

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI OUZOU  
FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



**Mémoire de fin d'étude**  
**En vue de l'obtention du diplôme de Master 2**  
**Spécialité : Analyse Mathématique et applications**

Présenté par :  
**SIDHOUMI Ouiza**

Sujet :  
**Quelques propriétés géométriques de l'espace de Besicovitch-Orlicz de  
fonctions presque périodiques**

Devant le jury composé de :

Mr. YOUSFI	Smail ;	MCB ;	UMMTO ;	President
Mr. KOURAT	Hocine ;	MCB ;	UMMTO ;	Rapporteur
Mr. CHALLALI	Nouredine ;	MCB ;	UMMTO ;	Examineur

# Table des matières

- 1 Généralités sur les fonctions presque périodiques** **7**
- 1.1 Fonctions périodiques . . . . . 7
- 1.2 Fonctions presque périodiques . . . . . 8
  
- 2 Espaces d’Orlicz** **13**
- 2.1 Espaces modulaires . . . . . 13
- 2.2 Fonctions de Young . . . . . 14
- 2.3 Espace d’Orlicz . . . . . 15
- 2.4 Espaces de type Orlicz . . . . . 17
- 2.5 Espaces d’Orlicz généralisés de fonctions presque périodiques . . . . . 20
- 2.6 Problèmes de convergence dans les espaces  $B^\varphi p.p.$  et  $\tilde{B}^\varphi p.p.$  : . . . . . 20
  
- 3 Notions de convexité dans les espaces  $B^\varphi p.p.$  et  $\tilde{B}^\varphi p.p.$  :** **25**
- 3.1 Notions de convexité dans les espaces de Banach : . . . . . 25
- 3.1.1 Stricte convexité : . . . . . 25
- 3.1.2 Uniforme convexité : . . . . . 27
- 3.2 Propriétés de la pseudomodulaire  $\rho_{B^\varphi}$  et de la pseudonorme  $\|\cdot\|_{B^\varphi}$  . . . . . 29
- 3.3 Stricte convexité de l’espace  $\tilde{B}^\varphi p.p.$  : . . . . . 42
- 3.4 uniforme convexité de l’espace  $\tilde{B}^\varphi p.p.$  : . . . . . 45



# Remerciements

Je remercie mon promoteur Monsieur Kourat Houcine pour son aide et sa patience durant l'élaboration de ce travail.

Je remercie également les membres du juré qui m'ont fait l'honneur d'examiner mon travail et pour leur remarques qui m'ont aidé pour la finalisation de ce manuscrit.

Je voudrais remercier du fond du cœur ma famille, mes parents et ma petite sœur, sans qui ce travail n'aurait pas abouti, leur soutient a été des plus précieux.



# Introduction générale

Les questions relatives à la structure géométrique des espaces de Banach jouent un rôle essentiel dans des domaines mathématiques très variés, notamment en théorie de l'approximation et en optimisation. Différents auteurs se sont intéressés à ces questions (notamment la stricte et l'uniforme convexité relativement à la norme de Luxemburg). Les espaces d'Orlicz généralisent de manière adéquate les espaces  $L_p$ . Ils sont définis à partir d'une fonction d'Orlicz.

$\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction d'Orlicz si :

1.  $\varphi(0)=0$
2.  $\varphi$  est convexe
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty$

L'essentiel du travail que nous présentons concerne différentes classes d'espaces fonctionnels de type Orlicz, obtenue par extension des propriétés de la presque périodicité de H. Bohr (propriété de translation et propriété d'approximation). Les espaces obtenus sont appelés : Espace de Stepanoff-Orlicz, Weyl-Orlicz et Besicovitch-Orlicz de fonctions presque périodiques. Notre étude porte sur des questions de nature géométrique, notamment la caractérisation de l'uniforme convexité et la stricte convexité de l'espace  $\tilde{B}^\varphi p.p.$  par des conditions de régularité sur la fonction d'Orlicz  $\varphi$

Le premier chapitre est introductif et concerne la théorie des fonctions presque périodiques (voir [2], [3], [5] et [10]).

Dans le deuxième chapitre nous introduisons les espaces d'Orlicz (voir [13] [12]) et les espaces d'Orlicz généralisés de fonctions presque périodiques :  $S_\ell^\varphi(\mathbb{R})p.p.$ ,  $W^\varphi(\mathbb{R})p.p.$ ,  $B^\varphi(\mathbb{R})p.p.$  (voir [11]) et nous présentons des résultats de convergence dans les deux espaces  $B^\phi p.p.$  et  $\tilde{B}^\phi p.p.$ , cela en citant quelques lemmes en relation avec la semi-norme  $\bar{\mu}$  et la pseudomodulaire de Luxemburg  $\rho_{B^\varphi}(\cdot)$ .

Dans le dernier chapitre, nous donnons quelques propriétés de la pseudomodulaire  $\rho_{B^\varphi}(\cdot)$  et de la pseudonorme  $\|\cdot\|_{B^\varphi}$  (voir [14] et [11]), utiles à la démonstration des résultats finaux.

# Chapitre 1

## Généralités sur les fonctions presque périodiques

### 1.1 Fonctions périodiques

**Définition 1.1.1.** Soit une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  et  $T$  un réel non nul tel que :

$$f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$f$  est dite périodique ou  $T$ -périodique et  $T$  est dite période de  $f$ .

**Remarque :** Si  $T$  est une période de  $f$  et  $n$  un entier alors  $nT$  est aussi une période de  $f$ .

**Exemples :**

- 1- Les fonctions trigonométriques (cos, sin, tan...) sont l'exemple typique de fonctions périodiques.
- 2-  $f(x) = \sin(ax) + \cos(bx)$  avec  $a, b \in \mathbb{R}^*$  et  $a/b \in \mathbb{Q}$
- 3- La fonction exponentielle puisque  $e^z = e^{z+2\pi ik}$  avec  $z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$
- 4- La fonction constante  $f(x) = \alpha$  où  $\alpha \in \mathbb{R}$  et dont l'ensemble des périodes est l'ensemble des réels strictement positifs
- 5-  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  Dont l'ensemble des périodes est l'ensemble des rationnels  $\mathbb{Q}$

**Proposition 1.1.1.** ([6]) Soit  $f$  une fonction périodique on a alors l'une des assertions suivantes :

- \* Il existe un nombre positif  $T$  tel que l'ensemble  $\{nT, n \in \mathbb{Z}^*\}$  contient toutes les périodes de  $f$ . Dans ce cas  $T$  est la période fondamentale de  $f$ .

## 8 CHAPITRE 1. GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES

\* L'ensemble des périodes de  $f$  n'admet pas un plus petit élément (comme c'est le cas des exemples 4 et 5)

**Proposition 1.1.2.** ([6]) Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions périodiques  $T$  une période commune à ces deux fonctions, alors  $T$  est une période pour  $f+g$ .

**Remarque :**

- Si  $T$  est la période fondamentale de  $f$  et de  $g$  ceci n'implique pas forcément qu'elle l'est aussi pour  $f+g$  comme dans l'exemple suivant :  
Soient  $f(x) = \sin(x) + \cos(\frac{x}{2})$  et  $g(x) = \sin(x) - \cos(\frac{x}{2})$  on a  $f$  et  $g$  sont de période fondamentale  $4\pi$  par contre  $(f+g)(x) = 2\sin(x)$  est de période fondamentale  $2\pi$ .
- La somme de deux fonctions périodiques n'est pas forcément périodique comme c'est le cas dans l'exemple suivant :

$$f(t) = \cos(t) + \cos(t\sqrt{2})$$

**Proposition 1.1.3.** ([6]) soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues et périodiques,  $T_1$  et  $T_2$  leur périodes respectives, alors  $f+g$  est périodique si et seulement si  $\frac{T_1}{T_2}$  est rationnel.

**Remarque :**

Ce résultat n'est généralement pas vraie dans le cas où on a pas la continuité de la fonction.

**Proposition 1.1.4.** ([6]) Si  $f$  est  $T$ -périodique et continue, une primitive  $F$  de  $f$  est aussi  $T$ -périodique si et seulement si :  $\int_0^T f(t)dt=0$ .

**Proposition 1.1.5.** ([6]) La dérivée d'une fonction périodique est aussi périodique et sont de même période fondamentale

On va maintenant introduire la notion de presque périodicité qui est une généralisation de la notion de périodicité :

## 1.2 Fonctions presque périodiques

**Définition 1.2.1.** Soit  $E$  un ensemble de nombres réels, il est dit relativement dense si il existe un réel  $\ell$  strictement positif tel que tout intervalle de longueur  $\ell$  contient un élément de  $E$ .

$\ell$  est dit longueur d'inclusion de l'ensemble  $E$ .

**Exemples :**

- i- L'ensemble des entiers relatifs  $\mathbb{Z}$  est relativement dense dans  $\mathbb{R}$ , effectivement tout intervalle de  $\mathbb{R}$  de longueur 2 contient un élément de  $\mathbb{Z}$ .
- ii- L'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  n'est pas relativement dense dans  $\mathbb{R}$ , effectivement  $\forall \ell > 0, \exists \alpha = -2\ell$  tel que :  $[\alpha, \alpha + \ell[ \cap \mathbb{N} = \emptyset$

**Définition 1.2.2.** Soient  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ ,  $\tau$  un réel et  $\varepsilon$  un réel strictement positif.  $\tau$  est une  $\varepsilon$ -presque période de  $f$  si :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + \tau) - f(x)| \leq \varepsilon$$

L'ensemble des  $\varepsilon$ -presque périodes de  $f$  sera noté  $T(f, \varepsilon)$ .

**Proposition 1.2.1.** ([2] [3])

1. Si  $\tau$  est une  $\varepsilon$ -presque période alors c'est aussi une  $\varepsilon'$ -presque période avec  $\varepsilon \leq \varepsilon'$ . Et on a  $T(f, \varepsilon) \subset T(f, \varepsilon')$
2. Si  $\tau_1$  est une  $\varepsilon_1$ -presque période et  $\tau_2$  une  $\varepsilon_2$ -presque période alors  $\tau_1 \pm \tau_2$  est une  $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ -presque période.

**Définition 1.2.3.** (presque périodicité au sens de Bohr)

Soit  $f$  une fonction continue, de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  elle est dite uniformément presque périodique si pour tout réels  $\varepsilon$  strictement positif l'ensemble des  $\varepsilon$ -presque périodes,  $T(f, \varepsilon)$ , est relativement dense.

Par la suite l'ensemble des fonctions uniformément presque périodiques sera noté  $\{u.p.p\}$ .

**Exemples :**

- i- Toute fonction périodique continue est presque périodique,

*Démonstration.* Soit  $f$  une fonction périodique continue alors il existe un nombre strictement positif  $T$  tel que :

$$f(x + T) - f(x) = 0$$

d'où

$$\|f(x + T) - f(x)\|_X = 0$$

Par la continuité de  $f$  on a  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |(x + T) - x| = |T| < \delta$  implique que :

$$\|f(x + T) - f(x)\|_X \leq \varepsilon$$

Donc  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que  $\forall T \in ]-\delta, \delta[$  :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \|f(x + T) - f(x)\|_X \leq \varepsilon$$

$]-\delta, \delta[$  est un intervalle de longueur  $2\delta$ , c'est à dire que l'ensemble  $T(f, \varepsilon)$  rencontre tout intervalle de longueur  $2\delta$  □

ii- La somme de deux fonctions périodiques et continues dont le rapport de leurs deux périodes n'est pas rationnel est presque périodique, exemples :

- $f(x) = \cos(t) + \cos(\sqrt{2}t)$
- $g(x) = \sin(t) + \sin(\sqrt{2}t)$

**Définition 1.2.4.** Soit  $f$  une fonction continue de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  elle est dite normale si pour toute suite de nombres réels  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  il existe une sous-suite  $\{h_{n_i}\}$  tel que la suite de fonctions  $f(x + h_{n_i})$  soit uniformément convergente dans  $\mathbb{R}$

Une fonction normale est une fonction presque périodique au sens de Bochner.

**Proposition 1.2.2.** ([2], [3]) Si une fonction  $f$  continue de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  est normale si et seulement si elle est uniformément presque périodique

**Définition 1.2.5.** On définit les polynômes trigonométriques généralisés comme étant les applications de la forme :

$$P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$t \longmapsto P(t) = \sum_{j=0}^{j=n} a_j e^{i\lambda_j t} \quad \text{avec } a_j \in \mathbb{C} \forall j \in \mathbb{N} \text{ et } \lambda_j \in \mathbb{R} \forall j \in \mathbb{N}$$

Par la suite l'ensemble des polynômes trigonométriques généralisés sera noté  $\mathcal{P}$  i.e. :

$$\mathcal{P} = \left\{ P(t) = \sum_{j=0}^{j=n} a_j e^{i\lambda_j t}, a_j \in \mathbb{C} \forall j \in \mathbb{N}, \lambda_j \in \mathbb{R} \forall j \in \mathbb{N} \right\}$$

**Définition 1.2.6.** On dit qu'une fonction  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$  possède la propriété d'approximation polynomiale lorsqu'il existe une suite de polynômes trigonométriques  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - P_n\|_{\infty} = 0$ .

C'est à dire lorsqu'elle est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

**Proposition 1.2.3.** ([2], [3]) Si une fonction  $f$  continue de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  possède la propriété d'approximation polynomiale alors elle est uniformément presque périodique.

**Proposition 1.2.1.** ([2], [3]) Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  uniformément presque périodique alors elle est : uniformément continue et uniformément bornée.

**Proposition 1.2.2.** ([2], [3]) Soient  $f, f_1, f_2$  des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  uniformément presque périodiques alors les fonctions suivantes sont aussi uniformément presque périodiques :

- $cf(x)$  avec  $c$  une constante, la fonction conjuguée de  $f \overline{f(x)}$ ,  $\{f(x)\}^2$  et on a l'ensemble  $T(f, \varepsilon)$  contenu dans chacun des ensembles :  
 $T(cf, |c| \varepsilon), T(\overline{f}, \varepsilon), T(\{f\}^2, 2M_\varepsilon)$ .

- $f_1 + f_2, f_1 \times f_2, \frac{f_1}{f_2}$  avec  $f_2(x) \neq 0,$
- $\frac{1}{f(x)}$  si  $|f(x)| > 0$
- $F \circ f$  avec  $F$  une fonction uniformément continue

**Proposition 1.2.3.** ([2], [3])

1. Si la dérivée d'une fonction uniformément presque périodique est uniformément continue alors elle est aussi uniformément presque périodique.
2. Si une fonction  $f$  uniformément presque périodique est borné alors sa primitive est uniformément presque périodique.

**Proposition 1.2.4.** ([2], [3]) L'espace des fonctions uniformément presque périodique muni de la norme de convergence uniforme est un espace de Banach.

**Définition 1.2.1.** Soit  $f \in \{u.p.p\}$

1.  $\overline{M}\{f(x)\} = \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(x) dx$  est dite valeur moyenne supérieur de  $f(x)$
2.  $\underline{M}\{f(x)\} = \underline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(x) dx$  est dite valeur moyenne inférieure de  $f(x)$

Lorsque  $\overline{M}\{f(x)\} = \underline{M}\{f(x)\}$  la valeur commune, notée  $M\{f(x)\}$ , est dite valeur moyenne de  $f(x)$ .

**Remarque** Pour une fonction de plusieurs variables on indique la variable par rapport à laquelle on intègre, exemple :  $M_x\{f(x, y)\}$  ou  $M_y\{f(x, y)\}$



# Chapitre 2

## Espaces d'Orlicz

### 2.1 Espaces modulaires

**Définition 2.1.1.** Soit  $X$  un espace vectoriel réel ou complexe. Une fonctionnelle  $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$  est dite modulaire lorsque pour tout  $x, y$  dans  $X$  on a :

1.  $\rho(x)=0 \iff x=0$
2. —  $\rho(-x)=\rho(x)$  si  $X$  est réel  
—  $\rho(xe^{i\theta})=\rho(x)$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$  si  $X$  est complexe
3.  $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$  avec  $\alpha, \beta \geq 0$  et  $\alpha + \beta = 1$

#### Remarques

1. Si la condition une n'est vérifié que dans le sens  $x=0 \implies \rho(x)=0$  elle sera dite pseudomodulaire.
2. Si on a  $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \rho(x) + \beta \rho(y)$  avec  $\alpha, \beta \geq 0$  et  $\alpha + \beta = 1$  elle sera dite (pseudo)modulaire convexe

**Définition 2.1.2.** Soient  $X$  un espace vectoriel réel ou complexe et  $\rho$  une modulaire (resp. pseudomodulaire), le couple  $(X, \rho)$  sera dit espace modulaire (resp. espace pseudomodulaire).

A la (pseudo)modulaire  $\rho$  on associe les espaces vectoriels suivants :

$$X_\rho = \{ x \in X, \lim_{\alpha \rightarrow 0} \rho(\alpha x) = 0 \}$$

$$X_\rho^* = \{ x \in X, \rho(\alpha x) < \infty \text{ pour un } \alpha > 0 \}$$

#### Exemples d'espaces modulaires :

1. Les espaces normés  $(X, \|\cdot\|)$  sont des espaces modulaires avec  $\rho(\cdot) = \|\cdot\|$ , les normes sont des modulaires convexes.

2. Les espaces de Lebesgue  $L^p$ ,  $p \geq 1$  sont des espaces modulaires avec  $\rho(f) = \int_{\Omega} |f|^p d\mu$ ,  $\forall f \in L^p(\Omega)$ .

## 2.2 Fonctions de Young

**Définition 2.2.1.** Une fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  est dite  $\varphi$ -fonction lorsqu'elle vérifie :

1.  $\varphi$  est symétrique
2.  $\varphi(0) = 0$  et  $\varphi(x) > 0$  pour  $x > 0$
3.  $\varphi$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$

Si de plus elle est convexe elle sera dite fonction de Young

**Proposition 2.2.1.** ([9]) Toute fonction de Young admet la représentation intégrale suivante :  $\varphi(x) = \int_0^{|x|} p(t) dt$  où  $p$  est la dérivée à droite de  $\varphi$ , elle est croissante pour  $t \geq 0$  et continue à droite.

**Définition 2.2.2.** Soit  $\varphi$  une fonction de Young elle sera dite d'Orlicz ou  $N$ -fonction lorsqu'elle vérifie :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty$

Ces conditions sont équivalentes à :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} p(x) = 0$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$

avec  $p$  la dérivée à droite de  $\varphi$

**Définition 2.2.3.** Soit  $\varphi$  une fonction de Young on lui associe une autre fonction  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , dite conjuguée de  $\varphi$ , définie par :

$$\psi(y) = \sup_{x \geq 0} \{x | y | - \varphi(x)\}$$

Elle admet la représentation intégrale suivante :

$$\psi(y) = \int_0^{|y|} q(s) ds \quad \text{avec} \quad q(s) = \sup_{p(t) \leq s} t = \inf_{p(t) > s} t$$

La fonction  $q$  est dite inverse généralisé de  $p$ .

**Remarques :**

1. La fonction  $\psi$  n'est pas forcément une fonction de Young, puisque on peut avoir  $\psi(x)=0$  pour  $x>0$ .
2. Lorsque  $\varphi$  est une N-fonction, sa fonction conjuguée  $\psi$  l'est aussi. De plus  $\varphi$  est la fonction conjuguée de  $\psi$ .

**Exemples de fonctions de Young :**

Dans ce qui suit  $\varphi$  est la fonction de Young et  $\psi$  sa fonction conjuguée :

1.  $\varphi(x)=\frac{|x|^\alpha}{\alpha}$  ( $\alpha>1$ ),  $\psi(x)=\frac{|y|^\beta}{\beta}$  avec  $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = 1$
2.  $\varphi(x)=\exp(|x|)-|x|-1$  ,  $\psi(y)=(1+|y|)\ln(1+|y|)-|y|$
3. Dans certain cas le calcul de la fonction conjuguée est impossible comme dans les cas suivants :
  - 1-  $\varphi(x) = x^2 - 1$  où  $p(t) = 2te^{t^2}$  ce qui rend difficile le calcul de  $q(s)$
  - 2-  $\varphi(x) = \exp(|x|^\alpha) - 1, \alpha > 1$ , le calcul de  $\psi$  revient à résoudre l'équation suivante :  $|y| - \alpha x^{\alpha-1} \exp(x^\alpha) = 0$

**Définition 2.2.4.** *On dit qu'une fonction de Young vérifie la condition- $\Delta_2$  si il existe deux constantes  $k>2$  et  $u_0 \geq 0$  tel que  $\varphi(2u) \leq k\varphi(u) \forall u \in \mathbb{R}$  tel que  $|u| \geq u_0$*

**Remarque :** Pour simplifier l'écriture on écrira  $\varphi \in \Delta_2$

**Définition 2.2.5.** *On dit qu'une fonction de Young vérifie la condition- $\nabla_2$  si elle est sa fonction conjuguée vérifient la condition- $\Delta_2$ .*

## 2.3 Espace d'Orlicz

Soient  $\mu$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ , et  $M(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $\mu$ -mesurables définies de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}, \varphi$  une N-fonction.

**Définition 2.3.1.** *Soit l'application :*

$$\begin{aligned} \rho_\varphi : M(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \rho_\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(|f(x)|) d\mu \end{aligned}$$

$\rho_\varphi$  est une modulaire convexe sur  $M(\mathbb{R})$  elle est dite modulaire d'Orlicz.

**Définition 2.3.2.** *A la modulaire d'Orlicz on associe l'espace modulaire dit d'Orlicz noté  $L^\varphi(\mathbb{R})$  suivant :*

$$L^\varphi(\mathbb{R}) = \{f \in M(\mathbb{R}) \text{ , } \lim_{\lambda \rightarrow 0} \rho_\varphi(\lambda f) = 0$$

**Comparaison des espaces d'Orlicz  $L^\varphi$  :**

Soit  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  deux N-fonctions on a :

$L^{\varphi_1}(\mathbb{R}) \subset L^{\varphi_2}(\mathbb{R})$  si seulement si  $\exists u_0 > 0$  et  $\alpha > 0$  tel que  $\varphi_1(u) \leq \varphi_2(\alpha u) \forall u \geq u_0$

**Définition 2.3.3.** On définit les ensembles suivants :

- $L_\varphi^0(\mathbb{R}) = \{f \in M(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} \varphi(|f(x)|) d\mu < \infty\}$  dit classe d'Orlicz.
- $E^\varphi(\mathbb{R}) = \{f \in M(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda f(x)) d\mu < \infty, \forall \lambda > 0\}$  dit petit espace d'Orlicz.
- $L_*^\varphi(\mathbb{R}) = \{f \in M(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda f(x)) d\mu < \infty, \text{pour un } \lambda > 0\}$

On a les inclusion suivantes :

$$L^\varphi(\mathbb{R}) \subset L_*^\varphi(\mathbb{R}) \text{ et } L_\varphi^0(\mathbb{R}) \subset L_*^\varphi(\mathbb{R})$$

Et dans le cas où  $\varphi$  vérifie la condition- $\Delta_2$  on a les égalités suivantes :

$$L_\varphi^0(\mathbb{R}) = L_*^\varphi(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad E^\varphi(\mathbb{R}) = L^\varphi(\mathbb{R})$$

**Normes sur les espaces d'Orlicz** Soient  $f \in L^\varphi(\mathbb{R})$ ,  $\varphi$  une N-fonction,  $\Psi$  sa fonction conjugué. On peut définir sur les espaces d'Orlicz les trois normes suivantes :

1. Norme de Luxemburg

$$\|f\|_\varphi = \inf\{\lambda > 0, \rho_\varphi\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\}$$

2. Norme d'Orlicz

$$\|f\|_\varphi = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}} |f(t)g(t)| d\mu, \text{ avec } g \in L^\Psi(\mathbb{R}) \text{ et } \rho_\Psi(g) \leq 1\right\}$$

3. Norme d'Amemiya

$$\|f\|_\varphi^A = \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda} [1 + \rho_\varphi(\lambda f)]$$

**Remarques**

- \* La norme d'Orlicz et la norme de Luxemburg sont équivalentes du fait que :  $\|f\|_\varphi \leq \|f\|_\varphi \leq 2\|f\|_\varphi$
- \* Bien que équivalentes ces deux normes donnent différentes propriétés géométriques aux espaces d'Orlicz
- \* La norme de Luxemburg possède la propriété suivante :  $\|f\|_\varphi \leq 1$  si seulement si  $\int_{\mathbb{R}} \varphi(f) d\mu \leq 1$
- \* Soient  $f \in L^\varphi(\mathbb{R})$  et  $g \in L^\Psi(\mathbb{R})$  alors :  $\int_{\mathbb{R}} |f(t)g(t)| dt \leq 2\|f\|_\varphi \|g\|_\Psi$

**Exemples d'espaces d'Orlicz**

\* Les espaces de Lebesgue  $L^p$  ( $1 \leq p \leq +\infty$ ) sont les espaces  $L^{\varphi_p}$  avec :

$$\varphi_p(x) = |x|^p$$

\* L'espace  $L^\infty$  est l'espace  $L^{\varphi_\infty}$  avec :

$$\varphi_\infty = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

\* Les espaces  $L^p \cap L^\infty$  ( $1 \leq p < +\infty$ ) sont les espaces  $L^{\varphi_{p,\infty}}$  avec :

$$\varphi_{p,\infty} = \begin{cases} |x|^p & \text{si } x \in [-1, 1] \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

**Propriétés des espaces d'Orlicz : ([13], [12])**

- Complétude :  
Les espaces d'Orlicz sont des espaces de Banach pour les trois normes ci-dessus.
- Réflexivité :  
Les espaces d'Orlicz sont réflexifs si et seulement si  $\varphi$  et  $\Psi$  vérifient la condition- $\Delta_2$
- Séparabilité :

\*  $E^\varphi(\mathbb{R})$  est séparable quelque soit  $\varphi$

\*  $L^\varphi(\mathbb{R})$  est séparable si et seulement si  $\varphi$  vérifie la condition- $\Delta_2$

**2.4 Espaces de type Orlicz****Espace de Stepanoff-Orlicz :**

**Définition 2.4.1.** Soit la modulaire  $\rho_{S_l^\varphi}$  avec  $l > 0$  définie comme suit :

$$\begin{aligned} \rho_{S_l^\varphi} : M(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\longmapsto \rho_{S_l^\varphi}(f) = \sup_{x \in I} \frac{1}{l} \int_x^{x+l} \varphi(|f(t)|) d\mu \end{aligned}$$

elle est dite modulaire de Stepanoff-Orlicz.

On lui associe les espaces suivants :

- $S_l^\varphi(\mathbb{R}) = \{f \in M(\mathbb{R}) , \lim_{\lambda \rightarrow 0} \rho_{S_l^\varphi}(\lambda f) = 0\}$  dit espace de Stepanoff-Orlicz.
- $S_l^{\varphi*}(\mathbb{R}) = \{f \in M(\mathbb{R}) , \rho_{S_l^\varphi}(\lambda f) < +\infty \text{ pour un } \lambda > 0\}$
- $\overline{S_l^\varphi}(\mathbb{R}) = \{f \in M(\mathbb{R}) , \rho_{S_l^\varphi}(\lambda f) < +\infty\}$

**Proposition 2.4.1.** ([7])

- \* Si la fonction  $\varphi$  est convexe on a  $\overline{S_l^\varphi(\mathbb{R})} \subset S_l^{\varphi*}(\mathbb{R}) \subset S_l^\varphi(\mathbb{R})$
- \*  $S_l^\varphi(\mathbb{R})$  est un sous-espace linéaire de  $S_l^{\varphi*}(\mathbb{R})$ , et on a l'égalité  $S_l^\varphi(\mathbb{R}) = S_l^{\varphi*}(\mathbb{R})$  sous la condition qu'il existe une constante  $a > 0$  tel que  $\limsup_{a \rightarrow 0} \sup_{|x| \geq a} \frac{\varphi(\alpha x)}{\varphi(x)} = 0$
- \* Si de plus de la condition ci-dessus la fonction  $\varphi$  vérifie la condition- $\Delta_2$  on a l'égalité entre les trois espaces.

**Définition 2.4.2.** Lorsque  $\varphi$  est convexe on munit  $S_l^\varphi(I)$  de la norme suivante :

$$\begin{aligned} \|f\|_{S_l^\varphi} &= \inf\{k > 0, \rho_{S_l^\varphi}\left(\frac{1}{k}f\right) \leq 1\} \\ &= \inf\{k > 0, \sup_{x \in I} \frac{1}{f} \int_x^{x+l} \varphi\left(\frac{1}{k} |f(t)|\right) d\mu \leq 1\} \end{aligned}$$

**Remarque :** ([7]) L'espace  $S_l^\varphi(\mathbb{R})$  est complet pour cette norme

**Espace de Weyl-Orlicz :**

**Définition 2.4.3.** Soit la pseudo-modulaire  $\rho_{W^\varphi}$  définie comme suit :

$$\begin{aligned} \rho_{W^\varphi} : M(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\longmapsto \rho_{W^\varphi}(f) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \rho_{S_l^\varphi}(f) \end{aligned}$$

elle est dite modulaire de Weyl-Orlicz.

On lui associe les ensembles suivants :

- $W^\varphi(\mathbb{R}) = \{f \in M(\mathbb{R}), \lim_{\lambda \rightarrow 0} \rho_{W^\varphi}(\lambda f) = 0\}$  dit espace de Weyl-Orlicz.
- $W^\varphi(\mathbb{R})^* = \{f \in M(\mathbb{R}), \rho_{W^\varphi}(\lambda f) < +\infty \text{ pour un } \lambda > 0\}$
- $\overline{W^\varphi(\mathbb{R})} = \{f \in M(\mathbb{R}), \rho_{W^\varphi}(\lambda f) < +\infty\}$

**Proposition 2.4.2.** ([7])

On a l'égalité entre ces trois espaces si l'une des deux conditions suivante est vérifiée :

- \*  $\varphi$  vérifie la condition- $\Delta_2$  et il existe une constante  $a > 0$  tel que :

$$\limsup_{a \rightarrow 0} \sup_{|x| \geq a} \frac{\varphi(\alpha x)}{\varphi(x)} = 0$$

- \*  $\varphi$  est convexe et vérifie la condition- $\Delta_2$

**Définition 2.4.4.** Lorsque  $\varphi$  est convexe on munit  $W^\varphi(\mathbb{R})$  de la pseudo-norme suivante :

$$\begin{aligned}\|f\|_{W^\varphi} &= \inf\{k > 0, \rho_{W^\varphi}(\frac{1}{k}f) \leq 1\} \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} \|f\|_{S_l^\varphi}\end{aligned}$$

**Remarque :**([7]) L'espace  $W^\varphi(\mathbb{R})$  n'est pas complet.

### Espace de Besicovitch-Orlicz :

**Définition 2.4.5.** Soit la pseudo-modulaire  $\rho_{B^\varphi}$  définie comme suit :

$$\begin{aligned}\rho_{B^\varphi} : M(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\longmapsto \rho_{B^\varphi}(f) = \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi(|f(t)|) d\mu\end{aligned}$$

elle est dite modulaire de Besicovitch-Orlicz.

On lui associe les ensembles suivants :

- $B^\varphi(\mathbb{R}) = \{f \in M(\mathbb{R}), \lim_{\lambda \rightarrow 0} \rho_{B^\varphi}(\lambda f) = 0\}$  dit espace de Besicovitch-Orlicz.
- $B^\varphi(\mathbb{R})^* = \{f \in M(\mathbb{R}), \rho_{B^\varphi}(\lambda f) < +\infty \text{ pour un } \lambda > 0\}$
- $\overline{B^\varphi(\mathbb{R})} = \{f \in M(\mathbb{R}), \rho_{B^\varphi}(\lambda f) < +\infty\}$

**Proposition 2.4.3.** ([7])

1.  $B^\varphi(\mathbb{R}) \subset B^\varphi(\mathbb{R})^*$
2. Dans le cas où  $\varphi$  est convexe l'inclusion précédente devient une égalité
3. On a  $B^\varphi(\mathbb{R})^* = \overline{B^\varphi(\mathbb{R})}$  si seulement si  $\varphi$  satisfait la condition- $\Delta_2$

**Définition 2.4.6.** Lorsque  $\varphi$  est convexe on munit  $B^\varphi(\mathbb{R})$  de la pseudo-norme suivante :

$$\begin{aligned}\|f\|_{B^\varphi} &= \inf\{k > 0, \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi(|f(t)|/k) d\mu \leq 1\} \\ &= \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \inf\{k > 0, \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi(|f(t)|/k) d\mu \leq 1\}\end{aligned}$$

**Remarque :**([7])

L'espace de Besicovitch-Orlicz est complet

**Lien entre les espaces  $S_l^\varphi(\mathbb{R}), W^\varphi(\mathbb{R}), B^\varphi(\mathbb{R})$  :**([7])

Les (pseudo)modulaires et les (pseudo)norme associées peuvent être ordonner comme suit :

$$\begin{aligned}\rho_{B^\varphi}(\cdot) &\leq \rho_{W^\varphi}(\cdot) \leq \rho_{S_\ell^\varphi}(\cdot) \\ \|\cdot\|_{B^\varphi} &\leq \|\cdot\|_{W^\varphi} \leq \|\cdot\|_{S_\ell^\varphi}\end{aligned}$$

On en déduit les inclusions suivantes :

$$S_1^\varphi(\mathbb{R}) = S_\ell^\varphi(\mathbb{R}) \subset W^\varphi(\mathbb{R}) \subset B^\varphi(\mathbb{R}) \subset B^1(\mathbb{R})$$

## 2.5 Espaces d'Orlicz généralisés de fonctions presque périodiques

On note par  $G^\varphi(\mathbb{R})$  l'un des espaces suivants  $S_\ell^\varphi(\mathbb{R})$ ,  $W^\varphi(\mathbb{R})$ ,  $B^\varphi(\mathbb{R})$ ,  $\|\cdot\|_{G^\varphi}$  la (pseudo)norme de Luxemburg associée et  $\rho_{G^\varphi}$  la (pseudo)modulaire de Luxemburg

En considérant la fermeture de l'ensemble des polynômes trigonométriques généralisés  $\mathcal{P}$  relativement à la (pseudo)norme de Luxemburg  $\|\cdot\|_{G^\varphi}$  on obtient les espaces suivants ( $S_\ell^\varphi(\mathbb{R})p.p.$ ,  $W^\varphi(\mathbb{R})p.p.$ ,  $B^\varphi(\mathbb{R})p.p.$ ) :

$$\begin{aligned}G^\varphi p.p. &= \overline{\mathcal{P}}^{\|\cdot\|_{G^\varphi}} \\ &= \{f \in G^\varphi(\mathbb{R}), \exists \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{G^\varphi} = 0\} \\ &= \{f \in G^\varphi(\mathbb{R}), \exists \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}, \forall k > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{G^\varphi}(k(f_n - f)) = 0\}\end{aligned}$$

Et en considérant la fermeture de l'ensemble des polynômes trigonométriques généralisés  $\mathcal{P}$  relativement à la (pseudo)modulaire de Luxemburg  $\rho_{G^\varphi}(\cdot)$  on obtient les espaces suivants :

$$\tilde{G}^\varphi p.p. = \{f \in G^\varphi(\mathbb{R}), \exists \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}, \exists k_0 > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{G^\varphi}(k_0(f_n - f)) = 0\}$$

On a les inclusions suivantes :([7])

$$G^\varphi p.p. \subseteq \tilde{G}^\varphi p.p. \subseteq G^\varphi(\mathbb{R})$$

Et l'égalité dans le cas  $\varphi \in \Delta_2$

On a aussi les inclusions suivantes :([7])

$$\mathcal{P} \subset \{u.p.p\} \subset S_\ell^\varphi(\mathbb{R})p.p. \subset W^\varphi(\mathbb{R})p.p. \subset B^\varphi(\mathbb{R})p.p. \subset B^1(\mathbb{R})p.p.$$

## 2.6 Problèmes de convergence dans les espaces $B^\varphi p.p.$ et $\tilde{B}^\varphi p.p.$ :

**Définition 2.6.1.** Soit  $P(\mathbb{R})$  l'ensemble des parties de  $\mathbb{R}$ . On note  $\Sigma$ , la  $\Sigma$ -algèbre des sous ensembles Lebesgue mesurables.

Pour  $A \in \Sigma$ , on définit la fonction d'ensembles :

$$\bar{\mu}(A) = \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \chi_A(t) d\mu = \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \mu(A \cap [-T, T])$$

Il est clair que  $\bar{\mu}$  est nulle sur les ensembles de mesure finie par rapport à  $\mu$ .

$\bar{\mu}$  n'est pas  $\sigma$  - additive donc n'est pas une mesure.

Par contre c'est une sous-mesure puisque c'est une fonction d'ensembles sous-additive pour les réunions finies :

$$\bar{\mu}(\cup_{n=1}^N A_n) \leq \sum_{n=1}^N \bar{\mu}(A_n)$$

**Définition 2.6.2.** Une suite de fonctions  $\mu$  - mesurables  $f_k$  est dite  $\bar{\mu}$  - convergente vers une fonction  $f$  ( $\mu$  - mesurable) lorsque, pour tout nombre  $\varepsilon > 0$ , on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{\mu}\{x \in \mathbb{R}, \|f_k(x) - f(x)\| > \varepsilon\} = 0$$

En d'autres termes, pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$ , il existe  $k_\delta \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $k \geq k_\delta$ , il existe un nombre  $T_k$  pour lequel on a :

$$\mu\{x \in [-T, T], \|f_k(x) - f(x)\| > \varepsilon\} \leq \delta 2T, \text{ pour tout } T \geq T_k$$

**Lemme 2.6.1.** [11] Si  $\{f_n\}$  est une suite de fonction  $f$  dans  $B^\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ , modulaire convergente vers une fonction  $f$  de  $B^\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ , cette suite est aussi  $\bar{\mu}$  - convergente vers la fonction  $f$ .

*Démonstration.* Soit  $\{f_n\}$  une suite de fonction dans  $B^\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{E})$  modulaire convergente vers  $f \in B^\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ , et soit l'ensemble suivant :

$$A_n(\varepsilon) = \{t \in \mathbb{R}, \|f_n(t) - f(t)\| > \varepsilon\}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(A_n(\varepsilon)) &= \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \chi_{A_n(\varepsilon)}(t) d\mu \\ &= \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{[-T, T] \cap A_n(\varepsilon)} 1 d\mu \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \|f_n(t) - f(t)\| d\mu \end{aligned} \quad (2.1)$$

Par l'inégalité de Jensen<sup>1</sup> :

$$\varphi\left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \|f_n(t) - f(t)\| d\mu\right) \leq \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi(\|f_n(t) - f(t)\|) d\mu$$

---

1. Pour  $f \in L^\varphi(\mathbb{R})$  on a  $\varphi\left(\frac{\int_A f d\mu}{\int_A d\mu}\right) \leq \frac{\int_A \varphi(f) d\mu}{\int_A d\mu}$

Puisque  $\varphi$  est continue et croissant, sa réciproque  $\varphi^{-1}$  est aussi continue et croissante on a alors :

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \|f_n(t) - f(t)\| d\mu \leq \varphi^{-1} \left( \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi(\|f_n(t) - f(t)\|) d\mu \right) \quad (2.2)$$

Puisque  $f_n$  converge en module vers  $f$ , alors :

$$\forall \delta' > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \text{ on a : } \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi(\|f_n(t) - f(t)\|) d\mu < \delta'$$

On choisit  $\delta' = \varphi(\delta\varepsilon)$  où  $\delta > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  ce qui nous donne :

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi(\|f_n(t) - f(t)\|) d\mu < \varphi(\delta\varepsilon)$$

C'est à dire :

$$\varphi^{-1} \left( \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi(\|f_n(t) - f(t)\|) d\mu \right) < \delta\varepsilon$$

Par l'inégalité (2) on a :

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \|f_n(t) - f(t)\| d\mu < \delta\varepsilon$$

C'est à dire :

$$\frac{1}{\varepsilon} \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \|f_n(t) - f(t)\| d\mu < \delta$$

Par l'inégalité (1) on a :

$$\forall \delta > 0, \forall \varepsilon > 0, \bar{\mu}(A_n(\varepsilon)) < \delta$$

C'est à dire  $f_n$  est  $\bar{\mu}$ -convergente vers  $f$  □

**Lemme 2.6.2.** [11] Soit  $h \in \tilde{B}^\varphi$  p.p. tel que  $\rho_{B^\varphi}(h) = a$ ,  $a > 0$ . Alors :

pour tout nombre  $\theta \in ]0, 1[$ , il existe deux nombre  $\beta > 0$  et  $T_0 > 0$  tels que pour  $T \geq T_0$ , on ait :

$$\mu\{\bar{G} \cap [-T, T]\} \geq \theta 2T, \text{ où } \bar{G} = \{t \in \mathbb{R}, \|h(t)\| \leq \beta\}$$

*Démonstration.*

Soient  $\theta \in ]0, 1[$  et  $\beta > 0$  tel que  $\varphi(\beta)(1 - \theta) > 2a$  et  $\frac{1}{2T} \mu\{\bar{G} \cap [-T, T]\} < \theta$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi(\|h(t)\|)d\mu &= \frac{1}{2T} \left( \int_{\bar{G} \cap [-T, T]} \varphi(\|h(t)\|) d\mu + \int_{\bar{G}^c \cap [-T, T]} \varphi(\|h(t)\|) d\mu \right) \\
 &\geq \frac{1}{2T} \int_{\bar{G}^c \cap [-T, T]} \varphi(\|h(t)\|) d\mu \\
 &> \frac{1}{2T} \varphi(\beta) \int_{\bar{G}^c \cap [-T, T]} 1 d\mu \\
 &> \frac{1}{2T} \varphi(\beta) \mu\{\bar{G}^c \cap [-T, T]\} \\
 &> \frac{1}{2T} \varphi(\beta) (\mu\{[-T, T]\} - \theta 2T) \\
 &> \varphi(\beta)(1 - \theta)
 \end{aligned}$$

C'est à dire :

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi(\|h(t)\|)d\mu > 2a$$

Par passage à la limite :

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi(\|h(t)\|)d\mu > 2a$$

C'est à dire :

$$\rho_{B^\varphi}(h) = a > 2a$$

Contradiction avec a strictement positif □

**Lemme 2.6.3.** [11] Soit  $g$  une fonction dans  $B^\varphi p.p.$  on a :

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $\rho_{B^\varphi}(g\chi_Q) \leq \varepsilon$ , pour tout ensemble  $Q$  tel que  $\mu(Q \cap [-T, T]) \leq \delta 2T$ ,  $T \geq T_0$ .

*Démonstration.* Soient  $f \in u.p.p$  et  $\varepsilon > 0$  on cherche  $\delta > 0$  tel que  $\rho_{B^\varphi}(f\chi_Q) < \varepsilon$  pour tout ensemble  $Q$  vérifiant  $\bar{\mu}(Q) < \delta$ .

On pose  $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$  où  $M = \sup(\varphi(\|f(t)\|))$  et soit l'ensemble  $Q$  tel que  $\bar{\mu}(Q) < \delta$  alors :

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \chi_Q(t) d\mu < \delta$$

c'est à dire :

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \mu\{Q \cap [-T, T]\} < \frac{\varepsilon}{M}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi(\|f(t)\chi_Q\|)d\mu &= \frac{1}{2T} \int_{[T, -T] \cap Q} \varphi(\|f(t)\|)d\mu \\
 &\leq \frac{M}{2T} \mu\{[-T, T] \cap Q\} \\
 &\leq \varepsilon
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Soit maintenant  $f \in B^\varphi p.p.$ . C'est à dire  $\exists f_n \subset \mathcal{P}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{B^\varphi}(2(f_n - f)) = 0$

On a :

$$\begin{aligned} \rho_{B^\varphi}(f\chi_Q) &= \rho_{B^\varphi}(2(f - f_n)\chi_Q + 2f_n\chi_Q) \\ &\leq \frac{1}{2}\rho_{B^\varphi}(2(f_n - f)\chi_Q) + \frac{1}{2}\rho_{B^\varphi}(2f_n\chi_Q) \\ &\leq \frac{1}{2}\rho_{B^\varphi}(2(f_n - f)) + \frac{1}{2}\rho_{B^\varphi}(2f_n) \end{aligned}$$

Comme  $f_n$  converge en module vers  $f$  on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \rho_{B^\varphi}(2(f_n - f)) \leq \varepsilon \quad (\star)$$

$2f_n \in \{u.p.p\}$  on déduit d'après (3) qu'il existe un certain  $\delta$  tel que  $\rho_{B^\varphi}(2(f_n\chi_Q)) < \varepsilon$  pour tout ensemble  $Q$  vérifiant  $\bar{\mu}(Q) < \delta$  (\*\*)

Donc d'après  $(\star)$   $(\star\star)$  on a :

$$\rho_{B^\varphi}(f\chi_Q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

**Lemme 2.6.4.** [11] Soit  $\{f_k\}$ , une suite de fonctions de  $B^\varphi(R, E)$ ,  $\bar{\mu}$ -convergente vers une fonction  $f$  de  $B^\varphi(R, E)$ . On suppose qu'il existe une fonction  $g$  de  $B^\varphi p.p.$  telle que  $\max(\|f_k(x)\|, \|f(x)\|) \leq g(x)$ , alors :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \rho_{B^\varphi}(f_k) = \rho_{B^\varphi}(f)$$

**Lemme 2.6.5.** [11] Soit  $f_k$ , une suite de fonctions de  $B^\varphi(R, E)$ . On suppose :

(i) Il existe  $f \in B^\varphi(R, E)$  tel que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \rho_{B^\varphi}(f - f_k) = 0$

(ii) Il existe  $g \in B^\varphi p.p.$  tel que  $\max(\|f_k(x)\|, \|f(x)\|) \leq g(x); \forall x \in \mathbb{R}$

Alors :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \rho_{B^\varphi}(f_k) = \rho_{B^\varphi}(f)$$

**Lemme 2.6.6.** [11] Soit  $f_k$  une suite de fonctions de  $B^\varphi(R, E)$ . On suppose qu'il existe  $f \in B^\varphi p.p.$  tel que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \rho_{B^\varphi}(f - f_k) = 0$ , alors :

$$\underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \rho_{B^\varphi}(f_k) \geq \rho_{B^\varphi}(f)$$

**Lemme 2.6.7.** [11] Soit  $f_k$  une suite de fonctions de  $B^\varphi(R, E)$ . Et soit  $f \in B^\varphi p.p.$  alors :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|f_k - f\|_{B^\varphi} \iff \forall \lambda > 0 \lim_{k \rightarrow +\infty} \rho_{B^\varphi}(\lambda(f - f_k)) = 0$$

# Chapitre 3

## Notions de convexité dans les espaces $B^\varphi$ p.p. et $\tilde{B}^\varphi$ p.p. :

### 3.1 Notions de convexité dans les espaces de Banach :

Soient  $X$  un espace de Banach,  $S(X)$  sa sphère unité ie :  $S(X) = \{x \in X, \|x\| = 1\}$ ,  $B(X)$  sa boule unité fermé ie :  $B(X) = \{x \in X, \|x\| \leq 1\}$ .

#### 3.1.1 Stricte convexité :

**Définition 3.1.1.** Une fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite strictement convexe si :

$$\forall u, v \in \mathbb{R} \text{ avec } u \neq v \text{ on a } \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right) < \frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2}$$

Ou d'une manière équivalente :

$$\forall u, v \in \mathbb{R} \text{ avec } u \neq v \quad \varphi(\alpha u + \beta v) < \alpha \varphi(u) + \beta \varphi(v) \quad \forall \alpha, \beta > 0 \text{ et } \alpha + \beta = 1$$

**Remarque :** ([14]) Si  $\varphi$  est strictement convexe alors  $\forall k > 0$  et  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tel que :

$$\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq (1-\delta) \frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2}$$

$\forall u, v \in \mathbb{R}$  vérifiant  $|u| \leq k, |v| \leq k$  et  $|u-v| \geq \varepsilon$

**Définition 3.1.2.** Soit  $C$  un sous-ensemble de  $X$  il est dit convexe si :  $\forall x, y \in C$   $\forall t \in [0, 1]$  on a  $tx + (1-t)y \in C$

**Définition 3.1.3.** Soient  $C$  un sous-ensemble convexe de  $X$  et  $x$  un point de  $C$ ,  $x$  est dit point extrême de  $C$  si :

$$\forall y, z \in C \text{ tel que } x = \frac{1}{2}(y+z) \text{ on a } x = y = z$$

ou d'une manière équivalente :

$$\forall y, z \in C \quad \forall \lambda \in [0, 1] \text{ tel que } x = \lambda y + (1 - \lambda)z \text{ on a } x = y = z$$

L'ensemble des points extrêmes de  $C$  sera noté :  $Extr(C)$

**Remarque :** Géométriquement, un point extrême de  $C$  est un point qui n'est le milieu d'aucun segment contenu dans  $C$ .

**Définition 3.1.4.**  $X$  sera dit strictement convexe (SC) si :

$$\forall x, y \in S(X) \text{ tel que } \|x + y\| = 2 \text{ on a } x = y$$

**Proposition 3.1.1.** Si  $X$  est strictement convexe alors  $\forall x, y \in X$  avec  $x \neq y$  on a :

$$\begin{aligned} * \|x\| = \|y\| = 1 &\implies \left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1 \\ * \forall p \in ]1, +\infty[; &\left\| \frac{x + y}{2} \right\|^p < \frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2} \end{aligned}$$

**Définition 3.1.5.** On appelle module de convexité de  $X$  le nombre

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x + y}{2} \right\| : x, y \in B(X), \|x - y\| \geq \varepsilon \right\}$$

**Proposition 3.1.2.**  $X$  est strictement convexe si et seulement si  $\delta_X(2) = 1$

**Proposition 3.1.3.** ([14]) Les assertions suivantes sont équivalentes :

- \*  $X$  est strictement convexe
- \* Si  $x, y \in X$  tel que  $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 = 0$  alors  $x = y$
- \* Si  $x, y \in X \setminus \{0\}$  tel que  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$  on a  $x = \lambda y$  pour un certain  $\lambda > 0$
- \*  $Extr(B(X)) = S(X)$

**Remarque :** La convexité d'un espace est une notion liée à sa norme, ainsi dire qu'un espace est strictement convexe est équivalent à dire que sa norme est strictement convexe.

### Exemples

- \* Tout espace de Hilbert  $(H, \|\cdot\|)$  est strictement convexe et on a  $\delta_H(\varepsilon) = \frac{2 - \sqrt{4 - \varepsilon^2}}{2}$

*Démonstration.* On prend  $\|x\| = \|y\| = 1, x \neq y$  et  $\|x - y\| = \alpha$  où :  $0 < \alpha \leq 2$ . Alors par l'identité du parallélogramme on a :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= -\|x - y\|^2 + 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \\ &= 4 - \alpha^2 < 4 \end{aligned}$$

et donc  $\|x + y\| < 2$  (proposition 1) □

- \* L'espace  $C[a, b]$  des fonctions continues à valeurs réel sur  $[a, b]$  muni de la norme  $\|x\| = \max\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$  n'est pas strictement convexe
- \* L'espace d'Orlicz  $L^\varphi(\mathbb{R})$  est strictement convexe pour la pseudonorme de Luxemburg  $\|\cdot\|_\varphi$  et  $\varphi \in \Delta_2$  (voir[4])

**Définition 3.1.6.** *Un espace modulaire  $(X, \rho)$  est strictement convexe si :*

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x, y \in X \text{ pour } \rho(x) \leq \varepsilon, \rho(y) \leq \varepsilon \text{ et } \rho(x - y) > 0 \text{ on a } \rho\left(\frac{x + y}{2}\right) < \varepsilon$$

### 3.1.2 Uniforme convexité :

**Définition 3.1.1.** *Une fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite uniformément convexe si  $\forall a \in ]0, 1[ \exists \delta(a) \in ]0, 1[$  tel que :*

$$\varphi\left(\frac{u + au}{2}\right) \leq 1 - \delta(a) \frac{\varphi(u) + \varphi(au)}{2}$$

$\forall u \in \mathbb{R}$  tel que  $|u| \geq d$  pour un certain  $d > 0$

*D'une manière équivalente :*

*Une fonction  $\varphi$  est uniformément convexe si :  $\forall \varepsilon > 0 \exists p(\varepsilon) \in ]0, 1[$  tel que  $\forall u, v \in \xi$  on a :*

$$\varphi\left(\frac{u + v}{2}\right) \leq 1 - p(\varepsilon) \frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2}$$

avec  $\xi = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, |u - v| \geq \varepsilon \max(|u|, |v|) \geq \varepsilon d\}$  pour un certain  $d$

**Définition 3.1.2.**  *$X$  sera dit uniformément convexe (UC) si :*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tel que si } \|x\| = \|y\| = 1 \text{ et } \|x - y\| \geq \varepsilon \text{ on a } \left\|\frac{x + y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$$

**Proposition 3.1.1.** *Soit  $f$  une fonction strictement convexe, strictement croissante et continue sur  $[0, 2]$ .*

*$X$  est uniformément convexe si et seulement si pour toute fonction  $f$  vérifiant les conditions précédentes avec  $f(1) = 1 \forall t \in [0, 1]$*

$$a(t) = \inf \{f(\|x + ty\|) + f(\|x - ty\|) - 2\} \text{ avec } \|x\| = \|y\| = 1$$

*est strictement positif*

**Proposition 3.1.2.** *Si  $X$  est de dimension  $\geq 2$  et  $\forall \varepsilon \in ]0, 2]$  son module de convexité est positif alors il est uniformément convexe.*

**Proposition 3.1.3.** *Caractérisation séquentielle de l'uniforme convexité :*

*$X$  est uniformément convexe si pour  $\{x_n\}, \{y_n\} \in S(X), \|x_n + y_n\| \rightarrow 2 \implies \|y_n - x_n\| \rightarrow 0$*

**Remarque :** Si  $\|x_n + y_n\| \rightarrow 2 \implies \|y_n - x_n\| \xrightarrow{\text{faiblement}} 0$  on parle de la faible uniforme convexité (*WUC*)

**Proposition 3.1.4.** *Soit  $X$  un espace uniformément convexe et  $C$  un ensemble fermé borné et convexe de  $X$  alors  $C$  a un élément unique  $x_0$  tel que :*

$$\|x_0\| = \inf\{\|x\| : x \in C\}$$

**Proposition 3.1.5.** ([8]) *Toute espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

**Exemples :**

- \* Tout espace uniformément convexe est strictement convexe. Et ces deux propriétés coïncident lorsque  $X$  est de dimension fini.
- \* L'espace d'Orlicz  $L^\varphi(\mathbb{R})$  est uniformément convexe pour la pseudonorme de Luxemburg  $\|\cdot\|_\varphi$  et  $\varphi \in \Delta_2$  (voir [1] )

**Quelque généralisations de l'uniforme convexité :**

**Locale uniforme convexité :**

**Définition 3.1.1.**  *$X$  est dit localement uniformément convexe (*LUC*) si seulement si pour un certain  $\varepsilon > 0$  et pour un élément  $x \in S(X)$ , il existe  $\delta(x, \varepsilon) > 0$  tel que :*

$$\forall y \in S(X), \|x - y\| \geq \varepsilon \text{ on a } \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon, x)$$

**Définition 3.1.2.** *Soit l'application suivante dite module de convexité local :*

$$\begin{aligned} \delta_X &: ]0, 2] \times S(X) &\longrightarrow & [0, 1] \\ &(\varepsilon, x) &\longmapsto & \delta_X(\varepsilon, x) \end{aligned}$$

$$\delta_X(\varepsilon, x) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : y \in S(X), \|x - y\| \geq \varepsilon \right\}$$

**Proposition 3.1.1.**  *$X$  est *LUC* si seulement si  $\forall \varepsilon \in ]0, 2], \forall x \in S(X)$  son module de convexité local  $\delta(\varepsilon, x)$  est strictement positif.*

**Proposition 3.1.2.** (Caractérisation séquentielle :)

*Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- $X$  est *LUC*
- Si  $x \in S(X)$  et  $y_n$  une suite dans  $S(X)$  (ou  $B(X)$ ) tel que  $\left\| \frac{1}{2}(x + y_n) \right\| \rightarrow 1$ , alors :  $\|x - y_n\| \rightarrow 0$
- Si  $x \in S(X)$  et  $y_n$  une suite dans  $X$  tel que  $\left\| \frac{1}{2}(x + y_n) \right\| \rightarrow 1$  et  $\|y_n\| \rightarrow 1$ , alors :  $\|x - y_n\| \rightarrow 0$

**Proposition 3.1.3.** *Tout espace (*UC*) est (*LUC*) l'inverse n'est généralement pas vrai*

**Uniforme convexité dans toute direction :**

**Définition 3.1.3.** Soit  $z \in X$  différent de zéro. Le module de convexité de  $X$  dans la direction  $z$  est donné :

$$\begin{aligned} \delta_X(\rightarrow z, \cdot) : [0, 2] &\longrightarrow [0, 1] \\ \varepsilon &\longmapsto \delta_X(\rightarrow z, \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\delta_X(\rightarrow z, \varepsilon) = \inf\{1 - \|\frac{x+y}{2}\| : x, y \in S(X), \|x - y\| \geq \varepsilon, \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } x - y = \lambda z\}$$

**Proposition 3.1.6.** L'espace  $(X, \|\cdot\|)$  est uniformément convexe dans toute direction (UCED) si  $\delta_X(\rightarrow z, \varepsilon) > 0 \forall z \in X \setminus \{0\}$  et  $\varepsilon \in [0, 2]$

**Proposition 3.1.7.** (Caractérisation séquentielle de (UCED)) :

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1-  $X$  est (UCED)
- 2-  $\forall x_n, z \in X, \|x_n\| \rightarrow 1, \|x_n + z\| \rightarrow 1$  et  $\|2x_n + z\| \rightarrow 2$  implique  $z = 0$
- 3-  $\forall z \neq 0$  dans  $X$  et  $x_n$  et  $y_n$  deux suites de  $X$  tel que :  $(\lim \|x_n\| = \lim \|y_n\| = 1 ; \lim \|x_n + y_n\| = 2$  et  $x_n - y_n = a_n z)$  alors  $\lim (a_n) = 0$

## 3.2 Propriétés de la pseudomodulaire $\rho_{B^\varphi}$ et de la pseudonorme $\|\cdot\|_{B^\varphi}$

**Lemme 3.2.1.** ([11]) Pour toute fonction  $f \in B^\varphi$  p.p., la limite

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi(\|f(t)\|) d\mu$$

existe et est finie.

**Lemme 3.2.2.** ([11]) Soit  $f \in B^\varphi$  p.p. on suppose que la fonction  $\varphi$  satisfait à la condition- $\Delta_2$  avec des constantes  $K > 2$  et  $\alpha > 0$ . Alors la fonctionnelle

$$\lambda \longrightarrow \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f}{\lambda}\right)$$

est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$

**Lemme 3.2.3.** ([11]) Soit  $f \in B^\varphi$  p.p. on suppose que la fonction  $\varphi$  satisfait à la condition- $\Delta_2$  avec des constantes  $K > 2$  et  $u_0 \geq 0$ . Alors on a :

- 1  $\|f\|_{B^\varphi} \leq 1$  si et seulement si  $\rho_{B^\varphi}(f) \leq 1$
- 2 En particulier  $\|f\|_{B^\varphi} = 1$  si et seulement si  $\rho_{B^\varphi}(f) = 1$

3  $\forall \varepsilon \in ]0, 1[ \exists \delta(\varepsilon) \in ]0, 1[$  tels que

$$\rho_{B^\varphi}(f) \leq 1 - \varepsilon \Rightarrow \|f\|_{B^\varphi} \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

*Démonstration.*

1 • Supposons que  $\|f\|_{B^\varphi} \leq 1$

Par définition on a  $\rho_{B^\varphi}\left(\frac{f}{\|f\|_{B^\varphi} + \varepsilon}\right) \leq 1, \forall \varepsilon > 0$ . Par le lemme 3.2.2

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f}{\|f\|_{B^\varphi} + \varepsilon}\right) = \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f}{\|f\|_{B^\varphi}}\right) \leq 1$$

Alors :

$$\rho_{B^\varphi}(f) \leq \left(\frac{f}{\|f\|_{B^\varphi}}\right) \leq 1$$

• Supposons maintenant que  $\rho_{B^\varphi}(f) \leq 1$ . Alors :

$$1 \in \left\{ k > 0, \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f}{k}\right) \leq 1 \right\}$$

Ce qui entraîne que

$$\|f\|_{B^\varphi} = \inf \left\{ k > 0, \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f}{k}\right) \leq 1 \right\} \leq 1$$

2 • Supposons que  $\|f\|_{B^\varphi} = 1$ . On a d'après i),  $\rho_{B^\varphi}(f) \leq 1$ . Et on a :

$$\forall \lambda \in ]0, 1[, (1 - \lambda) \notin \left\{ k > 0, \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f}{k}\right) \leq 1 \right\}$$

Donc

$$\rho_{B^\varphi}\left(\frac{f}{1 - \lambda}\right) > 1$$

Par le lemme 3.2.2

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f}{1 - \lambda}\right) = \rho_{B^\varphi}(f) \geq 1$$

Et donc  $\rho_{B^\varphi}(f) = 1$

3.2. PROPRIÉTÉS DE LA PSEUDOMODULAIRE  $\rho_{B^\varphi}$  ET DE LA PSEUDONORME  $\|\cdot\|_{B^\varphi}$  31

- Supposons  $\rho_{B^\varphi}(f) = 1$ . On a d'après i),  $\|f\|_{B^\varphi} \leq 1$ .  
On suppose  $\|f\|_{B^\varphi} = a < 1$  on a :

$$\rho_{B^\varphi}(f) = \rho_{B^\varphi}\left(a\frac{f}{a}\right) \leq a\rho_{B^\varphi}\left(\frac{f}{a}\right)$$

Comme  $\left\|\frac{f}{a}\right\|_{B^\varphi} = 1$ , par i)  $\rho_{B^\varphi}\left(\frac{f}{a}\right) \leq 1$

Par suite,  $\rho_{B^\varphi}(f) \leq a < 1$ . Contradiction avec l'hypothèse  $\rho_{B^\varphi}(f) = 1$ , d'où  $\|f\|_{B^\varphi} = 1$

□

**Lemme 3.2.4.** ([11]) Soit  $f \in B^\varphi(\mathbb{R}, E)$  alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{\mu}\{t \in \mathbb{R}, \|f(t)\| \geq n\} = 0$$

*Démonstration.* Soit  $f \in B^\varphi(\mathbb{R}, E)$  donc  $\exists \alpha > 0$  tel que  $\rho_{B^\varphi}(\alpha f) < +\infty$ .  
Pour tout  $N \in \mathbb{N}$  soit la troncature de  $f$  :

$$f_N(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } \|f(t)\| \leq N \\ N & \text{si } \|f(t)\| \geq N \end{cases}$$

Notons  $E_N = \{t \in \mathbb{R}, \|f(t)\| \geq N\}$ , la convexité de  $\varphi$  nous donne pour tout  $N \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \rho_{B^\varphi}(\alpha f) &\geq \rho_{B^\varphi}(\alpha f_N) \\ &\geq \rho_{B^\varphi}(\alpha f_N \chi_{E_N}) \\ &\geq \rho_{B^\varphi}(\alpha N \chi_{E_N}) \\ &\geq \phi(\alpha N) \bar{\mu}(E_N) \end{aligned}$$

Par passage à la limite on obtient :  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \bar{\mu}(E_N) = 0$

□

**Lemme 3.2.5.** ([11])  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tels que l'implication suivante :

$$\forall A \in \Sigma, \rho_{B^\varphi}(\chi_A) < \delta \implies \bar{\mu}(A) < \varepsilon$$

est vérifiée.

*Démonstration.* Montrons d'abord que  $\varphi(\chi_A) = \varphi(1)\chi_A$  :

$$\varphi(\chi_A) = \begin{cases} \varphi(1) & \text{si } t \in A \\ \varphi(0) = 0 & \text{si } t \notin A \end{cases} \quad \varphi(1)\chi_A = \begin{cases} \varphi(1) & \text{si } t \in A \\ 0 = \varphi(0) & \text{si } t \notin A \end{cases}$$

alors l'égalité est vérifiée.

Soient  $\varepsilon > 0$  et  $\bar{\mu}(A) \geq \varepsilon$  on a alors :

$$\begin{aligned}
 \rho_{B^\varphi}(\chi_A(t)) &= \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi(\chi_A(t)) d\mu \\
 &= \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi(1)\chi_A(t) d\mu \\
 &= \varphi(1) \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \chi_A(t) d\mu \\
 &= \varphi(1)\bar{\mu}(A) \\
 &\geq \varphi(1)\varepsilon = \delta
 \end{aligned}$$

□

**Lemme 3.2.6.** ([11]) Soit  $f \in B^\varphi p.p.$  alors  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tels que l'implication suivante :

$$\forall A \in \Sigma, \bar{\mu}(A) \leq \delta \implies \rho_{B^\varphi}(f\chi_A) \leq \varepsilon$$

est vérifiée.

*Démonstration.* Soient  $f \in B^\varphi p.p.$  alors par la définition de  $B^\varphi p.p.$  il existe une suite  $\{P_n\}_{\{n \geq 1\}}$  de polynômes trigonométriques pour lesquels il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\rho_{B^\varphi}(2(P_n - f)) \leq \frac{1}{2}\varepsilon \quad (*)$$

Soit  $P_n \in P$  alors  $2P_n \in \{u.p.p\}$  donc  $2P_n$  est uniformément bornée et de par la continuité de  $\varphi$  on a  $\varphi(2P_n) < \varphi(M)$  avec  $M > 0$ , on a alors :

$$\begin{aligned}
 \rho_{B^\varphi}(\chi_A) &= \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi(P_n\chi_A) d\mu \\
 &= \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi(2P_n)\chi_A d\mu \\
 &\leq \varphi(M)\bar{\mu}(A)
 \end{aligned}$$

On a donc l'implication suivante :

$$\exists \delta = \frac{\varepsilon}{2\varphi(M)} \forall A \in \Sigma, \bar{\mu}(A) \leq \delta \rightarrow \rho_{B^\varphi}(2P_n\chi_A) \leq \frac{1}{2}\varepsilon \quad (**)$$

Par (\*) et (\*\*) on a :

$$\begin{aligned}
 \rho_{B^\varphi}(f\chi_A) &\leq \rho_{B^\varphi}(2(P_n - f)\chi_A + 2P_n\chi_A) \\
 &\leq \rho_{B^\varphi}(2(P_n - f)\chi_A) + \rho_{B^\varphi}(2P_n\chi_A) \\
 &\leq \rho_{B^\varphi}(2(P_n - f)) + \rho_{B^\varphi}(2P_n\chi_A) \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
 \end{aligned}$$

□

**Lemme 3.2.7.** ([11]) Soit  $f_n \subset B^\varphi(\mathbb{R})$  si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{B^\varphi} = 0$  avec  $f \in B^\varphi p.p.$  alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{B^\varphi}(f_n) = \rho_{B^\varphi}(f)$$

*Démonstration.* Soit l'ensemble suivant :

$$E_\eta^n = \{t \in \mathbb{R} \mid |f_n(t) - f(t)| \geq \eta\}$$

Comme  $2f \in B^\varphi p.p.$  par le lemme 3.2.6 on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall Q \in \Sigma, \bar{\mu}(Q) \leq \delta \implies \rho_{B^\varphi}(2f\chi_Q) \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Par le lemme 2.6.7 on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{B^\varphi}(2(f_n - f)) = 0$

Alors  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 \quad \rho_{B^\varphi}(2(f_n - f)) \leq \frac{\varepsilon}{4}$

On a alors  $\forall n \geq n_1$  :

$$\begin{aligned} \rho_{B^\varphi}(f\chi_Q) &\leq \rho_{B^\varphi}(2(f_n - f)\chi_Q + 2f_n\chi_Q) \\ &\leq \rho_{B^\varphi}(2(f_n - f)\chi_Q) + \rho_{B^\varphi}(2f_n\chi_Q) \\ &\leq \rho_{B^\varphi}(2(f_n - f)) + \rho_{B^\varphi}(2f_n\chi_Q) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Par le lemme 2.6.7 on a  $f_n$  est  $\bar{\mu}$ -convergente vers  $f$  alors l'ensemble  $E_\eta^n$  est  $\bar{\mu}$ -négligeable c'est à dire :  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \quad \bar{\mu}(E_\eta^n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Alors  $\forall n \geq n^*$  avec  $n^* = \max(n_0, n_1)$  on a :

$$\begin{aligned} |\rho_{B^\varphi}(f_n) - \rho_{B^\varphi}(f)| &\leq \rho_{B^\varphi}(|f_n - f|) \\ &\leq \rho_{B^\varphi}(|f_n - f|\chi_{E_\eta^n}) + \rho_{B^\varphi}(|f_n - f|\chi_{(E_\eta^n)^c}) \\ &\leq \rho_{B^\varphi}(f_n\chi_{E_\eta^n}) + \rho_{B^\varphi}(f\chi_{E_\eta^n}) + \eta\bar{\mu}((E_\eta^n)^c) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \eta \end{aligned}$$

Par passage à la limite on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\rho_{B^\varphi}(f_n) - \rho_{B^\varphi}(f)| \leq \eta$$

Comme  $\eta$  est arbitraire on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\rho_{B^\varphi}(f_n) - \rho_{B^\varphi}(f)| = 0$$

□

**Lemme 3.2.8.** ([11]) *Supposons  $\varphi$  strictement convexe et soient  $\{f_n\}$  et  $\{g_n\}$  deux suites de  $B^\varphi p.p$  telles que si pour un certain  $r \geq 0$  on a  $\rho_{B^\varphi}(f_n) \leq r, \rho_{B^\varphi}(g_n) \leq r, \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{B^\varphi}(\frac{1}{2}(f_n + g_n)) = r$  Alors la suite  $\{f_n - g_n\}$  est  $\bar{\mu}$ -convergente vers zéro.*

*Démonstration.*

Supposons le contraire :

$$\bar{\mu}(E_n) > \varepsilon_0 \quad \text{où} \quad E_n = \{t \in \mathbb{R} \mid \|f_n - g_n\| \geq k_\varepsilon\}$$

Par le lemme 3.2.5 on a :

$$\exists k_{\varepsilon_0} \quad \text{tel que} \quad \rho_{B^\varphi}(\chi_{E_n}(t)) \geq k_{\varepsilon_0}$$

Posons  $\varepsilon_0 = \varepsilon$  et  $k_{\varepsilon_0} = \frac{r}{k_\varepsilon}$  avec  $k_\varepsilon > 1$  on obtient :

Soient les ensembles suivants :

$$\bar{\mu}(E_n) \geq \varepsilon \Rightarrow \rho_{B^\varphi}(\chi_{E_n}(t)) \geq \frac{r}{k_\varepsilon}$$

$$A_n = \{t \in \mathbb{R} \mid \|f_n\| > k_\varepsilon\}$$

$$B_n = \{t \in \mathbb{R} \mid \|g_n\| > k_\varepsilon\}$$

Alors :

$$\begin{aligned} r &\geq \rho_{B^\varphi}(f_n) \\ &\geq \rho_{B^\varphi}(f_n \chi_{A_n} + f_n \chi_{A_n^c}) \\ &\geq \rho_{B^\varphi}(f_n \chi_{A_n}) + \rho_{B^\varphi}(f_n \chi_{A_n^c}) \\ &\geq \rho_{B^\varphi}(f_n \chi_{A_n}) \\ &\geq \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi(\|f_n \chi_{A_n}\|) d\mu \\ &\geq \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi(k_\varepsilon \chi_{A_n}) d\mu \\ &\geq k_\varepsilon \rho_{B^\varphi}(\chi_{A_n}) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\rho_{B^\varphi}(\chi_{A_n}) \leq \frac{r}{k_\varepsilon} \quad \text{et par le lemme 3.2.5} \quad \bar{\mu}(A_n) \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

De la même façon on obtient :

$$\bar{\mu}(B_n) \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

### 3.2. PROPRIÉTÉS DE LA PSEUDOMODULAIRE $\rho_{B^\varphi}$ ET DE LA PSEUDONORME $\|\cdot\|_{B^\varphi}$ 35

Considérons l'ensemble suivant :

$$Q = \{(u, v) \in E^2 \mid \|u\| \leq k, \|v\| \leq k, \|u - v\| \leq \sigma\}$$

Avec  $(E, \|\cdot\|)$  strictement convexe.

Et soit la fonction suivante :

$$F : Q \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \longmapsto F(u, v) = \min\left(\frac{\|u+v\|}{\|u\|+\|v\|}, 2\frac{\varphi(\frac{\|u+v\|}{2})}{\varphi(\|u\|)+\varphi(\|v\|)}\right)$$

Où  $F$  est continue sur le compact  $Q$ .

Montrons que  $F(u, v)$  est continue sur le compact  $Q$  :

1- Si  $\|u\| = \|v\|$

- Si  $u$  et  $v$  ne sont pas colinéaires :

Par la strict convexité de  $E$  on a  $\|u + v\| < \|u\| + \|v\|$  et donc  $F(u, v) < 1$

- Si  $u$  et  $v$  sont colinéaires :

On peut écrire  $u = e^{i\theta}v$  avec  $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$  on a alors :

$\|u + v\| = \|e^{i\theta}v + v\| = |1 + e^{i\theta}|\|v\| < 2\|v\| < \|u\| + \|v\|$  Et donc  $F(u, v) < 1$

2- Si  $\|u\| \neq \|v\|$

$$\varphi\left(\frac{\|u+v\|}{2}\right) < \frac{\varphi(\|u\|)+\varphi(\|v\|)}{2} \Rightarrow 2\frac{\varphi(\frac{\|u+v\|}{2})}{\varphi(\|u\|)+\varphi(\|v\|)} < 1 \text{ On a donc } F(u, v) < 1$$

Compte tenu de la compacité de  $Q$  on a :

$$\sup_Q F(u, v) = 1 - \delta \quad \text{pour un certain } \delta \in ]0, 1[$$

- Si  $F(u, v) = \frac{\|u+v\|}{\|u\|+\|v\|}$  par la strict convexité de  $\varphi$  et la remarque de la *définition* 3.1.1 on a :

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{\|u + v\|}{\|u\| + \|v\|} \leq (1 - \delta) \\ \implies \frac{\|u + v\|}{2} &\leq (1 - \delta) \frac{\|u\| + \|v\|}{2} \\ \implies \varphi\left(\frac{\|u + v\|}{2}\right) &\leq \varphi\left((1 - \delta) \frac{\|u\| + \|v\|}{2}\right) \\ &\leq (1 - \delta) \varphi\left(\frac{\|u\| + \|v\|}{2}\right) \\ &\leq (1 - \delta) \frac{\varphi(\|u\|) + \varphi(\|v\|)}{2} \end{aligned}$$

- Si  $F(u, v) = 2 \frac{\varphi(\frac{\|u+v\|}{2})}{\varphi(\|u\|) + \varphi(\|v\|)}$  on a :

$$F(u, v) = 2 \frac{\varphi(\frac{\|u+v\|}{2})}{\varphi(\|u\|) + \varphi(\|v\|)} \leq (1 - \delta)$$

$$\implies \varphi\left(\frac{\|u+v\|}{2}\right) \leq (1 - \delta) \frac{\varphi(\|u\|) + \varphi(\|v\|)}{2}$$

Alors  $\forall (u, v) \in Q$

$$\varphi\left(\frac{\|u+v\|}{2}\right) \leq (1 - \delta) \frac{\varphi(\|u\|) + \varphi(\|v\|)}{2}$$

Où  $\delta$  dépend de  $\varphi, k$  et  $\sigma$

Soit  $t \in E_n \setminus A_n \cup B_n$  alors  $(f_n, g_n) \in Q$  d'où :

$$\varphi\left(\frac{\|f_n + g_n\|}{2}\right) \leq (1 - \delta) \frac{\varphi(\|f_n\|) + \varphi(\|g_n\|)}{2}$$

C'est à dire :

$$\delta \frac{\varphi(\|f_n\|) + \varphi(\|g_n\|)}{2} \leq \frac{\varphi(\|f_n\|) + \varphi(\|g_n\|)}{2} - \varphi\left(\frac{\|f_n + g_n\|}{2}\right)$$

On a donc par strict convexité de  $\varphi$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(\|f_n\|) + \varphi(\|g_n\|)}{2} - \varphi\left(\frac{\|f_n + g_n\|}{2}\right) &\geq \delta \varphi\left(\frac{\|f_n\| + \|g_n\|}{2}\right) \\ &\geq \delta \varphi\left(\frac{\|f_n - g_n\|}{2}\right) \end{aligned}$$

Par intégration puis par passage à la limite :

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \left( \frac{\varphi(\|f_n\|) + \varphi(\|g_n\|)}{2} - \varphi\left(\frac{\|f_n + g_n\|}{2}\right) \right) d\mu \geq \delta \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi\left(\frac{\|f_n - g_n\|}{2}\right) d\mu$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho_{B^\varphi}(f_n) + \rho_{B^\varphi}(g_n)}{2} - \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f_n + g_n}{2}\right) &\geq \delta \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f_n - g_n}{2}\right) \\
 &\geq \delta \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f_n - g_n}{2} \chi_{E_n \setminus A_n \cup B_n} + \frac{f_n - g_n}{2} \chi_{(E_n \setminus A_n \cup B_n)^c}\right) \\
 &\geq \delta \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f_n - g_n}{2} \chi_{E_n \setminus A_n \cup B_n}\right) \\
 &\geq \delta \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi\left(\frac{\|f_n - g_n\|}{2} \chi_{E_n \setminus A_n \cup B_n}\right) d\mu \\
 &\geq \delta \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi\left(\frac{k}{2} (\chi_{E_n} - \chi_{A_n} - \chi_{B_n})\right) d\mu \\
 &\geq \delta \varphi\left(\frac{k}{2}\right) \left(\overline{\mu}(E_n) - \overline{\mu}(A_n) - \overline{\mu}(B_n)\right) \\
 &\geq \delta \varphi\left(\frac{k}{2}\right) \frac{\varepsilon}{2}
 \end{aligned}$$

On a posé au début  $\rho_{B^\varphi}(f_n) \leq r$  et  $\rho_{B^\varphi}(g_n) \leq r$  alors :

$$\begin{aligned}
 \delta \varphi\left(\frac{k}{2}\right) \frac{\varepsilon}{2} &\leq \frac{\rho_{B^\varphi}(f_n) + \rho_{B^\varphi}(g_n)}{2} - \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f_n + g_n}{2}\right) \leq r - \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f_n + g_n}{2}\right) \\
 \implies &\rho_{B^\varphi}\left(\frac{f_n + g_n}{2}\right) \leq r - \delta \varphi\left(\frac{k}{2}\right) \frac{\varepsilon}{2} \\
 \implies &\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f_n + g_n}{2}\right) = r - \delta \varphi\left(\frac{k}{2}\right) \frac{\varepsilon}{2}
 \end{aligned}$$

Contradiction avec :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f_n + g_n}{2}\right) = r$$

□

**Lemme 3.2.9.** ([11])

1. Soit  $f \in B^\varphi p.p.$  telle que  $f > 0$ . Alors, il existe deux nombres réels  $0 < \alpha < \beta$  et  $\theta \in ]0, 1[$  tels que pour l'ensemble  $G = \{t \in \mathbb{R}, \alpha \leq \|f(t)\| \leq \beta\}$  on a  $\overline{\mu}(G) \geq \theta$ .
2. Si  $f_n \in B^\varphi p.p.$  une suite de fonctions modulaire convergente vers une fonction  $f$  alors il existe des nombres réels  $0 < \alpha' < \beta'$ ,  $\theta' \in ]0, 1[$  et  $n_0 \geq 1$  tels que  $\overline{\mu}(E_n) \geq \theta' \forall n \geq n_0$ , où  $E_n = \{t \in \mathbb{R}, \alpha' \leq \|f(t)\| \leq \beta'\}$  et  $\alpha' = \frac{\alpha}{2}$ ,  $\beta' = \frac{\alpha}{2} + \beta$ ,  $\theta' = \frac{\theta}{2}$ .

*Démonstration.*

1-

On suppose le contraire c'est à dire :

$$\forall n \geq 1 \text{ on a } \bar{\mu}(G_n) < \frac{1}{n\varphi(n)} \quad \text{où} \quad G_n = \{t \in \mathbb{R}, \frac{1}{n} \geq \|f(t)\| \leq n\}$$

soient les ensembles suivants :

$$A_n = \{t \in \mathbb{R}, \|f(t)\| \leq \frac{1}{n}\}$$

$$B_n = \{t \in \mathbb{R}, \|f(t)\| > n\}$$

On a :

$$\begin{aligned} \rho_{B^\varphi}(f\chi_{A_n}) &= \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi(\|f\|\chi_A) d\mu \\ &\leq \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi\left(\frac{1}{n}\chi_A\right) d\mu \\ &\leq \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \bar{\mu}(A_n) \\ &\leq \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

De la même façon :

$$\rho_{B^\varphi}(f\chi_{G_n}) \leq \varphi(n) \bar{\mu}(G_n) \leq \frac{1}{n}$$

On faisant tendre  $n$  vers l'infini on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{B^\varphi}(f\chi_{A_n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{B^\varphi}(f\chi_{G_n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Par le lemme 3.2.4 et 3.2.6 on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{B^\varphi}(f\chi_{B_n}) = 0$$

Alors  $\forall n \geq 1$

$$\begin{aligned} \rho_{B^\varphi}(f) &= \rho_{B^\varphi}(f\chi_{A_n} + f\chi_{B_n} + f\chi_{C_n}) \\ &\leq \rho_{B^\varphi}(f\chi_{A_n}) + \rho_{B^\varphi}(f\chi_{B_n}) + \rho_{B^\varphi}(f\chi_{C_n}) \end{aligned}$$

3.2. PROPRIÉTÉS DE LA PSEUDOMODULAIRE  $\rho_{B^\varphi}$  ET DE LA PSEUDONORME  $\|\cdot\|_{B^\varphi}$  39

C'est à dire

$$\rho_{B^\varphi}(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Alors que on a :

$$f > 0 \Rightarrow \rho(f) > 0$$

On a donc une contradiction

2-

On a

$$f_n \xrightarrow{\rho} f \quad \text{alors} \quad f_n \xrightarrow{\bar{\mu}} f$$

Soit  $\forall \alpha > 0, \forall \theta > 0, \forall n \geq n_1$  on a :

$$\bar{\mu}(F_n) < \frac{\theta}{2} \quad \text{où} \quad F_n = \{t \in \mathbb{R} \mid \|f_n(t) - f(t)\| > \frac{\alpha}{2}\}$$

Et soit  $G \setminus F_n = \{t \in \mathbb{R} \mid \alpha < \|f(t)\| < \beta \text{ et } \|f_n(t) - f(t)\| \geq \frac{\alpha}{2}\}$

Alors  $\forall t \in G \setminus F_n$  on a :

$$\|f_n(t)\| = \|f_n(t) - f(t) + f(t)\| \leq \|f_n(t) - f(t)\| + \|f(t)\| \leq \beta + \frac{\alpha}{2} = \beta'$$

$$\|f_n(t)\| = \|f(t) + f_n(t) - f(t)\| \geq \|f(t)\| - \|f_n(t) - f(t)\| \geq \alpha + \frac{\alpha}{2} = \alpha'$$

On alors :

$$\alpha' \leq \|f_n(t)\| \leq \beta' \quad \text{c'est à dire} \quad G \setminus F_n \subset E_n$$

Donc

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(E_n) &\geq \bar{\mu}(G \setminus F_n) \\ &\geq \bar{\mu}(G) - \bar{\mu}(F_n) \\ &\geq \theta - \frac{\theta}{2} \\ &\geq \theta' \end{aligned}$$

□

**Lemme 3.2.10.** ([11]) Soit  $f \in L^\varphi([0, 1])$  alors :

1. Si  $\tilde{f}$  est l'extension périodique (avec une période  $\tau$ ) de  $f$  à la droite  $\mathbb{R}$ , on a  $\tilde{f} \in \tilde{B}^\phi p.p.$
2. L'injection  $\iota : L^\varphi([0, 1]) \hookrightarrow \tilde{B}^\phi p.p., \iota(f) = \tilde{f}$  est une isométrie.

*Démonstration.*

1

Soient  $f \in L^\varphi([0, 1])$  et  $E_N = \{t \in [0, 1] \mid |f(t)| \geq N\}$ . On a d'après [1]  $f \in L^1([0, 1])$  donc  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mu(E_N) = 0$  on a alors :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{E_N} \varphi(\lambda |f(t)|) d\mu = 0 \quad \text{pour un certain } \lambda > 0$$

Soit  $f_N = f \chi_{E_N^c}$  où  $E_N^c$  le complémentaire de  $E_N$ , alors pour un certain  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(\lambda |f(t) - f_{N_\varepsilon}(t)|) dt &\leq \int_{E_{N_\varepsilon}} \varphi(\lambda |f(t) - f_{N_\varepsilon}(t)|) dt + \int_{E_{N_\varepsilon}^c} \varphi(\lambda |f(t) - f_{N_\varepsilon}(t)|) dt \\ &\leq \int_{E_{N_\varepsilon}} \varphi(\lambda |f(t) - f_{N_\varepsilon}(t)|) dt \\ &\leq \int_{E_{N_\varepsilon}} \varphi(\lambda |f(t) - f_{N_\varepsilon}(t)|) dt \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

On a  $f_{N_\varepsilon}$  bornée alors il existe une suite de fonctions simple  $(S_{N_\varepsilon})_n$  uniformément convergente vers  $f_{N_\varepsilon}$

En particulier, il existe une fonction simple  $(S_{N_\varepsilon})$  telle que

$$\sup_{t \in [0, 1]} |\lambda(f_{N_\varepsilon}(t) - S_{N_\varepsilon}(t))| \leq \varphi^{-1}(\varepsilon)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi\left(\frac{\lambda}{2} |f(t) - S_{N_\varepsilon}(t)|\right) dt &\leq \int_0^1 \varphi\left(\frac{\lambda |f(t) - f_{N_\varepsilon}(t)| + \lambda |f_{N_\varepsilon}(t) - S_{N_\varepsilon}(t)|}{2}\right) dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi(\lambda |f(t) - f_{N_\varepsilon}(t)|) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi(\lambda |f_{N_\varepsilon}(t) - S_{N_\varepsilon}(t)|) dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi(\lambda |f(t) - f_{N_\varepsilon}(t)|) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi(\varphi^{-1}(\varepsilon)) dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

On note  $\tilde{f}$ ,  $\tilde{S}_{N_\varepsilon}$  l'extension périodique de  $f$  et  $S_{N_\varepsilon}$  respectivement (avec une période  $\tau = 1$ ).

D'après les propriétés de périodicité de  $\tilde{f}$  et  $\tilde{S}_{N_\varepsilon}$  on a :

$$\begin{aligned}\rho_{B^\varphi}\left(\frac{\lambda}{2}(\tilde{f} - \tilde{S}_{N_\varepsilon})\right) &= \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi\left(\frac{\lambda}{2}|f - \tilde{S}_{N_\varepsilon}|\right) d\mu \\ &= \int_0^1 \varphi\left(\frac{\lambda}{2}|f - S_{N_\varepsilon}|\right) dt \leq \varepsilon\end{aligned}$$

D'après [2] il existe  $P_\varepsilon \in C^0 p.p.$ , avec  $C^0 p.p.$  les fonctions presque périodiques de Bohr, tel que :

$$\rho_{B^\varphi}\left(\frac{\lambda}{2}(\tilde{S}_{N_\varepsilon} - P_\varepsilon)\right) \leq \varepsilon$$

Soit  $\alpha = \min(\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{4})$  on a :

$$\begin{aligned}\rho_{B^\varphi}\left(\frac{\alpha}{2}(\tilde{f} - P_\varepsilon)\right) &= \frac{1}{2}\rho_{B^\varphi}(\alpha(\tilde{f} - \tilde{S}_{N_\varepsilon}) + (\tilde{S}_{N_\varepsilon} - P_\varepsilon)) \\ &\leq \frac{1}{2}\rho_{B^\varphi}\left(\frac{\lambda}{2}(\tilde{f} - \tilde{S}_{N_\varepsilon}) + \frac{1}{4}(\tilde{S}_{N_\varepsilon} - P_\varepsilon)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\{\rho_{B^\varphi}\left(\frac{\lambda}{2}(\tilde{f} - \tilde{S}_{N_\varepsilon})\right) + \rho_{B^\varphi}\left(\frac{1}{4}(\tilde{S}_{N_\varepsilon} - P_\varepsilon)\right)\} \\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

C'est à dire  $\exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}$  et  $\exists k = \frac{\alpha}{2} > 0$  tel que  $\rho_{B^\varphi}(k(\tilde{f} - P_\varepsilon)) \leq \varepsilon$  et donc  $\tilde{f} \in \tilde{B}^\varphi p.p.$

2

Soit  $f \in \tilde{B}^\varphi p.p.$  par la périodicité de  $\tilde{f}$  on a :

$$\rho_{B^\varphi}(\tilde{f}) = \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi(\|\tilde{f}(t)\|) d\mu = \rho_\varphi(f)$$

$$\rho_{B^\varphi}\left(\frac{\tilde{f}}{\lambda}\right) = \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi\left(\left\|\frac{\tilde{f}(t)}{\lambda}\right\|\right) d\mu = \rho_\varphi\left(\frac{f}{\lambda}\right)$$

$$\|\tilde{f}\|_{B^\varphi} = \inf\{\lambda > 0, \rho_{B^\varphi}\left(\frac{\tilde{f}}{\lambda}\right) \leq 1\} = \inf\{\lambda > 0, \rho_\varphi\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\} = \|f\|_\varphi$$

Alors  $\iota(f) = \tilde{f}$  est une isométrie.

□

### 3.3 Stricte convexité de l'espace $\tilde{B}^\varphi p.p.$ :

**Théorème 3.3.1.**  $\tilde{B}^\varphi p.p.$  est strictement convexe si et seulement si  $\varphi$  est strictement convexe et vérifie la condition- $\Delta_2$

*Démonstration.* • Conditions suffisantes :

Soient  $f, g \in \tilde{B}^\varphi p.p.$  tels que :  $\|f\|_{B^\varphi} = 1, \|g\|_{B^\varphi} = 1, \|f - g\|_{B^\varphi} > 0$ ,  $\varphi$  strictement convexe et vérifie la condition- $\Delta_2$ . Alors ils existent  $f_n, g_n \in \mathcal{P}$  telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{B^\varphi}(f_n - f) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{B^\varphi}(g_n - g) = 0$$

Par le lemme 2.6.5 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{B^\varphi}(f_n) = \rho_{B^\varphi}(f) \quad \text{et} \quad \rho_{B^\varphi}(g_n) = \rho_{B^\varphi}(g)$$

D'autre part, étant donné  $\rho_{B^\varphi}(f - g) > 0, (f_n - g_n)$   $\rho$ -convergente vers  $(f - g)$  alors  $(f_n - g_n) > 0$

Par le lemme 3.2.8 :

$$\exists \theta, \alpha, \beta > 0 \quad \text{et} \quad n_1 \in \mathbb{N} \quad \text{tels que} \quad \bar{\mu}\{t \in \mathbb{R}, \alpha \leq \|f_n(t) - g_n(t)\| \leq \beta\} > \theta \quad \forall n \geq n_1$$

$$\text{Posons } G = \{t \in \mathbb{R}, \alpha \leq \|f_n(t) - g_n(t)\| \leq \beta\}$$

Par le lemme 3.2.5 :

$$\exists k_\theta > 2 \quad \text{tel que} \quad \forall A \in \Sigma \quad \rho_{B^\varphi}(\chi_{A_n}) < \frac{2}{k_\theta} \implies \bar{\mu}(A) < \frac{\theta}{4}$$

Soient les deux ensembles suivants :

$$A_n = \{t \in \mathbb{R} \mid \|f_n\| > k_\theta\}$$

$$B_n = \{t \in \mathbb{R} \mid \|g_n\| > k_\theta\}$$

$$\text{On a } \rho_{B^\varphi}(f_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \rho_{B^\varphi}(f)$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \geq n_2 \quad 1 + \frac{1}{n} \geq \rho_{B^\varphi}(f_n) \geq \rho_{B^\varphi}(f_n \chi_{A_n}) \geq k_\varepsilon \rho_{B^\varphi}(\chi_{A_n})$$

Par le lemme 3.2.7 :

$$\rho_{B^\varphi}(\chi_{A_n}) \leq \frac{1 + \frac{1}{n}}{k_\theta} \quad \text{on a} \quad \bar{\mu}(A_n) \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall n \geq n_2$$

De la même manière on obtient :

$$\bar{\mu}(B_n) \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall n \geq n_2$$

Soit l'ensemble :

$$Q = \{(u, v) \in E^2 \mid \|u\| \leq k, \|v\| \leq k, \|u - v\| \leq \sigma\}$$

Avec  $(E, \|\cdot\|)$  strictement convexe.

Et soit la fonction suivante :

$$F : Q \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \longmapsto F(u, v) = \min \left( \frac{\|u+v\|}{\|u\|+\|v\|}, 2 \frac{\varphi(\frac{\|u+v\|}{2})}{\varphi(\|u\|)+\varphi(\|v\|)} \right)$$

Où  $F$  est continue sur le compact  $Q$ .

Soit  $t \in G_n \setminus A_n \cup B_n$  alors  $(f_n, g_n) \in Q$  d'où :

$$\varphi\left(\frac{\|f_n + g_n\|}{2}\right) \leq (1 - \delta) \frac{\varphi(\|f_n\|) + \varphi(\|g_n\|)}{2}$$

C'est à dire  $\forall n \geq n^*$  avec  $n^* = \max(n_1, n_2, n_3)$  on a :

$$\delta \frac{\varphi(\|f_n\|) + \varphi(\|g_n\|)}{2} \leq \frac{\varphi(\|f_n\|) + \varphi(\|g_n\|)}{2} - \varphi\left(\frac{\|f_n + g_n\|}{2}\right)$$

On a donc par strict convexité de  $\varphi$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(\|f_n\|) + \varphi(\|g_n\|)}{2} - \varphi\left(\frac{\|f_n + g_n\|}{2}\right) &\geq \delta \varphi\left(\frac{\|f_n\| + \|g_n\|}{2}\right) \\ &\geq \delta \varphi\left(\frac{\|f_n - g_n\|}{2}\right) \end{aligned}$$

Par conséquent  $\forall n \geq n^*$

$$\begin{aligned}
 \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f_n + g_n}{2}\right) &= \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi\left(\frac{\|f_n + g_n\|}{2}\right) d\mu \\
 &= \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi\left(\frac{\|f_n + g_n\|}{2}\right) \chi_{G_n \setminus (A_n \cup B_n)} d\mu + \\
 &\quad \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi\left(\frac{\|f_n + g_n\|}{2}\right) \chi_{[G_n \setminus (A_n \cup B_n)]^c} d\mu \\
 &\leq (1 - \delta) \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \frac{\varphi(\|f_n\|) + \varphi(\|g_n\|)}{2} \chi_{G_n \setminus (A_n \cup B_n)} d\mu + \\
 &\quad \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \frac{\varphi(\|f_n\|) + \varphi(\|g_n\|)}{2} [\chi_{G_n \setminus (A_n \cup B_n)}]^c d\mu \\
 &\leq -\delta \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \frac{\varphi(\|f_n\|) + \varphi(\|g_n\|)}{2} \chi_{G_n \setminus (A_n \cup B_n)} d\mu + \\
 &\quad \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \frac{\varphi(\|f_n\|) + \varphi(\|g_n\|)}{2} d\mu \\
 &\leq -\delta \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi\left(\frac{\|f_n - g_n\|}{2}\right) \chi_{G_n \setminus (A_n \cup B_n)} d\mu + \\
 &\quad \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \frac{\varphi(\|f_n\|) + \varphi(\|g_n\|)}{2} d\mu \\
 &\leq \frac{1}{2} \rho_{B^\varphi}(f_n) + \frac{1}{2} \rho_{B^\varphi}(g_n) - \delta \varphi\left(\frac{\beta}{2} \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \chi_{G_n} - \chi_{A_n} - \chi_{B_n} d\mu\right) \\
 &\leq \frac{1}{2} \rho_{B^\varphi}(f_n) + \frac{1}{2} \rho_{B^\varphi}(g_n) - \delta \varphi\left(\frac{\beta}{2} [\bar{\mu}(G_n) - \bar{\mu}(A_n) - \bar{\mu}(B_n)]\right) \\
 &\leq 1 - \delta \varphi\left(\frac{\beta}{2}\right) \left(\frac{\theta}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Posons  $\delta_1 = \delta \varphi\left(\frac{\beta}{2}\right) \left(\frac{\theta}{2}\right)$  on a :

$$\rho_{B^\varphi}\left(\frac{f + g}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f_n + g_n}{2}\right) \leq 1 - \delta_1$$

Par le lemme 3.2.3 on en conclut :

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \varepsilon(\delta_1) : \left\| \frac{f + g}{2} \right\|_{B^\varphi} \leq 1 - \varepsilon(\delta_1) \quad \text{c'est à dire} \quad \|f + g\|_{B^\varphi} < 2$$

- Conditions nécessaire :

Comme l'injection  $\iota : L^\varphi([0, 1]) \hookrightarrow \tilde{B}^\varphi$ p.p.  $\iota(f) = \tilde{f}$  est une isométrie alors la

stricte convexité de  $\tilde{B}^\varphi p.p.$  implique la stricte convexité de l'espace d'Orlicz  $L^\varphi([0, 1])$  par conséquent,  $\varphi(u)$  est strictement convexe et vérifie la condition- $\Delta_2$

□

### 3.4 uniforme convexité de l'espace $\tilde{B}^\varphi p.p.$ :

**Théorème 3.4.1.**  $\tilde{B}^\varphi p.p.$  est uniformément convexe si et seulement si  $\varphi$  est uniformément convexe est vérifie la condition- $\Delta_2$

*Démonstration.* • Conditions suffisantes :

Soient  $f, g \in \tilde{B}^\varphi p.p.$  et  $\varepsilon > 0$  tels que :  $\|f\|_{B^\varphi} = 1, \|g\|_{B^\varphi} = 1$  et  $\left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{B^\varphi} \geq \varepsilon$

D'après le lemme 3.2.3 on a :

$$\rho_{B^\varphi}(f_n) = 1, \quad \rho_{B^\varphi}(g_n) = 1, \quad \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f-g}{2}\right) > \delta$$

Pour un certain  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$

Soit  $h_\delta$  une fonction mesurable telle que  $\rho_{B^\varphi}(h_\delta) = \frac{\delta}{4}$ , posons :

$$T = \{t \in \mathbb{R}, |h_\delta| \leq \max(|f|, |g|) \leq \frac{4}{\delta}|f-g|\}$$

Pour  $t \in T$  et par l'uniforme convexité de  $\varphi \exists p(\delta) \in ]0, 1[$  tel que

$$\varphi\left(\frac{f+g}{2}\right) \leq \frac{1-p(\delta)}{2}(\varphi(|f|) + \varphi(|g|))$$

Alors

$$\rho_{B^\varphi}\left(\frac{f+g}{2}\chi_T\right) \leq \frac{1-p(\delta)}{2}(\rho_{B^\varphi}(f\chi_T) + \rho_{B^\varphi}(g\chi_T))$$

On a donc :

$$\begin{aligned} 1 - \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f+g}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\rho_{B^\varphi}(f) + \rho_{B^\varphi}(g)\right) - \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f+g}{2}\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\rho_{B^\varphi}(f\chi_T) + \rho_{B^\varphi}(g\chi_T)\right) - \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f+g}{2}\chi_T\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\rho_{B^\varphi}(f\chi_T) + \rho_{B^\varphi}(g\chi_T)\right) - \frac{1-p(\delta)}{2}\left(\rho_{B^\varphi}(f\chi_T) + \rho_{B^\varphi}(g\chi_T)\right) \\ &\geq \frac{p(\delta)}{2}\left(\rho_{B^\varphi}(f\chi_T) + \rho_{B^\varphi}(g\chi_T)\right) \end{aligned}$$

Il vient que :

$$\rho_{B^\varphi}\left(\frac{f+g}{2}\right) \leq 1 - \left(\frac{p(\delta)}{2}(\rho_{B^\varphi}(f\chi_T) + \rho_{B^\varphi}(g\chi_T))\right) \leq 1 - p(\delta)\rho_{B^\varphi}\left(\frac{f-g}{2}\chi_T\right) \quad (*)$$

Posons  $T' = T_1 \cup T_2$  avec :

$$T_1 = \{t \in \mathbb{R}, |h_\delta| > \max(|f|, |g|)\}$$

$$T_2 = \{t \in \mathbb{R}, \frac{\delta}{4} \max(|f|, |g|) > |f - g|\}$$

$$\begin{aligned} \delta &< \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f-g}{2}\right) \\ &\leq \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f-g}{2}\chi_T\right) + \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f-g}{2}\chi_{T'}\right) \\ &\leq \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f-g}{2}\chi_T\right) + \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f-g}{2}\chi_{T_1}\right) + \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f-g}{2}\chi_{T_2}\right) \\ &\leq \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f-g}{2}\chi_T\right) + \frac{1}{2}\left(\rho_{B^\varphi}(f\chi_{T_1}) + \rho_{B^\varphi}(g\chi_{T_1})\right) + \frac{\delta}{8}\left(\rho_{B^\varphi}(f\chi_{T_2}) + \rho_{B^\varphi}(g\chi_{T_2})\right) \\ &\leq \rho_{B^\varphi}\left(\frac{f-g}{2}\chi_T\right) + \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\rho_{B^\varphi}\left(\frac{f-g}{2}\chi_T\right) > \frac{\delta}{2}$$

Et par l'inégalité (\*) on a :

$$\rho_{B^\varphi}\left(\frac{f+g}{2}\right) \leq 1 - \frac{\delta p(\delta)}{2}$$

Comme  $\varphi \in \Delta_2$  par le lemme 3.2.3,  $\exists q(\varepsilon) > 0$  tel que :

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{B^\varphi} \leq 1 - q(\varepsilon)$$

D'où l'uniforme convexité de  $\tilde{B}^\varphi p.p.$

- Conditions nécessaire :

Comme l'injection  $\iota : L^\varphi([0, 1]) \hookrightarrow \tilde{B}^\varphi p.p.$   $\iota(f) = \tilde{f}$  est une isométrie alors l'uniforme convexité de  $\tilde{B}^\varphi p.p.$  implique l'uniforme convexité de l'espace d'Orlicz  $L^\varphi([0, 1])$  par conséquent  $\varphi$  est uniformément convexe. On a l'uniforme convexité implique la stricte convexité alors par le théorème 1  $\varphi$  vérifie la condition- $\Delta_2$

□

# Bibliographie

- [1] Kaminska A. On uniform convexity of orlicz spaces. *Indag. Math.*, 41.1 :27–36, 1982.
- [2] Prouse G. Amerio L. *Almost Periodic Functions and Functional Equations*. Van Norstrand Reinhold Co., New York, 1971.
- [3] Besicovitch A.S. *Almost Periodic Functions*. Dover Publ. Inc., New York, 1954.
- [4] Turett B. Rotundity of orlicz spaces. *Proc. Acad. Amsterdam*, A79 :462–469, 1976.
- [5] Barbu V. Corduneanu C, Gheorghiu N. *Almost Periodic Function*. Chelsea Publishing Co., New York, 1989.
- [6] Seán Dineen. Periodic functions. *IMS Bulletin*, 20 :51–59, 1988.
- [7] Bedouhene F. Contribution à l'étude de quelques propriétés de convexité dans l'espace de weyl-orlicz de fonctions presque périodiques, 1999.
- [8] Brezis H. *Analyse fonctionnelle. Théorie et Applications*. Masson, Paris, 1991.
- [9] Rutickii Ya.B. Krasnoselskii M.A. *Convex function and Orlicz spaces*. P.Noodhoff Ltd., Groningen, 1961.
- [10] Zhikvo V.V. Levitan B.M. *Almost periodic functions and differential equations*. Cambridge university press, 1982.
- [11] Morsli M. Espace de besicovitch orlicz de fonctions presque periodiques. structure generale et géometrie, 1996.
- [12] Orlicz W. Musielak J. *Orlicz spaces and modular spaces*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [13] Ren Z.D. Rao M.M. *Theory of Orlicz spaces*. Marcel Dekker, Inc. New-York, 1991.
- [14] Chen S. Geometry of orlicz spaces. *Dissertationes Math.*, 356, 1996.