

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Unniversité Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou



Mémoire de Master

Analyse Mathématiques et applications

Présenté par

Anis Lasloudji

Détection de convergences globales dans l'image : Géométrie stochastique et applications en imagerie médicale

Mémoire soutenu le 15 juillet 2019 devant le jury composé de :

M. Fazia BEDOUHENE	Présidente
M. Omar MELLAH	Encadrant
M. Abdelghani HAMAZ	Examineur
M. Farida ACHEMINE	Examinatrice
M. Ferhat ZIRAM	Examineur

Dédicaces

C'est avec un immense plaisir que je dédie ce modeste travail à mes parents qui ont fait en sorte de fournir les moyens et le soutien nécessaires pour accompagner mon parcours d'étudiant.

À mon frère qui m'a orienté et conseillé, et a manifesté un énorme soutien durant mon cursus. Également à Nour El Houda .S-M qui m'a fortement soutenue et encouragée.

Je le dédie enfin à l'ensemble des membres de ma famille et mes amis, et particulièrement à Menad .Y, Mehdi .B et Massyl .H.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincères remerciements à Monsieur Mellah Omar, qui m'a encadré, tout au long de ce mémoire. Je vous remercie pour votre précieuse présence et assistance, votre disponibilité et l'intérêt que vous avez manifesté pour ce modeste travail. Je vous remercie pour vos orientations, encouragement et votre enthousiasme envers mon travail. Je vous remercie également pour les judicieux conseils et rigueur que vous m'avez prodigués tout au long de ce travail. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec vous.

Je tiens à remercier chaleureusement Madame Khellas Fazia pour avoir accepté de présider le jury qui examinera ce mémoire, et pour les efforts déployés pour notre formation. J'adresse également mes vifs remerciements à Monsieur Abdelghani Hamaz pour avoir accepté de faire partie du jury qui examinera ce mémoire, et pour sa contribution à ma formation, son soutien et son enthousiasme. Je tiens également à remercier Madame Achemine Farida et Monsieur Ziram Ferhat d'avoir accepté de faire partie du jury qui examinera ce mémoire et pour leurs contributions à ma formation. Je remercie aussi l'ensemble des enseignants et chercheurs qui œuvrent pour l'intérêt des étudiants et du département de mathématiques.

Table des matières

Table des matières	3
1 Introduction	5
2 Introduction à la théorie des Probabilités Géométriques	11
2.1 Enveloppe d'une famille de droites	11
2.2 Mesure sur un ensemble de points et de droites	16
2.3 Mesure sur un ensemble de points	16
2.3.1 Probabilités géométriques	17
2.4 Mesure sur un ensemble de droites :	18
2.5 Droites intersectant un ensemble ou une courbe convexe	19
2.6 Droites intersectant ou séparant deux ensembles convexes	20
2.6.1 Probabilités géométriques	23
3 Détection de convergences globales dans l'image	25
3.1 Modélisation aléatoire et Paramétrisation des droites	25
3.1.1 Paramétrisation des droites	25
3.1.2 Modèle invariant par translation et rotation : modèle isotrope	27
3.1.3 Modèle anisotrope	27
3.2 Détection de convergences globales	32
3.2.1 Pavage en régions de fuites équiprobables sous le modèle uni- forme	32
3.2.2 Extension au cas d'un modèle gaussien	37
3.2.3 Détection a contrario de convergences de droites dans le plan d'une image	39

3.2.3.1	Nombre de fausses alarmes et régions de fuites significatives	39
4	Estimation de modèles anisotrope et isotrope	41
4.1	Estimation du point de convergence globale	42
4.1.1	Le point le plus significatif	42
4.2	Estimation du poids et de la variance	42
5	Expérience sur des mammographies	46
5.1	Principe du Line Segment Detector	46
	Bibliographie	50

Chapitre 1

Introduction

Le cancer du sein est le cancer le plus diagnostiqué chez les femmes à travers le monde. La prévention étant le meilleur moyen pour contrer cette maladie, il est important d’user des techniques d’imagerie médicale pour effectuer un premier examen de dépistage. La mammographie est l’examen radiographique du sein par excellence dans le cadre du diagnostic en imagerie mammaire. De ce fait, il est crucial pour le radiologue d’interpréter de manière correcte les clichés obtenus. Pour épauler les radiologues et unifier leurs interprétations d’une mammographie, des méthodes d’aide au diagnostic ciblant des zones suspectes sont développées.

Les lésions stellaires spiculées font partie des différents symptômes qui représentent des signes de tumeurs malignes à prendre en compte. Ces lésions sont généralement identifiées avec une observation de l’orientation des structures linéaires présentes dans le sein (spicules). Pour les zones saines, l’orientation de ces dernières varie peu. On observe aussi qu’elles convergent globalement et de manière privilégiée vers le téton. Une modélisation en zones de convergences globales sera donc nécessaire, et détecter cette dernière permet de dissocier une mammographie saine d’une mammographie présentant des lésions stellaires spiculées.

Puisqu’il s’agit d’extraire des informations significatives (l’orientation de structures linéaires) dans une mammographie, considérée ici comme une image numérique, la technique d’aide au diagnostic utilisée sera basée sur une méthode de détection de structures linéaires géométriques dans l’image. On s’intéressera donc aux méthodes a contrario afin d’effectuer cette détection. On peut formuler les

principes de la méthodologie a contrario donnés dans [5] de la manière suivante :

1. On se donne N objets géométriques (Ensembles de points droites, courbes et géodésies), et soit X_i une variable aléatoire décrivant les attributs de ces objets.
2. On définit une hypothèse H_0 (un modèle de bruit) : les v-a X_1, \dots, X_n sont indépendantes identiquement distribuées sous une distribution (uniforme et gaussienne).
3. On observe un événement E des réalisations x_1, \dots, x_n des v-a X_1, \dots, X_n , et on cherche à savoir si cet événement peut se produire par hasard.
4. On définit un nombre de fausses alarmes pour l'événement E par :

$$NFA(E) = \mathbb{E}_{H_0}[\text{nombre d'occurrences de } E]$$

5. Et on effectue le test

$$NFA(E) \leq \varepsilon$$

où $0 \leq \varepsilon \leq 1$

6. Si le test est positif, alors l'événement E est dit ε -significatif

Afin d'effectuer la détection de convergence globale citée précédemment, on s'inspirera de la méthode a contrario développée et utilisée par les auteurs de [1] pour une détection des points de fuites dans une image (points d'intersection des droites projetées d'un espace 3D dans l'image 2D), et ce, dans le but de détecter les zones de convergence globale dans l'image. Pour détecter ces dernières, on débute par effectuer une détection des segments présents dans l'image par le Line Segment Detector (LSD) : une technique de segmentation de l'image qui de plus est une des applications de la méthodologie à contrario [14]. Puis après pavage du plan de l'image en différentes régions, viendra une étape où il est question d'observer et de tester les régions intersectées par un grand nombre de droites supports des segments détectées et ainsi déterminer les zones de convergence globale.

Pour utiliser les méthodes a contrario, il est nécessaire de faire le calcul de probabilité de la réalisation de l'événement géométrique. Ce qui est typiquement un problème de géométrie stochastique. Ce qui a inspiré le premier chapitre de ce mémoire, où on va introduire les notions élémentaires de la théorie des probabilités

géométriques résumés par Luis A. Santalo dans son livre "Integral Geometry and Geometric Probability" [13]. Nous avons défini en plus des résultats donnés dans ce livre de manière rigoureuse les mesures sur les ensembles de points et droites.

Le deuxième chapitre décrit les modèles aléatoires sur les objets géométriques (droites support des segments détectés par le LSD). Ces derniers sont classés en deux catégories : le modèle de bruit simple, modèle uniforme, nécessaire pour la détection de la zone et point de convergence globale. Le deuxième est un modèle anisotrope tenant compte de l'orientation des droites. Cela est motivé par la nécessité d'observer l'orientation des structures linéaires dans la mammographie. Et le choix de la loi gaussienne sur les droites pour ce modèle est motivé par la convergence naturelle vers le point de convergence globale.

Le troisième chapitre vient compléter le précédent avec des estimations des différents paramètres du modèle de mélange définit. Ce qui permet de choisir le meilleur modèle pour la détection de convergence des structures linéaires dans l'image. Une première estimation est faite pour la détection du point de convergence globale sous le modèle uniforme. Une fois ce point choisi, viendra une étape d'estimation des paramètres, poids et variance, du modèle de mélange à deux termes (uniforme et gaussien).

Le quatrième chapitre expose les principes du Line Segment Detector et une simulation de la segmentation d'une image réalisée par cette technique.

Rappels

Ensembles convexes dans \mathbb{R}^2

Les ensembles convexes jouent un rôle essentiel en théorie des probabilités géométriques. On reverra donc ici les propriétés principales de ces ensembles, utiles pour la suite de l'exposé.

Définition 1.1. [12] Un ensemble non vide $K \subset \mathbb{R}^2$ est appelé convexe si et seulement si cet ensemble contient tout les segment $[x, y]$ ayant comme extrémités les points $x, y \in K$. On assume que K est borné et fermé.

Définition 1.2. [12] Pour un ensemble donné $K \subset \mathbb{R}^2$, l'intersection de tous les ensembles convexes contenant K est appelée enveloppe convexe de K . Celle-ci existe pour tout ensemble $K \subset \mathbb{R}^2$ et il s'agit du plus petit ensemble convexe contenant K .

Définition 1.3. Soit un ensemble convexe borné et fermé K admettant des points intérieurs. Alors le bord ∂K de cet ensemble est une courbe convexe fermée.

Définition 1.4. [4] Soit un ensemble convexe $K \subset \mathbb{R}^2$. La fonction support de K est définie par : pour tout $x \in K$

$$\sigma_K(x) := \sup\{\langle y, x \rangle : y \in K\}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit scalaire.

Quelques rappels sur la théorie de la Mesure et de Probabilité

L'objectif est de rappeler quelques notions indispensables de la théorie de la mesure et de probabilité.

Algèbre et tribu

Soit Ω un ensemble qui est plus généralement un espace topologique. On considère $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω .

Définition 1.5. [2] Un sous-ensemble \mathcal{A} de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω si

- (i) $\Omega \in \mathcal{A}$,
- (ii) \mathcal{A} est stable par passage au complémentaire (i.e. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$),
- (iii) \mathcal{A} est stable par réunion dénombrable (i.e. $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$).

On dit aussi que \mathcal{A} est une σ -algèbre. Le couple (Ω, \mathcal{A}) sera appelé un espace mesurable. Les éléments de \mathcal{A} sont appelés ensembles mesurables.

Définition 1.6. [2] On appelle tribu borélienne, notée $\mathcal{B}(\Omega)$, la tribu engendrée par les ouverts de Ω . Un borélien est un ensemble appartenant à la tribu borélienne.

Mesure

Définition 1.7. [2] Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace mesurable.

Une application μ de \mathcal{A} dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est σ -additive si pour toute famille \mathcal{A}_i d'éléments de \mathcal{A} , indexée par un ensemble I fini ou dénombrable, $\mu(\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i) = \sum_{i \in I} \mu(\mathcal{A}_i)$.

On appelle mesure (positive) toute application μ de \mathcal{A} dans $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, σ -additive, et telle que $\mu(\emptyset) = 0$.

L'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est appelé espace mesuré.

Définition 1.8. Soit f une application mesurable d'un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ dans un espace mesurable (E, \mathcal{B}) . L'application μ^f de \mathcal{B} dans $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ définie par $\mu^f(A) = (\mu f^{-1}(A))$ définit une mesure sur (E, \mathcal{B}) , appelée mesure image de μ par f .

Probabilité

Définition 1.9. [2] Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace mesurable. On appelle probabilité (ou mesure de probabilité) sur (Ω, \mathcal{A}) toute mesure positive P sur \mathcal{A} telle que $P(\Omega) = 1$. On dit que (Ω, \mathcal{A}, P) est un espace probabilisé. On dit aussi que P est une loi de probabilité, ou simplement une loi.

Définition 1.10. [2] On appelle variable aléatoire toute application mesurable définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) à valeurs dans un espace mesurable.

Chapitre 2

Introduction à la théorie des Probabilités Géométriques

En théorie classique des probabilités géométriques et d'intégrale géométrique, les premiers problèmes traités ont pour intérêt d'appliquer les notions de probabilités sur des objets géométriques pour obtenir des résultats aux multiples applications.

Afin d'user de ces notions probabilistes appliquées à des éléments aléatoires en géométrie (Ensembles de points, droites, courbes et géodésies), il est fondamental, en premier lieu, de définir une mesure sur l'ensemble de ces éléments.

2.1 Enveloppe d'une famille de droites

Définition 2.1. Soit \mathbb{I} un intervalle de \mathbb{R} . Pour tout $t \in \mathbb{I}$, on se donne une droite D_t du plan. On appelle enveloppe d'une famille de droites (D_t) toute courbe Γ convexe de classe \mathcal{C}^1 , telles que, les droites de la famille (D_t) soient exactement les tangentes de Γ . Cela veut dire, quel que soit $t \in \mathbb{I}$ alors D_t est tangente à Γ . En d'autres termes, la courbe Γ admet en chaque point une tangente et celle-ci est l'une des droites de la famille (D_t) .

Théorème. Soit \mathbb{I} un intervalle de \mathbb{R} . Pour tout $t \in \mathbb{I}$, on se donne une droite D_t du plan d'équation $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$. On suppose que a, b et c sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{I} , et que :

$$\forall t \in \mathbb{I}, \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

Si on a $a(\mathbb{I}, f)$ un arc paramétré régulier $f(t) = (x(t), y(t))$ solution du système :

$$\begin{cases} a(t)x + b(t)y + c(t) = 0 \\ a'(t)x + b'(t)y + c'(t) = 0 \end{cases}$$

Alors dans ce cas, la famille de droites $(D_t)_{t \in \mathbb{I}}$ admet une unique enveloppe.

Proposition 2.2. [13] Soit une droite G appartenant à un ensemble de droites du plan. Son équation est déterminée par sa distance ρ de l'origine et un angle ϕ ($0 \leq \phi \leq 2\pi$) entre l'axe horizontal et la perpendiculaire à la droite G passant par l'origine (voir fig. 2.1.1). L'équation de la droite G est donc donnée par :

$$x \cos(\phi) + y \sin(\phi) - \rho = 0 \quad (2.1.1)$$

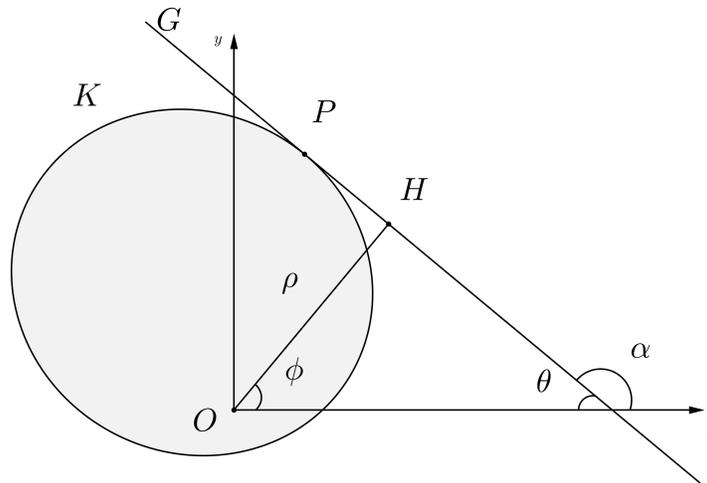


FIGURE 2.1.1 – Droite tangente G

Démonstration. L'équation d'une droite est donnée par $y = ax + b$. On a donc d'après la figure (2.1.1)

$$a = \tan(\alpha) = \tan(\pi - \theta) = \frac{\sin(\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta)} = \frac{\sin(\theta)}{-\cos(\theta)} = -\tan(\theta)$$

On a également

$$\begin{cases} \cos(\phi) = \frac{\rho}{B} \\ \sin(\phi) = \frac{\rho}{A} \end{cases}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = b = A = \frac{\rho}{\sin(\phi)}$$

$$y = -\tan(\theta)x + \frac{\rho}{\sin(\phi)}$$

$$y = -\tan\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)x + \frac{\rho}{\sin(\phi)}$$

$$y = -\frac{1}{\tan(\phi)}x + \frac{\rho}{\sin(\phi)}$$

$$y \tan(\phi) + x = \frac{\rho \tan(\phi)}{\sin(\phi)}$$

$$y \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} + x = \rho \frac{\sin(\phi)}{\sin(\phi) \cos(\phi)}$$

Enfin, on conclut que

$$x \cos(\phi) + y \sin(\phi) - \rho = 0$$

□

On a $\forall \phi \in [0, 2\pi]$

$$\begin{vmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Alors d'après la définition (2.1) K est une enveloppe convexe pour la famille de droites du plan, tangentes de la courbe convexe ∂K . On définit un arc d'équation paramétrique $(x(\phi), y(\phi))$, on veut trouver l'unique arc vérifiant les équations

données dans le théorème précédent. Cela nous permet de dire que K est l'unique enveloppe de la famille de droites.

Supposons que $\rho = \rho(\phi)$ est une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Si $\rho(\phi)$ est différentiable alors en dérivant (2.1.1) par rapport à ϕ , on obtient l'équation suivante :

$$-x \sin(\phi) + y \cos(\phi) - \rho' = 0 \quad (2.1.2)$$

$$(\rho' = d\rho/d\phi)$$

Et on a par conséquent le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} x \cos(\phi) + y \sin(\phi) - \rho = 0 \\ -x \sin(\phi) + y \cos(\phi) - \rho' = 0 \end{cases}$$

On obtient de ces deux équations les formules suivantes :

$$\begin{cases} x(-\sin(\phi) \cos(\phi) + \cos(\phi) \sin(\phi)) + y(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) - \rho' \cos(\phi) - \rho \sin(\phi) = 0 \\ -x(\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)) + y(\cos(\phi) \sin(\phi) - \sin(\phi) \cos(\phi)) - \rho' \sin(\phi) + \rho \cos(\phi) = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne la représentation paramétrique de l'arc $(x(\phi), y(\phi))$

$$\begin{cases} x = -\rho' \sin(\phi) + \rho \cos(\phi) \\ y = \rho' \cos(\phi) + \rho \sin(\phi) \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Ce système d'équation nous donne l'ensemble des points de la droite G .

Le point P d'intersection entre la droite G et l'enveloppe de la famille de droites K dispose de coordonnées x et y .

Soit β la longueur du segments formé par les points P et H .

On a

$$\beta = \sqrt{x^2 + y^2 - \rho^2}$$

Donc, en appliquant la formule (2.1.3) sur x et y , on obtient

$$\beta = \rho' \quad (2.1.4)$$

Maintenant en dérivant les formules de (2.1.3), on obtient

$$\begin{cases} dx = \rho' \cos(\phi) d\phi - \rho \sin(\phi) d\phi - \rho'' \sin(\phi) d\phi + \rho' \cos(\phi) d\phi \\ dy = \rho' \sin(\phi) d\phi + \rho \cos(\phi) d\phi + \rho'' \cos(\phi) d\phi - \rho' \sin(\phi) d\phi \end{cases}$$

Ce qui donne les formules suivantes

$$\begin{cases} dx = -(\rho + \rho'') \sin(\phi) d\phi \\ dy = (\rho + \rho'') \cos(\phi) d\phi \end{cases} \quad (2.1.5)$$

Cela permet de conclure que

$$ds = |\rho + \rho''| d\phi$$

Avec s la longueur de l'arc paramétré $(x(\phi), y(\phi))$.

Définition 2.3. Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble convexe borné. Supposons que l'origine du plan $O \in \overset{\circ}{K}$ ($\overset{\circ}{K}$ est l'intérieur non vide de K). La fonction support $\phi \mapsto \rho(\phi)$ de K est définie comme suit

$$\forall \phi \in [0, 2\pi[, \rho(\phi) = \max_{(x,y) \in K} (x \cos(\phi) + y \sin(\phi)) = \max_{(x,y) \in \partial K} (x \cos(\phi) + y \sin(\phi))$$

Remarque 2.4. Si l'enveloppe de la famille de droites est exactement ∂K , et que l'origine $O \in K$, alors $\rho = \rho(\phi)$ est fonction support de l'ensemble convexe K .

On conclut d'après la proposition précédente que les droites tangentes (2.1.1) sont les droites support de K . Et d'après (2.1.4) que $\rho' > 0$. On obtient en dérivant ρ' l'équation suivante :

$$\rho'' = -(x \cos(\phi) + y \sin(\phi))$$

On a

$$\forall \phi \in [0, 2\pi[, \rho = \rho(\phi) = \max_{(x,y) \in \partial K} (x \cos(\phi) + y \sin(\phi))$$

Ce qui veut dire que $\rho > \rho''$. On obtient ainsi

$$ds = (\rho + \rho'') d\phi$$

Définition 2.5. [13] Soit K un ensemble convexe fermé, et $\rho = \rho(\phi)$ la fonction support de cet ensemble.

Le périmètre de la courbe convexe de l'ensemble K est donnée par

$$L = \int_0^{2\pi} \rho d\phi \quad (2.1.6)$$

Démonstration. On a d'après les résultats précédents que

$$ds = (\rho + \rho'') d\phi$$

s étant la longueur de l'arc paramétré, intégrer la formule précédente sur le bord ∂K nous donne le périmètre de l'ensemble K

$$L = \int_{\partial K} ds = \int_0^{2\pi} (\rho + \rho'') d\phi = \int_0^{2\pi} \rho d\phi + [\rho']_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} \rho d\phi + [y \cos(\phi) - x \sin(\phi)]_0^{2\pi}$$

$$\int_{\partial K} ds = \int_0^{2\pi} \rho d\phi = L$$

□

2.2 Mesure sur un ensemble de points et de droites

Dans ce qui suit, on considère l'espace mesurable $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2})$ où $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2}$ est la tribu borélienne de \mathbb{R}^2 , et (x, y) les coordonnées cartésiennes de \mathbb{R}^2 . Nous allons définir dans cette section une mesure d'un ensemble d'éléments (ensembles de points ou de droites du plan).

2.3 Mesure sur un ensemble de points

Définition 2.6. On se donne φ une fonction positive mesurable de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R}_+ .

On définit une mesure $\lambda_\varphi : \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ par l'intégrale de Lebesgue suivante : pour tout ensemble de points du plan $A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2}$,

$$\int_A d\lambda_\varphi = \lambda_\varphi(A) = \int_A \varphi(x, y) dx dy$$

où $d\lambda_\varphi = \varphi(x, y) dx dy$

La fonction φ est appelée fonction de densité.

En théorie des probabilités géométriques, la mesure λ_φ d'un ensemble de points ou de droites doit répondre à un critère qui permet à celle-ci d'être invariante sous le groupe de mouvement du plan (rotation et translation) noté \mathfrak{M} . Puisque λ est définie par la fonction de densité φ , alors il suffit de trouver une fonction φ permettant de satisfaire ce critère.

Soit $u \in \mathfrak{M}$ un mouvement dans le plan donné par les équations

$$\begin{cases} x' = x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha) + a \\ y' = x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha) + b \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Où (a, b) désigne les composantes de translation de u , et α l'angle de rotation de u .

Notons $A' = u(A)$ la transformée de A par le mouvement u . Cela nous donne $dx dy = dx' dy'$ (le jacobien est égal à 1). On a alors

$$\lambda_\varphi(A') = \int_{A'} \varphi(x', y') dx' dy' = \int_A (\varphi \circ u)(x, y) dx dy$$

Pour obtenir l'invariance de la mesure ν_φ par $u \in \mathfrak{M}$, il suffit d'avoir l'égalité $\lambda_\varphi(A) = \lambda_\varphi(A')$, et par conséquent $\varphi(x, y) = \varphi(x', y')$. Puisque tout point (x, y) peut être transformé en un autre point (x', y') par une infinité de mouvements u (u est transitif), alors la fonction φ doit être égale à une constante.

2.3.1 Probabilités géométriques

Après avoir défini la mesure d'ensembles de points, il est maintenant possible de définir une probabilité sur ces ensembles.

Définition 2.7. Soit A un ensemble de points du plan mesurable et borné. Alors, on peut définir une mesure de probabilité p sur le sous-espace mesuré $(A, \mathfrak{B}_A, \lambda_\varphi)$, où \mathfrak{B}_A est la tribu trace, par :

Pour tout $A' \in \mathfrak{B}_A$,

$$p(A') = \frac{\lambda_\varphi(A')}{\lambda_\varphi(A)} \quad (2.3.2)$$

2.4 Mesure sur un ensemble de droites :

Soit $E = \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[$ un sous ensemble du plan. Dans ce qui suit, on considère l'espace mesuré $(E, \mathfrak{B}_E, \lambda'_\varphi)$ où \mathfrak{B}_E est la tribu borélienne de E , et λ'_φ est la mesure induite par λ_φ (voir 2.6). φ est une fonction positive mesurable de E à valeurs dans \mathbb{R}_+ (qui est la restriction de la fonction φ définie précédemment). Pour définir la mesure sur un ensemble de droites, on reprend les résultats de la section (2.1).

Soit \mathfrak{G} l'ensemble de droites du plan. D'après la proposition (2.2), toute droite $G \in \mathfrak{G}$ est caractérisée par l'équation :

$$x \cos(\phi) + y \sin(\phi) - \rho = 0 \quad (2.4.1)$$

(voir figure 2.1.1)

Donc l'ensemble \mathfrak{G} est paramétrisé par : Pour tout $(\rho, \phi) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[$, on associe une droite $G(\rho, \phi) \in \mathfrak{G}$ qui peut s'écrire comme suit :

$$G(\rho, \phi) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \rho = x \cos(\phi) + y \sin(\phi)\} \quad (2.4.2)$$

On note par $\mathfrak{B}_\mathfrak{G}$ la tribu sur \mathfrak{G} obtenue par cette paramétrisation, et définissons maintenant une mesure sur l'espace mesurable $(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}_\mathfrak{G})$ (on utilise la mesure image).

Définition 2.8. On définit une mesure $\mu_\varphi : \mathfrak{B}_\mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{R}_+$ par : pour tout ensemble de droites du plan, $G \in \mathfrak{B}_\mathfrak{G}$,

$$\mu_\varphi(G) = \int_G d\mu_\varphi = \int_{G'} \varphi(\rho, \phi) d\rho d\phi = \lambda'_\varphi(G')$$

où $d\lambda'_\varphi = \varphi(\rho, \phi) d\rho d\phi$ et $G' = \{(\rho, \phi) \in E; G(\rho, \phi) \in G\}$

Remarque 2.9. Par définition, la mesure λ_φ est invariante sous le groupe de mouvement \mathfrak{M} du plan. Ce qui implique l'invariance de μ_φ . En choisissant alors $\varphi = 1$. On la notera par μ_1 .

2.5 Droites intersectant un ensemble ou une courbe convexe

On s'intéresse dans cette section à la mesure des droites intersectant un ensemble convexe fermé et borné K . On peut définir cette mesure en prenant un point $O \in K$ qui est origine du plan (Si l'origine n'appartient pas à K on utilise un mouvement de \mathfrak{M} qui va permettre de ramener l'origine à un point de l'intérieur de K), et une fonction support du convexe K donnée par $\rho = \rho(\phi)$ voir la définition de la fonction support (2.3). Et par application de la définition de la mesure sur l'ensemble de droites, on retrouve une mesure définie comme suit :

$$\mu_1(\{G; G \cap K \neq \emptyset\}) = \int_{\{G; G \cap K \neq \emptyset\}} d\mu_1 = \int_{G'} d\rho d\phi \quad (2.5.1)$$

où $G' = \{(\rho, \phi) \in [0, \rho(\phi)] \times [0, 2\pi[; G(\rho, \phi) \in G \text{ avec } G \cap K \neq \emptyset\}$

Théorème 2.10. *La mesure d'un ensemble de droites G intersectant un ensemble convexe borné K est exactement égale à son périmètre (la longueur de ces bords ∂K).*

$$\mu_1(\{G; G \cap K \neq \emptyset\}) = \int_{\{G; G \cap K \neq \emptyset\}} d\mu_1 = \int_{G'} d\rho d\phi = \int_0^{\rho(\phi)} \int_0^{2\pi} d\rho d\phi = \int_0^{2\pi} \rho d\phi = Per(K) = L$$

où L désigne le périmètre du convexe K , ou bien la longueur de l'enveloppe ∂K .

Démonstration. La preuve de ce théorème est une application directe du résultat donné par l'équation (2.1.6). \square

Définition 2.11. Soit $G \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{G}}$. Alors, on peut définir une mesure de probabilité \mathbb{P} sur le sous-espace mesuré $(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}_G, \mu_1)$, où \mathfrak{B}_G est la tribu trace, par :

Pour tout $\bar{G} \in \mathfrak{B}_G$,

$$\mathbb{P}(\bar{G}) = \frac{\mu_1(\bar{G})}{\mu_1(G)} \quad (2.5.2)$$

2.6 Droites intersectant ou séparant deux ensembles convexes

Il est question dans ce qui suit d'étendre les résultats précédents au cas de deux ensemble convexes [13]. Pour ce faire, nous allons prendre K et K' deux ensembles convexes bornés et fermés du plan. Posons L et L' les longueurs de ∂K et $\partial K'$ respectivement.

Afin de définir les mesures des droites intersectant les ensembles convexes, nous allons mettre en place des enveloppes internes et externes (figure 2.6.1).

Comme le montre la figure ci-dessous, les bords de l'enveloppe convexe de la réunion des ensembles K et K' est nommée enveloppe externe. On note celle-ci C_e . Cette courbe fermée a pour longueur posée L_e .

Pour notre cas ($K \cap K' = \emptyset$), il est également possible de considérer une enveloppe interne. On la note C_i . Cette courbe fermée a pour longueur posée L_i .

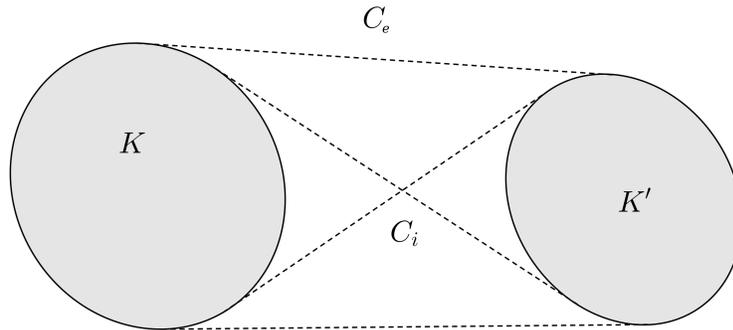


FIGURE 2.6.1 – Périmètre intérieur et extérieur de l'enveloppe convexe de K et K' si $K \cap K' \neq \emptyset$. L'enveloppe convexe de K et K' est notée C_e et le périmètre extérieur est $Per(C_e) = L_e$. L'enveloppe intérieure de K et K' est notée C_i et le périmètre intérieur est $Per(C_i) = L_i$.

En sachant que chaque droite qui passe par chaque courbes ∂K , $\partial K'$ et C_e possède deux points d'intersection avec celles-ci, et quatre points d'intersection avec la courbe C_i . Notons :

1. $\nu_{10} = \mu_1 \{G; G \cap K \cap K' \neq \emptyset\}$ la mesure de l'ensemble de droites passants par les deux ensembles convexes K et K' au même temps, et de ce fait par les enveloppes $\partial K, \partial K', C_e$ et C_i . L'indice 10 représente le nombre de points d'intersection avec $\partial K, \partial K', C_i$ et C_e .
2. $\nu_6 = \mu_1 [\{G; G \cap K \neq \emptyset\} \text{ ou } \{G; G \cap K' \neq \emptyset\}; \{G; G \cap K \cap K' = \emptyset\}]$ la mesure de l'ensemble des droites passants par K ou K' (sans passer par K et K' au même temps). L'indice 6 représente le nombre de points d'intersection avec les courbes $\partial K, C_i$ et C_e , ou $\partial K', C_i$ et C_e respectivement.
3. $\nu_4 = \mu_1 [\{G; G \cap K' = \emptyset\} \text{ et } \{G; G \cap K = \emptyset\} \text{ et } \{G; G \cap C_e \neq \emptyset\}]$ la mesure de l'ensemble des droites séparant K et K' (càd. elles ne passent ni par K ni par K'). L'indice 4 représente le nombre de points d'intersection avec les courbes C_e et C_i .
4. $\nu'_6 = \mu_1 [\{G; G \cap K \neq \emptyset\} \text{ et } \{G; G \cap K' = \emptyset\}]$ et $\nu''_6 = \mu_1 [\{G; G \cap K' \neq \emptyset\} \text{ et } \{G; G \cap K = \emptyset\}]$ les mesures respectives de l'ensemble des droites intersectant K sans passer par K' , et vice versa.

Proposition 2.12. *La mesure des droites intersectant les ensembles convexes K et K' dans chaque cas est donnée par*

1. $\nu_4 = L_i - (L + L')$
2. $\nu_{10} = L_i - L_e$
3. $\nu'_6 = L - (L_i - L_e)$
4. $\nu''_6 = L' - (L_i - L_e)$
5. $\nu_6 = L + L' - 2(L_i - L_e)$

Démonstration. Nous savons que la mesure d'un ensemble de droites intersectant un ensemble convexe est égale au périmètre de ce dernier (2.10). On obtient :

$$\begin{cases} \nu'_6 = L - \nu_{10} \\ \nu''_6 = L' - \nu_{10} \end{cases} \quad (2.6.1)$$

Donc

$$\nu_6 = \nu_6'' + \nu_6' = L' + L - 2\nu_{10} \quad (2.6.2)$$

On a également

$$L_e = \nu_4 + \nu_6 + \nu_{10} \quad (2.6.3)$$

on a

$$\begin{aligned} L &= \int_{\{G; G \cap K \neq \emptyset\}} d\mu_1 = \nu_6' + \nu_{10} \\ L' &= \int_{\{G; G \cap K' \neq \emptyset\}} d\mu_1 = \nu_6'' + \nu_{10} \\ L_i &= \int_{\{G; G \cap C_i \neq \emptyset\}} d\mu_1 = \nu_4 + \nu_6 + 2\nu_{10} \\ L_e &= \int_{\{G; G \cap C_e \neq \emptyset\}} d\mu_1 = \nu_4 + \nu_6 + \nu_{10} \end{aligned}$$

On obtient à partir de ces formules :

$$L + L' + L_e + L_i = 2\nu_4 + 3\nu_6 + 5\nu_{10} \quad (2.6.4)$$

En remplaçant L_e par sa valeur, on aura

$$L + L' + L_i = \nu_4 + 2\nu_6 + 4\nu_{10}$$

En remplaçant ν_6 par sa valeur, on aura

$$L + L' + L_i = \nu_4 + 2(L + L' - 2\nu_{10}) + 4\nu_{10}$$

Ce qui nous donne

$$\nu_4 = L_i - (L + L')$$

en remplaçant ν_4 et ν_6 dans (2.6.3), on retrouve

$$\nu_{10} = L_i - L_e$$

Et enfin

$$\nu'_6 = L - (L_i - L_e)$$

$$\nu''_6 = L' - (L_i - L_e)$$

$$\nu_6 = L + L' - 2(L_i - L_e)$$

□

2.6.1 Probabilités géométriques

Maintenant qu'on a construit les mesures des ensembles de droites passant par deux ensembles convexes, on calcule la probabilité que ces droites intersectent les ensembles convexes pour chaque cas possible.

Théorème 2.13. *Soient K et K' deux ensembles convexes bornés et fermés du plan. Si G est une droite prise au hasard dans le plan telle qu'elle rencontre l'enveloppe convexe de K et K' , alors*

La probabilité que la droite G passe par K et K' est donnée par

$$\mathbb{P}[\{G; G \cap K \cap K' \neq \emptyset\}] = \frac{\mu_1[\{G; G \cap K \cap K' \neq \emptyset\}]}{\mu_1[\{G; G \cap C_e \neq \emptyset\}]} = \frac{\nu_{10}}{L_e} = \frac{(L_i - L_e)}{L_e}$$

La probabilité que la droite G passe par K sans passer par K' est

$$\mathbb{P}[\{G; G \cap K \neq \emptyset\} \text{ et } \{G; G \cap K' = \emptyset\}] = \frac{\mu_1[\{G; G \cap K \neq \emptyset\} \text{ et } \{G; G \cap K' = \emptyset\}]}{\mu_1[\{G; G \cap C_e \neq \emptyset\}]} = 1 - \frac{(L_i - L)}{L_e}$$

La probabilité que la droite G passe par K' sans passer par K est

$$\mathbb{P}[\{G; G \cap K' \neq \emptyset\} \text{ et } \{G; G \cap K = \emptyset\}] = \frac{\mu_1[\{G; G \cap K' \neq \emptyset\} \text{ et } \{G; G \cap K = \emptyset\}]}{\mu_1[\{G; G \cap C_e \neq \emptyset\}]} = 1 - \frac{(L_i - L')}{L_e}$$

La probabilité que la droite sépare les deux ensembles est

$$\mathbb{P}[\{G; G \cap K' = \emptyset\} \text{ et } \{G; G \cap K = \emptyset\} \text{ et } \{G; G \cap C_e \neq \emptyset\}]$$

$$= \frac{\mu_1[\{G; G \cap K' = \emptyset\} \text{ et } \{G; G \cap K = \emptyset\} \text{ et } \{G; G \cap C_e \neq \emptyset\}]}{\mu_1[\{G; G \cap C_e \neq \emptyset\}]} = \frac{\nu_4}{L_e} = \frac{L_i - (L + L')}{L_e}$$

Enfin la probabilité que la droite qui passe par K' sachant qu'elle intersecte K est donnée par

$$\mathbb{P}[\{G; G \cap K' \neq \emptyset\} \mid \{G; G \cap K \neq \emptyset\}] = \frac{\mu_1[\{G; G \cap K' \neq \emptyset\} \text{ et } \{G; G \cap K \neq \emptyset\}]}{\mu_1[\{G; G \cap K \neq \emptyset\}]} = \frac{\nu_{10}}{L} = \frac{(L_i - L_e)}{L} \quad (2.6.5)$$

Chapitre 3

Détection de convergences globales dans l'image

Ce chapitre est essentiellement dédié à la modélisation aléatoire des droites de l'image, et l'usage des résultats de probabilités géométriques vus précédemment pour une étude théorique de la détection a contrario des zones de convergences globales sous différents modèles de bruit que l'on définira.

Il sera utile de s'inspirer de la méthode a contrario utilisée par les auteurs de [1] pour la détection des points de fuite (points d'intersection des droites projetées d'un espace 3D dans l'image (2D)). Une première partie est consacrée au pavage en régions équiprobables que nous détaillerons ci-dessous, puis suivra une finalisation de la procédure par des tests.

3.1 Modélisation aléatoire et Paramétrisation des droites

3.1.1 Paramétrisation des droites

Soit une image dont le domaine Ω est assimilé au disque circonscrit de celle-ci. On se donne un repère cartésien du plan de l'image comme le montre la figure (3.1.1), avec l'axe des abscisses qui est horizontal orienté positivement vers la droite et l'axe des ordonnées qui est vertical orienté positivement vers le bas ainsi que

l'origine O , centre de l'image.

On définit alors le paramétrage polaire d'une droite G en ramenant le couple de coordonnées polaires du projeté orthogonal de sur G dans $\mathbb{R} \times [0, \pi[$ par l'application :

$$(\rho, \phi) \rightarrow \begin{cases} (\rho, \phi) & \forall \phi \in [0, \pi[\\ (-\rho, \phi - \pi) & \forall \phi \in [\pi, 2\pi[\end{cases} \quad (3.1.1)$$

L'équation de la droite s'écrit alors

$$\rho - x \cos(\phi) + y \sin(\phi) = 0 \quad (3.1.2)$$

Avec $(\rho, \phi) \in \mathbb{R} \times [0, \pi[$

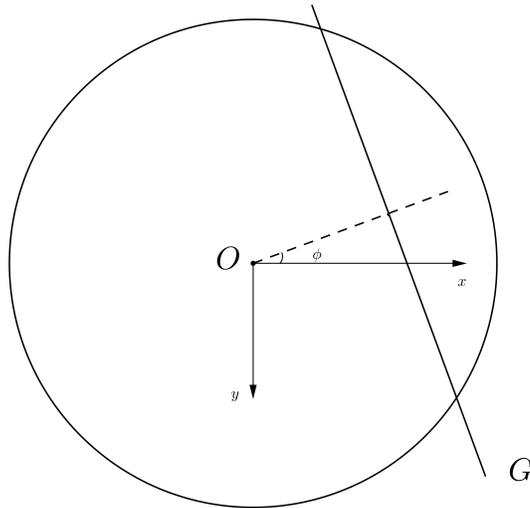


FIGURE 3.1.1 – Paramétrisation des droites

ρ est la coordonnée représentant la distance signée de la droite à l'origine. Tandis que ϕ est l'angle entre l'axe horizontal et la perpendiculaire à la droite G passant par l'origine.

Une paramétrisation de la droite G peut s'écrire comme suit :

$$G(\rho, \phi) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \rho = x \cos(\phi) - y \sin(\phi)\} \quad (3.1.3)$$

3.1.2 Modèle invariant par translation et rotation : modèle isotrope

Afin de définir un modèle uniforme sur l'ensemble des droites G de l'image, il est d'abord nécessaire de définir une mesure sur le couple de variables (ρ, ϕ) . Tel qu'on a vu dans le chapitre précédent, la mesure sur un ensemble de droites s'écrit sous la forme $\mu_f = \int \varphi(\rho, \phi) d\rho d\phi$ où φ est une fonction continue positive. On prend $\varphi(\rho, \phi) = 1$ afin de garantir l'invariance par translation et rotation sur le couple (ρ, ϕ) . Cette mesure est donnée par μ_1 , et on aura

$$d\mu_1 = d\rho d\phi$$

Le modèle ainsi défini est isotrope : aucune orientation n'est privilégiée.

3.1.3 Modèle anisotrope

Le choix d'un modèle anisotrope, tenant compte d'une orientation privilégiée, sur l'ensemble des droites de l'image est motivé par l'exemple décrivant l'orientation normale des spicules vers le tétou dans une mammographie. En effet, afin d'améliorer les détections dans le cadre des mammographies, il est nécessaire de définir des modèles anisotropes. Pour construire de tels modèles, les auteurs de [6] ont, en premier lieu, défini une mesure sur les droites du plan de l'image, qu'ils conditionnent par la suite sur l'ensemble des droites rencontrant une image.

On considère une image ayant un point de convergence globale M (Le point d'intersection d'un maximum de droites). Soit une mesure μ_ψ définie par $d\mu_\psi = \psi(\rho, \phi) d\rho d\phi$ sur le couple de (ρ, ϕ) , avec ψ une fonction continue positive (fonction de densité).

La fonction ψ est définie sur $\mathbb{R} \times [0, \pi[$ par :

$$\psi(\rho, \phi) = \frac{1}{\pi \sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left[-(\rho - x_M \cos(\phi) + y_M \sin(\phi))^2 / 2\sigma^2 \right] \quad (3.1.4)$$

où (x_M, y_M) désigne les coordonnées cartésiennes du point de convergence globale M . σ est un paramètre lié à la précision avec laquelle les droites convergent vers le point M .

L'invariance par changement d'origine de ce modèle est une propriété importante : le point de convergence globale n'est pas forcément l'origine du repère (centre de l'image), il est donc important de définir une mesure invariante par changement d'origine sur l'ensemble des droites de l'image. Vérifions que la mesure μ_ψ reste invariante par changement de l'origine.

On a le couple $(r_M, \theta_M) \in \mathbb{R} \times [0, \pi[$ de coordonnées polaires de M dans le repère de l'image. La variable r_M est la distance signée du point M à l'origine. Tandis que θ_M est l'angle entre l'axe horizontal et la perpendiculaire intersectant le point M passant par l'origine. Le couple de variables (r_M, θ_M) vérifie les relations :

$$x_M = r_M \cos(\theta_M)$$

$$y_M = -r_M \sin(\theta_M)$$

Après passage aux coordonnées polaire du point M , la densité ψ peut se réécrire comme suit

$$\psi(\rho, \phi) = \frac{1}{\pi \sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left[-(\rho - r_M \cos(\phi - \theta_M))^2 / 2\sigma^2 \right] \quad (3.1.5)$$

Identifions maintenant les coordonnées (ρ', ϕ') de la droite $G(\rho, \phi)$ dans le nouveau repère après translation de l'origine en $M(x_M, y_M)$. On a $\phi' = \phi$ (figure 3.1.2), et l'équation de la droite après changement d'origine

$$\rho' - (x - x_M) \cos(\phi) + (y - y_M) \sin(\phi) = 0 \quad (3.1.6)$$

$$\rho' - x \cos(\phi) + x_M \cos(\phi) + y \sin(\phi) - y_M \sin(\phi) = 0$$

$$\rho' + x_M \cos(\phi) - y_M \sin(\phi) - x \cos(\phi) + y \sin(\phi) = 0$$

$$\rho' + x_M \cos(\phi) - y_M \sin(\phi) - \rho = 0$$

Ce qui nous permet d'obtenir une identification de la coordonnée ρ' de la droite $G(\rho, \phi)$ dans le nouveau repère centré en M

$$\rho' = \rho - x_M \cos(\phi) + y_M \sin(\phi) \quad (3.1.7)$$

Maintenant en remplaçant (x_M, y_M) par les formules vérifiant les coordonnées polaires du point M , on obtient

$$\rho' = \rho - r_M \cos(\theta_M) \cos(\phi) - r_M \sin(\theta_M) \sin(\phi)$$

$$\rho' = \rho - r_M \cos(\phi - \theta_M) \quad (3.1.8)$$

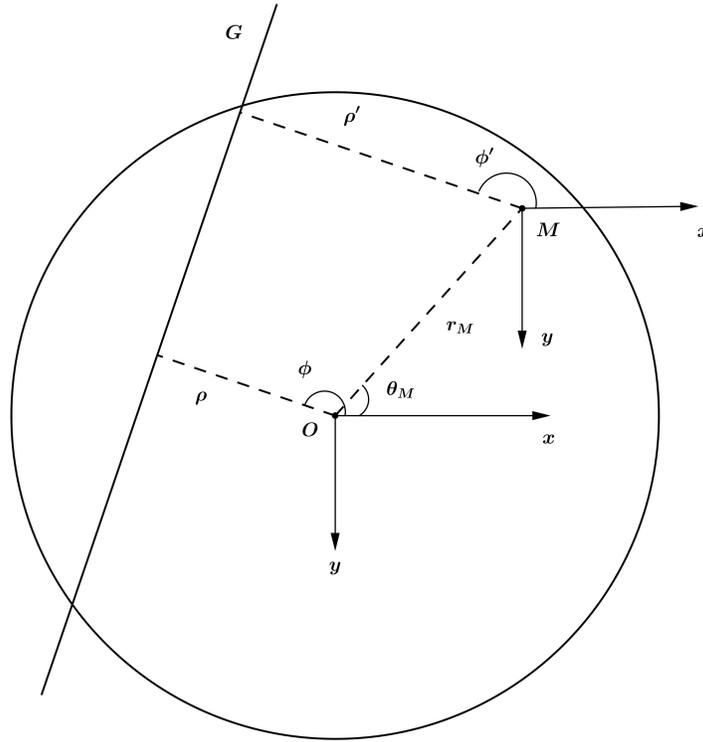


FIGURE 3.1.2 – Changement d’origine

On peut conclure ainsi que les coordonnées de la droite $G_{(\rho, \phi)}$ dans le nouveau repère deviennent $(\rho - r_M \cos(\phi - \theta_M), \phi)$. Donc $\rho - r_M \cos(\phi - \theta_M)$ est la distance signée de $G_{(\rho, \phi)}$ au point M . Et que

$$\psi(\rho - r_M \cos(\phi - \theta_M), \phi) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(\rho - r_M \cos(\phi - \theta_M))^2}{2\sigma^2}\right] = \psi(\rho, \phi)$$

La mesure μ_ψ est alors invariante par changement d’origine

Remarque 3.1. La constante $\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ assure que $\int_{\mathbb{R} \times [0, \pi]} d\mu_\psi = 1$ (ce résultat est obtenu par l’intégrale de Gauss). On conclue de ce fait que μ_ψ est une mesure de probabilité sur l’ensemble des droites du plan de l’image.

Définissons maintenant les variables aléatoires décrivant les attributs de la droite aléatoire $G(\rho, \phi)$.

Définition 3.2. La variable aléatoire $X : \Omega := \mathbb{R} \times [0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ suivant la loi μ_ψ (définie précédemment), est définie par : pour tout $\omega := (\rho, \phi) \in \mathbb{R} \times [0, \pi[$ on associe $X(\omega) = X(\rho, \phi) = \rho - r_M \cos(\phi - \theta_M)$. On notera par X_ϕ la v.a. obtenue de X en fixant le ϕ , et X_ρ la v.a. obtenue de X en fixant le ρ .

Proposition 3.3. *La variable aléatoire X_ϕ suit la loi normale centrée et de variance σ^2 . La variable X_ρ quant à elle suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, \pi[$.*

Démonstration. On a la fonction de densité ψ définie par

$$\psi(\rho, \phi) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-(\rho - r_M \cos(\phi - \theta_M))^2 / 2\sigma^2\right]$$

Posons $\tilde{\rho} = \rho - r_M \cos(\phi - \theta_M)$

Puisque le jacobien du changement de variable $(\rho, \phi) \rightarrow (\tilde{\rho}, \phi)$ est égal à 1. Alors la densité de probabilité $\tilde{\psi}$ sur le couple $(\tilde{\rho}, \phi)$ est la fonction

$$\tilde{\psi}(\tilde{\rho}, \phi) = \psi(\tilde{\rho} + r_M \cos(\phi - \theta_M), \phi) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp[-\tilde{\rho}^2 / 2\sigma^2]$$

Après intégration par rapport à ϕ , on obtient la densité marginale de $\tilde{\rho}$:

$$\tilde{\rho} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp[-\tilde{\rho}^2 / 2\sigma^2]$$

On reconnaît la loi normale de la v.a. X_ϕ de moyenne nulle et de variance σ^2

Montrons maintenant que la variable X_ρ est uniforme. Posons α la densité à support dans $[0, \pi[$ de la v.a. X_ρ , tel que :

$$\alpha(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}(\tilde{\rho}, \phi) d\tilde{\rho}$$

Ce qui donne

$$\alpha(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-(\rho - r_M \cos(\phi - \theta_M))^2 / 2\sigma^2\right] d\rho = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp[-\tilde{\rho}^2 / 2\sigma^2] d\tilde{\rho} = \frac{1}{\pi}$$

Ainsi α est la densité uniforme sur $[0, \pi[$ de la variable $X_\rho(\phi)$. \square

3.2 Détection de convergences globales

Nous allons nous pencher, maintenant que l'on a défini les modèles de bruit, sur la méthode a contrario utilisée dans [1], et proposons ensuite une extension aux modèles gaussiens.

3.2.1 Pavage en régions de fuites équiprobables sous le modèle uniforme

On considère une image de taille N (considérée comme étant un carré de côté égal à N). Le disque centré au centre de cette image ayant pour rayon $R_I = \frac{N}{\sqrt{2}}$ est appelé domaine intérieur, notée Ω . La partie externe au disque sera appelée domaine extérieur.

L'idée d'un pavage en régions équiprobables introduite par Almansa et al. dans [1] provient du fait qu'il est nécessaire de trouver une alternative au principe de regroupement des segments détectés par le LSD. En effet, ce principe conduit à des erreurs de mesure lors de la détection, et cela est dû au fait qu'il est impossible que plusieurs droites s'intersectent en exactement un point. On considère alors que des segments détectés doivent être regroupés si leurs droites support rencontrent une même région. Ces régions sont appelées régions de fuite, ou région test. On effectue alors un pavage du plan de l'image en un nombre fini m de régions test V_j :

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{j=1}^m V_j$$

Celles-ci sont de deux sortes : les régions test extérieures se trouvant dans le domaine extérieur, partitionnées par des portions de secteurs angulaires délimitées par des cercles centrés au centre de l'image (figure 3.2.2), et les régions test intérieures, appartenant au domaine Ω de l'image, qui sont des carrés dont le côté choisi est égal au bord intérieur des premières régions extérieures (figure 3.2.2).

Le choix des rayons des cercles centrés au centre de l'image est conditionné par la propriété d'équiprobabilité des régions test sous la loi uniforme. Afin d'assurer que deux régions test, intérieure et extérieure, nécessitent le même nombre de droites les intersectant pour qu'elles soient détectés, il faut que la probabilité qu'une droite

intersectant une région interne soit égale à la probabilité que cette droite intersecte une région externe.

Un algorithme itératif est donné par les auteurs pour le calcul d'une suite $(d_n^r)_n$ des rayons concentriques successifs des cercles délimitant les régions externes, et ce afin de garantir leur équiprobabilité. Une condition nécessaire sur la précision angulaire des régions est donnée par l'existence de cette suite.

Pour construire cet algorithme, il faut d'abord calculer la probabilité qu'une droite intersecte chacune des régions intérieure et extérieure respectivement.

Notons le périmètre du domaine Ω de l'image par $Per(\Omega)$, et par $Per(V_i)$ le périmètre de la région intérieure V_i . La longueur du bord intérieur des premières régions extérieures est égal à $r = 2R_I \sin(d\theta)$. (i.e. $d\theta$ représente la précision angulaire des régions de fuites externes)

La probabilité qu'une droite intersecte une région intérieure de l'image sous la mesure uniforme μ_1 est donnée d'après le théorème (2.13) par :

$$p_i = \mathbb{P}[\{G; G \cap V_i \neq \emptyset\} \mid \{G; G \cap \Omega \neq \emptyset\}] = \frac{\mu_1[\{G; G \cap V_i \neq \emptyset\} \text{ et } \{G; G \cap \Omega \neq \emptyset\}]}{\mu_1[\{G; G \cap \Omega \neq \emptyset\}]} = \frac{\mu_1[\{G; G \cap V_i \neq \emptyset\}]}{\mu_1[\{G; G \cap \Omega \neq \emptyset\}]}$$

$$p_i = \frac{Per(V_i)}{Per(\Omega)} = \frac{8R_I \sin(d\theta)}{2\pi R_I} = \frac{4 \sin(d\theta)}{\pi} \quad (3.2.1)$$

Calculons maintenant la probabilité qu'une droite $G(\rho, \phi)$ intersecte une région extérieure V_e sous la mesure uniforme. Notons par d et d' les rayons de cercles délimitant une région V_e , et donnons l'écart angulaire sous le modèle uniforme. Ce dernier est égal à $d\theta$. On a également du fait que le modèle uniforme est invariant par rotation que cette probabilité ne dépend pas de l'angle entre la région V_e et l'axe horizontal. Supposons que la région V_e est centrée sur l'axe horizontal, et notons par $p_e(d, d')$ la probabilité que nous souhaitons calculer.

Celle-ci est donnée d'après le théorème (2.13) formule (2.6.5) par :

$$p_e(d, d') = \mathbb{P}(\{G; G \cap V_e \neq \emptyset\} \mid \{G; G \cap \Omega \neq \emptyset\}) = \frac{\mu_1[\{G; G \cap V_e \neq \emptyset\} \text{ et } \{G; G \cap \Omega \neq \emptyset\}]}{\mu_1[\{G; G \cap \Omega \neq \emptyset\}]}$$

$$p_e(d, d') = \frac{(L_i - L_e)}{Per(\Omega)} \quad (3.2.2)$$

Où L_i et L_e sont respectivement les périmètres des enveloppes intérieure et extérieure des régions internes et externes (voir figure (2.6.1).

Afin de donner une formule explicite pour $p_e(d, d')$, nous allons calculer chaque périmètre donné. On observe d'après la figure (2.6.1) que $L_i - L_e$ est composé de deux arcs de cercles d'angle α , ainsi que de deux cotés supérieurs et inférieurs de V_j de longueur $q' - q = (d' - d) / \cos(\theta)$ et de deux segments de longueur $l_i - l_e$. Donc on aura

$$L_i - L_e = 2(R_I \alpha + q' - q + l_i - l_e)$$

On retrouve également grâce aux deux triangles d'angles β et β' les longueurs :

$$l_i = R_I \tan(\beta)$$

$$l_e = R_I \tan(\beta')$$

Avec $\beta = \arccos(R_I \cos(\theta) / d)$ et $\beta' = \arccos(R_I \cos(\theta) / d')$.

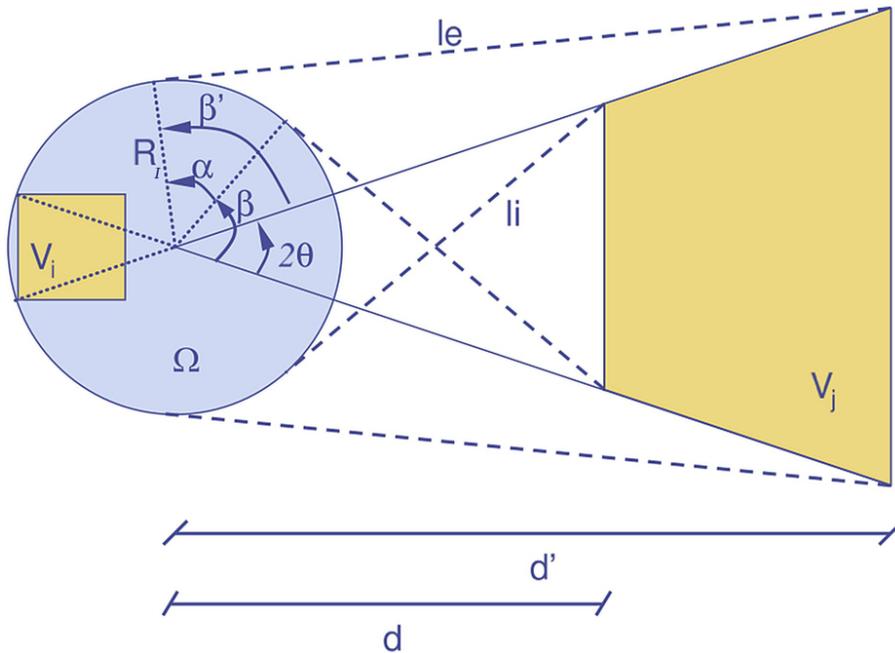


FIGURE 3.2.1 – [7] Illustration des régions extérieures et intérieures de l'image

Puisque $\alpha + \beta = 2\theta + \beta'$, et $Per(\Omega) = 2\pi R_I$ alors la formule (3.2.2) devient :

$$p_e(d, d') = \frac{(L_i - L_e)}{Per(\Omega)} = \frac{2(R_I\alpha + q' - q + l_i - l_e)}{2\pi R_I} = \frac{1}{\pi} \left(2\theta + \left[\beta + \frac{1}{\cos(\beta)} - \tan(\beta) \right]_{\beta}^{\beta'} \right)$$

$$p_e(d, d') = \frac{(L_i - L_e)}{Per(\Omega)} = \frac{1}{\pi} \left(2\theta + \left[\arccos\left(\frac{1}{q}\right) + q - \sqrt{q^2 - 1} \right]_{q=\frac{d}{R_I \cos(\theta)}}^{q=\frac{d'}{R_I \cos(\theta)}} \right) \quad (3.2.3)$$

où le crochet intérieur signifie qu'on prend la différence des valeurs aux bornes.

Avec la condition d'équiprobabilité des régions intérieures et extérieures, on peut définir d'une manière unique la suite $(d_n)_n$. Pour ce faire, on fixe $d_1 = R_I$ et on retrouve le rayon d'_1 en résolvant l'équation $p_e(d, d') = p_i$. On continue à itérer le procédé en prenant $d_2 = d'_1$, et ce jusqu'à obtenir $d' \geq d_\infty$ où d_∞ est défini par

$$\lim_{d' \rightarrow \infty} p_e(d_\infty, d') = p_i$$

Pour le calcul de cette limite, on observe qu'en faisant tendre $d' \rightarrow \infty$ on aura $\beta' = \pi/2$ et donc $(1/\cos(\beta') - \tan(\beta')) \rightarrow 0$ lorsque $\beta' \rightarrow \pi/2$; alors,

$$\lim_{d' \rightarrow \infty} p_e(d_\infty, d') = \frac{1}{\pi} \left(2\theta + \frac{\pi}{2} - \beta - \frac{1}{\cos(\beta)} + \tan(\beta) \right)$$

On peut alors vérifier aisément que d_∞ est fini et qu'il satisfait :

$$4 \sin(d\theta) = 2d\theta + \frac{\pi}{2} - \beta_\infty - \frac{1}{\cos \beta_\infty} + \tan(\beta_\infty)$$

$$\beta_\infty = \arccos\left(\frac{R_I \cos(d\theta)}{d_\infty}\right)$$

D'après les expériences réalisées par les auteurs, le meilleur paramètre $d\theta$ à utiliser est choisit de la forme $d\theta_s = 2^{-s}\pi$ avec $s = 4, 5, 6, 7$.

Notons la partition du plan en m_s région pour chaque $d\theta_s$ par :

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{j=1}^{m_s} V_{j,s}$$

L'équation (3.2.3) devient en posant $\gamma(q) = q - \sqrt{q^2 - 1} + \arccos \frac{1}{q}$ comme suit

$$p_e(d, d') = \frac{(L_i - L_e)}{Per(\Omega)} = \frac{1}{\pi} \left(2\theta + \left[\gamma \left(\frac{d'}{R_I \cos(\theta)} \right) - \gamma \left(\frac{d}{R_I \cos(\theta)} \right) \right] \right) \quad (3.2.4)$$

On aura ainsi

$$\lim_{d' \rightarrow \infty} p_e(d_\infty, d') = \frac{1}{\pi} \left(2\theta + \frac{\pi}{2} - \gamma \left(\frac{d}{R_I \cos(\theta)} \right) \right)$$

$$4 \sin(d\theta) = \frac{1}{\pi} \left(2\theta + \frac{\pi}{2} - \gamma \left(\frac{d_\infty}{R_I \cos(\theta)} \right) \right)$$

Donnons alors l'algorithme de calcul des rayons de cercles concentriques construit par les auteurs de [6] :

Algorithm 1 Calculer la suite (d_n) des rayons des cercles concentriques

Input : R_I, r

Output : $d\theta_s, d_1, \dots, d_n$

- 1: $n \leftarrow 1$
 - 2: $d_1 \leftarrow R_I$
 - 3: $s \leftarrow [4, 5, 6, 7]$
 - 4: $d\theta_s \leftarrow 2^{-s}\pi$
 - 5: $d_\infty \leftarrow R_I \gamma^{-1} \left(2\theta + \frac{\pi}{2} - \pi \frac{r}{R_I} \right)$
 - 6: **While** $d_n < d_\infty$ **do**
 - 7: $n \leftarrow n + 1$
 - 8: $d_n \leftarrow R_I \gamma^{-1} \left(\frac{\pi r}{R_I} + \gamma \left(\frac{d_{n-1}}{R_I} \right) - 2\theta \right)$
 - 9: **end**
-

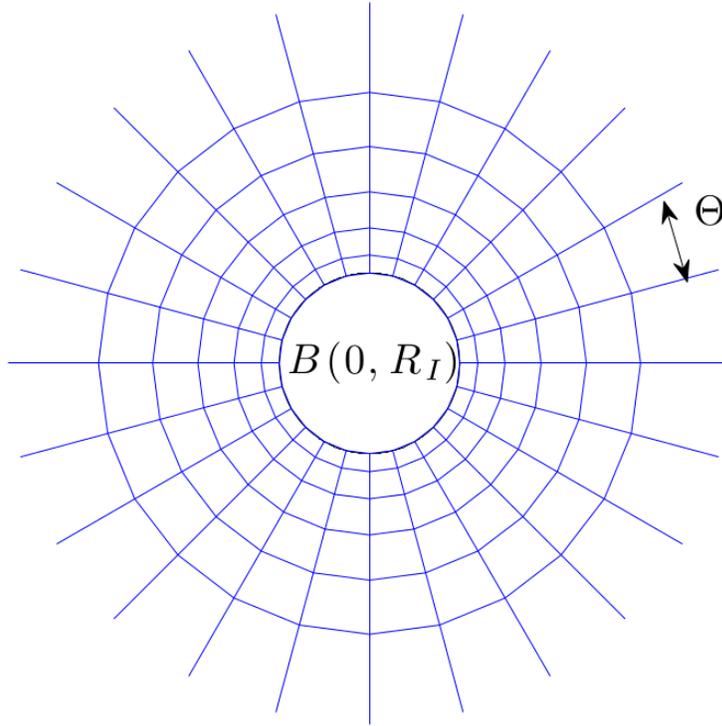


FIGURE 3.2.2 – [6]Pavage en régions équiprobables

3.2.2 Extension au cas d'un modèle gaussien

Les résultats de géométrie aléatoires introduits précédemment peuvent se généraliser pour le cas de droites distribués selon le modèle gaussien ((3.1.4)). On utilisera pour cela la définition de la fonction support d'un ensemble convexe (2.3)

Proposition 3.4. *La mesure μ_ψ d'un ensemble de droites G intersectant un ensemble convexe K s'écrit*

$$\mu_\psi(\{G; G \cap K \neq \emptyset\}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi\left(\frac{\rho(\phi) - r_M \cos(\theta_M - \phi)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\rho(\phi + \pi) - r_M \cos(\theta_M - \phi)}{\sigma}\right) d\phi$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite donnée par :

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-u^2/2] du$$

Démonstration. En appliquant définition (2.3) et en utilisant la paramétrisation des droites donnés dans (3.1.1), on a

$$\mu_\psi(\{G; G \cap K \neq \emptyset\}) = \int_{\{G; G \cap K \neq \emptyset\}} \psi(\rho, \phi) d\rho d\phi = \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{-\rho(\phi+\pi)}^{\rho(\phi)} \psi(\rho, \phi) d\rho d\phi$$

$$\mu_\psi(\{G; G \cap K \neq \emptyset\}) = \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{1}{\pi} \int_{-\rho(\phi+\pi)}^{\rho(\phi)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-(\rho - r_M \cos(\phi - \theta_M))^2 / 2\sigma^2] d\rho d\phi$$

En effectuant le changement de variables $\rho \mapsto \frac{\rho - r_M \cos(\phi - \theta_M)}{\sigma}$

$$\begin{aligned} \mu_\psi(\{G; G \cap K \neq \emptyset\}) &= \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{1}{\pi} \int_{(-\rho(\phi+\pi) - r_M \cos(\phi - \theta_M))/\sigma}^{(\rho(\phi) - r_M \cos(\phi - \theta_M))/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-\rho^2/2] d\rho d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{1}{\pi} - \int_{(-\rho(\phi+\pi) - r_M \cos(\phi - \theta_M))/\sigma}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-\rho^2/2] d\rho d\phi \\ &\quad + \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{(\rho(\phi) - r_M \cos(\phi - \theta_M))/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-\rho^2/2] d\rho d\phi \end{aligned}$$

En posant

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-u^2/2] du$$

On retrouve exactement la formule

$$\mu_\psi(\{G; G \cap K \neq \emptyset\}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi\left(\frac{\rho(\phi) - r_M \cos(\theta_M - \phi)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\rho(\phi + \pi) - r_M \cos(\theta_M - \phi)}{\sigma}\right) d\phi$$

□

En particulier pour un disque Ω de rayon R_I , on aura

Proposition 3.5. *La mesure μ_ψ d'un ensemble de droites G intersectant le domaine de l'image Ω s'écrit*

$$\mu_\psi(\{G; G \cap \Omega \neq \emptyset\}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi\left(\frac{R_I - r_M \cos(\phi)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-R_I - r_M \cos(\phi)}{\sigma}\right) d\phi \quad (3.2.5)$$

où R_I est le rayon de l'image.

Démonstration. En utilisant la proposition (3.4), et comme la fonction support de Ω est égale à R_I on a :

$$\begin{aligned} \mu_\psi(\{G; G \cap \Omega \neq \emptyset\}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi\left(\frac{R_I - r_M \cos(\phi - \theta_M)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-R_I - r_M \cos(\phi - \theta_M)}{\sigma}\right) d\phi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi\left(\frac{R_I - r_M \cos(\phi)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-R_I - r_M \cos(\phi)}{\sigma}\right) d\phi \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Cela est vérifié car la fonction intégrée est π -périodique. La mesure $\mu_\psi(\{G; G \cap \Omega \neq \emptyset\})$ ne dépend donc pas de θ_M . \square

3.2.3 Détection a contrario de convergences de droites dans le plan d'une image

On va s'intéresser dans ce qui suit à la détection de zones de convergences globales, qui sont intuitivement celles intersectées par le plus grand nombre de droites de l'image. La méthode a contrario utilisée par les auteurs de [?] s'intéresse au nombre de droites intersectant chaque zone de convergence potentielle, qui sont représentées par les régions de fuites $V_{j,s}$.

3.2.3.1 Nombre de fausses alarmes et régions de fuites significatives

Soit N_s le nombre de segments détectés par le LSD. On observe ici un échantillon de droites supports l_1, \dots, l_{N_s} des N_s segments. Ces N_s droites suivent la paramétrisation (3.1.3) avec $(X_i)_{i=1, \dots, N_s}$ une famille de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (cette famille de v.a. représente les attributs de la droite expliqués précédemment). Considérons maintenant l'événement qu'au moins k parmi ces N_s droites rencontrent une région de fuite $V_{j,s}$, et observons

ces réalisations. La probabilité d'un tel événement est donnée par une distribution binomiale $\mathcal{B}(N_s, k, p_s)$, où p_s est la probabilité qu'une droite rencontre une région de fuite $V_{j,s}$. Tant que les m_s régions de fuites V_j sont choisies de sorte à échantillonner toutes les régions de fuite possibles, alors on effectue m_s tests, et on définit ainsi un nombre de fausses alarmes ,i.e., l'espérance de réalisation de l'événement géométrique, pour chaque région $V_{j,s}$ par :

$$NFA(V_{j,s}) = m_s \cdot \mathcal{B}(N_s, k, p_s) \quad (3.2.7)$$

Soit $0 \leq \varepsilon \leq 1$, on dit alors qu'une région est ε - *significant* si k est suffisamment grand pour avoir $NFA(V_{j,s}) \leq \varepsilon$. Si $\varepsilon = 1$ alors la région est dite simplement *significant*.

Rappelons la formule de la queue de la binomiale de paramètre l et p

$$\mathcal{B}(l, k, p) := \sum_{j=k}^l \binom{l}{j} p^j (1-p)^{l-j}$$

(i.e. Un événement est dit ε -*significant* si l'espérance du nombre de réalisation de cet événement est inférieure à ε sous la distribution uniforme)

Chapitre 4

Estimation de modèles anisotrope et isotrope

Dans une mammographie, les structures linéaires représentant les spicules du sein convergent naturellement vers un point situé autour du tétou. Ce qui a poussé les auteurs de [6] à modéliser le fait que toutes les droites de l'image ou seulement une partie d'entre elles convergent vers un point M (point de convergence globale). Pour cela, ils ont effectués une modélisation de ces distributions empiriques particulières avec un modèle de mélange paramétrique, dont un terme est la mesure uniforme sur les droites de l'image et dont l'autre terme modélise une convergence principale des droites. La loi de la distribution des droites de l'image est munie d'une densité mélange définie comme suit :

$$f_{p,\sigma}(\rho, \phi) = I_{\{G; G \cap \Omega \neq \emptyset\}} \times \left[\frac{1-p}{\text{per}(\Omega)} + \frac{p}{\pi\sqrt{2\pi}\sigma\mu_\psi(\{G; G \cap \Omega \neq \emptyset\})} e^{-(\rho-x_M \cos(\phi)+y_M \sin(\phi))^2/2\sigma^2} \right] \quad (4.0.1)$$

Cette densité est un mélange de deux termes, le premier suit une loi uniforme, et le second est le modèle gaussien muni de la mesure définie précédemment ($\mu_\psi(\{G; G \cap \Omega \neq \emptyset\})$). La fonction $f_{p,\sigma}$ est donc une densité de probabilité pour $(\rho, \phi) \in [-R_I, R_I] \times [0, \pi[$. Le terme $\text{per}(\Omega) = \mu_1(\{G; G \cap \Omega \neq \emptyset\})$ désigne le périmètre de l'image de domaine assimilé au disque de rayon R_I et centré au centre de l'image. Le couple (x_M, y_M) désigne quant à lui les coordonnées du point de convergence globale vers lequel les droites de l'image convergent avec la probabilité

p .

Nous allons maintenant chercher lequel des modèles (4.0.1) approche et explique le mieux la distribution empirique des droites d'une image. Pour cela, il faudra estimer les paramètres M , p et σ .

4.1 Estimation du point de convergence globale

4.1.1 Le point le plus significatif

Nous avons défini dans le chapitre précédent le procédé permettant de détecter la zone de convergence globale, la région de fuite la plus significative contre le modèle uniforme. Le point le plus significatif (point vers lequel le plus grand nombre de droites convergent) est choisi comme le centre de la région la plus significative. Ce qui permet de définir le point de convergence global avec la validation fournie par la méthode a contrario.

4.2 Estimation du poids et de la variance

L'estimation des paramètres p et σ se fera dans ce qui suit simultanément, et ce, en maximisant la log-vraisemblance. Celle-ci est vue comme fonction de deux variables p et σ dépendant des données de l'échantillon $(\rho_n, \phi_n)_{1 \leq n \leq N}$. Pour calculer la log-vraisemblance empirique sur le couple (ρ, ϕ) , des échantillons d'ordre $N = 1000$, comme dans le cas d'une mammographie, ne suffisent pas. Les auteurs préfèrent alors faire une estimation suivie par les observations de $\tilde{\rho}_n = \rho_n - x_M \cos(\phi_n) + y_M \sin(\phi_n)$ qui dépend de p et de σ . Cette estimation est faite en maximisant la log-vraisemblance de la variable aléatoire $\tilde{\rho}$ (distance signée de la droite $G_{(\rho, \phi)}$ au point de convergence globale M).

Proposition 4.1. *La loi de la variable $\tilde{\rho}$ lorsque le couple (ρ, ϕ) suit le modèle de mélange (4.0.1) est donnée par :*

$$g_{p, \sigma}(\tilde{\rho}) = \left[\frac{1-p}{2R_I} + \frac{p}{\sqrt{2\pi}\sigma\mu_\psi(G \cap \Omega \neq \emptyset)} e^{-\tilde{\rho}^2/2\sigma^2} \right] J(\tilde{\rho}) \quad (4.2.1)$$

$$\text{où } J(\tilde{\rho}) = \int_0^\pi I_{\{\tilde{\rho} - x_M \cos(\phi) + y_M \sin(\phi)\}} d\phi$$

Démonstration. On procède pour démontrer ce résultat comme pour le cas de la proposition (3.3)

On a le changement de variable donné par $\tilde{\rho} = \rho - x_M \cos(\phi) + y_M \sin(\phi) = \rho - r_M \cos(\phi - \theta_M)$ est la distance signée de la droite G au point M . Notons la densité de probabilité sur $(\tilde{\rho}, \phi)$ suivant le modèle (4.0.1) par $\tilde{f}_{p,\sigma}$. Son expression est donnée par :

$$\tilde{f}_{p,\sigma}(\tilde{\rho}, \phi) = f_{p,\sigma}(\tilde{\rho} - r_M \cos(\phi - \theta_M), \phi) = I_{\{G; G \cap \Omega \neq \emptyset\}} \times \left[\frac{1-p}{\text{per}(\Omega)} + \frac{p}{\pi \sqrt{2\pi} \sigma \mu_\psi(G \cap \Omega \neq \emptyset)} e^{-\tilde{\rho}^2/2\sigma^2} \right]$$

(car le jacobien du changement de variables $(\rho, \phi) \mapsto (\tilde{\rho}, \phi)$ est égal à 1)

En intégrant $\tilde{f}_{p,\sigma}(\tilde{\rho}, \phi)$ par rapport à ϕ , on obtient la densité marginale de $\tilde{\rho}$:

$$\int_0^\pi \tilde{f}_{p,\sigma}(\tilde{\rho}, \phi) d\phi = \int_0^\pi I_{\{G; G \cap \Omega \neq \emptyset\}} d\phi \times \int_0^\pi \left[\frac{1-p}{\text{per}(\Omega)} + \frac{p}{\pi \sqrt{2\pi} \sigma \mu_\psi(G \cap \Omega \neq \emptyset)} e^{-\tilde{\rho}^2/2\sigma^2} \right] d\phi$$

On a $\mu_\psi(\{G; G \cap \Omega \neq \emptyset\}) = Z_\sigma$ qui est la constante de normalisation de la densité gaussienne : c'est la mesure sous ψ de l'ensemble des droites qui intersectent l'image. Elle a déjà été calculée dans l'équation (3.2.6), ce qui permet de conclure que

$$\int_0^\pi \tilde{f}_{p,\sigma}(\tilde{\rho}, \phi) d\phi = \int_0^\pi I_{|\tilde{\rho} - r_M \cos(\phi - \theta_M)| \leq R_I} d\phi \times \left[\frac{1-p}{2\pi R_I} \int_0^\pi d\phi + \frac{p}{\pi \sqrt{2\pi} \sigma \mu_\psi(G \cap \Omega \neq \emptyset)} e^{-\tilde{\rho}^2/2\sigma^2} \int_0^\pi d\phi \right]$$

\implies

$$g_{p,\sigma}(\tilde{\rho}) = \int_0^\pi I_{|\tilde{\rho} - r_M \cos(\phi - \theta_M)| \leq R_I} d\phi \times \left[\frac{1-p}{2R_I} + \frac{p}{\sqrt{2\pi} \sigma \mu_\psi(G \cap \Omega \neq \emptyset)} e^{-\tilde{\rho}^2/2\sigma^2} \right]$$

□

Calculons maintenant l'intégrale

$$J(\tilde{\rho}) = \int_0^\pi I_{\{G; G \cap \Omega \neq \emptyset\}} d\phi = \int_0^\pi I_{|\tilde{\rho} - r_M \cos(\phi - \theta_M)| \leq R_I} d\phi$$

Supposons que r_M positif et $\theta_M = 0$, et effectuons le changement de variable $u = \cos(\phi) \implies \phi = \arccos(u)$. On obtient donc :

$$J(\tilde{\rho}) = \int_{-1}^1 I_{\{|\tilde{\rho} - r_M u| \leq R_I\}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$J(\tilde{\rho}) = \int_{-1}^1 I_{\left\{\frac{\tilde{\rho} - R_I}{r_M} \leq u \leq \frac{-\tilde{\rho} + R_I}{r_M}\right\}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

En posant :

$$\begin{cases} a(\tilde{\rho}) = \max\left(-1, \frac{\tilde{\rho} - R_I}{r_M}\right) \\ b(\tilde{\rho}) = \min\left(1, \frac{-\tilde{\rho} + R_I}{r_M}\right) \end{cases}$$

On obtient Le résultat suivant :

$$J(\tilde{\rho}) = I_{\{a(\tilde{\rho}) \leq b(\tilde{\rho})\}} (\arccos(a(\tilde{\rho})) - \arccos(b(\tilde{\rho})))$$

La log-vraisemblance des observation $\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_N$ est ainsi donnée par :

$$\mathcal{L}\mathcal{L}(\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_N; p, \sigma) = \sum_{i=1}^N \log g_{p,\sigma}(\tilde{\rho}_i) \quad (4.2.2)$$

Et enfin,

$$(\hat{p}, \hat{\sigma}) = \arg \max_{(p,\sigma)} \mathcal{L}\mathcal{L}(\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_N; p, \sigma)$$

Voici un algorithme résumant les méthodes d'estimation :

Algorithm 2 Estimation d'un modèle de mélange paramétrique

Input : $r, R_I, k, N_s, M_s, (\rho_n, \phi_n)_{n=1, \dots, N}$

Output : $M, \hat{p}, \hat{\sigma}$

```

1: For  $k = 1$  to  $N_s$  Do
2:    $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{j=1}^{M_s} V_{j,s}$ 
3:   For  $V \in \{V_{j,s}^k\}$  Do
4:      $\text{NFA}(V)$ 
5:   end
6: end
7:  $V^* \leftarrow \arg \min_{k, V \in V_{j,s}^k} \text{NFA}(V)$ 
8:  $(x_M, y_M) \leftarrow \text{centre de } \{V^*\}$ 
9: For  $n = 1$  to  $N$  Do
10:  $\tilde{\rho}_n = \rho_n - x_M \cos \phi_n + y_M \sin \phi_n$ 
11: end
12:  $(\hat{p}, \hat{\sigma}) = \arg \max_{(p, \sigma)} \mathcal{L} \mathcal{L}(\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_N; p, \sigma)$ 

```

Chapitre 5

Expérience sur des mammographies

5.1 Principe du Line Segment Detector

Le LSD est une méthode qui permet d'extraire des informations significatives dans une image, et ce à partir de segments décrivant les différentes formes géométriques dans cette dernière.

Nous allons présenter dans ce qui suit les principales étapes et principes du LSD fournis par les auteurs de [14]. On donnera pour conclure un l'algorithme développé par les auteurs.

Étape 1 : Partition de l'image La première étape du LSD consiste à construire des régions de sorte à regrouper les pixels disposant de la même orientation. Cette orientation est calculée en chaque pixel comme étant la direction orthogonale au gradient en un point. On initialise les premières régions en prenant les pixels ayant l'amplitude du gradient la plus élevée. Huit pixels voisins dont l'orientation est similaire au premier pixel choisi sont ajoutés à la région. Ce procédé est réitéré jusqu'à n'avoir aucun pixel voisin ayant la même orientation que les précédents.

Étape 2 : Approximation rectangulaire des régions Cette étape permet d'avoir les régions les plus fiables, et ce en approximant chacune d'elle par un

rectangle dont le centre est le barycentre de tous les pixels de la région pondérés par la norme de leur gradient. L'orientation est choisie dans la première direction d'inertie. La largeur et la longueur du rectangle sont alors choisies de sorte qu'il recouvre la région concernée.

Étape 3 : Validation du segment Cette étape de validation permet de sélectionner le segment le plus probable selon un critère a contrario développé dans [8].

Algorithm 3 LSD : Line Segment Detector

Input : An image I ; parameters ρ , τ and ε

Output : A list *out* of rectangles

```

1: (LLAngles, GradMod, OrderedListPixels)  $\leftarrow$  Grad( $I$ ,  $\rho$ )
2: Status(allpixels)  $\leftarrow$  NotUsed
3: foreach pixel  $P$  in OrderedListPixels do
4:   if Status( $P$ ) = NotUsed then
5:     region  $\leftarrow$  RegionGrow( $P$ ,  $\tau$ , Status )
6:     rect  $\leftarrow$  RectApprox(region)
7:     nfa  $\leftarrow$  NFA(rect)
8:     nfa  $\leftarrow$  ImproveRect(rect)
9:     if  $nfa < \varepsilon$  then
10:      Add rect to out
11:      (region)  $\leftarrow$  Used
12:     else
13:      Status(region)  $\leftarrow$  NotIni
14:     end
15:   end
16: end

```

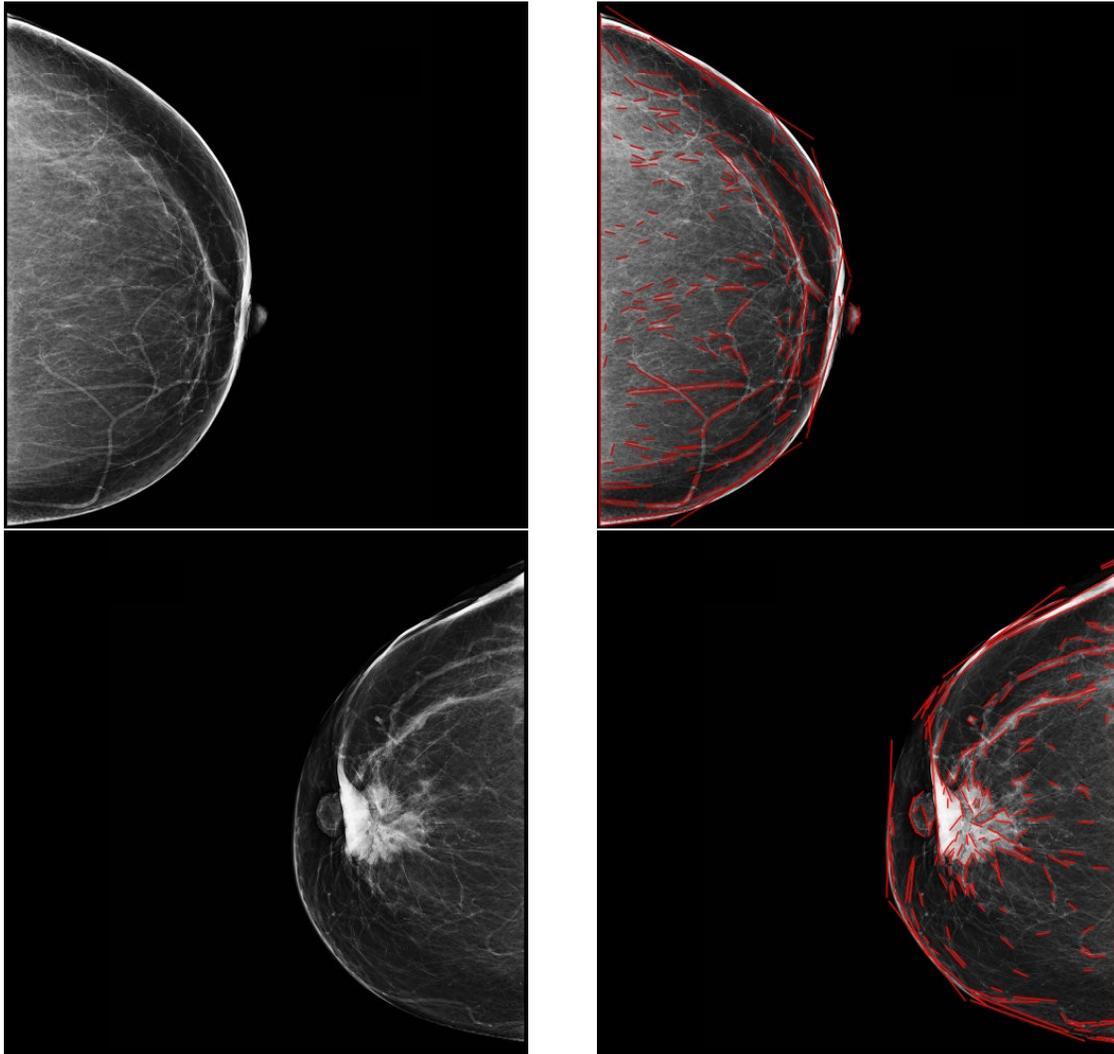


FIGURE 5.1.1 – Exemples de détections de segments avec le LSD dans une mammographie

Conclusion et perspectives

Nous avons traité dans ce mémoire un problème de détection d'objets géométriques dans l'image avec un modèle a contrario suivant un développement adapté pour la détection de convergences globales (points de fuites et orientation des spicules dans une mammographie). Les objets géométriques considérés étant les droites support des segments détectés par le LSD, nous avons enrichi la méthodologie a contrario avec un modèle gaussien afin de tenir en compte le fait que ces droites sont orientées vers un point de convergence globale situé autour du téton dans une mammographie. On a montré que le terme décrivant la convergence globale est la distance signée des droites au point de convergence globale, et que ce dernier suit une loi normale. La variance de cette loi est liée à la précision de la convergence des droites. Il est donc nécessaire d'estimer ce paramètre afin de choisir le meilleur modèle possible.

Le travail que nous avons fait dans le cadre de la détection de convergence globale dans l'image doit être accompagnée d'une étude de convergences locale pour détecter les lésions stellaires dans une mammographie. De nombreux travaux sont orientés vers ce type de détection (voir [3],[9],[10],[11],[15]). Le cancer du sein présente également d'autres symptômes selon son type, les méthodes de détection ne se limitent donc pas qu'à celles utilisées pour détecter les convergences des structures linéaires.

Bibliographie

- [1] Andrés Almansa, Agnès Desolneux, and Sébastien Vamech. Vanishing point detection without any a priori information. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25(4) :502–507, 2003.
- [2] Philippe Barbe and Michel Ledoux. *Probabilité (L3M1)*. EDP Sciences, 2012.
- [3] Hans Bornefalk. Use of quadrature filters for detection of stellate lesions in mammograms. In *Scandinavian Conference on Image Analysis*, pages 649–658. Springer, 2005.
- [4] Jonathan M Borwein, Jon D Vanderwerff, et al. *Convex functions : constructions, characterizations and counterexamples*, volume 109. Cambridge University Press Cambridge, 2010.
- [5] David Coupier. Stochastic geometry.
- [6] Agnès Desolneux and Fanny Doré. An anisotropic a contrario framework for the detection of convergences in images. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 56(1) :32–56, 2016.
- [7] Agnes Desolneux, Lionel Moisan, and Jean-Michel Morel. *From gestalt theory to image analysis : a probabilistic approach*, volume 34. Springer Science & Business Media, 2007.
- [8] Agnes Desolneux, Lionel Moisan, Jean-Michel Morel, et al. Maximal meaningful events and applications to image analysis. *The Annals of Statistics*, 31(6) :1822–1851, 2003.

-
- [9] W Philip Kegelmeyer Jr, Joe M Pruneda, Philip D Bourland, Argye Hillis, Mark W Riggs, and Michael L Nipper. Computer-aided mammographic screening for spiculated lesions. *Radiology*, 191(2) :331–337, 1994.
- [10] Sheng Liu, Charles F Babbs, and Edward J Delp. Multiresolution detection of spiculated lesions in digital mammograms. *IEEE transactions on Image Processing*, 10(6) :874–884, 2001.
- [11] Mehul P Sampat and Alan C Bovik. Detection of spiculated lesions in mammograms. In *Proceedings of the 25th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (IEEE Cat. No. 03CH37439)*, volume 1, pages 810–813. IEEE, 2003.
- [12] Valeriu Soltan. *Lectures on convex sets*, volume 986. World Scientific Hackensack, NJ, 2015.
- [13] Luis Antonio Santaló Sors and Luis A Santaló. *Integral geometry and geometric probability*. Cambridge university press, 2004.
- [14] Rafael Grompone Von Gioi, Jeremie Jakubowicz, Jean-Michel Morel, and Gregory Randall. Lsd : A fast line segment detector with a false detection control. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 32(4) :722–732, 2010.
- [15] Reyes Zwigglelaar, Timothy C Parr, James E Schumm, Ian W Hutt, Christopher J Taylor, Susan M Astley, and Caroline RM Boggis. Model-based detection of spiculated lesions in mammograms. *Medical Image Analysis*, 3(1) :39–62, 1999.

Abstract : This work is essentially dedicated to the theoretical study of the detection of zones of convergences in the image in a *contrario* frame. This study is motivated by the application in the field of medical imaging, which is the detection of global convergence of spicules, linear structures present in the breast, towards a so-called global convergence point. This detection comes to support the radiologist during a diagnosis in mammary imaging.

The *a contrario* methodology offers a new framework for the detection of structures in the image. Most *a contrario* methods rely on the definition of a noise model, such that the structures follow the uniform law and are independent. However for the detection of global convergence in a mammogram, the orientation of the spicules must be taken into account. Indeed, in a mammogram it is observed that in the healthy zones the spicules follow a privileged orientation towards the nipple. These structures are therefore not uniformly distributed. We have therefore used the *a contrario* method in an anisotropic framework to take into account the normal distribution of spicules. These models are defined to take into account that a part of the linear structures is normally convergent towards a common point

We then perform an estimation of the different models chosen in the proposed *a contrario* framework, in order to define the best possible model for the detection of global convergence in the given image. An estimate of a global convergence point is thus made by minimizing the number of false alarms. And an estimation of the other parameters by maximizing log-likelihood.

Keywords : *a contrario* methodology · points of convergence in images · stellate lesions in mammograms · stochastic geometry · estimation of a parametric model.
