
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU

FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire de Master 2

Spécialité
MATHÉMATIQUES

Option
ANALYSE MATHÉMATIQUE ET APPLICATIONS

Intitulé du mémoire

**Étude d'Équations Stochastiques de la Dynamique
des Populations pour la Compétition entre
plusieurs espèces**

Réalisé par : **Larbi Lilia**

Devant le jury d'examen composé de

Morsli	Mohamed	Professeur	UMMTO	Président
Hamdous	Saliha	Maitre de Conférences	UMMTO	Encadreur
Bedouhene	Fazia	Professeur	UMMTO	Examinatrice
Taleb	Lynda	Maitre de Conférences	UMMTO	Examinatrice

Soutenu le 28 Juin 2018

Table des matières

Introduction générale	3
1 Existence d'une mesure invariante pour les équations stochastiques du modèle de compétition entre deux espèces	5
1 Introduction	5
2 Le modèle déterministe	5
3 Le modèle stochastique : Fonction de Has'minskii et mesure invariante	9
2 Existence d'une mesure invariante pour l'équation stochastique d'un modèle de compétition limitée entre n espèces avec diffusion spatiale	21
1 Introduction	21
2 Théorème d'existence d'une mesure invariante dans un espace de Hilbert.	22
3 Résultat principal	23
4 Estimations à priori de la solution	25
4.1 Première estimation de la solution.	25
4.2 Deuxième estimation de la solution	31
5 Existence d'une mesure invariante.	37
Conclusion générale	39
Bibliographie	41

Introduction générale

La population humaine n'est pas statique, le nombre d'individus varie, évolue au cours du temps, ce comportement est appelé "dynamique de la population". Elle s'intéresse au développement numérique de toutes les populations d'être vivants.

Les premiers essais scientifiques visant à décrire l'évolution temporelle d'une population d'individus restent cantonnés aux sciences politico-sociale, particulièrement à l'étude de l'accroissement de la population humaine et des problèmes induits par cet accroissement. Ainsi, le premier modèle de l'évolution temporelle d'une population a été proposé par l'économiste T.R.MALTHUS ¹. Ses travaux parus en 1798 (voir [13]) soutiennent le concept de la croissance exponentielle du nombre d'individus, tant que les ressources du milieu sont suffisamment abondantes pour répondre aux besoins de la population.

A la fin de la première guerre mondiale, les modèles mathématiques occupaient une position extrêmement importante dans le développement de la recherche sur la théorie de l'évolution et l'écologie. La plupart des modèles d'interaction que l'on utilise actuellement sont basés sur les modèles de LOTKAS ², (chimiste, démographe, écologiste et mathématicien) et VOLTERRA ³(mathématicien) .

En générale, lorsque les espèces interagissent, la dynamique de chaque espèce est affectée par ces interactions. Il y'a principalement trois types d'interactions (voir par exemple [2] , [19]), à savoir la prédation, le mutualisme et la compétition.

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés à ce dernier type d'interaction, en effet on trouve dans la littérature un nombre important de travaux visant à donner des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour la coexistence stable de population d'espèces en compétition.

¹Thomas Robert Malthus, 1766-1834

²Alfred James Lotkas, 1880-1949 Etats Unis

³Vito Volterra, 1860-1940, Italie

Notre travail est réparti en deux chapitres, le premier chapitre traite en premiers lieu le cas déterministe pour le modèle de compétition entre deux espèces ensuite, on aborde un système d'équation stochastique pour deux espèces en compétition et on montre l'existence d'une mesure invariante à travers le théorème de Has'minskii ([11] chap. 3 Th.5.1(p90)). Le théorème de Has'minskii peut être considéré comme étant la version stochastique de la théorie de Lyapunov.

Au deuxième chapitre, on considère aussi la diffusion spatiale de la population dans un territoire et on montre que sous une condition convenable, le système d'équations stochastiques pour un modèle de compétition limitée entre plusieurs espèces admet aussi une mesure invariante. Pour démontrer ce résultat, on fait appel au théorème fondamental pour l'existence d'une mesure invariante dans un espace de Hilbert. Il s'agit du théorème de Krylov-Bogoliubov qui généralise le théorème de Has'minskii.

Chapitre 1

Existence d'une mesure invariante pour les équations stochastiques du modèle de compétition entre deux espèces

1 Introduction

Nous nous intéressons dans un premier temps, aux systèmes dynamiques continus et déterministes, c'est à dire régis par des systèmes d'équations différentielles ordinaires. Ensuite, nous étudions le cas d'un système d'équation stochastique de la dynamique des populations pour deux espèces en compétition avec une perturbation stochastique représentant les variations aléatoires des conditions environnementales (pour les motivations voir [4], [14]).

2 Le modèle déterministe

Soit le système d'équations différentielle suivant représentant la compétition entre deux espèces :

$$\begin{cases} dN_1 = \alpha_1 N_1 - \beta_{12} N_1 N_2 - \beta_{11} N_1^2, \\ dN_2 = \alpha_2 N_2 - \beta_{21} N_1 N_2 - \beta_{22} N_2^2. \end{cases} \quad (1.1)$$

Existence d'une mesure invariante pour les équations stochastiques du modèle de compétition entre deux espèces

où les β_{ij} , α_i , ($i, j = 1, 2$), sont des constantes strictement positives (positives) respectivement et N_i représente la densité de la population i ($i = 1, 2$)
Posons :

$$\begin{aligned} f_1(N_1, N_2) &= \alpha_1 N_1 - \beta_{12} N_1 N_2 - \beta_{11} N_1^2, \\ f_2(N_1, N_2) &= \alpha_2 N_2 - \beta_{21} N_1 N_2 - \beta_{22} N_2^2. \end{aligned}$$

Les points d'équilibres de ce système sont les points (N_1, N_2) tels que

$$f_1(N_1, N_2) = 0 \text{ et } f_2(N_1, N_2) = 0,$$

on trouve facilement les trois points d'équilibres $E_1 = (0, 0)$, $E_2 = (\frac{\alpha_1}{\beta_{11}}, 0)$ et $E_3 = (0, \frac{\alpha_2}{\beta_{22}})$.

Le quatrième point, s'il existe, sera le point qui satisfait les équations :

$$\alpha_1 - \beta_{12} N_2 - \beta_{11} N_1 = 0, \quad \alpha_2 - \beta_{21} N_1 - \beta_{22} N_2 = 0.$$

Donc si $\beta_{11}\beta_{22} \neq \beta_{12}\beta_{21}$, alors on obtient le point d'équilibre $E_4 = (N_1^*, N_2^*)$ avec

$$N_1^* = \frac{\alpha_1\beta_{22} - \alpha_2\beta_{12}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}}, \quad N_2^* = \frac{\alpha_2\beta_{11} - \alpha_1\beta_{21}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}}. \quad (1.2)$$

Cependant, seuls les cas $N_1^* > 0$, $N_2^* > 0$ seront considérés (les cas $N_1^* > 0$, $N_2^* = 0$ et $N_1^* = 0$, $N_2^* > 0$ coïncident avec les points d'équilibres E_2 et E_3).

REMARQUE 1.2.1. Seul le point E_4 correspond à la coexistence des deux espèces.

Il n'est pas difficile de voir que l'on a $N_1^* > 0$ et $N_2^* > 0$ si et seulement si

$$\frac{\alpha_1}{\beta_{11}} < \frac{\alpha_2}{\beta_{21}} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha_2}{\beta_{22}} < \frac{\alpha_1}{\beta_{12}}. \quad (1.3)$$

où

$$\frac{\alpha_1}{\beta_{11}} > \frac{\alpha_2}{\beta_{21}} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha_2}{\beta_{22}} > \frac{\alpha_1}{\beta_{12}} \quad (1.4)$$

En ignorant les points E_1, E_2, E_3 , qui sont des points d'équilibres pour lesquels au moins l'une des deux espèces est destinée à l'extinction, on va s'intéresser à l'étude de stabilité du point d'équilibre E_4 qui est basée sur le théorème de LYAPUNOV et

2 Le modèle déterministe

ses conséquences.

Pour ce faire, calculons les dérivées de $f_1(N_1, N_2)$ et de $f_2(N_1, N_2)$.

On a :

$$\frac{\partial f_1}{\partial N_1} = \alpha_1 - \beta_{12}N_2 - 2\beta_{11}N_1 \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial N_2} = -\beta_{12}N_1.$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial N_1} = -\beta_{21}N_1 \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial N_2} = \alpha_2 - \beta_{21}N_1 - 2\beta_{22}N_2.$$

Considérons la matrice

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial N_j} \right) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_{12}N_2 - 2\beta_{11}N_1 & -\beta_{12}N_1 \\ -\beta_{21}N_1 & \alpha_2 - \beta_{21}N_1 - 2\beta_{22}N_2 \end{pmatrix}$$

telle que

$$(\alpha_1 - \beta_{12}N_2 - \beta_{11}N_1) |_{N_1=N_1^*, N_2=N_2^*} = 0, \quad (\alpha_2 - \beta_{21}N_2 - \beta_{22}N_2) |_{N_1=N_1^*, N_2=N_2^*} = 0,$$

(voir (1.2)).

On a alors :

$$A|_{N_1=N_1^*, N_2=N_2^*} = \begin{pmatrix} -\beta_{11}N_1^* & -\beta_{12}N_1^* \\ -\beta_{21}N_2^* & -\beta_{22}N_2^* \end{pmatrix}$$

Calculons explicitement les valeurs propres λ_1 , et λ_2 de la matrice $A|_{N_1=N_1^*, N_2=N_2^*}$.

Comme $\Delta = (\beta_{11}N_1^* - \beta_{22}N_2^*)^2 + 4\beta_{12}\beta_{21}N_1^*N_2^* \geq 0$, alors

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(-\beta_{11}N_1^* - \beta_{22}N_2^* - \sqrt{(\beta_{11}N_1^* + \beta_{22}N_2^*)^2 - 4(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21})N_1^*N_2^*} \right), \quad (1.5)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(-\beta_{11}N_1^* - \beta_{22}N_2^* + \sqrt{(\beta_{11}N_1^* + \beta_{22}N_2^*)^2 - 4(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21})N_1^*N_2^*} \right). \quad (1.6)$$

Existence d'une mesure invariante pour les équations stochastiques du modèle de compétition entre deux espèces

Dans le cas (1.3), on obtient

$$\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_{11}\beta_{22}} < \frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_{12}\beta_{21}},$$

par conséquent,

$$\beta_{11}\beta_{22} > \beta_{12}\beta_{21}.$$

Ainsi de (1.5)-(1.6) on déduit que $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$.

En vertu du théorème de LYAPUNOV, on déduit que $E_4 = (N_1^*, N_2^*)$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Et dans le cas (1.4), on obtient

$$\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_{11}\beta_{22}} > \frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_{12}\beta_{21}}$$

Par conséquent,

$$\beta_{11}\beta_{22} < \beta_{12}\beta_{21}.$$

Dans ce cas, de (1.5)-(1.6) on déduit que $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ ce qui signifie que $E_4 = (N_1^*, N_2^*)$ n'est pas stable.

Finalement, on déduit que pour la stabilité du système de deux espèces en compétition, il est nécessaire que les conditions

$$\frac{\alpha_1}{\beta_{11}} < \frac{\alpha_2}{\beta_{21}} \text{ et } \frac{\alpha_2}{\beta_{22}} < \frac{\alpha_1}{\beta_{12}},$$

qui sont équivalentes à

$$\frac{\beta_{21}}{\beta_{11}} < \frac{\alpha_2}{\alpha_1} < \frac{\beta_{22}}{\beta_{12}},$$

soient vérifiées.

3 Le modèle stochastique : Fonction de Has'minskii et mesure invariante

Notons $N_i(t)$ la densité de la population i ($i = 1, 2$) à l'instant t et considérons le système d'équations

$$\begin{cases} dN_1(t) = (\alpha_1 - \beta_{11}N_1(t) - \beta_{12}N_2(t))N_1(t)dt + \varrho_1N_1(t)dW(t), \\ dN_2(t) = (\alpha_2 - \beta_{21}N_1(t) - \beta_{22}N_2(t))N_2(t)dt + \varrho_2N_2(t)dW(t). \end{cases} \quad (1.7)$$

avec α_i , β_{ij} et ϱ_i ($i, j = 1, 2$) sont des constantes positives, tandis que $W(t)$ est un mouvement brownien à valeurs réelles défini sur une base stochastique $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$.

Le système d'équations (1.7) devrait être considéré avec la condition initiale

$$N_i(0) = N_{0i} > 0 \text{ p.s. , } i = 1, 2. \quad (1.8)$$

Dans les équations (1.7) les termes non linéaires N_iN_j ($i, j = 1, 2$) sont multipliés par des constantes négatives $-\beta_{ij}$, on démontre de manière analogue à [17] (voir [3]) l'existence, l'unicité et la positivité de la solution du problème (1.7)-(1.8), c'est-à-dire on a la proposition suivante :

PROPOSITION 1.3.1. *Le problème (1.7)-(1.8) admet une et une seule (à moins d'une modification) solution $(N_1(t), N_2(t))$ dans l'intervalle $0 \leq t < \infty$ et on a $N_i(t) > 0$ p.s ($i = 1, 2$) pour tout $t \geq 0$.*

Pour examiner le comportement asymptotique de la solution du problème (1.7)-(1.8), il convient de transformer les équations dans une forme logarithmique. En effet, posons

$$\xi(t) = \log N_1(t), \quad \eta(t) = \log N_2(t), \quad (1.9)$$

$$c_1 = \alpha_1 - \frac{\varrho_1^2}{2}, \quad c_2 = \alpha_2 - \frac{\varrho_2^2}{2}, \quad (1.10)$$

Appliquons la formule d'ITô à $\xi(t)$ et $\eta(t)$:

$$\begin{aligned}
 d\xi(t) &= \frac{1}{N_1(t)} dN_1(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{N_1^2(t)} d\langle N_1, N_1 \rangle_t \\
 &= \frac{1}{N_1(t)} [(\alpha_1 - \beta_{11}N_1(t) - \beta_{12}N_2(t))N_1(t)dt + \varrho_1 N_1(t)dW(t)] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{N_1^2(t)} \varrho_1^2 N_1^2(t)dt \\
 &= \left[\alpha_1 - \frac{\varrho_1^2}{2} - \beta_{11}N_1(t) - \beta_{12}N_2(t) \right] dt + \varrho_1 dW(t) \\
 &= (c_1 - \beta_{11}e^{\xi(t)} - \beta_{12}e^{\eta(t)})dt + \varrho_1 dW(t).
 \end{aligned}$$

De même pour $\eta(t)$, on trouve $d\eta(t) = (c_2 - \beta_{21}e^{\xi(t)} - \beta_{22}e^{\eta(t)})dt + \varrho_2 dW(t)$.

Donc le système (1.7) devient, grâce à la formule d'ITô, sous la forme

$$\begin{cases} d\xi(t) = (c_1 - \beta_{11}e^{\xi(t)} - \beta_{12}e^{\eta(t)})dt + \varrho_1 dW(t) \\ d\eta(t) = (c_2 - \beta_{21}e^{\xi(t)} - \beta_{22}e^{\eta(t)})dt + \varrho_2 dW(t) \end{cases} \quad (1.11)$$

qui sera considéré avec les conditions initiales

$$\xi(0) = \log N_{01}, \quad \eta(0) = \log N_{02}. \quad (1.12)$$

Nous allons démontrer que sous des conditions naturelles, qui sont le prolongement des conditions de coexistence stable dans le cas déterministe, il existe une mesure invariante pour le système (1.7).

Rappelons, dans un premier temps, le théorème de Has'minskii pour la stabilité de la solution d'une équation stochastique à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (Théorème 5.1 Chap. III de [11]).

Considérons l'équation stochastique dans $\mathbb{R}^n$

$$dX_t = f(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad (1.13)$$

où $f(x)$ et $\sigma(x)$ sont des fonctions indépendantes de t à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^n$ et dans $\mathbb{R}^{n \times m}$, tandis que W_t est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

3 Le modèle stochastique : Fonction de Has'minskii et mesure invariante

THÉORÈME 1.3.2. (Théorème de Has'minskii) Supposons qu'il existe un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que l'équation (1.13) avec la condition initiale $X_0 = x_0$ admet une solution X_t définie sur tout l'intervalle $[0, \infty[$, et que, pour toute constante $R > 0$, il existe un compact K_R telle que

$$|f(x) - f(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K_R |x - y|, \quad \text{si } |x| \leq R, |y| \leq R. \quad (1.14)$$

Supposons qu'il existe une fonction $V \in C^2(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$V(x) \geq 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.15)$$

$$\sup_{|x| > R} A^*V(x) \rightarrow -\infty, \quad \text{pour } R \rightarrow +\infty, \quad (1.16)$$

avec

$$A^* = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^m \sigma_{ik} \sigma_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (1.17)$$

Alors il existe une mesure invariante pour l'équation (1.13).

DÉFINITION 1.3.3. On appelle fonction de Has'minskii une fonction $V \in C^2(\mathbb{R}^n)$ qui satisfait les conditions (1.15) et (1.16).

La notion de la mesure invariante pour une équation différentielle stochastique, peut être introduite d'une façon simple comme suit. Etant donné une mesure de probabilité $\bar{\mu}$ définie sur $\mathbb{R}^n$ associée à une variable aléatoire $\bar{X}_0$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, alors on dit $\bar{\mu}$ est une mesure invariante pour l'équation (1.13) si la solution X_t de cette équation avec la condition initiale $X_0 = \bar{X}_0$ admet aussi $\bar{\mu}$ comme mesure de probabilité.

L'existence d'une fonction de Has'minskii implique l'existence d'une mesure invariante pour une classe assez large d'équation stochastique, c'est-à-dire les équations stochastiques pour lesquelles on considère une perturbation stochastique $\sigma(X_t)dG_t$ ou G_t est un processus stochastique à accroissements indépendants. Nous allons nous limiter ici où cas $G_t = W_t$.

Pour trouver une fonction de Has'minskii le lemme suivant est très utile.

LEMME 1.3.4. Soit U une fonction non négative de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$. S'il existe deux constantes positives ε, M et un compact K de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\sup_{x \notin K} A^*U(x) \leq -\varepsilon, \quad (1.18)$$

$$\inf_{|x| \geq r} U(x) \rightarrow \infty \quad \text{pour} \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.19)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} \leq M < \infty, \quad (1.20)$$

alors $V = \frac{1}{2}U^2$ est une fonction de Has'minskii pour l'équation (1.13) (dans le sens précis plus haut).

Démonstration. En appliquant l'opérateur A^* à la fonction $V = \frac{1}{2}U^2$, on aura

$$A^*V = A^*\left(\frac{1}{2}U^2\right) = UA^*U + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j}.$$

En effet,

d'après (1.17) on a :

$$A^*V = A^*\left(\frac{1}{2}U^2\right) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2(\frac{1}{2}U^2)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial(\frac{1}{2}U^2)}{\partial x_i}.$$

Avec $\frac{\partial(\frac{1}{2}U^2)}{\partial x_i} = U \frac{\partial U}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2(\frac{1}{2}U^2)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(U \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} + U \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}.$

Donc,

$$\begin{aligned} A^*V &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} + U \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} + UA^*U. \end{aligned}$$

Des relations (1.18) et (1.20) on déduit que pour $r > \max_{x \in k} |x|$ on a

$$\sup_{|x| \geq r} A^*V(x) \leq -\varepsilon \left(\inf_{|x| \geq r} U(x) \right) + M.$$

Par conséquent en vertu de la condition (1.19), la fonction V vérifiée la condition (1.16). $\square$

3 Le modèle stochastique : Fonction de Has'minskii et mesure invariante

Démontrons l'existence d'une fonction de Has'minskii pour l'équation (1.11) à l'aide du lemme 1.3.4.

PROPOSITION 1.3.5. *Si les inégalités suivantes sont satisfaites*

$$c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad \det B > 0, \quad \frac{\beta_{21}}{\beta_{11}} < \frac{c_2}{c_1} < \frac{\beta_{22}}{\beta_{12}}, \quad (\det B = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21})$$

alors il existe une fonction de Has'minskii pour le système d'équations stochastique (1.11).

Démonstration. Rappelons en premier que pour l'équation (1.11), la relation (1.17) a l'expression

$$\begin{aligned} A^*v &= \frac{1}{2}\varrho_1^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varrho_1\varrho_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\varrho_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \\ &+ (c_1 - \beta_{11}e^x - \beta_{12}e^y) \frac{\partial v}{\partial x} + (c_2 - \beta_{21}e^x - \beta_{22}e^y) \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

En effet, posons $x = \varepsilon(t)$ et $y = \eta(t)$, dans (1.7)

On obtient alors :

$$\begin{cases} dx = (c_1 - \beta_{11}e^x - \beta_{12}e^y)dt + \varrho_1 dW(t) \\ dy = (c_2 - \beta_{21}e^x - \beta_{22}e^y)dt + \varrho_2 dW(t) \end{cases}$$

On sait déjà que $a_{ij} = \sum_{k=1}^m \sigma_{ik}(x)\sigma_{jk}(x)$,

si on pose $a_{ij}(x) = \varrho_i\varrho_j$, $b_i(x) = c_i - b_{i1}e^x - b_{i2}e^y$, ($i = 1, 2$) dans (1.17), alors,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j=1}^2 \varrho_i\varrho_j \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = \varrho_1^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + 2\varrho_1\varrho_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \varrho_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}$$

En remplaçant ce résultat dans (1.17), avec $x_1 = x, x_2 = y$, on aboutit exactement à (1.21).

Grâce au lemme 1.3.4, pour démontrer la proposition 1.3.5, il suffit de construire une fonction $U \in C^2(\mathbb{R}^2)$ et un compact K de $\mathbb{R}^2$ vérifions les conditions du lemme

1.3.4, dans lequel l'opérateur A^* s'écrit sous la forme (1.21).

En rappelant qu'on a par hypothèse $0 < \frac{\beta_{21}}{\beta_{11}} < \frac{c_2}{c_1} < \frac{\beta_{22}}{\beta_{12}}$, considérons quatre constantes positives $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ telles que

$$\frac{\beta_{21}}{\beta_{11}} < \frac{\kappa}{\nu} < \frac{c_2}{c_1} < \frac{\mu}{\lambda} < \frac{\beta_{22}}{\beta_{12}}. \quad (1.22)$$

Considérons en outre quatre nombres négatifs a_1, a_2, b_1, b_2 tels que

$$a_1 < a_2 < 0, \quad b_1 < b_2 < 0,$$

et que

$$\frac{1}{2} \varrho_1^2 \frac{\kappa + \mu}{a_2 - a_1}, \quad \frac{1}{2} \varrho_2^2 \frac{\lambda + \nu}{b_2 - b_1}, \quad (\mu\beta_{11} + \nu\beta_{21})e^{a_2}, \quad (\mu\beta_{12} + \nu\beta_{22})e^{b_2}$$

soient suffisamment petits, avec les droites $\{x = a_i\}, \{y = b_i\}$ ($i = 1, 2$) divisons le plan de $\mathbb{R}^2$ en neuf parties

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_2 \leq x, b_2 \leq y\}, \\ D_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < a_1, b_2 \leq y\}, \\ D_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < a_1, y < b_1\}, \\ D_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_2 \leq x, y < b_1\}, \\ E_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 \leq x < a_2, b_2 \leq y\}, \\ E_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < a_1, b_1 \leq y < b_2\}, \\ E_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 \leq x < a_2, y < b_1\}, \\ E_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_2 \leq x, b_1 \leq y < b_2\}, \\ G &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 \leq x < a_2, b_1 \leq y < b_2\}. \end{aligned}$$

Posons

$$U(x, y) = \begin{cases} \kappa x + \lambda y + C_1 & \text{pour } (x, y) \in D_1, \\ -\mu x + \lambda y + C_2 & \text{pour } (x, y) \in D_2, \\ -\mu x - \nu y + C_3 & \text{pour } (x, y) \in D_3, \\ \kappa x - \nu y + C_4 & \text{pour } (x, y) \in D_4, \\ \frac{\kappa + \mu}{2(a_2 - a_1)} \left(x - \frac{\kappa a_1 + \mu a_2}{\kappa + \mu}\right)^2 + \lambda y + C'_1 & \text{pour } (x, y) \in E_1, \\ \frac{\lambda + \nu}{2(b_2 - b_1)} \left(y - \frac{\lambda b_1 + \nu b_2}{\lambda + \nu}\right)^2 - \mu x + C'_2 & \text{pour } (x, y) \in E_2, \\ \frac{\kappa + \mu}{2(a_2 - a_1)} \left(x - \frac{\kappa a_1 + \mu a_2}{\kappa + \mu}\right)^2 - \nu y + C'_3 & \text{pour } (x, y) \in E_3, \\ \frac{\lambda + \nu}{2(b_2 - b_1)} \left(y - \frac{\lambda b_1 + \nu b_2}{\lambda + \nu}\right)^2 - \kappa x + C'_4 & \text{pour } (x, y) \in E_4. \end{cases} \quad (1.23)$$

3 Le modèle stochastique : Fonction de Has'minskii et mesure invariante

Il n'est pas difficile de remarquer que les constantes C_i et C'_i ($i = 1, \dots, 4$) peuvent être choisies de sorte que la fonction $U(x, y)$ soit continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus G$. En outre calculant les dérivées partielles de $U(x, y)$ aux points de $\{x = a_i\}$ et de $\{y = b_i\}$ ($i = 1, 2$), on constate que les dérivées de la fonction $U(x, y)$ ainsi construites sont continues.

Il est clair que $U(x, y)$ peut être prolongé sur G de sorte qu'elle soit de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ et que le choix des C_i et C'_i ($i = 1, \dots, 4$) nous permet d'avoir $U(x, y)$ non négative sur $\mathbb{R}^2$.

Comme il résulte des calculs explicites (en rappelant (1.21) et (1.23)), A^*U a, à l'intérieur de chacune des régions D_i, E_i ($i = 1, 2$) l'expression

$$A^*U(x, y) = \kappa(c_1 - \beta_{11}e^x - \beta_{12}e^y) + \lambda(c_2 - \beta_{21}e^x - \beta_{22}e^y) \quad \text{dans } D_1, \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} A^*U(x, y) &= -\mu(c_1 - \beta_{11}e^x - \beta_{12}e^y) + \lambda(c_2 - \beta_{21}e^x - \beta_{22}e^y) = \\ &= (-\mu c_1 + \lambda c_2) + (\mu\beta_{11} - \lambda\beta_{21})e^x + (\mu\beta_{12} - \lambda\beta_{22})e^y \end{aligned} \quad \text{dans } D_2, \quad (1.25)$$

$$A^*U(x, y) = -\mu(c_1 - \beta_{11}e^x - \beta_{12}e^y) - \nu(c_2 - \beta_{21}e^x - \beta_{22}e^y) \quad \text{dans } D_3, \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} A^*U(x, y) &= \kappa(c_1 - \beta_{11}e^x - \beta_{12}e^y) - \nu(c_2 - \beta_{21}e^x - \beta_{22}e^y) = \\ &= (\kappa c_1 - \nu c_2) + (-\kappa\beta_{11} + \nu\beta_{21})e^x + (-\kappa\beta_{12} + \nu\beta_{22})e^y \end{aligned} \quad \text{dans } D_4, \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} A^*U(x, y) &= \frac{1}{2}\varrho_1^2 \frac{\kappa + \mu}{a_2 - a_1} + \lambda(c_2 - \beta_{21}e^x - \beta_{22}e^y) + \\ &+ (c_1 - \beta_{11}e^x - \beta_{12}e^y) \frac{\kappa + \mu}{a_2 - a_1} \left(x - \frac{\kappa a_1 + \mu a_2}{\kappa + \mu}\right) \end{aligned} \quad \text{dans } E_1, \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} A^*U(x, y) &= \frac{1}{2}\varrho_2^2 \frac{\lambda + \nu}{b_2 - b_1} - \mu(c_1 - \beta_{11}e^x - \beta_{12}e^y) + \\ &+ (c_2 - \beta_{21}e^x - \beta_{22}e^y) \frac{\lambda + \nu}{b_2 - b_1} \left(y - \frac{\lambda b_1 + \nu b_2}{\lambda + \nu}\right) \end{aligned} \quad \text{dans } E_2, \quad (1.29)$$

$$A^*U(x, y) = \frac{1}{2}\varrho_1^2 \frac{\kappa + \mu}{a_2 - a_1} - \nu(c_2 - \beta_{21}e^x - \beta_{22}e^y) + \quad (1.30)$$

$$+ (c_1 - \beta_{11}e^x - \beta_{12}e^y) \frac{\kappa + \mu}{a_2 - a_1} \left(x - \frac{\kappa a_1 + \mu a_2}{\kappa + \mu}\right) \quad \text{dans } E_3,$$

$$A^*U(x, y) = \frac{1}{2}\varrho_2^2 \frac{\lambda + \nu}{b_2 - b_1} + \kappa(c_1 - \beta_{11}e^x - \beta_{12}e^y) + \quad (1.31)$$

$$+ (c_2 - \beta_{21}e^x - \beta_{22}e^y) \frac{\lambda + \nu}{b_2 - b_1} \left(y - \frac{\lambda b_1 + \nu b_2}{\lambda + \nu}\right) \quad \text{dans } E_4.$$

Posons

$$K_\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq \gamma, |y| \leq \gamma\}.$$

Des expressions (1.24)-(1.27) et de la condition (1.22), on voit facilement qu'il existe un nombre positif ε tel que si on choisit γ suffisamment grand, alors on aura

$$A^*U(x, y) \leq -\varepsilon.$$

à l'intérieur de $D_i \setminus K_\gamma$ ($i = 1, \dots, 4$).

En effet, prenons par exemple le cas d'expression (1.25), c'est à dire

$$A^*U(x, y) = (-\mu c_1 + \lambda c_2) + (\mu \beta_{11} - \lambda \beta_{21})e^x + \beta_{12} - \lambda \beta_{22}e^y \quad \text{dans } D_2.$$

L'intérieur de $D_2 \setminus K_\gamma$ veut dire que : le point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifié ces inégalités

$$x < a_1, b_2 \leq y \quad \text{et} \quad |x| > \gamma, |y| > \gamma.$$

Or, comme $a_1 < 0$, l'inégalité $|x| > \gamma$ sera remplacée par $x < -\gamma$, ce qui revient à dire que

$$D_2 \setminus K_\gamma = \{x < -\gamma, |y| > \gamma / x < a_1, b_2 \leq y\}.$$

De plus, on a d'après (1.22)

$$-\mu c_1 + \lambda c_2 < 0, \quad \mu \beta_{11} - \lambda \beta_{21} > 0, \quad \mu \beta_{12} - \lambda \beta_{22} < 0.$$

Donc on voit clairement qu'il existe un nombre positif ε tel que, si on choisit γ suffisamment grand à l'intérieur de $D_2 \setminus K_\gamma$, on obtient l'inégalité

$$A^*U(x, y) \leq -\varepsilon.$$

3 Le modèle stochastique : Fonction de Has'minskii et mesure invariante

Le même raisonnement sera appliqué pour les expressions à l'intérieur de $E_i \setminus K_\gamma$ ($i=1, \dots, 4$).

Pour l'expression (1.28) on remarque, grâce à la condition (1.22) et à l'inégalité $x \geq a_1$, pour les coefficients de e^y on a

$$-\beta_{12} \frac{\kappa+\mu}{a_2-a_1} \left(x - \frac{\kappa a_1 + \mu a_2}{\kappa+\mu}\right) - \beta_{22} \lambda \leq -\beta_{12} \frac{\kappa+\mu}{a_2-a_1} \left(a_1 - \frac{\kappa a_1 + \mu a_2}{\kappa+\mu}\right) - \beta_{22} \lambda = \beta_{12} \mu - \beta_{22} \lambda < 0.$$

Et pour les coefficients de e^x on a

$$-\beta_{11} \frac{\kappa+\mu}{a_2-a_1} \left(x - \frac{\kappa a_1 + \mu a_2}{\kappa+\mu}\right) - \beta_{21} \lambda \leq -\beta_{11} \frac{\kappa+\mu}{a_2-a_1} \left(a_1 - \frac{\kappa a_1 + \mu a_2}{\kappa+\mu}\right) - \beta_{21} \lambda = \beta_{11} \mu - \beta_{21} \lambda > 0.$$

Par la suite, on obtient

$$\begin{aligned} A^*U(x, y) &\leq \frac{1}{2} \varrho_1^2 \frac{\kappa + \mu}{a_2 - a_1} + \lambda c_2 + c_1 \frac{\kappa + \mu}{a_2 - a_1} \left(x - \frac{\kappa a_1 + \mu a_2}{\kappa + \mu}\right) \\ &\quad + (\beta_{12} \mu - \beta_{22} \lambda) e^y + (\beta_{11} \mu - \beta_{21} \lambda) e^x. \end{aligned}$$

De manière analogue pour les coefficients de e^x de l'expression (1.31), on a grâce à (1.22) et à l'inégalité $y \geq b_1$

$$-\beta_{21} \frac{\lambda+\nu}{b_2-b_1} \left(y - \frac{\lambda b_1 + \nu b_2}{\lambda+\nu}\right) - \beta_{11} \kappa \leq -\beta_{21} \frac{\lambda+\nu}{b_2-b_1} \left(b_1 - \frac{\lambda b_1 + \nu b_2}{\lambda+\nu}\right) - \beta_{11} \kappa = \beta_{21} \nu - \beta_{11} \kappa < 0.$$

Et pour les coefficients de e^y on trouve

$$-b_{22} \frac{\lambda+\nu}{b_2-b_1} \left(y - \frac{\lambda b_1 + \nu b_2}{\lambda+\nu}\right) - \beta_{12} \kappa \leq -b_{22} \frac{\lambda+\nu}{b_2-b_1} \left(b_1 - \frac{\lambda b_1 + \nu b_2}{\lambda+\nu}\right) - \beta_{12} \kappa = \beta_{22} \nu - \beta_{12} \kappa > 0.$$

Par la suite, on obtient

$$\begin{aligned} A^*U(x, y) &\leq \frac{1}{2} \varrho_2^2 \frac{\lambda + \nu}{b_2 - b_1} + \kappa c_1 + c_2 \frac{\lambda + \nu}{b_2 - b_1} \left(y - \frac{\lambda b_1 + \nu b_2}{\lambda + \nu}\right) \\ &\quad + (\beta_{21} \nu - \beta_{11} \kappa) e^x + (\beta_{22} \nu - \beta_{12} \kappa) e^y. \end{aligned}$$

Existence d'une mesure invariante pour les équations stochastiques du modèle de compétition entre deux espèces

Donc si γ est suffisamment grand à l'intérieur de $E_1 \setminus K_\gamma$ et de $E_4 \setminus K_\gamma$ on a

$$A^*U(x, y) \leq -\varepsilon$$

avec un certain $\varepsilon > 0$.

D'autre part, pour l'expression (1.29) on voit que, grâce à la condition (1.22) et à les restrictions $b_1 \leq y < b_2$, $x < a_1$ on a :

$$-c_1\mu + c_2\frac{\lambda+\nu}{b_2-b_1}\left(y - \frac{\lambda b_1 + \nu b_2}{\lambda+\nu}\right) \leq -c_1\mu + c_2\frac{\lambda+\nu}{b_2-b_1}\left(b_2 - \frac{\lambda b_1 + \nu b_2}{\lambda+\nu}\right) = -c_1\mu + c_2\lambda < 0,$$

$$\begin{aligned} \left[\mu\beta_{12} - \beta_{22}\frac{\lambda+\nu}{b_2-b_1}\left(y - \frac{\lambda b_1 + \nu b_2}{\lambda+\nu}\right)\right]e^y &\leq \left[\mu b_{12} - b_{22}\frac{\lambda+\nu}{b_2-b_1}\left(b_1 - \frac{\lambda b_1 + \nu b_2}{\lambda+\nu}\right)\right]e^y \\ &\leq (\mu\beta_{12} + \nu\beta_{22})e^{b_2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\mu\beta_{11} - \beta_{21}\frac{\lambda+\nu}{b_2-b_1}\left(y - \frac{\lambda b_1 + \nu b_2}{\lambda+\nu}\right)\right]e^x &\leq \left[\mu\beta_{11} - \beta_{21}\frac{\lambda+\nu}{b_2-b_1}\left(b_1 - \frac{\lambda b_1 + \nu b_2}{\lambda+\nu}\right)\right]e^x \\ &\leq (\mu\beta_{11} + \nu\beta_{21})e^{a_1}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$A^*U(x, y) \leq -c_1\mu + c_2\lambda + (\mu\beta_{12} + \nu\beta_{22})e^{b_2} + (\mu\beta_{11} + \nu\beta_{21})e^{a_1} + \frac{1}{2}\sigma_2^2\frac{\lambda+\nu}{b_2-b_1}$$

De manière analogue pour l'expression (1.30), grâce à la condition (1.22) et à les restrictions $a_1 \leq x < a_2$, $y < b_1$ on a :

$$-c_2\nu + c_1\frac{\kappa+\mu}{a_2-a_1}\left(x - \frac{\kappa a_1 + \mu a_2}{\kappa+\mu}\right) \leq -c_2\nu + c_1\frac{\kappa+\mu}{a_2-a_1}\left(a_2 - \frac{\kappa a_1 + \mu a_2}{\kappa+\mu}\right) = -c_2\nu + c_1\kappa < 0,$$

$$\begin{aligned} \left[\nu\beta_{21} - \beta_{11}\frac{\kappa+\mu}{a_2-a_1}\left(x - \frac{\kappa a_1 + \mu a_2}{\kappa+\mu}\right)\right]e^x &\leq \left[\nu\beta_{21} - \beta_{11}\frac{\kappa+\mu}{a_2-a_1}\left(a_1 - \frac{\kappa a_1 + \mu a_2}{\kappa+\mu}\right)\right]e^x \\ &\leq (\mu\beta_{11} + \nu\beta_{21})e^{a_2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\nu\beta_{22} - \beta_{12}\frac{\kappa+\mu}{a_2-a_1}\left(x - \frac{\kappa a_1 + \mu a_2}{\kappa+\mu}\right)\right]e^y &\leq \left[\nu\beta_{22} - \beta_{12}\frac{\kappa+\mu}{a_2-a_1}\left(a_1 - \frac{\kappa a_1 + \mu a_2}{\kappa+\mu}\right)\right]e^y \\ &\leq (\mu\beta_{12} + \nu\beta_{22})e^{b_1}. \end{aligned}$$

3 Le modèle stochastique : Fonction de Has'minskii et mesure invariante

Par conséquent,

$$A^*U(x, y) \leq -c_2\nu + c_1\kappa + (\mu\beta_{11} + \nu\beta_{21})e^{a_2} + (\mu\beta_{12} + \nu\beta_{22})e^{b_1} + \frac{1}{2}\varrho_1^2 \frac{\kappa + \mu}{a_2 - a_1}$$

Donc ayant choisit a_1, a_2, b_1, b_2 de sorte que

$$\frac{1}{2}\varrho_1^2 \frac{\kappa + \mu}{a_2 - a_1}, \quad \frac{1}{2}\varrho_2^2 \frac{\lambda + \nu}{b_2 - b_1}, \quad (\mu\beta_{11} + \nu\beta_{21})e^{a_2}, \quad (\mu\beta_{12} + \nu\beta_{22})e^{b_2}$$

sont suffisamment petits, l'inégalité suivante est vérifiée

$$A^*U(x, y) \leq -\varepsilon$$

avec un certain $\varepsilon > 0$ à l'intérieur de $E_2 \setminus K_\gamma$ et de $E_3 \setminus K_\gamma$.

Compte tenu des hypothèses ci-dessus, on constate que, pour un γ suffisamment grand, à l'extérieur du compact K_γ et à l'intérieur des D_i et E_i ($i=1, \dots, 4$) l'inégalité

$$A^*U(x, y) \leq -\varepsilon$$

avec un certain $\varepsilon > 0$ est satisfaite .

Pour terminer, en remplaçant $U(x, y)$ par $(U * \vartheta)$ avec ϑ une fonction régularisante ayant un support contenu dans le cercle de rayon 1, on obtient une fonction qui vérifie les conditions du lemme 1.3.4, de là découle la proposition. $\square$

PROPOSITION 1.3.6. *si les conditions suivantes sont vérifiées*

$$c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad \det B > 0, \quad \frac{\beta_{21}}{\beta_{11}} < \frac{c_2}{c_1} < \frac{\beta_{22}}{\beta_{12}},$$

alors il existe une mesure invariante pour le système d'équation (1.11).

Démonstration. Découle immédiatement de la proposition 1.3.5 et du théorème de Has'minskii ([11], Chap.03, Th 5.1 (p.90)). $\square$

Chapitre 2

Existence d'une mesure invariante pour l'équation stochastique d'un modèle de compétition limitée entre n espèces avec diffusion spatiale

1 Introduction

Dans ce chapitre nous considérons l'évolution de population d'une espèce ou de plusieurs espèces. Evolution soumise à une perturbation stochastique due aux variations aléatoires des conditions environnementales, avec la diffusion de population de chaque espèce dans un territoire et avec des compétitions limitées entre les espèces différentes et nous démontrons que l'équation stochastique pour ce modèle admet, sous une condition convenable, une mesure invariante, pour laquelle aucune espèce n'est destinée à l'extinction. Comme le cas d'une espèce peut être considéré comme cas particulier d'un système de n espèces, dans la suite on ne considérera que le cas de n espèces.

2 Théorème d'existence d'une mesure invariante dans un espace de Hilbert.

Rappelons avant tout la généralisation du théorème de Has'minskii dans les espaces de Hilbert, c'est-à-dire, le théorème d'existence d'une mesure invariante pour les semi- groupe de transition de Markov.

Soit P_t un semi-groupe de Markov qui possède la propriété de Feller (pour les définitions voir [7]). Supposons que, pour un certain élément x_0 de l'espace de Hilbert H , la famille de mesures $(\mu_T)_{T \geq 0}$ définie par

$$\mu_T(B) = \frac{1}{T} \int_0^T P_t(x_0, B) dt, \quad B \in \mathbb{B}(H), \quad T > 0$$

vérifie les hypothèses du théorème de Prokhorov. Alors il existe une mesure invariante pour P_t .

Il s'agit du théorème de Krylov-Bogoliubov qui s'appui pour son application sur deux points importants, à savoir le critère de Prokhorov dans un espace de Hilbert, et l'injection compacte des espaces de Sobolev.

Rappelons le théorème (critère) de Prokhorov :

THÉORÈME 2.2.1. (*Critère de Prokhorov dans un espace de Banach*) Soit $\{\mu_\iota\}_{\iota \in \mathcal{I}}$ une famille de mesures de probabilités dans un espace de Banach séparable B . Si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact K_ε de B tel que

$$\mu_\iota(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon, \quad \forall \iota \in \mathcal{I}, \quad (2.1)$$

alors il existe une suite $\{\mu_{\iota_k}\}_{k=1}^\infty$ d'éléments de la famille de mesures $\{\mu_\iota\}_{\iota \in \mathcal{I}}$ et une mesure de probabilité $\bar{\mu}$ telles que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_B \varphi(x) \mu_{\iota_k}(dx) = \int_B \varphi(x) \bar{\mu}(dx) \quad \forall \varphi \in C(B) \cap L^\infty(B). \quad (2.2)$$

D'autre part, l'injection compacte de l'espace de Sobolev $W_p^1(D)$ con $D \subset \mathbb{R}^n$ dans l'espace de Lebesgue $L^q(D)$ est compacte, si $p \geq n$ ou si $q < \frac{np}{n-p}$ ($p < n$). Pour les détails sur l'injection compacte, voir [1].

3 Résultat principal

Soit D un ensemble ouvert et borné de $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3 , muni de la frontière régulière ∂D . On désigne par $N_i(t, x)$ la densité de la population de l'espèce i , $i = 1, \dots, n$, à l'instant t et au point $x \in D$. On considère dans D le système d'équations

$$dN_i(t, x) = \left[\left(\alpha_i - \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(N_j(t, x)) \right) N_i(t, x) + \varepsilon_i \Delta N_i(t, x) \right] dt + \varrho_i N_i(t, x) dW(t),$$

$$i = 1, \dots, n,$$
(2.3)

avec la condition aux limites

$$\nabla N_i \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \partial D, \quad i = 1, \dots, n,$$
(2.4)

où le laplacien Δ et le nabla ∇ sont à considérer par rapport aux variables spatiales $x_1, \dots, x_d$, les coefficients α_i , ε_i et ϱ_i ($i = 1, \dots, n$) sont des constantes positives, $\beta_{ij}(\cdot)$ ($i, j = 1, \dots, n$) sont des fonctions lipschitziennes non négatives, tandis que $W(t)$ est le mouvement brownien à valeurs dans $L^2(D)$ défini sur une base stochastique $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Plus précisément, nous considérons $W(t)$ ayant la forme

$$W(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m e_m W^{(m)}(t),$$
(2.5)

où $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ est une base orthonormale de $L^2(D)$ avec $e_m \in L^\infty(D)$ pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $W^{(m)}(t)$, $m = 1, 2, \dots$, sont des mouvements browniens indépendants à valeurs réelles, tandis que $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ est une suite de nombres positifs telle que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 = 1, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 \|e_m\|_{L^\infty(D)}^2 = K_0 < \infty.$$
(2.6)

Pour les coefficients α_i , ε_i , ϱ_i et les fonctions $\beta_{ij}(\cdot)$, on suppose

$$\beta_{ii}(s) = \bar{\beta}_{ii} s \quad \forall s \geq 0, \quad \bar{\beta}_{ii} > 0 \quad i = 1, \dots, n,$$
(2.7)

$$0 \leq \beta_{ij}(s) \leq \gamma_{ij} < \infty \quad \forall s \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j,$$
(2.8)

$$K_0 \frac{\varrho_i^2}{2} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \gamma_{ij} < \alpha_i \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

La condition (2.8) signifie que les compétitions entre les espèces différentes ont un effet limité.

Il est évident que dans le cas $n = 1$, la condition (2.8) sera superflue et la condition (2.9) se réduira à

$$K_0 \frac{\varrho_i^2}{2} < \alpha_i.$$

Pour le problème (2.3)-(2.4) considéré ci-dessus, on peut démontrer l'existence et l'unicité ainsi que la positivité ($N_i(t, \cdot) > 0$ p.s., $i = 1, \dots, n$) de la solution. Plus précisément on a la

PROPOSITION 2.3.1. *Le problème (2.3)-(2.4) avec les conditions (2.5)-(2.8) et avec la condition initiale $N(0, \cdot) \in L^2(D)$, $N_i(0, \cdot) > 0$ p.p. dans D , admet une solution $N(t, x) = (N_1(t, x), \dots, N_n(t, x))$ et une seule dans l'intervalle $0 \leq t < \infty$ et on a $N_i(t, \cdot) > 0$ p.p. dans D p.s. ($i = 1, \dots, n$) pour tout $t \geq 0$.*

Démonstration. on la démontre de la même manière que le théorème 1.1 de [17]. $\square$

REMARQUE 2.3.2. La condition (2.9), qui n'est pas utilisée pour la proposition 2.3.1, servira à démontrer l'existence d'une mesure invariante.

Pour exprimer de manière convenable l'existence d'une mesure invariante pour l'équation (2.3), introduisons les notations

$$N(t, x) = (N_1(t, x), \dots, N_n(t, x)),$$

$$L(N(t, x)) = (\log N_1(t, x), \dots, \log N_n(t, x)),$$

$$H = L^2(D; \mathbb{R}^n) \times L^2(D; \mathbb{R}^n).$$

On a alors le

THÉORÈME 2.3.3. *Si le mouvement brownien $W(t)$, les coefficients α_i et ϱ_i ($i = 1, \dots, n$) et les fonctions $\beta_{ij}(\cdot)$ ($i, j = 1, \dots, n$) satisfont aux conditions (2.5)-(2.9), alors il existe une mesure invariante $\bar{\mu}$ dans H pour l'équation (2.3)*

4 Estimations à priori de la solution

avec la condition aux limites (2.4), dont la solution est à considérer comme $(N, L(N)) \in H$.

En outre on a

$$\bar{\mu}(H^1(D; \mathbb{R}^n) \times H^1(D; \mathbb{R}^n)) = 1.$$

Comme dans la démonstration du théorème il n'est pas difficile de distinguer les fonctions à valeurs réelles et celles à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, dans la suite on va écrire simplement $L^2(D)$ et $H^1(D)$ au lieu de $L^2(D; \mathbb{R}^n)$ et $H^1(D; \mathbb{R}^n)$.

4 Estimations à priori de la solution

4.1 Première estimation de la solution.

De manière analogue aux lemmes 3.1 et 3.2 de [17], on démontre le

LEMME 2.4.1. *Il existe une constante M telle que, si N est la solution obtenue dans la proposition 2.3.1, alors on ait*

$$\mathbf{E} \frac{1}{t} \int_0^t \|N\|_{H^1(D)}^2 dt' \leq M \quad \forall t \geq 1. \quad (2.10)$$

Démonstration. On pose

$$\varphi(N(t, \cdot)) = \|N(t, \cdot)\|_{L^2(D)}^2 = \sum_{i=1}^n \int_D |N_i(t, x)|^2 dx. \quad (2.11)$$

La formule d'ITÔ appliquée à $\varphi(N(t, \cdot))$ nous donne :

$$\begin{aligned} \varphi(N(t, \cdot)) &= \varphi(N(0, \cdot)) \\ &+ 2 \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_D \left(\alpha_i |N_i(t', x)|^2 - \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(N_j(t', x)) |N_i(t', x)|^2 \right) dx dt' \\ &- 2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \int_0^t \int_D |\nabla N_i(t', x)|^2 dx dt' + 2 \sum_{i=1}^n \varrho_i \int_0^t \langle N_i^2, dW(t') \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^n \varrho_i^2 \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 \int_0^t \int_D N_i^2 e_m^2 dx dt' \end{aligned} \quad (2.12)$$

Existence d'une mesure invariante pour l'équation stochastique d'un modèle de compétition limitée entre n espèces avec diffusion spatiale

(pour la formule d'ITô pour un processus stochastique à valeurs hilbertiennes, voir par exemple [15], [7]).

En effet :

Avant d'appliquer la formule d'ITô on doit calculer les dérivées premières et secondes de $\varphi(N(t, \cdot))$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial N_i}(t, \cdot) &= 2 \int_D N_i(t, x) dx, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial N_i^2}(t, \cdot) &= 2 \int_D dx.\end{aligned}$$

En suite la formule d'ITô appliquée à $\varphi(N(t, \cdot))$ est sous la forme :

$$\begin{aligned}\varphi(N(t, \cdot)) &= \varphi(N(0, \cdot)) + 2 \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_D N_i(t', x) dN_i dx \\ &\quad + \frac{1}{2} 2 \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_D dx d \langle N_i, N_i \rangle_{t'} \\ &= \varphi(N(0, \cdot)) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_D N_i(t', x) dx \left[\left((\alpha_i - \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(N_j(t'))) N_i(t') + \varepsilon_i \Delta N_i \right) dt' \right. \\ &\quad \left. + \varrho_i N_i(t') dW(t') \right] + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_D \varrho_i^2 N_i^2(t') \left(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m e_m \right)^2 dx dt' .\end{aligned}$$

Par conséquent on obtient la formule suivante :

$$\begin{aligned}\varphi(N(t, \cdot)) &= \varphi(N(0, \cdot)) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_D \left(\alpha_i |N_i(t', x)|^2 - \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(N_j(t', x)) |N_i(t', x)|^2 \right) dx dt' \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_D N_i(t', x) \Delta N_i(t', x) dx dt' + 2 \sum_{i=1}^n \varrho_i \int_0^t \langle N_i^2, dW(t') \rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \varrho_i^2 \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 \int_0^t \int_D N_i^2 e_m^2 dx dt' .\end{aligned}$$

4 Estimations à priori de la solution

Grâce à une intégration par partie on aura :

$$\int_D N_i(t', x) \Delta N_i(t', x) dx = - \int_D |\nabla N_i(t', x)|^2 dx + \int_{\partial D} \frac{\partial N_i}{\partial n} N_i(t', x) dt',$$

et comme $\frac{\partial N_i}{\partial n} = \nabla N_i \cdot \vec{n} = 0$ sur ∂D , $i = 1, \dots, n$ alors :

$$\int_D N_i(t', x) \Delta N_i(t', x) dx = - \int_D |\nabla N_i(t', x)|^2 dx.$$

En remplaçant ce résultat dans la formule calculée ci-dessus, on aboutit exactement à la formule(2.12).

On remarque que

$$\|u\|_{L^2(D)}^3 \leq |D|^{1/2} \int_D |u|^3 dx.$$

En effet :

On sait que

$$\|u\|_{L^2(D)}^3 = \left(\int_D u^2 dx \right)^{3/2}.$$

L'inégalité de HÔLDER donne : $\|u\|_{L^2(D)} \leq \|1\|_{L^6(D)} \times \|u\|_{L^3(D)}$,

avec $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$, c'est à dire :

$$\|u\|_{L^2(D)} \leq \left(\int_D 1^6 dx \right)^{1/6} \times \left(\int_D |u|^3 dx \right)^{1/3},$$

où de façon équivalente

$$\|u\|_{L^2(D)}^3 \leq |D|^{1/2} \times \int_D |u|^3 dx,$$

d'où le résultat.

Donc, compte tenu des conditions (2.7)– (2.8), on a

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^n \int_D \beta_{ij}(N_j(t, x)) |N_i(t, x)|^2 dx &= - \sum_{i,j=1}^n \int_D \bar{\beta}_{ii} |N_i(t, x)|^3 dx \\ &\quad - \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \int_D \beta_{ij}(N_j(t, x)) |N_i(t, x)|^2 dx, \end{aligned}$$

comme $\beta_{ij} \geq 0$, on déduit que

$$-\sum_{i,j=1}^n \int_D \beta_{ij}(N_j(t, x)) |N_i(t, x)|^2 dx \leq -\sum_{i,j=1}^n \int_D \bar{\beta}_{ii} |N_i(t, x)|^3 dx.$$

Or, d'après le résultat montré ci-dessus, il s'ensuit que

$$-\int_D |N_i(t, x)|^3 dx \leq -|D|^{-1/2} \|N_i\|_{L^2(D)}^3,$$

par conséquent,

$$-\sum_{i,j=1}^n \int_D \beta_{ij}(N_j(t, x)) |N_i(t, x)|^2 dx \leq -\sum_{i=1}^n \bar{\beta}_{ii} |D|^{-1/2} \|N_i\|_{L^2(D)}^3.$$

D'autre part, grâce à (2.6) on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \varrho_i^2 \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 \int_D N_i^2 e_m^2 dx &\leq \max_i \varrho_i^2 \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 \max_m e_m^2 \sum_{i=1}^n \int_D N_i^2 dx \\ &\leq \bar{\varrho}^2 \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 \|e_m\|_{L^\infty(D)}^2 \|N\|_{L^2(D)}^2 \\ &\leq C \|N\|_{L^2(D)}^2. \end{aligned}$$

avec $\bar{\varrho} = \max\{\varrho_i \mid i = 1, \dots, n\}$, $C = \bar{\varrho}^2 K_0$.

Cela étant, en considérant l'espérance mathématique et en rappelant la définition (2.11), on aura :

$$\mathbf{E}[\varphi(N(t, \cdot))] = \mathbf{E}\|N(t, \cdot)\|_{L^2(D)}^2.$$

En remplaçant les deux résultats obtenus ci-dessus dans la formule (2.12), on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi(N(t, \cdot)) &\leq \varphi(N(0, \cdot)) + 2 \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_D \alpha_i |N_i(t', x)|^2 dx dt' \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^n \int_0^t \bar{\beta}_{ii} |D|^{-1/2} \|N_i\|_{L^2(D)}^3 dt' - 2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \int_0^t \int_D \nabla |N_i(t', \cdot)|^2 dx dt' \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \varrho_i \int_0^t \langle N_i^2, dW(t') \rangle + C \int_0^t \|N(t', \cdot)\|_{L^2(D)}^2 dt'. \end{aligned}$$

4 Estimations à priori de la solution

En appliquant l'espérance mathématique et par sa linéarité, la formule précédente se résulte à :

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \|N(t, \cdot)\|_{L^2(D)}^2 + 2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbf{E} \int_0^t \|\nabla N_i(t', \cdot)\|_{L^2(D)}^2 dt' \leq \\ & \leq \mathbf{E} \|N(0, \cdot)\|_{L^2(D)}^2 + 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{E} \int_0^t \|N_i(t', x)\|_{L^2(D)}^2 dt' \\ & - 2 \sum_{i=1}^n \bar{\beta}_{ii} |D|^{-1/2} \mathbf{E} \int_0^t \|N_i(t', \cdot)\|_{L^2(D)}^3 dt' + C \mathbf{E} \int_0^t \|N(t', \cdot)\|_{L^2(D)}^2 dt'. \end{aligned}$$

Avec $\|N\|_{L^2(D)}^2 = \sum_{i=1}^n \int_D N_i^2 dx$, $\langle N_i^2, dW(t') \rangle = 0$ (car N_i^2 est dérivable).

Par suite, on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \|N(t, \cdot)\|_{L^2(D)}^2 + 2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbf{E} \int_0^t \|\nabla N_i(t', \cdot)\|_{L^2(D)}^2 dt' \leq \tag{2.13} \\ & \leq \mathbf{E} \|N(0, \cdot)\|_{L^2(D)}^2 + c_1 \mathbf{E} \int_0^t \|N(t', \cdot)\|_{L^2(D)}^2 dt' \\ & - 2 \sum_{i=1}^n \bar{\beta}_{ii} |D|^{-1/2} \mathbf{E} \int_0^t \|N_i(t', \cdot)\|_{L^2(D)}^3 dt' \end{aligned}$$

avec une constante positive c_1 .

En posant $y(t) = \mathbf{E} \|N(t, \cdot)\|_{L^2(D)}^2$, $X = \|N(t', \cdot)\|_{L^2(D)}^2$ et f une fonction convexe telle que $f(X) = X^{\frac{3}{2}}$,

d'après l'inégalité de JENSEN, on a :

$$-\mathbf{E} \|N(t', \cdot)\|_{L^2(D)}^3 = -\mathbf{E} \left[\left(\|N(t', \cdot)\|_{L^2(D)}^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right] \leq -\left[\mathbf{E} \|N(t', \cdot)\|_{L^2(D)}^2 \right]^{\frac{3}{2}},$$

de (2.13) on déduit en particulier (en appliquant FUBINI)

$$y(t) \leq y(0) + c_1 \int_0^t y(t') dt' - c_2 \int_0^t y(t')^{3/2} dt', \tag{2.14}$$

Existence d'une mesure invariante pour l'équation stochastique d'un modèle de compétition limitée entre n espèces avec diffusion spatiale

avec des constantes positives c_1, c_2 . Comme on le sait bien, (2.14) entraîne

$$y(t) = \mathbf{E} \|N(t, \cdot)\|_{L^2(D)}^2 \leq c_3 \quad 0 \leq t < \infty, \quad (2.15)$$

avec une constante $c_3 < \infty$, grâce au lemme de GRONWALL.

En substituant (2.15) dans le second membre de (2.13) et comme

$$2 \sum_{i=1}^n \bar{\beta}_{ii} |D|^{-1/2} \mathbf{E} \int_0^t \|N_i(t', \cdot)\|_{L^2(D)}^3 dt' \geq 0,$$

on obtient

$$\mathbf{E} \|N(t, \cdot)\|_{L^2(D)}^2 + 2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbf{E} \int_0^t \|\nabla N_i(t', \cdot)\|_{L^2(D)}^2 dt' \leq \mathbf{E} \|N(0, \cdot)\|_{L^2(D)}^2 + c_1 c_3 t \quad \forall t \geq 0,$$

et du fait que $\mathbf{E} \|N(t, \cdot)\|_{L^2(D)}^2 \geq 0$, alors

$$2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbf{E} \int_0^t \|\nabla N_i(t', \cdot)\|_{L^2(D)}^2 dt' \leq \mathbf{E} \|N(0, \cdot)\|_{L^2(D)}^2 + c_1 c_3 t \quad \forall t \geq 0. \quad (2.16)$$

D'autre part, on sait que

$$\|N\|_{H^1(D)}^2 = \|N\|_{L^2(D)}^2 + \|\nabla N\|_{L^2(D)}^2.$$

En intégrant la formule (2.15) et en multipliant (2.16) par une constante positive $c' = \frac{1}{2\varepsilon}$ ($\varepsilon = \max_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i$) ensuite, en faisant la somme de deux résultats obtenus, on aboutit à la formule suivante :

$$\mathbf{E} \int_0^t (\|N(t', \cdot)\|_{L^2(D)}^2 + \|\nabla N(t', \cdot)\|_{L^2(D)}^2) dt' \leq c_3 t + c_4 + c_5 t,$$

avec c_4 et c_5 des constantes.

Par conséquent,

$$\mathbf{E} \frac{1}{t} \int_0^t \|N(t', \cdot)\|_{H^1(D)}^2 dt' \leq M \quad \forall t \geq 1,$$

avec M constante ($M = c_3 + c_4 + c_5$).

Ce qui conclut la démonstration. □

4.2 Deuxième estimation de la solution

Maintenant on va démontrer une estimation contenant celle de $(\log N_1, \dots, \log N_n)$.

LEMME 2.4.2. *Outre les conditions supposées dans la proposition 2.3.1, on suppose aussi (2.9). On pose*

$$f(s) = s - \log s - 1 \quad (s > 0), \quad f(N) = (f(N_1), \dots, f(N_n)). \quad (2.17)$$

Alors il existe une constante M_1 et une fonction $A(c)$ telles que, si N est la solution obtenue dans la proposition 2.3.1, on ait

$$\mathbf{E} \frac{1}{t} \int_0^t \chi_{\{\|f(N(t', \cdot))\|_{H^1(D)} \geq c\}} dt' \leq \frac{M_1}{A(c)} \quad \forall t \geq 1, \quad (2.18)$$

$$A(c) \rightarrow \infty \quad \text{pour } c \rightarrow \infty. \quad (2.19)$$

Dans (2.18) $\chi_{\{\dots\}}$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble $\{\dots\}$, c'est-à-dire, $\chi_{\{\dots\}}(\omega) = 1$ si $\omega \in \{\dots\}$ et $= 0$ autrement.

Démonstration. : On remarque d'abord que pour la fonction $f(\cdot)$ définie dans (2.17) on a

$$f(s) \geq 0, \quad \frac{df(s)}{ds} = 1 - \frac{1}{s}.$$

On pose

$$\psi(N) = \|f(N)\|_{L^2(D)}^2 = \sum_{i=1}^n \int_D |f(N_i)|^2 dx. \quad (2.20)$$

Pour appliquer la formule d'ITÔ à $\psi(N)$, on remarque que (Dérivées aux sens de Gâteau)

$$\frac{\partial \psi(N)}{\partial N_i}(g) = 2 \int_D f(N_i) \left(1 - \frac{1}{N_i}\right) g dx,$$

$$\frac{\partial^2 \psi(N)}{\partial N_i^2}(g)(h) = 2 \int_D \left[\frac{f(N_i)}{N_i^2} + \left(1 - \frac{1}{N_i}\right)^2 \right] gh dx,$$

$$\frac{\partial^2 \psi(N)}{\partial N_i^2} (N_i e_m)(N_i e_m) = 2 \int_D [f(N_i) + (N_i - 1)^2] e_m^2 dx,$$

$$\int_D f(N_i) \left(1 - \frac{1}{N_i}\right) \Delta N_i dx = - \int_D |\nabla f(N_i)|^2 dx - \int_D f(N_i) |\nabla \log N_i|^2 dx.$$

La dernière égalité ci-dessus, découle immédiatement de la formule de GREEN

$$\int_w u(\vec{x}) \operatorname{div}(\vec{v}(\vec{x})) dx = - \int_w \overrightarrow{\operatorname{grad}}(u(\vec{x})) \vec{v}(\vec{x}) dx + \int_{\partial w} \vec{v}(\vec{x}) \vec{n} u(\vec{x}) dw.$$

Avec

$$\operatorname{div}(\vec{v}(\vec{x})) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i(\vec{x})}{\partial x_i}.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \int_D f(N_i) \left(1 - \frac{1}{N_i}\right) \Delta N_i dx &= \int_D [f(N_i) \left(1 - \frac{1}{N_i}\right)] \operatorname{div}(\nabla N_i) dx \\ &= - \int_D \nabla [f(N_i) \left(1 - \frac{1}{N_i}\right)] \nabla N_i dx + \\ &\quad + \int_{\partial D} \nabla N_i \vec{n} [f(N_i) \left(1 - \frac{1}{N_i}\right)] dw \\ &= - \int_D \nabla [f(N_i) \left(1 - \frac{1}{N_i}\right)] \nabla N_i dx \quad (\text{car } \nabla N_i \vec{n} = 0) \\ &= - \int_D \nabla (f(N_i) \left(1 - \frac{1}{N_i}\right)) \nabla N_i dx - \\ &\quad - \int_D f(N_i) \nabla \left(1 - \frac{1}{N_i}\right) \nabla N_i dx \\ &= - \int_D \left(\left(1 - \frac{1}{N_i}\right) \nabla N_i \right)^2 dx - \int_D f(N_i) \left(\frac{1}{N_i^2} (\nabla N_i)^2 \right) dx \\ &= - \int_D |\nabla f(N_i)|^2 dx - \int_D f(N_i) |\nabla \log N_i|^2 dx. \end{aligned}$$

Donc en rappelant (2.3) et (2.5), la formule d'ITÔ appliquée à $\psi(N)$ nous donne :

$$\psi(N(t, \cdot)) = \psi(N(0, \cdot)) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial \psi(N)}{\partial N_i} dN_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 \psi(N)}{\partial N_i^2} d \langle N_i, N_i \rangle,$$

4 Estimations à priori de la solution

c'est à dire :

$$\begin{aligned}
\psi(N(t, \cdot)) = & \psi(N(0, \cdot)) + 2 \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_D f(N_i) [\alpha_i(N_i - 1) - \\
& - \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(N_j)(N_i - 1)] dx dt' + 2 \sum_{j=1}^n \varepsilon_i \int_0^t \int_D f(N_i) (1 - \frac{1}{N_i}) \Delta N_i dx dt' + \\
& + 2 \sum_{i=1}^n \varrho_i \int_0^t \langle f(N_i)(N_i - 1), dW(t') \rangle + \\
& + \sum_{i=1}^n \varrho_i^2 \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 \int_0^t \int_D (f(N_i) + N_i^2 + 1 - 2N_i) e_m^2 dx dt'.
\end{aligned}$$

Par suite en rappelant (2.6), on dèduit que

$$\begin{aligned}
d\psi(N) \leq & 2 \sum_{i=1}^n \left[\int_D f(N_i) [\alpha_i(N_i - 1) - \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(N_j)(N_i - 1)] dx - \right. \\
& - \varepsilon_i \int_D |\nabla f(N_i)|^2 dx - \varepsilon_i \int_D f(N_i) |\nabla \log N_i|^2 dx \Big] dt \\
& + K_0 \sum_{i=1}^n \varrho_i^2 \int_D (f(N_i) + N_i^2 + 1) dx dt + 2 \sum_{i=1}^n \varrho_i \langle f(N_i)(N_i - 1), dW(t) \rangle.
\end{aligned}$$

Cette relation nous permet d'obtenir

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\psi(N(t, \cdot))] \leq & \mathbf{E}[\psi(N(0, \cdot))] + \mathbf{E} \left[\int_0^t \left(\int_D F(N(t', x)) dx - \right. \right. \\
& \left. \left. - 2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \int_D (|\nabla f(N_i)|^2 + f(N_i) |\nabla \log N_i|^2) dx \right) dt' \right],
\end{aligned} \tag{2.21}$$

avec $\langle f(N_i)(N_i - 1), dW(t) \rangle = 0$.

Où

$$F(N) = \sum_{i=1}^n F_i(N), \tag{2.22}$$

$$F_i(N) = f(N_i) \left[2\alpha_i(N_i - 1) - \sum_{j=1}^n 2\beta_{ij}(N_j)(N_i - 1) + K_0\varrho_i^2 \right] + K_0\varrho_i^2(N_i^2 + 1).$$

On va démontrer qu'il existe deux constantes positives ε_0 et C_0 telles que, si

$$\sum_{i=1}^n |f(N_i)|^2 \geq C_0, \quad (2.23)$$

alors on ait

$$F(N) \leq -\varepsilon_0 \sum_{i=1}^n f(N_i). \quad (2.24)$$

En effet, en vertu de la condition (2.9) et de la continuité de la fonction

$$g_i(s) = 2\alpha_i(s - 1) - 2\bar{\beta}_{ii}s(s - 1) - \sum_{j=1, j \neq i}^n \gamma_{ij}(s - 1) + K_0\varrho_i^2, \quad s \geq 0,$$

il existe deux constantes $\delta_1 > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ telles que, si $0 < N_i \leq \delta_1$, quelques soient N_j , $j = 1, \dots, n$, $j \neq i$, on ait

$$2\alpha_i(N_i - 1) - \sum_{j=1}^n 2\beta_{ij}(N_j)(N_i - 1) + K_0\varrho_i^2 \leq -2\varepsilon_0.$$

Cette relation, jointe à la condition $\bar{\beta}_{ii} > 0$ (voir (2.7)), nous permet en particulier de constater qu'il existe une constante C_1 telle que, si

$$\sum_{i=1}^n |N_i|^2 \geq C_1,$$

alors on ait (2.24) avec $\varepsilon_0 = 1$.

En outre, comme $K_0\varrho_i^2(N_i^2 + 1)$ est borné pour $0 < N_i \leq \delta_1$, il existe une constante $\delta_2 \in]0, \delta_1]$ telle que, si $0 < N_i \leq \delta_2$, alors, quelques soient N_j , $j = 1, \dots, n$, $j \neq i$, on ait

$$F_i(N) \leq -2\varepsilon_0 f(N_i).$$

4 Estimations à priori de la solution

Il est évident que, si $\sum_{i=1}^n |N_i|^2 \leq C_1$, alors $F(N)$ sont uniformément bornées (voir (2.22), (2.8)). On en déduit qu'il existe une constante $\delta \in]0, \delta_2]$ telle que, si $\sum_{i=1}^n |N_i|^2 \leq C_1$ et s'il y a au moins une composante N_i de N telle que $0 < N_i \leq \delta$, alors la relation (2.24) est vérifiée.

Il est clair qu'il existe une constante C_0 telle que, si (2.23) est vérifiée, alors ou on a $\sum_{i=1}^n |N_i|^2 \geq C_1$ ou il y a au moins une composante N_i de N telle que $0 < N_i \leq \delta$. Par conséquent, si (2.23) est vérifiée, alors on a (2.24). D'autre part, si (2.23) n'est pas vérifiée, c'est à dire que

$$\sum_{i=1}^n |f(N_i)|^2 < C_0,$$

alors du fait qu' on a

$$\left(\sum_{i=1}^n |f(N_i)| \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n |f(N_i)|^2 \leq nC_0,$$

on obtient

$$\sum_{i=1}^n f(N_i) \leq \sqrt{n} \sqrt{C_0}.$$

Donc, en posant

$$M_F = \sup_{N \in (\mathbb{R}_+)^n} F(N),$$

on a

$$F(N(t, x)) \leq -\varepsilon_0 \sum_{i=1}^n f(N_i(t, x)) + \varepsilon_0 \sqrt{n} \sqrt{C_0} + M_F. \quad (2.25)$$

D'autre part, comme on a grâce aux inégalités d'injection du sobolev et d'interpolation

$$\begin{aligned} \|f(N_i)\|_{L^2(D)} &\leq \|f(N_i)\|_{L^1(D)}^{1/4} \|f(N_i)\|_{L^3(D)}^{3/4} \\ &\leq C \|f(N_i)\|_{L^1(D)}^{1/4} (\|f(N_i)\|_{L^2(D)}^{3/4} + \|\nabla f(N_i)\|_{L^2(D)}^{3/4}) \end{aligned}$$

Existence d'une mesure invariante pour l'équation stochastique d'un modèle de compétition limitée entre n espèces avec diffusion spatiale

avec une constante C , alors il s'ensuit que :

$$-\|f(N_i)\|_{L^1(D)} \leq -\frac{1}{C^4} \frac{\|f(N_i)\|_{L^2(D)}^4}{(\|f(N_i)\|_{L^2(D)}^{3/4} + \|\nabla f(N_i)\|_{L^2(D)}^{3/4})^4},$$

ce qui donne

$$-\|f(N_i)\|_{L^1(D)} \leq -\frac{1}{8C^4} \frac{\|f(N_i)\|_{L^2(D)}^4}{\|f(N_i)\|_{L^2(D)}^3 + \|\nabla f(N_i)\|_{L^2(D)}^3}.$$

Compte tenu de (2.25), on a

$$\begin{aligned} \int_D F(N) dx &\leq -\frac{\varepsilon_0}{8C^4} \sum_{i=1}^n \frac{\|f(N_i)\|_{L^2(D)}^4}{\|f(N_i)\|_{L^2(D)}^3 + \|\nabla f(N_i)\|_{L^2(D)}^3} \\ &\quad + (\varepsilon_0 \sqrt{n} \sqrt{C_0} + M_F) |D|. \end{aligned} \quad (2.26)$$

En posant

$$\bar{\varepsilon} = \inf_{i=1, \dots, n} \varepsilon_i, \quad A(c) = \inf_{X^2 + Y^2 \geq c^2} \left[\frac{\varepsilon_0}{8C^4} \frac{X^4}{X^3 + Y^3} + 2\bar{\varepsilon} Y^2 \right],$$

on déduit de (2.21) et de (2.26) que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\psi(N(t, \cdot))] &\leq \mathbf{E}[\psi(N(0, \cdot))] + \\ &\quad - A(c) \mathbf{E} \int_0^t \chi_{\{\|f(N(t', \cdot))\|_{H^1(D)} \geq c\}} dt' + (\varepsilon_0 \sqrt{n} \sqrt{C_0} + M_F) |D| t, \end{aligned}$$

comme $\mathbf{E}[\psi(N(t, \cdot))] \geq 0$ alors,

$$A(c) \mathbf{E} \int_0^t \chi_{\{\|f(N(t', \cdot))\|_{H^1(D)} \geq c\}} dt' \leq \mathbf{E}[\psi(N(0, \cdot))] + (\varepsilon_0 \sqrt{n} \sqrt{C_0} + M_F) |D| t,$$

ou encore

$$\mathbf{E} \frac{1}{t} \int_0^t \chi_{\{\|f(N(t', \cdot))\|_{H^1(D)} \geq c\}} dt' \leq \frac{\mathbf{E}[\psi(N(0, \cdot))] + (\varepsilon_0 \sqrt{n} \sqrt{C_0} + M_F) |D|}{A(c)}$$

pour $t \geq 1$. On remarque en outre que

$$A(c) = \inf_{X^2 + Y^2 \geq c^2} \left[\frac{\varepsilon_0}{8C^4} \frac{X^4}{X^3 + Y^3} + 2\bar{\varepsilon} Y^2 \right] \rightarrow \infty \quad \text{pour } c \rightarrow \infty.$$

En posant $M_1 = \mathbf{E}[\psi(N(0, \cdot))] + (\varepsilon_0 \sqrt{n} \sqrt{C_0} + M_F) |D|$, on a (2.18) avec (2.19). $\square$

5 Existence d'une mesure invariante.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.3.3. En adjoignant (2.10) et (2.18) on obtient

$$\mathbf{E} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_{\{\|N(t, \cdot)\|_{H^1(D)} + \|f(N(t', \cdot))\|_{H^1(D)} \leq c\}} dt \geq 1 - \varepsilon(c) \quad \forall T \geq 1, \quad (2.27)$$

avec une fonction $\varepsilon(c)$ telle que

$$\varepsilon(c) \rightarrow 0 \quad \text{pour } c \rightarrow \infty.$$

Or, on remarque que

$$\begin{aligned} \|\log N_i\|_{L^2(D)} &= \|\log N_i - N_i + 1 + N_i - 1\|_{L^2(D)} \\ &\leq \sqrt{3}(\|f(N_i)\|_{L^2(D)} + \|N_i\|_{L^2(D)} + |D|^{1/2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\nabla \log N_i\|_{L^2(D)} &= \|\nabla(\log N_i - N_i + 1) + \nabla N_i\|_{L^2(D)} \\ &\leq \sqrt{2}(\|\nabla f(N_i)\|_{L^2(D)} + \|\nabla N_i\|_{L^2(D)}). \end{aligned}$$

En d'autres termes, il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que

$$\|N\|_{H^1(D)} + \|\log N\|_{H^1(D)} \leq C_1(\|N\|_{H^1(D)} + \|f\|_{H^1(D)}) + C_2.$$

Pour $u = (u_1, \dots, u_n) \in L^2(D)$ avec $u_i > 0$ p. p. ($i = 1, \dots, n$) et Γ un ensemble borélien de H , on pose

$$P_t(u, \Gamma) = \mathbb{P}(\{(N(t, \cdot), L(N(t, \cdot))) \in \Gamma\}),$$

où $N(t, \cdot)$ est la solution du problème (2.3)–(2.4) avec la condition initiale

$$N_i(0, x) = u_i(x).$$

On définit alors

$$\mu_T(\Gamma) = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{L^2(D)} P_t(u, \Gamma) \nu_0(du),$$

où ν_0 est la mesure dans $L^2(D)$ de la donnée initiale $N(0, \cdot)$.

Alors de (2.27) on déduit que

$$\mu_T(\{ \|(N, L(N))\|_{H^1(D)} \leq c \}) \geq 1 - \varepsilon(c) \quad \forall T \geq 1,$$

$$\varepsilon(c) \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad c \rightarrow \infty.$$

Ça signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $C_{(\varepsilon)}$ tel que

$$\mu_T(\{ (u, v) \in H \mid \|u\|_{H^1(D)} + \|v\|_{H^1(D)} \leq C_{(\varepsilon)} \}) \geq 1 - \varepsilon. \quad (2.28)$$

On rappelle que l'ensemble

$$\{ (u, v) \in H \mid \|u\|_{H^1(D)} + \|v\|_{H^1(D)} \leq C_{(\varepsilon)} \}$$

est compact dans $H = L^2(D) \times L^2(D)$. Donc en vertu du théorème de KRYLOV-BOGOLIUBOV ([12]) dans sa version complétée par le critère de PROKHOROV (voir [5], [6]), on déduit de (2.28) l'existence d'une mesure invariante $\bar{\mu}$ dans H pour l'équation (2.3) avec la condition aux limites (2.4). En outre, il est évident que

$$\bar{\mu}(H^1(D) \times H^1(D)) = 1.$$

Le théorème 2.3.3 est démontré.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié la stabilité du système d'équations différentielles représentant la compétition entre deux espèces. Nous avons établi, en utilisant la fonction de Has'minski définie en chapitre 1, l'existence d'une mesure invariante pour le système d'équations stochastiques du modèle de compétition entre deux espèces.

L'étude du modèle stochastique de compétition entre plusieurs espèces constitue une généralisation du résultat obtenu dans le cas de compétition entre deux espèces. En effet, nous avons plus précisément développé l'article [10], dans lequel les auteurs ont pu montrer que, sous des conditions naturelles, il existe une mesure invariante pour le modèle stochastique de compétition entre n espèces avec diffusion spatiale.

Bibliographie

- [1] H. Brezis : Analyse fonctionnelle, théorie et application. Dunod, 1999.
- [2] A. C. Capelo : *Modelli matematici in biologia* . Decibel editrice, Padova, 1989.
- [3] S. Chessa, H. Fujita Yashima : *Equazione stocastica di dinamica di popolazioni di tipo preda-predatore*. Boll. U, M. I., Serie VIII, vol. 5 - B (2002), pp. 789-804.
- [4] F. B. Christiansen, T. M. Fenchel : *Theories of population in biological communities*. Springer, 1977.
- [5] G. Da Prato : *An introduction to infinite dimensional analysis*. Scuola Norm. Sup. Pisa, 2001.
- [6] G. Da Prato, J. Zabczyk : *Stochastic equations in infinite dimensions*. Cambridge Univ. Press, 1992.
- [7] G. Da Prato, J. Zabczyk : *Ergodicity for infinite dimensional systems*. Cambridge Univ. Press, 1996.
- [8] H. Fujita Yashima : Equation stochastique de dynamique de populations du type proie-prédateur avec diffusion dans un territoire. *Novi Sad J. Math.* vol. 33 (2003), pp. 31–52.
- [9] H. Fujita Yashima, R. Santis : Equation stochastique de dynamique de populations (en espagnol). Cours Chili 2014.
- [10] H. Fujita Yashima, S. Hamdous : *Mesure invariante pour l'équation stochastique d'un modèle de compétition limitée entre des espèces avec une diffusion spatiale*. Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II, Tomo 56 (2007), pp. 79-88.
- [11] R. Z. Has'minskij : *Stochastic stability of differential equations* (translated from Russian). Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980.

- [12] N. Kryloff, N. Bogoliuboff : La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire. *Annals Math.*, vol. 38 (1937), pp. 65-113.
- [13] T. R. Malthus : *An essay on the principle of population*. Harmondsworth, 1798.
- [14] R. M. Nisbet, W. S. C. Gurney : *Modelling fluctuating populations*. John Wiley, 1982.
- [15] E. Pardoux : Intégrales stochastiques hilbertiennes. *Publication interne*, 7617 (1976), Univ. Paris Dauphine.
- [16] R. Rudnicki : Long-time behaviour of a stochastic prey-predator model. *Stoch. Proc. Appl.*, vol. 108 (2003), pp. 93–107.
- [17] E. Tornatore : Stochastic equation of population dynamic with diffusion on a domain. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, Serie II, Tomo 52 (2003), pp. 15–29.
- [18] E. Tornatore, L. Manca, H. Fujita Yashima : Comportamento asintotico della soluzione del sistema di equazioni stocastiche per due specie in competizione. *Rend. Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. (Sci. Mat. Appl.)*. vol. 136/137 (2002/03), pp. 151–183.
- [19] V. Volterra : *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*. Gauthier-Villars, Paris, 1931.