

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou
Faculté du Génie de la Construction
Département de Génie Mécanique

Thèse de Doctorat en Sciences
Spécialité : Génie Mécanique

Sujet

**IDENTIFICATION DE STRUCTURES MECANIKES
ET METHODES DE CALCULS PREVISIONNELS EN
DYNAMIQUE LINEAIRE ET FAIBLEMENT NON-
LINEAIRE**

Par
Farid ASMA

Soutenue le : 14 juin 2007
Devant le jury composé de :

Mr BOUAFIA	Youcef	Prof.	UMMTO (Tizi-Ouzou)	Président
Mr BOUAZZOUNI	Amar	Prof.	UMMTO (Tizi-Ouzou)	Rapporteur
Mr DJELOUAH	Hakim	Prof.	USTHB (Alger)	Examineur
Mr MERAGHNI	Fodil	Prof.	ENSAM (Metz, France)	Examineur
Mr NECIB	Brahim	Prof.	UMC (Constantine)	Examineur
Mr TAAZOUNT	Mustapha	M.C.	UBP (Clermont Ferrand, France)	Examineur

A la mémoire de ma grand-mère Badjou Dahbia

A Saliha, Sofiane et Fatima

Remerciements

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur Amar BOUAZZOUNI, Professeur à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou de m'avoir encadré et permis d'entreprendre ce travail de recherche ainsi que pour les conseils et les encouragements qu'il m'a donné tout au long de ce travail.

Je suis particulièrement reconnaissant à Monsieur Fodil MERAGHNI, Professeur à l'Ecole Nationale d'Arts et Métiers de Metz (France) pour la confiance qu'il m'a accordé en m'accueillant au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux pendant l'année 2006, de m'avoir permis de m'intégrer dans le laboratoire, ainsi que pour ses conseils et ses encouragements.

J'exprime également toute ma gratitude à Monsieur Youcef BOUAFIA, Professeur à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en me faisant l'honneur de présider le jury de ma thèse.

Je tiens à remercier Monsieur Hakim DJELOUAH, Professeur à l'Université des Sciences et Technologie Houari Boumediene d'Alger, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en me faisant l'honneur d'être examinateur de cette thèse.

Je tiens à remercier Monsieur Brahim NECIB, Professeur à l'Université Mentouri de Constantine, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en me faisant l'honneur d'être examinateur de cette thèse.

Je tiens à remercier Monsieur Mustapha TAAZOUNT, Maître de Conférences à l'Université Blaise Pascal de Clermont Ferrand (France), pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en me faisant l'honneur d'être examinateur de cette thèse.

Liste des notations	V
Liste des abréviations.....	VIII
Liste des illustrations.....	X
Liste des tableaux	XII
INTRODUCTION.....	1
I RECALAGE DE MODELES DE STRUCTURES LINEAIRES	11
I.1 TECHNIQUES DE COMPARAISON ET CORRELATION POUR LE RECALAGE DE MODELES.....	11
I.1.1 Corrélations vectorielles	11
I.1.1.1 Critère d'assurance modal.....	12
I.1.1.2 Facteur d'échelle modal.....	12
I.1.1.3 Critère d'assurance modal par coordonnée.....	13
I.1.1.4 Extension du critère d'assurance modal par coordonnée.....	13
I.1.1.5 Fonction du facteur modal par coordonnée.....	14
I.1.1.6 Critère d'assurance modal inverse.....	14
I.1.1.7 Critère d'assurance modal normé	15
I.1.1.8 Nouveau critère d'assurance modal	15
I.1.2 Corrélation de l'orthogonalité	16
I.1.2.1 Orthogonalité normée	16
I.1.2.2 Pseudo contrôle de l'orthogonalité	16
I.1.2.3 Contrôle de l'orthogonalité aux coordonnées	17
I.1.2.4 Orthogonalité normée utilisant la réduction SEREP.....	17
I.1.3 Corrélation sur les fonctions de réponse fréquentielle.....	17
I.1.3.1 Critère d'assurance du domaine fréquentiel.....	18
I.1.3.2 Facteur d'échelle des réponses fréquentielles	18
I.1.3.3 Critère d'assurance des réponses fréquentielles.....	19
I.1.3.4 Critère d'assurance modal et fréquentiel	19
I.2 INCOMPATIBILITE ENTRE LES DONNEES MESUREES ET CELLES DU MODELE ELEMENTS FINIS	20
I.2.1 Techniques de réduction.....	20
I.2.1.1 Réduction de système matriciel	20
I.2.1.2 Méthode de réduction de Guyan	21
I.2.1.3 Technique de réduction améliorée de système.....	21
I.2.1.4 Méthode de réduction dynamique.....	22

I.2.1.5	Processus de réduction expansion de système	23
I.2.2	Expansion des mesures.....	24
I.2.2.1	Méthode d'expansion de Guyan	24
I.2.2.2	Expansion IRS	24
I.2.2.3	Expansion dynamique.....	25
I.2.2.4	Expansion dynamique modifiée.....	25
I.2.2.5	Expansion SEREP.....	25
I.2.2.6	Modèle d'expansion par analyse expérimentale	26
I.3	CHOIX DES POINTS DE MESURE ET D'EXCITATION POUR LE RECALAGE DE MODELE	
ELEMENTS FINIS		
27		
I.3.1	Sélection des points de mesure.....	27
I.3.1.1	Réduction de modèle de Guyan	27
I.3.1.2	Méthode de distribution énergétique.....	29
I.3.1.3	Méthode de la flexibilité	29
I.3.1.4	Indépendance effective – Matrice d'information de Fisher	30
I.3.2	Sélection des points d'excitation	36
I.3.2.1	Point d'excitation optimal– Point d'excitation non optimal	36
I.3.2.2	Décomposition QR	37
I.3.3	Sélection des modes propres par approche sensitive.....	37
I.3.4	Remarques.....	39
I.4	RECALAGE DE MODELES ELEMENTS FINIS.....	39
I.4.1	Méthodes modales directes.....	40
I.4.1.1	Méthode du multiplicateur de Lagrange	40
I.4.1.2	Méthode de l'erreur matricielle	40
I.4.1.3	Affectation de données modales	40
I.4.1.4	Autres méthodes directes	41
I.4.1.5	Remarques	41
I.4.2	Méthodes itératives.....	41
I.4.2.1	Méthodes à fonction coût.....	42
I.4.2.2	Méthodes de la variation minimale.....	47
I.4.2.3	Autres méthodes de recalage	49
I.4.2.4	Remarques sur les méthodes de recalage.....	50
II	IDENTIFICATION DE STRUCTURES LINEAIRES	52
II.1	METHODE DE CHOIX DES POINTS DE MESURE POUR LE RECALAGE DE MODELES.	52
II.1.1	Enoncé de la méthode.....	52
II.1.2	Résultats expérimentaux.....	54
II.1.3	Conclusion.....	59

II.2	METHODES DE RECALAGE.....	59
II.2.1	Méthode de recalage avec paramétrisation intrinsèque	59
II.2.1.1	Position du problème	60
II.2.1.2	Méthode d'approximation.....	61
II.2.1.3	Choix des points de mesure	66
II.2.1.4	Réduction aux paramètres de recalage de raideur	67
II.2.1.5	Paramétrisation intrinsèque.....	67
II.2.1.6	Cas test numérique.....	69
II.2.1.7	Conclusion	72
II.2.2	Méthode de recalage par séparation des variables.....	72
II.2.2.1	Méthode de recalage	73
II.2.2.2	Fonctions coût.....	74
II.2.2.3	Paramétrisation fréquentielle	74
II.2.2.4	Méthode de recalage par les moindres carrés	75
II.2.2.5	Expressions des première et seconde dérivées des erreurs relatives	76
II.2.2.6	Application	78
II.2.2.7	Conclusion	81
II.2.3	Stratégie incrémentale de recalage	82
II.2.3.1	Problématique	83
II.2.3.2	Choix de la fonction de corrélation.....	84
II.2.3.3	Méthode proposée.....	85
II.2.3.4	Application	87
II.2.3.5	Conclusion	89
III	IDENTIFICATION DE STRUCTURES NON LINEAIRES	90
III.1	Techniques de recalage de modèles non linéaires.....	90
III.1.1	Introduction	90
III.1.2	Identification du modèle mathématique	94
III.1.3	Minimisation de la fonction objective	95
III.2	Formulation non linéaire par la fonction descriptive	95
III.2.1	Introduction	96
III.2.2	Fonction descriptive de la raideur cubique	98
III.2.3	Fonction descriptive de l'amortissement par friction	100
III.2.4	Amortissement par friction d'un élément non lié (compris entre deux éléments).....	103
III.2.5	Vecteur non linéaire (VNL) et matrice non linéaire (MNL).....	103
III.2.6	Formulation explicite des réponses fréquentielles non linéaires de systèmes à plusieurs ddls....	106
III.2.6.1	Introduction.....	106
III.2.6.2	Formulation explicite des réponses fréquentielles	107
III.2.7	Méthode d'identification	109

III.2.7.1	Méthode de minimisation	109
III.2.7.2	Méthode d'identification dans le domaine fréquentiel.....	110
IV	APPLICATION DES METHODES DE RECALAGE AUX SYSTEMES NON LINEAIRES	112
IV.1	Application à la linéarisation de systèmes faiblement non linéaires.....	112
IV.2	Recalage en présence de non linéarités.....	118
IV.3	Conclusion	121
V	FORMULATION NON LINEAIRE PROPOSEE	122
V.1	Non linéarités de raideur	122
V.2	Non linéarités d'amortissement	124
V.3	Forme générale des non linéarités dans le domaine temporel.....	125
V.4	Méthode d'identification proposée	126
V.4.1	Résolution de l'équation du mouvement par schéma numérique	126
V.4.2	Application	130
V.4.2.1	Cas du système à un ddl.....	130
V.4.2.2	Cas du système à plusieurs ddls.....	132
V.4.2.3	Remarques	134
	CONCLUSION	135
	Les conclusions suivantes sont tirées des études effectuées dans cette thèse.	135
	Utilité du travail accompli	138
	Des indications pour d'autres études possibles sont récapitulés ci-dessous	139
	BIBLIOGRAPHIE	140

Liste des notations

$[]^+$: Pseudo inverse de la matrice entre crochets
$\{ \}^T, []^T$: Transposé du vecteur ou de la matrice respectivement
$\{ \}^H, []^H$: Transposé conjugué du vecteur ou de la matrice respectivement
$\{ \}^*, []^*$: Conjugué du vecteur ou de la matrice respectivement
$\det([])$: Déterminant de la matrice entre parenthèses
$\text{diag}([])$: Diagonale de la matrice entre parenthèses
$\text{sng}()$: Signe du paramètre entre parenthèses
$()_m, ()_s$: Respectivement matrice ou vecteur pour les degrés de liberté mesurés (dits maîtres) ou non mesurés (dits esclaves)
$[I]$: Matrice identité
E	: Module de Young
ρ	: Masse volumique
i, j, k, l	: indices de degrés de liberté (entiers naturels)
m, k, c	: Respectivement masse, raideur et amortissement
p_i	: Paramètres de recalage qui peuvent être soit des masses m_i ou des raideurs k_i
$[M], [K], [C]$: Matrices de masse, raideur et amortissement respectivement
$[M^{(e)}], [K^{(e)}], [C^{(e)}]$: Matrices élémentaires respectivement de masse, raideur et amortissement
$[M_A], [K_A], [C_A]$: Matrices analytiques respectivement de masse, raideur et amortissement
$[M_X], [K_X], [C_X]$: Matrices mesurées respectivement de masse, raideur et amortissement
$[M_R], [K_R]$: Matrices réduites de masse et de raideur respectivement
$[D]$: Matrice d'amortissement visqueux
$[Z]$: Matrice de raideur dynamique
$[Z_{NL}]$: Matrice composée de raideur dynamique contenant les coefficients linéaires et non linéaires
$\{\delta Z\}$: Différence entre la matrice de raideur dynamique mesurée et celle du modèle analytique
H	: Fonction de réponse fréquentielle
$f(t)$: Excitation harmonique du système

$[F]$: Matrice des vecteurs force d'excitation
$y(\omega)$: Réponse en déplacement assimilée à une réponse fréquentielle pour les systèmes à une seule force d'excitation.
$y_{A_j}(\omega_i)$: Réponse fréquentielle analytique au degré de liberté j , pour la fréquence ω_i
$y_{X_j}(\omega_i)$: Réponse fréquentielle mesurée au degré de liberté j , pour la fréquence ω_i
Y	: Amplitude des vibrations.
$[Y]$: Matrice des réponses en déplacement formée par les colonnes de la réponse $y(\omega_i)$
$\{q\}$: Vecteur déplacement en coordonnées principales
$\{\ddot{y}\}, \{\dot{y}\}, \{y\}, \{f(t)\}$: Respectivement vecteurs accélération, vitesse, déplacement et excitation
$\{\phi\}_j$: $j^{\text{ème}}$ vecteur propre
$\{\phi_A\}_i$: $i^{\text{ème}}$ vecteur propre analytique
$\{\phi_X\}_j$: $j^{\text{ème}}$ vecteur propre mesuré
ω_j	: $j^{\text{ème}}$ fréquence propre
$[W]$: Matrice des facteurs de pondération
$[Wp]$: Matrice de pondération permettant de limiter la variation des paramètres $\{p_i\}$
$[T]$: Matrice de transformation des méthodes de réduction
$[\Phi], [\Lambda]$: Respectivement matrices modale et spectrale
$\lambda_i = \omega_i^2$: $i^{\text{ème}}$ coefficient de la matrice spectrale
$[\lambda], [\psi]$: Matrices de valeurs propres et de vecteurs propres correspondants à une matrice donnée
E_c	: Energie cinétique
$[\varphi]$: Mode statique flexible
$[L]$: Matrice des coefficients de la combinaison linéaire (matrice de passage)
$[R]$: Matrice d'intensité du bruit de mesure
$[Q]$: Matrice d'information de Fisher
$[S]$: Matrice de sensibilité

$\{E_d\}$: Vecteur de distribution de l'indépendance effective
$[E]$: Matrice de prédiction de l'indépendance effective
$[U_0]$: Matrice des vecteurs singuliers
$\{\delta p\}$: Ecart entre les paramètres calculés et ceux du modèle analytique
$J(p)$: Fonction coût ou objectif
$\{\varepsilon\}$: Ecart entre les réponses fréquentielles mesurée et analytique appelé résidu
$[V_i]$: Matrice de variation minimale des paramètres p_i
$[I(p_i)]$: Matrice d'information
$\{\tau\}$: Vecteur témoin
r	: Représente aléatoirement la valeur 1 ou -1,
g	: Valeur aléatoire entre 0 et 1,
$\varepsilon\%$: Pourcentage de bruit
α, β	: Coefficient de proportionnalité de l'amortissement
$e(\omega_t)$: Différence entre les réponses analytiques et celles mesurées appelée aussi erreur
δ	: Fonction objective utilisée dans le cas de minimisation par la méthode des moindres carrés
$[J], [{}_k J], [{}_m J]$: Matrices Jacobiennes de la méthode de Newton, les indices k et m indique l'application aux paramètres de raideur ou de masse respectivement
f_{NL}	: Fonction non linéaire
$g(\dot{y}, y)$: Fonction résultante de toutes les forces non linéaires
$v(\dot{y}, y)$: Coefficient linéarisé de la fonction résultante $g(\dot{y}, y)$
$\{G(\dot{y}, y)\}$: Vecteur contenant toutes les forces reconstituées $g(\dot{y}, y)$ du système global
$gv_i(\dot{y}, y)$: Fonction qui représente l'effet combiné de tous les éléments non linéaires connectés au ddl i
κ	: Non linéarité de raideur
χ	: Non linéarité d'amortissement

Liste des abréviations

AML	: Analyse modale linéaire
COMAC	: Critère d'assurance modal par coordonnée (Coordinate Modal Assurance Criterion)
COMEF	: Fonction du facteur modal par coordonnée (Coordinate Modal Factor Function)
CORTHOG	: Critère de contrôle de l'orthogonalité aux coordonnées (Coordinate Orthogonality Check)
CRP	: Méthode inverse conditionnée (Conditioned Reverse Path)
ddl	: Degré de liberté
DFM	: Méthode des fonctions descriptives (Describing Function Method)
ECOMAC	: Extension du critère d'assurance modal par coordonnée (Extended Coordinate Assurance Criterion)
ECP	: Produit des éléments des vecteurs propres (Eigenvector Component Product)
EF	: Eléments Finis
EFI	: Indépendance effective (Effective Independence)
ER	: Réduction équivalente (Equivalent Reduction)
EVP	: Produit des éléments de vecteur propre (Eigenvector Component Product)
FDAC	: Critère d'assurance du domaine fréquentiel (Frequency Domain Assurance Criterion)
FRAC	: Critère d'assurance des réponses fréquentielles (Frequency Response Assurance Criterion)
FRF	: Fonction de réponse fréquentielle (Frequency Response Function)
FRSF	: Facteur d'échelle des réponses fréquentielles (Frequency Response Scale Factor)
HBM	: Linéarisation harmonique de l'équation d'équilibre (Harmonic Balance Method)
IMAC	: Critère d'assurance modal inverse (Inverse Modal Assurance Criterion)
IRS	: Méthode améliorée de réduction de système (Improved Reduction System)

MAC	: Critère d'assurance modal (Modal Assurance Criterion)
MDOF	: Plusieurs degrés de liberté (Multi Degrees of Freedom)
MFAC	: Critère d'assurance modal et fréquentiel (Modal FRF Assurance Criterion)
MNL	: Matrice non linéaire
MSF	: Facteur d'échelle modal (Modal Scale Factor)
NCO	: Facteur d'orthogonalité normée (Normalized Cross Orthogonality)
NIFO	: Identification non linéaire par rétroactivité de la réponse (Nonlinear Identification Feedback Output)
NMAC	: Nouveau critère d'assurance modal (New MAC)
NODP	: Point d'excitation non optimal (Non-Optimal Driving Point)
ODP	: Point d'excitation optimal (Optimal Driving Point)
POC	: Pseudo contrôle de l'orthogonalité (Pseudo Orthogonality Check)
POD	: Décomposition orthogonale (Proper Orthogonal Decomposition)
POMs	: Modes orthogonaux obtenus à partir de la décomposition orthogonale (Proper Orthogonal Modes)
PSD	: Densité de la puissance spectrale (Power Spectral Density)
SCO	: Critère d'orthogonalité normée utilisant la réduction SEREP (SEREP normalized Cross Orthogonality)
SDOF	: Systèmes à un degré de liberté (Single Degree of Freedom)
SEREP	: Processus de réduction expansion de système (System equivalent Reduction Expansion Process)
SMAC	: Critère d'assurance modal inverse (Scaled Modal Assurance Criterion)
SVD	: Décomposition en valeurs singulières (Singular Value Decomposition)
TAM	: Modèle d'approche par analyse expérimentale (Test Analysis Model)
VNL	: Vecteur non linéaire

Liste des illustrations

Figure 1. Organigramme du processus de validation de modèle.....	7
Figure 2. Organigramme de la méthode proposée.....	53
Figure 3. Structure d'essai en treillis doublement encastree	54
Figure 4. Module du vecteur témoin pour différentes positions de la force d'excitation et différentes fréquences de mesure	56
Figure 5. Histogramme du vecteur témoin en considérant tous les ddls mesurés.....	57
Figure 6. Vecteur témoin en considérant que les ddls de rotation et ceux du noeud 15 non mesurés.....	57
Figure 7. Différentes mesures de l'erreur	68
Figure 8. Interprétation géométrique de la paramétrisation intrinsèque.....	69
Figure 9. Structure en treillis doublement encastree	70
Figure 10. Comparaison des réponses fréquentielles du 20ème ddl	71
Figure 11. Structure expérimentale simulée.....	78
Figure 12. Comparaison des réponses fréquentielles du ddl 63	79
Figure 13. Histogramme des défauts de raideur détectés	81
Figure 14. Histogramme des défauts de masse détectés.....	81
Figure 15. a. Organigramme global de la méthode, b. Boucles d'incrémenta- tion en raideur ou en masse.....	86
Figure 16. Structure d'essai en treillis doublement encastree	87
Figure 17. Comparaison des réponses fréquentielles du ddl 20	87
Figure 18. Processus d'identification	92
Figure 19. Comportement de l'élément raideur cubique.....	98
Figure 20. Fonction descriptive de premier ordre de l'élément raideur cubique	100
Figure 21. Comportement de l'élément amortissement par friction.....	101
Figure 22. Fonction descriptive de premier ordre de l'élément amortissement par friction ..	102
Figure 23. Organigramme de la méthode de formulation explicite.....	107
Figure 24. Structure comportant de faibles non linéarités localisées aux ddls 4 et 17.....	112
Figure 25. Réponses fréquentielles des ddls 4, 11, 17 et 20 avant recalage.....	113
Figure 26. Fonctions FRAC avant recalage (FRAC1)	114
Figure 27. FRAC après recalage des raideurs par la méthode incrémentale (FRAC2).....	114
Figure 28. Comparaison avec FRAC1, $DIFF1=(FRAC2-FRAC1)$	114

Figure 29. Réponses fréquentielles des ddls 4, 11, 17 et 20 après recalage par la méthode incrémentale	116
Figure 30. FRAC après recalage des raideurs par la méthode avec paramétrisation	116
Figure 31. Comparaison avec FRAC1, DIFF2=(FRAC3-FRAC1).....	117
Figure 32. Réponses fréquentielles des ddls 4, 11, 17 et 20 après recalage par la méthode avec paramétrisation	117
Figure 33. Réponses fréquentielles des structures non linéaire et linéaire avant recalage.....	118
Figure 34. Fonction FRAC avant recalage FRAC4.....	120
Figure 35. FRAC après recalage par la méthode incrémentale	120
Figure 36. Comparaison des fonctions FRAC après recalage.....	120
Figure 37. Réponses fréquentielles des ddls 4, 11, 17 et 20 après recalage par la stratégie incrémentale	121
Figure 38. Force de rappel de l'oscillateur duffing	123
Figure 39. Force de rappel dans le cas de raideurs multilinéaires.....	124
Figure 40. Système à un degré de liberté à non linéarité de raideur.....	131
Figure 41. Réponse temporelle des systèmes linéaire et non linéaire	131
Figure 42. Système à quatre degrés de liberté à non linéarité de raideur	132
Figure 43. Réponse temporelle du système à 4 ddls	133
Figure 44. Représentation du décalage dû à la non linéarité.....	133
Figure 45. Comparaison de réponses temporelles après correction pour le ddl 4.....	134

Liste des tableaux

Tableau 1. Différents ensembles de fréquences de mesure	56
Tableau 2. Résultats du recalage pour les deux ensembles de fréquences de mesure.....	58
Tableau 3. Résultats numériques de recalage obtenus	71
Tableau 4. Défauts simulés et résultats du recalage	80
Tableau 5. Résultats du recalage par la stratégie incrémentale	88
Tableau 6. Résultats obtenus avec les deux méthodes de recalage	115
Tableau 7. Résultats obtenus après la stratégie incrémentale de recalage.....	119

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Identification des caractéristiques dynamiques de structures

Dans certaines circonstances pratiques, les caractéristiques dynamiques des structures nécessitent d'être **identifiées**, pour permettre de concevoir un modèle mathématique avec une grande précision. Le modèle est nécessaire pour prévoir le comportement de la structure sous des sollicitations connues ou prévenir la structure d'excitations néfastes. Il permet aussi de répondre aux critères d'analyse en stabilité, de design, etc.

Puisque les structures dynamiques sont des systèmes continus plutôt que discrets, un nombre infini de coordonnées est nécessaire pour étudier la position de chacun des points de la structure. On peut donc dire que la structure a un nombre infini de degrés de liberté (ddl). Ses caractéristiques vibratoires comportent donc un nombre infini de modes de vibration qui couvrent une bande fréquentielle variant de zéro à l'infini. Néanmoins, pour la plupart des applications pratiques, seulement une certaine bande fréquentielle requiert l'intérêt d'être exploitée ainsi que les caractéristiques vibratoires qui lui correspondent. Dans ce cas, le nombre limité de modes vibratoires à identifier est suffisant pour représenter correctement le système continu.

Pour un système dynamique discret et linéaire à un degré de liberté (avec une masse accrochée à un ressort), la théorie vibratoire est bien développée. Dans ce cas, l'équation différentielle du mouvement est d'ordre un et possède des solutions analytiques qui permettent de définir complètement le système avec une bonne précision. Ces avantages n'existent pas dans le cas de systèmes pratiques continus. Néanmoins, on peut avoir une bonne approximation en discrétisant le système. La stratégie d'étude des caractéristiques vibratoires de structures réelles est basée sur les hypothèses considérées dans la discrétisation pour permettre d'affecter un modèle mathématique au système discret. Il est évident que plus le nombre de coordonnées discrétisées est grand plus le modèle s'approche du système continu.

Il existe deux approches pour la conception de modèles discrets. L'approche d'identification ou de prédiction théorique et l'approche d'identification expérimentale.

Approche d'identification théorique

La physique et les mathématiques sont assez développées de nos jours pour les problèmes mécaniques liés à certaines structures telle que les poutres et les plaques. Il existe

donc des solutions analytiques prêtes à être exploitées pour identifier les caractéristiques vibratoires. Les fréquences naturelles et les modes propres de vibration pour une poutre uniforme sont aisément calculables. Pour les structures plus complexes, il n'y a généralement aucun modèle analytique permettant d'identifier ces caractéristiques. A l'aide de la technologie numérique, on utilise l'approche éléments finis pour l'étude de ces structures. Le principe fondamental de cette méthode est de discrétiser une structure complexe en un ensemble d'éléments finis. Pour chaque élément, la masse et la raideur obéissent à une relation simple et linéaire. Des matrices de masse et de raideur de l'élément peuvent être calculées. Les matrices de masse et raideur globales de toute la structure sont calculées par assemblage des matrices élémentaires en respectant la connectivité et les conditions aux limites. Ces matrices globales constituent le modèle analytique de la structure permettant de décrire le comportement vibratoire de la structure et de déterminer les fréquences et modes propres.

Les fréquences et les modes propres obtenus à partir du modèle EF sont souvent dits fréquences et modes non amortis, puisque le modèle EF n'inclue pas la matrice d'amortissement. Néanmoins, une approximation des propriétés d'amortissement peut être faite en considérant une matrice d'amortissement de type proportionnel. Dans ce cas, la matrice d'amortissement est une combinaison linéaire des matrices de masse et de raideur et les modes obtenus sont toujours les mêmes que dans le cas de la structure non amortie.

Les matrices élémentaires ont été développées pour beaucoup de structures simples comme les poutres, plaques et coques. Les logiciels les plus complets d'éléments finis ont une gamme de choix de types d'éléments et l'utilisateur doit choisir l'élément approprié pour la discrétisation de la structure considérée.

La méthode EF est très utilisée dans l'industrie et peut produire une bonne représentation des structures réelles. Néanmoins, on doit toujours prendre en compte les limitations de cette méthode qui reste une approximation des structures. Dans le cas de structures complexes, les approximations peuvent induire des erreurs dans le modèle. Celles-ci proviennent :

1. des erreurs dans l'estimation des propriétés physiques de la structure,
2. des erreurs de discrétisation et de distribution des paramètres induites par de fausses hypothèses sur l'élément, ou un nombre insuffisant d'éléments,
3. mauvaise approximation des conditions aux limites,
4. modèle de jonction entre éléments inadéquat,

5. introduction d'erreurs durant la phase de calcul provenant de la réduction de grands modèles aux petits modèles,
6. erreurs de calcul numérique.

Ces approximations peuvent dépendre des logiciels utilisés. Une même structure analysée par différents utilisateurs ou analystes donnera des résultats différents. C'est pour cela que pour les systèmes complexes une validation par **recalage** est nécessaire en se basant sur des données expérimentales.

Approche expérimentale

Il existe une autre approche permettant d'établir un modèle expérimental en performant des tests modaux et une analyse des mesures. Ce processus incluant l'acquisition de données et son analyse est connu sous le nom d'analyse modale expérimentale. Ces dernières années, l'analyse modale continue de développer des théories et des méthodologies pratiques ainsi que de nouveaux instruments.

Comme l'approche d'identification théorique, l'analyse modale considère que les caractéristiques vibratoires des systèmes discrets ou continus peuvent être décrits par un nombre fini de degrés de liberté dans une bande fréquentielle choisie. L'analyse modale couvre plusieurs aspects de la mécanique vibratoire qu'on peut classer en quatre catégories :

- L'application la plus importante est d'identifier les caractéristiques modales (fréquences propres, modes propres, coefficient d'amortissement) d'un système dynamique pour comparaison avec les données modales obtenues théoriquement afin de valider, corriger ou recalibrer le modèle analytique ;
- En l'absence de modèle théorique, l'analyse modale expérimentale est utilisée pour construire un modèle mathématique du système dynamique qui sera utilisé pour prédire l'effet de modifications dans la structure ou l'apparition d'un défaut par analyse de sensibilité ;
- Pour les structures complexes formées de plusieurs composants, l'analyse modale peut être effectuée sur chacun des composants et permet de construire le modèle global par sous structuration ou synthèse modale. Ceci utilise l'analyse modale et les conditions aux limites de chacun des composants ;
- En l'absence de modèle analytique, l'analyse modale peut prédire le comportement dynamique de la structure sous l'effet d'efforts extérieurs. Elle peut inversement identifier les effets extérieurs connaissant la réponse vibratoire du système.

En pratique le test modal consiste en une mesure de fonctions de réponse fréquentielle ou les réponses temporelles ainsi que leur analyse pour construire un modèle modal ou expérimental. Ces dernières sont directement prises sur la structure physique sans aucune hypothèse, ce qui les rend plus efficaces que ce que donne la méthode EF. Néanmoins, il existe des erreurs et des limitations pour cette approche expérimentale dues à :

1. erreurs expérimentales, ou bruit de mesure ;
2. considération de réponse linéaire alors qu'elle n'est pas linéaire ;
3. analyse modale pauvre en données expérimentales lorsque tous les modes ne sont pas identifiés ou quelquefois erronés ;
4. nombre de ddl de mesure limité par les équipements ou l'inaccessibilité de certains ddls;
5. difficulté de mesure des ddl de rotation.

Pour conduire un essai modal, deux techniques d'excitation sont utilisées, l'excitation unique en un seul point et l'excitation multiple sur plusieurs points. La méthode d'excitation unique perturbe la structure en un seul ddl et mesure les réponses sur tous les ddls. Théoriquement, pour chaque essai, une ou plusieurs excitations ne sont pas suffisantes pour extraire le modèle expérimental, néanmoins, l'excitation unique n'est pas appropriée pour explorer tous les modes vibratoires désirés. Par conséquent, le changement du point d'excitation et la répétition des mesures en plusieurs points sont nécessaires. La méthode par une seule excitation est facile à exploiter mais pratiquement inutilisable pour les grandes structures.

Corrélation entre le modèle éléments finis et l'analyse modale expérimentale

Vu leurs avantages respectifs, ces deux approches sont actuellement largement utilisées pour l'étude des caractéristiques dynamiques des systèmes et structures. La méthode EF identifie les caractéristiques vibratoires par étude théorique sans avoir recours à des techniques expérimentales. Elle peut utiliser un grand nombre d'éléments finis pour permettre de décrire ces caractéristiques dans le détail et peut couvrir une plus large bande fréquentielle. En plus, elle peut être utilisée aux étapes de conception et design. Néanmoins, vu la complexité de certaines structures réelles, spécialement le lien ou les jonctions entre les différents composants rendent la modélisation des caractéristiques de masse et de raideur

incertaines et quelquefois incorrectes, sans parler de l'amortissement qui reste actuellement une caractéristique artificielle souvent mal modélisée. Vu le nombre limité de coordonnées observées et le nombre incomplet de modes expérimentalement identifiés, les informations obtenues sont considérées incomplètes comparées au modèle EF. Sachant que les résultats des deux techniques sont assez différents, il est important de corrélérer et d'utiliser simultanément ces deux approches.

Cette corrélation consiste à identifier ou recalculer le modèle EF considéré comme complet en exploitant des informations réelles ou correctes de l'analyse modale expérimentale. Ceci fait l'objet de cette thèse.

Non linéarités

Dans la description précédente une importante hypothèse a été faite. Dans les deux approches d'identification, le comportement dynamique de la structure est supposé linéaire. En général le système dynamique est dit linéaire :

- si l'excitation est doublée la réponse double ;
- si la somme de deux réponses relatives à deux excitations distinctes est égale à la réponse relative à la somme des deux excitations ;
- si la structure est soumise à la somme de deux excitations, la réponse est égale à la somme des réponses de la structure obtenue suite à l'excitation des forces prises séparément.

Si ces trois relations ne sont pas vérifiées, le système est dit non linéaire.

Il est connu que toute structure réelle a un certain degré de non linéarité. Dans certains cas, elles sont considérées linéaires quand le degré de non linéarité est petit et donc insignifiant dans la bande fréquentielle considérée. Quelquefois, la non linéarité peut être tolérée pour manque de moyens efficaces de la prendre en compte.

Dans le domaine de l'identification l'existence de non linéarités a deux conséquences. D'une part, le modèle analytique d'un système non linéaire est entaché d'erreurs tant que des mesures réelles ne sont pas exploitées. D'autre part, puisque les fonctions de réponse fréquentielle dépendent des forces d'excitation, les paramètres modaux obtenus doivent être considérés avec grande précaution.

L'étude théorique de non linéarités connues comme la raideur cubique peut être exploitée dans un premier temps. Les non linéarités connues sont bien exprimées par des équations différentielles du mouvement et assez développées dans la littérature. La difficulté réside dans l'identification et la localisation des non linéarités à partir de structures dont on

ignore le modèle de non linéarité. Malheureusement, l'utilisation des techniques expérimentales pour l'étude théorique ou la simulation de données avec un type de non linéarité connu nous empêche de comprendre les non linéarités réelles. Les types de non linéarités les plus rencontrées en pratique sont classés par leur effet sur les données modales, ce qui permet d'exploiter leurs résultats sur les structures réelles.

Beaucoup d'efforts et de moyens sont aujourd'hui déployés sur trois chapitres : la détection et l'identification de non linéarités réelles et leur quantification. De ces trois volets, la quantification, reste encore à ces débuts. La détection de l'existence de non linéarité est chose assez évidente et facile à mettre en œuvre quand l'excitation et les mesures sont assez performantes. Par contre, son identification reste le pas le plus important dans le domaine expérimental. Nous avons dans le chapitre V apporté notre contribution dans ce domaine.

Stratégie de validation de modèle

La stratégie du processus de validation de modèle est représentée sur l'organigramme de la figure 1. On remarque qu'il y a une série d'étapes distinctes comportant une partie expérimentale et une partie numérique en se basant sur le modèle initial.

Pour valider le modèle éléments finis initial, des tests expérimentaux doivent être établis pour extraire les propriétés dynamiques actualisées de la structure qu'on désire exploiter. Dans la partie expérimentale, on intègre les prédictions du modèle initial. Même si les estimations initiales ne sont pas entièrement précises, les réponses de la procédure expérimentale permet de les trier et donc de guider efficacement les tests. La vérification de la corrélation de modèle confronte l'information du modèle initial avec la consistance des mesures expérimentales. Ceci est appelé validation dans la littérature et représente un pas important dans le processus. Il sert à ausculter le modèle initial et s'assurer si une procédure de recalage de modèle n'est pas nécessaire. Si le modèle ne nécessite pas de recalage, il peut nécessiter une modification manuelle conséquente non seulement sur les paramètres mais aussi sur sa configuration ou son maillage.

Le recalage de modèle joue un rôle important dans le processus de validation. En construisant et résolvant les équations de recalage, cette étape recherche un groupe de paramètres qui modifie le modèle initial pour réduire l'écart entre les mesures expérimentales et les réponses estimées par le modèle. La sélection des paramètres à recalculer a un rôle primordial dans le processus de recalage. Une bonne technique de sélection des paramètres aide la procédure de recalage à converger rapidement.

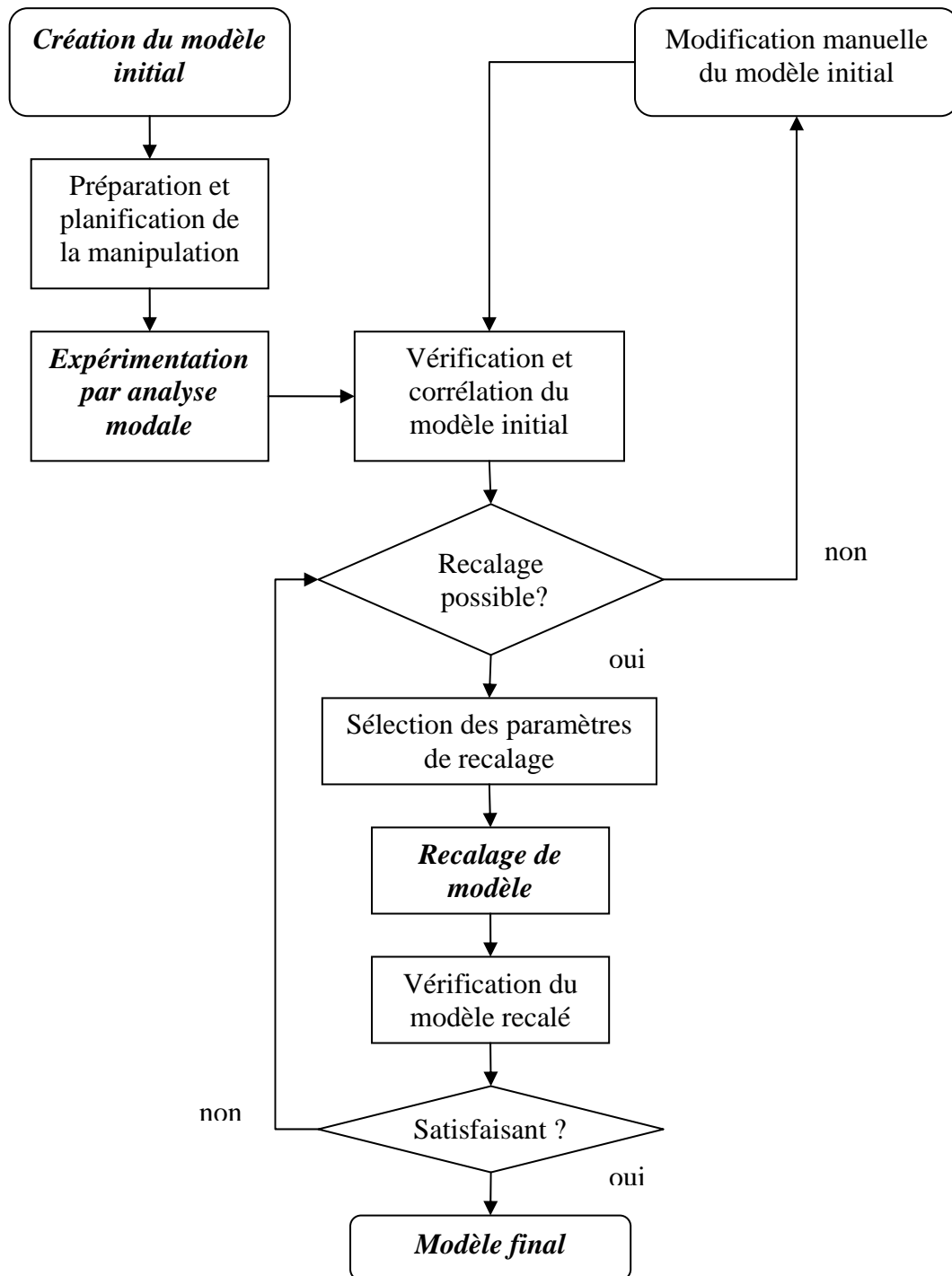


Figure 1. Organigramme du processus de validation de modèle

Différentes méthodes de recalage existent, elles dépendent des paramètres choisis, du type de mesures exploitées, et de la fonction coût à exploiter ou minimiser. La procédure de validation ne prend fin que lorsque le modèle de recalage sera apte à donner des résultats satisfaisants.

Plan de la thèse

Cette thèse est répartie en cinq chapitres débutant chacun par une présentation du contenu et se terminant par une conclusion.

Le **chapitre premier** prépare les outils mathématiques et algorithmiques nécessaires à l'identification de caractéristiques et de défauts. Pour ce faire, ce chapitre est réparti en quatre parties.

La *première partie* présente les techniques de corrélation des modèles éléments finis, dans le but de mesurer ou quantifier la précision de ces derniers par comparaison entre les mesures expérimentales et les valeurs prédites par le modèle, afin d'évaluer les erreurs de modélisation ou l'influence du bruit.

La *deuxième partie* présente les méthodes de réduction et d'expansion de données modales expérimentales, éléments nécessaires au processus de comparaison, corrélation, et d'identification que ce soit en détection de défauts ou recalage de modèle.

Dans le but de réaliser des mesures expérimentales riches en informations spécialement pour l'exploitation dans le recalage, les tests modaux doivent être bien planifiés. Pour ce faire, la *troisième partie* de ce chapitre présente différentes méthodes de sélection des points d'excitation et des degrés de liberté de mesure.

La *dernière partie* de ce chapitre développe différentes techniques de recalage de modèles éléments finis, en présentant l'intérêt de ces techniques, leurs avantages et inconvénients en classifiant ces méthodes en fonction du type de mesures exploitées, des outils d'analyse et de corrélation utilisés, des méthodes d'expansion ou réduction exploitées, et des fonctions coût choisies pour les méthodes de minimisation.

Le **chapitre deux** est destiné aux méthodes développées dans le cadre de cette thèse pour les structures linéaires.

1. Une méthode de choix des points de mesure utilisant la dérivée première de la réponse fréquentielle du mouvement a été proposée. Elle a été testée dans le cas de la détection de défauts dans une structure en treillis doublement encadrée dont le comportement dynamique et les défauts ont été simulés numériquement. Les résultats des tests effectués en utilisant le recalage de modèle montre l'efficacité de la méthode proposée. Compte tenu de la matrice de sensibilité utilisée, cette méthode est adéquate pour les applications de détection de défauts mécaniques dans les structures.

2. Une méthode de recalage de modèle éléments finis basée sur les fonctions de réponse fréquentielle a été proposée. Celle-ci est une technique itérative basée sur l'approximation des moindres carrés en utilisant une paramétrisation fréquentielle intrinsèque pour l'amélioration de la convergence.
3. Une autre méthode de recalage de modèle éléments finis utilisant l'approximation non linéaire des moindres carrés dans le domaine fréquentiel a été proposée. Celle-ci utilise une minimisation préliminaire qui considère la plus petite distance entre la fonction de réponse fréquentielle analytique et celle mesurée dans le but d'affecter une valeur à la fréquence analytique correspondant à la fréquence de mesure choisie. Souvent les paramètres de masse qui sont de second ordre en fréquence compensent les erreurs de raideur dans les méthodes de recalage, dans notre cas, la séparation des variables rend possible le choix de mesures différentes pour chacune des étapes du recalage, avantage très utile pour éviter le phénomène de compensation. La méthode ainsi présentée aidée par la paramétrisation fréquentielle montre une simplicité d'implémentation et une bonne stabilité numérique. La séparation des variables utilisée dans la méthode de recalage représente un outil qui peut être utilisé avantageusement dans le contexte du recalage de modèles analytiques.
4. Une méthode de détection de défauts dans les structures mécaniques basée sur le recalage de modèle éléments finis a été proposée. Celle-ci est une stratégie de correction incrémentale qui procède par incrément de correction sur l'élément détecté grâce à la fonction de corrélation dans le domaine fréquentiel qui matérialise le rapprochement entre les mesures fréquentielles prédites et mesurées. La méthode ainsi présentée montre une simplicité de mise en œuvre et une bonne stabilité numérique.

Le **troisième chapitre** présente un aperçu des techniques d'identification et de recalage de modèle non linéaires ainsi que la formulation non linéaire par la fonction descriptive dans le domaine fréquentiel. Ceci nous permet de mettre en œuvre la simulation numérique des non linéarités localisées.

En utilisant la formulation par la fonction descriptive, le **quatrième chapitre** présente l'application des méthodes de recalages proposées pour la linéarisation des systèmes faiblement non linéaires.

Le **cinquième chapitre**, présente une méthode d'identification dans le domaine non linéaire, basée sur la représentation générale explicite proposée dans le domaine temporel

Une **conclusion** générale clôture la thèse en présentant les différentes propositions et les résultats obtenus avec une récapitulation des conclusions et de l'intérêt des différentes propositions de ce travail de recherche et présente quelques suggestions pour le travail futur.

RECALAGE DE MODELES DE STRUCTURES LINEAIRES

I.1 TECHNIQUES DE COMPARAISON ET CORRELATION POUR LE RECALAGE DE MODELES	11
I.1.1 Corrélations vectorielles	11
I.1.2 Corrélation de l'orthogonalité	16
I.1.3 Corrélation sur les fonctions de réponse fréquentielle	17
I.2 INCOMPATIBILITE ENTRE LES DONNEES MESUREES ET CELLES DU MODELE LEMENTS FINIS	20
I.2.1 Techniques de réduction	20
I.2.2 Expansion des mesures	24
I.3 CHOIX DES POINTS DE MESURE ET D'EXCITATION POUR LE RECALAGE DE MODELE ELEMENTS FINIS	27
I.3.1 Sélection des points de mesure	27
I.3.2 Sélection des points d'excitation	36
I.3.3 Sélection des modes propres par approche sensitive	37
I.3.4 Remarques	39
I.4 RECALAGE DE MODELES ELEMENTS FINIS	39
I.4.1 Méthodes modales directes	40
I.4.2 Méthodes itératives	41

I RECALAGE DE MODELES DE STRUCTURES LINEAIRES

Ce chapitre est consacré aux différents aspects et techniques requis pour la mise en œuvre du recalage de modèle éléments finis dans la dynamique de structures. Pour permettre une comparaison fiable des résultats du recalage de modèle, nous présentons les différentes techniques disponibles pour la comparaison ou corrélation des données analytiques et expérimentales. Pour permettre une bonne préparation des essais expérimentaux, nous avons développé les techniques de réduction et d'expansion de modèle pour permettre un recalage de modèle réussi. Le choix des points de mesure et d'excitation a été pris en compte en présentant les dernières méthodes existantes. Enfin, différentes techniques et méthodes de recalage ont été discutées dans ce chapitre.

I.1 TECHNIQUES DE COMPARAISON ET CORRELATION POUR LE RECALAGE DE MODELES

Avant de recalculer ou de corriger un modèle éléments finis il est utile d'avoir une idée sur sa précision. Pour cela des fonctions de corrélation existent ; elles font une comparaison entre les mesures expérimentales et les valeurs prédites par le modèle EF. Une des premières familles de méthodes est basée sur la corrélation des modes (Correlated Mode Pairs CMP), pour évaluer les erreurs de modélisation ou l'influence du bruit. Quand le bruit de mesure est grand et pour plus de précision on utilise d'autres quantités comme les fonctions de réponse fréquentielle FRF. Le critère de corrélation modal le plus utilisé est le critère d'assurance modal (Modal Assurance Criterion MAC) [1]. Parfois ce critère donne des valeurs qui ne correspondent pas à la réalité, il peut donner une mauvaise corrélation pour deux modes qui sont visiblement proches et inversement une bonne corrélation pour des modes très éloignés. Plusieurs travaux ont été développés dans le contexte de la corrélation depuis la présentation du MAC en 1982. Néanmoins, le problème du meilleur critère de corrélation n'est pas définitivement résolu.

I.1.1 Corrélations vectorielles

Les méthodes de corrélation vectorielles permettent de comparer deux vecteurs ou deux ensembles de vecteurs propres.

I.1.1.1 Critère d'assurance modal

Le critère d'assurance modal MAC de comparaison de deux modes $\{\phi_A\}_i$ et $\{\phi_X\}_j$ est donné par [1]

$$MAC(\{\phi_A\}_i, \{\phi_X\}_j) = \frac{\left(\sum_{k=1}^N \phi_{Aki} \phi_{Xkj}^* \right)^2}{\sum_{k=1}^N \phi_{Aki} \phi_{Aki}^* \sum_{k=1}^N \phi_{Xkj} \phi_{Xkj}^*} \quad (1)$$

où les modes qui doivent être comparés doivent être normés de la même manière. Le MAC a été décrit comme la cohérence entre deux vecteurs ou comme l'écart au sens des moindres carrés entre les coefficients des deux vecteurs. Un résultat MAC=1 indique une corrélation parfaite et MAC=0 indique une absence de corrélation.

Ce facteur de corrélation a été pendant longtemps très utilisé mais il représente quelques déficiences. Lieven et Ewins [2] ont indiqués que le MAC ne donne aucune explication quand la corrélation est mauvaise ; Mitchell [3] explique que le MAC n'est pas sensible aux petites variations mais plutôt aux grands écarts entre les modes ; Blaschke et Ewins [4] indiquent que le MAC ne permet pas de localiser des erreurs de modélisation ; et Brechlin et al [5] écrivent que le MAC donne des résultats incorrects quand des ddls de rotation sont considérés. Vu ces inconvénients plusieurs variantes de ce facteur sont apparues.

I.1.1.2 Facteur d'échelle modal

Le facteur d'échelle modal (Modal Scale Factor MSF) entre deux modes $\{\phi_A\}_i$ et $\{\phi_X\}_i$ est donné par [1]

$$MSF(\{\phi_A\}_i, \{\phi_X\}_i) = \frac{\sum_{k=1}^N \phi_{Aki} \phi_{Xki}}{\sum_{k=1}^N \phi_{Aki} \phi_{Aki}} \quad (2)$$

où les modes à comparer sont de même norme. Le MAC donne une comparaison quantitative entre deux modes, par contre le MSF donne une comparaison plutôt qualitative. Il n'est donc pas suffisant pour donner un bon degré de corrélation.

I.1.1.3 Critère d'assurance modal par coordonnée

Le critère d'assurance modal par coordonnée (Coordinate Modal Assurance Criterion COMAC) d'un degré de liberté k est donné par [2]

$$COMAC_k = \frac{\left(\sum_{j=1}^m \phi_{A_{kj}} \phi_{X_{kj}} \right)^2}{\sum_{j=1}^m \phi_{A_{kj}} \phi_{A_{kj}} \sum_{j=1}^m \phi_{X_{kj}} \phi_{X_{kj}}} \quad (3)$$

Le COMAC est considéré comme un MAC avec réarrangement des vecteurs à comparer. Le MAC compare deux modes pour un ddl spécifique alors que le COMAC compare l'influence du ddl pour les deux modes corrélés. Ce facteur permet d'identifier le ddl d'une structure qui a relativement une mauvaise corrélation avec les deux modes mesuré et analytique ; c'est-à-dire le ddl qui contribue le moins à l'augmentation de la valeur du MAC. Lorsque $COMAC=1$ on dit que le ddl correspond à une parfaite corrélation avec les deux modes considérés. Lorsque $COMAC=0$ on dit le ddl n'a aucune corrélation avec chacun des deux modes.

I.1.1.4 Extension du critère d'assurance modal par coordonnée

Hunt [6] indique que le COMAC ne peut pas détecter les erreurs de mesure comme celles relatives à l'échelle ou à la polarité et propose une extension de ce facteur (Extended Coordinate Assurance Criterion ECOMAC) pour surmonter cet inconvénient. Le ECOMAC est donné par

$$ECOMAC_k = \frac{\sum_{j=1}^m \phi_{A_{kj}} \phi_{X_{kj}}}{2m} \quad (4)$$

Comme pour le COMAC les deux modes doivent être normés. Le COMAC considère les ddls avec la même importance et ne favorise aucun ddl par rapport aux autres. Le ECOMAC considère par contre une amplitude relative de chaque ddl et donc les modes les plus flexibles (de grande amplitude) vont dominer la valeur de ECOMAC. L'interprétation numérique du ECOMAC est contraire à celle du COMAC ; un résultat $ECOMAC=0$ d'un ddl donné indique qu'il a une parfaite correspondance avec les modes corrélés et quand $ECOMAC=1$ alors on dit qu'il n'y a aucune corrélation et que le ddl considéré ne contribue pas à l'augmentation de la valeur du MAC.

Une autre forme de ECOMAC appelée aussi COMAC est décrite dans [4] et s'écrit

$$COMAC_k = 1 - \frac{\sum_{j=1}^m \phi_{A_{kj}} \phi_{X_{kj}}}{2m} \quad (5)$$

Ce facteur est identique à ECOMAC sauf dans l'interprétation des résultats qui lorsque COMAC=1 donne une bonne corrélation et inversement lorsque COMAC=0.

I.1.1.5 Fonction du facteur modal par coordonnée

La fonction du facteur modal par coordonnée (Coordinate Modal Factor Function COMEF) d'un ddl k est donnée par [7]

$$COMEF_k = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (WM_{kj})(EM_{kj}) \quad (6)$$

avec
$$WM_{kj} = \phi_{A_{kj}} \sum_{l=1}^m \phi_{A_{kl}} \quad (7)$$

et
$$EM_{kj} = \frac{\phi_{A_{kj}} \phi_{X_{kj}}}{\phi_{A_{kj}}} \cdot 100 \quad (8)$$

Les modes utilisés doivent être de même norme et prédéterminés par une corrélation utilisant le MAC. Comme le COMAC, on tente d'identifier le ddl de la structure ayant la plus mauvaise corrélation avec les modes, qui contribue donc le moins à la valeur du MAC. Le résultat est en pourcentage de l'erreur et peut être positif ou négatif. Plus la valeur absolue du COMEF est grande plus l'erreur est grande. Le signe représente le sens de l'erreur par rapport à l'ensemble des modes choisis.

I.1.1.6 Critère d'assurance modal inverse

Mitchell [3] a remarqué que la valeur du MAC est dominée par les anti-nœuds des modes propres et par conséquent, il n'est pas sensible aux petites modifications des modes. Pour surmonter cet inconvénient il propose le critère inverse du MAC (Inverse Modal Assurance Criterion IMAC) donné par

$$IMAC(\{\phi_A\}_i, \{\phi_X\}_j) = \frac{\left(\sum_{k=1}^N \phi_{A_{kj}}^{-1} \phi_{X_{kj}}^{-1} \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^N \phi_{A_{kj}}^{-1} \phi_{A_{kj}}^{-1} \right) \left(\sum_{k=1}^N \phi_{X_{kj}}^{-1} \phi_{X_{kj}}^{-1} \right)} \quad (9)$$

où comme le MAC les modes à comparer doivent être de même norme. Ceci permet de quantifier le MAC proche des nœuds modaux et loin des anti-nœuds (les plus grandes déformations des nœuds). Ce facteur est utile pour détecter les différences entre les nœuds modaux, par contre, il ne permet pas de corrélérer correctement. Il peut être interprété comme une corrélation de la position des nœuds modaux.

I.1.1.7 Critère d'assurance modal normé

Brechlin et al [5] indiquent que le MAC ne permet pas de manipuler correctement les modes contenant des ddls de translation et de rotation simultanément. Ils ont alors définis le critère d'assurance modal inverse (Scaled Modal Assurance Criterion SMAC) entre deux modes $\{\phi_A\}_i$ et $\{\phi_X\}_j$

$$SMAC(\{\phi_A\}_i, \{\phi_X\}_j) = \frac{(\{\phi_A\}_i^T [W] \{\phi_X\}_j)^2}{(\{\phi_A\}_i^T [W] \{\phi_A\}_i)(\{\phi_X\}_j^T [W] \{\phi_X\}_j)} \quad (10)$$

Ce facteur permet de faire une mixture des ddls de rotation avec les ddls de translation. Le MAC est souvent dominé par un ou plusieurs ddls de rotation puisqu'ils correspondent à des fluctuations plus importantes que celles des ddls de translation. Ceci est évité grâce à la matrice des facteurs de pondération [W].

En pratique les ddls de rotation ne sont pas facilement mesurables. Généralement on se limite aux ddls de translation. Ceci montre que le SMAC sera utile seulement dans la comparaison des modes analytiques comme le résultat de deux modèles EF par exemple.

I.1.1.8 Nouveau critère d'assurance modal

Le nouveau MAC (New MAC NMAC) [4] considère d'abord le MAC puis, recherche le ddl qui contribue le moins à sa valeur c'est-à-dire celui qui minimise le MAC. La recherche se fait par suppression successive des ddls.

Le NMAC comme le COMAC et le ECOMAC permet alors de déterminer le ddl qui contribue le moins au MAC. Contrairement à ces deux facteurs, le NMAC a l'avantage d'utiliser les vecteurs propres sans qu'ils soient de même norme.

I.1.2 Corrélation de l'orthogonalité

Pour comparer les modes on peut utiliser le critère de l'orthogonalité. La base des solutions propres est que les vecteurs propres sont orthogonaux par rapport à la matrice de masse

$$[\phi_A][M][\phi_A] = [I] \quad (11)$$

où [I] est la matrice identité. En pratique [I] est légèrement différente de l'identité, c'est-à-dire que les valeurs hors diagonale sont différentes de zéro mais très proches. Ces éléments hors de la diagonale, donnent une estimation de l'orthogonalité qu'on peut aussi considérer comme critère de convergence. La matrice masse analytique est utilisée au lieu de la matrice masse expérimentale.

Le nombre de ddls mesurés est souvent très petit devant le nombre de ddls du modèle analytique. Pour cela une méthode d'extension des mesures ou de réduction du modèle EF est nécessaire. Quelques méthodes de réduction [8] rendent la corrélation de l'orthogonalité plus coûteuse en terme de calcul que la corrélation en vecteurs.

I.1.2.1 Orthogonalité normée

Le facteur d'orthogonalité normée (Normalized Cross Orthogonality NCO) [9] est donné par

$$NCO(\{\phi_X\}_i, \{\phi_A\}_j) = \frac{(\{\phi_X\}_i^T [M_A] \{\phi_A\}_j)^2}{(\{\phi_X\}_i^T [M_A] \{\phi_X\}_i)(\{\phi_A\}_j^T [M_A] \{\phi_A\}_j)} \quad (12)$$

où [M_A] est la matrice de masse analytique. Comme pour le MAC les modes doivent être de même norme. NCO=1 indique une corrélation parfaite tandis que NCO=0 indique l'absence de corrélation.

I.1.2.2 Pseudo contrôle de l'orthogonalité

Le Pseudo contrôle de l'orthogonalité (Pseudo Orthogonality Check POC) est donné par [10], [11], [12]

$$POC_{ij} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \phi_{Xki} m_{Akl} \phi_{Alj} \quad (13)$$

POC utilise une matrice masse analytique des ddls mesurés ou des ddls analytiques. Dans ce cas une méthode de réduction de la matrice masse ou d'expansion des vecteurs propres est

nécessaire. Idéalement les éléments hors diagonale doivent être très proches de zéro mais des valeurs comme 0.1 sont acceptables pour quelques applications. En pratique même si des valeurs hors diagonale sont plus petites que 0.05 la corrélation reste toujours mauvaise.

I.1.2.3 Contrôle de l'orthogonalité aux coordonnées

Avitabile et Pechinsky [13] ont Développé le critère de contrôle de l'orthogonalité aux coordonnées (Coordinate Orthogonality Check CORTHOG) pour identifier la contribution individuelle des ddls sur l'orthogonalité produite par POC. Ceci se fait en prenant élément par élément la différence entre le POC et la valeur obtenue à partir de l'orthogonalisation analytique. CORTHOG est donné par

$$CORTHOG_{ij}^{kl} = \frac{(\phi_{Xki} m_{Akl} \phi_{Alj})(\phi_{Aki} m_{Akl} \phi_{Alj})}{\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N (\phi_{Xkl} m_{Akl} \phi_{Alj})(\phi_{Akl} m_{Akl} \phi_{Alj})} \quad (14)$$

où kl sont les indices des deux ddls considérés et ij sont les ceux des deux modes considérés. L'obtention des éléments hors diagonale proches de zéro n'indique pas nécessairement une bonne corrélation.

I.1.2.4 Orthogonalité normée utilisant la réduction SEREP

En utilisant la matrice de masse réduite par la méthode de réduction SEREP (voir §I.2.1.5), on définit dans [14] le critère d'orthogonalité normée utilisant la réduction SEREP (SEREP normalized Cross Orthogonality SCO) par

$$SCO(\{\phi_X\}_i, \{\phi_A\}_j) = \frac{(\{\phi_X\}_i^T ([\phi_A]^{+T} [\phi_A]^+) \{\phi_A\}_j)^2}{(\{\phi_X\}_i^T ([\phi_A]^{+T} [\phi_A]^+) \{\phi_X\}_i) (\{\phi_A\}_j^T ([\phi_A]^{+T} [\phi_A]^+) \{\phi_A\}_j)} \quad (15)$$

où ()⁺ représente la pseudo inverse.

Ce facteur est similaire au NCO avec l'exception que la matrice de masse analytique est remplacée par la matrice de masse réduite par la méthode SEREP. Le SCO est plus sensible que le MAC.

I.1.3 Corrélation sur les fonctions de réponse fréquentielle

L'utilisation des fonctions de réponse fréquentielle FRF au lieu des modes propres est plus efficace puisque les FRFs expérimentales sont directement obtenues expérimentalement alors que les modes nécessitent des calculs se basant sur ces mesures. Ce passage des FRFs aux modes fait intervenir donc des erreurs de calcul supplémentaires.

I.1.3.1 Critère d'assurance du domaine fréquentiel

Le critère d'assurance du domaine fréquentiel (Frequency Domain Assurance Criterion FDAC) est donné par [15]

$$FDAC(\omega_A, \omega_X)_k = \frac{\left(\sum_{j=1}^N H_{Ajk}(\omega_A) H_{Xjk}^*(\omega_X) \right)^2}{\left(\sum_{j=1}^N H_{Ajk}(\omega_A) H_{Ajk}^*(\omega_A) \right) \left(\sum_{j=1}^N H_{Xjk}(\omega_X) H_{Xjk}^*(\omega_X) \right)} \quad (16)$$

où $H_A(\omega_A)$ est la FRF analytique à la fréquence analytique ω_A , et $H_X(\omega_X)$ est la FRF mesurée à la fréquence expérimentale ω_X . k est le ddl d'excitation.

Le FDAC est analogue au MAC et donne des valeurs entre 0 et 1. FDAC=1 indique une parfaite corrélation et FDAC=0 indique l'absence de corrélation. Pascual et al [16] ont expliqués que le FDAC risque de donner une bonne corrélation pour des FRFs déphasés de 180° , ce qui n'a aucune signification physique. Les deux FRFs doivent être dans le même plan de phase. Ils proposent un nouveau FDAC évitant cette situation.

$$FDAC(\omega_A, \omega_X) = \frac{H_A^T(\omega_A) H_X(\omega_X)}{H_A^T(\omega_A) H_A(\omega_A)} \quad (17)$$

Ce nouveau FDAC donne des valeurs entre -1 et 1. Les valeurs négatives montrent que les deux FRFs sont dans des phases opposées. FDAC=1 donne une parfaite corrélation des FRFs.

I.1.3.2 Facteur d'échelle des réponses fréquentielles

Le facteur d'échelle des réponses fréquentielles (Frequency Response Scale Factor FRSF) est donné par [16]

$$FRSF(\omega_A, \omega_X) = \frac{H_A^T(\omega_A) [S] H_X(\omega_X)}{H_A^T(\omega_A) [S] H_A(\omega_A)} \quad (18)$$

où $[S]$ est une matrice de pondération.

Le FRSF est analogue au MSF et donne des valeurs entre -1 et 1. Le FDAC donne une comparaison quantitative des FRFs, par contre le FRSF donne une comparaison qualitative. Par conséquent le FRSF n'est pas suffisant pour évaluer le degré de corrélation.

I.1.3.3 Critère d'assurance des réponses fréquentielles

Le critère d'assurance des réponses fréquentielles (Frequency Response Assurance Criterion FRAC) est donné par [17], [18]

$$FRAC(j)_k = \frac{\left(\sum_{i=1}^m H_{Ajk}(\omega_i) H_{Xjk}^*(\omega_i) \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^m H_{Ajk}(\omega_i) H_{Ajk}^*(\omega_i) \right) \left(\sum_{i=1}^m H_{Xjk}(\omega_i) H_{Xjk}^*(\omega_i) \right)} \quad (19)$$

j étant le ddl de mesure et k le ddl d'excitation.

Le FRAC est analogue au COMAC et donne des valeurs entre 0 et 1. FRAC=1 indique une parfaite corrélation. Heylen et Avitabile [18] trouvent que l'interprétation des valeurs de FRAC est très complexe. Pour les structures faiblement amorties qui donnent des rapports d'amplitude maximum sur amplitude minimum très grands, FRAC peut donner de faibles valeurs pour des FRFs visiblement bien corrélées. Ils suggèrent d'utiliser cette formule en valeur absolue ou en logarithme.

I.1.3.4 Critère d'assurance modal et fréquentiel

En se basant sur le FRAC, Fotsch [14] a proposé le critère du MAC dans le domaine fréquentiel ou critère d'assurance modal et fréquentiel (Modal FRF Assurance Criterion MFAC) défini par [14], [19]

$$MFAC(\omega_A, \omega_X) = \frac{\left(\sum_{j=1}^N \phi_{Aj}(\omega_A) H_{Xjk}^*(\omega_X) \right)^2}{\left(\sum_{j=1}^N \phi_{Aj}(\omega_A) \phi_{Aj}(\omega_A) \right) \left(\sum_{j=1}^N H_{Xjk}(\omega_X) H_{Xjk}^*(\omega_X) \right)} \quad (20)$$

où $\phi_A(\omega_A)$ est le mode analytique pour une valeur fréquentielle analytique ω_A .

Le MFAC est analogue au MAC et donne des valeurs entre 0 et 1. La valeur MFAC=1 indique une parfaite corrélation et MFAC=0 indique l'absence de corrélation.

Le MFAC et le FDAC représentés graphiquement en fonction de la fréquence sont une extension du graphe de FMAC.

Le MFAC n'est utile que pour les modes faiblement amortis puisque les modes analytiques sont des quantités réelles obtenues à partir du modèle EF non amortis et les FRFs sont des quantités complexes comportant l'effet de l'amortissement.

I.2 INCOMPATIBILITE ENTRE LES DONNEES MESUREES ET CELLES DU MODELE ELEMENTS FINIS

Dans la plupart des cas pratiques, le nombre de degrés de liberté du modèle EF excède de loin celui des données mesurées. Le manque de degrés de liberté mesurés peut être résolu de deux manières, en réduisant le modèle EF à la taille des ddls expérimentaux en choisissant les degrés de liberté mesurés comme « maîtres », ou en augmentant les données expérimentales pour inclure les degrés de liberté non mesurés dans Modèle EF. Ces méthodes, appelées techniques de réduction et d'expansion de mesure sont brièvement décrites ci-dessous.

I.2.1 Techniques de réduction

La réduction ou expansion de données modales expérimentales est nécessaire au processus de comparaison, corrélation, et d'identification que ce soit en détection de défauts ou recalage de modèle.

A cause du grand décalage entre le nombre de ddls du modèle EF et le nombre de ddls mesurés, des efforts ont été entrepris dans le but de réduire les erreurs dues aux modèles de réduction. La méthode la plus utilisée est la méthode de condensation statique de Guyan [20]. D'autres techniques existent comme la méthode de réduction dynamique, méthode améliorée de réduction de système IRS et le Processus de réduction expansion de système SEREP.

I.2.1.1 Réduction de système matriciel

Dans toutes les techniques de réduction il existe une relation entre les ddls mesurés (ddls maîtres) et les ddls non mesurés (ddls esclaves)

$$\{y_N\} = \begin{Bmatrix} \{y_m\} \\ \{y_s\} \end{Bmatrix} = [T] \{y_m\}$$

$\{y\}$ représente le déplacement, $[T]$ la matrice de transformation et N le nombre total de ddls dans le modèle EF.

Les matrices de masse et de raideur peuvent être calculées par

$$[M_m] = [T]^T [M_N] [T]$$

$$[K_m] = [T]^T [K_N] [T]$$

I.2.1.2 Méthode de réduction de Guyan

La méthode de réduction de Guyan [20] a été utilisée pendant longtemps comme le meilleur outils de réduction de grands modèles analytiques.

Soit l'équation du mouvement

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = \{f\} \quad (46)$$

En sub-divisionnant la matrice en ddls mesurés indice « m » et non mesurés indice « s » et en négligeant les termes d'inertie nous obtenons

$$\begin{bmatrix} [K_{mm}] & [K_{ms}] \\ [K_{sm}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{y_m\} \\ \{y_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_m\} \\ \{f_s\} \end{Bmatrix} \quad (47)$$

A partir de (47) on peut tirer

$$\{y_s\} = -[K_{ss}]^{-1}[K_{sm}]\{y_m\} + [K_{ss}]^{-1}\{f_s\} \quad (48)$$

En supposant qu'il n'y a pas de forces appliquées aux ddls esclaves, la réduction de Guyan donne la matrice de transformation suivante

$$[T_1] = \begin{bmatrix} [I] \\ -[K_{ss}]^{-1}[K_{sm}] \end{bmatrix} \quad (49)$$

Cette méthode est aussi appelée méthode de réduction statique car elle néglige l'effet de l'inertie. La méthode de réduction de Guyan dépend considérablement de la sélection des ddls maîtres. Une mauvaise sélection conduit à un modèle imprécis.

I.2.1.3 Technique de réduction améliorée de système

La technique améliorée de réduction de système (Improved Reduced System IRS) a été développée par O'callahan [21] pour compenser les effets de la masse dans la méthode de Guyan, surtout quand la sélection des ddls maîtres n'est pas optimale. Cette technique améliore la précision de la condensation statique en approximant le second terme de l'équation (48)

$$[K_{ss}]^{-1}\{f_s\} = \left[[K_{ss}]^{-1}[M_{sm}] - [K_{ss}]^{-1}[M_{ss}][K_{ss}]^{-1}[K_{sm}] \right] [M_R]^{-1}[K_R]\{x_m\} \quad (50)$$

où $[M_R]$ et $[K_R]$ sont les matrices de masse et de raideur réduite avec la méthode de Guyan

$$[M_R] = [T_1]^{-1}[M][T_1]$$

$$[K_R] = [T_1]^{-1}[K][T_1]$$

en introduisant (50) dans (48) et en comparant les termes relatifs à la matrice de transformation, nous obtenons

$$[T_2] = [T_1] + [T_2'] \quad (51)$$

avec

$$[T_2'] = [S][M][T_1][M_R]^{-1}[K_R] \quad (52)$$

et

$$[S] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [K_{ss}]^{-1} \end{bmatrix}$$

I.2.1.4 Méthode de réduction dynamique

Une extension de la réduction de Guyan est présentée dans [22] en considérant les termes d'inertie dans l'équation (46). La procédure est semblable à celle de Guyan sauf que la transformation est basée sur la matrice de raideur dynamique $[Z]$ au lieu de la matrice de raideur $[K]$. Dans ce cas, la matrice de transformation s'écrit

$$[T_3] = \begin{bmatrix} [I] \\ -([K_{ss}] - \omega^2[M_{ss}])^{-1}([K_{sm}] - \omega^2[M_{sm}]) \end{bmatrix} \quad (53)$$

La sélection des meilleures valeurs de la fréquence ω est particulièrement indispensable. Dans [23] des fréquences ont été recommandées.

L'inversion de la matrice de raideur dynamique est coûteuse du point de vue numérique. La procédure nécessite non seulement l'inversion de $[Z_{ss}] = [K_{ss}] - \omega^2[M_{ss}]$ mais aussi le calcul de la matrice de transformation pour chaque valeur de la fréquence ω ou chaque mode.

Plusieurs techniques d'approximation ont été proposées pour le calcul de $[Z_{ss}]$. Kidder [23] utilise une série géométrique pour inverser cette matrice

$$\begin{aligned} ([K_{ss}] - \omega^2[M_{ss}])^{-1} &= [K_{ss}]^{-1} [I - \omega^2[M_{ss}][K_{ss}]^{-1}]^{-1} \\ ([K_{ss}] - \omega^2[M_{ss}])^{-1} &= [K_{ss}]^{-1} ([I + \omega^2[M_{ss}][K_{ss}]^{-1} + \omega^4[M_{ss}][K_{ss}]^{-1}[M_{ss}][K_{ss}]^{-1} + \dots) \end{aligned} \quad (54)$$

En introduisant cette équation dans (53) on obtient

$$[T_3] = \begin{bmatrix} [I] \\ -[K_{ss}]^{-1}[K_{sm}] + \omega^2([K_{ss}]^{-1}([M_{sm}] - [M_{ss}][K_{ss}]^{-1}[K_{sm}])) + \\ \omega^4([K_{ss}]^{-1}[M_{ss}][K_{ss}]^{-1}([M_{sm}] - [M_{ss}][K_{ss}]^{-1}[K_{sm}])) + \dots \end{bmatrix} \quad (55)$$

En négligeant les termes en ω^2 et plus, (55) revient à l'équation (49) qui est la réduction statique de Guyan. Si les termes supérieurs à ω^2 sont introduits le résultat sera identique à la formulation de IRS.

Petersman [24] calcule l'inverse de $[Z_{ss}]$ en utilisant les solutions propres du problème associé

$$[Z_{ss}]^{-1} = [\Phi][(\Lambda) - \omega^2[I]]^{-1}[\Phi]^T \quad (56)$$

où $[\Phi]$ et $[\Lambda]$ sont respectivement les matrices modale et spectrale relatives aux ddls esclaves. Dans l'équation (56) il n'y a que la matrice diagonale $[(\Lambda) - \omega^2[I]]^{-1}$ qui dépend de la fréquence. Donc son inversion est plus simple que l'inversion de la matrice de raideur dynamique. Il est évident que lorsque $\lambda_i \gg \omega^2$ l'élément $(\lambda_i - \omega^2)^{-1}$ va tendre vers zéro. Le problème sera plus simplifié en ignorant les éléments de la matrice spectrale ayant $\lambda \gg \lambda_i$. Le nombre de termes utilisés dépend des fréquences et valeurs propres du système réduit aux ddls esclaves. Pour améliorer la précision, il serait utile d'introduire un grand nombre de modes.

1.2.1.5 Processus de réduction expansion de système

Cette méthode (System Equivalent Reduction Expansion Process SEREP) a été d'abord introduite par O'callahan et al [25] qui ont proposé d'estimer les mesures des ddls de rotation à partir des mesures des ddls de translation. SEREP a été jugée capable d'améliorer la précision de certaines applications comme les corrélations d'orthogonalité, l'étude des réponses forcées linéaires et non linéaires, et le recalage de modèle.

La matrice de transformation peut être développée en utilisant la méthode inverse de la matrice modale

$$[T_4] = \begin{bmatrix} [\Phi_{mr}] \\ [\Phi_{sr}] \end{bmatrix} [\Phi_{mr}]^+$$

où $[\]^+$ représente la pseudo inverse et r les modes utilisés pour former la matrice de transformation. Ce processus utilise la méthode inverse qui permet d'avoir des informations concernant les modes sélectionnés aux ddls sélectionnés. Ceci permet au processus de réduction de préserver le comportement dynamique du système global dans un système réduit, chose impossible dans les techniques de réduction de Guyan ou IRS.

I.2.2 Expansion des mesures

Une autre approche toute aussi efficace que la réduction de modèle EF est l'expansion des modes mesurés en estimant les mesures des ddls non mesurés. En général les résultats des méthodes d'expansion sont plus efficaces qu'une légère augmentation du nombre de ddls. Il est à noter que n'importe quelle méthode de réduction peut être utilisée pour concevoir le processus d'expansion.

Toutes les méthodes d'expansion utilisent une matrice de transformation qui traduit les vecteurs modaux $[\Phi_X]$ en espace vectoriel complet $[\Phi]$.

$$[\Phi_{Nr}] = \begin{bmatrix} [\Phi_{mr}] \\ [\Phi_{sr}] \end{bmatrix} = [T]_{Nm} [\Phi_X]_{mr} \quad (58)$$

où N est le nombre de ddls du modèle EF et m étant le nombre de ddls mesurés.

I.2.2.1 Méthode d'expansion de Guyan

Cette technique d'expansion est l'inverse du processus de condensation décrit précédemment. Elle est basée sur l'équation sub-divisée

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [K_{mm}] & [K_{ms}] \\ [K_{sm}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} - \lambda_i \begin{bmatrix} [M_{mm}] & [M_{ms}] \\ [M_{sm}] & [M_{ss}] \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\phi_m\}_i \\ \{\phi_s\}_i \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (59)$$

En utilisant la même procédure que la technique de réduction, on obtient la matrice de transformation

$$[T_1] = \begin{bmatrix} [I] \\ -[K_{ss}]^{-1} [K_{sm}] \end{bmatrix} \quad (60)$$

La méthode d'expansion de Guyan peut être interprétée comme la détermination du mode $\{\phi\}_i$ qui minimise l'énergie totale de déformation du $i^{\text{ème}}$ mode de façon à ce que les éléments soient identiques à ceux mesurés [26].

I.2.2.2 Expansion IRS

L'expansion IRS est la version modifiée de l'expansion de Guyan. Au lieu de minimiser l'énergie de déformation seule, la méthode minimise simultanément l'énergie de déformation et l'énergie des forces extérieures.

La matrice de transformation de l'expansion IRS est donnée par

$$[T_2] = [T_1] + [S][M][T_1][M_R]^{-1}[K_R] \quad (61)$$

I.2.2.3 Expansion dynamique

Le processus d'expansion dynamique est basé sur l'équation du mouvement dans le domaine fréquentiel écrite pour une fréquence donnée. La matrice de transformation tirée de la partie supérieure de l'équation (59) s'écrit

$$[T_3] = \begin{bmatrix} [I] \\ -\left([K_{ss}] - \lambda_i [M_{ss}]\right)^{-1} \left([K_{sm}] - \lambda_i [M_{sm}]\right) \end{bmatrix} \quad (62)$$

où λ_i est la $i^{\text{ème}}$ valeur propre du système. Une autre approche est de calculer $\{\phi_{s_i}\}$ en utilisant la partie supérieure de l'équation (59). Puisque le nombre de ddls mesurés est souvent inférieur au nombre de ddls non mesurés, cette dernière approche donne de mauvais résultats.

I.2.2.4 Expansion dynamique modifiée

Gysin [27] a modifié le processus d'expansion dynamique précédent en incluant tous les ddls dans le processus inverse. En considérant les parties supérieure et inférieure de l'équation (59) nous avons

$$\begin{bmatrix} [K_{mm}] - \lambda_i [M_{mm}] \\ [K_{sm}] - \lambda_i [M_{sm}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\phi\}_m \\ \{\phi\}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{ms}] - \lambda_i [M_{ms}] \\ [K_{ss}] - \lambda_i [M_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\phi\}_m \\ \{\phi\}_s \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (63)$$

En résolvant l'inverse de (63) et en comparant ses termes nous obtenons la matrice de transformation suivante

$$[T_4] = \begin{bmatrix} [I] \\ -\left(\begin{bmatrix} [K_{ms}] \\ [K_{ss}] \end{bmatrix} - \lambda_i \begin{bmatrix} [M_{ms}] \\ [M_{ss}] \end{bmatrix}\right)^+ \left(\begin{bmatrix} [K_{mm}] \\ [K_{sm}] \end{bmatrix} - \lambda_i \begin{bmatrix} [M_{mm}] \\ [M_{sm}] \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix} \quad (64)$$

I.2.2.5 Expansion SEREP

Le concept SEREP a été d'abord introduit par O'callahan et al [25] en terme de réduction équivalente (Equivalent Reduction ER). Les modes analytiques utilisés dans le processus SEREP contrôleront le processus d'expansion. Contrairement aux autres méthodes le système matriciel n'est pas utilisé directement. La méthode SEREP considère les solutions propres complètes du système

$$\{y_N\} = [\Phi_{Nr}] \{q_r\} \quad (65)$$

où $\{y_N\}$ est le vecteur déplacement entier, $[\Phi_{Nr}]$ la matrice modale obtenue à partir du modèle EF et $\{q_r\}$ le vecteur déplacement modal.

On peut partager l'équation (65) en ddls mesurés et esclaves

$$\begin{Bmatrix} \{y_m\} \\ \{y_s\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi_{mr}] \\ [\Phi_{sr}] \end{bmatrix} \{q_r\} \quad (66)$$

L'équation supérieure s'écrit

$$\{y_m\} = [\Phi_{mr}] \{q_r\} \quad (67)$$

La résolution de ce système donne

$$\{q_r\} = [\Phi_{mr}]^+ \{y_m\} \quad (68)$$

En remplaçant (68) dans (65), nous obtenons la matrice de transformation SEREP

$$[T_5] = \begin{bmatrix} [\Phi_{mr}] \\ [\Phi_{sr}] \end{bmatrix} [\Phi_{mr}]^+ \quad (69)$$

Nous pouvons avoir une autre matrice de transformation appelée SEREPa [28]. Celle-ci consiste à considérer le nombre de modes « r » dans la transformation, égal au nombre de ddls mesurés « m ».

Ce qui donne la matrice de transformation

$$[T_6] = \begin{bmatrix} [I_{mm}] \\ [\Phi_{sm}] [\Phi_{mm}]^{-1} \end{bmatrix} \quad (70)$$

I.2.2.6 Modèle d'expansion par analyse expérimentale

L'approche d'expansion par analyse expérimentale (Test Analysis Model Expansion TAM) est similaire à SEREP exception faite que la transformation des ddls mesurés est fixée durant le processus d'expansion [29]. La matrice de transformation est donnée par

$$[T_7] = \begin{bmatrix} [I_{mm}] \\ [\Phi_{sm}] [\Phi_{mm}]^+ \end{bmatrix} \quad (71)$$

Une autre méthode dite TAM hybride qui est un mélange d'expansion TAM et Guyan combine la précision de la méthode TAM et la robustesse de la réduction statique [30]. Soit la

projection dite oblique obtenue en utilisant la matrice de transformation (71), la matrice de masse et les modes propres

$$[Q] = [\Phi][\Phi]^T [T_7]^T [M][T_7] \quad (72)$$

Cette matrice est utilisée pour obtenir la matrice de transformation TAM hybride

$$[T_8] = [T_1] + ([T_7] - [T_1])[Q] \quad (73)$$

1.3 CHOIX DES POINTS DE MESURE ET D'EXCITATION POUR LE RECALAGE DE MODELE ELEMENTS FINIS

La planification du processus d'analyse modale expérimentale est la première étape de la chaîne et requiert donc un intérêt primordial sur les étapes de vérification et de recalage. Le recalage de modèle joue un rôle principal et central sans quoi la validation ne peut être effectuée. C'est seulement quand ces deux étapes sont correctement établies qu'on puisse dire que le processus de validation est défini sur une base d'identification correcte.

Dans le but de réaliser des mesures expérimentales riches en informations spécialement pour l'exploitation dans le recalage, les tests modaux doivent être bien planifiés. Pour ce faire, on doit considérer la sélection des points de suspension, des points d'excitation et principalement les degrés de liberté de mesure. Le modèle EF initial n'est peut être pas assez précis pour identifier les caractéristiques dynamiques de la structure considérée, mais il présente une estimation très appréciable de ces propriétés. La planification des tests expérimentaux considère ce modèle initial sur lequel des calculs seront faits pour permettre de bien choisir les conditions expérimentales qui permettent de respecter les précisions désirées. Les travaux existant dans ce domaine sont basés sur la sélection optimale des ddl de mesure et d'excitation.

1.3.1 Sélection des points de mesure

1.3.1.1 Réduction de modèle de Guyan

Kammer [31] a utilisé le concept de modèle par analyse expérimentale (Test-Analysis Model : TAM) pour la sélection de la position des accéléromètres sur les grandes structures.

A partir d'un modèle EF initial nous avons

$$([k] - \omega^2 [m])\{y\} = \{0\} \quad (74)$$

Un modèle expérimental d'analyse est nécessaire pour l'étude expérimentale. Ce modèle possède moins de ddls que le modèle initial, mais peut prédire approximativement les propriétés dynamiques du modèle initial dans la bande des petites fréquences. Cet article [31] a utilisé le modèle de réduction de Guyan.

La méthode de réduction de Guyan [20] divise les degrés de liberté du modèle initial en deux parties $\{y\} = \begin{Bmatrix} y_m \\ y_s \end{Bmatrix}$, $\{y_m\}$ représente les degrés de liberté maîtres et $\{y_s\}$ les degrés de liberté esclaves. L'équation (74) devient

$$\left(\begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{sm} & M_{ss} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} y_m \\ y_s \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (75)$$

En considérant négligeable les inerties des ddls esclaves, à partir de (75) nous obtenons

$$[K_{sm}]\{y_m\} + [K_{ss}]\{y_s\} = \{0\} \quad (76)$$

$$\{y_s\} = -[K_{ss}]^{-1}[K_{sm}]\{y_m\}$$

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} y_m \\ y_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] \\ -[K_{ss}]^{-1}[K_{sm}] \end{bmatrix}^T \{y_m\} \quad (77)$$

Les matrices de masse et de raideur réduites peuvent être calculées par

$$[M_m] = \begin{bmatrix} [I] \\ -[K_{ss}]^{-1}[K_{sm}] \end{bmatrix}^T [M] \begin{bmatrix} [I] \\ -[K_{ss}]^{-1}[K_{sm}] \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$[K_m] = \begin{bmatrix} [I] \\ -[K_{ss}]^{-1}[K_{sm}] \end{bmatrix}^T [K] \begin{bmatrix} [I] \\ -[K_{ss}]^{-1}[K_{sm}] \end{bmatrix} \quad (79)$$

La méthode de réduction de Guyan est basée sur l'hypothèse que les inerties des ddls esclaves peuvent être négligées [32]. En respectant la suppression de ddl ayant le plus grand rapport

$\left(\frac{k_{ii}}{m_{ii}} \right)$ et en régénérant les matrices de masse et de raideur réduites jusqu'à ce que le

nombre de ddls soit égal au nombre de mesures retenu, le modèle réduit final représentera les ddls de mesure. Les matrices finales de masse et de raideur réduites peuvent aussi être utilisées pour réaliser le contrôle de l'orthogonalité entre les modes propres expérimentaux et ceux donnés par le modèle EF.

Jarvis [33] a utilisé la méthode de réduction de Guyan pour le choix des ddls de mesure ayant la valeur du rapport $\left(k_{ii}/m_{ii}\right)$ la plus petite par rapport à tous les ddls du modèle EF et considère que les ddls ainsi choisis améliorent les résultats du test modal.

D'autres modèles de réduction existent. Ces méthodes comme la réduction de système améliorée (Improved Reduction System IRS), la méthode de réduction modale, ou encore la méthode TAM hybride ont des formulations différentes de celle de Guyan. Quand les deux matrices réduites sont calculées, le principe de suppression de ddls esclaves reste le même. Puisque les formulations des matrices réduites de masse et de raideur sont différentes, les ddls supprimés seront différents d'une méthode à une autre.

I.3.1.2 Méthode de distribution énergétique

L'utilisation de l'énergie cinétique a été discutée dans quelques articles [32], [33], [34]. A partir du modèle EF et de l'équation (74) l'expression de l'énergie cinétique au ddl « j » en considérant les « m » premiers modes s'écrit

$$Ec_j = \frac{m_{jj}}{2} \sum_{r=1}^m \omega_r^2 \phi_{rj}^2 \quad (80)$$

En plaçant les équipements de mesure aux ddls ayant l'énergie cinétique maximale, nous aurons une plus grande observabilité des paramètres dynamiques de la structure. Ces ddls ayant l'énergie cinétique maximale pour les modes de la bande fréquentielle choisie, doivent être choisis comme ddls de mesure. Cette méthode de distribution d'énergie utilise les modes propres directement.

Une autre méthode utilisant directement les modes, appelée méthode du produit des éléments des vecteurs propres (Eigenvector Component Product ECP) [34] existe. Pour chaque ddl, on calcule le produit des éléments du mode propre dans la bande fréquentielle considérée ; le ddl ayant la valeur maximale de ce produit est retenu comme ddl de mesure.

L'inconvénient majeur de ces deux méthodes est que le choix des ddls n'est pas performant quand le test modal est utilisé pour comparer les modes du modèle EF et ceux mesurés. Néanmoins, ils peuvent être associés à ceux d'autres méthodes pour enrichir l'observabilité.

I.3.1.3 Méthode de la flexibilité

Flanigan et al [35] ont développés un algorithme de recherche de ddls de mesure basé sur le concept TAM. Ils ont utilisé la flexibilité statique du modèle EF initial pour définir un

modèle réduit optimal. Le mode statique flexible $[\varphi]$ du modèle EF peut être obtenu en appliquant une force unité à chaque degré de liberté

$$[I] = [K][\varphi] \quad (81)$$

Le mode $[\phi]$ prédit par le modèle EF dans la bande fréquentielle considérée peut être considéré comme une combinaison linéaire du mode flexible statique

$$[\phi] = [\varphi][L] \quad (82)$$

où $[L]$ représente la matrice des coefficients de la combinaison linéaire.

Quand tous les ddls du modèle EF sont retenus cette équation est exactement correcte. Sinon, la matrice des coefficients $[L]$ peut être calculée en utilisant la pseudo inverse de la matrice de flexibilité statique

$$[L] = ([\varphi]^T [\varphi])^{-1} [\varphi]^T [\phi] \quad (83)$$

L'erreur sera calculée par

$$Erreur = [\varphi][L] - [\phi] \quad (84)$$

Les degrés de liberté minimisant cette erreur représentent la position optimale des points de mesure [35]. Flanigan et al, et Stabb et al ont développés d'autres variantes de cette méthode [35], [36], [37].

I.3.1.4 Indépendance effective – Matrice d'information de Fisher

L'indépendance effective (Effective Independence EFI) est basée sur l'idée que les points de mesure dans un test modal doivent être choisis de façon à ce que les modes propres obtenus soient les plus indépendants possibles les uns des autres. Il y a beaucoup de travaux utilisant ce concept [30], [32], [38], [39]. Chaque article propose une méthode différente mais le principe de base reste le même à savoir l'utilisation de la matrice de Fisher.

La réponse $\{y\}_N$ concernant les m modes considérés est donnée par :

$$\{y\}_N = [\phi]_{N \times m} \{q\}_m + \{v\}_N \quad (85)$$

Où N est le nombre de ddls dans le modèle initial et $\{v\}_N$ représente le vecteur bruit de mesure. $\{q\}_m$ est la partition des m modes du vecteur propre.

Dans l'hypothèse où le bruit de mesure est stationnaire et nul, l'estimée de départ du vecteur $\{q\}_m$ à partir des mesures $\{y\}_N$ est obtenue par

$$\{\hat{q}\}_m = [\phi]_{m \times N}^+ + \{y\}_N \quad (86)$$

où $[]^+$ représente la pseudo inverse. L'erreur estimée est

$$[P] = E\left[\left(\{q\} - \{\hat{q}\}\right)\left(\{q\} - \{\hat{q}\}\right)^T\right] \quad (87)$$

équivalente à

$$[P] = \left[[\phi]_{m \times N}^T [R]^{-1} [\phi]_{N \times m} \right]^{-1} = [Q]^{-1} \quad (88)$$

où $[R]$ est la matrice d'intensité du bruit de mesure.

La matrice $[Q]$ est appelée matrice d'information de Fisher. La matrice $[R]$ peut être simplifiée par $[R] = \sigma^2 [I]$ toujours en considérant le bruit de mesure uniformément réparti. La matrice d'information de Fisher devient alors

$$[Q]_{m \times m} = \frac{1}{\sigma^2} [\phi]_{m \times N}^T [\phi]_{N \times m} \quad (89)$$

La meilleure estimation de $\{q\}_m$ nécessite la minimisation de la matrice $[P]$ qui résulte de la maximisation de la matrice $[Q]$ et par conséquent, la maximisation de la matrice $[A]$:

$$[A]_{m \times m} = [\phi]_{m \times N}^T [\phi]_{N \times m} \quad (90)$$

La matrice $[A]$ peut être considérée comme la somme des contributions de chaque ddl

$$[A]_{m \times m} = \sum_{i=1}^N A_i = \sum_{i=1}^N [\phi]_i^T [\phi]_i \quad (91)$$

où $[\phi]_i$ est un vecteur ligne correspondant au ddl « i ».

En ajoutant ou en soustrayant un ddl on ajoute ou on perd des informations dans la matrice de Fisher. Si tous les ddls sont sélectionnés, alors les modes dans la matrice $[\phi]_{N \times m}$ sont linéairement indépendants et la matrice $[A]$ sera de rang maximal. Si seulement $m < N$ modes sont considérés, alors il peut y avoir des ddls redondants dont la suppression n'affectera pas le rang de la matrice $[A]$.

En fonction du critère de sélection choisi, il existe plusieurs méthodes de détection de ddls redondants.

1.3.1.4.1 Méthode de Kammer

Kammer [30] a développé une méthode de suppression des ddl redondants à partir des solutions propres de la matrice $[A]$

$$([A]_{m \times m} - [\lambda][I])[\psi] = 0 \quad (92)$$

où $[\lambda]$ et $[\psi]$ sont les matrices de valeurs propres et de vecteurs propres correspondants. Puisque $[A]$ est symétrique définie positive, la matrice $[\psi]$ est orthogonale et peut être considérée comme m vecteurs de dimension m .

$$[\psi]^T [a][\psi] = [\lambda] \quad (93)$$

et

$$[\psi]^T [\psi] = [I]$$

Le produit $[\phi][\psi]$ peut être considéré comme la projection de la matrice des modes propres $[\phi]$ sur l'espace à m dimensions représenté par les vecteurs de la matrice $[\psi]$. En considérant le carré de chaque membre du produit $[\phi][\psi]$, nous pouvons avoir une matrice où chaque élément représente la contribution d'un ddl sur le mode. Si l'on pondère par l'inverse de la fréquence naturelle correspondant à chaque mode, chaque élément de la matrice aura la même importance dans toutes les directions m . Le vecteur de distribution de l'indépendance effective est construit en récoltant tous les éléments correspondant à un ddl dans la matrice précédente. Ce vecteur noté $\{E_d\}$ représente la contribution de chaque ddl sur les autres modes. L'élément maximal de ce vecteur représente le ddl qui contribue le plus au rang de la matrice $[A]$ et doit être par conséquent retenu comme ddl de mesure. L'élément minimal de ce vecteur représente le ddl qui contribue le moins au rang de la matrice $[A]$ et doit par conséquent être supprimé. En respectant le processus de suppression de ddl qui contribuent le moins au rang de la matrice $[A]$, nous obtenons les ddl les plus appropriés pour l'étude expérimentale. Ces ddl qui ont une importance sur le rang de $[A]$ ont par conséquent un intérêt sur l'indépendance linéaire entre les modes sélectionnés.

En examinant le processus de calcul précédent, $\{E_d\}$ peut être calculé autrement. Sachant que

$$[A]_{m \times m} = [\phi]_{m \times N}^T [\phi]_{N \times m} \quad (94)$$

à partir de (93) on a

$$[A]_{m \times m}^{-1} = [\psi]_{m \times m}^T [\lambda]_{m \times m}^{-1} [\psi]_{m \times m} \quad (95)$$

La matrice de prédiction $[E]$ est calculée par

$$[E]_{N \times N} = [\phi]_{N \times m} [A]_{m \times m}^{-1} [\phi]_{m \times N}^T$$

$$[E]_{N \times N} = [\phi]_{N \times m} \left([\phi]_{m \times N}^T [\phi]_{N \times m} \right)^{-1} [\phi]_{m \times N}^T \quad (96)$$

Le vecteur de distribution d'indépendance effective peut alors s'écrire [30], [32], [40], [41]

$$\{E_d\} = \text{diag}([E]) \quad (97)$$

Kammer a développé cette méthode [30] en l'exploitant dans le cas de structures formées d'assemblages [40], dans le cas d'existence de bruit de mesure [41] et pour les structures, endommagées [42].

1.3.1.4.2 Maximisation du déterminant de la matrice d'information de Fisher

Le déterminant de la matrice de Fisher indique la qualité d'information des données mesurées. Kammer [30], [42] n'a pas proposé de méthode de calcul. Yao et al [38] ont exploité la méthode de Kammer en développant un algorithme basé sur la maximisation du déterminant de la matrice de Fisher. Cette méthode utilise les algorithmes génétiques. Les résultats présentés dans [38] montrent une légère amélioration par rapport à la méthode EFI mais reste néanmoins non optimale pour donner le déterminant maximal.

Park et al [43] ont développés une méthode de suppression de ddls par une procédure itérative. Plusieurs ddls seront supprimés à chaque itération, de plus le nombre de ddls supprimés est aussi déterminé par la méthode.

Soit $[A]$ la matrice utilisée dans (90), quand l'ensemble des ddls sont sélectionnés, et $[A_r]$ la matrice des ddls retenus

$$[A] = [\phi_0]^T [\phi_0] \quad (98)$$

$$[A_r] = [\phi_m]^T [\phi_m] \quad (99)$$

$[\phi_0]$ étant la matrice de tous les vecteurs propres, et $[\phi_m]$ la matrice des vecteurs propres correspondant aux ddls retenus.

La décomposition en valeurs singulières (Singular Value Decomposition SVD) de la matrice $[\phi_0]$ peut être représentée par

$$[\phi_0] = [U_0] [\Sigma_0] [V_0]^T \quad (100)$$

La matrice des vecteurs singuliers $[U_0]$ peut s'écrire

$$[U_0] = \begin{bmatrix} [U_0]_m \\ [U_0]_s \end{bmatrix} \quad (101)$$

où $[U_0]_m$ et $[U_0]_s$ représentent les matrices correspondant aux ddls retenus et ddls supprimés respectivement.

Après suppression des ddls, l'erreur relative sur le déterminant peut s'écrire

$$\frac{\det([A]) - \det([A_r])}{\det([A])} = 1 - \det([I] - [U_0]_s^T [U_0]_s) = \sum_{i=1}^N p_i \quad (102)$$

$$p_i = \frac{1}{i} (\text{trace}(B^i) - p_1 \text{trace}(B^{i-1}) - \dots - p_{i-1} p_1) \quad (103)$$

$$B = [U_0]_s [U_0]_s^T$$

Lorsque $p_1 \ll 1$ l'équation (102) devient

$$\frac{\det([A]) - \det([A_r])}{\det([A])} \approx p_1 = \text{trace}(B) = \sum_{k=1}^{N_s} \{u_0\}_k \{u_0\}_k^T \quad (104)$$

N_s étant le nombre de ddls supprimés, $\{u_0\}_k$ est le vecteur ligne de la matrice $[U_0]$ correspondant au $k^{\text{ième}}$ ddl supprimé.

L'équation (102) indique que plus p_1 est petit plus le déterminant de $[A_r]$ est grand. Alors les ddls ayant la valeur de $(\{u_0\}_k \{u_0\}_k^T)$ la plus petite parmi tous les ddls doivent être supprimés. L'équation (103) devient lorsque $|p_i| \leq |p_1|^i$ avec $p_1 \ll 1$

$$\frac{\det([A]) - \det([A_r])}{\det([A])} = \sum_{i=1}^N p_i \leq \sum_{i=1}^N p_1^i \leq \frac{p_1}{1 - p_1} \quad (105)$$

Une valeur est affectée à p_1 quand la variation du déterminant de $[A]$ est fixée. Ce qui peut donner le nombre de ddls à supprimer à chaque itération en calculant la trace de la matrice B . Lorsque cette trace est supérieure à la valeur de p_1 , alors le nombre N_s doit diminuer jusqu'à ce que la trace soit inférieure à p_1 .

Avec cette méthode la variation du déterminant de $[A]$ sera très petite à chaque itération, ce qui donne à la fin le déterminant de $[A_r]$ le plus grand possible.

1.3.1.4.3 Indépendance effective et décomposition QR

Schedlinski et Link [45], ont développé une méthode de sélection de ddls de mesure utilisant la décomposition QR. Cette méthode est basée sur la décomposition QR de la matrice des vecteurs propres de façon à ce que la dépendance entre les modes des ddls mesurés soit minimisée.

Pour une matrice $[A]$, la décomposition QR donne

$$[A][L] = [Q][R] \quad (106)$$

$$[A] \in R^{m,N}, [L] \in R^{N,N}, [Q] \in R^{m,m}, \text{ et } [R] \in R^{N,m}$$

où $[Q]$ est une matrice orthogonale en colonnes telle que $[Q]^T [Q] = [I]$, $[R]$ est une matrice triangulaire supérieure avec des éléments diagonaux décroissants, et $[L]$ une matrice de passage réalisant les permutations des colonnes de $[A]$ dans le but d'avoir des valeurs maximales sur la diagonale de $[R]$.

Compte tenu de la décomposition QR donnant des éléments de la diagonale de $[R]$ décroissants, la première colonne de la matrice $[A][L]$ peut être considérée comme le premier vecteur linéairement indépendant. Cette caractéristique est utilisée pour sélectionner les ddls de mesure.

Les m modes à N degrés de liberté donnés par le modèle EF sont arrangés dans une matrice de façon à ce que les colonnes de la matrice correspondent aux ddls, et les lignes correspondent aux modes ; ensuite la décomposition est appliquée sur cette matrice. Les m premières colonnes de la matrice $[L]$ indiquent les ddls pour lesquels les modes sont les plus linéairement indépendants. Si le nombre de ddls à sélectionner est plus grand que le nombre de modes identifiés m , alors les colonnes de la matrice $[L]$ sont remises à zéro, la décomposition QR est encore une fois appliquée de façon à obtenir les autres ddls les plus linéairement indépendants des ddls restant.

1.3.1.4.4 Comparaison des méthodes EFI

Le but essentiel de cette famille de méthodes est de rendre distinguable les modes propres à identifier expérimentalement. Les trois méthodes sont assez performantes dans le cas où le nombre de ddls à mesurer est égal au nombre de modes avec un modèle EF assez précis.

En pratique le nombre de points de mesure est plus grand que le nombre de modes dans la bande fréquentielle considérée ($n > m$). Par conséquent les ddls choisis après les m premiers doivent être aussi performants que possible.

La première méthode supprime les ddls qui ont moins de contribution sur les modes de la bande fréquentielle considérée. Il n'y a aucun calcul complexe mais les résultats ne sont pas garantis lorsque $n > m$.

La seconde méthode maximise le déterminant en supprimant les ddls qui diminuent le moins celui-ci. Puisque la méthode SVD est une approximation, des erreurs s'ajoutent et donc deux modes peuvent être considérés indépendants alors qu'ils sont sensiblement dépendants.

Pour la dernière méthode utilisant la décomposition QR, lorsque $n > m$, la dépendance linéaire entre les m premiers modes et les suivants n'est pas garantie puisqu'ils sont supprimés dans les choix suivants.

En conclusion, les deux premières techniques EFI sont les plus efficaces.

I.3.2 Sélection des points d'excitation

Le but de la sélection des points d'excitation est la détermination des points d'excitation permettant d'exciter tous les modes existant dans la bande fréquentielle de mesure de façon à donner une grande observabilité au test expérimental.

I.3.2.1 Point d'excitation optimal– Point d'excitation non optimal

Cette méthode a été développée par Imamovic (Optimal Driving Point ODP – Non-Optimal Driving Point NODP) pour guider les ingénieurs à choisir les points d'excitation des structures durant l'analyse modale [44]. L'idée principale de cette méthode est de choisir les points dont les amplitudes des modes considérés sont les plus grands possibles, tout en évitant les nœuds modaux ou les points qui leur sont proches.

Le paramètre ODP du $i^{\text{ème}}$ ddl est défini par

$$ODP(i) = \prod_{r=1}^m \|\phi_{ir}\| \quad (107)$$

où m est le nombre de modes existant dans la bande fréquentielle de mesure.

Tous les ddls ayant une valeur ODP proche de zéro sont proches ou sur un nœud modal. Par conséquent, il ne serait pas utile d'exciter la structure à ces positions. Contrairement, les ddls ayant la plus grande valeur ODP seront choisis comme positions d'excitation. Le coefficient ODP est aussi appelé produit des éléments de vecteur propre (Eigenvector Component Product EVP) dans certaines références comme [33], [34].

Un autre paramètre peut être défini comme NODP qui veut dire point d'excitation non optimal. Il décrit le rapprochement du ddl des nœuds de chaque mode choisi.

Le paramètre NODP du $i^{\text{ème}}$ ddl est défini par

$$NODP(i) = \min_r \|\phi_{ir}\| \quad (108)$$

Ce paramètre ne considère pas la moyenne de tous les éléments du mode mais sélectionne la valeur minimale. Si un ddl a la plus petite valeur du paramètre NODP, il faut éviter qu'il soit un point d'excitation. Mais un ddl ayant un NODP de plus grande valeur, ne peut pas être considéré comme un bon point d'excitation. Le NODP est un paramètre permettant d'éliminer les mauvais points d'excitation.

Ces deux paramètres peuvent être associés pour former une base ODP - NODP de choix des points d'excitation en prenant la moyenne de toutes les valeurs. Le point ne doit être proche d'aucun nœud, non seulement d'un mode mais de tous les modes considérés.

I.3.2.2 Décomposition QR

Schedlinski et al [45], ont non seulement utilisés la décomposition QR pour sélectionner les points de mesure mais aussi les points d'excitation. A partir du modèle EF initial, la matrice des vecteurs force d'excitation est obtenue par

$$[F]_{N \times m} = [M]_{N \times N} [\phi]_{N \times m} \quad (109)$$

où N est le nombre de ddls et m le nombre de modes dans la bande fréquentielle considérée.

En appliquant la décomposition QR de l'équation (106) sur la transposée de $[F]$, les « s » premières colonnes de la matrice $[L]$ de correspondent aux ddls qui doivent être choisis comme points d'excitation. « s » est le nombre de points à choisir.

I.3.3 Sélection des modes propres par approche sensitive

La matrice de sensibilité par rapport à certains paramètres, est utilisée pour sélectionner les modes de référence et les ddls de mesure. Cette technique a été proposée par Gola et al [46]. Elle est destinée au recalage dans le domaine modal.

La matrice de sensibilité d'un modèle EF par rapport à un ensemble de paramètres $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ est

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \omega_1}{\partial p_i} & \dots & \frac{\partial \omega_1}{\partial p_n} \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \omega_2}{\partial p_i} & \dots & \frac{\partial \omega_2}{\partial p_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \omega_m}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \omega_m}{\partial p_i} & \dots & \frac{\partial \omega_m}{\partial p_n} \\ \frac{\partial \phi_{11}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \phi_{11}}{\partial p_i} & \dots & \frac{\partial \phi_{11}}{\partial p_n} \\ \frac{\partial \phi_{12}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \phi_{12}}{\partial p_i} & \dots & \frac{\partial \phi_{12}}{\partial p_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_{Nm}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \phi_{Nm}}{\partial p_i} & \dots & \frac{\partial \phi_{Nm}}{\partial p_n} \end{bmatrix} \quad (110)$$

Ces matrices de sensibilité sont très utilisées en recalage de modèle. La covariance dépendant de la qualité des mesures et de la matrice $[S]$ est définie par

$$[\text{cov}] = [\text{cond}]^{-1} = \left([S]^T [W]^{-2} [S] \right)^{-1} \quad (111)$$

où $[W]$ est une matrice de pondération.

Dans les meilleures conditions, les éléments de la diagonale de la matrice $[\text{cov}]$ deviennent plus petits quand beaucoup de modes sont considérés. La méthode de sélection des modes est basée sur le choix des modes permettant d'obtenir $\text{diag}[\text{cov}]$ le plus proche de la limite inférieure. Les éléments de $\text{diag}[\text{cond}]$ seront donc maximisés.

Après avoir choisi les modes, les ddl de mesure peuvent être sélectionnés en utilisant la sélection sensitive. Les éléments de la diagonale de la matrice $[\text{cond}]$ peuvent être considérés comme la somme des contributions de chaque mode et chaque ddl dans le modèle EF. La contribution du $j^{\text{ème}}$ ddl sur la valeur du $i^{\text{ème}}$ élément de la diagonale de $[\text{cond}]$ peut être écrit

$$D_j = \sum_{r=1}^m \left(\frac{\partial \phi_{jr}}{\partial p_i} \right)^2 \quad (112)$$

Le ddl ayant le plus grand D_j sera sélectionné comme ddl de mesure. Après avoir choisi ces ddl, la diagonale $\text{diag}[\text{cov}]$ doit être recalculée. Si $\text{diag}[\text{cov}]$ ne peut pas encore être

améliorée en ajoutant un autre ddl, alors les ddls sélectionnés représentent l'ensemble final de ddls de mesure.

Cette méthode est basée sur le choix des paramètres p_i utilisés dans le recalage de modèle. Son efficacité est liée au bon choix des paramètres p_i .

I.3.4 Remarques

La planification des essais expérimentaux a été développée dans les dernières années. Elle est actuellement en période d'expansion. Pour le cas de l'identification par correction ou recalage, ces méthodes deviennent de plus en plus demandées.

Dans la méthode de choix des points d'excitation décrite, nous cherchons à exciter tous les modes choisis simultanément. Ceci a un intérêt primordial sachant qu'actuellement, on cherche toujours à exciter tous les modes orthogonaux de structures à éléments poutre dans le cas une excitation en un point unique.

Les méthodes de choix de points de mesure présentées sont réalisées dans le but de minimiser le nombre de mesures tout en ayant une bonne observabilité.

I.4 RECALAGE DE MODELES ELEMENTS FINIS

Le but du recalage de modèle EF est d'ajuster ou corriger le modèle initial de façon à ce qu'il reproduise fidèlement les mesures prises expérimentalement. Ces méthodes peuvent être divisées en deux parties.

- Les méthodes directes qu'on appelle aussi méthodes de référence de base qui permettent de corriger le modèle de façon à ce qu'il reproduise les mesures expérimentales pour qu'il puisse être exploitées ultérieurement.
- Les méthodes d'identification paramétriques par recalage. Ces méthodes sont plus intéressantes puisque non seulement elles corrigent le modèle, mais aussi elles expriment ces corrections par des paramètres ayant un sens physique. Elles peuvent donc être utilisées pour l'identification d'endommagements.

Les données expérimentales exploitées par ces deux types de méthodes peuvent être des mesures modales ou fréquentielles. Notre but est de développer des méthodes de recalage du deuxième type, pouvant être exploitées dans la recherche de défauts dans les structures mécaniques, en se basant sur des mesures fréquentielles.

I.4.1 Méthodes modales directes

La plupart des méthodes de recalage directes ont été introduites à la fin des années 1970 et début des années 1980. Grâce à leurs avantages, ces méthodes sont toujours utilisées et font état de développements majeurs. Les nouveaux instruments de mesure actuels ont supprimés quelques inconvénients liés à ces méthodes

I.4.1.1 Méthode du multiplicateur de Lagrange

L'idée de base de cette méthode est de considérer qu'un ensemble de paramètres parmi les modes mesurés, ainsi que les matrices de masse et de raideur, sont correctes. Les autres ensembles de paramètres seront corrigés séparément en minimisant une fonction coût avec les contraintes des multiplicateurs de Lagrange [47], [48], [49], [50].

Kenigdbuch et Halevi [51], ont considérés deux problèmes : recalage des modes et de la raideur, ainsi que le recalage de la masse et de la raideur. Les fréquences naturelles mesurées sont considérées correctes dans les deux cas. Pour le critère d'optimisation, les matrices générales pondérées sont utilisées au lieu des matrices de masse. Ces méthodes s'inscrivent dans le cadre du recalage avec localisation de défauts dans les structures.

I.4.1.2 Méthode de l'erreur matricielle

Cette méthode estime directement l'erreur sur les matrices de masse et de raideur. Développée dans les années 1980, plusieurs variantes ont été présentées [52], [53], [54], [55], [56].

Dans [56], les mesures ont été accomplies à l'aide d'un vibromètre laser sur plaque en porte à faux. Après utilisation d'une technique de lissage sur les modes propres mesurés, la procédure de recalage utilisant la méthode de l'écart matriciel obtient un modèle corrigé reproduisant les données mesurées.

I.4.1.3 Affectation de données modales

L'affectation de données modales est une méthode développée par la théorie du contrôle. Dans cette méthode, la matrice recherchée est celle qui a les valeurs et vecteurs propres désirés. Cette matrice retrouvée par chemin inverse est alors utilisée pour perturber les matrices de masse et d'amortissement du modèle recalé. Cette méthode nécessite donc l'identification de tous les modes propres. Les matrices d'amortissement et de raideur risquent de ne pas être symétriques, ce qui est physiquement anormal.

Dans certains travaux utilisant ce type de méthodes, ces limitations ont été évitées.

I.4.1.4 Autres méthodes directes

Une méthode inverse basée sur les valeurs propres est présentée par Inman et Starek [57], [58], [59], [60]. Celle-ci est assez performante pour les modèles à faible perturbation de types utilisés sur les structures aussi bien que sur les machines. Il reste néanmoins quelques imperfections expérimentales non résolues comme le bruit de mesure et le nombre incomplet de données.

La méthode de la matrice mixte développée dans les années 1970 combine simultanément les modes propres mesurés et vecteurs propres analytiques pour avoir un ensemble complet de vecteurs propres. Par conséquent, la méthode peut reproduire les modes propres grâce au modèle EF recalé. Les matrices de masse et de raideur obtenues par recalage seront des matrices pleines perdant ainsi tout sens physique [61].

I.4.1.5 Remarques

Ces méthodes de recalage permettent d'obtenir un modèle reproduisant exactement les données de référence sans itération. Lorsque l'écart entre les valeurs mesurées et les valeurs initiales du modèle EF est assez petit ces méthodes permettent de bien corriger le modèle.

Ces méthodes nécessitent de mesurer sur tous les ddls. Dans la plupart des cas réels, le nombre de ddls mesurés est très petit devant le nombre de ddls du modèle EF. La méthode utilisant le vibromètre laser peut éviter ce cas. Pour surmonter ce problème, des méthodes de réduction ou d'expansion sont utilisées mais en ajoutant des erreurs supplémentaires au processus.

Les méthodes directes sont très sensibles au bruit de mesure. Actuellement les fréquences naturelles peuvent être identifiées avec une précision suffisante pour le recalage de modèle. Par contre, la précision des mesures des modes n'est pas appropriée pour les méthodes directes.

Tant que la précision et le nombre de mesures ne s'améliorent pas, les méthodes de recalage directes restent limitées.

I.4.2 Méthodes itératives

Plusieurs méthodes itératives de recalage de modèles existent. Elles utilisent des mesures modales ou fréquentielles. Ces méthodes se basent toutes sur la résolution de systèmes d'équations non linéaires par des méthodes itératives.

I.4.2.1 Méthodes à fonction coût

I.4.2.1.1 Principe de base

L'objectif des méthodes à fonction coût est de faire une corrélation entre les données mesurées et celles du modèle analytique. L'idée de base de ces méthodes à fonctions coût peut être développée par ce qui suit

Soit $\{Z_x\}$ les propriétés dynamiques expérimentales d'une structure, qui peuvent être des fréquences propres, modes propres, fonctions de réponses fréquentielles, ou une combinaison de ces propriétés. Notons $\{Z_i\}$ les mêmes propriétés prédites par le modèle EF à la $i^{\text{ème}}$ itération. $\{Z_x\}$ et $\{Z_i\}$ peuvent être considérées comme fonction des paramètres $\{p\}$ de la structure. Quand on modifie ces paramètres, le modèle EF sera donc recalé. On peut écrire

$$\begin{aligned}\{Z_x\} &= \{Z(p)\} \\ \{Z_i\} &= \{Z(p_i)\}\end{aligned}\quad (113)$$

La différence entre les données mesurées et les données du modèle EF s'écrit

$$\{\delta Z\} = \{Z_x - Z_i\} = \{Z(p) - Z(p_i)\} = \{Z(p_i + \delta p_i) - Z(p_i)\} \quad (114)$$

où la différence entre $\{p\}$ et $\{p_i\}$ est assez petite pour considérer les propriétés de la dérivée par rapport à ces paramètres. La différence $\{\delta Z\}$ peut donc être approximée par

$$\{\delta Z\} = \{Z(p_i + \delta p_i) - Z(p_i)\} \cong \left[\frac{\partial Z}{\partial p} \right] \{\delta p_i\} = [S] \{\delta p_i\} \quad (115)$$

où $[S]$ est la matrice de sensibilité de la structure contenant les dérivées des propriétés considérées $\{Z\}$ par rapport aux paramètres $\{p\}$. Les éléments de la matrice de sensibilité sont généralement non linéaires. Dans le processus de recalage les éléments de cette matrice changent à chaque itération.

Les méthodes à fonction coût cherchent à déterminer l'écart $\{\delta p\}$ de façon à ce que l'écart sur les propriétés $\{Z\}$ soit minimisé. A partir de l'équation (115) une fonction coût peut être tirée

$$J(p) = (\{\delta Z\} - [S] \{\delta p_i\})^T (\{\delta Z\} - [S] \{\delta p_i\}) \quad (116)$$

cette fonction coût qu'on appelle aussi fonction objectif est la norme de la différence entre $\{\delta Z\}$ et $[S] \{\delta p_i\}$. Le vecteur $\{\delta p_i\}$ est l'approximation de la solution de l'équation (114) à la

i^{ème} itération. Pour éviter le mauvais conditionnement on affecte au problème de minimisation des coefficients de pondération. La fonction coût devient alors

$$J(p) = (\{\delta Z\} - [S]\{\delta p_i\})^T [W] (\{\delta Z\} - [S]\{\delta p_i\}) \quad (117)$$

La solution optimale $\{\delta p\}$ ne peut être obtenue que par des méthodes itératives.

En dérivant les équations (116) et (117) par rapport aux paramètres $\{\delta p_i\}$ la solution de (114) peut être obtenue par

$$\{\delta p_i\} = ([S]^T [S])^{-1} [S]^T \{\delta Z\} \quad (118)$$

ou

$$\{\delta p_i\} = ([S]^T [W] [S])^{-1} [S]^T [W] \{\delta Z\} \quad (119)$$

Quand le nombre de mesures est supérieur au nombre de paramètres, l'écart $\{\delta p_i\}$ peut être calculé. Néanmoins, le conditionnement de la matrice $([S]^T [S])$ est souvent mauvais. Ce qui rend le système de résolution inverse instable, même avec les coefficients de pondération $[W]$. Un problème de rang de la matrice $([S]^T [S])$ risque aussi de se poser.

1.4.2.1.2 Méthodes à fonction coût et données modales

Il existe plusieurs formes de fonctions coût utilisant des données modales. Cobb et al [62] ont utilisés la fonction suivante

$$J(p) = \sum_{r=1}^m a_r \left(\frac{(\lambda_A)_r}{(\lambda_X)_r} - 1 \right)^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^m b_{ir} \left((\phi_A)_{ir} - (\phi_X)_{ir} \right)^2 \quad (120)$$

a_r et b_{ir} étant des coefficients de pondération positifs. Les différences entre les fréquences naturelles des données expérimentales (valeurs propres réelles) et celles prédites par le modèle EF sont normalisées.

Link et al ont utilisés la fonction [63], [64]

$$J(p) = \{\delta Z\}^T [W] \{\delta Z\} + \{\delta p\}^T [Wp] \{\delta p\} \quad (121)$$

$[W]$ est une matrice de pondération pour la différence entre les données expérimentales et les valeurs prédites, par contre $[Wp]$ est une matrice de pondération permettant de limiter la variation des paramètres $\{p_i\}$ à chaque itération. Cette fonction coût permet de sélectionner même les paramètres à pondérer. Si les éléments de la ligne et de la colonne qui correspondent à un paramètre dans $\{\delta p\}$ sont remis à zéro, le paramètre restera inchangé à

cette itération. Quelques articles [63], [64], [65], [66], proposent des méthodes de sélection de la matrice $[Wp]$.

Par exemple dans [63], [64] elle s'écrit

$$[Wp] = \text{diag}[wp] \text{diag}([S]^T [W][S]) \quad (122)$$

La matrice de pondération ajuste les paramètres par rapport à la matrice de sensibilité. Lorsque les paramètres de la matrice de sensibilité sont proches de zéro, les coefficients de $[Wp]$ correspondants sont proches de zéro et le paramètre reste inchangé.

Les fréquences naturelles mesurées sont beaucoup plus précises que les modes propres. Généralement la sensibilité aux valeurs propres est plus importante que la sensibilité aux vecteurs propres. Pour cela les facteurs de pondération affectés à la différence entre les fréquences propres doivent être plus grands que ceux affectés aux vecteurs propres. Les fréquences propres utilisées seules ne suffisent pas pour recalculer correctement le modèle EF.

Quelquefois les informations données par les modes mesurés permettent de localiser des défauts. Il est donc nécessaire de considérer ces mesures dans la fonction coût.

1.4.2.1.3 Méthodes de minimisation dans le domaine fréquentiel

La sensibilité des fonctions de réponse fréquentielles (Frequency Response Functions FRF) aux paramètres choisis doit être calculée. Cette matrice peut être obtenue à partir de

$$\frac{\partial[H]}{\partial p} = -[H] \frac{\partial[Z]}{\partial p} [H] \quad (123)$$

où
$$[Z] = [H(\omega)]^{-1} = -\omega^2[M] + j\omega[C] + [K]$$

Deux types de fonction coût utilisant les FRFs existent [67], [68], [69]. La première est basée sur l'erreur résiduelle des paramètres mesurés qu'on appelle aussi erreur à la sortie

$$\{\varepsilon\} = \{H_A\} - \{H_X\}$$

sa fonction coût est

$$J(p) = (\{H_X\} \{H_A\})^T (\{H_X\} \{H_A\})$$

La seconde fonction est basée sur les résidus de l'équilibre des efforts qu'on appelle aussi équation d'erreur.

$$\{\varepsilon\} = [Z_A] \{H_X\} - \{I\}$$

sa fonction coût est

$$J(p) = ([Z_A]\{H_X\} - \{I\})^T ([Z_A]\{H_X\} - \{I\})$$

En appliquant la sensibilité sur la fonction de transfert par rapport aux paramètres $\{p\}$ on obtient

$$[H_A] \cong [H_A]_i + \frac{\partial[H]}{\partial p} \delta p \quad (124)$$

En appliquant la sensibilité sur la matrice de raideur dynamique par rapport aux paramètres $\{p\}$ on obtient

$$[Z_A] \cong [Z_A]_i + \frac{\partial[Z]}{\partial p} \delta p \quad (125)$$

En dérivant la fonction coût, deux solutions optimales se dégagent

$$\delta p = \left(\left\{ \frac{\partial H}{\partial p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial H}{\partial p} \right\} \right)^{-1} \left\{ \frac{\partial H}{\partial p} \right\}^T (\{H_X\} - \{H_A\}_i) \quad (126)$$

et

$$\delta p = \left(\{H_X\}^T \left[\frac{\partial Z}{\partial p} \right]^T \{H_X\} \right)^{-1} \{H_X\}^T \left[\frac{\partial Z}{\partial p} \right]^T (\{I\} - [Z_A]_i \{H_X\}) \quad (127)$$

L'indice i représente la $i^{\text{ème}}$ itération.

Ces deux solutions ont leurs avantages et leurs inconvénients. En utilisant le résidu de la fonction de transfert dans la fonction coût on fait une comparaison directe entre les mesures et les valeurs analytiques. Cependant en minimisant cette fonction on risque de converger vers un minimum local puisque cette fonction n'est pas monotone. En plus, la solution risque d'être instable. Par conséquent et pour les mêmes raisons la solution des équations de recalage ne peut être garantie.

L'utilisation de la matrice de raideur dynamique dans la fonction coût a l'avantage d'être monotone pour la plupart des paramètres de recalage. La solution de cette méthode est de loin plus stable que la méthode précédente. Malheureusement, le calcul de $(\{I\} - [Z_A]_i \{H_X\})$ donnera des valeurs relativement petites par rapport aux valeurs de la matrice $[Z_A]$ et du vecteur $\{H_X\}$. Celle-ci est très sensible au bruit expérimental qui risque de rendre le processus divergeant.

Lammens et al [70] ont proposé une autre méthode utilisant un autre résidu appelé résidu indirect de la fonction de transfert

$$\{\varepsilon\} = [H_A]([Z_A]\{H_X\} - \{I\}) \quad (128)$$

La fonction coût correspondante est

$$J(p) = ([H_A]([Z_A]\{H_X\} - \{I\}))^T ([H_A]([Z_A]\{H_X\} - \{I\})) \quad (129)$$

En dérivant cette fonction, la solution optimale sera

$$\delta p = \left([H_A] \frac{\partial [Z_A]}{\partial p} \{H_X\} \right)^+ (\{H_A\}_i - \{H_X\}) \quad (130)$$

où $()^+$ représente la pseudo inverse. La fonction coût et sa solution donnent les mêmes avantages que la méthode utilisant les résidus de la matrice de raideur dynamique. En remplaçant $(\{I\} - [Z_A]\{H_X\})$ par $(\{H_A\}_i - \{H_X\})$ le système sera plus stable numériquement.

L'équation précédente est sensiblement la même que la solution utilisant le résidu de la fonction de transfert. En introduisant (123) dans (126) et en comparant avec (130) on peut voir la différence entre ces deux équations. Dans l'équation (130) les FRF expérimentales $\{H_X\}$ et la matrice analytique $[H_A]$ sont toutes les deux utilisées pour le calcul de $\partial H / \partial p$ plutôt que d'utiliser la matrice analytique seule. Comme dans (126), ceci améliore la convergence du processus de recalage. Lammens et al [70] ont montré que l'application de cette méthode montre une bonne corrélation avec les mesures expérimentales. Cependant, l'unicité de la solution ne peut être garantie.

L'un des principaux avantages de l'utilisation des fonctions de réponse fréquentielle est que les paramètres d'amortissement peuvent être déterminés et corrigés alors que les valeurs et modes propres ne sont pas sensibles à l'amortissement. Dans le recalage de la matrice d'amortissement on utilise toujours des mesures FRF [71], [72], [73].

L'utilisation de FRF en sélectionnant un nombre suffisant de points de mesure dans la bande fréquentielle considérée, peut atténuer le problème de mesures incomplètes en ddls et nombre de modes. Ceci est dû au fait que les FRFs contiennent l'influence de tous les modes et les informations prises pour différentes valeurs de la fréquence ne sont généralement pas linéairement dépendantes. Ceci est tout à fait justifié théoriquement, par contre les résultats de l'application des méthodes utilisant ce type de mesures montrent que le nombre de ddls et la sélection des valeurs des fréquences de mesure ont une influence considérable sur la performance de la méthode de recalage. Les valeurs proches de la résonance doivent être

évitées car les informations pour ces valeurs sont dominées par un ou deux modes, et l'amortissement aura un effet dominant. Aussi, les valeurs à l'antirésonance sont à éviter car le rapport signal sur bruit est très petit ce qui est inévitable puisqu'une valeur peut être bonne pour une fonction FRF et représenter une antirésonance pour une autre fonction FRF d'un autre ddl.

1.4.2.1.4 Remarques sur les méthodes à fonction coût

Il y a deux volets importants dans ce type de méthodes, le choix de la fonction coût et le choix de la méthode d'optimisation.

La fonction coût choisie donne une grande influence sur la performance et la convergence de la méthode de recalage. La méthode d'optimisation la plus utilisée est la méthode des moindres carrés. On ne peut faire un recalage de tous les paramètres avec un seul essai, il est donc important de choisir les paramètres à corriger. Les paramètres à recalculer peuvent être la raideur, la masse, l'amortissement ou tout autre paramètre physique ou géométrique.

L'avantage de ces méthodes est qu'elles donnent toujours un sens physique au recalage obtenu contrairement aux méthodes directes.

Toutes les fonctions coût sont non linéaires par rapport aux paramètres, la solution ne peut être obtenue que par itérations posant donc un problème de convergence. L'utilisation de matrices de pondération améliore les méthodes mais ne garantit pas la convergence du processus.

1.4.2.2 Méthodes de la variation minimale

Dans toutes les circonstances les données expérimentales sont affectées d'une quantité de bruit non négligeable, ainsi que d'une modélisation incertaine des caractéristiques des structures industrielles. En répétant plusieurs fois la même manipulation expérimentale sur un échantillon de mêmes structures, ou sur la même structure on peut utiliser des artifices statistiques sur les FRFs mesurées pour estimer l'erreur de départ sur les données du modèle EF. Les méthodes de la variation minimale utilisent ces artifices pour améliorer la prédiction du modèle EF.

Soient $\{p_i\}$ les paramètres de recalage à la $i^{\text{ème}}$ itération et $E[p_i \cdot p_i^T] = [V_i]$ la matrice de variation minimale de ces paramètres. L'objectif des méthodes à variation minimale est de minimiser cette variation à chaque itération.

Si la différence entre les prédictions $\{Z_i\}$ à la $i^{\text{ème}}$ itération et les mesures correspondantes $\{Z_x\}$ est assez petite alors

$$\{Z_x\} - \{Z_i\} = [S](\{p\} - \{p_i\}) \quad (131)$$

$[S]$ étant la matrice de sensibilité des $\{Z\}$ par rapport aux paramètres de recalage. Les paramètres de l'itération peuvent être déterminés en utilisant l'équation

$$\{p_{i+1}\} - \{p_i\} = [T](\{Z_x\} - \{Z_i\}) \quad (132)$$

La variation de $\{p_{i+1}\}$ à la $(i+1)^{\text{ème}}$ itération est

$$[V_{i+1}] = E[p_{i+1} \cdot p_{i+1}^T]$$

$$[V_{i+1}] = [V_i] + ([D_i] - [V_i][S_i]^T)^T [T]^T + [T]([D_i]^T - [V_i][S_i]) + [T][V_{zi}][T]^T$$

où $[D_i] = E[p_i \cdot \varepsilon^T]$ est une corrélation entre les paramètres et le bruit de mesure $\{\varepsilon\}$ et $[V_{zi}]$ est l'erreur sur la variation des sorties avec

$$[V_{zi}] = E[(\{Z_x\} - \{Z_i\})(\{Z_x\} - \{Z_i\})^T]$$

En minimisant la variation sur les paramètres à la $(i+1)^{\text{ème}}$ itération la matrice $[T]$ peut être obtenue par

$$[T] = ([V_i][S_i]^T - [D_i])[V_{zi}]^{-1} \quad (133)$$

On peut alors déterminer $\{p_{i+1}\}$

$$\{p_{i+1}\} = \{p_i\} + ([V_i][S_i]^T - [D_i])[V_{zi}]^{-1}(\{Z_x\} - \{Z_i\}) \quad (134)$$

Quand la corrélation entre l'erreur de mesure et les paramètres est nulle alors

$$\{p_{i+1}\} = \{p_i\} + ([V_i][S_i]^T)([S_i][V_i][S_i]^T + [V_\varepsilon])^{-1}(\{Z_x\} - \{Z_i\}) \quad (135)$$

L'avantage principal des méthodes de variation minimale est l'utilisation des informations expérimentales et leur qualité évaluée statistiquement, ainsi que la connaissance des paramètres imprécis.

Lindholm et al, ont utilisé une approche statistique bayésienne dans leur méthode de recalage. La connaissance des paramètres mal prédits et l'estimation de l'erreur expérimentale aide à la stabilité de la solution et améliore la qualité des résultats [74], [75], [76]. Après avoir analysé quatre types de mesures expérimentales ils montrent que les FRFs et les réponses sinusoïdales sont les plus appropriées pour les méthodes de recalage statistiques.

Friswell et al [77], ont proposé une méthode qui considère que les erreurs d'approximation du modèle EF, et le bruit de mesure comme étant les limites de l'incertitude des paramètres. Les résultats seront déterminés par la résolution du problème de mini – maximisation suivant

$$\min_p \left(\max \left\{ \|(S + \delta S)_p - (Z + \delta Z)\|_2 : \|\delta S\|_2 \leq \eta_s, \|\delta Z\|_2 \leq \eta_z \right\} \right) \quad (136)$$

I.4.2.3 Autres méthodes de recalage

En plus des méthodes précédentes, d'autres méthodes spécifiques existent. L'une des méthodes les plus populaires actuellement est la méthode utilisant les algorithmes génétiques. Ces algorithmes permettent de trouver des minima ou maxima globaux. Ils peuvent donc être utilisable pour la minimisation de fonctions coût. Larson et Zimmerman [78] ont développé un programme efficace utilisant les algorithmes génétiques. Ils l'ont appliqué pour le recalage d'un modèle EF d'une barre à six éléments avec 25 ddl. Les résultats montrent une amélioration considérable même lorsque les modes sont perturbés par du bruit expérimental.

Carlin et Garcia [79] ont utilisé l'algorithme pour la détection de défauts dans les structures mécaniques. Après comparaison avec d'autres méthodes de détection de défauts, ils concluent que les algorithmes génétiques sont plus performants et évitent de signaler des défauts là où il n'existent pas, chose souvent rencontrée dans les autres méthodes.

Un autre type de méthode est basée sur l'utilisation des conditions aux limites perturbées (Perturbed Boundary Condition PBC) dans le test expérimental. Même si le concept des PBC existait depuis les années 1980, il n'a été introduit dans le recalage que dans le début des années 1990 [80], [81], [82], [83]. L'utilité principale des PBC est de surmonter le problème principal des méthodes de recalage qui est l'insuffisance d'information, et améliorer le conditionnement des systèmes d'équations. Un des problèmes de ce type de méthodes est la difficulté à associer les mesures des différents tests en une seule procédure de recalage, car si l'on augmente simplement le nombre d'équations la résolution du système devient plus complexe. Un autre problème réside dans le choix des configurations de PBC qui permettent de donner une quantité d'informations suffisante pour améliorer la méthode de recalage. Yang et Brown [73] ont proposé une méthode de sélection des configurations de PBC.

Au lieu d'utiliser plusieurs ensembles de tests comme pour les PBC, Ibrahim et al [84], [85], ont utilisé un modèle analytique à perturbations multiples. Même si les informations sur le comportement de la structure proviennent d'un seul test expérimental, la

méthode augmente la quantité d'information obtenue, et aide par conséquent à améliorer le conditionnement des équations de recalage.

Quelques chercheurs ont utilisé les fréquences d'antirésonance avec les fréquences naturelles, modes propres, et les FRFs pour la conception de la méthode de recalage [82], [86], [87], [88], [89]. Les modes propres et les fréquences naturelles de quelques modes peuvent donner une bonne information des propriétés dynamiques de la structure considérée dans la bande fréquentielle choisie. Théoriquement, chaque FRF contient l'information sur tous les modes de la structure, mais en pratique le bruit de mesure rend les résultats du recalage dépendants du choix des valeurs des fréquences de mesure. La FRF à la fréquence d'antirésonance est une propriété qui dépend de tous les modes, mais la sensibilité de celle-ci est dominée par la valeur propre la plus proche et le vecteur propre qui lui correspond [87]. Ces FRFs aux antirésonances sont différentes des autres. Chaque FRF à l'antirésonance induit une information indépendante dans le modèle de recalage. Ceci aide à rendre le système surdéterminé.

I.4.2.4 Remarques sur les méthodes de recalage

Même s'il existe une multitude de méthodes de recalage de modèle EF, le problème reste toujours posé puisque aucune d'elles ne peut se suffire et puisse corriger correctement le modèle EF de toutes les structures industrielles. Il y a des cas jugés satisfaisants mais leur succès est limité à une structure choisie et la solution n'est toujours pas unique.

Les mesures expérimentales incomplètes en terme de bande fréquentielle et en nombre de ddls montrent que le recalage ne peut souvent pas s'appliquer sur tous les paramètres du système. Le choix des mesures et des paramètres à corriger ainsi que la méthode de réduction ou d'expansion de modèle est primordial pour le succès du recalage. En plus l'estimation de la qualité des résultats nécessite aujourd'hui le flair et le jugement ainsi que l'expérience des ingénieurs.

Plusieurs types de mesures peuvent être utilisées (fréquences naturelles, modes propres, FRF, ...). Elles ont des sensibilités différentes sur les paramètres à recalculer. On peut combiner ces différents types de mesures en une seule méthode de recalage pour associer leurs avantages et éviter les inconvénients de chaque type quand il est utilisé seul.

Un bon choix de fonction coût (fonction objectif) influe sur la qualité de la méthode. La fonction coût doit être monotone et continue par rapport aux paramètres à étudier.

Quand la fonction coût aura été bien choisie, la méthode d'optimisation ou de minimisation joue un rôle important. La méthode des moindres carrés est l'une des méthodes

les plus utilisées, mais on peut en utiliser d'autres. Quelques méthodes comme celles basées sur les algorithmes génétiques permettent d'améliorer le recalage du point de vue processus d'optimisation.

IDENTIFICATION DE STRUCTURES LINEAIRES

II.1 METHODE DE CHOIX DES POINTS DE MESURE POUR LE RECALAGE DE	52
MODELES	
II.1.1 Enoncé de la méthode	52
II.1.2 Résultats expérimentaux	54
II.1.3 Conclusion	59
II.2 METHODES DE RECALAGE	59
II.2.1 Méthode de recalage avec paramétrisation intrinsèque	59
II.2.1.1 Position du problème	60
II.2.1.2 Méthode d'approximation	61
II.2.1.3 Choix des points de mesure	66
II.2.1.4 Réduction aux paramètres de recalage de raideur	67
II.2.1.5 Paramétrisation intrinsèque	67
II.2.1.6 Cas test numérique	69
II.2.1.7 Conclusion	72
II.2.2 Méthode de recalage par séparation des variables	72
II.2.2.1 Méthode de recalage	73
II.2.2.2 Fonctions coût	74
II.2.2.3 Paramétrisation fréquentielle	74
II.2.2.4 Méthode de recalage par les moindres carrés	75
II.2.2.5 Expressions des première et seconde dérivées des erreurs relatives	76
II.2.2.6 Application	78
II.2.2.7 Conclusion	81
II.2.3 Stratégie incrémentale de recalage	82
II.2.3.1 Problématique	83
II.2.3.2 Choix de la fonction de corrélation	84
II.2.3.3 Méthode proposée	85
II.2.3.4 Application	87
II.2.3.5 Conclusion	89

II IDENTIFICATION DE STRUCTURES LINEAIRES

II.1 METHODE DE CHOIX DES POINTS DE MESURE POUR LE RECALAGE DE MODELES

II.1.1 Enoncé de la méthode

Considérons l'équation du mouvement d'un système dynamique à n degrés de liberté dans la bande fréquentielle $\omega_i \in \{\omega_1 \ \omega_2 \ \dots, \ \omega_s\}$

$$\{y(\omega_i)\} = \left(-[M]\omega_i^2 + j\omega_i[B] + [K] \right)^{-1} \{f\} \quad (137)$$

Soit « r » le nombre de degrés de liberté de mesure à optimiser, et considérons que tous les ddl sont mesurés, on obtient alors la matrice $[Y]$ formée par les colonnes de la réponse $y(\omega_i)$

$$[Y] = [\{y(\omega_1)\} \ \{y(\omega_2)\} \ \dots \ \dots \ \{y(\omega_s)\}] \quad (138)$$

Calculons maintenant $\frac{\partial[Y]}{\partial p_i}$; cette matrice représente l'influence d'un défaut de modélisation

de masse (quand $p_i = m_i$) ou de raideur (quand $p_i = k_i$) du $i^{\text{ème}}$ élément sur les mesures $[Y]$. La matrice de sensibilité doit être capable de prendre en compte les effets sur le comportement dynamique de la structure d'une variation unitaire du paramètre à corriger [90].

Pour notre cas considérons la matrice d'information $[I(p_i)]$ définie par [91]

$$[I(p_i)] = \left(\frac{\partial[Y]}{\partial p_i} \right) \left(\frac{\partial[Y]}{\partial p_i} \right)^H \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (139)$$

où H représente le conjugué transposé.

La diagonale de la matrice d'information représente l'influence globale d'une variation de masse ou de raideur du $i^{\text{ème}}$ élément par rapport aux mesures:

$$\{v\}_i = \text{diag}[I(p_i)] \quad (140)$$

L'élément du vecteur $\{v\}$ ayant la valeur maximale donne le ddl le plus sensible à un défaut sur l'élément « i ».

Calculons maintenant le vecteur témoin $\{\tau\}$ tel que

$$\{\tau\} = \sum_{i=1}^{2n} \{v\}_i \quad (141)$$

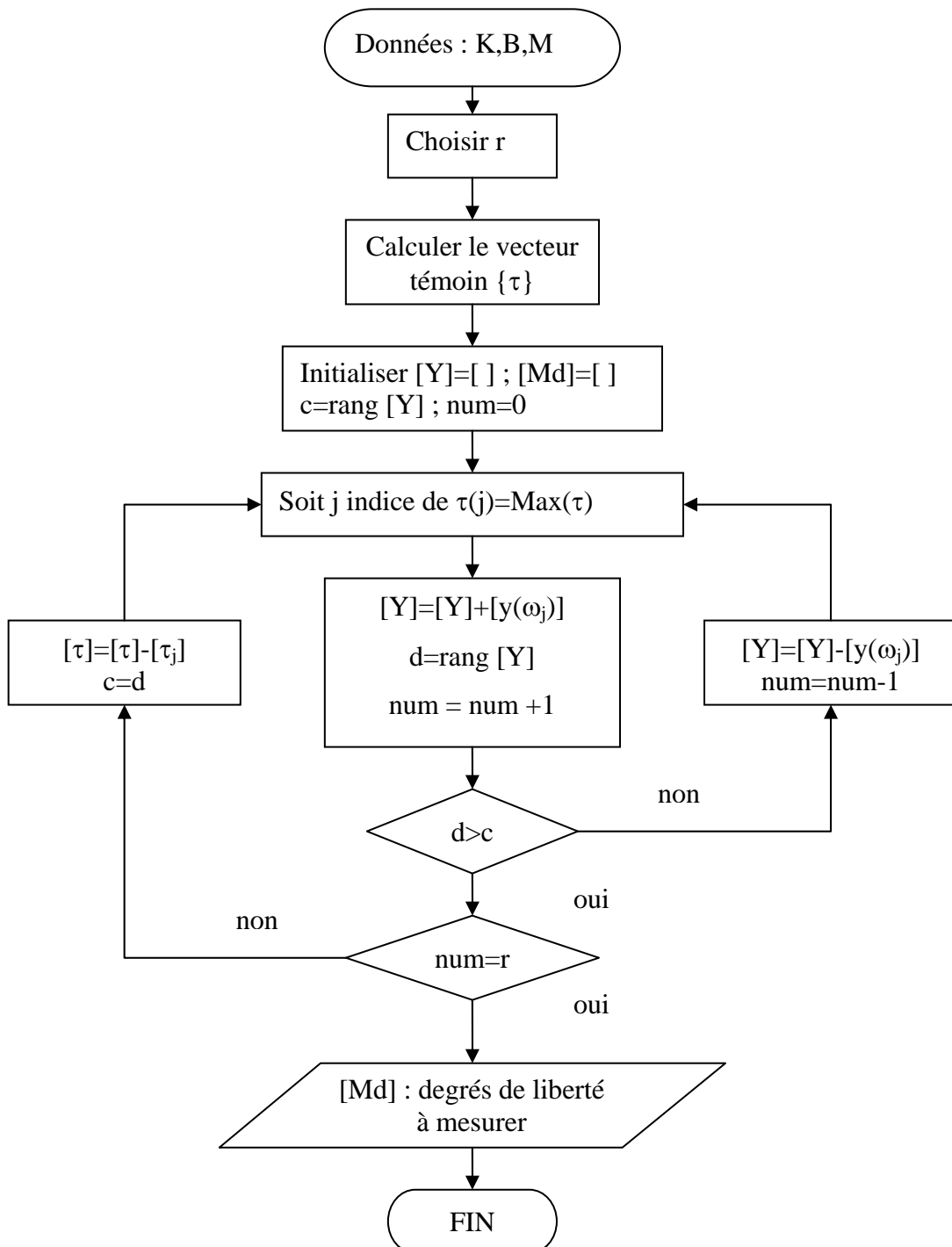


Figure 2. Organigramme de la méthode proposée

Les éléments de $\{\tau\}$ auront une grande valeur lorsque le ddl concerné est plus sensible à un défaut existant dans la structure sur n'importe quel élément. Il est donc intéressant de mesurer aux ddls ayant les éléments correspondants du vecteur $\{\tau\}$, les plus grands possibles. Cela permet de sélectionner les ddls donnant la meilleure observabilité un à un séparément. On doit

maintenant supprimer tous les ddl qui donnent des informations de mesures $[Y]$ identiques ou linéairement dépendantes, c'est-à-dire ceux qui n'augmentent pas le rang de la matrice $[Y]$.

Finalement la méthode de sélection de points de mesure proposée est résumée en ces trois étapes

- a) Calculer le vecteur témoin $\{\tau\}$ en utilisant l'équation (141);
- b) La valeur maximale de $\{\tau\}$ correspond au premier ddl à sélectionner; La matrice réponse mesurée $[Y]$ est construite par la ligne correspondant au ddl choisi.
- c) Le ddl suivant à sélectionner est le ddl correspondant ayant la valeur de l'élément de $\{\tau\}$ immédiatement inférieure, qui augmente le rang de la matrice $[Y]$ quand la ligne qui lui correspond est ajoutée à celle ci.

Répéter l'étape c jusqu'à ce que le nombre de points de mesure soit égal au nombre prédéfini « r ».

Cet algorithme est matérialisé par l'organigramme de la figure 2.

II.1.2 Résultats expérimentaux

Pour tester la méthode nous avons choisi une technique de recalage efficace (voir chapitre suivant) que nous avons appliqué sur une structure simulée.

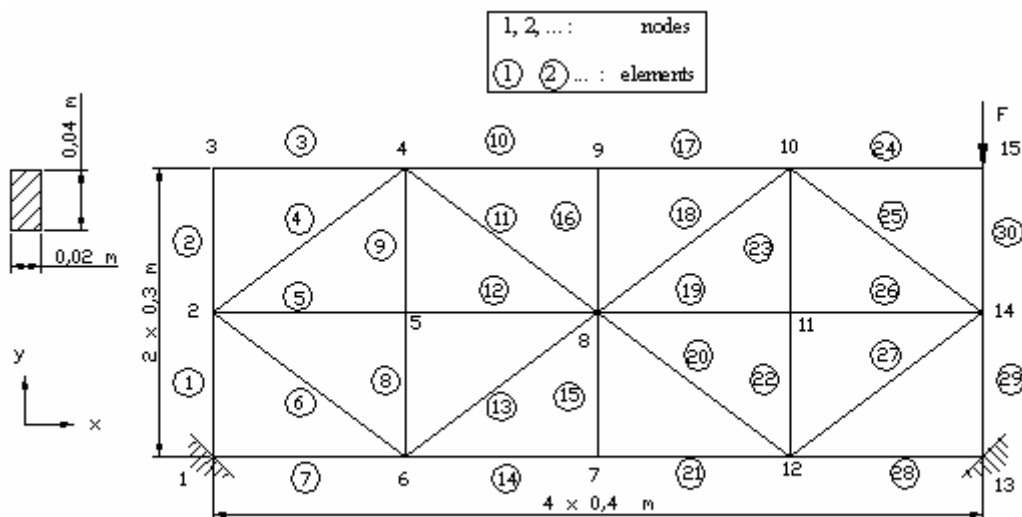


Figure 3. Structure d'essai en treillis doublement encastree

Pour simuler les mesures, du bruit aléatoire a été ajouté en utilisant le modèle suivant [100]

$$y^{(s)}(i, \omega_i) = (1 + \rho \cdot g \cdot \varepsilon\%) y^{(s)}(i, \omega_i) \quad (142)$$

où ρ représente aléatoirement la valeur 1 ou -1,

g : valeur aléatoire entre 0 et 1,

$\varepsilon\%$: pourcentage de bruit introduit.

La simulation a été réalisée avec un bruit de mesure de l'ordre de 5%.

Pour améliorer l'efficacité de la méthode de choix des points de mesure en tenant compte de la technique de recalage, considérons la structure en treillis doublement encadrée de la figure 3 formée de 30 poutres soudées. La structure est discrétisée en 30 éléments finis avec 39 degrés de liberté.

- Choix des fréquences de mesure et de la position de la force d'excitation

Comme indiqué précédemment, il est intéressant de maximiser le vecteur témoin $\{\tau\}$. Alors, dans cette application, la position de la force d'excitation doit être choisie selon le degré de liberté qui maximise ce vecteur. Pour ce faire, nous calculons le vecteur témoin pour toutes les positions possible de la force et nous comparons le module des vecteurs obtenus ; Les fréquences de mesure sont aussi des paramètres qui peuvent induire une grande variation de ce vecteur. L'optimisation doit donc inclure ces paramètres.

Considérons que la structure précédente travaille dans la bande fréquentielle [0, 520] Hz. Dans le but de choisir les fréquences de mesure, divisons cette bande fréquentielle en trois parties. La première partie représente les fréquences faibles [0, 200], la seconde partie, les fréquences moyennes [150, 350], et la troisième représente les grandes fréquences [330, 520].

Considérons maintenant les cinq ensembles de valeurs de fréquences présentées sur le tableau 1:

- 1- valeurs proches des fréquences de résonance $\{\omega_1\}$
- 2- valeurs couvrant les faibles fréquences $\{\omega_2\}$
- 3- valeurs couvrant les fréquences moyennes $\{\omega_3\}$
- 4- valeurs couvrant les grandes fréquences $\{\omega_4\}$
- 5- valeurs couvrant toute la bande fréquentielle $\{\omega_5\}$

Nous devons choisir l'ensemble qui maximise le module du vecteur témoin $\{\tau\}$. En d'autres termes, nous choisirons la position de la force d'excitation et les valeurs des fréquences de mesures qui maximisent simultanément le module du vecteur témoin. La figure 4, représente le module de ce vecteur pour chaque ensemble de valeurs des fréquences de mesures pour différentes positions de la force d'excitation (les degrés de liberté de rotation ont été volontairement éliminés)

Tableau 1. Différents ensembles de fréquences de mesure

$\{\omega 1\}$	$\{\omega 2\}$	$\{\omega 3\}$	$\{\omega 4\}$	$\{\omega 5\}$
12	14	160	339	14
37	22	108	348	39
84	29	186	361	62
111	39	195	370	94
124	49	208	385	120
141	54	224	391	139
170	62	232	396	160
205	70	240	407	186
220	78	245	415	208
248	94	257	426	232
266	100	268	434	257
325	109	276	442	284
340	120	284	450	318
361	139	302	456	339
384	144	310	466	370
405	152	318	474	391
426	160	324	482	426
457	168	332	490	450
466	186	339	498	474
511	195	350	510	498

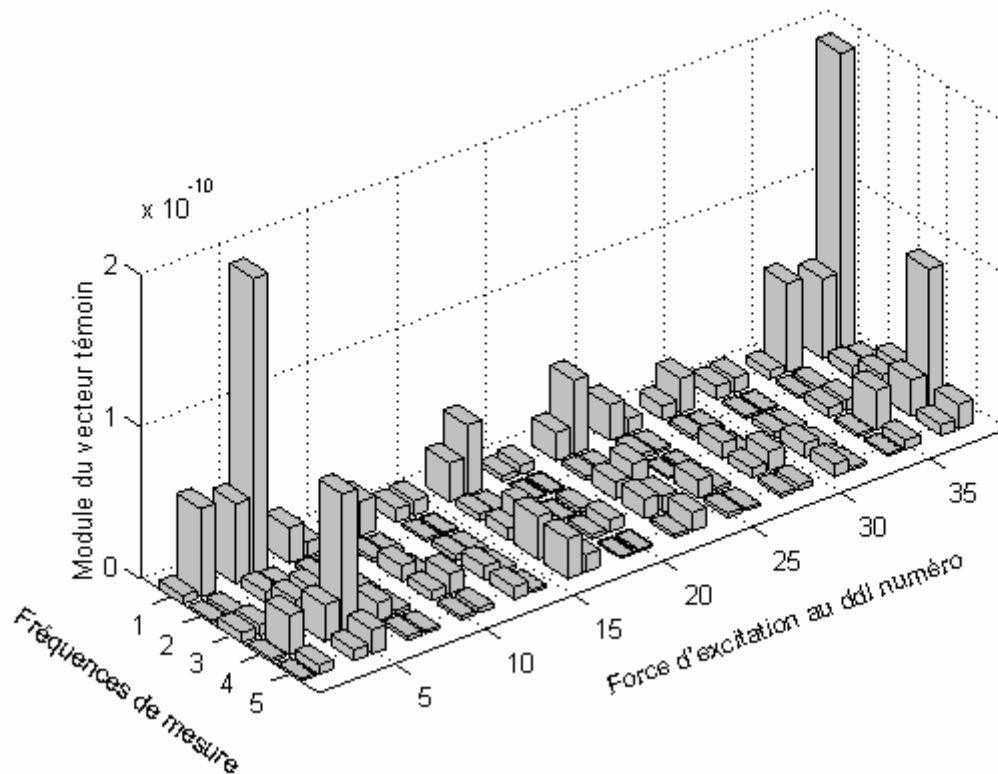


Figure 4. Module du vecteur témoin pour différentes positions de la force d'excitation et différentes fréquences de mesure

Nous constatons que les fréquences proches de la résonance maximisent le module du vecteur témoin, elles seront par conséquent plus utiles pour le recalage de modèle. Pour ces valeurs des fréquences, la figure 4 montre que pour maximiser le vecteur témoin, la force d'excitation doit être choisie selon le degré de liberté 38 qui représente le déplacement vertical du nœud 15.

- Application de la méthode d'optimisation pour le recalage de modèle

Pour simuler la structure expérimentale, des défauts de +20%, +30%, et +20% de la raideur sont introduits respectivement dans les éléments 2, 14 et 17 avec 5% de bruit aléatoire.

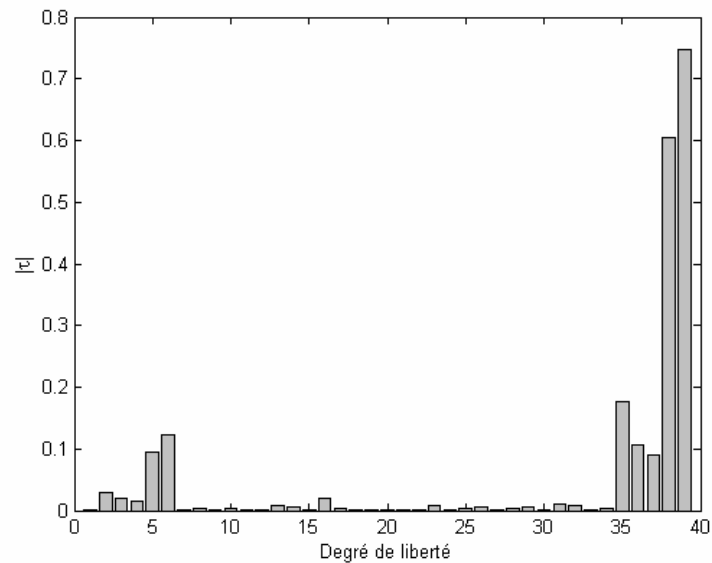


Figure 5. Histogramme du vecteur témoin en considérant tous les ddl mesurés

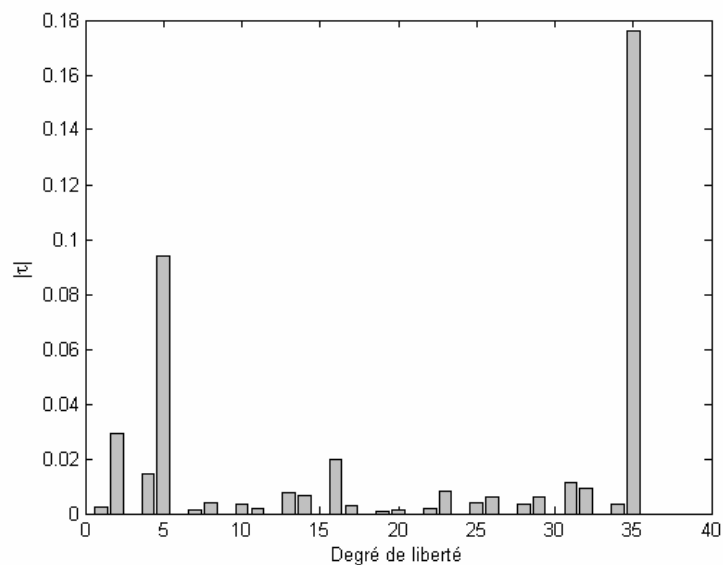


Figure 6. Vecteur témoin en considérant que les ddl de rotation et ceux du noeud 15 non mesurés

La figure 5 qui représente le module du vecteur témoin, montre que les ddls de rotation sont plus expressifs et utiles que les ddls de translation. En se basant sur cet histogramme les quatre ddls à sélectionner seront {6, 35, 38, 39} qui représentent les déplacements verticaux des noeuds 14, 15 et les ddls de rotation des noeuds 2, 15. Considérant que seulement les ddls de translation seront mesurés et évitant de mesurer au noeud d'excitation 15, l'historgramme sans ces ddls (Figure 6) montre que les ddls à sélectionner sont {2, 5, 16, 35} qui représentent les déplacements verticaux des noeuds 3, 4, 14 et le déplacement horizontal du noeud 6.

Pour valider la stratégie proposée un algorithme de recalage de modèle [101] est utilisé pour détecter les défauts en considérant que les mesures sont effectuées suivant les ddls sélectionnés {2, 5, 16, 35}. Les résultats de recalage obtenus seront comparés aux résultats que donnera le même algorithme en considérant que tous les ddls de déplacement sont mesurés pour les mêmes fréquences de mesure choisies (légèrement proches des fréquences de résonance, l'ensemble $\{\omega_1\}$ sur le tableau 1). Le tableau 2 illustre les résultats obtenus.

Tableau 2. Résultats du recalage pour les deux ensembles de fréquences de mesure

Elts	Défauts	Ens. I	Ens. II	Elts	Défauts	Ens. I	Ens. II
1	0	-0,72	0,19	16	0	2,34	1,27
2	20	19,28	18,89	17	20	12,79	19,67
3	0	2,26	-0,59	18	0	3,28	1,38
4	0	0,01	0,50	19	0	-1,17	0,47
5	0	1,91	0,64	20	0	0,41	-1,10
6	0	1,03	0,08	21	0	-0,62	-0,98
7	0	-2,64	-1,27	22	0	-1,27	0,76
8	0	-0,50	1,23	23	0	0,55	-0,85
9	0	2,07	-0,68	24	0	-3,15	0,81
10	0	4,15	0,84	25	0	-0,66	-1,01
11	0	0,27	-0,48	26	0	-1,74	-0,28
12	0	0,74	-1,19	27	0	-0,71	0,12
13	0	-1,32	-0,04	28	0	-1,19	1,99
14	30	31,16	30,76	29	0	-0,04	0,64
15	0	-2,90	-0,89	30	0	0,29	-0,20

Les résultats obtenus avec un nombre limité de ddls sélectionnés {2, 5, 16, 35} (ensemble I sur le tableau 2) sont très proches des résultats obtenus quand tous les ddls de déplacement sont mesurés (ensemble II sur le tableau 2). Ceci confirme que la stratégie proposée donne un nombre limité de mesures équivalentes à la mesure de tous les ddls de translation. Les défauts de raideur introduits ont été localisés et quantifiés.

II.1.3 Conclusion

Une méthode de choix des points de mesure utilisant la dérivée première de la réponse fréquentielle du mouvement a été proposée. Testée dans le cas de la détection de défauts dans une structure en treillis doublement encastrée dont les défauts et le comportement dynamique ont été simulés numériquement. Les résultats des tests effectués avec l'ensemble de points de mesure sélectionnés en utilisant le recalage de modèle montre l'efficacité de la méthode proposée. Compte tenu de la matrice de sensibilité utilisée, cette méthode est adéquate pour les applications de détection de défauts mécaniques dans les structures.

L'efficacité de cette méthode dépend directement des valeurs des fréquences choisies $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s\}$ dans la bande fréquentielle. Le nombre de mesures « r » est aussi un paramètre à optimiser pour rendre la méthode facilement utilisable dans le cas de l'identification en dynamique.

II.2 METHODES DE RECALAGE

II.2.1 Méthode de recalage avec paramétrisation intrinsèque

Le recalage de modèle théorique consiste à corriger ou raffiner un modèle obtenu à partir de l'analyse dynamique de structures, en utilisant des mesures expérimentales sur la structure à étudier. Cette technique est l'une des techniques les plus utilisées en analyse modale expérimentale [93]. Dans le cas des modèles éléments finis, plusieurs méthodes existent. Les méthodes de recalage basées sur les mesures modales utilisent les fonctions de réponse fréquentielle qu'ils exploitent en analyse modale pour obtenir les mesures, un processus qui introduit des erreurs et imperfections supplémentaires. L'utilisation d'un nombre limité de modes est une autre source d'erreurs. Par conséquent les méthodes de recalage utilisant directement les fonctions de réponse fréquentielle FRFs [84], [94], [95], [96], [97], [98], [99], [100] sont préférables.

Dans cette partie, une nouvelle méthode de recalage basée sur les mesures de fonctions de réponse fréquentielle a été proposée [101], l'utilisation des FRFs nous évite les erreurs de l'analyse modale. La fonction objective de la procédure de minimisation est formée par la différence entre les réponses fréquentielles analytiques et celles mesurées. Les paramètres de recalage sont des coefficients affectés aux matrices élémentaires de masse et de raideur. En utilisant un nombre de mesures incomplètes pour quelques fréquences, nous construisons un système d'équations non linéaire dont la linéarisation conduit à un système itératif. Pour

améliorer la convergence et la stabilité du système, une paramétrisation intrinsèque en fréquences est proposée.

II.2.1.1 Position du problème

Le comportement dynamique d'une structure mécanique linéaire est régi par l'équation suivante :

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = f(t) \quad (143)$$

où M, C et K sont des matrices réelles symétriques qu'on discrétise comme suit

$$M = \sum_{i=1}^{Ne} M_i^{(e)}, \quad C = \sum_{i=1}^{Ne} C_i^{(e)} \quad \text{et} \quad K = \sum_{i=1}^{Ne} K_i^{(e)} \quad (144)$$

Pour une excitation harmonique de pulsation ω , la solution particulière de l'équation (143) est

$$(-M\omega^2 + j\omega C + K)y = f$$

à partir de laquelle nous pouvons déduire l'expression du vecteur déplacement:

$$y(\omega) = (-M\omega^2 + j\omega C + K)^{-1} f, \quad \text{avec } \omega \in \{\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_s\}$$

Dans l'implémentation de la méthode nous avons utilisé une force d'excitation unique. Dans ce qui va suivre la fonction de réponse fréquentielle FRF est utilisé au lieu et place du vecteur déplacement. La méthode n'est bien sûr pas limitée aux cas de mono excitations, mais peut être utilisée pour les excitations multiples.

L'amortissement est considéré proportionnel à la masse et la raideur

$$C = \alpha M + \beta K$$

En introduisant la paramétrisation de la structure, les matrices globales de masse et de raideur peuvent être exprimées sous la forme [100]

$$M^{(s)} = \sum_{i=1}^{Ne} m_i M_i^{(e)} \quad \text{et} \quad K^{(s)} = \sum_{i=1}^{Ne} k_i K_i^{(e)}$$

Le cas où $m_i = k_i = 1$ implique que le $i^{\text{ème}}$ élément est bien modélisé et ne comporte pas d'erreurs ou de défauts.

Soit $y^{(s)}(\omega_t)$ un ensemble de « s » mesures incomplètes de fonctions de réponse fréquentielle.

La différence entre les FRFs analytiques et celles mesurées s'écrit [94]

$$e(\omega_t) = y(\omega_t) - y^{(s)}(\omega_t) \quad (145)$$

En pratique, les FRFs ne sont pas complètement mesurées. Ce problème de données incomplètes peut être résolu par l'extension des données expérimentales ou la réduction du modèle analytique. Même si l'expansion préserve la connexion complète de tous les éléments de la structure, l'expérience a montré que cette dernière n'est généralement pas satisfaisante [90], l'effet du nombre de mesures sur la qualité des résultats a été développé par Balis Crema et Coppotelli [90], ainsi que Pereira et al [102]. Dans la méthode ici présentée, les degrés de liberté non mesurés sont approximés par leurs équivalents analytiques.

II.2.1.2 Méthode d'approximation

L'erreur résiduelle à minimiser dans le processus de recalage est le sujet d'une recherche étendue ces dernières années, le taux de réussite de ces méthodes est largement dépendant du choix optimal de cette fonction. L'erreur résiduelle minimisée par Dascotte et Strobbe [95] est obtenue à partir de la corrélation entre toutes les FRFs analytiques et expérimentales exprimées en terme de corrélation en amplitude et en mode.

La fonction objective utilisée dans le cas de minimisation par la méthode des moindres carrés est

$$\delta = \text{Trace}(E^H E) = \sum_{t=1}^s e^H(\omega_t).e(\omega_t) \quad (146)$$

La solution de cette minimisation est donnée par

$$\frac{\partial \delta}{\partial m_i} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \delta}{\partial k_i} = 0 \quad \text{avec} \quad (i=1, \dots, Ne) \quad (147)$$

Ceci conduit à un système de $2Ne$ équations à $2Ne$ inconnues.

En utilisant l'équation (146), les équations précédentes deviennent comme suit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial m_i} &= \frac{\partial}{\partial m_i} \sum_{t=1}^s e^H(\omega_t).e(\omega_t) \\ \frac{\partial \delta}{\partial m_i} &= \sum_{t=1}^s \frac{\partial}{\partial m_i} (e^H(\omega_t).e(\omega_t)) \\ \frac{\partial \delta}{\partial m_i} &= \sum_{t=1}^s \left(\frac{\partial e^H(\omega_t)}{\partial m_i} . e(\omega_t) + e^H(\omega_t) . \frac{\partial e(\omega_t)}{\partial m_i} \right) \\ \frac{\partial \delta}{\partial m_i} &= \sum_{t=1}^s \left[\left(e^H(\omega_t) . \frac{\partial e(\omega_t)}{\partial m_i} \right) + \left(e^H(\omega_t) . \frac{\partial e(\omega_t)}{\partial m_i} \right)^H \right] \end{aligned}$$

De la même manière, on obtient

$$\frac{\partial \delta}{\partial k_i} = \sum_{t=1}^s \left[\left(e^H(\omega_t) \cdot \frac{\partial e(\omega_t)}{\partial k_i} \right) + \left(e^H(\omega_t) \cdot \frac{\partial e(\omega_t)}{\partial k_i} \right)^H \right]$$

Les équations (147) deviennent

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta}{\partial m_i} = \sum_{t=1}^s \left[\left(e^H(\omega_t) \cdot \frac{\partial e(\omega_t)}{\partial m_i} \right) + \left(e^H(\omega_t) \cdot \frac{\partial e(\omega_t)}{\partial m_i} \right)^H \right] = 0 \\ \frac{\partial \delta}{\partial k_i} = \sum_{t=1}^s \left[\left(e^H(\omega_t) \cdot \frac{\partial e(\omega_t)}{\partial k_i} \right) + \left(e^H(\omega_t) \cdot \frac{\partial e(\omega_t)}{\partial k_i} \right)^H \right] = 0 \end{cases}, i=1, \dots, N_e$$

En les développant, celles ci donnent

$$\frac{\partial e(\omega_t)}{\partial m_i} = \frac{\partial}{\partial m_i} \left[(-M\omega_t^2 + j\omega_t C + K)^{-1} f - y^{(s)}(\omega_t) \right]$$

$$\frac{\partial e(\omega_t)}{\partial m_i} = \frac{\partial}{\partial m_i} \left[Z^{-1}(\omega_t) \cdot f - y^{(s)}(\omega_t) \right]$$

$$\frac{\partial e(\omega_t)}{\partial m_i} = \frac{\partial Z^{-1}(\omega_t)}{\partial m_i} \cdot f \quad (148)$$

Sachant que

$$\frac{\partial Z^{-1}(\omega_t)}{\partial m_i} = -Z^{-1}(\omega_t) \cdot \frac{\partial Z(\omega_t)}{\partial m_i} \cdot Z^{-1}(\omega_t) \quad (149)$$

La dérivée de Z^{-1} peut être calculée comme suit

$$\frac{\partial Z(\omega_t)}{\partial m_i} = \frac{\partial}{\partial m_i} \cdot (-M\omega_t^2 + j\omega_t C + K)$$

$$\frac{\partial Z(\omega_t)}{\partial m_i} = -\frac{\partial M}{\partial m_i} \omega_t^2 + j\omega_t \frac{\partial C}{\partial m_i} + \frac{\partial K}{\partial m_i}$$

$$\frac{\partial Z(\omega_t)}{\partial m_i} = \frac{\partial M}{\partial m_i} (-\omega_t^2 + j\alpha\omega_t) \quad (150)$$

La dérivée de la matrice masse M peut être obtenue par

$$\frac{\partial M}{\partial m_i} = \frac{\partial}{\partial m_i} \left(\sum_{v=1}^{N_e} m_v \cdot M_v^{(e)} \right)$$

avec

$$\frac{\partial M}{\partial m_i} = M_i^{(e)} \quad (151)$$

En substituant l'équation (151) dans (150) on obtient

$$\frac{\partial Z(\omega_t)}{\partial m_i} = M_i^{(e)} (-\omega_t^2 + j\alpha\omega_t) \quad (152)$$

Puis, substituant cette dernière équation dans (150), on obtient alors

$$\frac{\partial Z^{-1}(\omega_t)}{\partial m_i} = -(-\omega_t^2 + j\alpha\omega_t) Z^{-1}(\omega_t) M_i^{(e)} Z^{-1}(\omega_t) \quad (153)$$

Introduisant l'équation (153) dans (148) nous obtenons

$$\frac{\partial e(\omega_t)}{\partial m_i} = -(-\omega_t^2 + j\alpha\omega_t) Z^{-1}(\omega_t) M_i^{(e)} y(\omega_t) \quad (154)$$

En pré multipliant par $e^H(\omega_t)$ celle-ci devient

$$e^H(\omega_t) \cdot \frac{\partial e(\omega_t)}{\partial m_i} = -(-\omega_t^2 + j\alpha\omega_t) e(\omega_t)^H Z^{-1}(\omega_t) M_i^{(e)} y(\omega_t)$$

i.e.
$$\frac{\partial \delta}{\partial m_i} = -\sum_{t=1}^s \left[(-\omega_t^2 + j\alpha\omega_t) \left[e(\omega_t)^H \left(Z^{-1}(\omega_t) M_i^{(e)} y(\omega_t) \right) + \left(Z^{-1}(\omega_t) M_i^{(e)} y(\omega_t) \right)^H e(\omega_t) \right] \right]$$

De la même façon que la dérivation de l'équation (152), nous pouvons écrire le résultat suivant

$$\frac{\partial Z(\omega_t)}{\partial k_i} = K_i^{(e)} (1 + \beta\omega_t) \quad (155)$$

En dérivant l'équation (155), nous avons

$$\frac{\partial Z^{-1}(\omega_t)}{\partial k_i} = -(1 + j\beta\omega_t) Z^{-1}(\omega_t) K_i^{(e)} Z^{-1}(\omega_t)$$

De la même façon que la dérivation de l'équation (154) pour le paramètre m, nous obtenons pour le paramètre k

$$\frac{\partial e(\omega_t)}{\partial k_i} = -(1 + j\beta\omega_t) Z^{-1}(\omega_t) K_i^{(e)} y(\omega_t) \quad (156)$$

Pré multipliant l'équation (156) par $e^H(\omega_t)$ nous obtenons

$$e^H(\omega_t) \cdot \frac{\partial e(\omega_t)}{\partial k_i} = -(1 + j\beta\omega_t)e(\omega_t)^H Z^{-1}(\omega_t) \cdot K_i^{(e)} \cdot y(\omega_t)$$

Ce qui conduit à

$$\frac{\partial \delta}{\partial k_i} = -\sum_{t=1}^s \left[(1 + j\beta\omega_t) \left[e(\omega_t)^H \left(Z^{-1}(\omega_t) \cdot K_i^{(e)} \cdot y(\omega_t) \right) + \left(Z^{-1}(\omega_t) \cdot K_i^{(e)} \cdot y(\omega_t) \right)^H e(\omega_t) \right] \right]$$

Finalement, le système d'équations suivant est obtenu

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^s \left[(-\omega_t^2 + j\alpha\omega_t) \left[e(\omega_t)^H \left(Z^{-1}(\omega_t) \cdot M_i^{(e)} \cdot y(\omega_t) \right) + \left(Z^{-1}(\omega_t) \cdot M_i^{(e)} \cdot y(\omega_t) \right)^H e(\omega_t) \right] \right] = 0 \\ \sum_{t=1}^s \left[(1 + j\beta\omega_t) \left[e(\omega_t)^H \left(Z^{-1}(\omega_t) \cdot K_i^{(e)} \cdot y(\omega_t) \right) + \left(Z^{-1}(\omega_t) \cdot K_i^{(e)} \cdot y(\omega_t) \right)^H e(\omega_t) \right] \right] = 0 \end{cases} \quad (157)$$

La résolution par la méthode de « Newton – Raphson » conduit à un système itératif de la forme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_{Ne} \\ k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_{Ne} \end{pmatrix}}_{p^{(v+1)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_{Ne} \\ k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_{Ne} \end{pmatrix}}_{p^{(v)}} - (J^{(v)})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \delta}{\partial m_1} \\ \frac{\partial \delta}{\partial m_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \delta}{\partial m_{Ne}} \\ \frac{\partial \delta}{\partial k_1} \\ \frac{\partial \delta}{\partial k_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \delta}{\partial k_{Ne}} \end{pmatrix}^{(v)} \quad (158)$$

Où $\bullet^{(v)}$ représente l'étape d'itération v , $p^{(0)}$ est l'estimation initiale et J est la matrice Jacobienne définie par

$$\mathbf{J}^{(v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \delta}{\partial m_1^2} & \frac{\partial^2 \delta}{\partial m_2 \partial m_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \delta}{\partial m_{Ne} \partial m_1} & \frac{\partial^2 \delta}{\partial k_1 \partial m_1} & \frac{\partial^2 \delta}{\partial k_2 \partial m_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \delta}{\partial k_{Ne} \partial m_1} \\ \frac{\partial^2 \delta}{\partial m_1 \partial m_2} & \frac{\partial^2 \delta}{\partial m_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \delta}{\partial m_{Ne} \partial m_2} & \frac{\partial^2 \delta}{\partial k_1 \partial m_2} & \frac{\partial^2 \delta}{\partial k_2 \partial m_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \delta}{\partial k_{Ne} \partial m_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 \delta}{\partial m_1 \partial m_{Ne}} & \frac{\partial^2 \delta}{\partial m_2 \partial m_{Ne}} & \cdots & \frac{\partial^2 \delta}{\partial m_{Ne}^2} & \frac{\partial^2 \delta}{\partial k_1 \partial m_{Ne}} & \frac{\partial^2 \delta}{\partial k_2 \partial m_{Ne}} & \cdots & \frac{\partial^2 \delta}{\partial k_{Ne} \partial m_{Ne}} \\ \frac{\partial^2 \delta}{\partial m_1 \partial k_1} & \frac{\partial^2 \delta}{\partial m_2 \partial k_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \delta}{\partial m_{Ne} \partial k_1} & \frac{\partial^2 \delta}{\partial k_1^2} & \frac{\partial^2 \delta}{\partial k_2 \partial k_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \delta}{\partial k_{Ne} \partial k_1} \\ \frac{\partial^2 \delta}{\partial m_1 \partial k_2} & \frac{\partial^2 \delta}{\partial m_2 \partial k_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \delta}{\partial m_{Ne} \partial k_2} & \frac{\partial^2 \delta}{\partial k_1 \partial k_2} & \frac{\partial^2 \delta}{\partial k_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \delta}{\partial k_{Ne} \partial k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 \delta}{\partial m_1 \partial k_{Ne}} & \frac{\partial^2 \delta}{\partial m_2 \partial k_{Ne}} & \cdots & \frac{\partial^2 \delta}{\partial m_{Ne} \partial k_{Ne}} & \frac{\partial^2 \delta}{\partial k_1 \partial k_{Ne}} & \frac{\partial^2 \delta}{\partial k_2 \partial k_{Ne}} & \cdots & \frac{\partial^2 \delta}{\partial k_{Ne}^2} \end{pmatrix}^{(v)} \quad (159)$$

Pour l'expression analytique des éléments, nous partitionnons celle-ci en quatre parties

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

où \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{D} sont des matrices d'ordre $\mathbf{C}^{Ne \times Ne}$

Le calcul des éléments \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{D} de la matrice \mathbf{J} donne

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial m_j \partial m_i} = \sum_{t=1}^s (A_t + A_t^H)$$

$$B_{ij} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial k_j \partial k_i} = \sum_{t=1}^s (B_t + B_t^H)$$

$$C_{ij} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial k_j \partial m_i} = \sum_{t=1}^s (C_t + C_t^H)$$

$$D_{ij} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial m_j \partial k_i} = \sum_{t=1}^s (D_t + D_t^H)$$

avec

$$\begin{aligned}
 A_i &= (-\omega_i^2 + j\alpha\omega_i)^2 \left[\left[\left(Z^{-1}M_j^{(e)}Z^{-1}M_i^{(e)}y(\omega_i) \right) + \left(Z^{-1}M_i^{(e)}Z^{-1}M_j^{(e)}y(\omega_i) \right) \right]^H e(\omega_i) + \right. \\
 &\quad \left. \left(Z^{-1}M_i^{(e)}y(\omega_i) \right)^H \cdot \left(Z^{-1}M_j^{(e)}y(\omega_i) \right) \right] \\
 B_i &= (1 + j\beta\omega_i)^2 \left[\left[\left(Z^{-1}K_j^{(e)}Z^{-1}K_i^{(e)}y(\omega_i) \right) + \left(Z^{-1}K_i^{(e)}Z^{-1}K_j^{(e)}y(\omega_i) \right) \right]^H e(\omega_i) + \right. \\
 &\quad \left. \left(Z^{-1}K_i^{(e)}y(\omega_i) \right)^H \cdot \left(Z^{-1}K_j^{(e)}y(\omega_i) \right) \right] \quad (160) \\
 C_i &= (-\omega_i^2 + j\alpha\omega_i)(1 + j\beta\omega_i) \left[\left[\left(Z^{-1}K_j^{(e)}Z^{-1}M_i^{(e)}y(\omega_i) \right) + \left(Z^{-1}M_i^{(e)}Z^{-1}K_j^{(e)}y(\omega_i) \right) \right]^H e(\omega_i) + \right. \\
 &\quad \left. \left(Z^{-1}M_i^{(e)}y(\omega_i) \right)^H \cdot \left(Z^{-1}K_j^{(e)}y(\omega_i) \right) \right] \\
 D_i &= (-\omega_i^2 + j\alpha\omega_i)(1 + j\beta\omega_i) \left[\left[\left(Z^{-1}M_j^{(e)}Z^{-1}K_i^{(e)}y(\omega_i) \right) + \left(Z^{-1}K_i^{(e)}Z^{-1}M_j^{(e)}y(\omega_i) \right) \right]^H e(\omega_i) + \right. \\
 &\quad \left. \left(Z^{-1}K_i^{(e)}y(\omega_i) \right)^H \cdot \left(Z^{-1}M_j^{(e)}y(\omega_i) \right) \right]
 \end{aligned}$$

Finalement, la matrice Jacobiënne est totalement définie et son expression est substituée dans le système itératif (158).

II.2.1.3 Choix des points de mesure

Il est nécessaire de noter que le nombre et la position des points de mesure ont un effet important sur la vitesse de convergence et l'exactitude de la solution finale [100]. Un nombre très important de mesures améliore la convergence du système, mais ceci peut induire un grand nombre d'itérations quand le point de mesure n'est pas au voisinage du défaut (loin de l'élément mal modélisé). Les points de mesure jouent un rôle important dans la procédure de recalage. S'ils ne contiennent pas suffisamment d'information sur les paramètres de recalage, la procédure n'améliorera probablement pas la corrélation du modèle [102].

Les fréquences de mesure doivent être choisies loin des fréquences de résonance pour éviter un mauvais conditionnement de la matrice Jacobiënne ce qui affecte conséquemment la convergence du système.

Pour une meilleure fiabilité de recalage, il est nécessaire d'envisager plusieurs ensembles de mesures et comparer les résultats obtenus, pour ne retenir enfin que les résultats les plus apparents. Trendafilova et Heylen [103] ont considéré trois ensembles de points de mesure, et concluent que la précision des résultats dépend du nombre de points de mesures ainsi que de leurs distances par rapport au défaut (à l'élément mal modélisé dans notre cas).

II.2.1.4 Réduction aux paramètres de recalage de raideur

Dans le cas de détection de défauts dans les structures, seule la matrice de raideur peut comporter des défauts, la matrice masse n'étant pas affectée. Les paramètres inconnus seront réduits aux facteurs de raideur k_i .

Le système d'équations (157) se réduit à

$$\sum_{t=1}^s \left[(1 + j\beta\omega_t) \left[e(\omega_t)^H (Z^{-1}(\omega_t) \cdot K_i^{(e)} \cdot y(\omega_t)) + (Z^{-1}(\omega_t) \cdot K_i^{(e)} \cdot y(\omega_t))^H e(\omega_t) \right] \right] = 0, \quad i=1, \dots, N_e \quad (161)$$

La résolution par la méthode de Newton – Raphson conduit à un système itératif de la forme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{N_e} \end{pmatrix}}_{k^{(v+1)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{N_e} \end{pmatrix}}_{k^{(v)}} - (J^{(v)})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \delta}{\partial k_1} \\ \frac{\partial \delta}{\partial k_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \delta}{\partial k_{N_e}} \end{pmatrix}^{(v)}, \quad i=1, \dots, N_e \quad (162)$$

où J est la matrice Jacobienne réduite à $J=B$ et $k^{(0)}$ est l'estimation initiale des paramètres de recalage de raideur.

II.2.1.5 Paramétrisation intrinsèque

Toutes les méthodes utilisent des résidus entre les FRFs expérimentales et mesurées aux mêmes valeurs des fréquences [94]. Pascual et al [16], utilisent le concept « shift frequency » en introduisant le critère de corrélation déjà présenté Frequency Domain Assurance Criterion défini par

$$FDAC(\omega_a, \omega_x, j) = \frac{\left(\{H_a(\omega_a)\}_j^H \{H_x(\omega_x)\}_j \right)^2}{\left(\{H_a(\omega_a)\}_j^H \{H_a(\omega_a)\}_j \right) \left(\{H_x(\omega_x)\}_j^H \{H_x(\omega_x)\}_j \right)}$$

où j correspond à la colonne mesurée de H ;

ω_a correspond à la fréquence à laquelle $\{H_a\}_j$ a été calculée ;

ω_x correspond à la fréquence à laquelle la réponse fréquentielle a été mesurée expérimentalement.

Basés sur le critère FDAC Pascual et al [99] ont proposé de mesurer le rapprochement entre la réponse fréquentielle mesurée et analytique en utilisant la fréquence ω_i^j pour laquelle FDAC atteint son maximum.

Dans tous les cas nous ne minimisons pas la plus petite distance entre le point expérimental mesuré et son approximation éléments finis. Nous obtenons la situation décrite dans la figure 7, où

- A: point mesuré à la fréquence ω_A
- B: équivalent analytique du point A à la même valeur fréquentielle
- C: fréquence EF calculée ω_C qui maximise FDAC
- D: fréquence EF calculée ω_D , intersection de la normale à la réponse analytique.

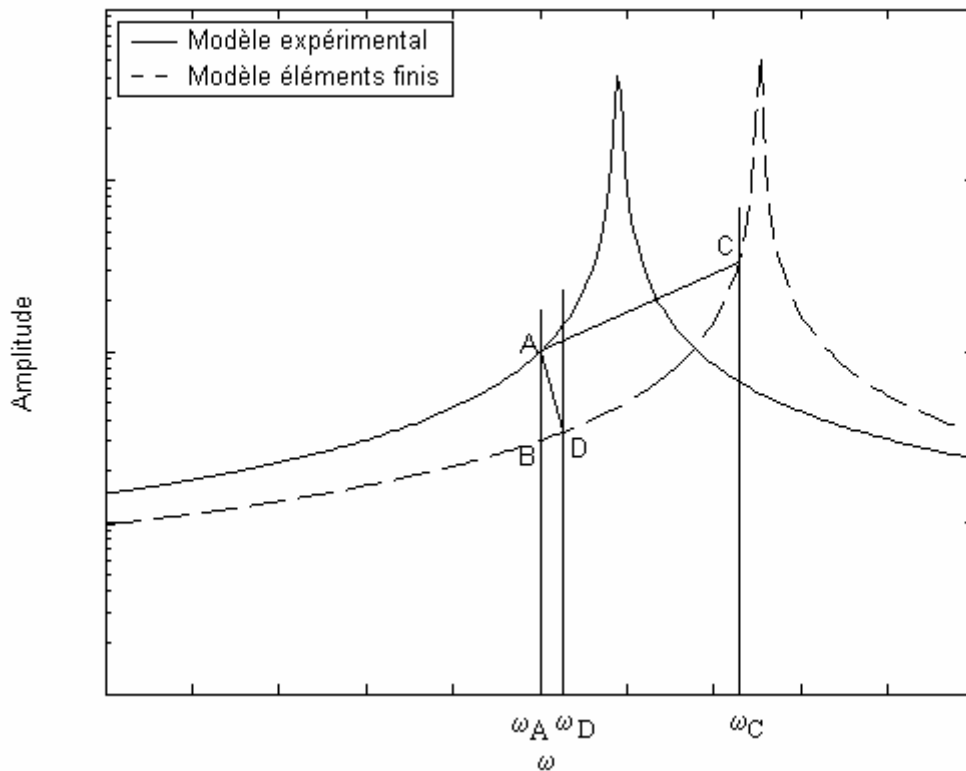


Figure 7. Différentes mesures de l'erreur

AD représentant l'erreur orthogonale est la plus petite distance entre les réponses fréquentielles analytique et mesurée qui doit être minimisée. Cette distance est approximée par la projection sur la tangente D_2 (approximation linéaire de $y(\omega)$ au voisinage de $y(\omega_i)$), on obtient ainsi une autre valeur ω_2 (Figure 8), fréquence de la perpendiculaire à la tangente D_1 passant par le point A.

Au lieu de considérer la distance entre les courbes mesurée et analytique pour la même valeur de la fréquence (points A et B de la figure 8), nous utilisons la différence entre ces courbes par rapport à la normale à la courbe analytique (points A et C de la figure 8); la précision des résultats obtenus est meilleure.

En effet, l'erreur donnée par l'équation (145) doit être mesurée le long de la normale à la courbe fréquentielle ; cette normale est approximée par la droite D_2 passant par le point A et perpendiculaire à la droite D_1 représentant la tangente à la réponse fréquentielle analytique passant par le point B.

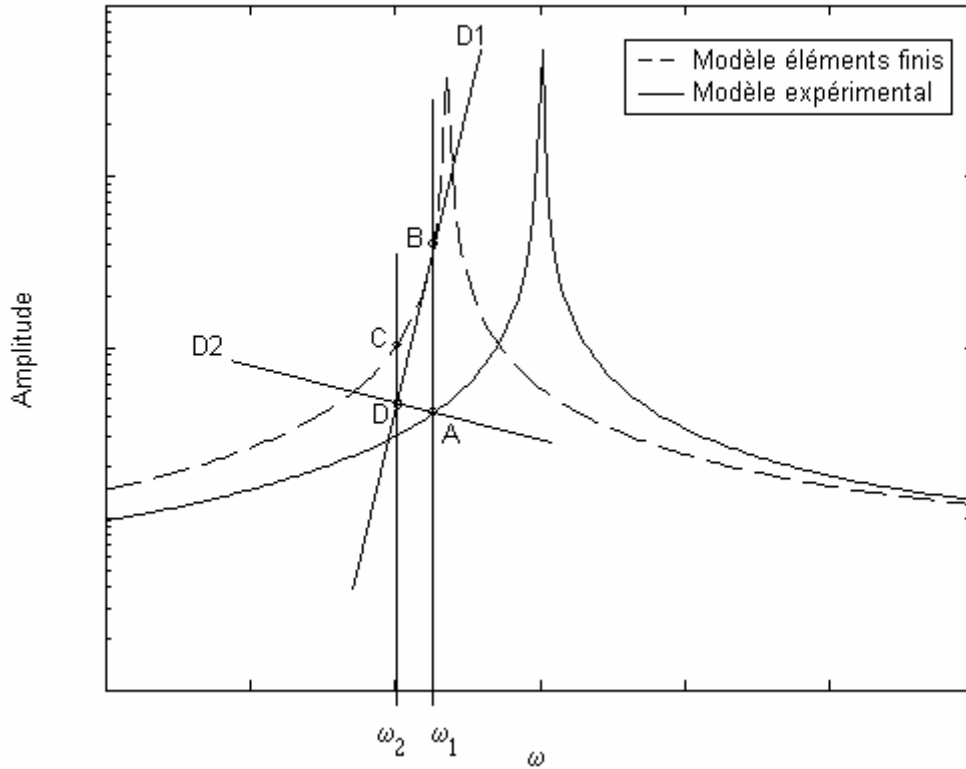


Figure 8. Interprétation géométrique de la paramétrisation intrinsèque

ω_t : valeur de la fréquence de mesure au point A, ω_t

ω_2 : valeur de la fréquence au point C, intersection de la normale avec la réponse fréquentielle de la structure passant par A, ω_{2t}

Ainsi, l'équation (145) devient

$$e(\omega_t) = y(\omega_{2t}) - y^{(s)}(\omega_t) \quad (163)$$

Pendant la paramétrisation, s'assurer à chaque itération que le point B ne coïncide pas avec la fréquence analytique de résonance.

II.2.1.6 Cas test numérique

Il est bien connu qu'en analyse modale expérimentale, la qualité des mesures des fonctions de réponse fréquentielle est affectée par le bruit de mesure provenant de l'environnement ainsi que des instrument électroniques de mesure [104].

Le cas de mesures affectées par le bruit a été considéré. Dans notre cas, pour simuler les mesures, du bruit aléatoire est ajouté selon le modèle de l'équation (142). La simulation a été menée avec un taux de bruit $\varepsilon\%=5\%$.

Le taux de bruit dans les mesures conditionne la fiabilité et le succès de l'analyse. Il est donc souhaitable de réduire ou de minimiser l'influence du bruit sur les mesures FRFs avant de les utiliser pour d'autres applications [104].

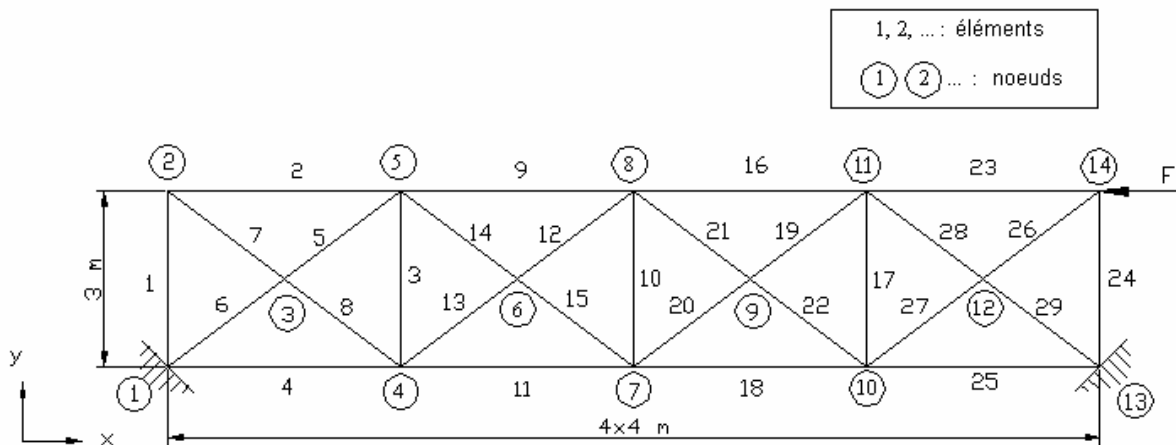


Figure 9. Structure en treillis doublement encastrée

Considérons la structure en treillis doublement encastrée formée de 29 poutres soudées (Figure 9) soumise à une excitation harmonique de force $F=1\text{N}$ au nœud 14 dans la direction X. On considère que la structure est conçue en acier de module de Young $E=2\times 10^{11}\text{Pa}$ et de densité volumique $\rho=7850\text{kg/m}^3$. Les poutres ont une section droite circulaire de 25cm de diamètre. La structure est discrétisée en 29 éléments finis avec 36 degrés de liberté. Pour simuler la structure réelle des défauts de +30%, +20%, +40%, et +20% sont affectés à la raideur des éléments 2, 12, 17 et 25 respectivement en ajoutant 5% de bruit aléatoire. Les capteurs de mesure sont disposés selon les degrés de liberté 5, 8, 17, 20, 26 et 29 de la structure pour un nombre très limité de fréquences {755, 1225, 1630, 1960, 2810, 2970, 3170}.

La figure 10 et le tableau 3 illustrent les résultats obtenus. La performance de la méthode est mise en valeur par les résultats obtenus. En effet, on peut voir que la réponse fréquentielle obtenue (courbe en tirets) est presque confondue avec la réponse fréquentielle mesurée (courbe en trait continu) après correction du modèle analytique (courbe en pointillés).

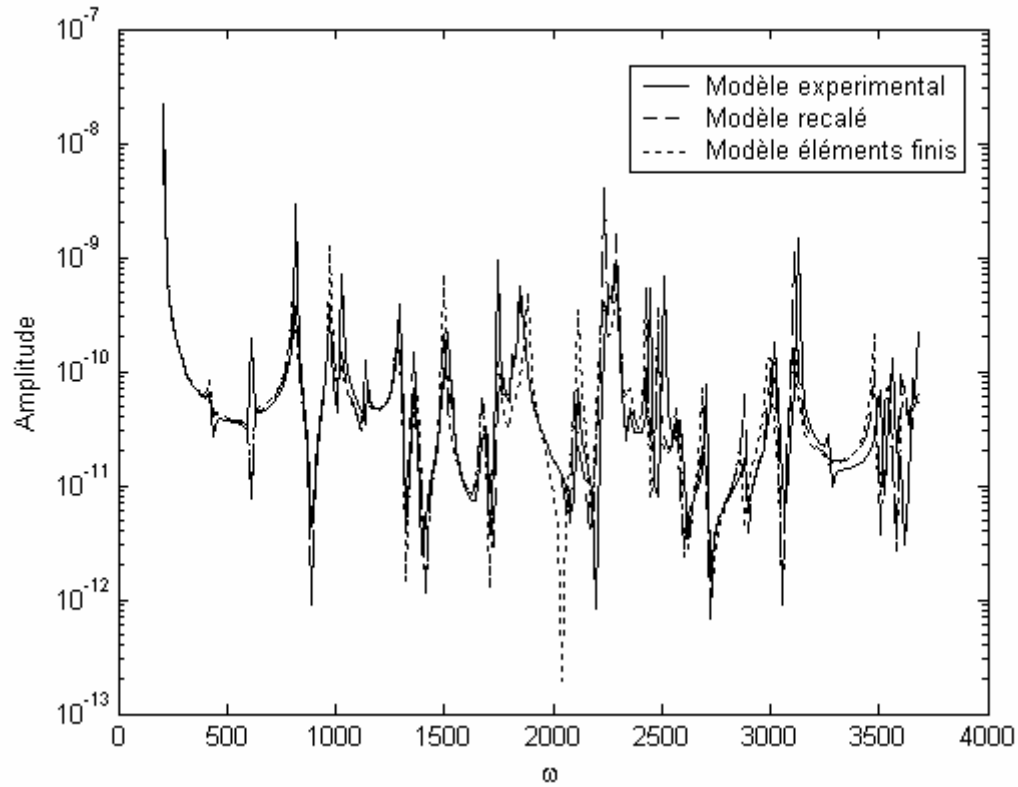


Figure 10. Comparaison des réponses fréquentielles du 20ème ddl

Tableau 3. Résultats numériques de recalage obtenus

Eléments	coefficients de perturbation exacts (%)	coefficients de perturbation identifiés (%)	Eléments	coefficients de perturbation exacts (%)	coefficients de perturbation identifiés (%)
1	0	0.43	16	0	-0.21
2	30	13.25	17	40	38.13
3	0	3.97	18	0	0.95
4	0	-5.63	19	0	4.10
5	0	3.97	20	0	-4.04
6	0	-1.80	21	0	3.97
7	0	0.74	22	0	2.91
8	0	-0.47	23	0	2.53
9	0	1.82	24	0	0.3
10	0	-1.70	25	20	15.44
11	0	-0.90	26	0	0.25
12	20	13.48	27	0	-2.45
13	0	1.53	28	0	0.29
14	0	3.09	29	0	7.83
15	0	2.75			

Le tableau 3 montre aussi que les défauts sont localisés et quantifiés sachant que 5% de bruit a été ajouté et que le nombre de points de mesure est très limité (6 ddls de déplacement vertical ont été mesurés).

II.2.1.7 Conclusion

Une méthode de recalage de modèle éléments finis basée sur les fonctions de réponse fréquentielle a été proposée. La convergence du système dépend du choix et de la qualité des mesures. Pour améliorer le conditionnement de la matrice Jacobienne, il est essentiel d'éviter de se rapprocher des pics de résonance dans le cas de la structure réelle et du modèle corrigé de la structure à chaque itération ; Pour cela, il est important de déterminer à chaque itération, les fréquences de résonance du système recalé pour éliminer les mesures proches de celles-ci. La méthode pourrait être améliorée en utilisant la méthode de choix des points de mesure.

Aidée par la paramétrisation intrinsèque proposée qui choisit la plus petite distance à minimiser la méthode développée montre de bonnes propriétés de convergence. Dans le cas où le nombre de points de mesures est incomplet, la paramétrisation intrinsèque proposée peut aider le processus de recalage à converger. Elle peut aussi réduire l'influence du bruit.

II.2.2 Méthode de recalage par séparation des variables

Une prédiction fiable du comportement dynamique d'une structure passe par une qualité du modèle éléments finis. Un véritable intérêt s'est manifesté pour l'amélioration de ce type de prévisions en utilisant les fonctions de réponse fréquentielle. A la différence des modèles de recalage basés sur les données modales, les méthodes basées sur les réponses fréquentielles ont un succès limité dû aux mesures incomplètes provoquant des problèmes de mauvais conditionnement et le recours à la pseudo inverse.

L'algorithme proposé dans ce paragraphe est une extension du précédent destiné à détecter des défauts de masse et de raideur simultanément. La paramétrisation intrinsèque a été aussi utilisée avec un développement explicite. La méthode proposée montre une bonne stabilité.

Le recalage de modèle éléments finis est un processus important dans la validation en dynamique de structures. Plusieurs méthodes existent, les plus utilisées sont généralement les méthodes itératives utilisant la sensibilité ou matrice de sensibilité, car elles offrent un grand choix de paramètres permettant une bonne interprétation des résultats, Iwaniec et Uhl [105] ont proposé une méthode de recalage non linéaire basée sur l'approximation par les moindres carrés dans le domaine fréquentiel en utilisant l'algorithme de Gauss – Newton, Marwala et

Heyns [106] ont proposé une méthode de recalage à critères multiples qui minimise la norme euclidienne du vecteur erreur obtenu en ajoutant les équations du problème aux valeurs propres et l'équation du mouvement, celle-ci utilise les propriétés modales des réponses fréquentielles, Zang et al. [107] utilisent une procédure de minimisation d'une fonction coût basée sur deux fonctions de corrélation simultanément. Steenackers et Guillaume [108], ont proposé une méthode de recalage basée sur les données modales qui sont une prolongation des techniques conventionnelles d'éléments finis adaptées pour prendre en compte les incertitudes sur l'estimation des paramètres modaux. Jaishi et Ren [109], ont employé le résidu modal de flexibilité dans la fonction coût qui est une combinaison des fréquences et des modes normaux. Une méthode de recalage de modèles éléments finis à deux étapes pour la détection de défauts est proposée par Wu et Li [110]; dans la première étape, l'approximation des moindres carrés et l'estimation bayésienne sont adoptées pour l'identification de la rigidité des joints de raccordement et du module de Young; la détection des défauts est effectuée dans la deuxième étape par l'intermédiaire du procédé de recalage.

La stratégie de recalage proposée dans ce paragraphe, utilise la notion de séparation des paramètres de masse de ceux de la raideur en se basant sur le processus de minimisation des moindres carrés. Le problème d'optimisation est résolu par la méthode de Newton – Raphson qui est un algorithme d'optimisation itératif. La méthode est répartie en trois étapes, dans la première étape, une paramétrisation fréquentielle [101] est utilisée pour affecter une fréquence analytique correspondant à la fréquence expérimentale en minimisant l'erreur euclidienne entre la réponse fréquentielle mesurée et la réponse analytique ; La deuxième et troisième étapes concernent le processus de recalage des paramètres de raideur et le processus de recalage des paramètres de masse respectivement.

II.2.2.1 Méthode de recalage

La méthode de recalage présentée ici utilise deux types de fonctions coût qui doivent être minimisées simultanément. Les paramètres de masse et de raideur ont une influence différente sur le comportement dynamique de la structure; Par conséquent, il serait utile de séparer ces deux types de variables durant le processus de recalage. Pour ce faire, une procédure itérative à deux étapes et deux fonctions objectives est proposée. Cette séparation rend possible le choix de mesures différentes, celles relatives au recalage des paramètres de masse et celles relatives au recalage des paramètres de raideur. La paramétrisation intrinsèque est utilisée comme première étape.

II.2.2.2 Fonctions coût

Le choix de la fonction coût est une question cruciale dans le recalage de modèle éléments finis. Deux fonctions coût sont formulées; la première est sensible aux changements de la réponse dynamique globale de la structure, alors que la seconde compare les amplitudes correspondantes des fonctions de réponse fréquentielle.

L'erreur relative entre les vecteurs déplacements mesuré et prédit peut être écrite sous la forme

$$e_1(\omega) = \frac{(y_A(\omega) - y_X(\omega))^H (y_A(\omega) - y_X(\omega))}{y_X^H(\omega) y_X(\omega)} \quad (164)$$

Une autre erreur relative entre les mêmes vecteurs par analogie au facteur d'échelle des réponses fréquentielles (Frequency Response Scale Factor FRSF [111], [112]), peut être écrite sous la forme

$$e_2(\omega) = 1 - \frac{y_A^H(\omega) y_A(\omega)}{y_X^H(\omega) y_X(\omega)} \quad (165)$$

La méthode de recalage par le processus des moindres carrés proposée est basée sur la minimisation simultanée des deux fonctions coût δ_1 et δ_2 suivantes

$$\delta_1 = \sum_{i=1}^s e_1^2(\omega_i) \quad (166)$$

$$\delta_2 = \sum_{i=1}^s e_2^2(\omega_i) \quad (167)$$

Ce qui veut dire que le processus de minimisation par les moindres carrés minimisera successivement les erreurs relatives (164) et (165) dans la bande fréquentielle considérée.

II.2.2.3 Paramétrisation fréquentielle

Avant de minimiser les fonctions coût (166) et (167), une paramétrisation est utilisée pour assigner des fréquences analytiques aux fréquences de mesure choisies. Pascual et al. [16] ont utilisés la paramétrisation dite « shift frequency » qui maximise FDAC. De la même manière, nous utilisons la paramétrisation intrinsèque [101], qui minimise le vecteur erreur (163). Ceci nous conduit au processus de minimisation préliminaire au processus de recalage par les moindres carrés.

Ceci conduit à

$$e(\omega_{A_i}, \omega_{X_i}) = (y_A(\omega_{A_i}) - y_X(\omega_{X_i}))^H (y_A(\omega_{A_i}) - y_X(\omega_{X_i}))$$

$$\omega_{A_i}^{(k)} = \omega_{A_i}^{(k+1)} - \frac{\partial e(\omega_{A_i}, \omega_{X_i})}{\partial \omega_{A_i}} e(\omega_{A_i}, \omega_{X_i}) \quad (168)$$

avec $\omega_{A_i}^{(0)} = \omega_{X_i}$

II.2.2.4 Méthode de recalage par les moindres carrés

En prenant en considération la paramétrisation fréquentielle précédente, les erreurs relatives (164) et (165) deviennent:

$$e_1(\omega_{A_i}, \omega_{X_i}) = \frac{(y_A(\omega_{A_i}) - y_X(\omega_{X_i}))^H (y_A(\omega_{A_i}) - y_X(\omega_{X_i}))}{y_X(\omega_{X_i}) y_X(\omega_{X_i})} \quad (169)$$

$$e_2(\omega_{A_i}, \omega_{X_i}) = \frac{y_X^H(\omega_{X_i}) y_X(\omega_{X_i}) - y_A^H(\omega_{A_i}) y_A(\omega_{A_i})}{y_X^H(\omega_{X_i}) y_X(\omega_{X_i})} \quad (170)$$

Finalement les fonctions coût (166) et (167) peuvent être écrites sous la forme

$$\delta_1 = \sum_{i=1}^s e_1^2(\omega_{A_i}, \omega_{X_i}) \quad (171)$$

$$\delta_2 = \sum_{i=1}^s e_2^2(\omega_{A_i}, \omega_{X_i}) \quad (172)$$

Le processus de minimisation par la méthode des moindres carrés utilisé avec le schéma numérique de Newton – Raphson conduit au système itératif suivant :

$$\{k\}^{(v+1)} = \{k\}^{(v)} - a. [{}_k J]^{-1} \cdot \{d\} \quad (173)$$

$$\{m\}^{(v+1)} = \{m\}^{(v)} - b. [{}_m J]^{-1} \cdot \{d\} \quad (174)$$

avec

$$\{d\}_j = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial e_1(\omega_{A_i}, \omega_{X_i})}{\partial k_j} e_1(\omega_{A_i}, \omega_{X_i}) \right) \quad (175)$$

$$\{d\}_j = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial e_2(\omega_{A_i}, \omega_{X_i})}{\partial m_j} e_2(\omega_{A_i}, \omega_{X_i}) \right) \quad (176)$$

$$\text{et} \quad [{}_k J]_{jl} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial^2 e_1(\omega_{A_i}, \omega_{X_i})}{\partial k_l \partial k_j} e_1(\omega_{A_i}, \omega_{X_i}) + \frac{\partial e_1(\omega_{A_i}, \omega_{X_i})}{\partial k_j} \frac{\partial e_1(\omega_{A_i}, \omega_{X_i})}{\partial k_l} \right) \quad (177)$$

$$[{}_m J]_{jl} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial^2 e_2(\omega_{A_i}, \omega_{X_i})}{\partial m_l \partial m_j} e_2(\omega_{A_i}, \omega_{X_i}) + \frac{\partial e_2(\omega_{A_i}, \omega_{X_i})}{\partial m_j} \frac{\partial e_2(\omega_{A_i}, \omega_{X_i})}{\partial m_l} \right) \quad (178)$$

Les variables a et b des équations (173) et (174) sont utilisées pour contrôler la variation des paramètres durant les itérations pour éviter la compensation de la masse des erreurs de raideur, ou inversement la compensation de la raideur des erreurs de masse.

Les valeurs de a et b peuvent être choisies les plus grandes possibles comme dans l'algorithme de Levenberg – Marquardt [105].

Pour l'implémentation de la méthode, nous avons utilisé

$$\begin{cases} a = 1 \text{ et } b = \frac{\| [{}_k J]^{-1} \{ {}_k d \} \|}{\| [{}_m J]^{-1} \{ {}_m d \} \|}, & \text{si } \| [{}_k J]^{-1} \{ {}_k d \} \| < \| [{}_m J]^{-1} \{ {}_m d \} \| \\ a = \frac{\| [{}_m J]^{-1} \{ {}_m d \} \|}{\| [{}_k J]^{-1} \{ {}_k d \} \|} \text{ et } b = 1, & \text{sinon} \end{cases}$$

II.2.2.5 Expressions des première et seconde dérivées des erreurs relatives

Pour calculer les expressions (175) à (178), les expressions explicites des première et seconde dérivées partielles de la première erreur relative (164) sont

$$\frac{\partial e_1}{\partial k_j} = \frac{1}{y_X^H y_X} \left[\left(\frac{\partial y_A}{\partial k_j} \right)^H (y_A - y_X) + (y_A - y_X)^H \frac{\partial y_A}{\partial k_j} \right]$$

$$\frac{\partial^2 e_1}{\partial k_l \partial k_j} = \frac{1}{y_X^H y_X} \left[\left(\frac{\partial^2 y_A}{\partial k_l \partial k_j} \right)^H (y_A - y_X) + \left(\frac{\partial y_A}{\partial k_j} \right)^H \frac{\partial y_A}{\partial k_l} + \left(\frac{\partial y_A}{\partial k_l} \right)^H \frac{\partial y_A}{\partial k_j} + (y_A - y_X)^H \frac{\partial^2 y_A}{\partial k_l \partial k_j} \right]$$

L'expression de la deuxième erreur relative (165), est

$$\frac{\partial e_2}{\partial m_j} = -\frac{1}{y_X^H y_X} \left[\left(\frac{\partial y_A}{\partial m_j} \right)^H y_A + y_A^H \frac{\partial y_A}{\partial m_j} \right]$$

$$\frac{\partial^2 e_2}{\partial m_l \partial m_j} = \frac{1}{y_X^H y_X} \left[\left(\frac{\partial^2 y_A}{\partial m_l \partial m_j} \right)^H y_A + \left(\frac{\partial y_A}{\partial m_j} \right)^H \frac{\partial y_A}{\partial m_l} + \left(\frac{\partial y_A}{\partial m_l} \right)^H \frac{\partial y_A}{\partial m_j} + y_A^H \frac{\partial^2 y_A}{\partial m_l \partial m_j} \right]$$

Sachant que

$$\frac{\partial y_A}{\partial k_j} = -Z^{-1}(1 + j\beta\omega)K_j^{(e)}y_A$$

$$\frac{\partial y_A}{\partial m_j} = -Z^{-1}(-\omega^2 + j\alpha\omega)M_j^{(e)}y_A$$

$$\frac{\partial^2 y_A}{\partial k_l \partial k_j} = (1 + j\beta\omega)^2 \left[Z^{-1}K_l^{(e)}Z^{-1}K_j^{(e)} + Z^{-1}K_j^{(e)}Z^{-1}K_l^{(e)} \right] y_A$$

$$\frac{\partial^2 y_A}{\partial m_l \partial m_j} = (-\omega^2 + j\alpha\omega)^2 \left[Z^{-1}M_l^{(e)}Z^{-1}M_j^{(e)} + Z^{-1}M_j^{(e)}Z^{-1}M_l^{(e)} \right] y_A$$

La méthode est finalement divisée en trois étapes, à chaque itération

- (a) Déterminer la valeur de la fréquence analytique correspondant à la fréquence expérimentale de mesure en utilisant la paramétrisation intrinsèque (168)
- (b) Recaler les paramètres de raideur en utilisant l'équation (173)
- (c) En considérant les paramètres de raideur corrects, recaler les paramètres de masse en utilisant l'équation (174)

Pour une meilleure performance du procédé de séparation des variables, les mesures utilisées pour le recalage de la matrice de raideur doivent être différentes que celles utilisées pour le recalage de la matrice de masse. Hanson et al [113], suggèrent les fréquences d'antirésonance pour détecter des défauts de raideur, ainsi, les mesures de réponses fréquentielles au voisinage des points d'antirésonance sont adéquats pour le recalage de la matrice de raideur. Pour éviter la compensation des défauts de masse par la raideur, il est raisonnable d'employer pour le recalage de la matrice de masse, des valeurs des fréquences de mesure moins importantes que celles utilisées pour le recalage de la raideur, puisque, dans l'équation du comportement dynamique, les paramètres de masse sont du second ordre de la fréquence.

II.2.2.6 Application

Pour tester la robustesse de la stratégie proposée, considérons la structure 3D encadrée à ces quatre premiers nœuds formée de 36 poutres soudées (Figure 11). Les poutres ont 0,6m de longueur et une section circulaire de diamètre $D=0,028\text{m}$. La structure est discrétisée en 36 éléments finis et 96 degrés de liberté. Le module de Young E , le module de torsion G et la masse volumique ρ sont $E=2,2\text{e}11\text{ N/m}^2$, $G=0,88\text{e}11\text{ N/m}^2$, $\rho=7800\text{ kg/m}^3$, la section droite A , les moments I_y , I_z et I_t sont respectivement $A=7,06\text{e-}8\text{ m}^2$, $I_y=I_z=3,98\text{e-}8\text{ m}^4$ et $I_t=7,95\text{e-}8\text{ m}^4$. Pour simuler la structure « réelle », un défaut de 50% de la raideur est introduit dans l'élément 23 (entre les nœuds 13 et 16 sur la figure 11), et -30% de la masse dans l'élément 18 (entre les nœuds 9 et 11 sur la figure 11). Les mesures sont prises dans les trois directions x , y et z aux nœuds 10, 11, 14 et 15 correspondant aux ddls 37, 38, 39, 43, 44, 45, 61, 62, 63, 67, 68, et 69 de la structure.

Pour simuler les mesures expérimentales, nous affectons aux réponses fréquentielles un écart aléatoire d'un taux de bruit allant jusqu'à 5% en utilisant le modèle (142).

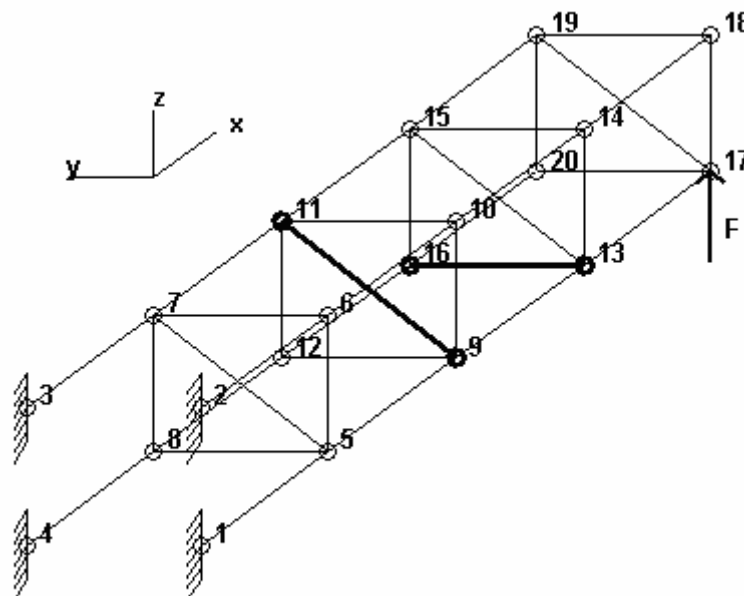


Figure 11. Structure expérimentale simulée

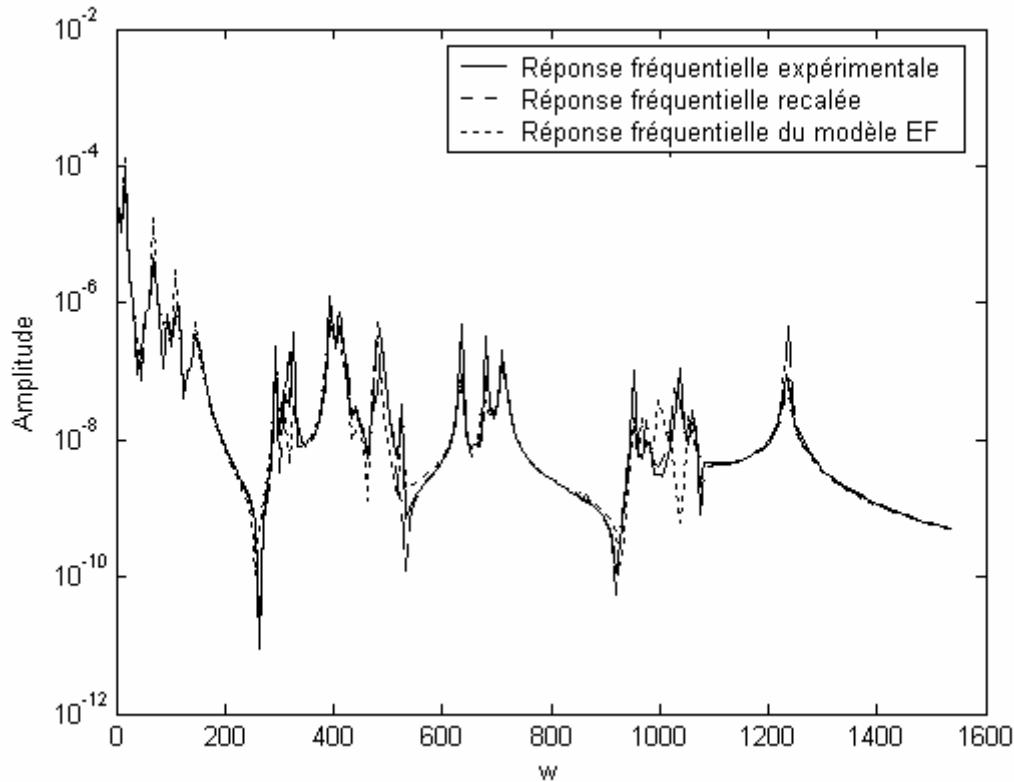


Figure 12. Comparaison des réponses fréquentielles du ddl 63

Pour éviter l'incompatibilité de dimension du système mathématique qui peut être causée par le nombre incomplet de mesures, nous pouvons utiliser une des techniques de réduction ou d'expansion. Dans notre cas, nous remplaçons les degrés de liberté non mesurés par leurs valeurs analytiques correspondantes. Cette technique nous évite l'utilisation des techniques de pseudo inverse.

La figure 12 et le tableau 4 illustrent les résultats obtenus qui mettent en évidence la qualité et les performances de la méthode. Les défauts introduits ont été détectés et quantifiés. En effet, nous constatons que la réponse fréquentielle du modèle recalé est presque confondue avec la réponse fréquentielle du modèle expérimental simulé.

Le tableau 4 montre également que les défauts simulés sont localisés et globalement quantifiés avec un nombre de points de mesures réduit (12 DOF des déplacements verticaux et horizontaux sont mesurés).

Tableau 4. Défauts simulés et résultats du recalage

Elément	Défauts de raideur simulés (%)	Défauts de raideur détectés (%)	Défauts de masse simulés (%)	Défauts de masse détectés (%)
1	0	-0.05	0	1.73
2	0	-0.52	0	-0.13
3	0	6.36	0	-3.94
4	0	1.64	0	-1.75
5	0	-0.70	0	-13.66
6	0	0.36	0	-1.58
7	0	-3.03	0	0.25
8	0	-6.34	0	3.81
9	0	-5.41	0	3.48
10	0	-0.38	0	1.77
11	0	1.51	0	1.81
12	0	-0.11	0	0.08
13	0	-4.74	0	-1.15
14	0	4.91	0	-2.06
15	0	-1.64	0	2.10
16	0	-0.21	0	-4.45
17	0	1.60	0	1.86
18	0	10.85	-30	-24.89
19	0	-0.60	0	0.81
20	0	5.67	0	0.53
21	0	0.25	0	1.04
22	0	-4.85	0	0.91
23	50	44.86	0	0.98
24	0	-13.57	0	-3.82
25	0	8.87	0	-5.62
26	0	-7.89	0	-3.83
27	0	-6.24	0	-1.05
28	0	0.17	0	-3.38
29	0	-4.40	0	-3.20
30	0	1.92	0	1.05
31	0	-2.00	0	0.98
32	0	-0.41	0	-0.36
33	0	-0.12	0	-1.74
34	0	0.07	0	3.47
35	0	0.23	0	-1.22
36	0	3.86	0	1.30

Sur la figure 13 et la figure 14, nous constatons que d'autres défauts sont suspectés sur quelques éléments; ceci est provoqué par le nombre et les positions des mesures.

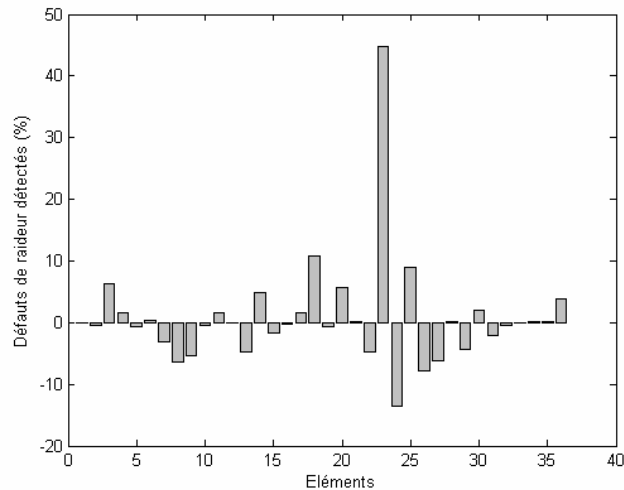


Figure 13. Histogramme des défauts de raideur détectés

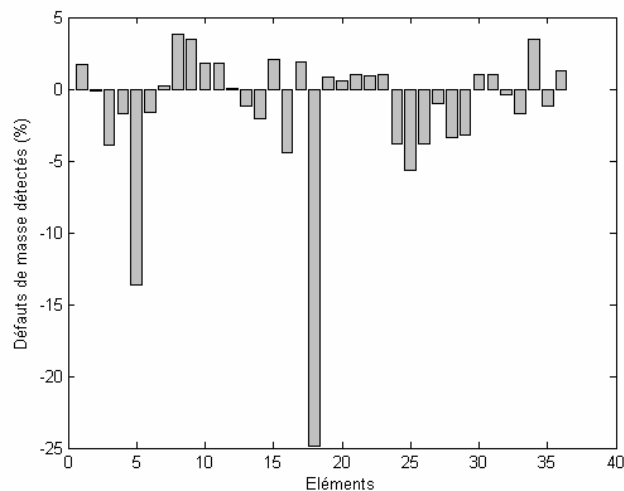


Figure 14. Histogramme des défauts de masse détectés

II.2.2.7 Conclusion

Une autre méthode de recalage de modèle éléments finis utilisant l'approximation non linéaire des moindres carrés dans le domaine fréquentiel a été proposée. Celle-ci utilise une minimisation préliminaire qui considère la plus petite distance entre la FRF analytique et celle mesurée dans le but d'affecter une valeur à la fréquence analytique correspondant à la fréquence de mesure choisie. Souvent, les paramètres de masse qui sont de second ordre en fréquence compensent les erreurs de raideur dans les méthodes de recalage, dans notre cas, la séparation des variables rend possible le choix de mesures différentes pour chacune des étapes du recalage, avantage très utile pour éviter le phénomène de compensation.

Comme pour la méthode précédente, la difficulté réside dans le choix des fréquences de mesures évitant les divergences brusques du système itératif. Il faudrait aussi éviter les pics de résonance qui risquent de causer un mauvais conditionnement des matrices Jacobiennes, et donc une instabilité numérique.

Aidée par la paramétrisation fréquentielle, la méthode montre une simplicité d'implémentation et une bonne stabilité numérique. La robustesse, tant sur le plan de la détection, de la localisation que de la quantification a été validée, tout en évitant les problèmes de mauvais conditionnement qui provoquent des divergences brusques des systèmes itératifs. La séparation des variables utilisée dans la méthode de recalage représente un outil qui peut être utilisé avantageusement dans le contexte du recalage de modèles analytiques.

II.2.3 Stratégie incrémentale de recalage

Habituellement, pour la détection de défauts de modélisation dans les structures, il est nécessaire d'établir un modèle mathématique pour la structure saine. Les comportements dynamiques du modèle de la structure considérée sont comparés afin de détecter une présence de défauts de masse ou de raideur dans le modèle mathématique. Une mauvaise modélisation a comme conséquence une différence entre le comportement mesuré et celui donné par le modèle analytique. L'ampleur des défauts est obtenue après quelques étapes de correction de ce modèle analytique. La méthode proposée peut reconstruire les matrices de raideur et de masse considérant un amortissement proportionnel. Une fonction de corrélation fréquentielle est employée pour évaluer la sensibilité de la réponse fréquentielle à un défaut présent successivement dans chaque élément de la structure discrétisée. Cette fonction, variable dans l'intervalle $[0, 1]$, nous informe sur l'influence d'un défaut sur la réponse fréquentielle de la structure. Quand celle-ci est proche de l'unité, les défauts sont localisés. Cette fonction traduit le rapprochement ou l'éloignement de la solution pour un défaut de masse ou de raideur supposé dans un élément donné. Le problème consiste alors à déterminer les corrections de l'erreur d'un défaut de raideur ou de masse qui rapproche aussi bien que possible plus étroitement la réponse fréquentielle du modèle à celle de la structure expérimentale. La méthode présentée consiste à déterminer les corrections de l'erreur en incrémentant ou en décrémentant d'une étape ε jusqu'à rapprocher le plus possible la réponse du modèle numérique de celle de la structure réelle. La méthode ainsi obtenue, appliquée aux mesures simulées pour une structure en treillis doublement encastrée, montre l'efficacité et la précision de cette stratégie de recalage.

Beaucoup de structures mécaniques changent de comportement dynamique en raison de l'âge, l'abus, et quelquefois de manque de réparation ou d'entretien. Afin de prévenir les incidents qui risquent de se produire, on se doit d'évaluer ces changements et de les quantifier. Les défauts de modélisation sont considérés comme une variation des caractéristiques de la masse et/ou de raideur de la structure qui affecte négativement son comportement normal. Ils peuvent également être définis en tant que n'importe quelle modification des propriétés géométriques de la structure ou matérielles initiales qui peuvent causer des modifications dans le comportement dynamique prédit. L'inspection visuelle a été depuis longtemps l'une des méthodes les plus connues utilisées pour détecter des dommages dans les structures. La plus grande taille et la complexité des structures d'aujourd'hui peuvent réduire l'efficacité des inspections visuelles. L'inspection visuelle conventionnelle peut être très coûteuse en temps et argent, particulièrement quand le démontage est nécessaire pour permettre d'accéder aux éléments à inspecter. Les méthodes d'identification dynamique ont un rôle dominant dans la détection de défauts dans les structures mécaniques. La référence [106] présente les avantages de ces méthodes en tant que contrôle non destructif. Dans ce contexte nous proposons une méthode de recalage dans les structures basée sur le principe de l'inspection visuelle qui utilise d'une part la méthode des éléments finis pour laquelle les dommages structuraux s'expriment par une variation de la raideur ou de la masse des différents éléments, d'autre part d'une fonction de corrélation qui permet de comparer le comportement prédit et mesuré (ce qui remplace l'inspection visuelle).

Plusieurs méthodes existent et peuvent être classées en trois catégories à savoir :

- les méthodes de détection – localisation [106], [114];
- les méthodes de calcul inverse ou de correction directe [106], [115], [116];
- les méthodes de détection- correction simultanées.

La méthode que nous proposons ici est du troisième type.

II.2.3.1 Problématique

Considérons le cas d'une structure dissipative en régime forcé dont le comportement dynamique est régi par le système d'équations différentielles :

$$M_A \ddot{y}(t) + C_A \dot{y}(t) + K_A y(t) = f(t) \quad (179)$$

où M_A : Matrice de masse $\in \mathbb{R}^{N,N}$

C_A : Matrice amortissement $\in \mathbb{R}^{N,N}$

K_A : Matrice de raideur $\in \mathbb{R}^{N,N}$

$y(t)$: Vecteur des déplacements $\in \mathbb{C}^N$
 $f(t)$: Vecteur des forces extérieures $\in \mathbb{C}^N$

Pour une excitation harmonique de pulsation ω , la solution particulière de l'équation (179) est

$$\left[s_v^2 M_A + s_v C_A + K_A \right] y_v = f, \text{ avec } v=1, \dots, s \quad (180)$$

La solution de cette équation dépend de la précision des matrices M_A , C_A et K_A .

La méthode de correction consiste alors à trouver les nouvelles matrices K_X , et M_X qui définissent la structure réelle, sachant que $C = \alpha M + \beta K$.

Pour cela on considère les hypothèses suivantes pour les erreurs possibles

$$\begin{aligned} K_{Xi}^{(e)} &= (I + k_i) K_{Ai}^{(e)}, \\ M_{Xi}^{(e)} &= (I + m_i) M_{Ai}^{(e)} \end{aligned} \quad (181)$$

avec

$$\begin{aligned} K_X &= \sum_{i=1}^{Ne} K_{Xi}^{(e)} \\ M_X &= \sum_{i=1}^{Ne} M_{Xi}^{(e)} \end{aligned} \quad (182)$$

II.2.3.2 Choix de la fonction de corrélation

Pour mettre en œuvre la méthode proposée nous devons disposer d'une fonction de corrélation entre les mesures prédites et les mesures réelles de la structure. Plusieurs fonctions peuvent être utilisées. Liu et al [117] utilisent la matrice de force résiduelle et la matrice de sensibilité de la structure, Burton et al [118] ont choisit le vecteur endommagé de Ritz pour localiser le défaut combiné avec un schéma itératif basé sur ces résidus pour estimer l'ampleur du défaut par variation de la raideur dynamique, Dutta et al [119] ont observé les variations des fréquences normales entre le modèle réel et mesuré, et la localisation du défaut peut être quantifiée en considérant les modes propres eux-mêmes ; des fonctions statistiques peuvent aussi être utilisées [119]. Richardson [114] utilise la fonction de corrélation modale MAC (Modal Assurance Criterion) pour quantifier le défaut, Marwala et Heyns [106] utilisent en plus de ce critère une autre fonction de corrélation COMAC (Coordinate Modal Assurance Criterion) qui est une corrélation entre les modes propres mesurés et analytiques pour le même degré de liberté.

Pour la méthode proposée, nous utilisons la fonction de corrélation dans le domaine fréquentiel FRAC (Frequency Response Assurance Criterion) définie par [19]

$$FRAC(i, j) = \frac{\left| \left\{ H_{Ajk} \right\}^T \left\{ H_{Xjk} \right\}^* \right|^2}{\left(\left\{ H_{Ajk} \right\}^T \left\{ H_{Ajk} \right\}^* \right) \left(\left\{ H_{Xjk} \right\}^T \left\{ H_{Xjk} \right\}^* \right)} \quad (183)$$

Avec $H_{Ajk}(\omega)$ la réponse fréquentielle analytique du degré de liberté j selon une excitation au degré de liberté k ; $H_{Xjk}(\omega)$ la réponse fréquentielle expérimentale correspondante. Ce qui donne $FRAC=1$ dans le cas parfait, et $0 \leq FRAC \leq 1$

La valeur de FRAC est d'autant plus proche de 1 que la réponse fréquentielle est proche de celle de la structure réelle, ceci nous donne une influence de rapprochement ou d'éloignement de la solution. Le problème consiste alors à déterminer les valeurs de k_i et m_i qui rapprochent le plus possible FRAC de 1.

II.2.3.3 Méthode proposée

La méthode présentée consiste à construire les valeurs de k_i et m_i par incrémentation ou décrémentation d'une valeur ε selon le schéma suivant :

Soit $k=[k_1, \dots, k_{Ne}]^T$, $m=[m_1, \dots, m_{Ne}]^T$

Affecter une valeur à ε

Répéter

i=1 à Ne

$k_i=k_i+\varepsilon$, Calculer $FRAC_{k_i}=FRAC$

$k_i=k_i-\varepsilon$, Calculer $FRAC_{k_{Ne+i}}=FRAC$

$m_i=m_i+\varepsilon$, Calculer $FRAC_{m_i}=FRAC$

$m_i=m_i-\varepsilon$, Calculer $FRAC_{m_{Ne+i}}=FRAC$

Déterminer $Mfrac1=Max(FRAC_k)$ et le ddl j_k correspondant

$Mfrac2=Max(FRAC_m)$ et le ddl j_m correspondant

Si $Mfrac1 > Mfrac2$

Alors $k_j=k_j \pm \varepsilon$ (+ ou - selon j_k)

Sinon $m_j=m_j \pm \varepsilon$ (+ ou - selon j_m)

Delta= valeur de correction de FRAC

Jusqu'à ce que $Delta < \varepsilon$

Fin

Ce qui est traduit avec plus de détails par les organigrammes de la

figure 15

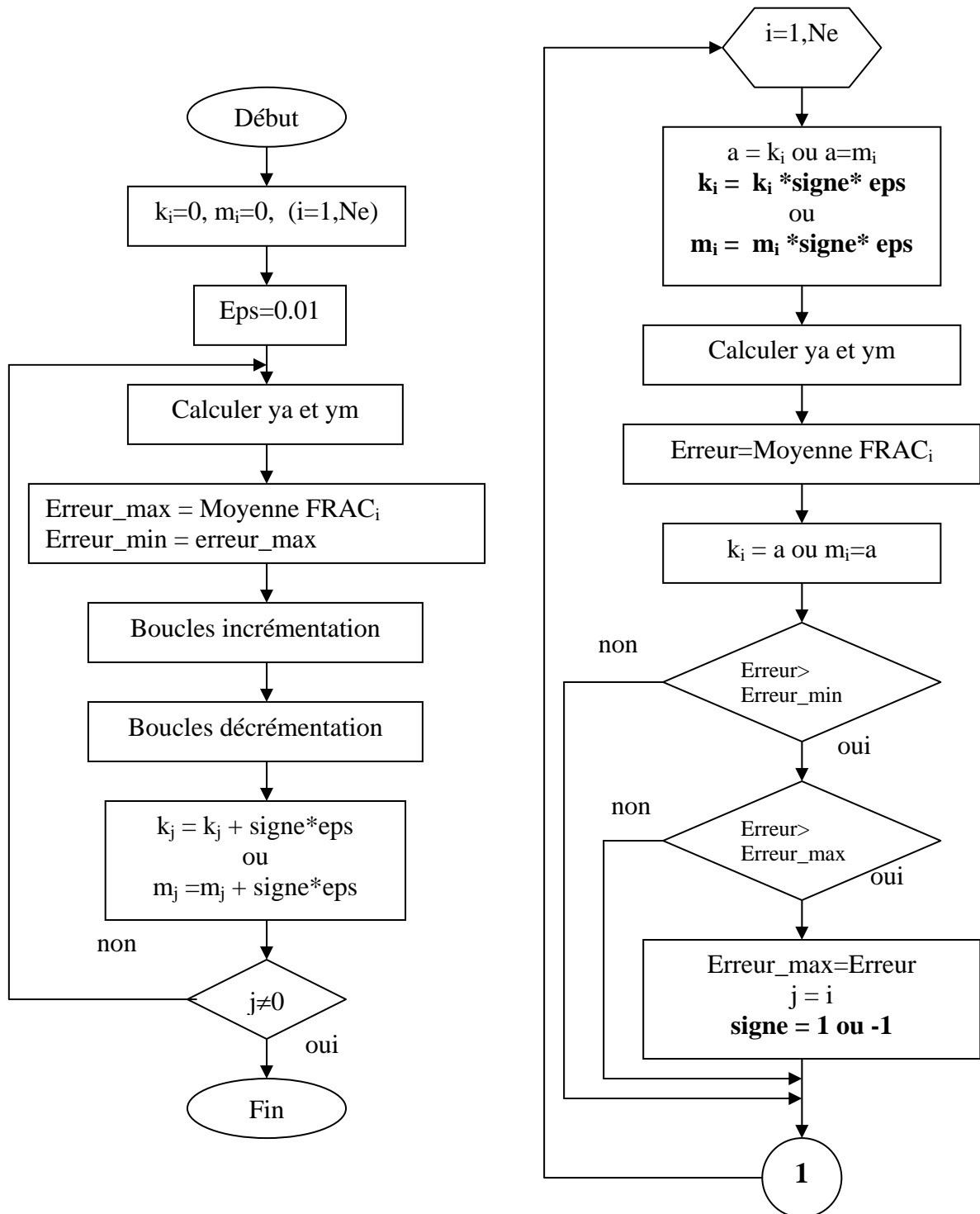


Figure 15. a. Organigramme global de la méthode, b. Boucles d'incrémentations –
décrémentations en raideur ou en masse

Signe=1 pour la boucle d'incrémentations et Signe=-1 pour la boucle de décrémentation.

II.2.3.4 Application

Considérons la structure plane en treillis doublement encastrée constituée de 30 poutres soudées (Figure 16). La structure est discrétisée en 30 éléments finis, et comporte donc 39 degrés de liberté, avec $E=2,1e11N/m^2$ et $\rho=7800kg/m^3$.

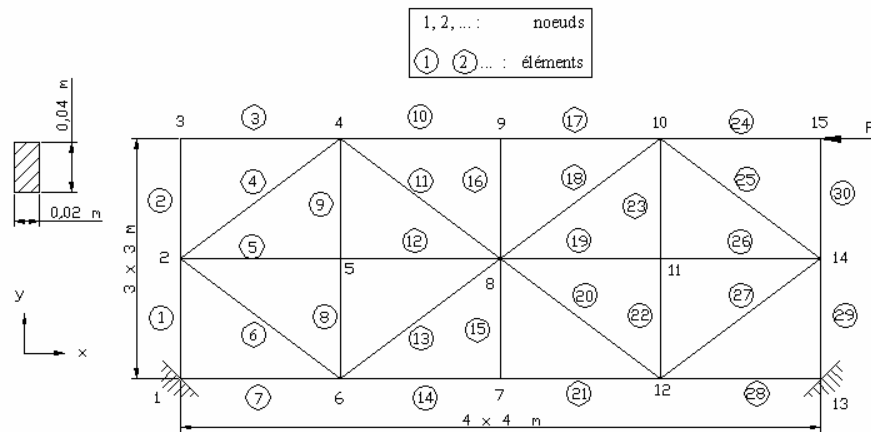


Figure 16. Structure d'essai en treillis doublement encastrée

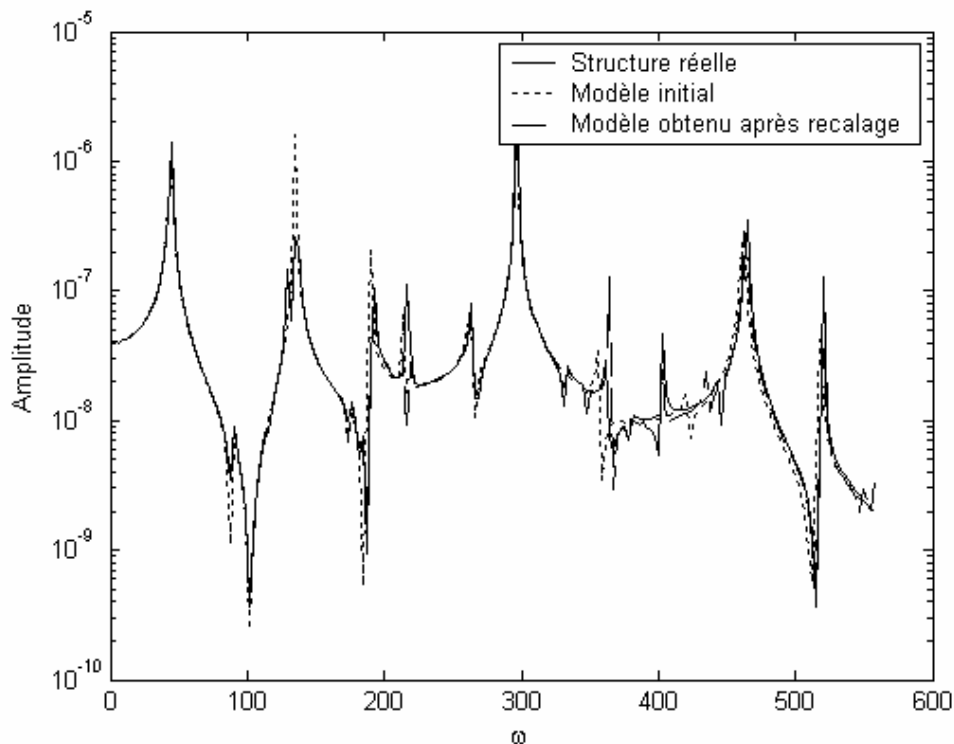


Figure 17. Comparaison des réponses fréquentielles du ddl 20

Le modèle simulant la structure est construit en introduisant des perturbations de +20%, +30%, de la raideur respectivement dans les éléments 2, 14, et des perturbation de -15% et -20% de la masse des éléments 18 et 26 en ajoutant 5% de bruit aléatoire. Les mesures sont prises selon les degrés de liberté 8, 14, 20, 26 et 32 de la structure.

Les résultats montrent que la méthode développée détecte et corrige les défauts. En effet, nous constatons sur la figure 17 que la réponse fréquentielle obtenue (courbe en tirets) est visiblement confondue avec la réponse de la structure exacte (courbe en trait continu) en corrigeant le modèle analytique (courbe en pointillés).

Tableau 5. Résultats du recalage par la stratégie incrémentale

Elts	Défauts de raideur	Corrections de raideur	Défauts de masse	Corrections de masse
1	0	0,90	0	0
2	20	15,00	0	0
3	0	2,00	0	0,60
4	0	-0,70	0	0
5	0	1,00	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0,10	0	0
8	0	-0,10	0	0,60
9	0	0	0	0
10	0	0,20	0	0,20
11	0	1,10	0	3,60
12	0	0	0	-2,50
13	0	3,20	0	0
14	30	20,00	0	7,50
15	0	1,00	0	3,80
16	0	-0,20	0	1,90
17	0	0	0	-1,00
18	0	0,60	-15	-13,40
19	0	8,10	0	-7,20
20	0	1,00	0	0
21	0	-1,60	0	-5,00
22	0	1,10	0	0
23	0	0,40	0	0
24	0	-1,30	0	0
25	0	0,70	0	1,20
26	0	-2,70	-20	-10,00
27	0	0	0	0,20
28	0	0,90	0	0
29	0	0,80	0	1,10
30	0	1,20	0	0

Le tableau 5 montre aussi que les défauts simulés sont localisés et quantifiés pour un taux de bruit allant jusqu'à 5% et un nombre de mesures très réduit (6 ddl de déplacement vertical sont mesurés). Un bon choix des points de mesure pourrait rendre la méthode encore plus efficace.

II.2.3.5 Conclusion

Une méthode de recalage de modèle éléments a été proposée. Celle ci est une stratégie de correction incrémentale qui procède par incrément de correction sur l'élément détecté grâce à la fonction de corrélation dans le domaine fréquentiel FRAC (Frequency Response Assurance Criterion) qui matérialise le rapprochement entre les mesures fréquentielles prédites et mesurées. La méthode ainsi proposée montre qu'elle présente une simplicité de mise en œuvre et une bonne stabilité numérique.

Les essais effectués sur une structure en treillis doublement encastrée montre des qualités de détection et de correction très intéressantes en terme de quantification, localisation et rapidité, en évitant le problème de mauvais conditionnement qui pose souvent une divergence brusque dans le cas des systèmes itératifs des méthodes de calcul inverse.

IDENTIFICATION DE STRUCTURES NON LINEAIRES

III.1 Techniques de recalage de modèles non linéaires	90
III.1.1 Introduction	90
III.1.2 Identification du modèle mathématique	94
III.1.3 Minimisation de la fonction objective	95
III.2 Formulation non linéaire par la fonction descriptive	95
III.2.1 Introduction	96
III.2.2 Fonction descriptive de la raideur cubique	98
III.2.3 Fonction descriptive de l'amortissement par friction	100
III.2.4 Amortissement par friction d'un élément non lié (compris entre deux éléments)	103
III.2.5 Vecteur non linéaire (VNL) et matrice non linéaire (MNL)	103
III.2.6 Formulation explicite des réponses fréquentielles non linéaires de systèmes à plusieurs ddls	106
III.2.6.1 Introduction	106
III.2.6.2 Formulation explicite des réponses fréquentielles	107
III.2.7 Méthode d'identification	109
III.2.7.1 Méthode de minimisation	109
III.2.7.2 Méthode d'identification dans le domaine fréquentiel	110

III IDENTIFICATION DE STRUCTURES NON LINEAIRES

Dans l'intérêt d'étendre notre travail d'identification à un plus large nombre de structures, il est indispensable de considérer les structures à comportement non linéaire. Ce comportement non linéaire est présent dans la plus part des problèmes mécaniques et peut être provoqué par différentes raisons. On le retrouve même dans les structures dites plutôt simples comme les plaques et les poutres en raison souvent de grandes déformations. L'équation du mouvement d'une structure vibrante non linéaire est donnée par l'expression suivante

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) + f_{NL}(y(t), \dot{y}(t)) = f(t) \quad (184)$$

où le vecteur f_{NL} représente la fonction non linéaire du déplacement et de la vitesse.

Si l'effet de la non linéarité n'est pas pris en considération, le modèle numérique donne d'incorrectes prévisions de comportement de la structure. En outre, même dans le cas des structures linéaires simples et en dépit de la sophistication élevée des modèles mathématiques, les applications pratiques indiquent souvent des anomalies considérables entre les résultats analytiques et expérimentaux, principalement dus à trois sources d'erreurs :

- Modélisations du comportement de la structure : elles incluent les simplifications faites par l'analyste pendant le processus de modélisation (par exemple, approximation des états de frontière ou l'hypothèse de l'amortissement proportionnel) mais également les erreurs de discrétisation qui sont liées au nombre d'éléments, leur type et leur distribution spatiale.
- Erreurs de paramétrisation : Elles se réfèrent à l'insuffisance des paramètres ou des degrés de liberté des modèles.
- Erreurs de mesure ou d'expérimentation : Le bruit de mesure ou l'influence de l'équipement expérimental sur la structure affectent la qualité des mesures. En adoptant des méthodes d'essai rigoureuses, on peut considérer que les données mesurées fournissent une bonne représentation de la dynamique de la structure.

Il est ainsi primordial que les modèles mathématiques soient vérifiés, validés ou recalés par rapport aux mesures des structures réelles avant de les employer.

III.1 Techniques de recalage de modèles non linéaires

III.1.1 Introduction

Le but de l'identification de système est d'exploiter des mesures effectuées sur la structure réelle à l'aide des dispositifs de mesure de vibration pour estimer les paramètres de

l'équation du mouvement de la structure. Le procédé d'identification pour les systèmes linéaires a maintenant connu beaucoup de travaux et presque toutes les méthodes donnent des résultats analytiques acceptables. Comme mentionné précédemment, le comportement non linéaire est souvent produit dans des applications réelles, et il y a ainsi un intérêt considérable pour l'identification des caractéristiques dynamiques des structures non linéaires. Ceci est une tâche assez complexe pour les raisons suivantes :

- Les principes de base qui s'appliquent à un système linéaire et qui forment la base de l'analyse modale ne sont plus valides. De nouveaux outils d'analyse ont été développés mais nécessitent des applications mathématiques plus complexes.
- La dynamique d'un système non linéaire est beaucoup plus riche et beaucoup plus complexe que la dynamique d'un système linéaire. Il y a des phénomènes qui ne se produisent pas dans le cas d'un système linéaire, par exemple, cycles harmoniques ou chaos de limite.
- Il existe plusieurs sources de non linéarité, comme le comportement de matériaux non linéaires, contact entre les composants ou le frottement de coulomb et les mécanismes de perte d'énergie.

Le procédé d'identification implique une progression par trois étapes, à savoir caractérisation, évaluation et choix de modèle, et identification des paramètres (Figure 18). Le système non linéaire est identifié quand tous les paramètres de non linéarité sont déterminés. Le but de la deuxième étape, c'est-à-dire le choix de modèle, est de décrire l'effet non linéaire en utilisant un modèle mathématique. Finalement, les paramètres de non linéarité doivent être déterminés. Ceci est habituellement effectué en utilisant le lissage par les moindres carrés linéaires.

L'identification de système non linéaire a commencé en 1979 par l'introduction de la méthode Restoring Force Surface (RFS) par Masri et Caughey [120]. Depuis, de nombreuses méthodes ont été proposées puisqu'il est difficile de trouver une méthode simple répondant à toute la grande variété de non linéarités. Parmi les techniques les plus connues qui ont été considérées ces vingt dernières années, nous pouvons citer :

- La première application de la transformée de Hilbert dans le domaine de l'identification des systèmes mécaniques qui a été utilisée dans le domaine fréquentiel [121] d'une part puis, le domaine temporel d'autre part pour la résolution du problème inverse [122], [123].
- Les séries de Volterra fournissent sous certaines hypothèses un rapport explicite entre l'excitation et la réponse du système. Le développement de la méthode est présenté dans la

référence [124]. L'utilisation des séries de Volterra dans le domaine de la dynamique des structures a commencé vers la fin des années 80 par le travail de Gifford et Tomlinson [125]. Elle a été également appliquée par plusieurs chercheurs comprenant Worden et Manson [126], [127], et Kahn et Vyas [128]. Cependant, la méthode est associée à des inconvénients tout à fait sérieux. Par exemple, la convergence de la série n'est pas toujours garantie, elle exige également que les fonctions non linéaires soient suffisamment différentiables.

- Les modèles NARMAX (Non-linear Auto-Regressive Moving Average with eXogenous Inputs) ont été présentés par Leontaritis et Billings [129], [130] et sont basés sur le modèle ARMAX. Une amélioration de la méthode originale a été proposée dans la référence [131] où le nombre de paramètres à identifier a été réduit en employant les coordonnées modales. Le nombre de paramètres reste tout de même important ce qui rend le processus complexe et coûteux du point de vue numérique. On peut également noter que les réponses fréquentielles d'ordre le plus élevé peuvent être calculées par le modèle NARMAX [132], [133].

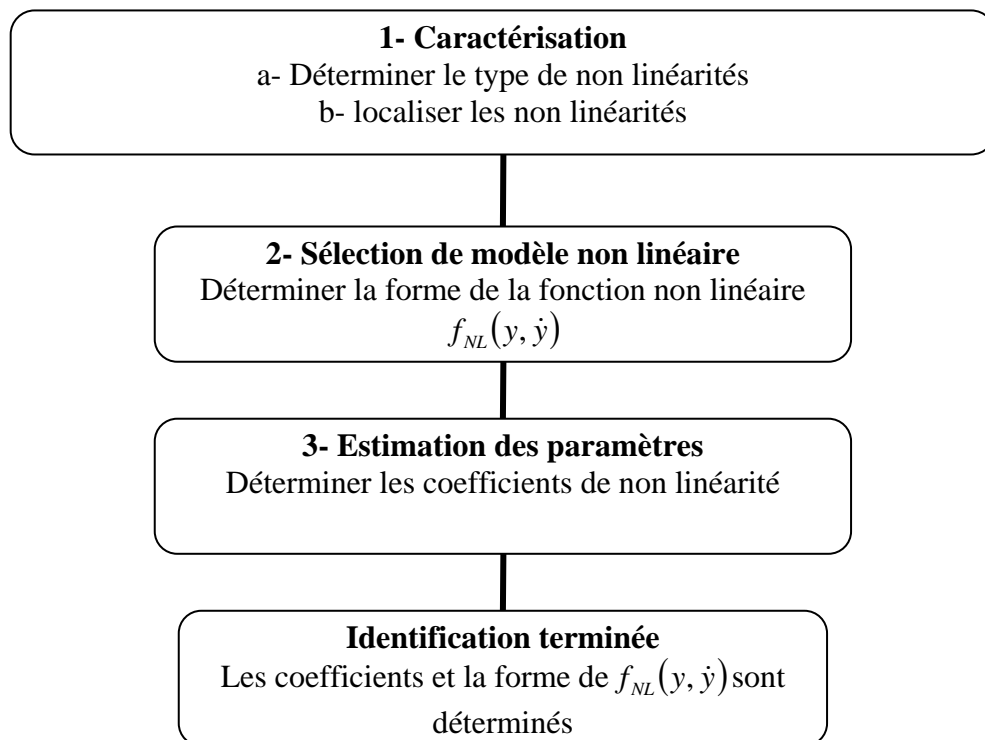


Figure 18. Processus d'identification

Une présentation plus détaillée de ces méthodes est disponible dans la référence [134]. Cependant, ces méthodes sont souvent limitées aux systèmes avec un nombre de degré de

liberté relativement limité, en général deux ou trois, qui représente une limitation importante pour l'étude d'applications réelles.

L'élaboration de méthodes d'identification de systèmes non linéaires plus complexes reste toujours une préoccupation principale dans la dynamique de structures.

Une majeure partie des méthodes proposées ces dix dernières années concernent les systèmes à un degré de liberté (SDOF). Un progrès significatif est réalisé dans l'identification de systèmes discrets à plusieurs degrés de liberté (MDOF). Des travaux d'extension sont aussi faits pour le cas de structures continues simples à non linéarités localisées. Nous pouvons citer les travaux suivants :

- l'approche de Wright emploie un modèle exprimé dans l'espace modal [135]. Le principe de base de cette méthode vise à exécuter les étapes d'identification sur un seul mode ou un groupe de modes plutôt que de considérer tous les modes.
- parmi les méthodes basées sur les fonctions de réponse fréquentielle, la méthode Conditioned Reverse Path (CRP) et l'identification non linéaire par rétroactivité de la réponse (Feedback Output NIFO) se basent sur l'élimination des déformations dans les réponses fréquentielles causées par la présence d'une non linéarité. Les deux méthodes identifient le coefficient non linéaire par comparaison avec la réponse fréquentielle du système linéaire fondamental.
- la contribution de Bellizzi et Defilippi [136], où l'identification du système non linéaire est basée sur l'approximation analytique de la densité de la puissance spectrale (PSD) avec les mesures. L'approximation PSD est représentée comme une fonction de matrice de réponse de PSD du système linéaire équivalent.
- la méthode de Gibert et Thouverez [137], où le modèle de réponse fréquentielle est basé sur le concept de mode normal. Le modèle modal non linéaire de la structure est obtenu par le lissage des données mesurées avec la fonction de flexibilité non linéaire.

Le succès du recalage de modèle linéaire se fonde principalement sur deux facteurs :

- les fréquences et les modes propres ont la capacité de réduire considérablement la quantité d'information à analyser et fournissent une représentation suffisante du modèle linéaire;
- le modèle éléments finis initial est assez précis pour considérer que l'approximation n'est pas loin de l'optimum global de la fonction objective. Cette hypothèse permet l'utilisation des techniques d'optimisation locales comme la méthode du gradient conjugué qui donne une optimisation globale raisonnable. D'autres optimisations globales sont aussi utilisées [138].

Dans le cas du recalage de modèle élément finis de structures non linéaires, d'autres approches peuvent être utilisées en plus de celles appliquées au cas linéaire. Nous pouvons citer :

- L'algorithme d'estimation de l'erreur minimale considéré dans la référence [139] donne un modèle assez précis pour les systèmes non linéaires.
- Le comportement par hystérésis de la force de frottement est fréquemment considéré dans la pratique, en particulier pour les machines-outils [140], [141], [142]. Contrairement aux méthodes d'identification linéaires, des variables internes sont nécessaires pour la description du modèle. C'est la raison pour laquelle, dans la référence [143], l'identification de systèmes non linéaires est réalisée par la minimisation d'une fonction objective basée sur la différence entre les réponses mesurées et celles prédites. L'optimisation est réalisée en utilisant l'algorithme d'évolution différentiel qui appartient à la classe des algorithmes génétiques.
- La formulation proposée par Meyer et Link [144], constitue une extension des méthodes de recalage de modèles linéaires. Elle utilise une linéarisation de l'équation d'équilibre non linéaire de la structure en utilisant la méthode Harmonic Balance Method (HBM). Le résultat de ce procédé est une linéarisation dans le domaine fréquentiel. Un modèle linéaire initial est alors utilisé en combinaison avec les techniques de recalage de modèle pour l'identification des paramètres non linéaires. La méthode se base sur l'erreur entre les réponses en déplacement mesurées et celles calculées.
- Une méthode de validation et recalage utilisant les outils statistiques est proposée dans les références [145], [146]. L'outil statistique est utilisé pour contrecarrer les effets expérimentaux et environnementaux. Cette stratégie vise à réduire le nombre de paramètres qui nécessitent des simulations coûteuses sur ordinateur, tout en maintenant une représentation convenable des caractéristiques du problème.

Les méthodes de recalage dans le domaine linéaire risquent d'être d'une utilité limitée pour deux raisons principales présentées ci-dessous.

III.1.2 Identification du modèle mathématique

La validité de l'analyse modale est limitée aux structures à comportement linéaire. En conséquence, les fréquences et les modes propres ne peuvent plus être exploités dans le cas de systèmes non linéaires.

Une extension de ce concept aux systèmes non linéaires conservatifs discrets a été proposée par Rosenberg dans les références [147], [148]. Il définit le mode normal non

linéaire (NNM) comme une oscillation périodique synchrone où tous les points traversent la position d'équilibre en même temps. D'autres méthodes [149], [150] ont été développées pour l'étude des systèmes non conservatifs, gyroscopiques et continus. Leur calcul demeure toujours difficile pour des applications pratiques. Il est donc trop tôt pour dire qu'ils peuvent être d'une aide suffisante dans le contexte de l'identification de modèle non linéaire.

Le progrès dans la définition des systèmes non linéaires a été réalisé récemment avec l'introduction de la décomposition orthogonale dite Proper Orthogonal Decomposition (POD) dans la dynamique des structures [151], [152], [153]. Les modes extraits à partir de la POD qu'on désigne par Proper Orthogonal Modes (POMs) ont la propriété optimale pour la reconstruction de la réponse dynamique du système. Ils permettent également une représentation du comportement spatial du système. C'est la raison pour laquelle les POMs ont été exploités comme alternative prometteuse aux modes propres dans le recalage de modèle [154], [155], [156], [157]. Ainsi, ce modèle de recalage se base sur le minimum de la différence entre les POMs mesurés et ceux prédits. La transformée en ondelettes est utilisée dans la fonction objective. Cependant, on ne doit pas perdre de vue que le recalage utilisant les POMs est une technique linéaire.

III.1.3 Minimisation de la fonction objective

A priori, la connaissance du problème non linéaire est souvent limitée, et le modèle initial ne peut généralement pas être supposé proche du modèle réel. Dans ce cas, l'optimisation locale a une grande probabilité de converger vers un optimum local ayant pour résultat une solution insuffisante ou peu fiable. Des algorithmes d'optimisation globale ont été présentés mais sont loin du développement effectué dans le cas linéaire. Le problème demeure dans la formulation ou le choix d'une fonction objective considérant toutes les possibilités de non linéarité tout en produisant un recalage numériquement stable et convergent. Pour cela la fonction objective doit être sensible aux paramètres de recalage choisis.

Le but de cette partie est de trouver une formulation répondant au mieux à ces besoins, tout en choisissant des paramètres assez précis pour la reconstitution du comportement non linéaire de la structure considérée.

III.2 Formulation non linéaire par la fonction descriptive

La discrétisation spatiale d'un système linéaire est un procédé bien connu : elle est à la base des méthodes standard telles que éléments finis et analyse modale linéaire. Celle-ci peut être réalisée par un certain nombre de techniques (par exemple Ritz, Galerkin, formulations

variationnelles), qui fournissent une approche systématique pour une représentation sous forme de systèmes d'équations différentielles ordinaires.

L'avantage principal du procédé mentionné ci-dessus est la représentation compacte d'un grand système sous une forme matricielle. Les matrices du système représentent les éléments locaux de la masse, amortissement ou de raideur, et sont toutes constantes pour un système linéaire. La répartition de ces éléments est expliquée par leurs indices matriciels.

Quand on considère les systèmes non linéaires, il est normal d'essayer une description matricielle des non linéarités. Pour cela, le système est séparé en composants linéaires et non linéaires, dans le but d'obtenir une représentation matricielle discrète des non linéarités. Cette matrice non linéaire est composée des coefficients non linéaires locaux (relatifs typiquement à la raideur et/ou l'amortissement) dépendant de l'amplitude.

La construction d'une matrice non linéaire (MNL) a été développée par quelques auteurs, notamment Ozguven et Budak [158], [159], [160], Kuran et Ozguven [161] et Tanrikulu et Imregun [162], qui ont utilisé la théorie de la représentation en fonctions (Describing Function Method DFM) pour obtenir les coefficients équivalents des non-linéarités de premier ordre telles que la raideur cubique et l'amortissement par friction. Ces coefficients représentent un pas important dans l'analyse non linéaire permettant une représentation matricielle unique avec les paramètres linéaires.

Avant de présenter la formulation mathématique, il est utile de rappeler la formulation des éléments non linéaires de premier ordre décrivant les fonctions pour la raideur cubique et l'amortissement par friction. Ces représentations sont très utilisées pour la construction d'une matrice non linéaire (MNL) et son vecteur non linéaire associé (VNL), représentant la partie non linéaire d'un système à plusieurs degrés de liberté (MDOF).

III.2.1 Introduction

La théorie de base de la méthode DFM se fonde sur le fait que lorsqu'un système non linéaire est soumis à une excitation harmonique, il donne souvent une réponse en oscillation périodique qu'on peut assimiler à un signal sinusoïdal pur. La réponse d'un véritable système non linéaire ne montre pas que des réponses harmoniques pour une fréquence donnée, mais il est également vrai que les amplitudes sous/super harmoniques sont relativement petites en comparaison avec le principe fondamental. La méthode DFM cherche alors à décrire la relation entre la réponse et l'excitation, et calcule la force de reconstitution moyenne se produisant en un cycle. Il est clair qu'en raison de la réduction au premier ordre, le comportement multi harmonique ne peut être ni détecté ni prédit bien que des extensions de la

méthode soient proposées par Vaqueiro [163], Kuran et Ozguven [161] et d'autres. L'obtention des coefficients de premier ordre pour la raideur et l'amortissement non linéaires a été déjà établie dans certaines méthodes basées sur l'équilibre harmonique (Harmonic Balance Method HBM) [164], [165].

Considérons l'équation du mouvement d'un oscillateur simple soumis à une excitation harmonique

$$m\ddot{y} + g(\dot{y}, y) = f \sin(\omega t) \quad (185)$$

où $g(\dot{y}, y)$ représente toutes les forces résultantes, et considérée comme une fonction non linéaire de la vitesse et du déplacement.

Si la réponse y est suffisamment proche d'un signal sinusoïdal, et à condition que la perte d'énergie aux fréquences autres que la fréquence fondamentale soit minime, alors, il sera raisonnable de supposer que la fonction non linéaire $g(\dot{y}, y)$ soit également à caractère périodique. Il est possible de trouver un coefficient linéarisé $v(\dot{y}, y)$ qui fournit la meilleure moyenne de la force réelle reconstituée. Ce coefficient agit sur la réponse harmonique fondamentale non linéaire Y_1 pour un cycle de chargement, de telle manière que

$$g(\dot{y}, y) \approx v(\dot{y}, y).y, \text{ avec } y = Y_1 \sin(\omega t + \theta) = Y_1 \sin \tau \quad (186)$$

Dans le but de trouver le coefficient non linéaire $v(\dot{y}, y)$, la force résultante $g(\dot{y}, y)$ est développée en série de Fourier au voisinage de y en négligeant les paramètres d'ordre supérieur à un.

$$g(\dot{y}, y) \approx v(\dot{y}, y).y = \sigma_{1a}.y + \sigma_{1b}.y + \underbrace{\sigma_{2c}.y^2 + \sigma_{2d}.y^2 + \dots}_{\text{termes négligés}} \quad (187)$$

où les fonctions σ sont données par

$$\begin{aligned} \sigma_{1a} &= \frac{1}{\pi Y_1} \int_0^{2\pi} g(Y_1 \sin \tau, \omega Y_1 \cos \tau) \sin \tau .d\tau \\ \sigma_{1b} &= \frac{1}{\pi Y_1} \int_0^{2\pi} g(Y_1 \sin \tau, \omega Y_1 \cos \tau) \cos \tau .d\tau \end{aligned} \quad (188)$$

Alors le coefficient non linéaire $v(\dot{y}, y)$ a une solution unique

$$v(\dot{y}, y) = \sigma_{1a} + \sigma_{1b} \quad (189)$$

III.2.2 Fonction descriptive de la raideur cubique

Le modèle mathématique de l'élément raideur cubique s'exprime par

$$g(\dot{y}, y) = ky + \beta y^3 \quad (190)$$

Où k représente le coefficient linéaire du ressort et β représente l'effet non linéaire en terme cubique y^3 . La figure 19 représente les comportements linéaire et non linéaire du ressort.

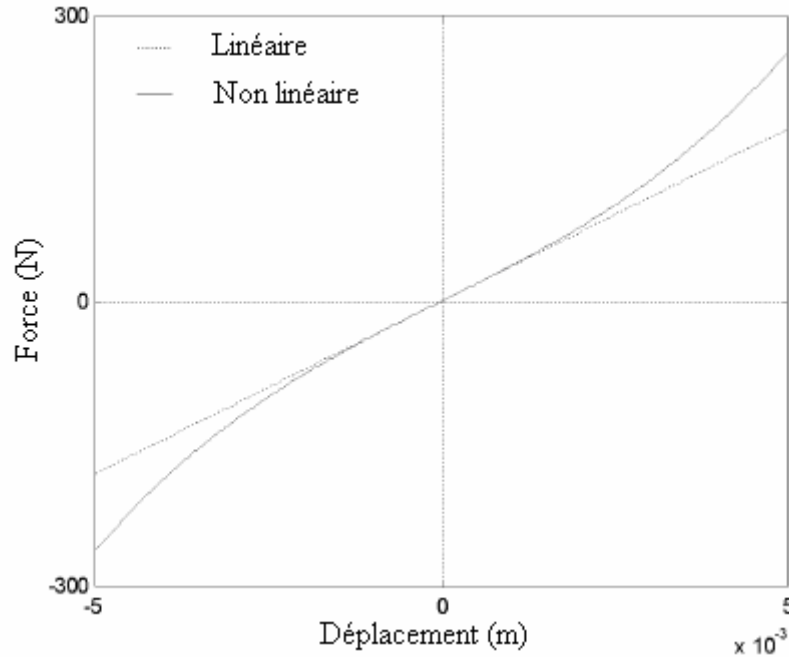


Figure 19. Comportement de l'élément raideur cubique

Notons que même si la raideur globale du ressort change avec l'amplitude y , les coefficients de raideur k et β demeurent constants et ne dépendent pas de la fréquence. Autrement, il serait bien plus difficile de résoudre l'équation (186).

En introduisant l'équation (190) dans l'équation (188) et en supprimant l'indice l indiquant le premier ordre, nous obtenons

$$\sigma_a = \frac{1}{\pi Y} \int_0^{2\pi} (ky + \beta y^3) \sin \tau \cdot d\tau$$

$$\sigma_b = 2 \sin \pi \cdot \cos \pi = 0 \quad (191)$$

Introduisons ces termes dans l'équation (189), nous pouvons écrire (en utilisant l'indice k pour désigner le coefficient de raideur)

$$v_k(\dot{y}, y) = \frac{1}{\pi Y} \int_0^{2\pi} (kY \sin \tau + \beta Y^3 \sin^3 \tau) \sin \tau \cdot d\tau$$

Après calcul, nous obtenons

$$v_k(\dot{y}, y) = k + \frac{3}{4} \beta Y^2 \quad (192)$$

Où la partie non linéaire est exprimée par le terme $\frac{3}{4} \beta Y^2$.

La signification du terme non linéaire $v(\dot{y}, y)$ est illustrée par la figure 20 qui montre qu'il y a bien approximation linéaire telle que

$$g(\dot{y}, y) \approx v_k(\dot{y}, y) \cdot y$$

$$(kY \sin \tau + \beta Y^3 \sin^3 \tau) \approx \left(k + \frac{3}{4} Y^2 \right) Y \sin \tau \quad (193)$$

Ayant pour résultat le fait que la fonction initiale est formée des deux termes $\sin \tau$ et $\sin^3 \tau$ alors que la fonction linéarisée n'a qu'un terme en $\sin \tau$.

Les deux fonctions sont représentées sur la figure 20 où l'on peut constater que le coefficient linéarisé donne une bonne approximation de la fonction linéaire.

Ce développement est appliqué à un ressort dont une extrémité est fixée. Dans le cas de systèmes non linéaires où le ressort est compris entre deux ddls y_1 et y_2 , un changement de variables est nécessaire pour retrouver la même formulation.

$$z = y_1 - y_2 \text{ où } y_1 = Y_1 \sin(\omega t + \theta_1), \quad y_2 = Y_2 \sin(\omega t + \theta_2) \text{ et } z = Z \sin(\omega t + \theta_z) = Z \sin \tau$$

$$\text{où } Z = |z| = |y_1 - y_2| \text{ et } \theta_z = \angle(y_1, y_2) \quad (194)$$

et la force reconstituée non linéaire devient alors

$$g(\dot{z}, z) \approx v_k(\dot{z}, z) \cdot z \quad (195)$$

En introduisant ce changement de variables le résultat final sera

$$v_k(\dot{z}, z) = k + \frac{3}{4} \beta Z^2 \quad (196)$$

où le coefficient non linéaire est donné par $\frac{3}{4} \beta Z^2$.

Finalement on revient à la forme

$$(kZ \sin \tau + \beta Z^3 \sin^3 \tau) \approx \left(k + \frac{3}{4} Z^2 \right) Z \sin \tau \quad (197)$$

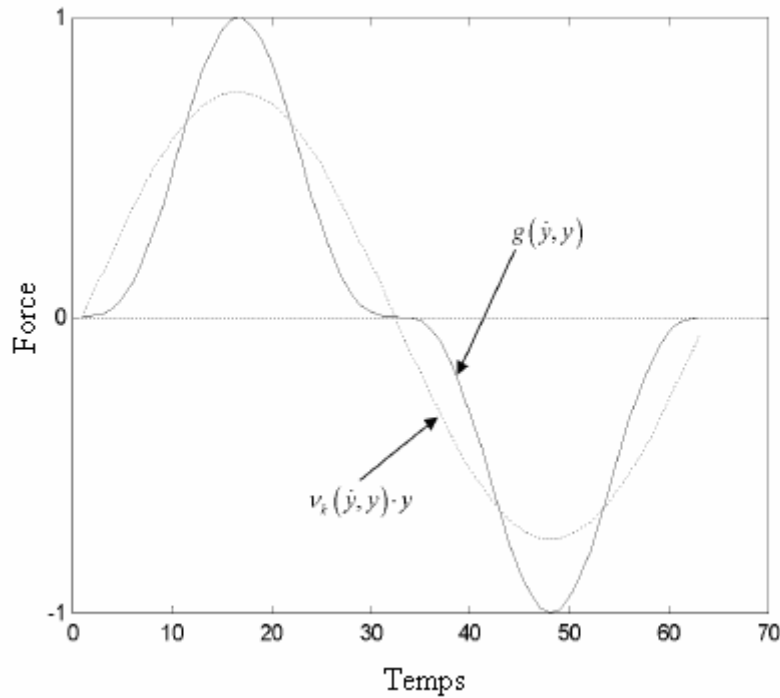


Figure 20. Fonction descriptive de premier ordre de l'élément raideur cubique

III.2.3 Fonction descriptive de l'amortissement par friction

Le modèle mathématique de l'amortissement par friction est donné par

$$g(\dot{y}, y) = c\dot{y} + \gamma \frac{\dot{y}}{|\dot{y}|}, \text{ pour } y > Y_{\text{limit}} \quad (198)$$

Où le terme $|\dot{y}|$ est utilisé pour s'assurer que la force reconstituée soit opposée à la direction du mouvement. Ce modèle n'est valide que dans le cas de l'étape de glissement conditionné par un déplacement limité à une certaine valeur Y_{limit} qui exprime la propriété de la surface de contact. A peine au dessous de ce seuil, le phénomène connu sous le nom de « stick-slip » apparaît, caractérisé par un mouvement intermittent à comportement stationnaire. De cette façon, la condition (198) est invalide.

Pour les très petits déplacements, correspondant à l'étape « stick-slip » la composante non linéaire $\gamma \frac{\dot{y}}{|\dot{y}|}$ dans (198) est usuellement remplacée par une force élastique proportionnelle à

l'amplitude instantanée du mouvement. Les étapes « stick » et « stick-slip » ne seront pas incluses ici, car le but est de se focaliser aux descripteurs non linéaires. La figure 21 illustre le comportement typique d'un élément d'amortissement par friction.

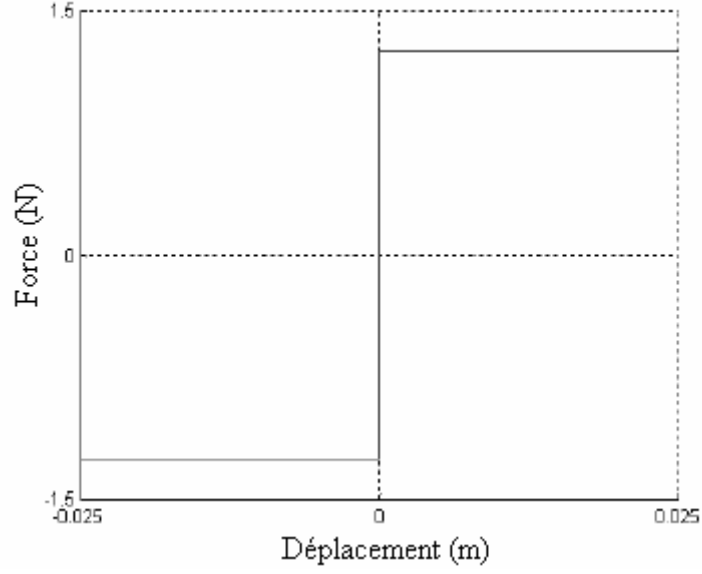


Figure 21. Comportement de l'élément amortissement par friction

La relation entre la force reconstituée et sa fonction descriptive est :

$$g(\dot{y}, y) \approx v_c(\dot{y}, y).y \quad (199)$$

où l'indice « c » dans v_c indique que le coefficient est relatif à l'amortissement. Le développement de Fourier donne

$$\begin{aligned} \sigma_a &= 0 \\ \sigma_b &= \frac{1}{\pi Y} \int_0^{2\pi} \left(c\dot{y} + \gamma \frac{\dot{y}}{|y|} \right) \cos \tau d\tau \end{aligned} \quad (200)$$

L'intégrale doit se calculer par parties pour manipuler le terme $|y|$. Après développement, nous avons

$$\begin{aligned} v(\dot{y}, y) &= \frac{c}{\pi Y} \int_0^{2\pi} (\omega Y \cos \tau) d\tau + \frac{\gamma}{\pi Y} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\omega Y \cos \tau}{|\omega Y \cos \tau|} \right) \cos \tau d\tau \\ v(\dot{y}, y) &= \frac{\omega c}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \tau d\tau + \frac{\gamma}{\pi Y} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2 \tau}{|\cos \tau|} \right) \cos \tau d\tau \\ v(\dot{y}, y) &= \frac{\omega c}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \tau d\tau + \frac{\gamma}{\pi Y} \left[2 \int_0^{\pi/2} \cos \tau d\tau - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos \tau d\tau \right] \end{aligned}$$

et finalement, on arrive à la représentation de l'élément d'amortissement par friction

$$v_c(\dot{y}, y) = i\omega c + i \frac{4\gamma}{\pi Y} \quad (201)$$

où le nombre imaginaire « i » est ajouté pour comptabiliser le déphasage introduit par le terme en cosinus dans (200). La partie non linéaire est donnée par

$$v_c(\dot{y}, y) = i \frac{4\gamma}{\pi Y} \quad (202)$$

L'approximation est mieux comprise en introduisant (201) dans (200)

$$\left(c\omega Y \sin \tau + \gamma \frac{\omega Y \sin \tau}{|\omega Y \sin \tau|} \right) \approx \left(i\omega c + i \frac{4\gamma}{\pi Y} \right) Y \cos \tau \quad (203)$$

Comme constaté dans (203), la force initiale reconstituée contenant les deux termes $\sin \tau$ et $\frac{\sin \tau}{|\sin \tau|}$ a été approximée par l'utilisation de coefficients linéarisés contenant seulement le terme $\cos \tau$. Ceci est illustré sur la figure 22 montrant bien que la fonction descriptive représente une bonne approximation de la variation de la force reconstituée.

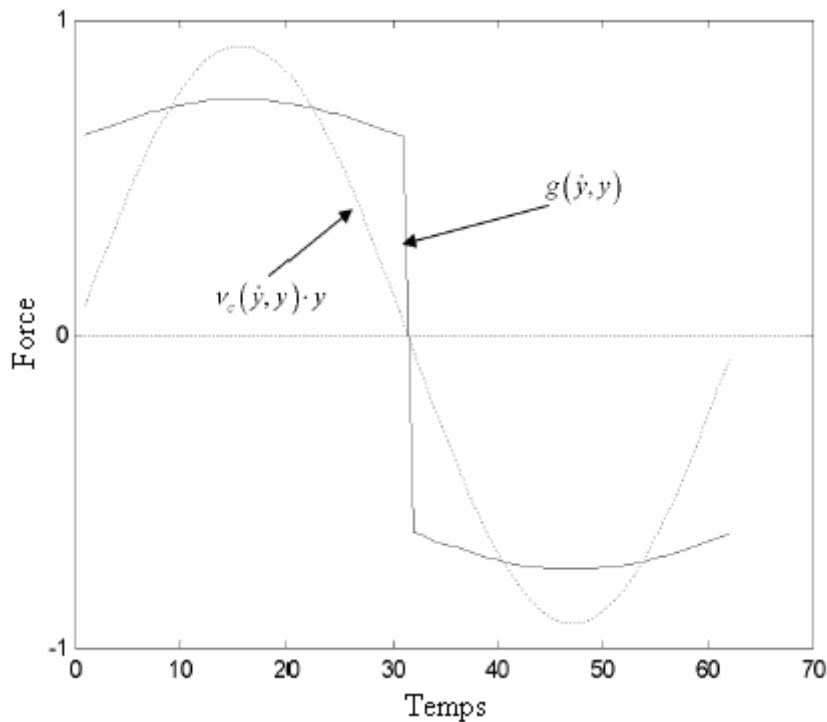


Figure 22. Fonction descriptive de premier ordre de l'élément amortissement par friction

III.2.4 Amortissement par friction d'un élément non lié (compris entre deux éléments)

En suivant une approche similaire au développement de la raideur cubique, le changement de variable introduit dans (194), la force non linéaire reconstituée devient

$$g(\dot{z}, z) = v_c(\dot{z}, z)z \quad (204)$$

Après application de la formulation de la fonction descriptive, le coefficient linéarisé $v_c(\dot{z}, z)$ est obtenu sous la forme

$$v_c(\dot{z}, z) = i\omega c + i\frac{4\gamma}{\pi Z} \quad (205)$$

L'approximation produite est donc

$$\left(c\omega Z \sin \tau + \gamma \frac{\omega Z \sin \tau}{|\omega Z \sin \tau|} \right) \approx \left(i\omega c + i\frac{4\gamma}{\pi Z} \right) Z \cos \tau \quad (206)$$

III.2.5 Vecteur non linéaire (VNL) et matrice non linéaire (MNL)

L'expansion du système oscillant introduit dans l'équation (185) à un système à plusieurs degrés de liberté nous donne

$$[M]\{\ddot{y}\} + \{G(\dot{y}, y)\} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (207)$$

où $[M]$ est la matrice masse

$\{\ddot{y}\}$, $\{\dot{y}\}$, et $\{y\}$ sont respectivement les vecteurs accélération, vitesse et déplacement, $\{F\}$ est le vecteur harmonique d'excitation appliqué à la fréquence ω .

Le vecteur $\{G(\dot{y}, y)\}$ désigné par l'abréviation VNL, contient toutes les forces reconstituées du système global, qui est en général une fonction de tous les déplacements et vitesses.

Pour des non linéarités cumulées, $g(\dot{y}, y) = g_c(\dot{y}) + g_k(y)$ il est possible d'étendre le VNL en forces individuelles reconstituées comme suit

$$\{G(\dot{y}, y)\} = \begin{Bmatrix} gv_1(\dot{y}, y) \\ gv_2(\dot{y}, y) \\ gv_3(\dot{y}, y) \\ \vdots \\ gv_N(\dot{y}, y) \end{Bmatrix}_N = \begin{Bmatrix} g_{11} + g_{12} + g_{13} + \dots + g_{1N} \\ g_{21} + g_{22} + g_{23} + \dots + g_{2N} \\ g_{31} + g_{32} + g_{33} + \dots + g_{3N} \\ \vdots \\ g_{N1} + g_{N2} + g_{N3} + \dots + g_{NN} \end{Bmatrix}_N \quad (208)$$

où N est la taille du système en ddl. Chaque fonction non linéaire g_{ij} représente une force reconstituée activant entre les ddls i et j où les termes d'indice ii représentent la force reconstituée entre le ddl i et la terre. Donc la $i^{\text{ème}}$ ligne de VNL contenant la fonction $gv_i(\dot{y}, y)$ représente l'effet combiné de tous les éléments connectés au ddl i ($g_{i1} + g_{i2} + g_{i3} + \dots + g_{iN}$). Sachant que $g_{ij} = -g_{ji}$.

A ce stade, il est avantageux de remplacer chaque force individuelle reconstituée g_{ij} par ces coefficients linéarisés développés précédemment. Si le système a une réponse harmonique $\{y(t)\} = Y e^{i\omega t}$ où $\{Y\} = \{Y|e^{i\omega t}\}$ est un vecteur non linéaire complexe nécessitant l'adaptation d'une phase, alors il est nécessaire de redéfinir les coefficients.

Pour les éléments fixés (liés à la terre) la redéfinition est presque triviale

$$v_{ii}(\dot{y}_i, y_i)y_i = \left(k_{ii} + \frac{3}{4}\beta_{ii}|Y_i|^2 \right) Y_i \quad (209)$$

$$v_{ii}(\dot{y}_i, y_i)y_i = \left(i\omega c_{ii} + i\frac{4\gamma_{ii}}{\pi|Y_i|} \right) Y_i \quad (210)$$

où la dépendance du terme Y en fonction du terme harmonique $e^{i\omega t}$ est évidente. Pour les éléments non fixés (compris entre deux éléments), le coefficient non linéaire peut être redéfini par emprunt à partir du modèle éléments finis par approche directe de la raideur où l'élément est formulé par une matrice de passage prenant en compte les coordonnées (ddls) de l'élément. Pour un élément non linéaire discret à deux nœuds (i et j), on peut noter

$$g_{ij} \approx v_{ij}(\dot{z}_{ij}, z_{ij})z_{ij} = v_{ij}(\dot{y}_i, \dot{y}_j, y_i, y_j)(y_i - y_j) \quad (211)$$

qui conduit à

$$v_{ij}(\dot{z}_{ij}, z_{ij})z_{ij} = \begin{Bmatrix} k_{ij} & -k_{ij} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{3}{4}\beta_{ij}|Z_{ij}|^2 & -\frac{3}{4}\beta_{ij}|Z_{ij}|^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix} \quad (212)$$

ou

$$v_{ij}(\dot{z}_{ij}, z_{ij})z_{ij} = \begin{Bmatrix} i\omega c_{ij} & -i\omega c_{ij} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i\frac{4\gamma_{ij}}{\pi|Z_{ij}|} & -i\frac{4\gamma_{ij}}{\pi|Z_{ij}|} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix} \quad (213)$$

où, comme on peut le constater, la formulation produit des coefficients symétriques, c'est-à-dire $v_{ij} = -v_{ji}$. En introduisant les coefficients non linéaires nouvellement redéfinis dans (208), une matrice des coefficients non linéaires est formée

$$\{G(\dot{y}, y)\} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N v_{1j} & v_{12} & v_{13} & \cdots & v_{1N} \\ v_{21} & \sum_{j=1}^N v_{2j} & v_{23} & \cdots & v_{2N} \\ v_{31} & v_{32} & \sum_{j=1}^N v_{3j} & \cdots & v_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{N1} & v_{N2} & v_{N3} & \cdots & \sum_{j=1}^N v_{Nj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_N \end{Bmatrix} \quad (214)$$

La somme dans la diagonale de la matrice des coefficients est expliquée par le fait que comme chaque coefficient v_{ij} d'élément extra diagonal (non fixé) introduit des composantes additives (d'égale amplitude et de signe opposé) dans les coefficients de la diagonale (éléments fixés) v_{ii} .

A cause de l'hypothèse de non linéarités ajoutées, chaque coefficient v_{ij} peut être de type raideur ou amortissement. Elle est appelée matrice carrée symétrique des coefficients non linéaires MNL (Matrice Non Linéaire) désignée par le symbole v .

$$v = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N v_{1j} & v_{12} & v_{13} & \cdots & v_{1N} \\ v_{21} & \sum_{j=1}^N v_{2j} & v_{23} & \cdots & v_{2N} \\ v_{31} & v_{32} & \sum_{j=1}^N v_{3j} & \cdots & v_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{N1} & v_{N2} & v_{N3} & \cdots & \sum_{j=1}^N v_{Nj} \end{bmatrix} \quad (215)$$

Finalement, nous avons

$$\{G\} = [v]\{Y\} \quad (216)$$

Le VNL $\{G\}$ et sa matrice MNL $[v]$ sont définis de façon à contenir toutes les forces reconstituées linéaires et non linéaires.

III.2.6 Formulation explicite des réponses fréquentielles non linéaires de systèmes à plusieurs ddl

III.2.6.1 Introduction

L'outil de base de n'importe quelle méthode d'analyse modale est un ensemble de mesures FRFs pour le système à étudier. Actuellement, la dérivation des modèles mathématiques basés sur les FRFs linéaires est un procédé bien établi, et l'analyse modale linéaire (AML) est reconnue comme outil d'identification robuste et efficace. Cependant, un modèle non linéaire à formulation générale de FRFs disponibles d'un système non linéaire reste inconnu, ce qui est un obstacle principal pour l'établissement d'une méthode générale non linéaire.

L'essentiel des méthodes existantes traitent de cas particuliers détaillés. Le problème majeur pour l'identification expérimentale non linéaire est que relativement peu de FRFs mesurées doivent être comparées aux FRFs du système analytique. Cependant, en raison de la nature couplée d'un problème non linéaire, une approche théorique, telle que la méthode harmonique HBM, doit calculer toutes les réponses non mesurées. Pour de grands systèmes, ceci a comme conséquence un problème d'optimisation non linéaire avec un grand nombre d'inconnues.

Il semble plus raisonnable, du moins en traitant des données expérimentales de pouvoir formuler des réponses théoriques seulement aux coordonnées mesurées. Cette approche donne un nombre réduit d'équations non linéaires à résoudre, simplifiant le processus d'identification non linéaire. La méthode de Kerschen [166], aborde ce concept en dérivant la réponse non linéaire à des coordonnées choisies, par approche dite « Driving Point ». La technique présentée, appelée « formulation explicite » fournit une représentation discrète des FRFs non linéaires pour un ddl choisi.

Le terme « explicite » résulte du fait que le modèle proposé est basé sur les coefficients des matrices $[M]$, $[K]$ et $[C]$. Les non linéarités sont représentées par une matrice non linéaire (MNL) et son vecteur non linéaire associé (VNL) permettant le regroupement des composantes linéaires et non linéaires dans une formulation matricielle simple. Une inversion de matrice, généralement liée à une analyse modale standard, est évitée en définissant la FRF non linéaire comme un rapport de deux déterminants. Bien que pas particulièrement efficace en terme d'implémentation, la technique offre une bonne robustesse. Cette méthode peut être récapitulée selon l'organigramme de la figure 23.

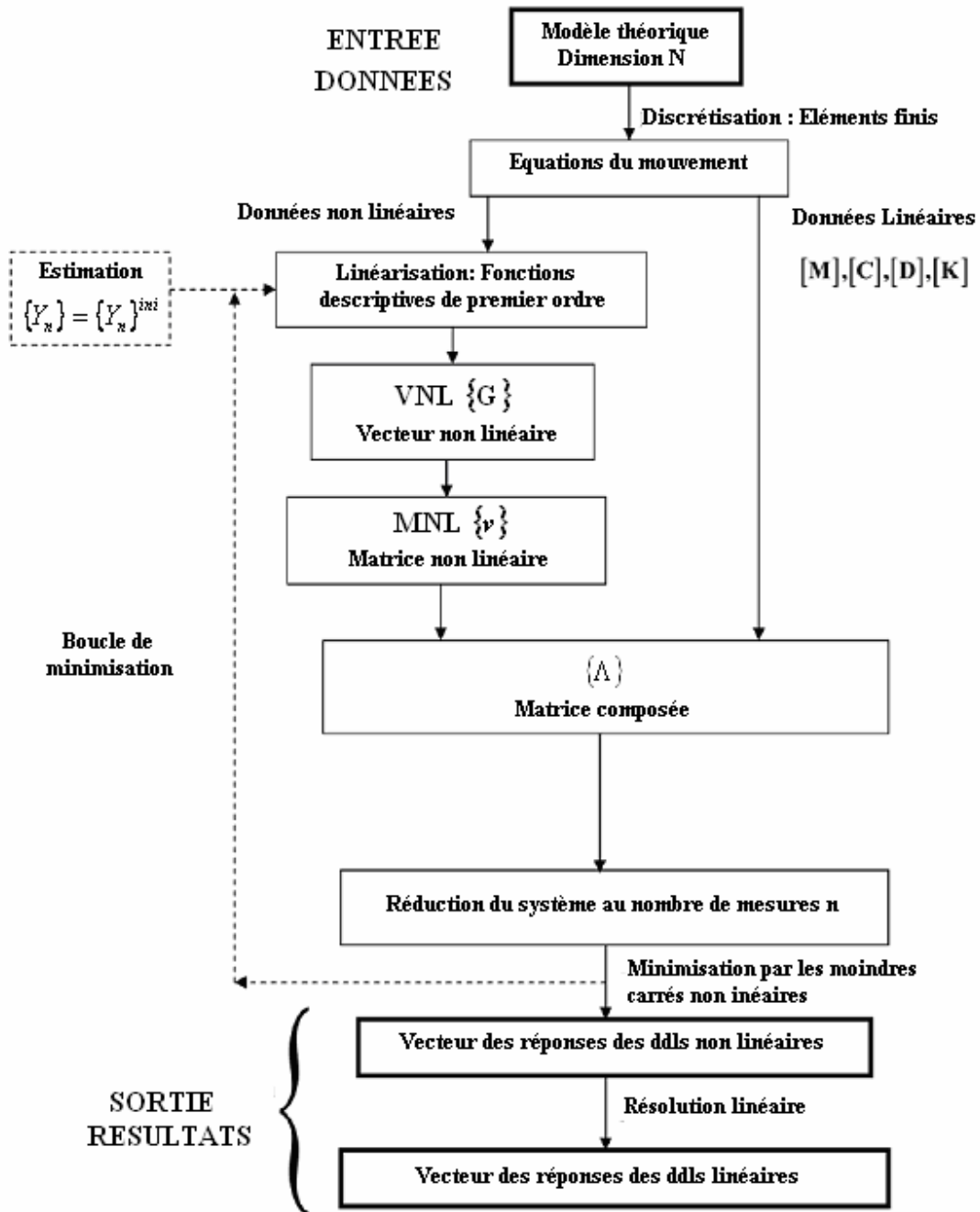


Figure 23. Organigramme de la méthode de formulation explicite

III.2.6.2 Formulation explicite des réponses fréquentielles

Le mouvement d'un système non linéaire soumis à une excitation harmonique peut être décrit par l'équation ordinaire non linéaire suivante

$$M \{\ddot{y}\} + C \{\dot{y}\} + iD \{y\} + K \{y\} + \{G(\dot{y}, y)\} = \{F\} e^{i\omega t} \quad (218)$$

où $[M]$, $[C]$, $[D]$ et $[K]$ sont respectivement les matrices de masse, amortissement visqueux, amortissement par hystérésis et raideur du système fondamental ; $\{\ddot{y}\}$, $\{\dot{y}\}$, et $\{y\}$ sont les vecteurs accélération, vitesse et déplacement, et $\{F\}$ est un vecteur d'excitation harmonique de pulsation ω . La composante non linéaire du système est représentée par le vecteur non linéaire $\{G\}$ qui est dans le cas général une fonction de tous les déplacements et vitesses.

Considérant une réponse harmonique $\{y(t)\} = \{Y\}e^{i\omega t}$ où $\{Y\} = \{|Y|e^{i\theta}\}$ est un vecteur complexe non linéaire adapté à la phase, l'équation du mouvement est réduite à

$$\left(-\omega^2[M] + i\omega[C] + i[D] + [K]\right)\{Y\} + \{G(\omega, Y)\} = \{F\} \quad (219)$$

La receptance est définie par

$$[H] = \left(-\omega^2[M] + i\omega[C] + i[D] + [K]\right)^{-1} \quad (220)$$

et son inverse, $[Z] = [H]^{-1}$:

$$[Z] = -\omega^2[M] + i\omega[C] + i[D] + [K] \quad (221)$$

Le vecteur non linéaire $\{G\}$ peut être exprimé en fonction de la matrice non linéaire $[v]$ et du vecteur réponse

$$\{G\} = [v]\{Y\} \quad (222)$$

En introduisant (221) et (222) dans (219) nous aurons

$$\left([Z] + [v]\right)\{Y\} = \{F\} \quad (223)$$

Ce qui donne la représentation compacte finale du système non linéaire

$$[Z_{NL}]\{Y\} = \{F\}, \text{ avec } [Z_{NL}] = [Z] + [v] \quad (224)$$

$[Z_{NL}]$, est une matrice composée, contenant les coefficients linéaires et non linéaires, et dépendant de l'état $[\dot{y}, y, \omega]$. L'obtention des racines du déterminant de $[Z_{NL}]$ permet de trouver les fréquences naturelles non linéaires dépendant de la fréquence et des constantes d'amortissement.

En utilisant (224), la réponse fréquentielle à n'importe quel ddl donné peut être décrite par le rapport de deux déterminants

$$Y_i = \frac{\det \begin{pmatrix} (Z_{NL})_{11} & \dots & \left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} \text{\scriptsize } i^{\text{ème}} \text{ colonne} & \dots & (Z_{NL})_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} \mathbf{F} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (Z_{NL})_{N1} & \dots & \left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} & \dots & (Z_{NL})_{NN} \end{pmatrix}}{\det(Z_{NL})} \quad (225)$$

où N est la taille du système, et la matrice dans le numérateur est constituée en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice composée $[Z_{NL}]$ par le vecteur force $\{F\}$.

L'expression (225) est le noyau de la formulation explicite.

Dans le cas particulier de structures contenant des non linéarités localisées (joints, discontinuités géométriques, amortisseurs, etc.), la matrice non linéaire $[v]$ est en grande partie creuse, avec juste quelques valeurs non nulles.

La notation suivante distingue les coefficients linéaires et non linéaires de la matrice $[Z_{NL}]$

$$Z_{ij} = (-\omega^2 m_{ij} + i\omega c_{ij} + id_{ij} + k_{ij}) \quad (226)$$

$$(Z_{NL})_{ij} = (-\omega^2 m_{ij} + i\omega c_{ij} + id_{ij} + k_{ij} + v_{ij}) \quad (227)$$

III.2.7 Méthode d'identification

Après avoir explicité les formulations générales dans le domaine fréquentiel, nous pouvons élaborer une méthode d'identification des défauts en présence de non linéarités. Pour cela une méthode de minimisation est nécessaire.

III.2.7.1 Méthode de minimisation

La méthode de Newton – Raphson est parmi les plus utilisées pour la résolution de systèmes d'équations non linéaires, fournissant un mécanisme simple pour converger itérativement à la solution à partir d'une estimée initiale suffisamment proche. Actuellement, il n'y a aucune méthode qui peut garantir la convergence globale dans un problème non linéaire, ainsi, il très important d'estimer une valeur initiale appropriée.

Dans le contexte des problèmes numériques, une limite résiduelle est souvent trouvée au lieu d'une solution exacte (zéro). En comparant différentes erreurs résiduelles dans plusieurs minimum locaux, la solution globale peut être assigné à ce point contenant le minimum de l'erreur résiduelle; l'avantage de cette technique est que la convergence est réalisée, même si l'algorithme ne peut pas trouver une solution exacte (en raison des données bruyantes ou parce que le système simplement n'a pas de solution exacte).

Le problème de Newton–Raphson peut être mathématiquement présenté comme la recherche de la meilleure solution $\{y\}$, résidu minimal de la fonction $\{f(y)\}$

$$\{f(y)\} \approx \{0\} \quad (228)$$

Le schéma itératif est basé sur l'équation

$$\{y^{(k+1)}\} = \{y^{(k)}\} - \varepsilon [J]^{-1} \{f(y^{(k)})\} \quad (229)$$

où le vecteur calculé $\{y^{(k+1)}\}$ correspondant au $(k+1)^{\text{ème}}$ itération est obtenu connaissant le vecteur actuel $\{y^{(k)}\}$ et la matrice Jacobiënne $[J]$. Le problème est réduit à trouver la valeur de ε qui minimise le résidu (228).

Pour un problème à plusieurs inconnues, la matrice Jacobiënne est définie par:

$$[J] = \frac{\partial \{f(y^{(k)})\}}{\partial \{y^{(k)}\}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \quad (230)$$

III.2.7.2 Méthode d'identification dans le domaine fréquentiel

Nous avons jugé utile de présenter la méthode de Kerschen [166] basée sur le domaine fréquentiel. Cette méthode utilise la représentation matricielle explicite présentée dans les paragraphes précédents, ainsi que la méthode de minimisation de Newton – Raphson.

L'application de l'algorithme de Newton conduit aux étapes suivantes :

- 1- Etablir le vecteur $\{Y_n\}$ contenant les variables inconnues
- 2- Construire le système d'équations algébriques non linéaires basé sur les équations de la forme (225) formant le vecteur analytique $\{Y_n^{\text{analytique}}\}$, la fonction objective est $\{f(y)\} = \{f(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)\}$

3- Choisir une estimée de départ la plus proche possible. La réponse linéaire est la plus utilisée pour désigner $\{Y_n^{initiale}\}$

4- Séparation des parties imaginaire et réelle, ce qui donne le système séparé suivant

$$\{f(y)\} = \begin{Bmatrix} f_{\text{Re}}(y) \\ \dots \\ f_{\text{Im}}(y) \end{Bmatrix}_{2n} = \begin{Bmatrix} \text{Re}(Y_n^{initiale} - Y_n^{analytique}) \\ \dots \\ \text{Im}(Y_n^{initiale} - Y_n^{analytique}) \end{Bmatrix}_{2n} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix}_{2n}$$

5- Procédure itérative : Le système itératif s'arrêtera quand la fonction objective aura atteint une valeur minimale prédéfinie (de 1 à 2 %) par rapport à l'itération précédente. Ce qui donne la réponse $\{Y_n\}$ pour la fréquence considérée. Pour une autre valeur de la fréquence refaire la procédure de minimisation et considérer cette réponse comme estimée de départ à la place de la solution linéaire.

6- Résolution linéaire : Après avoir déterminé les solutions aux fréquences voulues, le système est entièrement déterminé par ses n réponses fréquentielles et plus particulièrement transformé en un problème linéaire.

APPLICATION DES METHODES DE RECALAGE AUX SYSTEMES NON LINEAIRES

IV.1 Application à la linéarisation de systèmes faiblement non linéaires	112
IV.2 Recalage en présence de non linéarités	118
IV.3 Conclusion	121

IV APPLICATION DES METHODES DE RECALAGE AUX SYSTEMES NON LINEAIRES

En utilisant la formulation explicite précédente, nous avons mis en œuvre des programmes de simulation des non linéarités dans le domaine fréquentiel. Examinons ce que les méthodes proposées dans le domaine linéaire peuvent apporter pour la linéarisation de systèmes faiblement non linéaires.

IV.1 Application à la linéarisation de systèmes faiblement non linéaires

Il s'agit de trouver un système analytique linéaire capable de reprendre le comportement dynamique du système faiblement non linéaire, il ne s'agit donc pas de détecter des défauts ou des non linéarités. Par conséquent la méthode de recalage par séparation des variables ne sera pas utilisée ici.

Dans le but de voir la qualité des méthodes proposées dans le domaine linéaire au cas de linéarisation de système faiblement non linéaire, considérons la structure de la figure 24 comportant une non linéarité de raideur cubique au niveau du nœud 3 et une non linéarité d'amortissement quadratique au niveau du nœud 7. Quelques réponses fréquentielles du système non linéaire obtenu sont visualisées sur la figure 25.

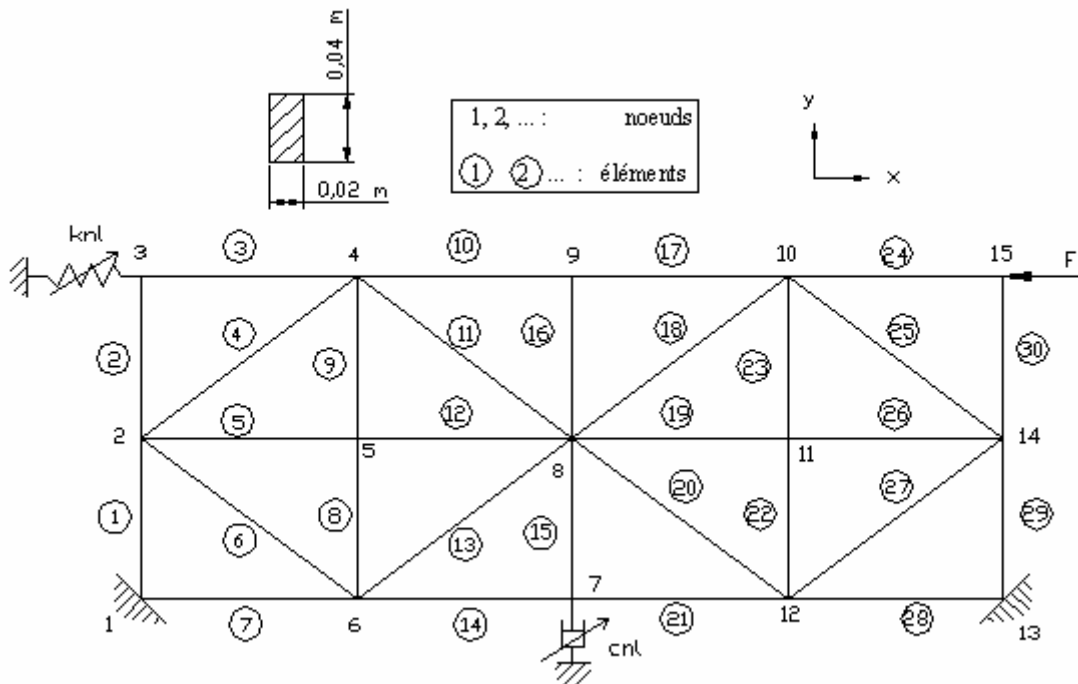


Figure 24. Structure comportant de faibles non linéarités localisées aux ddls 4 et 17

Pour comparer les résultats du processus de linéarisation, nous utilisons le critère d'assurance des réponses fréquentielles. L'expression (19) est reprise sous la forme

$$FRAC(j) = \frac{\left(\sum_{i=1}^s y_{A_j}(\omega_i) y_{X_j}^*(\omega_i) \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^s y_{A_j}(\omega_i) y_{A_j}^*(\omega_i) \right) \left(\sum_{i=1}^s y_{X_j}(\omega_i) y_{X_j}^*(\omega_i) \right)}$$

j est le degré de liberté considéré pour la corrélation

s est le nombre de fréquences de mesures

$y_{A_j}(\omega_i)$ est la réponse fréquentielle analytique au ddl j pour la fréquence ω_i

$y_{X_j}(\omega_i)$ est la réponse fréquentielle mesurée au ddl j pour la fréquence ω_i

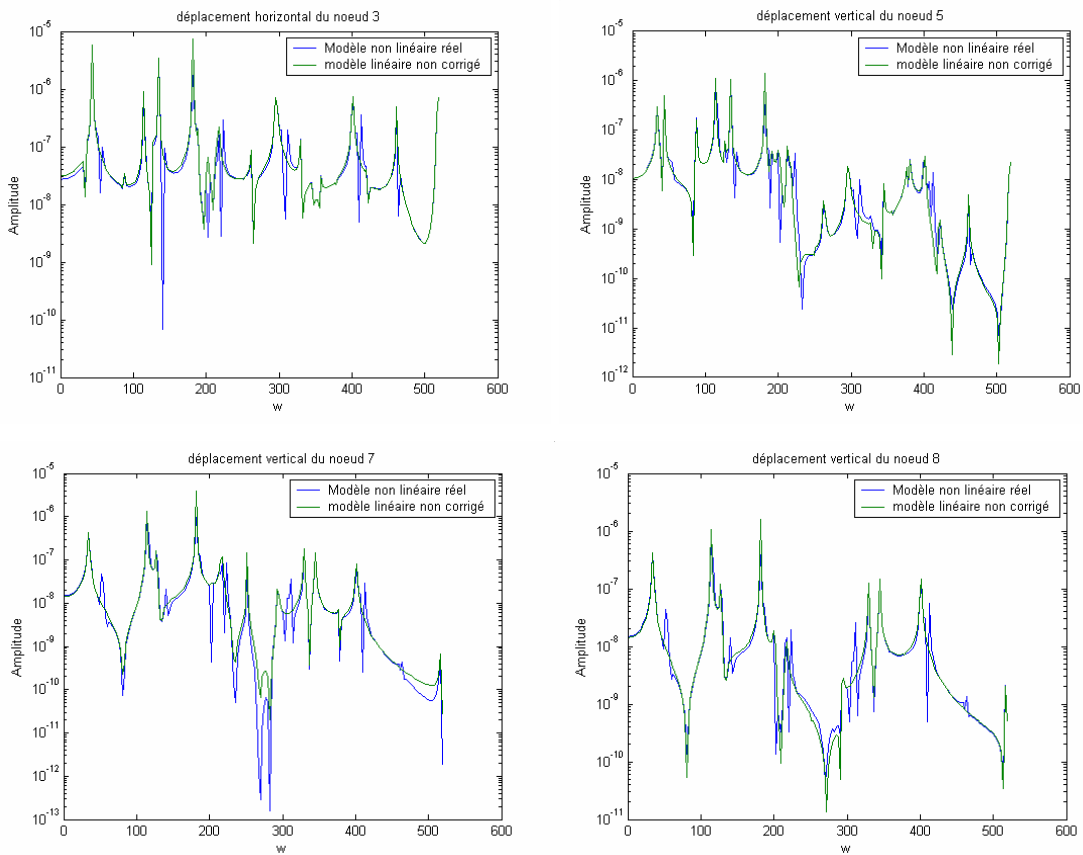


Figure 25. Réponses fréquentielles des ddls 4, 11, 17 et 20 avant recalage

Pour évaluer le taux de non linéarité, nous calculons les fonctions FRAC des deux modèles linéaire et non linéaire avant recalage. Notons FRAC1 le résultat obtenu avant recalage. Ceci est illustré sur la figure 26. Nous constatons que la moyenne des valeurs de FRAC est de l'ordre de 93,84%, ce qui nous permet de le considérer comme un système faiblement non linéaire.

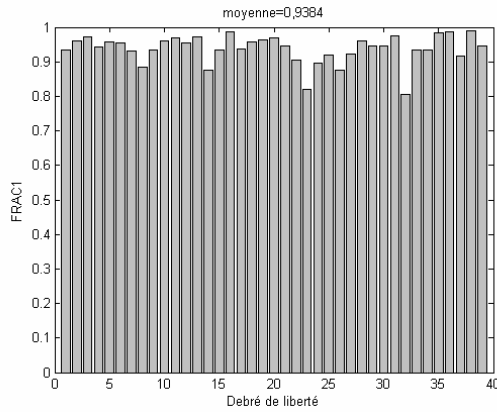


Figure 26. Fonctions FRAC avant recalage (FRAC1)

Appliquons maintenant une à une les deux méthodes de recalage proposées dans le domaine linéaire. Les résultats obtenus sont présentés sur le tableau 6.

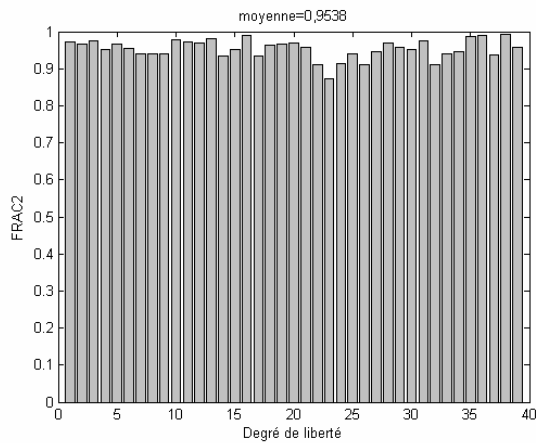


Figure 27. FRAC après recalage des raideurs par la méthode incrémentale (FRAC2)

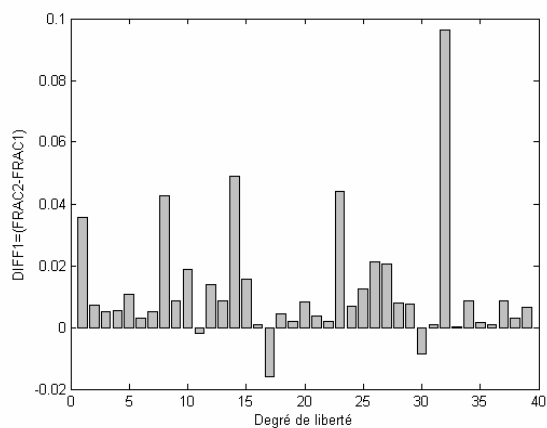


Figure 28. Comparaison avec FRAC1, $DIFF1=(FRAC2-FRAC1)$

La figure 27 et la figure 30 montrent que les méthodes de recalage permettent d'améliorer le coefficient de corrélation FRAC dans les deux cas. La moyenne obtenue des

FRACs pour le recalage par la méthode incrémentale est de 95,38%, il est de 95,00% dans le cas du recalage avec paramétrisation.

La différence entre ces facteurs de corrélation est illustrée sur la figure 28 et la figure 31 qui montrent que les coefficients FRAC ont été améliorés pour la plupart des degrés de liberté de la structure.

Tableau 6. Résultats obtenus avec les deux méthodes de recalage

Eléments	Stratégie incrémentale	Recalage avec paramétrisation
1	0	0,23
2	-0,50	-1,02
3	-0,20	0,19
4	-1,50	-1,87
5	0	0,11
6	1,30	5,90
7	-0,90	-5,42
8	0	-2,26
9	0	1,95
10	-0, 50	0,06
11	0, 10	0,50
12	0	-2,62
13	0	8,01
14	0, 20	-2,73
15	0,42	9,75
16	-10,70	-12,98
17	1,20	0,94
18	-2,60	-0,32
19	2,10	5,44
20	0	-6,06
21	-0,70	2,26
22	0	-6,84
23	0,10	6,51
24	0,40	0,03
25	-0,60	-3,64
26	-0,20	0,03
27	8,90	-,362
28	1,70	7,21
29	0	2,00
30	-1,10	0,13

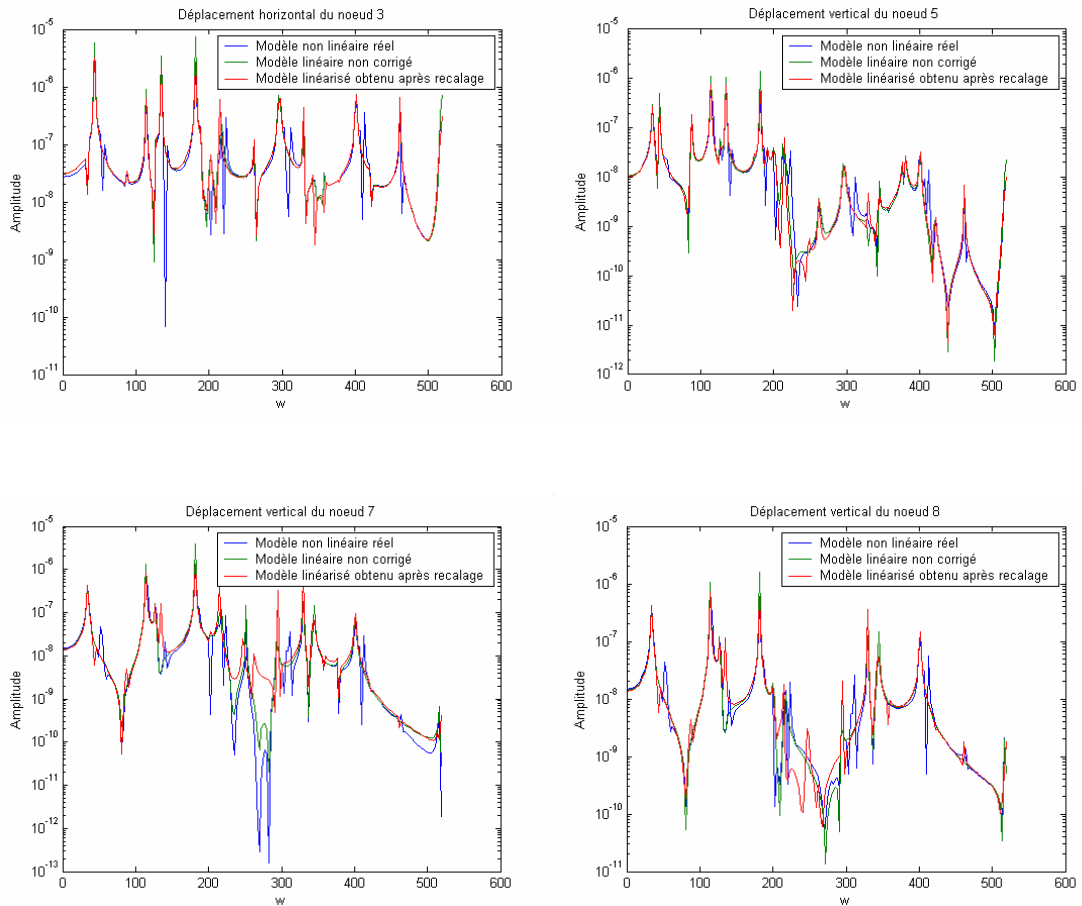


Figure 29. Réponses fréquentielles des ddls 4, 11, 17 et 20 après recalage par la méthode incrémentale

Nous constatons sur les réponses fréquentielles de la figure 29 que les réponses fréquentielles des ddls 4 et 20 ont été améliorées, par contre celle des ddls 11 et 17 ont été légèrement perturbées.

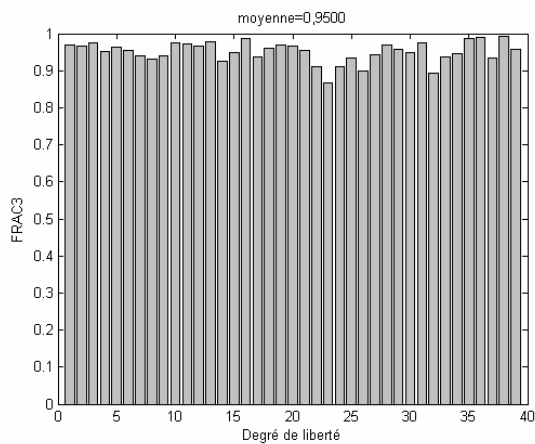


Figure 30. FRAC après recalage des raideurs par la méthode avec paramétrisation

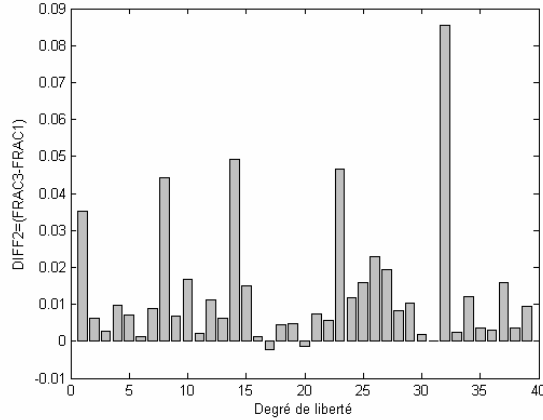


Figure 31. Comparaison avec FRAC1, $DIFF2=(FRAC3-FRAC1)$

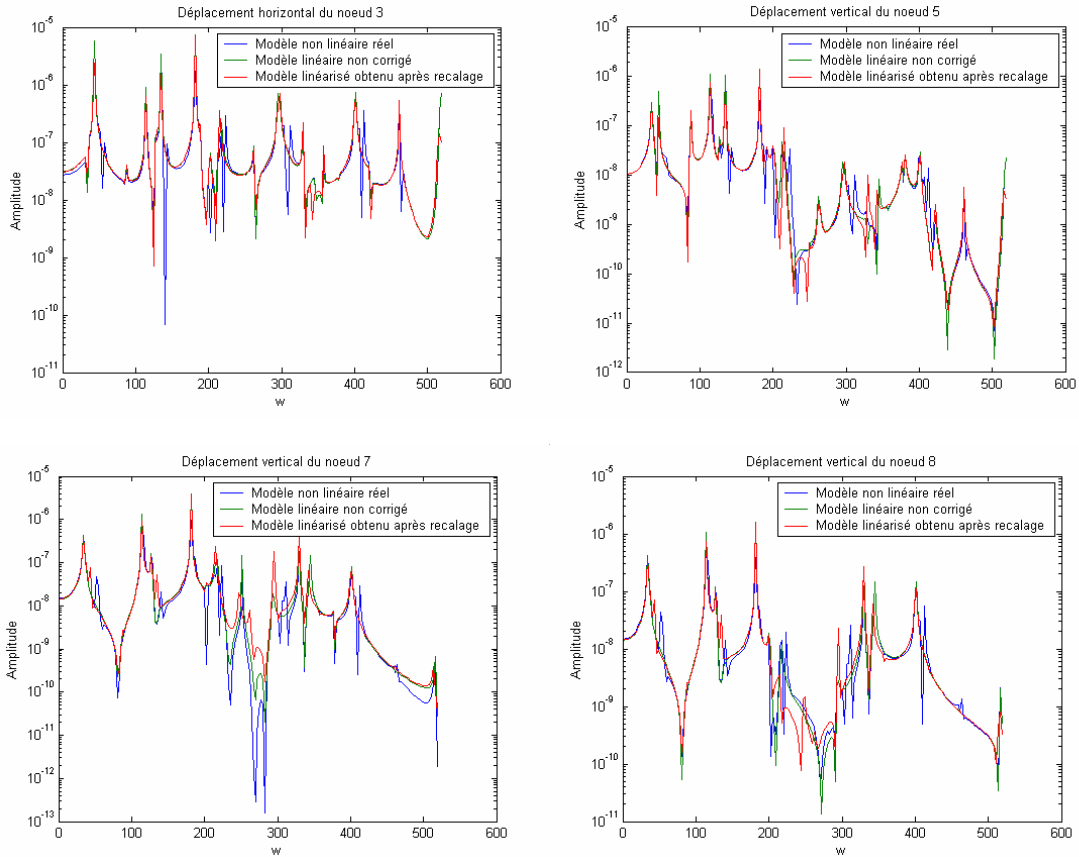


Figure 32. Réponses fréquentielles des ddls 4, 11, 17 et 20 après recalage par la méthode avec paramétrisation

Aussi, nous constatons sur les réponses fréquentielles de la figure 32 que les réponses fréquentielles des ddls 4 et 11 ont été améliorées, par contre celle des ddls 17 et 20 ont été légèrement perturbées.

Remarques :

Quand le système est faiblement non linéaire, les méthodes de recalage de systèmes linéaires peuvent être utilisées pour la linéarisation du modèle.

L'application des méthodes de recalage avec paramétrisation fréquentielle et par stratégie incrémentale montre une amélioration par rapport au système linéaire non recalé.

IV.2 Recalage en présence de non linéarités

Pour compléter notre étude, nous appliquons le processus de recalage sur une structure faiblement non linéaire comportant des défauts de modélisation en masse et en raideur.

Considérons la structure précédente comportant des défauts de raideur de 20% et 30% respectivement aux éléments 9 et 13 ainsi qu'un défaut de masse de -20% sur l'élément 18. Les réponses fréquentielles de la structure « expérimentale » et analytique sont représentées sur la figure 33.

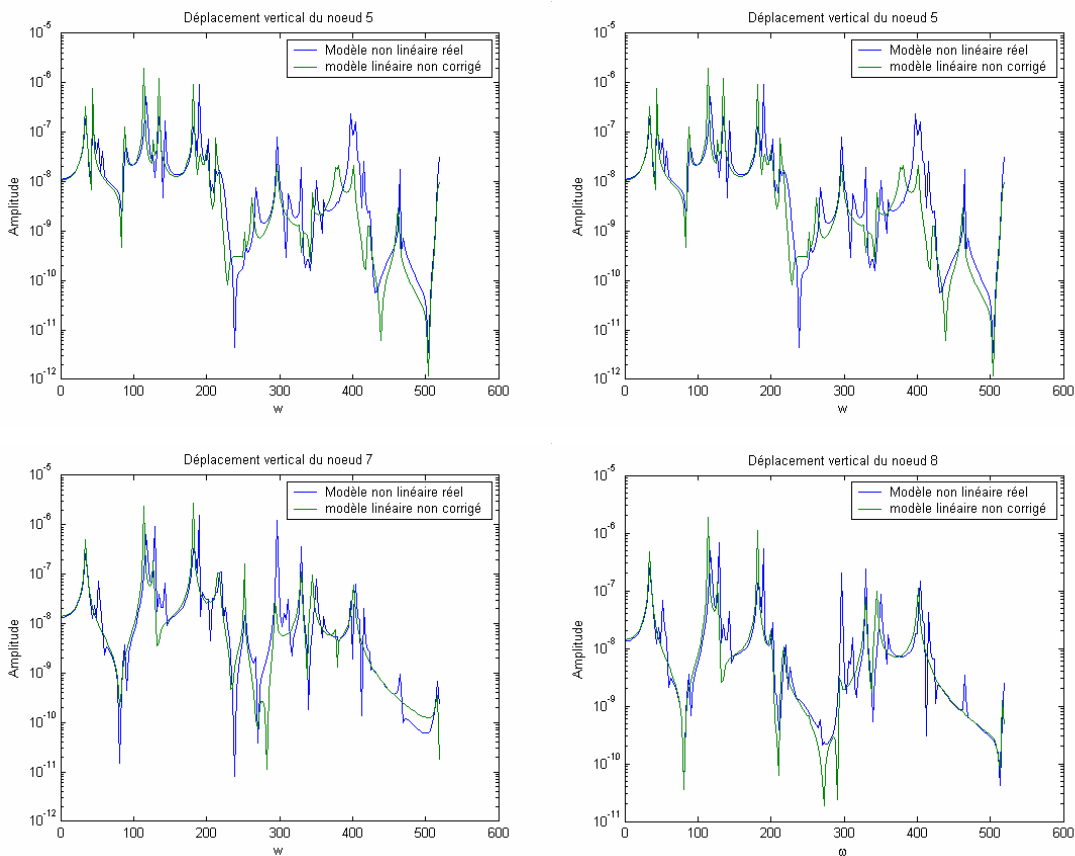


Figure 33. Réponses fréquentielles des structures non linéaire et linéaire avant recalage

Nous constatons que sur la base des seuls ddls représentés sur la figure 33 que les deux systèmes sont très éloignés. Pour évaluer l'éloignement, calculons la fonction de corrélation FRAC. Notons FRAC4 le résultat avant recalage. La moyenne est de l'ordre de 38,14%. Pour cette application la méthode de recalage incrémentale est plus appropriée puisque elle considère la fonction de corrélation FRAC qu'elle améliore à chaque itération. L'application de cette méthode de recalage conduit aux résultats présentés sur le tableau 7, qui montre que seul le défaut de l'élément 13 est détecté. Néanmoins, les deux systèmes linéaires et non linéaires ont une meilleure corrélation (figure 34 et figure 35), FRAC moyen devient 54,78%.

Tableau 7. Résultats obtenus après la stratégie incrémentale de recalage

Eléments	Défauts de raideur	Résultats de recalage	Défauts de masse	Résultats de recalage
1	0	17,00	0	2,80
2	0	-1,80	0	11,30
3	0	-3,20	0	-8,40
4	0	-19,60	0	-19,20
5	0	0	0	1,00
6	0	-2,30	0	0
7	0	-17,30	0	0
8	0	2,70	0	0
9	20	-0,90	0	0
10	0	3,00	0	1,00
11	0	-8,50	0	-0,60
12	0	1,00	0	10,70
13	30	18,00	0	0
14	0	0,10	0	0
15	0	-4,20	0	0
16	0	-1,10	0	0
17	0	1,10	0	10,60
18	0	8,30	-20	0
19	0	7,00	0	0
20	0	-8,40	0	0
21	0	0	0	1,00
22	0	0,70	0	0
23	0	12,70	0	0
24	0	1,80	0	-9,30
25	0	8,70	0	0
26	0	0	0	0
27	0	7,60	0	-0,40
28	0	-6,10	0	-29,90
29	0	-3,40	0	4,70
30	0	-3,10	0	0

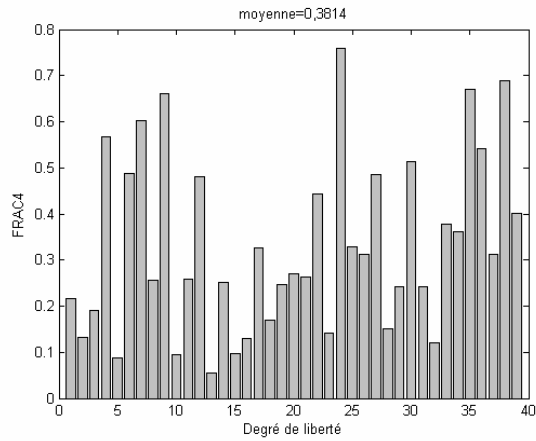


Figure 34. Fonction FRAC avant recalage FRAC4

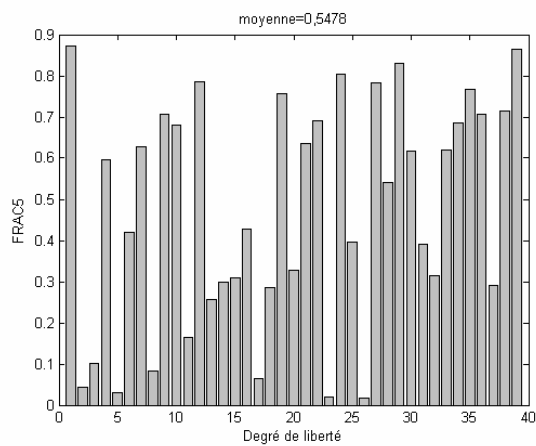


Figure 35. FRAC après recalage par la méthode incrémentale

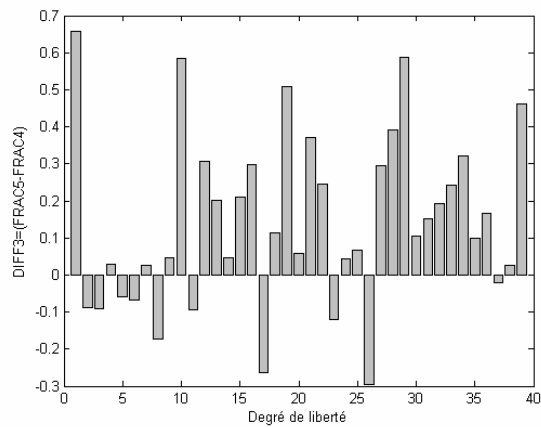


Figure 36. Comparaison des fonctions FRAC après recalage

Nous constatons que le recalage dans ce cas est plus complexe et que beaucoup de réponses fréquentielles sont mal corrélées (Figure 36). La figure 37 représentant les réponses fréquentielles des ddl 4, 11, 17 et 20 montre que même si la corrélation globale s'est

améliorée, les réponses fréquentielles des ddl 4, 11 et 17 sont plus éloignées qu'avant le recalage, seule la réponse du ddl 20 s'est améliorée.

Le résultat global de la technique de recalage est satisfaisant même s'il ne détecte les défauts de modélisation. Cette technique de recalage est un outil très utile pour la linéarisation de systèmes non linéaires qui peuvent comporter des défauts de modélisation.

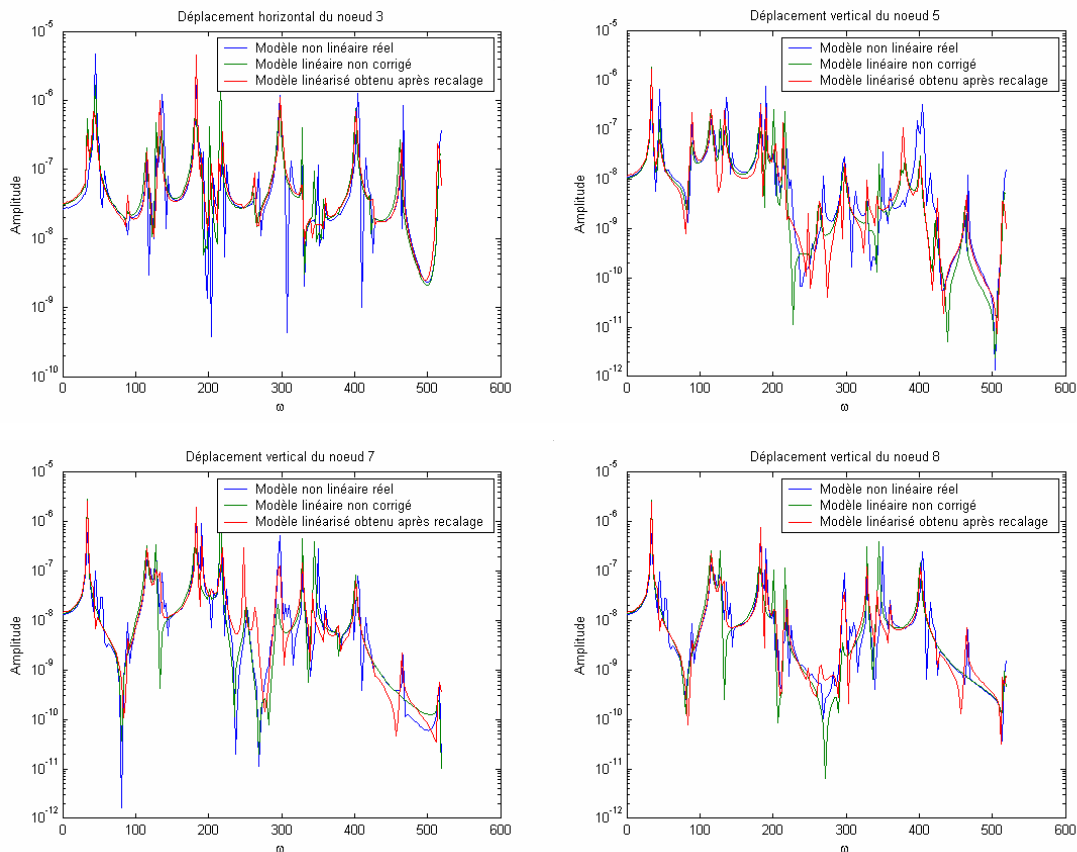


Figure 37. Réponses fréquentielles des ddl 4, 11, 17 et 20 après recalage par la stratégie incrémentale

IV.3 Conclusion

L'application des méthodes de recalage linéaires à la linéarisation des systèmes non linéaires montre une efficacité appréciable lorsque le comportement du système reste dans l'hypothèse des petits déplacements et d'une non linéarité faible. Son application au cas de systèmes non linéaires comportant des défauts de modélisation est appréciée en tant que méthode de linéarisation mais pas en tant que méthode de recalage non linéaire, car la procédure améliore la représentation dynamique du système mais ne localise pas les défauts.

En fin, la méthode la plus appropriée pour la linéarisation de systèmes faiblement non linéaires reste la méthode de recalage incrémentale, qui se base sur l'amélioration de la moyenne des FRAC entre le modèle analytique et les mesures, et ce à chaque itération.

FORMULATION NON LINEAIRE PROPOSEE

V.1 Non linéarités de raideur	122
V.2 Non linéarités d'amortissement	124
V.3 Forme générale des non linéarités dans le domaine temporel	125
V.4 Méthode d'identification proposée	126
V.4.1 Résolution de l'équation du mouvement par schéma numérique	126
V.4.2 Application	130
V.4.2.1 Cas du système à un ddl	130
V.4.2.2 Cas du système à plusieurs ddls	132
V.4.2.3 Remarques	134

V FORMULATION NON LINEAIRE PROPOSEE

La formulation non linéaire précédente représente une approximation du comportement non linéaire dans le domaine fréquentiel ; La formulation ainsi obtenue permet de regrouper la partie linéaire et une approximation de la partie non linéaire dans une formulation matricielle MNL et vectorielle VNL. Ceci permet dans le cas de l'identification, à corriger simultanément les non linéarités et les défauts mal estimés.

Examinons maintenant le cas de systèmes non linéaires dans le domaine temporel.

V.1 Non linéarités de raideur

Les non linéarités de raideur peuvent provenir de deux causes différentes ; soit il existe dans la structure étudiée des termes purement non linéaires dans la modélisation de la raideur, soit celle-ci reste constante sur des plages données de déplacements. De façon générale, on écrit que le système vérifie :

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + \kappa(y(t)) = f(t) \quad (231)$$

où κ décrit la non linéarité de raideur.

Raideurs polynomiales : La non linéarité peut provenir du fait que les forces de rappel du système sont des fonctions polynomiales du déplacement, de degré 2 au moins. L'exemple le plus couramment étudié est l'oscillateur Duffing, pour lequel

$$\kappa(y(t)) = ky(t) + k_3y^3(t) \quad (232)$$

où k_3 peut être positif ou négatif :

- si $k_3 > 0$, le système est dit *rigidifiant* « *hardening* », car pour des hauts niveaux d'excitation, la force de rappel est plus grande que pour un système de raideur linéaire ;
- si $k_3 < 0$, le système est dit *adoucissant* « *softening* », mais il faut noter que ce système n'a pas de sens physique tel quel, car l'adoucissement fait que le signe de la force de rappel change à partir d'un certain point ; en pratique, le terme cubique est toujours accompagné de termes d'ordre supérieur avec des coefficients positifs.

On peut voir une représentation de la force de rappel en fonction du déplacement pour chacun de ces cas dans la figure 38.

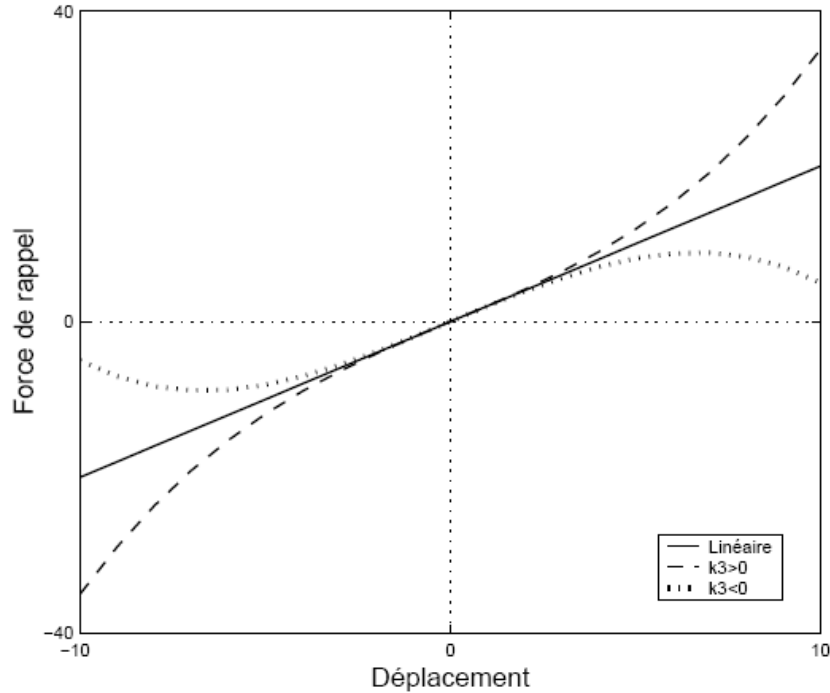


Figure 38. Force de rappel de l'oscillateur duffing

L'exemple qui aurait pu paraître a priori le plus simple est celui de la **raideur quadratique**, qui est tel que

$$\kappa(y(t)) = ky(t) + k_2 y^2(t) \quad (233)$$

Mais comme ce système devient instable quand le niveau d'excitation est trop élevé, on préfère remplacer la raideur quadratique par un terme de la forme $k_2 y(t)|y(t)|$, et alors l'étude est similaire à celle de l'oscillateur duffing, quoique légèrement plus complexe à mener.

Raideurs multilinéaires : La non linéarité peut être provoquée par des forces de rappel qui sont des fonctions linéaires du déplacement, de pentes différentes suivant la zone de déplacements dans laquelle la structure évolue. Un premier exemple concerne le cas de la **raideur bilinéaire** : la raideur du système est différente selon qu'il est sollicité en traction ou en compression, comme ce qui est observé chez les absorbeurs de chocs

$$\kappa(y(t)) = \begin{cases} k_1 y(t) & \text{si } y > 0 \\ k'_1 y(t) & \text{si } y < 0 \end{cases} \quad (234)$$

Deux autres cas de figures sont ceux dits *saturation* et *dégagement* qui vérifient

$$\kappa(y(t)) = \begin{cases} k'_1 y(t) + (k_1 - k'_1)d & \text{si } y > d \\ k_1 y(t) & \text{si } |y| < d \\ k'_1 y(t) - (k_1 - k'_1)d & \text{si } y < -d \end{cases} \quad (235)$$

avec $k_1' = 0$ pour la *saturation*.

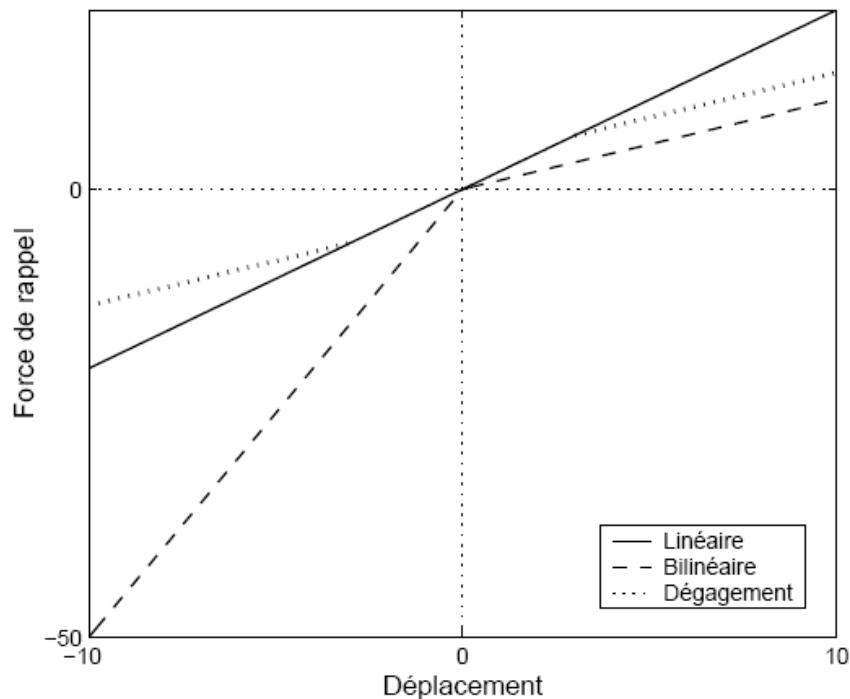


Figure 39. Force de rappel dans le cas de raideurs multilinéaires

Il s'agit en fait d'un système linéaire, sur lequel s'ajoute ou se soustrait une raideur additionnelle, nulle sur un certain domaine de déplacements $[-d, +d]$; on rencontre ce comportement dans les assemblages tels que ceux de l'industrie aéronautique : avec $k_1=0$ et k_2 « très grand », on traduit une condition de type contact.

La figure 39 résume les exemples précédents.

V.2 Non linéarités d'amortissement

De même que pour la raideur, les non linéarités d'amortissement relèvent de deux causes principales, et l'écriture générale de l'équation d'équilibre est

$$m\ddot{y}(t) + \chi(\dot{y}(t)) + ky(t) = f(t) \quad (236)$$

où χ décrit la non linéarité d'amortissement.

Amortissement polynomial : L'exemple le plus courant est celui du frottement fluide à grande vitesse, qui vérifie

$$\chi(\dot{y}(t)) = b\dot{y}(t) + b_2\dot{y}(t)|\dot{y}(t)| \quad (237)$$

terme qui traduit l'action d'un fluide en écoulement rapide autour d'un objet solide.

Amortissement multilinéaire : Le cas de figure essentiel est le frottement de Coulomb, que l'on peut modéliser par :

$$\chi(\dot{y}(t)) = b_f \text{sgn}(\dot{y}(t)) \quad (238)$$

Généralement, il est accompagné du phénomène de *dégagement* propre au contact. Il faut d'ailleurs noter que, contrairement à la plupart des systèmes non linéaires, les effets du frottement de Coulomb ne sont vraiment sensibles que pour de faibles niveaux d'excitation. Pour des forces importantes, l'effet du frottement devient négligeable, et le système a un comportement pratiquement linéaire.

V.3 Forme générale des non linéarités dans le domaine temporel

La forme la plus générale des non linéarités est la combinaison des équations (231) et (232) qui donnent

$$m\ddot{y}(t) + \chi(\dot{y}(t)) + \kappa(y(t)) = f(t) \quad (239)$$

En comparant cette dernière à l'équation (184) nous obtenons :

$$v(y(t), \dot{y}(t)) = b\dot{y}(t) + ky(t) + f_{NL}(y(t), \dot{y}(t)) = \chi(\dot{y}(t)) + \kappa(y(t)) \quad (240)$$

Notons que $v(y(t), \dot{y}(t))$ comporte les parties linéaires et non linéaires d'amortissement et de raideur, forme intéressante dans le cas de l'identification simultanée de défauts de modélisation linéaire et non linéaire.

D'une manière générale nous pouvons écrire

$$v(y(t), \dot{y}(t)) = (b_0 + b_1\dot{y}(t) + b_2\dot{y}^2(t)) + (k_0 + k_1y(t) + k_2y^2(t) + k_3y^3(t)) \quad (241)$$

Dans le cas de systèmes à plusieurs degrés de liberté, cette équation doit s'appliquer à tous les ddl. En considérant les non linéarités possibles et générales, nous obtenons en généralisant l'équation (241)

$$v_\sigma(y(t), \dot{y}(t)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=0}^2 \sum_{l=0}^1 \mu_{\sigma kl ij} y_i^k(t) y_j^l(t) + \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \eta_{\sigma kl ij} \dot{y}_i^k(t) \dot{y}_j^l(t) \right), \sigma=1, n \quad (242)$$

avec

$$M \{\ddot{y}\} + \{v(y, \dot{y})\} = \{F\} e^{i\omega t} \quad (243)$$

Pour le système à 1 ddl : $\sigma=1, i=1$ et $j=1$

$$v(y(t), \dot{y}(t)) = \sum_{k=0}^2 \sum_{l=0}^1 \mu_{kl} y^{k+l}(t) + \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \eta_{kl} \dot{y}^{k+l}(t) \quad (244)$$

Cette formulation nous permet de focaliser les non linéarités aux paramètres μ et η qui identifient complètement l'amortissement et la raideur du système avec leurs parties linéaire et non linéaire. Cette stratégie est la base de la méthode d'identification proposée dans le domaine non linéaire.

V.4 Méthode d'identification proposée

La méthode proposée consiste à exploiter la représentation générale explicite présentée dans le domaine temporel. Pour cela nous utilisons l'approximation au sens des moindres carrés pour la détection de défauts et l'identification des paramètres non linéaires. Pour ce faire, un ensemble de mesures est nécessaire. Le problème consiste alors à minimiser l'erreur entre les réponses temporelles mesurées et analytiques

$$\{e(t)\} = \{y^{(m)}(t)\} - \{y^{(c)}(\mu, \eta, t)\} \quad (245)$$

La réponse analytique $\{y^{(c)}(\mu, \eta, t)\}$, est déterminée à partir de l'équation du mouvement (231) en utilisant l'algorithme de Runge-Kutta pour la résolution des systèmes d'équations non linéaires. La mesure $\{y^{(m)}(t)\}$ étant effectuée à l'instant t . Le système est complètement déterminé lorsque les paramètres $\{\mu\}$ et $\{\eta\}$ sont identifiés.

L'erreur à minimiser par la méthode des moindres carrés est

$$\delta = \sum_{t=t_0}^{t_f} (\{e(t)\}^T \{e(t)\}) \quad (246)$$

V.4.1 Résolution de l'équation du mouvement par schéma numérique

Dans cette partie nous étudions le problème de l'intégration numérique de l'équation différentielle du mouvement.

Une équation différentielle d'ordre n s'écrit sous la forme générale suivante

$$\begin{cases} f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0) \text{ valeur initiales} \end{cases} \quad (247)$$

Il existe une fonction φ tel que le problème (247) puisse être équivalent à

$$y^{(m)} = \varphi(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \quad (248)$$

En effectuant un changement de variable, l'équation (247) et la forme (248) donnent un système du premier ordre équivalent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = y_1 \\ \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \vdots \\ \frac{dy_{m-2}}{dx} = y_{m-1} \\ \frac{dy_{m-1}}{dx} = \varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}) \end{array} \right. \quad (249)$$

Ce qui peut être écrit

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y), \text{ avec } Y(x_0) = Y_0, \text{ valeur initiale et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{pmatrix} \quad (250)$$

L'intervalle de variation de x est divisé en un nombre fini de valeurs n par pas h appelé pas d'intégration numérique, avec $x_{n+1} = x_n + h$. On note y_n une approximation de la solution exacte $y(x_n)$ et $y^{(i)}$ une approximation de la solution exacte de $y^{(i)}(x_n) = \frac{d^i y(x_n)}{dx^i}$.

Parmi les méthodes de Runge-Kutta à quatre approximations qui sont en nombre infini, deux d'entre elles sont utilisées en pratique

Premier schéma

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{8} \{K_1 + 3K_2 + 3K_3 + K_4\} \\ K_1 = hF(x_n, y_n) \\ K_2 = hF\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{K_1}{3}\right) \\ K_3 = hF\left(x_n + \frac{2h}{3}, y_n - \frac{K_1}{3} + K_2\right) \\ K_4 = hF(x_n + h, y_n + K_1 - K_2 + K_3) \end{array} \right. \quad (251)$$

Deuxième schéma

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} \{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\} \\ K_1 = hF(x_n, y_n) \\ K_2 = hF\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}\right) \\ K_3 = hF\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2}{2}\right) \\ K_4 = hF(x_n + h, y_n + K_3) \end{array} \right. \quad (252)$$

L'erreur systématique au voisinage de x_n est égale à $E^{(n)} = \frac{y_{n+1}^{(h)} - y_{n+1}^{2h}}{2(2^r - 1)}$, r entier naturel égal au nombre d'approximations, ici égal à 4.

A partir de la quatrième itération, on utilisera les méthodes à pas liés de la forme

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^p a_i y_{n-i} + h \sum_{i=0}^p \alpha_i y'_{n-i} \quad (253)$$

Parmi ces méthodes, on distingue les méthodes explicites ou de type ouvert, les prédicteurs et les méthodes implicites ou de type fermé, les correcteurs.

Méthode explicite d'Adams (prédicteur)

p	$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=0}^p \alpha_i y'_{n-i}$	$E^{(n+1)}$
0	$y_{n+1} = y_n + h y'_n$	$\frac{1}{2} h^2 y^{(2)}(\xi)$
1	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (3y'_n - y'_{n-1})$	$\frac{5}{12} h^3 y^{(3)}(\xi)$
2	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} (23y'_n - 16y'_{n-1} + 5y'_{n-2})$	$\frac{2}{8} h^4 y^{(4)}(\xi)$
3	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3})$	$\frac{251}{720} h^5 y^{(5)}(\xi)$
4	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720} \left(1901y'_n - 2774y'_{n-1} + 2616y'_{n-2} - 1274y'_{n-3} + \right. \\ \left. + 251y'_{n-4} \right)$	$\frac{95}{288} h^6 y^{(6)}(\xi)$
5	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{1440} \left(4277y'_n - 7923y'_{n-1} + 9982y'_{n-2} - 7298y'_{n-3} + \right. \\ \left. + 2877y'_{n-4} - 475y'_{n-5} \right)$	$\frac{19087}{60480} h^7 y^{(7)}(\xi)$

Sachant que $\xi \in (x_{n-p}, x_{n+1})$

Méthode explicite de Milne (prédicteur)

$$\begin{array}{ll}
 p & y_{n+1} = y_{n-p} + h \sum_{i=0}^p \alpha_i y'_{n-i} \qquad E^{(n+1)} \\
 0 & y_{n+1} = y_n + h y'_n \qquad \frac{1}{2} h^2 y^{(2)}(\xi) \\
 1 & y_{n+1} = y_{n-1} + 2h(3y'_n + 0y'_{n-1}) \qquad \frac{1}{3} h^3 y^{(3)}(\xi) \\
 2 & y_{n+1} = y_{n-2} + \frac{h}{4}(9y'_n + 0y'_{n-1} + 3y'_{n-2}) \qquad \frac{3}{8} h^4 y^{(4)}(\xi) \\
 3 & y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}(2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2} + 0y'_{n-3}) \qquad \frac{14}{45} h^5 y^{(5)}(\xi) \\
 4 & y_{n+1} = y_{n-4} + \frac{h}{144}(425y'_n - 350y'_{n-1} + 600y'_{n-2} - 50y'_{n-3} + 95y'_{n-4}) \qquad \frac{95}{288} h^6 y^{(6)}(\xi) \\
 5 & y_{n+1} = y_{n-5} + \frac{3h}{10}(11y'_n - 14y'_{n-1} + 26y'_{n-2} - 14y'_{n-3} + 11y'_{n-4} + 0y'_{n-5}) \qquad \frac{41}{140} h^7 y^{(7)}(\xi)
 \end{array}$$

Méthode implicite d'Adams (correcteur)

$$\begin{array}{ll}
 p & y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=0}^p \alpha_i y'_{n-i} \qquad E^{(n+1)} \\
 0 & y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(y'_{n+1} - y'_n) \qquad -\frac{1}{12} h^3 y^{(3)}(\xi) \\
 1 & y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5y'_{n+1} + 8y'_n - y'_{n-1}) \qquad -\frac{1}{24} h^4 y^{(4)}(\xi) \\
 2 & y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9y'_{n+1} + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2}) \qquad -\frac{9}{720} h^5 y^{(5)}(\xi) \\
 3 & y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720}(251y'_{n+1} + 646y'_n - 264y'_{n-1} + 105y'_{n-2} - 19y'_{n-3}) \qquad -\frac{3}{130} h^6 y^{(6)}(\xi) \\
 4 & y_{n+1} = y_n + \frac{h}{1440} \begin{pmatrix} 475y'_{n+1} + 1427y'_n - 798y'_{n-1} + \\ 482y'_{n-2} - 173y'_{n-3} + 27y'_{n-4} \end{pmatrix} \qquad -\frac{863}{60480} h^7 y^{(7)}(\xi)
 \end{array}$$

Méthode implicite de Milne (correcteur)

$$\begin{array}{ll}
 p & y_{n+1} = y_{n-p} + h \sum_{i=0}^p \alpha_i y'_{n-i} \quad E^{(n+1)} \\
 0 & y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (y'_{n+1} + y'_{n-1}) \quad -\frac{1}{12} h^3 y^{(3)}(\xi) \\
 1 & y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3} (y'_{n+1} + 4y'_n + y'_{n-1}) \quad -\frac{1}{90} h^4 y^{(4)}(\xi) \\
 2 & y_{n+1} = y_{n-2} + \frac{3h}{8} (y'_{n+1} + 3y'_n + 3y'_{n-1} + y'_{n-2}) \quad -\frac{3}{80} h^5 y^{(5)}(\xi) \\
 3 & y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{2h}{45} (7y'_{n+1} + 32y'_n + 12y'_{n-1} + 32y'_{n-2} + 7y'_{n-3}) \quad -\frac{8}{945} h^6 y^{(6)}(\xi) \\
 4 & y_{n+1} = y_{n-4} + \frac{5h}{288} (19y'_{n+1} + 75y'_n + 50y'_{n-1} + 50y'_{n-2} + 75y'_{n-3} + 19y'_{n-4}) \quad -\frac{275}{12096} h^7 y^{(7)}(\xi)
 \end{array}$$

Pour les applications, nous avons choisi le deuxième schéma de Runge-Kutta à quatre approximations suivi du prédicteur – correcteur de Milne.

V.4.2 Application

V.4.2.1 Cas du système à un ddl

Considérons le système non linéaire à un degré de liberté de la figure 40. On désire identifier le paramètre non linéaire de raideur k_{nl} .

L'équation du mouvement est de la forme

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + v(y, \dot{y}) = F_0 \cos(\Omega t) \quad (254)$$

$$\text{avec} \quad v(y, \dot{y}) = (b_2 \dot{y}^2 + b_1 \dot{y} + b_0) + (k_3 y^3 + k_2 y^2 + k_1 y + k_0) \quad (255)$$

Pour cette application, nous nous limitons à l'identification de non linéarités sans existence de défauts, ce qui nous limite au cas où $b_1 = k_1 = 0$, la partie non linéaire s'écrit alors

$$v(y, \dot{y}) = (b_2 \dot{y}^2 + b_0) + (k_3 y^3 + k_2 y^2 + k_0) \quad (256)$$

Données : $m=3\text{kg}$, $c=0,3\text{mN/s}$, $k=1\text{kN/m}$, $F_0=2,5$, $\Omega=1\text{rad/s}$, $k_{nl}=0,05\text{kN/m}^3$, $y_0=0,04\text{m}$, $\dot{y}_0 = 0,55 \text{ m/s}$

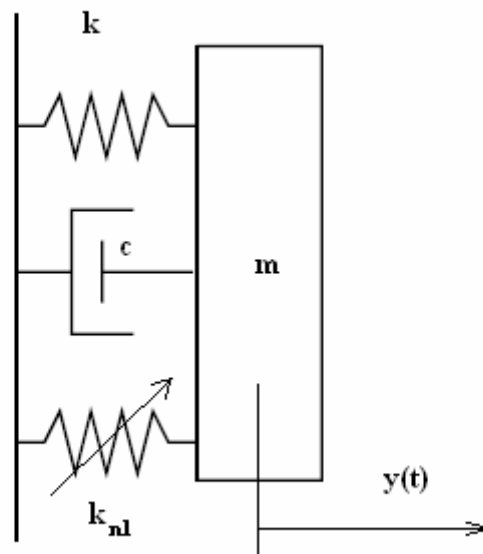


Figure 40. Système à un degré de liberté à non linéarité de raideur

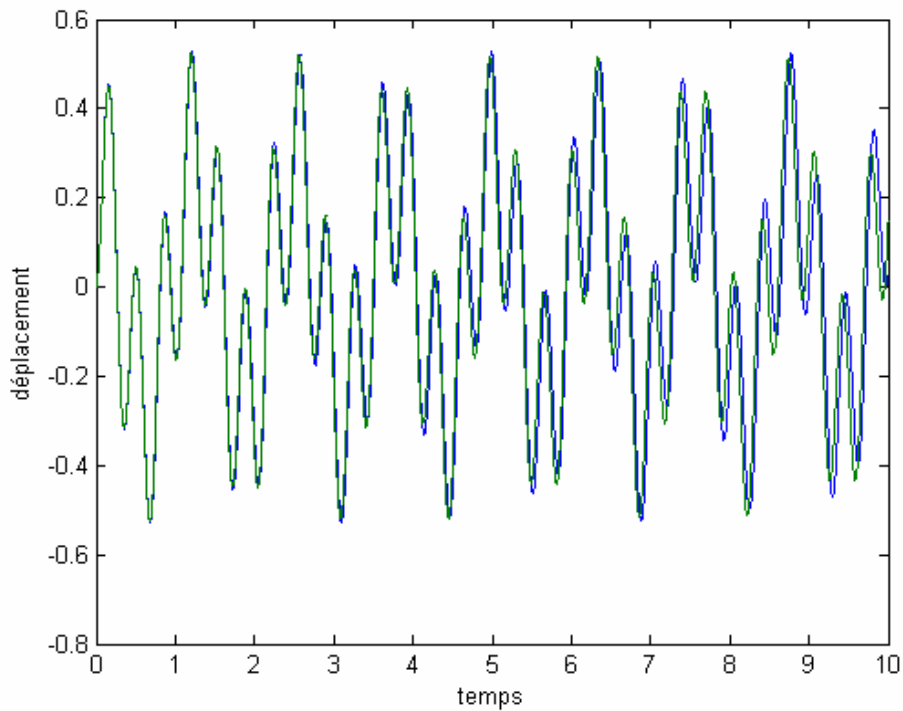


Figure 41. Réponse temporelle des systèmes linéaire et non linéaire

La réponse temporelle dans l'intervalle temps $[0, 10]$ est représentée par la figure 41

Pour la résolution du problème, les constantes b_0 et k_0 qui n'ont pas de sens physique sont aussi supprimées, aussi nous devons choisir entre une non linéarité de raideur cubique ou carrée. En fin, la fonction non linéaire se limite à

$$v(y, \dot{y}) = b_2 \dot{y}^2 + k_3 y^3$$

Le problème se résume donc à rechercher par minimisation de l'erreur (246), les coefficients b_2 et k_3 .

Les résultats exploitant des mesures entre $t=0s$ et $t=5s$, donnent

$$b_2 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ mN/s}, \text{ et } k_3 = 0,0472 \text{ kN/m}^3.$$

Nous constatons que la non linéarité de raideur cubique a été détectée avec une présence d'une non linéarité quadratique d'amortissement très faible.

V.4.2.2 Cas du système à plusieurs ddls

Considérons le système non linéaire à quatre degrés de liberté ci-dessous. On désire identifier le paramètre non linéaire de raideur k_{nl} .

L'équation du mouvement est de la forme

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky + v(y, \dot{y}) = F \quad (257)$$

avec
$$v_\sigma(y, \dot{y}) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \left(\sum_{k=0}^2 \sum_{l=0}^1 \mu_{\sigma klij} y_i^k y_j^l + \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \eta_{\sigma klij} \dot{y}_i^k \dot{y}_j^l \right), \sigma=1,4 \quad (258)$$

Pour cette application, nous nous limitons à l'identification de non linéarités sans existence de défauts, ce qui nous limite au cas où $\mu_{\sigma 0lij} = \mu_{\sigma 10ij} = \eta_{\sigma 0lij} = \eta_{\sigma 10ij} = 0$.

Données : $m_i=3\text{kg}$, $c_i=0,3 \text{ mN/s}$, $k_1=k_4=1\text{kN/m}$, $k_2=k_3=0,8\text{kN/m}$ et $k_{nl}= 0,1\text{kN/m}^3$

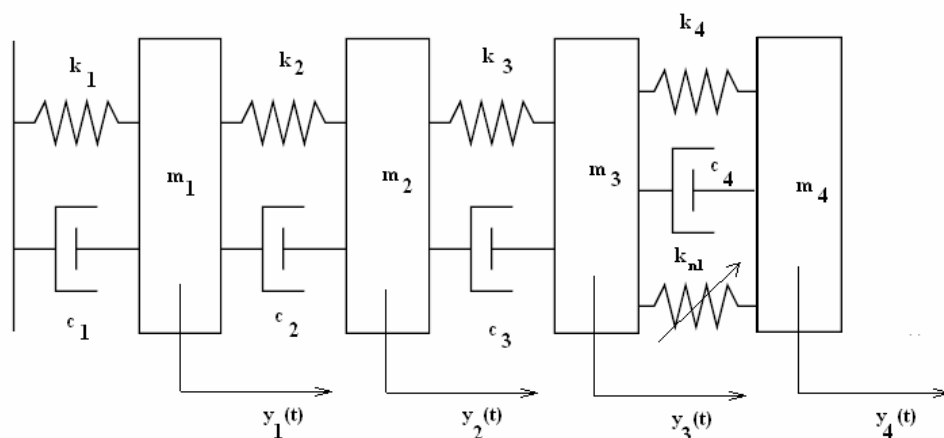


Figure 42. Système à quatre degrés de liberté à non linéarité de raideur

La réponse temporelle dans l'intervalle temps $[0, 5]$ est représentée par la figure 43

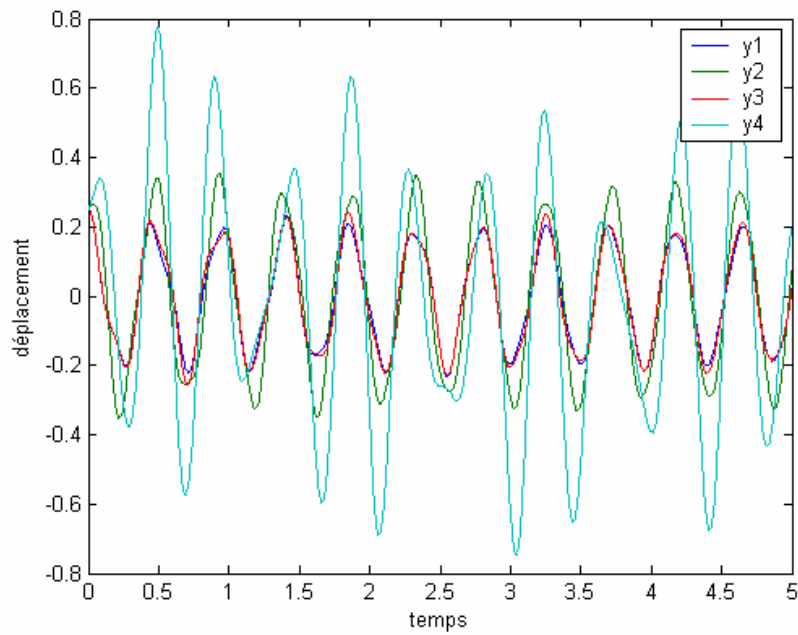


Figure 43. Réponse temporelle du système à 4 ddl

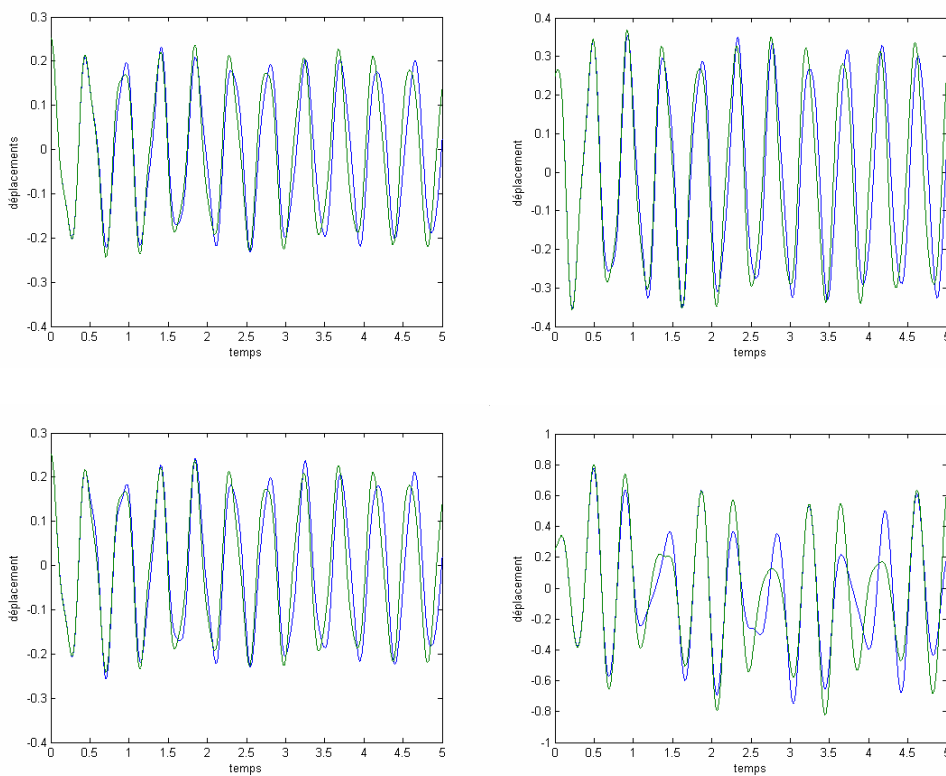


Figure 44. Représentation du décalage dû à la non linéarité

Pour ce qui est de ce système, on considère qu'il existe des non linéarités de raideur cubique entre toutes les masses. La fonction non linéaire se réduit alors à

$$v_{\sigma}(y(t), \dot{y}(t)) = \sum_{i=1}^4 k_{nl_i} y_i^3, \sigma=1,4$$

Les résultats obtenus permettent d'identifier et de localiser le paramètre non linéaire

$$k_{nl1}=0,00943\text{kN/m}^3, k_{nl2}=0,0078\text{kN/m}^3, k_{nl3}=0,0111\text{kN/m}^3, k_{nl4}=0,0851\text{kN/m}^3.$$

ce qui est illustré sur la figure suivante

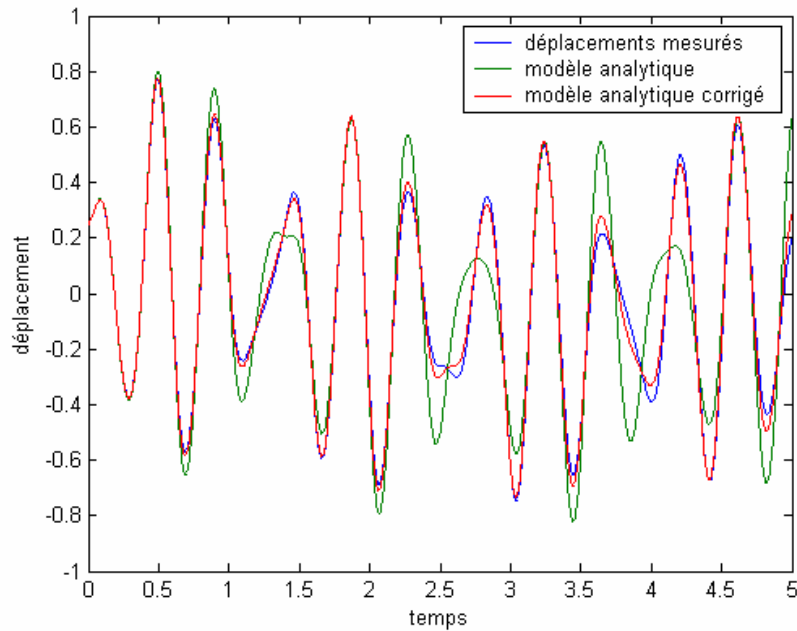


Figure 45. Comparaison de réponses temporelles après correction pour le ddl 4

La figure 45 montre que les non linéarités de raideur ont été bien quantifiées.

V.4.2.3 Remarques

Une méthode d'identification de non linéarités de raideur et d'amortissement a été proposée. Celle-ci est basée sur la formulation non linéaire proposée dans le domaine temporel. Cette représentation globale permet de résoudre mathématiquement un problème non linéaire, mais elle risque de donner des résultats qui donnent une réponse temporelle très proche des mesures mais physiquement incorrects. Pour remédier à cela, on doit changer de configuration initiale supposée, c'est-à-dire réduire le nombre d'inconnues.

Quelquefois et quand le vecteur non linéaire est choisi sous sa forme générale le système d'intégration diverge. Néanmoins, dans le cas de petits déplacements, les résultats d'identification des non linéarités pour les systèmes discrets sont satisfaisants.

CONCLUSION

CONCLUSION

Basé sur la recherche entreprise dans le cadre de cette thèse une liste de conclusions est formulée et discutée, l'étude entreprise nous conduit en fin de parcours à des suggestions qui peuvent s'avérer d'un intérêt pour un travail ultérieur.

Les conclusions suivantes sont tirées des études effectuées dans cette thèse.

- 1- Les fonctions de corrélations permettent de donner un aperçu de la précision d'un modèle. Elles font une comparaison entre les mesures expérimentales et les valeurs prédites par le modèle EF. Une variété de fonctions existe. Le critère d'assurance modal (Modal Assurance Criterion MAC) reste le plus utilisé même si beaucoup de facteurs sont apparus ; mais quand le bruit de mesure est grand et pour plus de précision on utilise les corrélations dans le domaine fréquentiel. L'utilisation des fonctions de réponse fréquentielle FRF au lieu des modes propres est plus efficace puisque les FRFs sont directement obtenues expérimentalement alors que les modes nécessitent des calculs se basant sur celles-ci. Ce passage des FRFs aux modes fait intervenir donc des erreurs de calcul supplémentaires. Par conséquent le FDAC et le FRAC sont les plus appropriés. Néanmoins, le problème du meilleur critère de corrélation n'est pas définitivement réglé.
- 2- Dans le cas des techniques de réduction et d'expansion, la méthode de condensation statique de Guyan présentée en 1965 reste la plus utilisée. Néanmoins, compte tenu de l'étude effectuée nous conseillons l'utilisation de la technique améliorée de réduction de système (Improved Reduced System IRS). Cette technique améliore la précision de la condensation statique en compensant les effets de la masse. Pour l'expansion la méthode IRS est tout aussi efficace.
- 3- La planification des tests modaux pour l'identification paramétrique suppose un bon choix de points de mesure et de points d'excitation. Dans ce domaine les méthodes dites indépendance effective basées sur la matrice de Fischer sont particulièrement efficaces. Le choix des points d'excitation reste un travail à enrichir puisqu'il n'existe que quelques méthodes basées sur l'excitation du maximum de modes existant dans la bande fréquentielle de mesure. Notre contribution dans cette partie de l'étude porte sur la proposition d'une méthode de choix des points de mesure utilisant la dérivée première de la réponse fréquentielle du mouvement. Testée dans le cas de la détection de défauts dans une structure en treillis doublement encastrée

dont les défauts et le comportement dynamique ont été simulés numériquement, la méthode montre de bonnes possibilités. Les résultats des tests effectués montre l'efficacité de la méthode proposée. Compte tenu de la matrice de sensibilité utilisée, cette méthode est adéquate pour les applications de détection de défauts mécaniques dans les structures. L'efficacité de cette méthode dépend directement des valeurs des fréquences choisies $\{\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_s\}$ dans la bande fréquentielle. Le nombre de mesures est aussi un paramètre à optimiser pour rendre la méthode facilement utilisable dans le cas de l'identification en dynamique.

- 4- Une méthode de recalage de modèle éléments finis basée sur les fonctions de réponse fréquentielle a été proposée. La convergence du système dépend du choix et de la qualité des mesures. Pour améliorer le conditionnement de la matrice Jacobiënne, il est essentiel d'éviter de rapprocher les mesures très près des pics de résonance dans le cas de la structure réelle et du modèle corrigé de la structure à chaque itération ; Pour cela, il est important de déterminer à chaque itération, les fréquences de résonance du système recalé pour éliminer les mesures proches de celles-ci. Aidée par la paramétrisation intrinsèque proposée qui choisie la plus petite distance à minimiser la méthode développée montre de bonnes propriétés de convergence. Dans le cas où le nombre de points de mesures est incomplet, la paramétrisation intrinsèque proposée peut aider le processus de recalage à converger. Elle peut aussi réduire l'influence du bruit.
- 5- Une autre méthode de recalage de modèle éléments finis utilisant l'approximation non linéaire des moindres carrés dans le domaine fréquentiel a été proposée. Celle-ci utilise une minimisation préliminaire qui considère la plus petite distance entre la FRF analytique et celle mesurée dans le but d'affecter une valeur à la fréquence analytique correspondant à la fréquence de mesure choisie. Souvent les paramètres de masse qui sont de second ordre en fréquence compensent les erreurs de raideur dans les méthodes de recalage, dans notre cas, la séparation des variables rend possible le choix de mesures différentes pour chacune des étapes du recalage, avantage très utile pour éviter le phénomène de compensation. Comme pour la méthode précédente, la difficulté réside dans le choix des fréquences de mesures évitant les divergences brusques du système itératif. Il faudrait aussi éviter les pics de résonance qui risquent de causer un mauvais conditionnement des matrices Jacobiënne et donc une instabilité numérique. La méthode ainsi présentée aidée par la paramétrisation fréquentielle montre une simplicité d'implémentation et une

bonne stabilité numérique. La méthode testée sur des structures en treillis montre de bonnes qualités de détection, localisation et quantification de défauts, tout en évitant les problèmes de mauvais conditionnement qui provoquent des divergences brusques des systèmes itératifs. La séparation des variables utilisée dans la méthode de recalage améliorée représente un outil qui peut être utilisé avantageusement dans le contexte du recalage de modèles analytiques.

- 6- Une méthode de détection de défauts dans les structures mécaniques basée sur la correction de modèle éléments finis a été proposée. Celle-ci est une stratégie de correction incrémentale qui procède par incréments de correction sur l'élément détecté grâce à la fonction de corrélation dans le domaine fréquentiel FRAC (Frequency Response Assurance Criterion) qui matérialise le rapprochement entre les mesures fréquentielles prédites et mesurées. La méthode ainsi présentée montre qu'elle présente une simplicité de mise en œuvre et une bonne stabilité numérique. Les essais effectués sur une structure en treillis doublement encastree montrent des qualités de détection et de correction très intéressantes en termes de quantification, localisation et rapidité en évitant le problème de mauvais conditionnement qui pose souvent une divergence brusque dans le cas des systèmes itératifs des méthodes de calcul inverse.
- 7- L'application des méthodes de recalage linéaire au cas de structures faiblement non linéaires montre une efficacité dans le contexte de la linéarisation de système non linéaire. Par contre, elles ne peuvent servir à l'identification de défauts de modélisation. Une formulation de nouvelles techniques de recalage dédiées aux systèmes non linéaires est indispensable.
- 8- Une formulation mathématique est proposée dans le domaine non linéaire. Cette formulation nous permet d'identifier complètement l'amortissement et la raideur des systèmes avec leurs parties linéaires et non linéaires. La fonction générale comporte les parties linéaires et non linéaires d'amortissement et de raideur, forme intéressante dans le cas de l'identification simultanée de défauts de modélisation linéaires et non linéaires. Cette stratégie est la base de la méthode d'identification proposée dans le domaine non linéaire.
- 9- Après avoir explicité les formulations générales dans le domaine temporel, nous avons élaboré une méthode d'identification de défauts en présence de non linéarités. Basée sur la formulation générale proposée, celle-ci utilise la méthode de minimisation de Newton, et le schéma d'intégration de système d'équation non

linéaires de Runge-Kutta. En résumé cette méthode est semblable à celle proposée dans le domaine linéaire par approximation au sens des moindres carrés. Le problème consiste alors à minimiser l'erreur entre les réponses temporelles mesurées et analytiques. L'efficacité de la méthode est démontrée par les applications sur des exemples à un et plusieurs degrés de liberté.

Utilité du travail accompli

L'identification par recalage de modèle éléments finis est une technique d'un potentiel théorique et expérimental significatif. Les accomplissements et les contributions suivants montrent l'originalité et l'apport de notre recherche à l'état actuel dans ce domaine.

- 1- Cette recherche propose trois méthodes de recalage de modèle éléments finis dans le domaine linéaire. La première propose le concept de mesure selon la direction donnant l'écart minimal à minimiser ; la seconde méthode propose le concept de séparation des variables qui est une technique qui pourrait être utilisée dans toutes les applications physiques utilisant le processus de minimisation dont les variables risquent de se compenser les unes les autres. La troisième méthode est une stratégie algorithmique de recalage est proposée, venant ainsi enrichir la diversité des méthodes d'identification en dynamique de structure. En effet, cette méthode qui ne peut rentrer dans la classification actuelle, ouvre un nouveau volet. L'efficacité de cette technique est très remarquable, mais risque de converger vers un minimum local.
- 2- L'amélioration du comportement numérique des méthodes existantes passe par un choix des points de mesure et d'excitation. La technique du vecteur témoin proposée apporte des solutions nouvelles.
- 3- Le domaine des systèmes non linéaires, reste encore à explorer, les méthodes d'identification existantes sont souvent limitées à des applications spécifiques. Pour cela, notre contribution se veut plus générale en explicitant une formulation globale dans le domaine temporel sans limitation. La méthode d'identification de défauts de modélisation et de non linéarités proposée apporte une solution pour le cas discret et ouvre une possibilité au cas de structures continues.

Des indications pour d'autres études possibles sont récapitulés ci-dessous

Durant notre travail des logiciels de simulation et d'optimisation ont été exploités. Matlab toolbox ainsi que le logiciel ABAQUS exploités durant mon passage au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux (LPPM) de l'Ecole Nationale d'Arts et Métiers de Metz (France), proposent des solutions dans le domaine de l'identification. Nous proposons l'implémentation sous ces logiciels des différents apports de cette thèse pour enrichir ces deux outils numériques.

Le domaine non linéaire est provoqué assez souvent par les grands déplacements. L'extension de ces méthodes à ce cas est envisageable.

Le développement actuel du matériel de calcul numérique permet de supprimer le critère temps de calcul pour les méthodes de simulation, par conséquent, la stratégie de détection de défauts peut s'appliquer au cas de grandes structures et suscite donc un intérêt à être étendue.

Le recalage de modèles non linéaires reste à l'état analytique et numérique. Un développement de nouvelles techniques est nécessaire.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Allemang R. J., Brown D. L., A Correlation Coefficient for Modal Vector Analysis. Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference, pp. 110 – 119, 1982
- [2] Lieven N. A., Ewins D. J., Spatial Correlation of Mode Shapes, the Coordinate Modal Assurance Criterion (COMAC). Proceedings of the 6th International Modal Analysis Conference, pp. 690 – 695, 1988
- [3] Mitchell L. D., Increasing the Sensitivity of the Modal Assurance Criteria (MAC) to Small Mode Shape Changes., Proceedings of the 16th International Modal Analysis Conference, pp. 64 – 69, 1998
- [4] Blaschke P. G., Ewins D. J., The MAC Revisited and Updated. Proceedings of the 15th International Modal Analysis Conference, pp. 147 – 154, 1997
- [5] Brechlin E., Bendel K., Keiper W., A New Scaled Modal Assurance Criterion for Eigenmodes Containing Rotational Degrees of Freedom., 23rd International Seminar on Modal Analysis, Leuven Belgium, 1998
- [6] Hunt D. L., Application of an Enhanced Coordinate Modal Assurance Criteria. Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference, pp. 66 – 71, 1992
- [7] Catbas F. N., Aktan A. E., Allemang R. J., Brown D. L. A Correlation Function for Spatial Locations of Scaled Mode Shapes (COMEF)., Proceedings of the 16th International Modal Analysis Conference, pp. 1550 – 1555, 1998
- [8] O’Callahan J., Avitabile P., Riemer R. System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP)., Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, pp. 29 – 37, 1989
- [9] Lieven N. A. J., Waters T. P., Error Location Using Normalised Orthogonality. Proceedings of the 12th International Modal Analysis Conference, pp. 761 – 764, 1994
- [10] Avitabile P., O’Callahan J., Milani J., Model Correlation and Orthogonality Criteria. Proceedings of the 6th International Modal Analysis Conference, pp. 1039 – 1047, 1988
- [11] Avitabile P., O’Callahan J., Mass and Stiffness Orthogonality Checks Without a Mass or Stiffness Matrix. Proceedings of the 13th International Modal Analysis Conference, pp. 1515 – 1519, 1995
- [12] O’Callahan J., Correlation Considerations – Part 4 (Modal Vector Correlation Techniques). Proceedings of the 16th International Modal Analysis Conference, pp. 197 – 206, 1998

-
- [13] Avitabile P., Pechinsky F., Coordinate Orthogonality Check (CORTHOG). Proceedings of the 12th International Modal Analysis Conference, pp. 753 – 760, 1994
- [14] Fotsch D. W., Development of Valid Finite Element Models for Structural Dynamic Design. PhD Thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine London, April 2001.
- [15] Pascual R., Golinval J. C., Razeto M., Testing of FRF Based Model Updating Methods Using a General Finite Elements Program. International Conference on Noise and Vibration Engineering, 21st International Seminar on Modal Analysis, Leuven Belgium, 1996
- [16] Pascual R., Golinval J. C., Razeto M., A Frequency Domain Correlation Technique for Model Correlation and Updating. Proceedings of the 15th International Modal Analysis Conference, pp. 587 – 592, 1997
- [17] Nefske D. J., Sung S. H., Correlation of a Coarse-Mesh Finite Element Model Using Structural System Identification and a Frequency Response Assurance Criterion. Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference, pp. 597 – 602, 1996
- [18] Heylen W., Avitabile P., Correlation Consideration – Part 5 (Degree of Freedom Correlation Techniques). Proceedings of the 16th International Modal Analysis Conference, pp. 207 – 214, 1998
- [19] Fotsch D. W., Ewins D. J., Application of the MAC in the Frequency Domain. Proceedings of the 18th International Modal Analysis Conference, pp. 1225 – 1231, 2000
- [20] R. Guyan., Reduction of stiffness and mass matrices. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 3(2), pp. 380, 1965.
- [21] O'Callahan J. C., A procedure for an improved reduced system (IRS). Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, pp. 17 – 21, Las Vegas, Nevada, 1989
- [22] Paz M., Dynamic condensation. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 22(22), pp. 724 – 727, 1984.
- [23] Kidder R. L., Reduction of structural frequency equations. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol.11(6), p 892, 1973.
- [24] Petersman N., Calculation of eigenvalues using sub-structures and dynamic condensation. Proceedings of the Second International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics, pp. 211 – 219, 1984.
- [25] O'Callahan J. C., Avitabile P., Madden, Lieu. An efficient method of determining rotational degrees of freedom from analytical and experimental data. Proceedings of the 4th International Modal Analysis Conference, Los Angeles, California, 1986.

-
- [26] Levine-West M., Kissil A., Evaluation of mode shape expansion techniques on the micro-precision interferometer truss. Proceedings of the 12th International Modal Analysis Conference, Honolulu, Hawaii, pp. 212 – 218, 1994.
- [27] Gysin H. P., Comparison of expansion method for FE modelling error localisation. Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference, Kissimmee, Florida, pp. 195 – 204, 1990.
- [28] O'Callahan J. C., Li P., A non smoothing SEREP process for modal expansion. Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference, Kissimmee, Florida, pp. 232 – 238, 1990.
- [29] Kammer D. C., Test-analysis-model development using an exact model reduction. *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, pp. 174 – 179, 1987.
- [30] Kammer D. C., Sensor placement for on-orbit modal identification and correlation of large space structures. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 15(2) pp. 251-259, 1991.
- [31] D. C. Kammer, Christopher C., Falnigan, and Wes Dreyer. A super-element approach to test-analysis model development. Proceedings of the 4th International Modal Analysis Conference, pp. 663 – 673, 1986.
- [32] Penny J. E. T., Friswell M. I., Garvey S. D., Automatic choice of measurement locations for dynamic testing. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 32(2), p. 407, 1994.
- [33] Jarvis B., Enhancement to modal testing using finite elements. Proceedings of the 9th International Modal Analysis Conference, pp. 402 – 408, 1991.
- [34] Larson C. B., Zimmerman D. C., Mark E. L., A comparison of modal test planning techniques: Excitation and sensor placement using the NASA 8-bay truss. Proceedings of the 12th International Modal Analysis Conference, pp. 205 – 211, 1994.
- [35] Flanigan C. C., Botos C. D., Automatic selection of accelerometer locations for modal survey tests. Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference, p. 1205. 1992.
- [36] Flanigan C. C., Hunt D. L., Integration on pre-test analysis and modal correlation methods for modal survey. Proceedings of the 11th International Modal Analysis Conference, p. 444. 1993.

-
- [37] Stabb M., Blesloch P., A generic algorithm for optimally selecting accelerometer locations. Proceedings of the 13th International Modal Analysis Conference, pp. 1530 – 1534, 1995.
- [38] Yao L., Sethares W. A., Kammer D. C., Sensor placement for on-orbit modal identification via a genetic algorithm. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 31(10) p. 1922, 1993.
- [39] Garvey S. D., Friswell M. I., Penny J. E., Evaluation of a method for automatic selection of measurement locations based subspace-matching. Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference, p 1546, 1996.
- [40] Kammer D. C., Effect of model error on sensor placement for on-orbit modal identification of large space structures. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 15(2) pp. 334 – 341, 1992.
- [41] Kammer D. C., Effects of noise on sensor placement for on-orbit modal identification of large space structures. *Transactions of the ASME*, Vol. 114 pp. 436 – 443, 1992.
- [42] Kammer D. C., Triller M. J., Effective sensor placement for on-orbit modal identification of sequentially assembled large space structures. Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference, pp. 954 – 964, 1992.
- [43] Park Y. S., Hong-Bae Kim. Sensor placement guide for model comparison and improvement. Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference, pp. 404 – 409, 1996.
- [44] Imamovic N., Methods for selection of measurement points for modal testing – average driving point residue (ADPR) method. Report of the centre of vibration engineering VUTC/E2/95007. 1995
- [45] Schedlinski C., Link M., An approach to optimal pick-up and exciter placement. Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference, pp. 376 – 382, 1996.
- [46] Gola M. M., Soma A., Selective sensitivity for model updating with modal data. ASME Design Engineering Technical Conferences, Vol. 3 - C, pp. 1271 – 1278, 1995.
- [47] Baruch M., Optimisation procedure to correct stiffness and flexibility matrices using vibration data. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 16(11) pp. 1208 – 1210, 1978.
- [48] Berman A., Comment on optimal weighted orthogonalisation of measured modes. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 17(8) pp. 927 – 928, 1079.

- [49] Berman A., Nagy E. J., Improvement of large analytical model using test data. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 21(8) pp. 1169 – 2273, 1983.
- [50] Wei F. S., Analytical dynamic model improvement using vibration test data. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 28 pp. 175 – 177, 1990.
- [51] Kenigsbuch R., Halevi Y., Generalised reference basis model updating in structural dynamics. Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference, pp. 1 – 9, 1997.
- [52] Sidhu J., Ewins D. J., Correlation of finite element and modal test studies of a practical structure. Proceedings of the 2nd International Modal Analysis Conference, pp. 756 – 762, 1984.
- [53] Gysin H. P., Critical application of the error matrix method for localisation of finite element modelling inaccuracies. Proceedings of the 4th International Modal Analysis Conference, pp. 1339 – 1351, 1986.
- [54] He J., Ewins D.J., Analytical stiffness matrix correction using measured vibration modes. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 1(3) pp. 9 – 14, 1986
- [55] Lieven N. A. J., Ewins D. J., Expansion of modal data for correlation. Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference, pp. 605 – 609, 1990.
- [56] Lieven N. A. J., Waters T. P., The application of high density measurements to dynamic finite element reconciliation. Proceedings of the 13th International Modal Analysis Conference, pp. 185 – 192, 1995.
- [57] Starek L., Ewins D. J., A symmetric inverse vibration problem with over damped modes. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 181(5) pp. 893 – 903, 1995.
- [58] Starek L., Inman D. J., On the inverse vibration problem with rigid body modes. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58(4) pp. 1101 – 1104, 1991.
- [59] Starek L., Inman D. J., Kress A., A symmetric inverse vibration problem. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 114(4) pp. 564 – 568, 1992.
- [60] Starek L., Musil M., Inman D.J., Updating of non-conservative systems using inverse methods. Proceedings of the ASME 1995 Design Engineering Technical Conferences, pp. 41 – 58, 1997.
- [61] Link M., Weiland M., Barragan J. M., Direct physical matrix identification as compared to phase resonance testing - an assessment based on practical application. Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference, pp. 804 – 811, 1987.

-
- [62] Cobb R. G., Canfield R. A., Liebst B. S., Finite Element Model Tuning Using Automated Structural Optimisation System Software. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* Vol. 34(2) pp. 392 – 399, 1996.
- [63] Link M., Zhang L., Experience with different procedures for updating structural parameters of analytical models using test data. Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference, pp. 730 – 738, 1992.
- [64] Link M., Rohrman R. G., Pietrzko S., Experience with automated procedures for adjusting the finite element model of a complex highway bridge to experimental modal data. Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference, pp. 218 – 225, 1996.
- [65] Natke H. G., On regularisation methods applied to the error localisation of mathematical models. Proceedings of the 9th International Modal Analysis Conference, pp. 70 – 73, 1991.
- [66] Mottershead J. E., Foster C. D., On the treatment of ill-conditioning in spatial parameter estimation from measured vibration data. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 5(2), pp. 139 – 154, 1991.
- [67] Visser W. J., Imregun M., A technique to update finite element models using frequency response data. Proceedings of the 9th International Modal Analysis Conference, pp. 462 – 468, 1991.
- [68] Friswell M. I., Mottershead J. E., Finite element model updating in structural dynamics. New York: Kluwer Academic Publisher, 1995.
- [69] Imregun M., Visser W. J., Ewins D. J., Finite element model updating using frequency response function data – I. theory and initial investigation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 9(2), pp. 187 – 202, 1995.
- [70] Lammens S., Brughmans M., Leuridan J., Updating of dynamic finite element model based on experimental receptances and the reduced analytical dynamic stiffness matrix. Proceedings of the ASME 1995 Design Engineering Technical Conferences, Vol. 3-C, pp. 1191 – 1200, 1995.
- [71] Reix C., Gerard A., Tombini C., Updating the damping matrix using frequency response data. Proceedings of the ASME 1995 Design Engineering Technical Conferences, p. 803 – 808, 1995.
- [72] Lammens S., Heylen W., Sas P., The selection of updating frequencies and the choice of a damping approach for model updating procedures using experimental frequency

- response functions. Proceedings of the 12th International Modal Analysis Conference, p. 1383, 1994
- [73] Yang M., Brown, D., Model updating techniques using perturbed boundary condition (PBC) testing data. Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference, pp. 776 – 782, 1996.
- [74] Lindholm B. E., West R. L., Finite element model reconciliation with dynamic response data using a statistics-based parameter-update approach. Proceedings of the 13th International Modal Analysis Conference, pp. 1540 – 1546, 1995.
- [75] Lindholm B.E., West R.L., A Bayesian statistics approach to updating finite element models with frequency response data (part 1: Theory). Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference, pp. 1451 – 1457, 1996.
- [76] Lindholm B. E., A Bayesian statistics approach to updating finite element models with frequency response data (part 2: Application). Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference, pp. 1458 – 1464, 1996.
- [77] Friswell M. I., Mottershead J. E., Shenton T., Robust model updating. Proceedings of the 18th International Modal Analysis Conference, pp. 987 – 991, 2000.
- [78] Larson C. B., Zimmerman D. C., Structural model refinement using a genetic algorithm approach. Proceedings of the 11th International Modal Analysis Conference, pp. 1095 – 1101, 1993.
- [79] Carlin R. A., Garcia E., Parameter optimisation of a genetic algorithm for structural damage detection. Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference, pp. 1292 – 1298, 1996.
- [80] Barney P., St. Pierre M., Brown D., Identification of a modal model utilising a perturbed boundary condition test method. Proceedings of 10th International Modal Analysis Conference, pp. 1221 – 1231, 1992.
- [81] Chen K. N., Brown D., Nicolas V. T., Perturbed boundary condition model updating. Proceedings of the 11th International Modal Analysis Conference, pp. 661 – 667, 1993.
- [82] D'Ambrogio W., Fregolent A., Robust dynamic model updating using point antiresonances. Proceedings of the 18th International Modal Analysis Conference, pp. 1503 – 1512, 2000.
- [83] Li S., Shelley S., Brown D., Perturbed boundary condition testing concepts. In The Proceedings of the 13th International Modal Analysis Conference, pp. 902 – 911, 1995.

- [84] Ibrahim S. R., Teichert W., Brunner O., Frequency Response Function F.E. Model Updating Using Multi-perturbed Analytical Models and Information Density Matrix. Proceedings of the 16th International Modal Analysis Conference, pp. 1068 – 1074, 1998.
- [85] Ibrahim S. R., Natural Frequency Based Finite Element Model Updating Using Multiple Analytical Models. Proceedings of the 18th International Modal Analysis Conference, pp. 1018 – 1027, 2000.
- [86] D'Ambrogio W., Fregolent A., Promises and pitfalls of antiresonance based dynamic model updating. Proceedings of the second international conference of Identification in Engineering Systems, pp. 112 – 121, 1999.
- [87] Mottershead J. E., On the zeros of structural frequency response functions and their sensitivities. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 12(5), pp. 591 – 597, 1998.
- [88] Mottershead J. E., On the natural frequencies and antiresonances of modified structures. Proceedings of the 17th International Modal Analysis Conference, pp. 648 – 653, 1999.
- [89] Rade D. A., Lallement G., A strategy for the enrichment of experimental data as applied to an inverse eigen-sensitivity-based FE model updating method. *Mechanical Systems and Signal Processing*. Vol. 12(2), pp. 293 – 307, 1998.
- [90] Balis Crema L., Coppotelli G., Effect of Limited DOFs and Noise in Structural updating. Proceedings of the 20th International Modal Analysis Conference, pp. 1091 – 1097. 2002
- [91] Asma F, Bouazzouni A. Choice of the measurement points to update models. Euromech 466 Colloquium, Computational and Experimental Mechanics of Advanced Materials, Loughborough University U.K., 2005.
- [92] Asma F., Bouazzouni A., Finite element model updating using variable separation. *European Journal of Mechanics A/solids*, à paraitre, 2007.
- [93] Ewins D.J., Adjustment or updating of models. *Sadhana*, Vol 25(3), pp. 235 – 245, 2000.
- [94] D'Ambrogio W., Fregolent A., The use of antiresonances for robust model updating, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 236 (2), pp. 227 – 243, 2000.
- [95] Dascotte E., Strobbe J., Updating finite element models using FRF correlation functions. Proceedings of the 17th International Modal Analysis Conference, pp. 1169 – 1174, 1999.
- [96] Grafe H., Model updating of large structural dynamics models using measured response functions. Ph.D. Thesis, Imperial College of Science, Technology & Medicine, Department of Mechanical Engineering, London, UK, October 1998.
- [97] Imregun M., Visser W. J., A review of model updating techniques. *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 23(1), pp. 9 – 20, 1991.

-
- [98] Lin R.M., Ewins D. J., Model updating using FRF data. Proceeding of the International Seminar on Modal Analysis, pp. 141 – 162, 1990.
- [99] Pascual R., Razeto M., Golinval J. C., Schalhli R., A robust FRF-based technique for model updating. Proceedings of the International Seminar on Modal Analysis, pp. 1037 – 1046, 2002
- [100] Visser W. J., Updating Structural Dynamics Models Using Frequency Response Data. Ph.D. Thesis, Imperial College of Science, Technology & Medicine, Department of Mechanical Engineering, London, UK, September 1992.
- [101] Asma F, Bouazzouni A., Finite element model updating using FRF measurements. *Shock and Vibration Journal*. Vol. 12(5), pp. 377 – 388, 2005.
- [102] Pereira J. A., Heylen W., Lammens S., Sas P., Influence of the number of frequency points and resonance frequencies on model updating techniques for health condition monitoring and damage detection of flexible structure. Proceedings of the 13th International Modal Analysis Conference, pp. 1273 – 1281, 1995.
- [103] Trendafilova I., Heylen W., Fault localization in structures from remote FRF measurements. Influence of the measurement points. Proceedings of the International Seminar on Modal Analysis, pp. 149 – 156, 1998
- [104] Sanliturk K. Y., Cakar O., A new method for noise elimination from measured frequency response functions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 19(3), pp. 615 – 631, 2005
- [105] Iwaniec, J., Uhl, T., The Application of the Nonlinear Least Squares Frequency Domain Method to Estimate the Modal Model Parameters. *Machine Dynamics Problems*, Vol. 27(2), pp. 37 – 53, 2003
- [106] Marwala T., Heyns P.S., A multiple-criterion method for determining structural damage, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 36(8), pp. 1494 – 1501, 1998
- [107] Zang, C., Grafe, H., Imregun, M., Frequency Domain Criteria for Correlating and Updating Finite Element Models. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 15(1), pp. 139 – 155, 2001
- [108] Steenackers, G., Guillaume, P., Finite element model updating taking into account the uncertainty on the modal parameters estimates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 296(4-5), 919 – 934, 2006
- [109] Jaishi, B., Ren, W.X., Damage detection by finite element model updating using modal flexibility residual. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 290, 369–387, 2006

-
- [110] Wu, J.R., Li, Q.S., Structural parameter identification and damage detection for a steel structure using a two-stage finite element model updating method. *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 62(3), 231–239, 2006
- [111] Pascual, R., Golinval, J.C., Berthillier, M., Després, T., Updating Industrial Models under a General Optimisation Environment. Proceedings of the 16th International Modal Analysis Conference, pp. 1326 – 1332, 1998
- [112] Bouazzouni, A., Lallement, G., Cogan, S., 1997. Selecting a Ritz basis for the reanalysis of the frequency response functions of modified structures. *Journal of Sound and Vibrations*, Vol. 199 (2), 309–322.
- [113] Hanson, D., Waters, T.P., Thompson, D.J., Randall, R.B. Ford, R.A.J., The role of anti-resonance frequencies from operational modal analysis in finite element model updating. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 21(1), 74-97, 2007
- [114] Richardson M. H., Mannan M. A., Detection and location of structural cracks using FRF measurements, Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference, pp. 512 – 518, 1990.
- [115] Marwala T., Hunt H.E.M., fault localization using finite elements models and neural networks, *Mechanical System and Signal Processing*, Vol. 13(3), pp. 475 – 490, 1999.
- [116] Ren W.X., De Roeck G., Structural damage identification using modal data: Simulation verification, *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 128 (1) pp. 87 – 95, 2002.
- [117] Liu X., Li J., Xu Y., Peng Z., Location and modification of errors in structural dynamics models, Proceedings of the 13th International Modal Analysis Conference, pp. 1763 – 1769, 1995.
- [118] Burton T. D., Farrar C. R. and Doebling S. W., Two methods for model updating using damage Ritz vectors. Proceedings of the 16th International Modal Analysis Conference, pp. 973 – 979, 1998
- [119] Dutta A., Talukdar S., Damage detection in bridges using accurate modal parameters. *Finite Elements in Modal Analysis and Design* Vol. 40 pp. 287-304, 2004
- [120] Masri S.F., Caughey T.K., A nonparametric identification technique for nonlinear dynamic problems. *Journal of Applied Mechanics* Vol. 46, 433 – 447, 1979.
- [121] Simon M., Tomlinson G.R., Use of the Hilbert transform in modal analysis of linear and non-linear structures. *Journal of Sound and Vibration* Vol. 96, 421 – 436, 1984.

-
- [122] Feldman M., Nonlinear system vibration analysis using the Hilbert transform - I. Free vibration analysis method 'FREEVIB'. *Mechanical Systems and Signal Processing* Vol. 8, 119 – 127, 1994.
- [123] Feldman M., Nonlinear system vibration analysis using the Hilbert transform - II. Forced vibration analysis method 'FORCEVIB'. *Mechanical Systems and Signal Processing* . Vol. 8, pp. 309 – 318, 1994.
- [124] Schetzen M., *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*. New York, U.S.A.: John Wiley & Sons. 1980.
- [125] Gifford S. J., Tomlinson G. R., Recent advances in the application of functional series to non-linear structures. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 135, pp. 289 – 317, 1989.
- [126] Worden K., Manson G., Random vibrations of a duffinng oscillator using the Volterra series. *Journal of Sound and Vibration* Vol. 217, pp. 781 – 789, 1998.
- [127] Worden K., Manson G., Random vibrations of a multi-degree-of-freedom non-linear system using the Volterra series. *Journal of Sound and Vibration* 226, pp. 397 – 405, 1999.
- [128] Khan A. A., Vyas N. S. Non-linear parameter estimation using Volterra and Wiener theories. *Journal of Sound and Vibration* Vol. 221, pp. 805 – 821, 1999.
- [129] Leontaritis I. J., Billings S. A., Input-output parametric models for nonlinear systems, part I: deterministic nonlinear systems. *International Journal of Control*, Vol. 41, pp. 303 – 328, 1985.
- [130] Leontaritis I. J., Billings S. A., Input-output parametric models for nonlinear systems, part II: stochastic nonlinear systems. *International Journal of Control* Vol. 41, pp. 329 – 344, 1985.
- [131] Thouverez F., Jezequel L., Identification of NARMAX models on a modal base. *Journal of Sound and Vibration* Vol. 189, pp. 193 – 213, 1996.
- [132] Billings S. A., Tsang K. M., Spectral analysis for non-linear systems, Part I: Parametric non-linear spectral analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing* Vol. 3, pp. 319 – 339, 1989.
- [133] Billings S. A., Tsang K. M., Spectral analysis for non-linear systems, Part II: Interpretation of nonlinear frequency response functions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 3, pp. 341 – 359, 1989.
- [134] Worden K., Tomlinson G. R., *Detection, Identification and Modelling*. Bristol, U.K.; Philadelphia, U.S.A.: Institute of Physics Publishing. *Nonlinearity in Structural Dynamics* 2001

-
- [135] Wright J. R., Platten M. F., Cooper J. E., Sarmast M., Identification of multi-degree-of-freedom weakly non-linear systems using a model based in modal space. Proceedings of the International Conference on Structural System Identification, Kassel, Germany, pp. 49 – 68, 2001.
- [136] Bellizzi S., Defilippi M., Nonlinear mechanical systems identification using linear system with random parameters. Proceedings of the International Conference on Structural System Identification, Kassel, Germany, pp. 377 – 386, 2001.
- [137] Gibert C., Thouverez F., Identification of the non-linear modes applied to a structure including a non-linear component. Proceedings of the International Conference on Structural System Identification, Kassel, Germany, pp. 183 – 192, 2001.
- [138] Levin R. I., Lieven N. A. J., Dynamic finite element model updating using simulated annealing and genetic algorithms. *Mechanical Systems and Signal Processing* Vol. 12, pp. 91 – 120, 1998.
- [139] Dippery K. D., Smith S.W., An optimal control approach to nonlinear system identification. Proceedings of the 16th International Modal Analysis Conference, pp. 637 – 643, 1998.
- [140] Armstrong-Helouvry B., Dupont P., Canudas de Wit C., A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica* Vol. 30, pp. 1083 – 1138, 1994.
- [141] Prajogo T., Al-Bender F., Van Brussel H., Identification of prerolling friction dynamics of rolling element bearings: modelling and application to precise positioning systems. Proceedings of the 8th International Precision Engineering Seminar, Compiègne, France, pp. 229 – 232, 1995.
- [142] Swevers J., Al-Bender F., Ganseman C., Prajogo T., An integrated friction model structure with improved presliding behavior for accurate friction compensation. *IEEE Transactions on Automatic Control* Vol. 45, 675 – 686, 2000.
- [143] Kyprianou A., Non-linear parameter estimation of dynamic models using differential evolution: application to hysteretic systems and hydraulic engine mounts. Ph.D. Thesis, University of Sheffield, 1999.
- [144] Meyer S., Weiland M., Link M., Modelling and updating of local nonlinearities using frequency response residuals. Proceedings of the International Conference on Structural System Identification, Kassel, Germany, pp. 151 – 160, 2001.
- [145] Doebling S. W., Hemez F. M., Rhee W., Statistical model updating and validation applied to nonlinear transient structural dynamics. Proceedings of the European COST

- F3 Conference on System Identification and Structural Health Monitoring, Madrid, Spain, pp. 409 – 418, 2000.
- [146] Schultze J. F., Hemez F. M., Doebling S. W., Sohn H., Application of nonlinear system model updating using feature extraction and parameter effect analysis. *Shock and Vibration Journal*. Vol. 8, pp. 325 – 337, 2001.
- [147] Rosenberg R.M., The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems. *Journal of Applied Mechanics* Vol. 29, pp. 7 – 14, 1962.
- [148] Rosenberg R.M., On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom. *Advances in Applied Mechanics* Vol. 9, pp. 155 – 242, 1966.
- [149] Shaw S. W., Pierre C., Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration* Vol. 164, pp. 85 – 124, 1993.
- [150] Shaw S. W., Pierre C., Normal modes of vibration for non-linear continuous systems. *Journal of Sound and Vibration* Vol. 169, pp. 319 – 347, 1994.
- [151] Cusumano J. P., Bai B.Y., Period infinity periodic motions, chaos and spatial coherence in a 10-degree-of-freedom impact oscillator. *Chaos, Solitons and Fractals* Vol. 3, pp. 515 – 535, 1993.
- [152] Fitzsimons P. M., Rui C., Determining low dimensional models of distributed systems. *Advances in Robust and Nonlinear Control Systems, ASME DSC* Vol. 53, pp. 9 – 15, 1993
- [153] Ma X., Azeez M. F. A., Vakakis A. F., Nonparametric nonlinear system identification of a nonlinear exible system using proper orthogonal decomposition. Proceedings of the 7th Conference on Nonlinear Vibration, Stability and Dynamics of Structures, Blacksburg, U.S.A, 1998
- [154] Hasselman T. K., Anderson M. C., Gan W. G., Principal component analysis for nonlinear model correlation, updating and uncertainty evaluation. Proceedings of the 16th International Modal Analysis Conference, pp. 644 – 651, 1998.
- [155] Hemez F. M., Doebling S. W., Test analysis correlation and finite element model updating for nonlinear transient dynamics. Proceedings of the 17th International Modal Analysis Conference, Kissimmee, U.S.A., 1501 – 1510, 1999.
- [156] Lenaerts V., Kerschen G., Golinval J.C., Proper orthogonal decomposition for model updating of non-linear mechanical systems. *Mechanical Systems and Signal Processing* Vol. 15, pp. 31 – 43, 2001.
- [157] Lenaerts V., Identification et recalage de modèles structuraux en dynamique non linéaire. Ph.D. Thesis, Université de Liège. 2003

-
- [158] Budak E., Ozguven H. N., A method for harmonic response of structures with symmetrical non-linearities. Proceedings of the 15th International Seminar on Modal Analysis, Leuven, pp. 901 – 915, 1990.
- [159] Budak E., Ozguven H. N., Harmonic vibration analysis of structures with local non-linearities and validity assessment of some linearization techniques. Proceedings of the 4th International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics, pp. 680–799, 1991.
- [160] Budak E., Ozguven H. N., Iterative receptance method for determining harmonic response of structures with symmetrical nonlinearities. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 7, pp. 75 – 87, 1993.
- [161] Kuran B., Ozguven H. N., A modal superposition method for non-linear structures. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 189(3), pp. 315 – 339, 1996.
- [162] Tanrikulu O., Kuran B., Ozguven H. N., Imregun M.. Forced harmonic response analysis of non-linear structures. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 31, pp. 1313 – 1320, 1993.
- [163] Vaqueiro J., Dynamic response analysis of structures with non-linear components. PhD thesis, Imperial College London, Department of Mechanical Engineering, Dynamics Section, 1998.
- [164] Sanliturk K. Y., Imregun M., Ewins D. J., Harmonic balance vibration analysis of turbine blades with friction dampers. *ASME Journal of Vibrations and Acoustics*, Vol. 119, pp. 96 – 103, 1997.
- [165] Sanliturk K. Y., Imregun M., Ewins D. J., Friction damper optimization for turbine blades: experimental and theoretical predictions. IMechE- Sixth International Conference in Vibrations in Rotating Machinery, C500/019/96, pp. 171 – 186, 1996.
- [166] Kerschen G., and Golinval J. C., Frequency domain approaches for the identification of an experimental beam with a local non-linearity. Proceedings of the 20th International Modal Analysis Conference, Los Angeles, U.S.A., 331-337, 2002.