convertira la structure en un mécanisme. Ce total représente un nombre suffisant de rotules plastiques, mais n'est toujours pas le nombre nécessaire de rotules plastiques.

Un autre point important doit être noté. Si des rotules plastiques transforment une structure en un mécanisme, les moments aux rotules auront un signe alterné comme cela se passe ordinairement tout autour d'une structure. La convention de signes à utiliser est indiquée ou à supposer.[8]

V.4-Théorèmes fondamentaux de l'analyse plastique des structures



V.4.1- Théorème de la limite inférieure

Une charge, calculée sur la base du diagramme d'équilibre supposé des moments dans lequel les moments ne sont nulle part plus grands que M_P , est inférieure ou au plus égale à la charge parfaitement plastique vraie. C'est-à-dire si, dans une structure sujette à un chargement défini par un facteur de charge positif, λ , une distribution des moments fléchissants satisfaisant les conditions d'équilibre et d'écoulement peut être trouvée, ensuite λ est moins que, ou égal au facteur de charge de ruine λ_c . Dans ce cas la valeur de λ est une limite inférieure pour λ_c . [9]

V.4.2- Théorème de la limite supérieure

Une charge calculée sur la base d'un mécanisme supposé sera toujours plus grande ou au mieux égale à la charge parfaitement plastique vraie. Dans ce cas la distribution des moments fléchissants dans les structures ne vérifie que les conditions d'équilibre et de mécanisme, le facteur de charge correspondant, λ , est supérieur ou égal au facteur de charge de ruine, λ_c , la valeur de ce facteur est une limite supérieure pour λ_c . [9]

V.4.3- Théorème de la l'unicité

Si une structure est sujette à un chargement défini par un facteur de charge positif, λ , et une distribution des moments fléchissants qui satisfait les trois conditions peut être trouvée, alors $\lambda = \lambda_c$. Il est impossible d'obtenir toute autre distribution des moments fléchissants pour n'importe quelle autre valeur de λ qui satisfait les trois conditions simultanément. [9]

Un mécanisme supposé dans une charge parfaitement plastique proche de la charge parfaitement plastique vraie, il est possible qu'il ne soit pas nécessaire de considérer d'autres mécanismes, Greenberg et Prager (1951) ont exposé une méthode basée sur la limite supérieure et sur la limite inférieure. Cette méthode rend possible le calcul d'une limite plus basse pour une limite supérieure quelconque donnée. Dans le cas de deux limites très rapprochée l'une de l'autre, il n'est pas nécessaire de poursuivre les calculs. [5]

V.5- Méthodes utilisées pour le calcul des charges de ruine pour des éléments structuraux ou structures simples**V.5.1- Calcul de la charge de ruine en utilisant le théorème des moments libre et de réactions**

Il est possible de déterminer le mécanisme de ruine des éléments structuraux où structures simples et de tracer leurs diagramme des moments fléchissants à la ruine en utilisant et en exploitant le théorème du moment libre et de réaction et ce sans passer par aucune analyse. Une fois le diagramme des moments est déterminé, on peut vérifier la satisfaction des trois conditions du vrai mécanisme de ruine et calculer facilement la charge de ruine. Cette méthode est basé sur le principe de :

$$M_{p1} + M_{p2} = M_{p3} \quad (5.1)$$

Moment fléchissant réel au point d'application de la charge
 Moment fléchissant de réaction au point d'application de la charge
 Moment fléchissant libre au point d'application de la charge (moment de la poutre simplement appuyée)

La charge de ruine peut être déterminée facilement à partir de cette relation, étant donné que le moment fléchissant libre au point d'application de la charge, M_{p3} , est en fonction de cette dernière, l'équation (5.1) peut être réduite à une équation à une inconnue.

Ce théorème permet de déterminer les moments fléchissants inconnus c'est-à-dire les moments qui ne sont pas égaux aux moments plastiques. Donc il est impératif de décider d'un mécanisme de ruine donc des positions éventuelles des rotules plastiques et d'essayer grâce à ce théorème et à la condition d'équilibre au niveau des noeuds ou joints de déterminer les éventuels moments inconnus.

V.5.2-Calcul de la charge de ruine en utilisant le principe des travaux virtuels

La charge de ruine peut être déterminée par une deuxième méthode, cette dernière basée sur le principe des déplacements virtuels,

Le travail produit par l'effort extérieur, P , doit être égal au travail produit par l'effort intérieur, c'est-à-dire au travail accompli au niveau des rotules plastiques.

La charge de ruine produit un déplacement virtuel δ et un travail extérieur défini par le produit $P \cdot \delta$, le moment plastique M_p produit une rotation virtuelle θ , Le travail virtuel intérieur est $M_p \cdot \theta$ au niveau d'une rotule, la charge de ruine des éléments structuraux ou structures simples peut s'obtenir à partir de l'égalité suivante :

$$\sum P_i \cdot \delta_i = \sum M_{pi} \cdot \theta_i \quad (5.2)$$

V.6- Exemples d'application

V.6.1-Poutre simplement appuyée

a)- Théorème des moments libre et de réactions

La charge de ruine d'une poutre simplement appuyée soumise à une charge concentrée au milieu de sa portée peut être déterminée par cette méthode, le degré d'hyperstaticité de cette dernière est $r = 0$. Le nombre de rotules nécessaires pour qu'elle devienne un mécanisme est : $n = r + 1 = 1$.

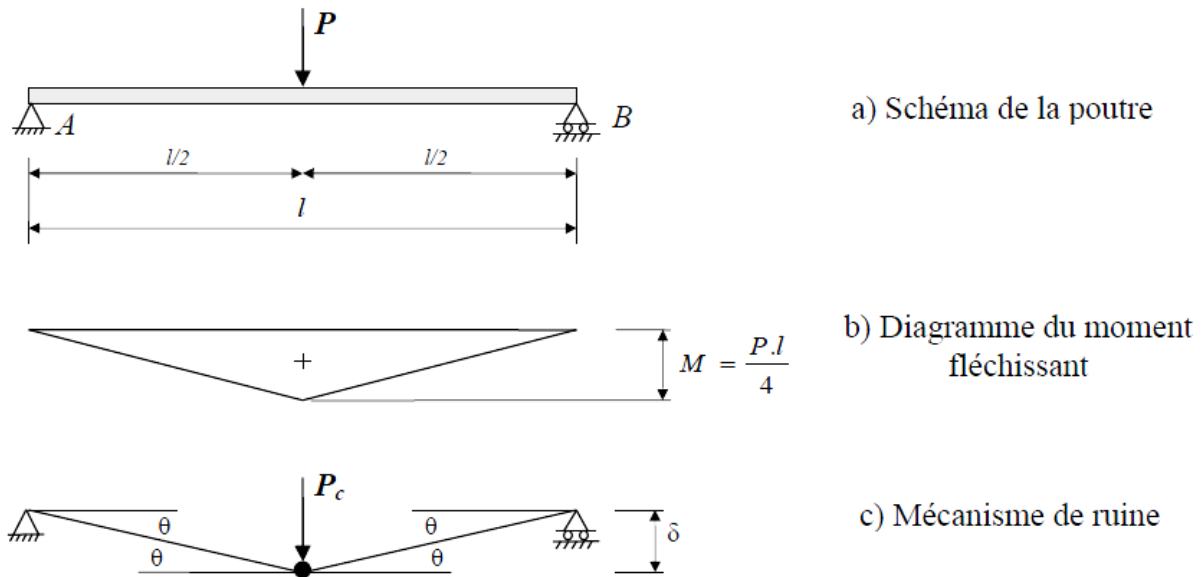


Figure .e.3: Poutre simplement appuyée.[9]

La ruine de cette poutre aura lieu lorsqu'une rotule plastique se produit au niveau du point d'application de charge (section critique) où le moment fléchissant est égale au moment plastique.

On connaît l'allure des moments fléchissants réels au point d'application de la charge lors de la ruine, M_p . Le moment fléchissant libre au point d'application de la charge prend la valeur de $(P_c \cdot l)/4$ (figure e.2.b), dans ce cas (poutre isostatique), le moment fléchissant de réaction au point d'application de la charge est nul d'où la relation (5.1) Devient :

$$M_p = \frac{P_c \cdot l}{4} \quad (5.3)$$

$$P_c = \frac{4 \cdot M_p}{l} \quad (5.4)$$

b)- Principe des travaux virtuels

La charge de ruine de cette poutre isostatique peut être déterminée par le principe des travaux virtuels, Le travail produit par l'effort extérieur, P_c doit être égal au travail produit par l'effort intérieur, M_p .

La géométrie de la structure (figure e.2.c), nous permet d'écrire l'équation :

$$\delta = \frac{l \cdot \theta}{2}$$

L'égalité des travaux virtuels, lors de la ruine nous permet d'écrire

$$P_c \cdot \delta = M_p \cdot 2\theta \quad (5.5)$$

$$P_c \cdot \frac{l \cdot \theta}{2} = M_p \cdot 2\theta$$

$$\text{D'où } P_c = 4 \frac{M_p}{l} \quad (5.6)$$

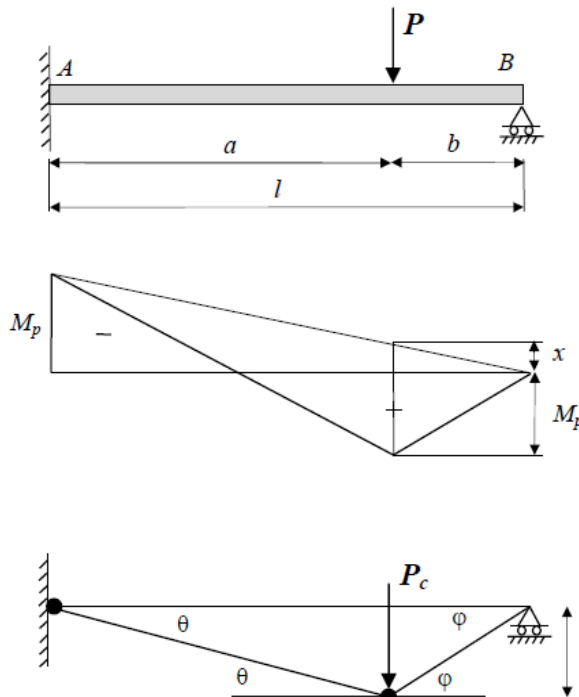
V.6.2 Poutre encastree à une extrémité et appuyée à l'autre ou console retenue

a)- Théorème des moments libre et de réactions

Soit la poutre de section constante, encastree à une extrémité et appuyée librement à l'autre et à laquelle est appliquée une charge concentrée P (figure e.3.a). Il s'agit donc d'une poutre qui présente un (01) degré d'hyperstaticité, elle nécessite alors la formation de deux rotules plastiques pour qu'elle devienne un mécanisme.

Comme le cas précédent, la charge de ruine peut être déterminée à partir du moment libre et du moment de réaction d'où :

M_p	+	x	=	$\frac{P_c \cdot a \cdot b}{l}$
Moment fléchissant réel au point d'application de la charge		Moment fléchissant de réaction au point d'application de la charge		Moment de la poutre comme si elle était simplement appuyée



a) Schéma de la poutre

b) Mécanisme de ruine

c) Distribution des moments fléchissants au moment de la ruine

Figure.e.4 : Poutre encastree d'un coté, et simplement appuyée de l'autre [9]

Utilisant la règle des triangles semblables on déduit la valeur (figure e.4.c), ou :

$$x = \frac{b \cdot M_p}{l}$$

$$M_p + \frac{b.M_p}{l} = \frac{P_c.a.b}{l}$$

$$P_c = \frac{M_p(1+b)}{a.b}$$

D'où (5.7)

b)- Principe des travaux virtuels

Le même principe des travaux virtuels a été utilisé pour déterminer la charge de ruine de la poutre encastrée et appuyée (figure e.4).

$$\sum P_i.\delta_i = \sum M_{p_i}.\theta_i$$

La géométrie de la structure (figure e.4.b), nous permet d'écrire l'équation :

$$\delta = a.\theta = b.\varphi \quad \text{D'où} \quad \varphi = \frac{a}{b}.\theta$$

$$P_c.\delta = M_p.\theta + M_p.(\theta + \varphi) \quad (5.8)$$

$$P_c \cdot a\theta = M_p \cdot \theta + M_p \cdot \left(\theta + \frac{a}{b} \cdot \varphi\right)$$

$$P_c = \frac{(1+b)}{a \cdot b} \cdot M_p \quad (5.9)$$

V.6.3-Poutre doublement encastrée

a)- Théorème des moments libre et de réactions

On étudie une poutre de section constante, parfaitement encastrée à ses extrémités et soumise à une charge concentrée, P , (figure e.5.a). Il s'agit donc d'une poutre qui est deux fois hyperstatique, elle nécessite alors la formation de trois rotules plastiques pour qu'elle devienne un mécanisme.

D'après le diagramme des moments fléchissants, les rotules plastiques ne pouvant se former qu'au droit des sections critiques, c'est au niveau de l'application de la charge et au niveau des deux encastremements.

$$M_p + M_p = P_c \cdot \frac{a}{l}$$

Moment fléchissant réel au point d'application de la charge

Moment fléchissant de réaction au point d'application de la charge

Moment fléchissant libre

Donc la charge de ruine est donnée par :

$$P_c = \frac{2M_p \cdot l}{a \cdot b} \quad (5.10)$$

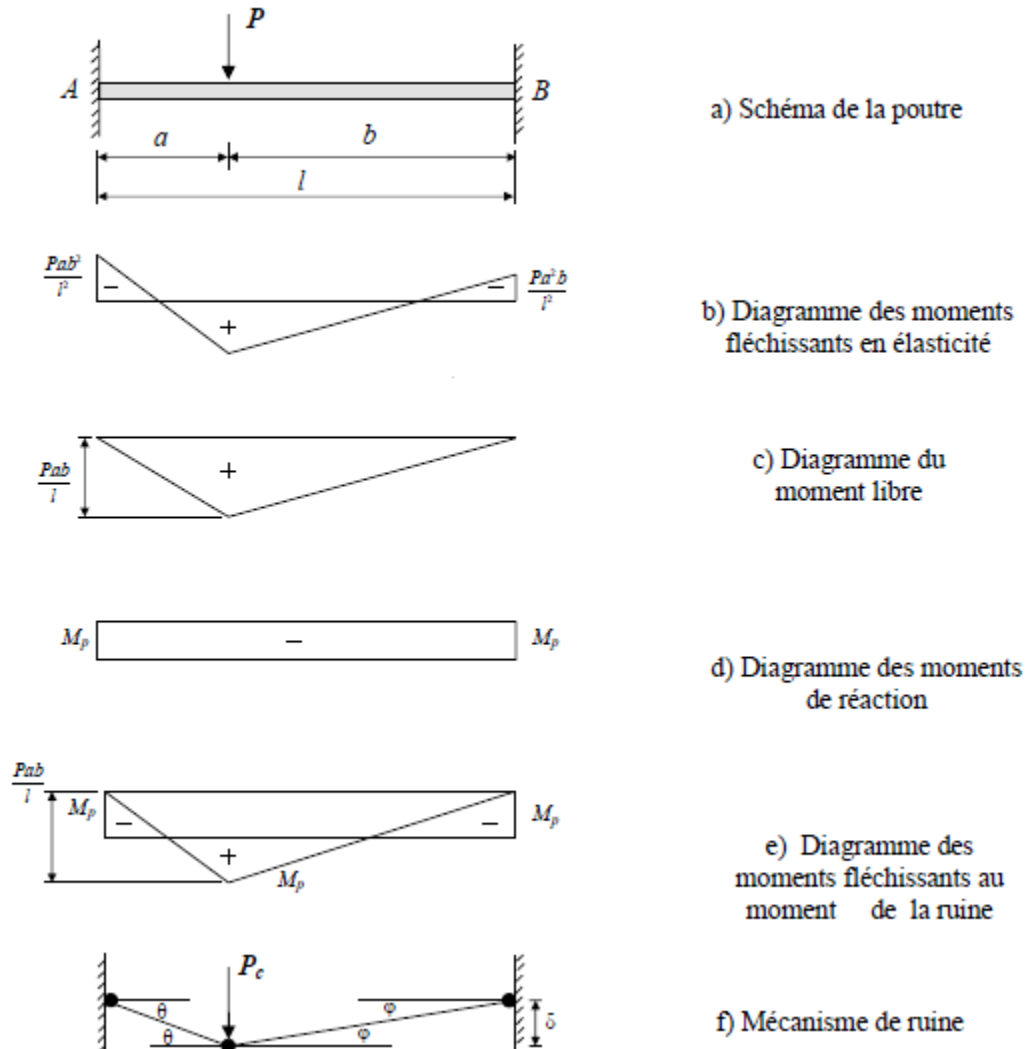


Figure e.5 : Poutre encastree à ses deux extrémités.[9]

b)- Principe des travaux virtuels

La charge de ruine de cette poutre (figure e.5.a), peut être déterminée par la deuxième méthode, cette dernière basée sur le principe des déplacements virtuels, la charge de ruine P_c produit un déplacement virtuel δ , le moment plastique M_p produit une rotation virtuelle 2θ à mi travée de la poutre et une rotation virtuelle θ au niveau de l'encastrement gauche et ϕ au niveau de l'encastrement droit de la poutre.

La géométrie de la structure au moment de la ruine (figure e.5.f) a permis d'écrire l'équation :

$$\delta = a.\theta = b.\varphi \quad \text{D'où} \quad \varphi = \frac{a}{b}.\theta$$

La charge de ruine, P_c provoque la formation des trois rotules plastiques, ainsi que le déplacement virtuel δ , le travail extérieur est égal au produit $\lambda V.\delta$, le travail externe est égal à la somme des produits du moment plastique fois les rotations virtuelles.

$$P_c \cdot \delta = M_p \cdot \theta + M_p \cdot \varphi + M_p \cdot (\theta + \varphi) \quad (5.11)$$

$$P_c \cdot a\theta = M_p \cdot \theta + M_p \cdot \frac{a}{b} \cdot \theta + M_p \cdot (\theta + \frac{a}{b} \cdot \varphi)$$

$$P_c = \frac{2 \cdot l}{a \cdot b} \cdot M_p \quad (5.12)$$

NB : les mêmes résultats théoriques sont obtenus par les deux méthodes.

V.6.4-Poutre continue soumise à un chargement concentré

a)- Théorème des moments libre et de réactions

Soit une poutre continue à trois travées, dont le schéma statique et les différentes caractéristiques sont donnés dans la figure (e.6.a).

L'analyse de ce type de poutres se fait d'une manière similaire que les cas précédemment étudiés, chaque travée devant être étudiée séparément. Il y a lieu à prendre en considération les hypothèses suivantes :

- Au niveau des appuis entre les travées de la poutre, le moment fléchissant est identique à droite et à gauche de l'appui. La rotule plastique se forme dans les membres les plus faibles (c'est-à-dire que le moment plastique à prendre en considération sera le moment le plus faible des deux travées de la poutre considérée à ce niveau).
- Il est improbable que les travées de la poutre se rompent simultanément, donc chaque travée est à vérifier individuellement. La charge de ruine de la poutre continue est la plus petite des charges de ruine des travées prises séparément. Il s'agit donc d'une ruine partielle de la poutre.

La poutre peut être représentée comme une série de travées indépendantes (figure e.6.c).

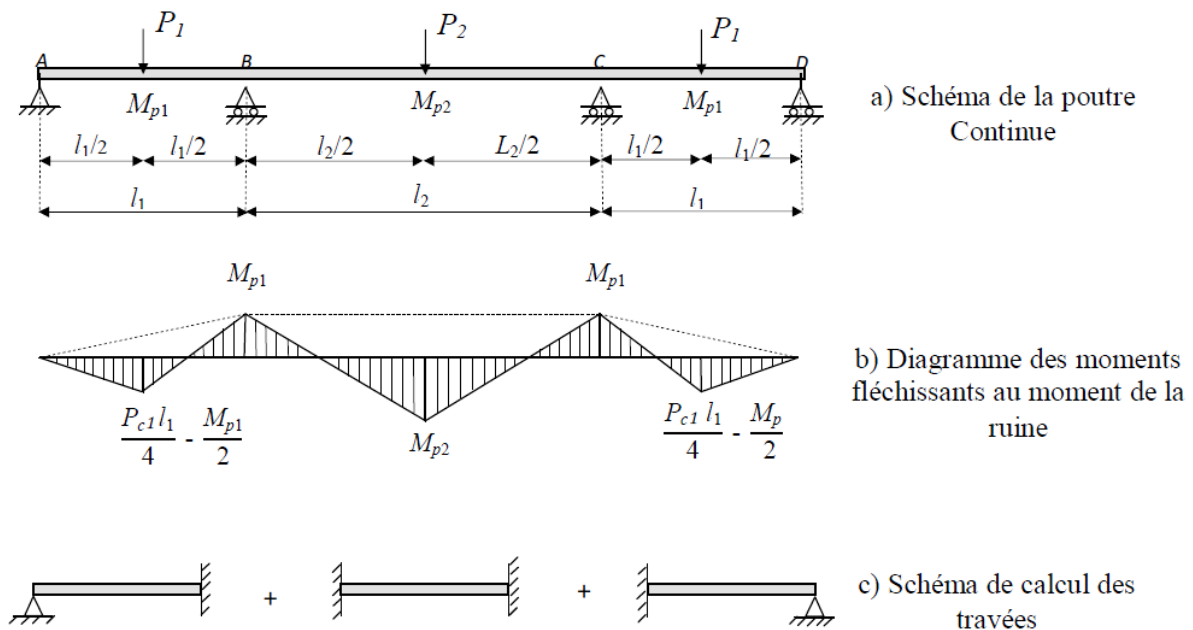


Figure e.6 : Poutre continue sous charges ponctuelles [9]

Travées AB, CD :

Isolant les travées (AB) et (CD), (symétrie du chargement et même portée) le schéma de calcul était celui d'une poutre encastrée à une extrémité et simplement appuyée à l'autre (figure e.6.c), si elles se rompent en premier, le diagramme des moments fléchissants aura la forme donnée sur la figure (e.7.a) avec un mécanisme de ruine représenté sur la figure (e.7.b).

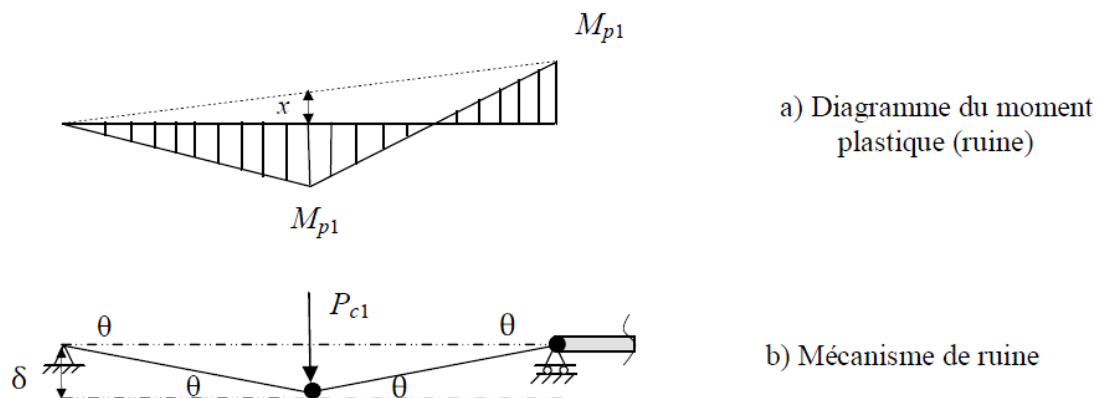


Figure e.7 : Mécanisme de ruine des travées extrêmes

Utilisant le même principe que pour les exemples précédents pour le calcul de la charge de ruine, on obtient donc :

$$M_{p1} + x = \frac{P_{c1} \cdot l_1^2}{4 \cdot l} \quad (5.13)$$

Des triangles semblables on déduit la valeur de x , d'où

$$x = \frac{M_{p1}}{2}$$

$$M_{p1} + \frac{M_{p1}}{2} = \frac{P_{c1} \cdot l_1^2}{4 \cdot l}$$

La charge de ruine est égale donc à :

$$P_{c1} = \frac{6}{l_1} \cdot M_{p1} \quad (5.14)$$

Travées BC :

Ce type de problème est similaire à celui de la poutre encastree à ses deux extrémités, les rotules plastiques ne pouvant se former qu'au droit des sections critiques, c'est au niveau de l'application de la charge et au niveau des deux encastremets, (figure e.5).

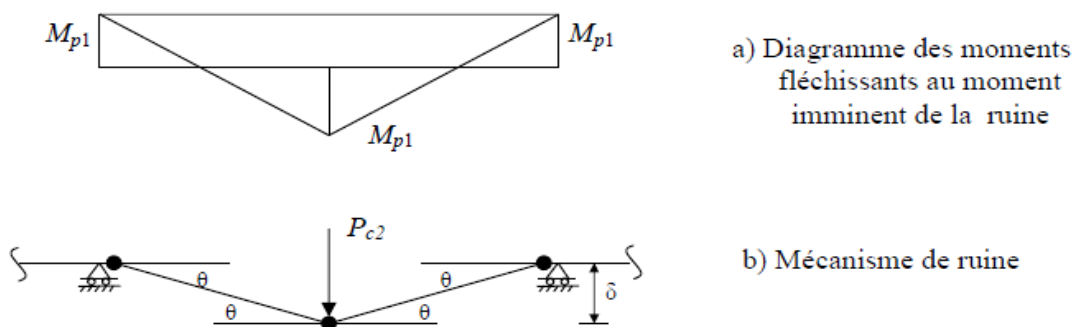


Figure e.8 : Mécanisme de ruine pour la travée du milieu

On aura :

$$P_{c2} = \frac{4 \cdot (M_{p1} + M_{p2})}{l_2} \quad (5.15)$$

Conclusion : la charge de ruine est égale au min (P_{c1} , P_{c2}) donc elle est fonction des valeurs des moments plastiques et des portées. Avec les valeurs littérales, il n'est pas possible de dire quelle est la travée critique.

b)- Principe des travaux virtuels

La charge de ruine de la poutre continue peut être déterminée par la méthode des travaux virtuels. La ruine de cette dernière peut se produire seulement par un des deux mécanismes représentés dans les figures (e.7.b et e.8.b), des deux travées AB ou CD et BC, la plus petite

valeur des deux charges de ruine P_{c1} et P_{c2} de ces deux mécanismes est la vraie charge de ruine

L'équation des travaux virtuels pour chacun des deux mécanismes nous permet d'écrire :

- Travées AB, CD :

$$P_{c1} \cdot \frac{l \cdot \theta}{2} = M_p \cdot (2\theta + \theta) \quad (2-16)$$

$$P_{c1} = \frac{6}{l} \cdot M_p$$

- Travées BC :

$$P_{c2} \cdot \frac{l \cdot \theta}{2} = M_{p1} \cdot \theta + M_{p2} \cdot 2\theta + M_{p1} \cdot \theta$$

$$P_{c2} = \frac{4 \cdot (M_{p1} + M_{p2})}{l_2} \quad (5.17)$$

Il est à noter qu'à chaque fois les deux méthodes donnent exactement la même expression pour les charges de ruine.

V.7-Détermination des charges de ruine et mécanismes de ruine d'un portique simple

V.7.1-Méthode « pas à pas »

Pour mieux comprendre le comportement des portiques hyperstatiques soumis à des combinaisons de charge horizontale et verticale croissante jusqu'à la ruine, il a été jugé utile de considérer carrément un exemple d'un portique simple et d'étudier son comportement après la formation des rotules plastiques et ce jusqu'à la transformation de la structure en un mécanisme partiel ou total. Ceci permettra de mettre en lumière les quelques théorèmes importants et essentiels cités ci-dessus de l'analyse plastique des structures.[10]

V.7.2-Caractéristiques du portique

Les caractéristiques géométriques et mécaniques du portique simple et les points d'application des charges concentrées verticales, λV , et horizontales, λH , et les sections critiques de A à E, sont représentés sur la figure (e.9) :

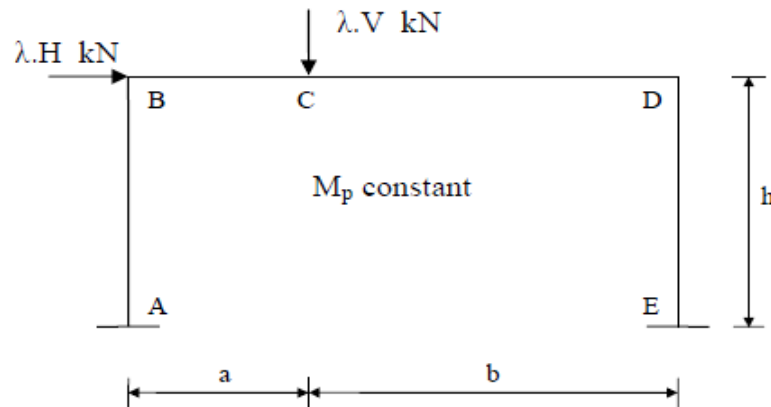


Figure e.9 : Portique simple à une travée et un niveau [9]

V.7.3-Traitement du portique

Le portique représenté sur la figure (e.9) supporte les charges concentrées verticales λV et horizontales λH , où λ est le facteur de charge. Il est supposé initialement que $V=H=1$ kN, le comportement du portique quand λ est augmenté, est résumé dans la figure (e.10).

Au début de ce processus, le comportement du portique est élastique (c'est-à-dire le comportement des sections critiques est élastique), et une analyse élastique donne un diagramme des moments fléchissant représenté dans l'étape N°1. Quand $\lambda=38.91$ le plus grand moment fléchissant se trouve au niveau de l'encastrement droit (point E), ce dernier devient égal au moment plastique ($M_p=100$ kN.m) et une rotule plastique se forme au niveau de cette section critique.

Evidement, la structure entière en dehors de la section, E, est encore élastique et le demeure quand la valeur du facteur de charge, λ , est au dessus de 38,91. Et La section, E, se comporte comme une rotule mécanique et de ce fait elle peut pivoter librement. Le moment fléchissant au point E doit rester égal au moment plastique.

L'étape N°2 représente la structure effective qui résiste au chargement quand λ est augmenté.

C'est simplement le portique originel avec une rotule sans frottement au point E (la rotule physique est remplacée par une rotule mécanique). Cette structure peut être réanalysé par la même méthode élastique comme à l'étape N°1.

Le résultat de l'analyse est le changement en moments fléchissants. Pour obtenir les moments totaux, il est nécessaire d'ajouter le changement (différence) en moments fléchissants aux moments fléchissants quand $\lambda=38,91$ (N.B : la rotule sans frottement en E assure que le changement en moments fléchissants en E est nul, de telle sorte que le moment reste égal au moment plastique, dans ce cas le moment maximum est sous la charge concentrée verticale au niveau de la section critique point C.

$M_c = 82.7$ kN.m étant le deuxième plus grand moment de l'étape N°2

$$M_c = 82.7 + 2.47\lambda' = M_p = 100 \text{ kN.m d'où } \lambda' = 7$$

D'où la nouvelle valeur de $\lambda = 38.91 + 7 = 45.91$.

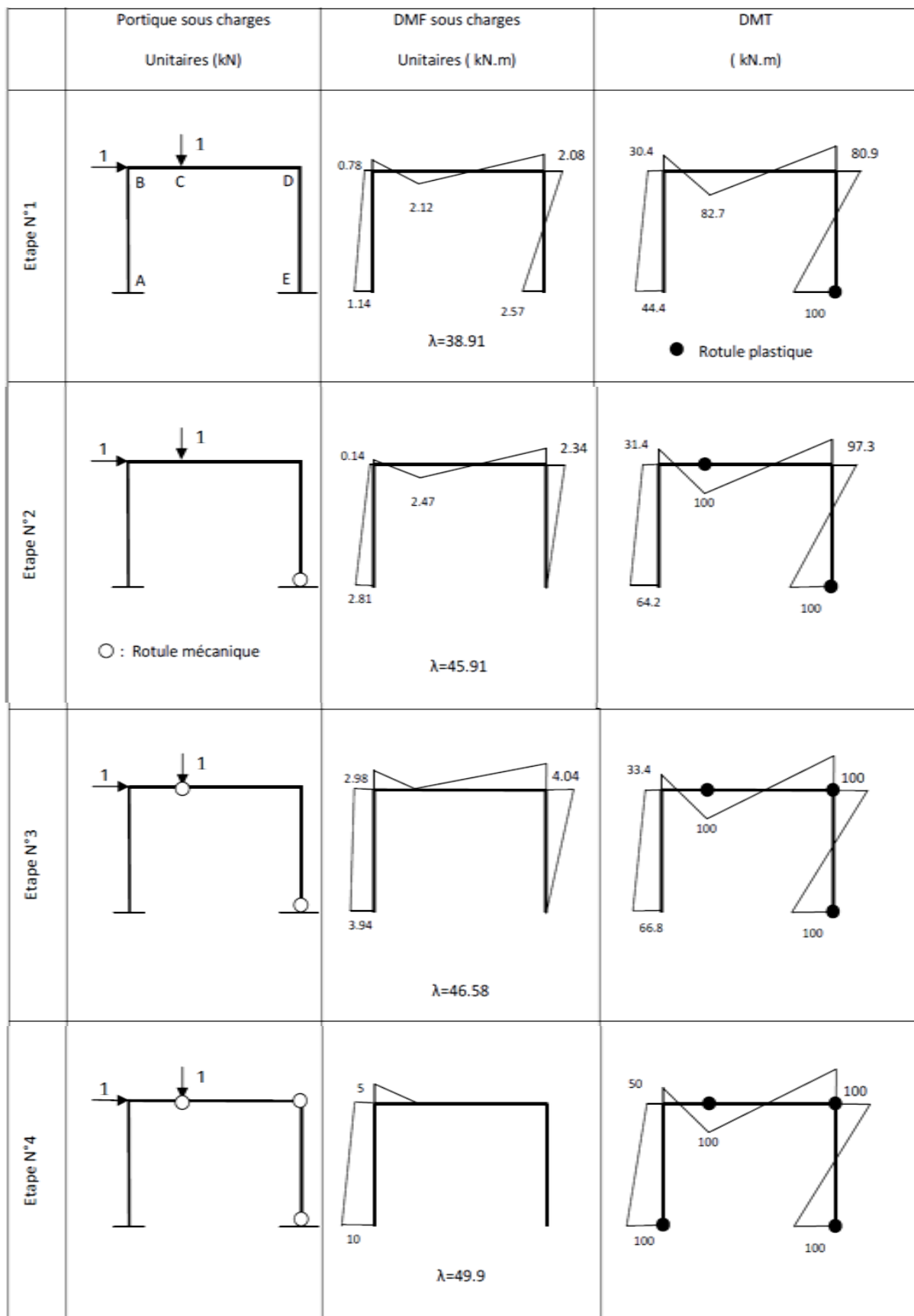


Figure e.10 : Détermination du mécanisme de ruine d'un portique simple par la méthode « pas à pas » [9]

Comme l'indique l'étape N°3, à partir de ce moment il y'a deux pivots (rotules) dans la structure effective qui peut quand même être analysée élastiquement. Très rapidement, cependant, une rotule se forme au niveau de la section critique (point D) quand λ atteint la valeur de 46,58.

$$M_D = 97.3 + 4.04\lambda'' = M_p = 100 \text{ KN.m d'où } \lambda'' = 0.67$$

D'où la nouvelle valeur de $\lambda = 45.91 + 0.67 = 46,58$

Le processus peut continuer à l'étape N°4 avec trois rotules sans frottement jusqu'à ce que la valeur de λ atteigne la valeur de 50, le moment max de l'étape N°3 se trouve au niveau de la section critique (point A).

$$D'où M_A = 66.8 + 10\lambda''' = M_p = 100 \text{ KN.m d'où } \lambda''' = 3.32$$

D'où la nouvelle valeur de $\lambda = 46,58 + 3.32 = 49.9$

A ce moment, une quatrième rotule plastique prend naissance.

Il est intéressant de remarquer deux points au sujet du moment fléchissant total représenté dans la figure (e.10).

- La distribution des moments fléchissants est en équilibre avec les charges appliquées, la condition d'équilibre est l'une des conditions fondamentales requise par la méthode « Pas à pas ».

- Les moments fléchissants ne dépassant nulle part, le moment plastique des membres, ceci étant la condition d'écoulement.

Toute tentative de continuer le processus utilisant une structure effective avec quatre rotules sans frottement est impossible, puisque les équations deviennent singulières et ne peuvent pas être résolues. En fait la structure devient un mécanisme.

La distribution des moments fléchissants à ce point satisfait la condition d'équilibre et la condition d'écoulement et en plus :

- Il y'a suffisamment de rotules plastiques ($n=r+1=3+1=4$) pour la structure pour qu'elle devienne un mécanisme, ceci étant la condition de mécanisme.

La courbe représentée dans la figure (e.11), définit la relation entre le facteur de charge pour chaque étape en fonction des déplacements horizontaux du portique simple à une travée et à un étage figure (e.10).

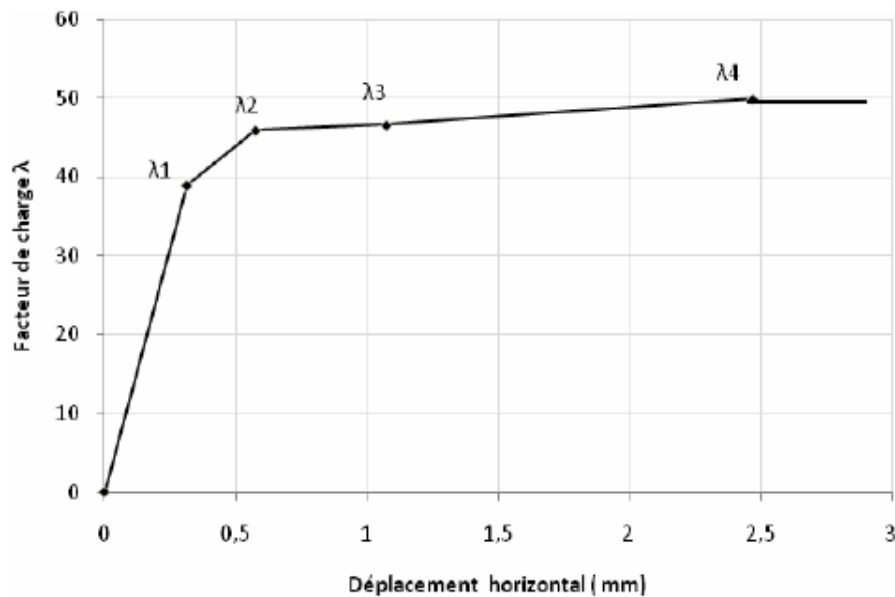


Figure e.11 : Courbe facteur de charge λ en fonction du déplacement horizontal du portique simple [9]

V.8- Méthode cinématique

Le présent paragraphe a pour objet la détermination des charges de ruine et les mécanismes de ruine d'un portique simple composé d'une travée et d'un niveau (figure e.12).

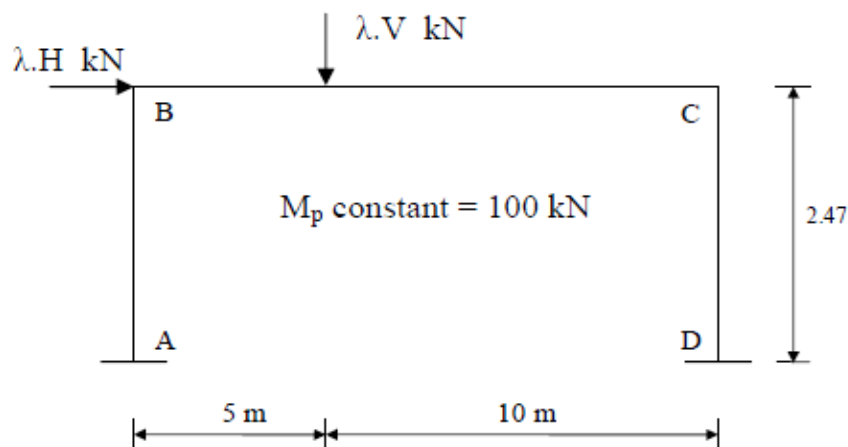


Figure e.12 : Portique simple à une travée et un niveau

Ce portique est trois fois hyperstatique, il ne devient un mécanisme qu'après la formation de quatre rotules plastiques. A cet effet les charges de ruine et les mécanismes de ruine de ce portique sont déterminés par une série de combinaisons des mécanismes élémentaires et ce à cause de la complexité de ce dernier Comparativement aux poutres doublement encastrees. Cette méthode est basée sur le principe des déplacements virtuels, elle consiste à combiner les différents mécanismes élémentaires de ruine, m , ($m=p-r$, où p représente le nombre de sections critiques) jusqu'à l'obtention du plus petit facteur de charge, λ_c . Le mécanisme et la

charge de ruine de chaque combinaison sont obtenus à partir de l'égalité du travail produit par les charges extérieures $\Sigma P_i \cdot \delta$ et le travail produit par les efforts internes $\Sigma M_p \cdot \theta$ (ce travail est obtenu par rotation des différentes rotules plastique).

Les possibles déformés du portique sont représentées dans les figures (e.13 à e.15) et dépendent essentiellement de la valeur des deux charges λV et λH . Le portique se transforme en un mécanisme de panneau ou « Sway mechanism » si la charge horizontale est prépondérante, si la charge verticale est prépondérante, il se produit un mécanisme de poutre ou « Beam mechanism » où un mécanisme combiné « Combined mechanism » avec la participation des deux charges.

La combinaison des charges verticales λV et horizontales λH provoque la formation de deux ($m=p-r=5-3=2$, où p représente le nombre de sections critiques) mécanismes élémentaires et un troisième avec la combinaison des deux.

V.8.1- Beam mechanism

Dans ce cas, la ruine de la structure est causée par la charge concentrée verticale λV , le mécanisme et l'emplacement des rotules sont représentés dans la figure (e.13). Le schéma de calcul était celui d'une poutre encastrée aux deux extrémités (les nœuds des portiques sont assimilés à des encastrements parfaits).

La géométrie de la structure nous permet d'écrire l'équation :

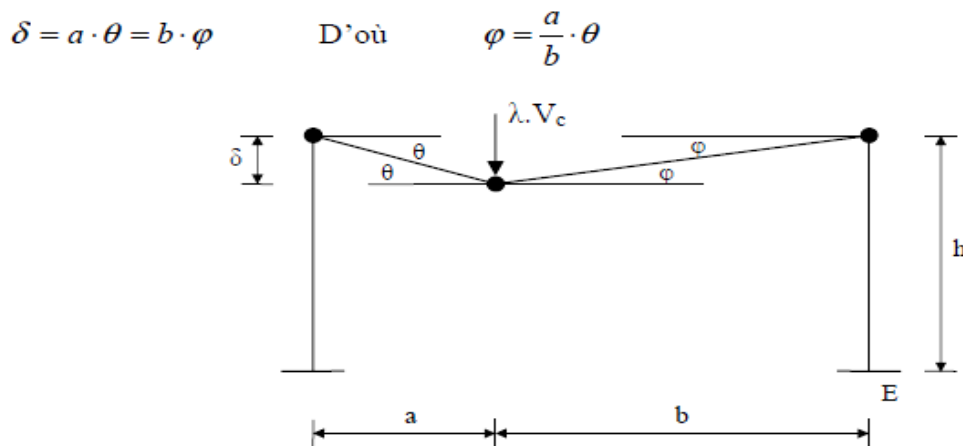


Figure e.13 : « Beam mechanism »

La charge concentrée verticale provoque la formation des trois rotules plastiques, ainsi que le déplacement virtuel δ , le travail extérieur est égal au produit $\lambda V \cdot \delta$, le travail interne est égal à la somme des produits du moment plastique fois les rotations virtuelles $\Sigma M_p \cdot \theta_i$. [10]

$$\begin{aligned} \lambda V_c \cdot \delta &= M_p \cdot \theta + M_p \cdot \varphi + M_p (\theta + \varphi) \\ \lambda V_c \cdot a \theta &= M_p \cdot \theta + M_p \cdot \frac{a}{b} \theta + M_p (\theta + \frac{a}{b} \theta) \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\lambda V_c = \frac{2 \cdot l}{a \cdot b} M_p \quad (5.19)$$

Pour une charge unitaire de $V=1$ kN, $a=5$ m et $b=10$ m
 $\lambda=60$

V.8.2-Sway mechanism

L'effort horizontal λH transforme la structure en un mécanisme de panneau ou étage ou "Sway mechanism", suite à la naissance de quatre rotules plastiques au droit des sections critiques (figure e.15).

La géométrie de la structure nous permet d'écrire l'équation : $\Delta = h \theta$

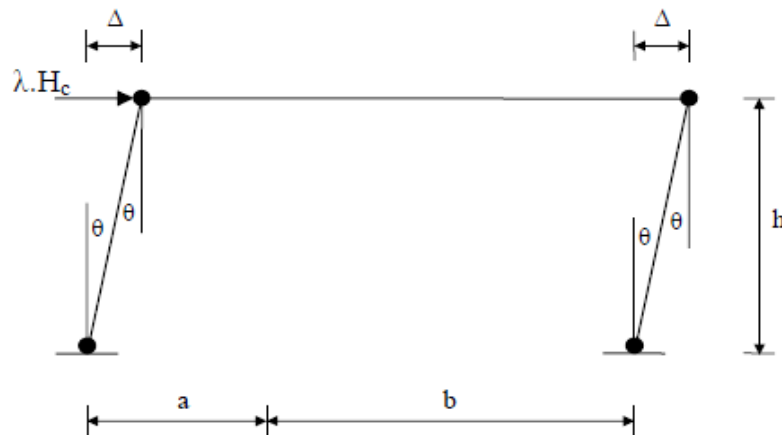


Figure e.14 : « Sway mechanism »

Avec le même principe des déplacements virtuels, on peut calculer facilement le facteur de charge de ruine de ce mécanisme :

$$\lambda H_c \cdot \Delta = 4 M_p \cdot \theta \quad (5.20)$$

$$\lambda H_c \cdot h \theta = 4 M_p \cdot \theta$$

$$\lambda H_c = \frac{4}{h} M_p \quad (5.21)$$

Pour une charge unitaire de $H=1$ kN, et $h=5$ m
 $\lambda=80$

V.8.3-Combined mechanism

Le mécanisme représenté dans la figure (e.15) produit par la combinaison des deux mécanismes élémentaires, ces dernières provoquent des déformations du portique dans les deux sens avec naissance de quatre rotules plastiques. le facteur de charge peut être calculé à partir :

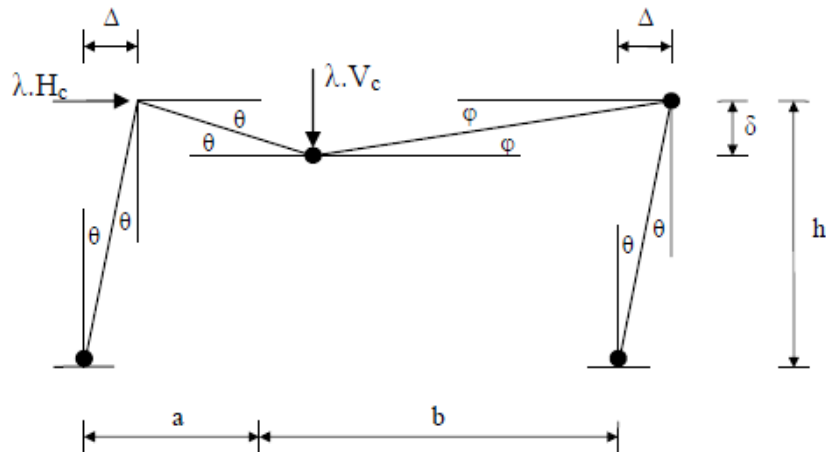


Figure e.15: « Combined mechanism »

$$\begin{aligned}
 \lambda V_c \cdot \delta + \lambda H_c \cdot \Delta &= \frac{2 \cdot l}{a \cdot b} M_p \cdot \theta + \frac{4}{h} M_p \cdot \theta - M_p \cdot \theta - M_p \cdot \theta \\
 \text{« external Work, beam mechanism »} & \quad \text{« external Work, sway mechanism »} & \quad \text{« internal Work, beam mechanism »} & \quad \text{« Internal Work, sway mechanism »} & \quad \text{“ internal Work, at hinge which has disappeared”}
 \end{aligned}
 \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda V_c \cdot a \theta + \lambda H_c \cdot h \theta &= \frac{2 \cdot l}{a \cdot b} M_p \cdot \theta + 4 M_p \cdot \theta - 2 M_p \cdot \theta \\
 \lambda V_c \cdot a + \lambda H_c \cdot h &= \left(\frac{2 \cdot l}{b} + 2 \right) \cdot M_p
 \end{aligned}
 \tag{5.23}$$

Pour $H=V=1$ kN, $a=5$ m, $b=10$ m et $h=5$ m

$\lambda = 50$

Il est constaté que ce mécanisme a la plus petite valeur du facteur de charge, donc $\lambda_c = 50$ d'où le diagramme des moments fléchissants au moment de la ruine est le suivant :

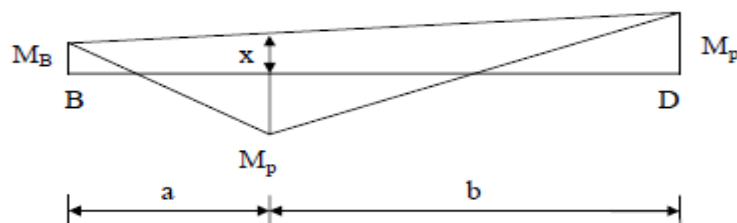


Figure e.16 : diagramme des moments fléchissants poutre B-D [9]

$$M_{libre} = \frac{V \cdot a \cdot b}{l} = M_p + X \quad (5.24)$$

D'où $X = 66.67 \text{ kN.m}$

D'après le diagramme des moments fléchissants on a :

$$\frac{M_p - M_B}{15} = \frac{X - M_B}{5}$$

D'où $M_B = 50 \text{ kN.m}$, le diagramme des moments est comme suit :

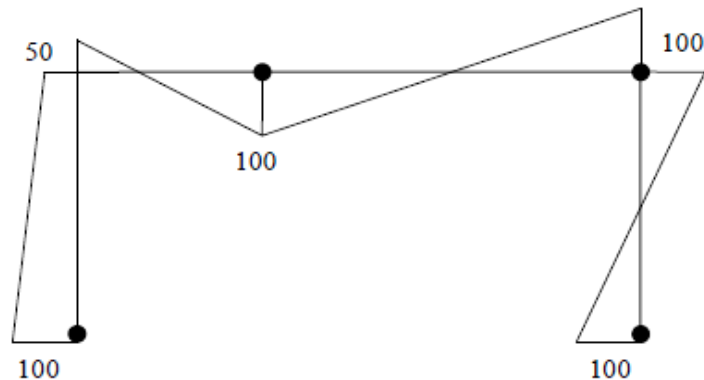


Figure e.17 : Diagramme des moments fléchissants total du portique simple au moment de la ruine

Les trois conditions du vrai mécanisme, condition d'équilibre, d'écoulement et de mécanisme sont satisfaites.

V.8.4-Effets du rapport $\lambda V/\lambda H$

Le présent paragraphe a pour objet l'étude de l'influence du rapport entre la charge concentrée verticale, λV , et la charge concentrée horizontale, λH , $\alpha = \lambda V/\lambda H$, sur la charge de ruine du portique simple à une travée et un niveau (figure e.18).

D'après le paragraphe précédent, on a trois types de mécanismes de ruine avec trois charges de ruine correspondantes du portique en question. En introduisant la relation linéaire entre ces deux charges, $\lambda V = \alpha \cdot \lambda H$ dans les relations caractérisant chaque mécanisme et ce pour les données suivantes :

$a = 5\text{m}$

$b = 10\text{m}$

$h = 5\text{m}$

Pour le « sway mechanism » ou mécanisme II on a :

$$\lambda H = \frac{4}{5} M_p \quad (5.25)$$

Pour le « beam mechanism » ou mécanisme I on a :

$$\lambda H = \frac{3}{5\alpha} M_p \quad (5.26)$$

Pour le « combined mechanism » ou mécanisme III on a :

$$\lambda H = \frac{1}{1 + \alpha} M_p \quad (5.27)$$

Pour une valeur unitaire du moment plastique $M_p = 1 \text{ kN.m}$, on peut construire les courbes traduisant la relation entre la charge de ruine horizontale et le rapport α et ce pour chaque mécanisme de ruine. On peut constater que pour chaque valeur de α trois valeurs différentes de charge de ruine chacune correspondant à l'un des mécanismes de ruine.

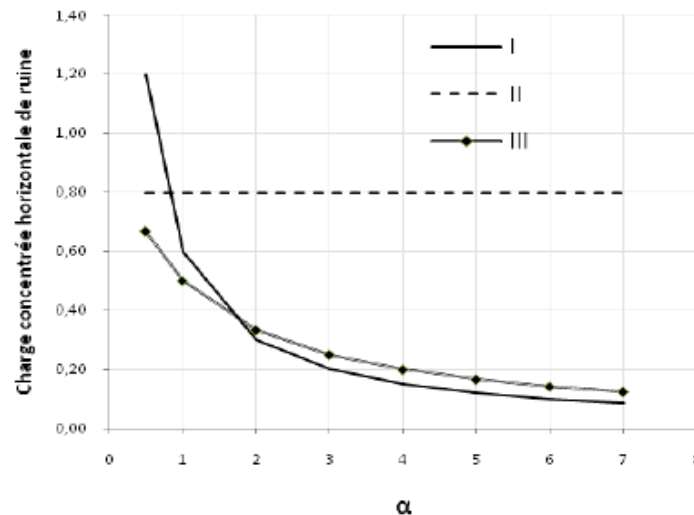


Figure e.18 : Relation entre la charge de ruine horizontale et le rapport α [9]

V.8.5-Construction des diagrammes d'interaction

Afin d'illustrer le comportement du portique représenté dans la figure (e.12) vis-à-vis des combinaisons de charges horizontales et verticales, il est nécessaire de représenter la relation entre ces deux charges par un diagramme d'interaction figure (e.19). Il s'agit de la relation entre les deux charges de ruine représentée dans le système de coordonnées $(\lambda V, \lambda H)$. ce diagramme permet de déterminer le type de mécanisme de ruine et la charge de ruine correspondante.

$a=5\text{m}$

$b=10\text{m}$

$h=5\text{m}$

$M_p=100 \text{ kN.m}$

- "Beam mechanism" (I) pour : $\lambda V_c=60 \text{ kN}$ et $\lambda H \in [0, 40]$
- "Sway mechanism" (II) pour : $\lambda H_c = 80 \text{ kN}$ et $\lambda V \in [0, 20]$
- "Combined mechanism" (III) pour: $\lambda V + \lambda H = M_p$
 Avec $\lambda H \in [40, 80]$
 Avec $\lambda V \in [20, 60]$

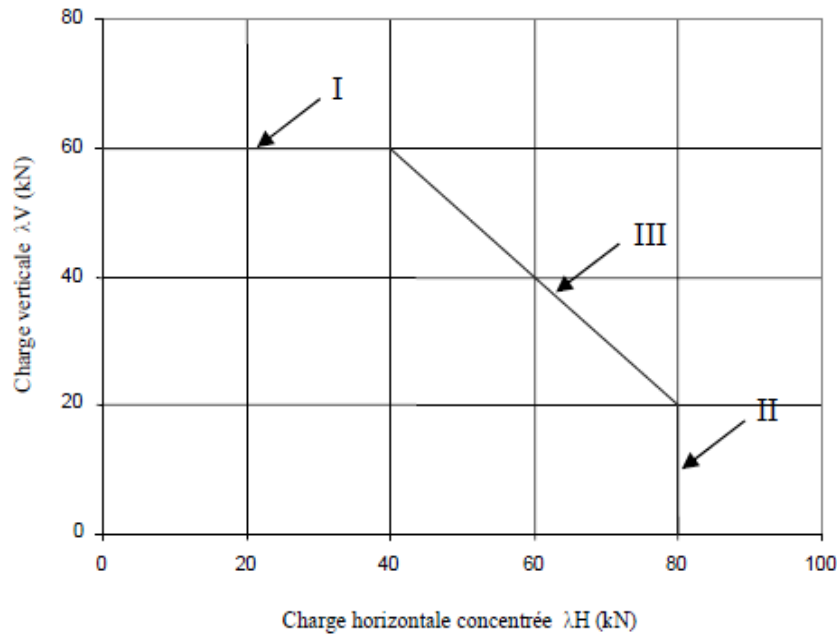


Figure e.19 : Diagramme d'interaction du portique simple.[9]

V.9-Procédé du calcul de la charge de ruine d'un portique hyperstatique

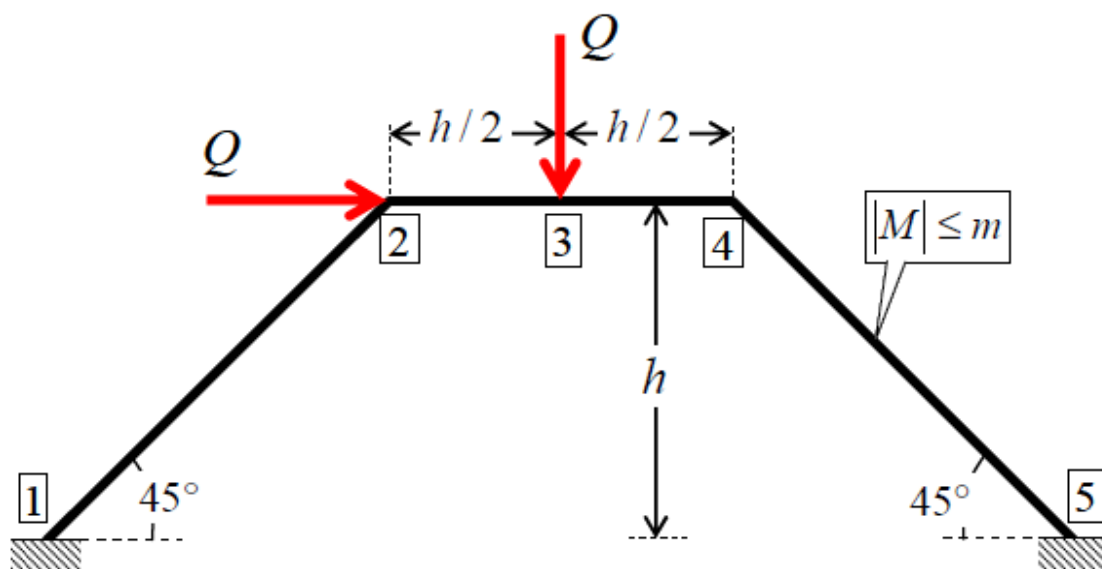


Figure e.20 : Portique soumis à deux charges concentrées [10]

On se propose d'évaluer par la méthode cinématique du calcul à la rupture la charge de ruine du portique représenté sur la figure e.20 ci-dessus, soumis à deux charges ponctuelles d'égale intensité Q , et constitué de tronçons homogènes de même critère de résistance ($-m \leq M \leq +m$). On peut dénombrer $n=5$ sections potentiellement critiques, notées de 1 à 5,

d'où puisque la structure est hyperstatique d'ordre $k=3$, le nombre r de mécanismes indépendants est égal à 2: soit un *mécanisme de poutre* mettant en jeu des rotules aux sections 2, 3 et 4 (figure e.21), ainsi qu'un *mécanisme de panneau* faisant intervenir des rotules aux sections 1, 2, 4 et 5 (figure e.22).

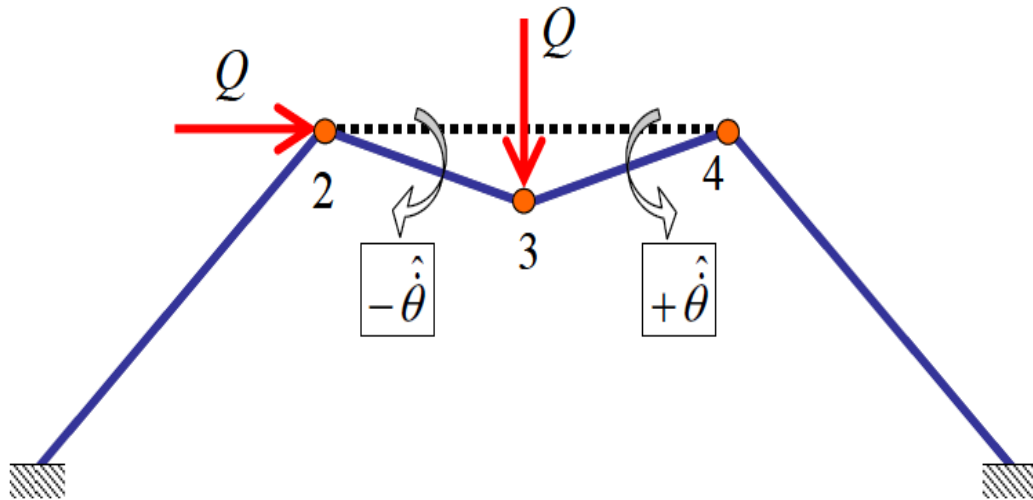


Figure e.21 : Mécanisme de poutre relatif au portique de la figure e.20

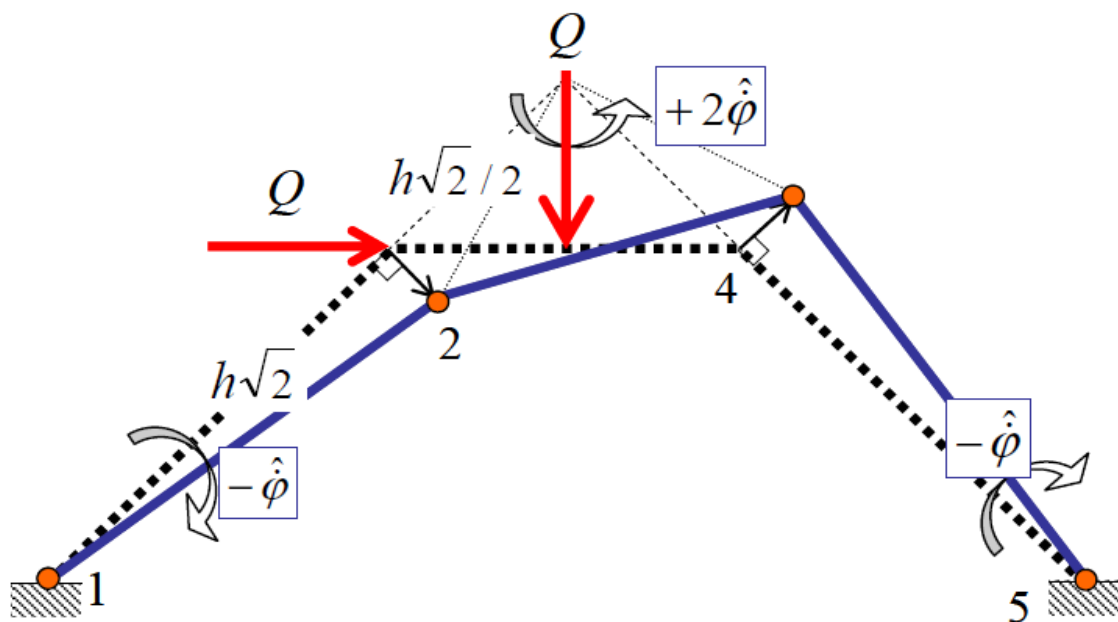


Figure e.22 : Mécanisme de panneau relatif au portique de la figure e.20

On désigne par $-\theta$ (resp. $-\phi$) le taux de rotation virtuel de la poutre 23 (resp. 12) dans le mécanisme de poutre (a) (resp. panneau (b)). Les différentes *discontinuités de taux de rotation* sont calculées en orientant le portique dans le sens 1-2-3-4-5. Le tableau ci-dessous récapitule alors, pour chacun des mécanismes de base, ainsi que pour toute combinaison linéaire de ces mécanismes, la valeur des discontinuités de taux de rotation aux différentes

sections potentiellement critiques (1 à 5), celle de la puissance virtuelle des efforts extérieurs ainsi que celle de la puissance résistante maximale.

	1	2	3	4	5	$Q\dot{q}$	P_{rm}
(a)	0	$-\hat{\theta}$	$2\hat{\theta}$	$-\hat{\theta}$	0	$\frac{Qh}{2}\hat{\theta}$	$4m \hat{\theta} $
(b)	$-\hat{\phi}$	$3\hat{\phi}$	0	$-3\hat{\phi}$	$+\hat{\phi}$	$Qh\hat{\phi}$	$8m \hat{\phi} $
(a) + (b)	$-\hat{\phi}$	$3\hat{\phi} - \hat{\theta}$	$2\hat{\theta}$	$-\hat{\theta} - 3\hat{\phi}$	$+\hat{\phi}$	$Qh(\hat{\theta}/2 + \hat{\phi})$	$2m(\hat{\theta} + \hat{\phi}) + m 3\hat{\phi} - \hat{\theta} + m 3\hat{\phi} + \hat{\theta} $

L'application de l'approche cinématique pour un mécanisme quelconque caractérisé par le couple de paramètres (θ, ϕ) conduit à l'inégalité suivante, *valable pour toutes les valeurs potentiellement supportables du chargement Q* :

$$Qh(\hat{\theta}/2 + \hat{\phi}) \leq 2m(|\hat{\theta}| + |\hat{\phi}|) + m|3\hat{\phi} - \hat{\theta}| + m|3\hat{\phi} + \hat{\theta}| \quad (5.28)$$

Nous restreignant aux valeurs positives du chargement Q , il convient alors de choisir les paramètres (θ, ϕ) de sorte que $(\theta/2 + \phi)$ demeure strictement positif, de façon à obtenir un *majorant* de la charge de ruine Q^+ . La majoration correspondante demeurant inchangée si l'on multiplie les paramètres θ et ϕ par un même facteur positif quelconque, il est alors toujours possible de choisir ces paramètres tels que $\theta/2 + \phi = 1$, de sorte que :

$$\forall \hat{\theta}, \quad Q^+ \leq \frac{m}{h} [2|\hat{\theta}| + |2 - \hat{\theta}| + |3 - 5\hat{\theta}/2| + |3 - \hat{\theta}/2|] \quad (5.29)$$

Il reste à rechercher le minimum de l'expression du second membre de (5.29) afin d'obtenir le meilleur majorant possible de la charge de ruine. Ce second membre étant une fonction *continue et affine par morceaux* en θ , il suffit de prendre le minimum des valeurs calculées aux points où les valeurs absolues s'annulent, soit :

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta} = 0 & \rightarrow Q^+ \leq 8 \frac{m}{h} \\
 \hat{\theta} = 2 & \rightarrow Q^+ \leq 8 \frac{m}{h} \\
 \hat{\theta} = 6/5 & \rightarrow Q^+ \leq \frac{28m}{5h} \\
 \hat{\theta} = 6 & \rightarrow Q^+ \leq 28 \frac{m}{h}
 \end{aligned}
 \tag{5.30}$$

La meilleure majoration possible de Q^+ est obtenue pour $\theta = +6/5$ et donc $\varphi = +2/5$, la valeur correspondante du majorant n'est autre que la *valeur exacte* de la charge de ruine :

$$Q^+ = \frac{28m}{5h} \tag{5.31}$$

Les valeurs des discontinuités de taux de rotation aux sections potentiellement critiques correspondant au mécanisme «optimal» sont données ci-dessous :

1	2	3	4	5
-2/5	0	+12/5	-12/5	+2/5

Il apparaît ainsi que dans ce mécanisme, la discontinuité relative à la section 2 est *nulle*, de sorte que la partie 123 du portique est animée d'un mouvement de rotation pure autour de l'appui 1 : voir figure e.23.

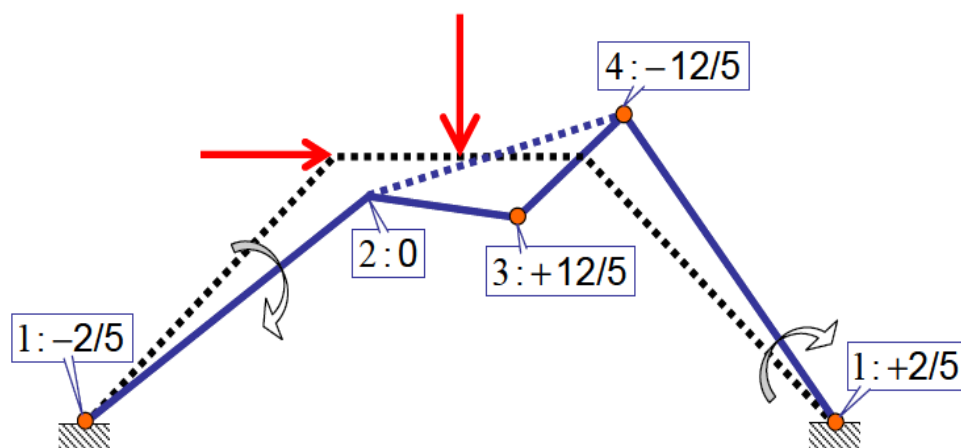


Figure e.23 : Mécanisme optimal avec les discontinuités de taux de rotation aux sections potentiellement critiques

On peut alors associer à ce mécanisme une distribution de moments fléchissants caractérisée par le vecteur $\underline{M} = (M_i, i=1, \dots, 5)$ formé des valeurs des moments fléchissants aux sections potentiellement critiques, qui soit statiquement admissible avec la valeur $Q = 28m/5h$ du chargement, tout en respectant le critère de résistance en tout point du portique. Cette distribution de moments est telle que le critère de résistance est atteint dans les sections potentiellement critiques qui sont le siège d'une discontinuité du taux de rotation dans le mécanisme optimal, avec le signe correspondant, soit :

$$M_1 = M_4 = -m, \quad M_3 = M_5 = +m \quad (5.32)$$

Il est alors possible de calculer la valeur du moment fléchissant au niveau de la section potentiellement critique n°2 en utilisant les deux équations d'équilibre reliant les moments M_i au chargement Q^1 :

$$\begin{aligned} -M_1 + 3M_2 - 3M_4 + M_5 &= Qh = 28m/5 \\ -M_2 + 2M_3 - M_4 &= Qh/2 = 14m/5 \end{aligned} \quad (5.33)$$

On obtient alors immédiatement, compte tenu de (5.32), $M_2 = +m/5$. Le diagramme correspondant des moments fléchissants est représenté sur la figure e.24.

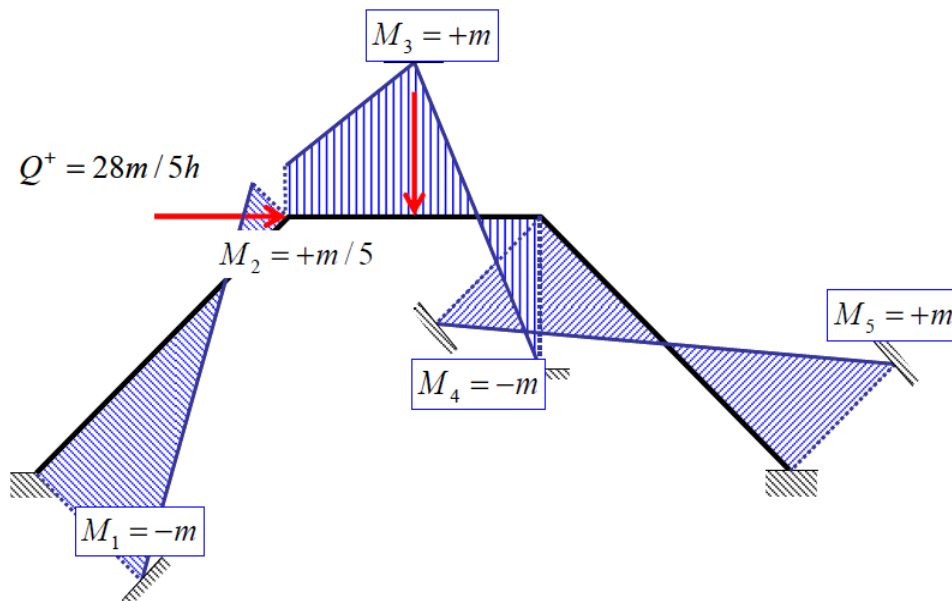


Figure e.24 : Distribution de moments fléchissants associée à la charge de ruine du portique [10]

V.10-Optimisation au calcul de la charge de ruine

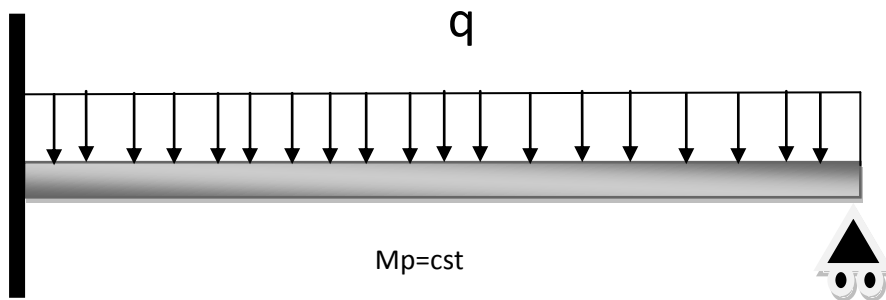


Figure e.25: Poutre encastree appuyee simplement

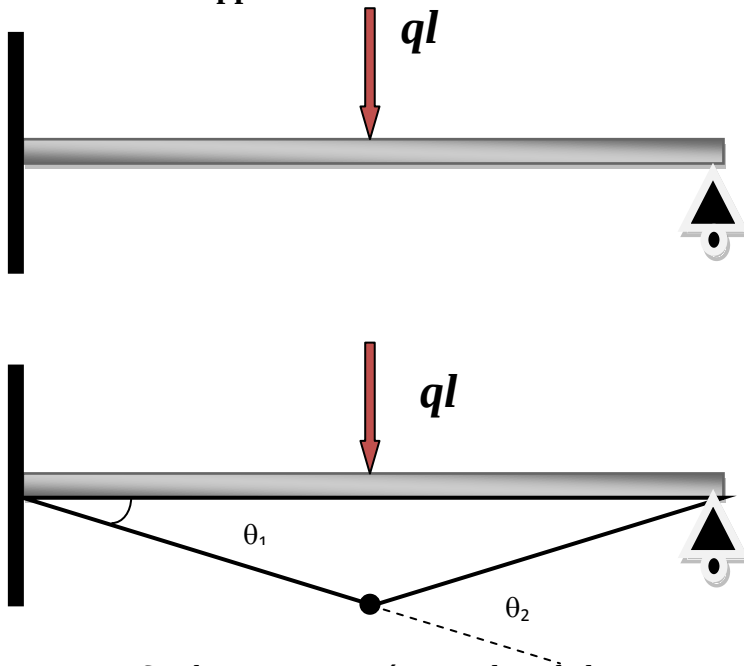
On se propose de calculer la charge de ruine de la structure representee sur la Figure .. ci-dessus, soumise a un chargement uniformement repartie q , encastree appuyee simplement, de longueur l

Analyse de la structure : $k = (3+1)-3 = 1$

Dans ce cas on peut denommer trois possibilite

- a- Charge appliquee au milieux de la poutre
- b- 2 charge appliquees
- c- Parametre x de la position exacte de la rotule plastique

V.a-Premiere approche



$$Q = \int_0^l q dx = q(l - 0) = ql$$

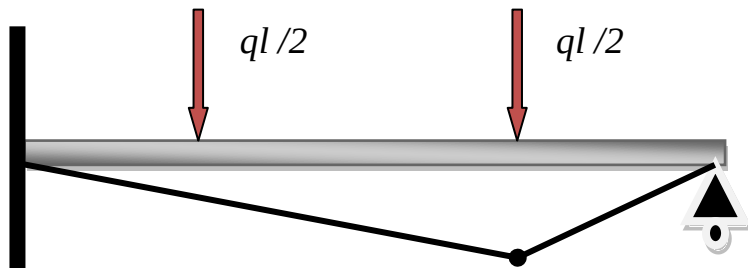
$$W_i = \sum (M_{pi}) |\theta_i|$$

$$\theta_1 = -2\theta_2$$

Figure e.26 : charge concentree au milieu de la poutre

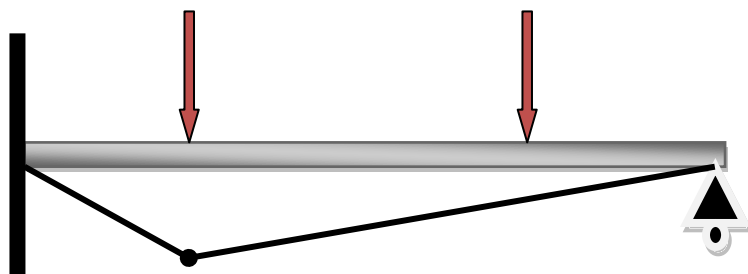
	1	2	W_{int}	W_{ext}	Q_{ruine}
1	θ	-2θ	$3Mp$	$q \frac{l^2}{2} \theta$	$6 \frac{Mp}{l}$

V.b-Deuxième approche



(Mécanisme 1)

$$Q_{\text{ruine}} = 10 \frac{Mp}{l^2}$$

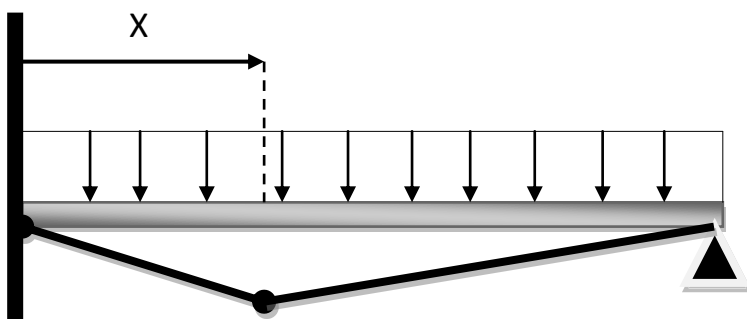


(Mécanisme 2)

$$Q_{\text{ruine}} = 14 \frac{Mp}{l^2}$$

Figure e.27 : deux charges ponctuelles

V.c-Troisième approche (solution exacte)



On paramètre la position de la rotule plastique sous la charge uniformément répartie en fonction de X

avec

$$0 \leq X \leq l$$

Figure e.28 : Charge répartie

le déplacement à l'endroit de la rotule vaut

$$\delta_x = x \operatorname{tg} \theta = x \theta = (l-x) \operatorname{tg} \theta_3 = (l-x) \theta_3 \Rightarrow \theta_3 = \frac{x\theta}{l-x} \quad (5.34)$$

les déplacements du côté X et du côté de $(l-x)$ respectivement valent

$$\begin{aligned} \delta_1 &= x/2 \operatorname{tg} \theta = x/2 \theta \\ \delta_2 &= (l-x)/2 \operatorname{tg} \theta_3 = (l-x)/2 \frac{x\theta}{l-x} = x/2 \theta \end{aligned} \quad (5.35)$$

De plus

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= ql \frac{x\theta}{2} \\ W_{\text{int}} &= \theta M_p \left(2 + \frac{x}{l-x} \right) \end{aligned} \quad (5.36)$$

Dans le cas de la ruine $W_{\text{ext}} = W_{\text{int}}$ et $q = q_{\text{ruine}}$

$$\text{D'où } q_{\text{ruine}} \leq 2 M_p \left(2 + \frac{x}{l-x} \right) / lx$$

Pour optimiser

$$\frac{dq_r}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(2 M_p \left(2 + \frac{x}{l-x} \right) / lx \right)$$

$$x^2 l - 4xl^2 + 2l = 0$$

$$X_{1,2} = x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} x = l(2 + \sqrt{2}) > l & \text{Solution rejetée} \\ x = l(2\sqrt{2}) \approx 0.58l \end{cases}$$

La rotule se situe à $0,58l$

$$\text{D'où } q_{\text{ruine}} \leq 11.657 M_p$$

Conclusion

L'objectif de ce travail est l'analyse élasto-plastique et le calcul de la charge de ruine des structures portantes en suivant la formation successive des rotules plastiques dans la structure.

L'analyse élasto-plastique fournit des informations plus réalistes (pratiques) sur le vrai comportement et la capacité de résistance finale des structures. La méthode des rotules successives employée dans ce travail ne permet pas seulement de déterminer la charge de ruine d'une structure mais fournit aussi des informations utiles sur le comportement non linéaire et l'apparition des rotules plastiques.

La technique peut ainsi être utilisée pour évaluer la performance et la vulnérabilité des structures existantes en détectant les zones les plus faibles, qui sont les endroits propices à l'apparition des premières rotules plastiques, et concevoir en conséquence une méthode appropriée de renforcement

Les avantages du calcul en plasticité sont les suivants :

- coefficient de sécurité cohérent et indépendant du type de la structure
- simplification des méthodes de calcul en remplaçant le calcul hyperstatique par un calcul isostatique.

Mais ces avantages ne doivent pas nous faire perdre de vue que le calcul en plasticité est généralement basé sur des principes de la statique et une structure jugée sûre d'après un calcul ne peut pas forcément l'être dans le cas réel (en service), sauf si cela a été appuyé avec des essais en laboratoire.

Ces quelques pages ne sont qu'une initiation au calcul en plasticité des structures pour plus d'étendu et de précision sur ces méthodes de résolution, je ne puisse que conseiller la lecture d'ouvrages et de thèses sur le sujet qui apporteront un éclairage nouveau sur ces méthodes de calcul.

Références bibliographiques

- [1] Samuel Forest, Michel Amestoy Gilles Damamme, Serge Kruch, Vincent Maurel, Matthieu Mazière, notes des cours de mécanique des milieux continus, Ecole des mines de Paris, 2009–2010.
- [2] FRANCOIS SIDOROFF, mécanique des milieux continus, Ecole centrale de Lyon, 2010.
- [3] ERIC DAVALLE, Mécanique des structures, Cours du 3ème semestre bachelor, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne.
- [4] HERVE OUDIN, Introduction à la plasticité, Ecole d'ingénieur. Ecole Centrale de Nantes, 2009.
- [5] James O. SMITH, Omar M. SIDEBOTTOM ; Comportement inélastique des structures porteuses, 1970.
- [6] HAMID BOUCHAIR ; Calcul des Structures Analyse Limite Plastique et principes de l'EC3, CLERMONT FERRAND, 2010.
- [7] MIMOUNE. FZ et MIMOUNE. M, Cours de Plasticité des Structures à barres, office des publications universitaires, 2011.
- [8] DJEBBAR AREZKI, Cours de plasticité, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Algérie, 2016.
- [9] BOUKELOUA SMAIL, Etude des mécanismes de ruine pour des structures multi-étagées, thèse de magister, université de Skikda, 2008.
- [10] BOUCENNA, BENABDESSELAM, KOUTCHOUKALI. N, Calcul élastique et plastique d'une ossature métallique, PFE Université de Constantine. Algérie, 1986.
- [11] BOUKHLOUF. B, CHARI .A.H, Analyse élasto-plastique des structures planes par la méthode des rotules plastiques. Thèse de Magister. Université de Batna. Algérie.
- [12] MICHEL KER, Calcul en plasticité des ossatures métalliques, Edilivre, 2014.