MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE de MASTER II

OPTION: Modélisation Mathématique

Présenté par
IBEGHOUCHENE Aldjia

Sous la direction de :
Prof. BEDOUHENE Fazia

Sujet:

La Stepanov-pseudo presque périodicité et applications

Devant le jury d'examen :

MORSLI	Mohamed	Professeur	UMMTO	President
BEDOUHENE	Fazia	Professeur	UMMTO	Promotrice
SMAALI	Manel	MCA	UMMTO	Examinatrice
MELLAH	Omar	MCB	UMMTO	Examinateur
CHALLALI	Noureddine	MAA	UMMTO	Examinateur

Promotion: 2015-2016

Remerciements :

Je tiens à remercier très chaleureusement celle qui a encadré ce travail, le Professeur BEDOUHENE Fazia qui n'a pas hésité de m'avoir encadré depuis mon mémoire de Licence. Je tiens à la témoigner toute ma reconnaissance et ma gratitude pour m'avoir guidé et conseillé.

Mes remerciements particuliers s'adressent aussi à tous mes enseignants pour leurs présence.

Je remercie mes parents, notamment, ma mère SAMIA qui n'ont jamais cessé de m'encourager dans les moments difficiles. Ma mère et mes nièces DAMIA, NELIA sont sans doute la lumière de ma vie. Je remercie également mes soeurs et mon frère pour leurs soutien moral.

Enfin, j'adresse une pensée très particulière à mes amis.

Table des matières

Introduction générale

Au cours des deux dernières décennies, la théorie de fonctions presque périodiques a été développée dans plusieurs directions, notamment, en théorie qualitative des systèmes dynamiques et leur applications à la théorie du contrôle. Les ouvrages classiques de C. Corduneanu, Fink [3], Amerio et Prouse [2], Levitan et Zhikov [14], etc... donnent une belle présentation des méthodes et des résultats sur ce sujet.

La notion de fonctions Stepanov presque périodiques a été aussi très tôt introduite, mais récemment entreprise au niveau de l'étude qualitative des systèmes dynamiques. Depuis, un grand intérêt a été donné pour l'extension de certains résultats classiques au cas des équations différentielles dans des espaces de Banach, aussi bien dans le cas déterministe que stochastique. On cite à titre d'exemples:

1. Dans le cas déterministe
   (a) Presque automorphie introduite par Bochner (1955) et entreprise par Veech (1965),
   (b) Pseudo presque périodicité introduite par Zhang (1994),
   (c) Pseudo presque périodicité à poids inventé par Diagana (2006),
   (d) Pseudo presque automorphie introduite par Liang-Zhang et Xiao (2008),
   (e) Pseudo presque automorphe à poids introduite par J. Blot, G.M. Mophou, G.M. N'Guérékata, D. Pennequin (2009),
   (f) Stepanov pseudo presque périodicité introduite par Diagana en 2009.
2. Dans le cas stochastique:
   (a) Presque périodicité des trajectoires d'un processus stationnaire (E. Slutsky (1938))
   (b) Presque périodicité corrélée (E. G. Gladyshev (1963))
   (c) Presque périodicité en probabilité (O. Onicescu et V. Istratescu (1975) A. M. Precupanu. (1982)).
   (d) Presque périodicité en loi (APOD) (T. Morozan and C. Tudor (1989)).
   (e) Presque périodicité en loi fini dim. (APFD) (A. Surgailis D. Hurd, H. Russek (1992)).
   (f) Presque périodicité en distribution (APD) C. Tudor (1995)

Dans le cadre de ce mémoire, on s'intéressera à la notion de la (pseudo) presque périodicité au sens de Stepanov. Notre objectif consiste à faire une synthèse sur les propriétés essentielles de cette notion. Le problème d'existence de solutions (pseudo) presque périodiques d'une classe d'équations différentielles abstraites sera aussi discuté. Plus précisément, on se donne un espace de Banach $(\mathbb{X}, \|.\|)$ et une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ vérifiant une condition de type Lipschitz. On se donne aussi l'équation d'évolution semi-linéaire

$$u'(t) = Au(t) + f(t,u(t)) \tag{1}$$

où $A : D(A) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ est un opérateur linéaire (non borné) qui génére un C^0-semi-groupe exponentiellement stable et f est une fonction paramétrique Stepanov (pseudo) presque périodique.

On montre alors, grâce au théorème du point fixe et un résultat de superposition, l'existence et l'unicité d'une solution mild pseudo presque périodique pour l'équation (1). Les résultats de ce mémoire sont issus des deux travaux de Ding, Dong et N'Guérékata [11], et Diagana [7].

Pour ce faire, nous adoptons le plan suivant. Le mémoire est composé de trois chapitres organisés comme suit:

Le chapitre 1 est introductif et vise à présenter des différentes notions nécessaires pour la compréhension du mémoire: équations d'évolutions, presque périodicité de Bohr et la pseudo presque périodicité.

Le chapitre 2 est dédié aux résultats de l'article [11]. Dans un premier temps, on rappellera la définition de la presque périodicité au sens de Stepanov. On présentera ensuite un résultat de superposition des fonctions Stepanov presque périodique. On achèvera le chapitre par l'étude du problème d'existence de solution mild presque périodique de l'équation (1) lorsque f est Stepanov presque périodique.

Le dernier chapitre aborde le problème d'existence et d'unicité d'une solution mild pseudo presque périodique étudié par Diagana [7] lorsque le terme source f de l'équation (1) est Stepanov pseudo presque périodique.

Chapitre 1

Rappels et définitions préliminaires

Nous présenterons dans ce chapitre les différentes notions nécessaires pour la compréhension des chapitres suivants. Dans un premier temps, nous exposons brièvement les semi-groupes d'opérateurs linéaires et leur applications à la resolution des équations d'évolutions dans un espace de Banach. Nous dédions la dernière section du chapitre à une breve présentation de la notion de (pseudo) presque périodicité. Notre présentation est essentiellement inspirée des références [1, 2, 10, 14, 15, 16, 5].

1.1 Opérateurs linéaires sur un espace de Banach

Soient $(\mathbb{X},\|.\|_{\mathbb{X}})$ et $(\mathbb{Y},\|.\|_{\mathbb{Y}})$ deux espaces de Banach. Un opérateur T de $\mathbb{X}$ vers $\mathbb{Y}$ est dit linéaire si on a:

$$T(ax+by) = aT(x) + bT(y),\ \forall x,y \in \mathbb{X} \text{ et } \forall a,b \in \mathbb{K}\ (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ où } \mathbb{C}).$$

T est dit borné s'il existe un réel positif M tel que

$$\|T(x)\|_{\mathbb{Y}} \leq M\|x\|_{\mathbb{X}}, \quad \forall x \in \mathbb{X}. \tag{1.1}$$

Un opérateur linéaire $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ vérifie les propriétés équivalentes suivantes:

1. T est borné;
2. T est continu sur $\mathbb{X}$;
3. T est continu en 0;
4. T est uniformément continu sur $\mathbb{X}$.

Tout au long de ce manuscrit, $(\mathbb{X},\|.\|)$ désigne un espace de Banach et $L(\mathbb{X}) := L(\mathbb{X},\mathbb{X})$ l'ensemble des opérateurs linéaires (bornés) dans $\mathbb{X}$.

Exemple 1.2 *1. En dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues et donc bornées.*

2. L'opérateur différentiel

$$(Df)(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x),$$

défini sur l'espace de toutes les fonctions dérivables sur un intervalle $[a,b] \in \mathbb{X}$, qui est un sous-espace de $L^2([a,b])$, est un opérateur linéaire non borné.
En effet, considérons la suite de fonctions

$$f_n(x) = \sin(nx), \quad n \geq 1, \quad x \in [-\pi,\pi].$$

On a

$$\|f_n\|_{L^2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(nx))^2 dx} = \sqrt{\pi},$$

et

$$\|Df_n\|_{L^2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (n\cos(nx))^2 dx} = n\sqrt{\pi}.$$

Il vient que

$$\|Df_n\|_{L^2} = n\|f_n\|_{L^2},$$

d'où

$$\|D\| \geq \frac{\|Df_n\|_{L^2}}{\|f_n\|_{L^2}} \longrightarrow \infty.$$

1.3 Semi-groupes

Définition 1.4 *Une famille $(T_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires de $\mathbb{X}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$ est dite semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur $\mathbb{X}$ si:*

- *$T(0) = I$, (I étant l'opérateur identité sur $\mathbb{X}$),*
- *$T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall t,s \geq 0$ (dite propriété du semi-groupe).*

Un semi-groupe d'opérateurs linéaires $(T_t)_{t\geq 0}$ est dit uniformément continu si

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \|T(t) - I\|_{L(\mathbb{X})} = 0$$

et il est dit fortement continu où C_0-semi-groupe si

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \|T(t)x - x\|_{\mathbb{X}} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{X}$$

L'opérateur linéaire A défini par

$$D(A) = \{x \in \mathbb{X} / \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \textit{existe}\},$$

et

$$Ax = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \textit{pour} \quad x \in D(A)$$

est le générateur infinitésimal du semi-groupe $T(t)$, $D(A)$ est le domaine de A.

Nous allons maintenant donner quelques propriétés d'un C_0-semi-groupe.

Propriété 1.5 *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe. Alors*

1. *$\exists h > 0$ et $M \geq 1$ tels que $\forall t \in [0,h]$, on a*

$$\|T(t)\| \leq M.$$

2. *$\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ et $M \geq 1$ tels que $\forall t \geq 0$, on a*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\delta t}.$$

3. *Si $(A,D(A))$ est le générateur infinitésimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ alors $D(A)$ est dense dans $\mathbb{X}$, et A est fermé.*

4. *$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément continu si et seulement si son générateur infinitésimal $(A,D(A))$ est un opérateur linéaire borné.*
   Dans ce cas, le semi-groupe associé à A est donné par
$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

1.6 Rappels sur les équations d'évolutions linéaires et semi-linéaires

Les équations d'évolutions semilinéaire

Dans cette partie, nous étudierons le problème semilinéaire à valeur initiale, dit aussi problème de Cauchy abstrait:
$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t,u(t)) \quad \text{pour } t > t_0 \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{1.2}$$
où $A : D(A) \subset \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T(s))_{s\geq 0}$, et $f : [t_0,T] \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ une fonction continue en t et satisfait la condition de Lipschitz en u, c'est-à-dire il existe une constante $L > 0$ tel que $\forall t \in [t_0,T]$, $u,v \in \mathbb{R}$
$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq L\|u - v\|.$$
Commençons par les définitions suivantes du concept de solution pour le problème de Cauchy abstrait (1.2).

Définition 1.7 (Solution classique) *Une fonction $u : [t_0,t] \longrightarrow \mathbb{X}$ est dite solution classique de l'équation* (1.2)*, si u est continue sur $[t_0,T]$, $u(t) \in D(A)$ pour $t_0 < t \leq T$, u est continuement differentiable sur $t_0 < t \leq T$ et satisfait* (1.2)*.*

Définition 1.8 (Solution mild) *On appelle solution mild du problème* (1.2)*, toute solution continue u de l'équation intégrale*
$$u(t) = T(t - t_0)u(t_0) + \int_{t_0}^{t} T(t - \tau)f(\tau,u(\tau))d\tau. \tag{1.3}$$

Remarque 1.9
1. *Toute solution classique est une solution mild l'inverse n'est pas forcement vrai [15].*
2. *Toutefois, en dimension, la solution* (1.3)*, obtenue par la méthode de la variation de la constante, est bien une solution classique, de plus,*
$$T(t - s) = e^{A(t-s)},$$
   et l'opérateur A (la matrice A) est partout défini i.e. $D(A) = \mathbb{X}$.

Le long de ce manuscrit, il est question d'étudier le problème d'existence de solution mild de (1.2). Le théorème suivant nous fournit une réponse à ce problème:

Théorème 1 *Soit $f : [t_0,T] \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ est continue en t sur $[t_0,t]$ et uniformément Lipschitzienne continue (avec la constante L) sur $\mathbb{X}$. Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T(s))_{s\geq 0}$, sur $\mathbb{X}$. Alors pour tout $u_0 \in \mathbb{X}$, le problème* (1.2) *a une unique solution mild $u \in C(t_0,T;\mathbb{X})$.*

Remarque 1.10 *Le théorème 1 reste valable lorsque l'opérateur A dépend de t, moyennant certaines conditions qui assurent l'existence d'un système d'evolution $U(t,s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$ pour la famille $(A(t))_{t\in[0,T]}$.*

Rappelons la définition suivante d'un système d'évolution:

Définition 1.11 *Une famille à deux paramètres d'opérateurs linéaires bornés $U(t,s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$ sur $\mathbb{X}$, est dite "un système d'évolution" si les deux conditions suivantes sont satisfaites:*

- *$(t,s) \longmapsto U(t,s)$ est continu ,*
- *$U(s,s) = I$, $U(t,r)U(r,s) = U(t,s)$ pour $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$.*

Dans ce cas, la solution mild du problème (1.2), lorsqu'elle existe, est donnée par

$$u(t) = U(t,t_0)u(t_0) + \int_{t_0}^{t} U(t,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau. \tag{1.4}$$

Un système d'evolution associé à la famille d'opérateurs $A(t)$ possède les propriétés suivantes:
Propriété 1.12 *Pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$*

1. $\|U(t,s)\| \leq \exp\Big(\int_s^t \|A(\tau)\|d\tau\Big)$,
2. *pour tout $x \in \mathbb{X}$ la fonction $(t,s) \longrightarrow U(t,s)x$ est continue,*
3. $\frac{\partial U(t,s)}{\partial t} = A(t)U(t,s)$ *pour* $0 \leq s \leq t \leq T$,
4. $\frac{\partial U(t,s)}{\partial s} = -U(t,s)A(s)$ $0 \leq s \leq t \leq T$.

Remarque 1.13 *Lorsque $A(t) = A$, i.e. $A(t)$ ne dépend pas de t, alors $U(t,s) = T(t-s)$ et la famille à deux paramètres $(U(t,s))_{t,s}$ est réduite à une famille $(T(t))_t$ à un seul paramètre qui n'est autre que le semi-groupe généré par A.*

Définissons maintenant le cas hyperbolique.
Définition 1.14 *La famille d'évolution $U(t,s)$ est dite hyperbolique (ou a une dechotomie exponentielle) s'il existe une projection $(P(t))_{t\in\mathbb{R}}$, uniformément bornée et fortement continue en t, et il existe aussi $M,\delta > 0$ tels que*

- *$U(t,s)P(s) = P(t)U(t,s)$ pour tout $t \geq s$,*
- *La restriction $U_Q(t,s) : Q(s)\mathbb{X} \longrightarrow Q(t)\mathbb{X}$ est inversible pour tout $t \geq s$ et*
$$U_Q(s,t) = U_Q^{-1}(t,s)$$
- *$\|U(t,s)P(s)\| \leq Me^{-\delta(t-s)}$ et $\|U_Q(s,t)Q(t)\| \leq Me^{-\delta(t-s)}$ pour tout $t \geq s$.*

Ici $Q = I - P$.

Une dichotomie exponentielle est un concept classique dans l'étude à long terme du comportement d'équations d'évolution, pour plus de détails voir [13, 18]. Si $U(t,s)$ est hyperbolique, alors

$$\Gamma(t,s) = \begin{cases} U(t,s)P(s), & t \geq s,\ t,s \in \mathbb{R}, \\ -U_Q(t,s)Q(s), & t < s,\ t,s \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

est dite la fonction de Green correspondante à $U(t,s)$ et $P(.)$, et

$$\|\Gamma(t,s)\| \leq \begin{cases} Me^{-\omega(t-s)}, & t \geq s,\ t,s \in \mathbb{R}, \\ Me^{-\omega(s-t)}, & t < s,\ t,s \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Exemple: forme abstraite de l'équation de la chaleur

Considérons l'équation de la chaleur

$$y \in L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \cap C([0,T];L^2[0,L]);$$

$$\left\{ \begin{array}{lcll} y_t - y_{xx} & = & 0 & \text{dans} \quad (0,L)\times(0,T) \\ y(0,t) & = & y(L,t) = 0 & \text{dans} \quad (0,L)\times(0,T) \\ y(x,0) & = & y_0(x) & \text{dans} \quad (0,L) \end{array} \right. \tag{1.5}$$

où $T > 0$, $L > 0$ et $y_0 \in L^2(0,L)$. Nous pouvons réécrire l'équation sous la forme

$$\begin{aligned} y \in L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \cap C([0,T];L^2[0,L]) \qquad et \quad \frac{dy}{dt} \in L^2(0,T;H^{-1}(0,L)), \\ \frac{dy}{dt} = Ay \quad dans \quad L^2(0,T;H^{-1}(0,L)), \\ y(0) = y_0 \quad dans \quad L^2(0,L), \end{aligned} \tag{1.6}$$

où $A \in L(H_0^1(0,L),H^{-1}(0,L))$ est défini par

$$< Ay,z >= -\int_\Omega \nabla y \nabla z dx.$$

On peut aussi définir A comme opérateur non borné dans $L^2(0,L)$, en posant

$$D(A) = H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L), \quad Ay = y_{xx}.$$

L'équation (1.6) est bien de la forme

$$x' = Ax + f, \quad x(0) = x_0.$$

Nous souhaiterions donc écrire la solution de l'équation (1.6) sous la forme

$$y(t) = e^{tA}y_0.$$

Mais A étant un opérateur non borné dans $L^2(0,L)$. Remarquons que la famille $(\phi_k)_{k\geq 1}$ définie par

$$\phi_k = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{k\pi x}{L}),$$

est une base hilbertienne de $L^2(0,L)$, formée de fonctions propres de l'opérateur $(A,D(A))$. Recherchons la solution de l'équation (1.5) sous la forme

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t)\phi_k(x).$$

Si l'équation (1.5) est vérifiée au sens des distributions dans $(0,L)\times(0,T)$, alors g_k vérifie

$$\begin{aligned} g_k' + \frac{k^2\pi^2}{L^2}g_k = 0 \quad dans (0,T), \\ g_k(0) = y_{0k} = (y_0,\phi_k). \end{aligned}$$

On a donc $g_k(t) = y_0 e^{\frac{-k^2\pi^2 t}{L^2}}$. On pose

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_{0k} e^{\frac{-k^2\pi^2 t}{L^2}} \phi_k(x). \tag{1.7}$$

On peut facilement vérifier que $y \in L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \cap C([0,T];L^2(0,L))$ et que y est solution de l'équation (1.5).
Remarquons que la série de (1.7) n'est pas définie pour $t < 0$.
Posons

$$T(t)y_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (y_0,\phi_k) e^{\frac{-k^2\pi^2 t}{L^2}} \phi_k(x).$$

Pour tout $t \geq 0$, $T(t)$ appartient à $L^2(0,L)$, $T(0) = I$, et nous avons

$$T(t+s)y_0 = T(t)T(s)y_0 \quad \forall t \geq 0, \forall s \geq 0.$$

Les conditions

$$e^{0A} = 0,$$

et

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}, \text{ pour tout } s \in \mathbb{R} \text{ et pour tout } t \in \mathbb{R},$$

sont donc vérifiées par la famille d'opérateurs $(T(t))_{t\geq 0}$. La condition

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \|e^{tA} - I\| = 0$$

est remplacée par

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \|T(t)y_0 - y_0\|_{L^2(0,L)} = 0.$$

Ce sont ces propriétés qui permettent d'étendre la notion d'exponentielle d'opérateurs au cas des opérateurs non bornés.

1.15 Rappels sur les fonctions périodiques

Dans ce qui suit, $C(\mathbb{R},\mathbb{X})$ désigne l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Banach $\mathbb{X}$.

Définition 1.16 *On appelle période d'une fonction $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{X})$ le plus petit nombre réel positif non nul T tel que*

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On peut décliner quelques propriétés des fonctions périodiques.

Propriété 1.17
1. *Toute fonction périodique continue par morceaux est bornée.*
2. *Toute fonction périodique continue est uniformément continue.*

Remarque 1.18 *La somme de deux fonctions de même période est périodique. Toute fois, l'ensemble de toutes les fonctions continues périodiques ne joint pas de certaines propriétés structurelles importantes de type topologiques et algébrique, telles que la stabilité pour les opérations usuelles et la stabilité par passage à la limite. En effet, nous disposons des contres-exemples suivants*

Exemple 1.19 *L'ensemble des fonctions périodiques continues sur $\mathbb{C}$ ne forme pas un sous-espace de $C(\mathbb{C})$.*
En effet, soit $f(x) = e^{ix} + e^{i\sqrt{2}x}$. Elle s'écrit comme somme de deux fonctions périodiques, l'une de période 2π, l'autre de période $\sqrt{2}\pi$.
Supposons qu'il existe $\tau \neq 0$ tel que pour tout réel x on ait $f(x+\tau) = f(x)$. On doit avoir $e^{ix}(e^{i\tau}-1) + e^{i\sqrt{2}x}(e^{i\sqrt{2}\tau}-1) = 0$. On dérivant puis en prenant $x = 0$, on voit que l'on doit aussi avoir $e^{i\tau} - 1 + \sqrt{2}(e^{i\sqrt{2}\tau} - 1) = 0$. Ceci donne, avec l'équation de départ évaluée en $x = 0$ que $e^{i\tau} = e^{i\sqrt{2}\tau} = 1$.
Il existe donc $(k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\tau = 2k_1\pi$ et $\sqrt{2}\tau = 2k_2\pi$. Comme $\tau \neq 0$, on obtient que $\sqrt{2} = \frac{k_2}{k_1}$ ce qui est absurde.

Exemple 1.20 *Considérons la suite de fonctions périodiques*

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \sin^2(\pi \frac{x}{2^k}) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est 2^n-périodique. En effet,

$$\begin{aligned} f_n(x+2^n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \sin^2(\pi \frac{x+2^n}{2^k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \sin^2(\pi \frac{x}{2^k} + \pi 2^{n-k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \sin^2(\pi \frac{x}{2^k} + \underbrace{\pi 2^{n-k}}_{\in 2\pi\mathbb{Z}}) + \frac{1}{2^n} \sin^2(\pi \frac{x}{2^n} + \pi) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \sin^2(\pi \frac{x}{2^k}) + \frac{1}{2^n}(-\sin(\pi \frac{x}{2^n}))^2 \\ &= f_n(x) \end{aligned}$$

La série $f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sin^2(\pi \frac{x}{2^k})$ est normalement convergente, d'où f_n est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

– *Montrons que la limite n'est pas périodique. Notons par f cette limite, supposons qu'il existe $\tau \neq 0$ tel que*

$$f(x+\tau) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En particulier, pour $x = 0$, $f(0+\tau) = f(0)$ i.e

$$f(\tau) = 0 \quad \forall k \geq 1$$

donc pour tout entier $k \geq 1$ on a $\sin^2(\pi\tau\frac{x}{2^k}) = 0$ d'où $\frac{\pi\tau}{2^k} \in \pi\mathbb{Z}$ soit encore $\tau \in 2^k\mathbb{Z}$ pour tout $k \geq 1$. Ceci est impossible car $\tau \neq 0$.

Définition 1.21 *On dit qu'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est relativement dense s'il existe un réel $l > 0$ tel que*

$$[a,a+l] \cap E \neq \emptyset \ \forall a \in \mathbb{R}$$

Autrement dit; s'il existe un réel l tel que tout intervalle de longueur l rencontre E.

Dans ce qui suit, nous nous chargerons d'étudier les fonctions presque périodiques introduites pour la première fois par H.Bohr (1923). On présentera certaines propriétés des fonctions presque périodiques.

1.22 Définition fondamentales sur les fonctions presque périodiques

Dans cette section on va rappeler quelques définitions et résultats sur les fonctions presque périodiques, pour plus de details nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de références [2, 4, 5, 10, 14, 17].

Définition 1.23 *On dit qu'une fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{X}$ est presque périodique au sens de Bohr si pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble*

$$\{\tau \in \mathbb{R}, \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x+\tau) - f(x)\| \leq \epsilon\}$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$.
Autrement dit, f est presque périodique au sens de Bohr si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $l(\epsilon) > 0$ telle que tout intervalle de longueur $l(\epsilon)$ contient au moins une $\epsilon-$presque période, c'est-à-dire un nombre τ pour lequel

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x+\tau) - f(x)\| \leq \epsilon$$

On note par $AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ l'ensemble des fonctions presque périodiques.

Nous introduisons la notion de fonction normale.

Définition 1.24 *Une fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{X}$ est dite normale si pour toute suite $(h_n)_{n\in\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}$ on peut extraire une sous-suite $(h'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ telle que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $f_n(x) = f(x+h'_n)$ soit uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.*
On dit aussi que f vérifie le critère de Bochner.

Définition 1.25 *Un polynôme trigonométrique est une application $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{X}$ de la forme*

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k x},$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$ et $a_k \in \mathbb{X}$.

Voici une notion fondamentale dans la compréhension des fonctions presque périodiques.

Définition 1.26 *Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{X}$ possède la propriété de l'approximation polynômiale si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un polynôme trigonométrique P_ϵ tel que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x) - P_\epsilon(x)\| \leq \epsilon.$$

Le lien entre les définitions précédentes est consigné dans la proposition suivante:

Proposition 1.27 *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

- *f est presque périodique au sens de Bohr.(définition 1.23)*

- *f est presque périodique au sens de Bochner (vérifie le critère de Bochner définition 1.24).*
- *f satisfait le critère double suites de Bochner, c'est-à-dire, pour tout suites (α'_n), (β'_n) dans $\mathbb{R}$, on peut extraire des sous-suites $(\alpha_n) \subset (\alpha'_n)$ et $(\beta_n) \subset (\beta'_n)$ avec même indices tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, les limites*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\lim_{m\longrightarrow\infty} f(x+\alpha_n+\beta_m) \quad et \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} f(x+\alpha_n+\beta_n)$$

  existes et sont égales.
- *f possède la propriété d'approximation polynômiale.(définition 1.25)*

Certaines propriétés essentielles sont résumées dans la propriété suivante.

Propriété 1.28 *1. Soit $f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et F une primitive de f. La fonction F est presque périodique si et seulement si elle est bornée.*

2. *Une fonction presque périodique au sens de Bohr est bornée.*
3. *Toute fonction presque périodique est bornée et uniformément continue.*
4. *Une fonction presque périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*
5. *Si f est presque périodique alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ toute applications $x \longmapsto af(x)$, $x \longmapsto f(ax)$ et $x \longmapsto f(a+x)$ sont presque périodiques.*
6. *Si f est presque périodique alors $\|f\|$ l'est aussi.*
7. *Une limite uniforme des fonctions presque périodiques est presque périodique.*
8. *Si f et g sont deux fonctions presque périodiques alors $f+g$ et $f.g$ sont presque périodiques.*
9. *La valeur moyenne d'une fonction $f \in AP(\mathbb{X})$ existe et elle est définie par*

$$M\{f\} := \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx.$$

   De plus, elle vérifie:

$$M\{\|f\|\} = 0 \Longrightarrow f \equiv 0. \tag{1.8}$$

10. *Soit $f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Si $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f * g \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ [1].*

Proposition 1.29
Le sous-espace $AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est fermé dans $C(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Exemple 1.30 *La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}x).$$

On a vu précédemment que f n'est pas périodique toutefois, elle est presque périodique comme polynôme trigonométrique.

1. Pour rappel, la convolution de deux fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{X}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, notée $f * g$, si elle existe, est définie par

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)ds.$$

Les fonctions paramétriques presque périodiques

Revenons maintenant aux fonctions paramétriques.

1. On dit qu'une fonction paramétrique $f : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ est Bohr presque périodique si, pour tout $x \in \mathbb{X}$, la fonction $f(.,x)$ est Bohr presque périodique.
   L'ensemble de ces fonctions est noté par $AP(\mathbb{R} \times \mathbb{X},\mathbb{X})$.
2. On dit qu'une fonction paramétrique $f : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ est Bohr presque périodique uniformément sur les partie compact $K \in \mathbb{X}$ si, la fonction $f(.,x)$ est Bohr presque périodique pour tout $x \in K$.
   On note par $AP_K(\mathbb{R} \times \mathbb{X},\mathbb{X})$ l'ensemble des fonctions paramétriques presque périodiques sur les parties compacts.
3. On dit qu'une fonction paramétrique $f : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ est Bohr presque périodique uniformément sur les parties bornées $B \in \mathbb{X}$ si, la fonction $f(.,x)$ est Bohr presque périodique pour tout $x \in B$.
   L'ensemble de ces fonctions est noté par $AP_B(\mathbb{R} \times \mathbb{X},\mathbb{X})$.

Remarque 1.31 *Les inclusions suivantes sont vérifiées:*

$$AP_K(\mathbb{R} \times \mathbb{X},\mathbb{X}) \subset AP_B(\mathbb{R} \times \mathbb{X},\mathbb{X}) \subset AP(\mathbb{R} \times \mathbb{X},\mathbb{X}).$$

1.32 Fonctions pseudo presque périodiques

Cette section est consacrée à la notion de pseudo presque périodicité. Ce concept qui est une généralisation naturelle de la presque périodicité a été introduit par C.Zhang [19] en 1994. Depuis son introduction dans la littérature, cette notion a généré plusieurs extensions et développements, voir, [7, 8, 9]. En particulier, elle a été utilisé pour étudier le comportement qualitatif des systèmes dynamiques ayant des coefficients pseudo presque périodique. Notre objectif principal dans cette section consiste a étudier certaines propriétés basiques des fonctions pseudo presque périodiques.

Définition 1.33 ([19]) *Une fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{X}$ est dite pseudo presque périodique si f se decompose comme*

$$f = h + \phi,$$

avec $h \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et $\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ où l'espace $\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est défini par

$$\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X}) = \left\{ g \in BC(\mathbb{R},\mathbb{X}) : \lim_{r \longrightarrow \infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \|g(t)\| \, dt = 0 \right\}.$$

La fonction h (resp. ϕ) est dite la composante presque périodique (resp. la composante ergodique) de f.

L'ensemble des fonctions pseudo presque périodique est noté $PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Une propriété importante vérifiée par l'espace des fonctions ergodiques $\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est qu'il est invariant par translation[2].

Exemple 1.34 *Considérons la fonctionf définie par*

$$f(t) = \sin t + \sin \sqrt{2t} + (1 + t^2)^{-1} \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

2. Un sous ensemble S de $BC(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est dit invariant par translation, si pour tout $\phi \in S$, alors $\phi(t + s) \in S$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Alors f est pseudo presque périodique. En effet, la fonction $t \longmapsto \sin t + \sin\sqrt{2t}$ appartient à $AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et on a aussi $t \longmapsto (1+t^2)^{-1}$ est dans $\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, car elle est continue et bornée, de plus

$$\lim_{r\longrightarrow\infty} \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \frac{1}{1+t^2}dt = 0.$$

Proposition 1.35 *Soit $f \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Si $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f * g$, la convolution de f et g sur $\mathbb{R}$, appartient à $PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$.*

Preuve. Soit $f = h + \phi$ où $h \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et $\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Alors $f * g = h * g + \phi * g$. D'après la propriété 10, on obtient $h * g \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$.
Il reste donc à montrer que $\phi * g \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Remarquons d'abord que, si $\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et $g \in L^1$ alors $\phi * g \in BC(\mathbb{R},\mathbb{X})$. D'autre part, on a par hypothèse

$$\lim_{r\longrightarrow\infty} \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \|\phi(t)\|\, dt = 0.$$

Posons alors

$$\lim_{r\longrightarrow\infty} \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\int_{-\infty}^{\infty} \|\phi(t-s)\|\, |g(s)|\, dsdt,$$

il vient que,

$$\begin{aligned}
\lim_{r\longrightarrow\infty} \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \|(\phi * g)(t)\|\, dt &= \lim_{r\longrightarrow\infty} \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\int_{-\infty}^{\infty} \|\phi(t-s)g(s)\|\, dsdt \\
&\leq \lim_{r\longrightarrow\infty} \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\int_{-\infty}^{\infty} \|\phi(t-s)\|\, |g(s)|\, dsdt \\
&\leq \lim_{r\longrightarrow\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(s)|\, (\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \|\phi(t-s)\|\, dt)ds \\
&= \lim_{r\longrightarrow\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(s)|\, (\frac{1}{2r}\int_{-r-s}^{r-s} \|\phi(r)\|\, dr)ds \\
&= \lim_{r\longrightarrow\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(s)|\, \phi_r(s)ds
\end{aligned}$$

où $\phi_r(s) = \frac{1}{2r}\int_{-r-s}^{r-s} \|\phi(r)\|\, dr$. Évidement $\phi_r(s) \longrightarrow 0$ quand $r \longrightarrow \infty$. On utilise le fait que, ϕ_r est bornée, $g \in L^1$, et grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue (voir [6]), il découle que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} L(r) = 0$$

ce qui montre que

$$\phi * g \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X}).$$

■

Exemple 1.36 *Soit $f(t) = P_n(t) + t\,|\sin\pi t|^{t^{n+7}}$ pour $n \in \mathbb{R}$ et P_n est un polynôme trigonométrique. On a $f \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$, et ainsi pour toute $g \in L^1$, la fonction définie par*

$$\phi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{P_n(t-s) + (t-s)\,|\sin\pi(t-s)|^{(t-s)^{n+7}}\right\} g(s)ds$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, est une suite de fonctions pseudo presque périodique.

Proposition 1.37 *La décomposition $f = h + \phi$ de la définition 1.33 est unique, c'est-à-dire*

$$PAP(\mathbb{R},\mathbb{X}) = AP(\mathbb{R},\mathbb{X}) \oplus \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X}).$$

Preuve. Procédons par l'absurde. Soit $f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X}) \cap \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Dans un premier temps, on définit une fonction g définie par $g(t) = \|f(t)\| \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, appartient à $AP(\mathbb{R},\mathbb{X}) \cap \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Puisque $M\{g\} = 0$, il vient alors par (1.8) que $g(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui implique que $f = 0$.
Si $\widetilde{f} = h_0 + \phi_0$ et $\widetilde{f} = h_1 + \phi_1$ où $h_0,h_1 \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et $\phi_0,\phi_1 \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, alors $h_0 - h_1 = \phi_0 - \phi_1 = 0$, ce qui montre que $h_0 = h_1$ et $\phi_0 = \phi_1$. La preuve est ainsi achevée. ■
Dans la proposition suivante, on montre que l'espace de ces fonctions a une structure vectorielle.
Proposition 1.38 *Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ telle que $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$, alors $f \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$.*
Pour montrer la proposition 1.38, nous aurons également besoin du lemme suivant que nous énonçons sans démonstration.
Lemme 1.39 ([19], Lemma 1.3) *Si $f \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et si g une composante presque périodique alors on a*

$$h(\mathbb{R}) \subset \overline{f(\mathbb{R})},$$

donc

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| \leq \inf_{t\in\mathbb{R}} |h(t)| \leq \|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Preuve. (de la proposition 1.38) Soit $(f_n)n \in \mathbb{N} \subset PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ telle que $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$, lorsque $n \longrightarrow \infty$. Montrons que $f \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Pour ce faire, soit (h_n,ϕ_n) la decomposition de f_n, c'est-à-dire

$$f_n = h_n + \phi_n$$

avec $h_n \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et $\phi_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. En vertu de Lemme 1.39, nous avons $\|h_n\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty$, et par consequent

$$\|h_n - h_m\|_\infty \leq \|f_n - f_m\|_\infty, \forall n, m.$$

Comme $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow \infty$, il vient que la suite $(f_n)n \in \mathbb{N}$ est de Cauchy et donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi dans $AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Ce dernier, étant un espace de Banach, d'où l'existence de $h \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ tel que $\|h_n - h\|_\infty \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$. Montrons que $\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\phi(t)\|dt &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\phi(t) - \phi_n(t) + \phi_n(t)\|dt \\
&\leq \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\phi_n(t) - \phi(t)\|dt + \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\phi_n(t)\|dt \\
&\leq \|\phi_n(t) - \phi(t)\|_\infty + \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\phi_n(t)\|dt = 0.
\end{aligned}$$

quand $n \longrightarrow \infty$ (car $\phi_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et $\|\phi_n(t) - \phi(t)\|_\infty \longrightarrow 0$).
D'où le résultat. ■
Conséquence 2 *L'espace $(PAP(\mathbb{R},\mathbb{X}), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach, puisqu'on vient de voir qu'il est fermé dans l'ensemble des fonctions continues bornées.*

Envisageons maintenant le cas des fonctions paramétriques pseudo presque périodiques.

Définition 1.40 *Une fonction continue $F \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$ est dite pseudo presque périodique si, F s'exprime comme*

$$F = H + \Phi,$$

où $H \in AP(\mathbb{R}\times\mathbb{X}, \mathbb{X})$, $\Phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}\times\mathbb{X}, \mathbb{X})$ et $\mathcal{E}(\mathbb{R}\times\mathbb{X}, \mathbb{X})$ est l'ensemble des fonctions bornées continues $G : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ vérifiant

$$\lim_{r \longrightarrow \infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \|G(t,x)\| \, dt = 0$$

uniformément en $x \in B$, où $B \subset \mathbb{X}$ est un ensemble borné arbitraire.

L'ensemble de telles fonctions est noté par $PAP(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$.

Exemple 1.41 *Une fonction $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$h(t,x) = \cos x \left(\sin t + \sin \pi t + (1 + t^2)^{-1}\right)$$

est pseudo presque périodique en $t \in \mathbb{R}$ uniformément en $x \in B$, où $B \subset \mathbb{R}$ est un ensemble borné arbitraire.

Chapitre 2

Fonctions Stepanov presque périodiques et équations différentielles

Ce chapitre est dédié à la presque périodicité au sens de Stepanov. Nous y présentons les définitions et propriétés essentielles de cette notion. Nous établirons entre autre, le lien entre la presque périodicité au sens de Bohr et celle de Stepanov. Une attention particulière sera accordée au problème d'existence de solutions bornées Stepanov presque périodiques d'une classe d'équation d'évolution dans un espace de Banach à coefficients Stepanov presque périodiques. Ce résultat établit par H.S Ding, W.Long et Gaston, M.N Guérékata [11] repose sur un résultat de superposition (de composition) de fonctions Stepanov presque périodiques.

2.1 La presque périodicité au sens de Stepanov

Si $p \geq 1$, on désigne par $L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ l'espace des fonctions f telles que $f \in L^p(K,\mathbb{X})$, pour tout compact K de $\mathbb{R}$. On introduit les notions de norme et distance de Stepanov comme suit:
La norme de Stepanov d'une fonction $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est définie par

$$\|f\|_{S^p_L} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{L} \int_x^{x+L} \|f(t)\|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{2.1}$$

et la distance induite par la norme $\|f\|_{S^p_L}$ est

$$D_{S^p_L}(f,g) = \|f-g\|_{S^p_L} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{L} \int_x^{x+L} \mid f(t) - g(t) \mid^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Une propriété importante vérifiée par les normes de Stepanov $\|.\|_{S^p_L}$, $L > 0$ est qu'elles sont équivalentes. En effet, on a:

$$\alpha \|f\|_{S^p_{l_1}} \leq \|f\|_{S^p_{l_2}} \leq \beta \|f\|_{S^p_{l_1}}.$$

Pour le prouver, soient l_1, l_2 deux nombres positifs tels que $l_2 > l_1$. On a alors

$$\begin{aligned} \|f\|_{S^p_{l_1}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{l_1} \int_x^{x+l_1} \|f(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{l_1} \int_x^{x+l_2} \|f(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{l_2}{l_1 \times l_2} \int_x^{x+l_2} \|f(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\frac{1}{l_2} \int_x^{x+l_2} \|f(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{S^p_{l_2}},
\end{aligned}
$$

ce qui implique

$$\left(\frac{l_1}{l_2} \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{S^p_{l_1}} \le \|f\|_{S^p_{l_2}}.$$

Concernant la deuxième inégalité, soit $l_1 < l_2 < 2l_1$ nous avons les estimations suivantes

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{S^p_{l_2}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{l_2} \int_x^{x+l_2} \|f(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{l_2} \int_x^{x+l_1} \|f(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{l_2} \int_{x+l_1}^{x+l_2} \|f(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{l_1}{l_1 \times l_2} \int_x^{x+l_1} \|f(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{l_2} \int_{x+l_1}^{x+l_2} \|f(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \left(\frac{l_1}{l_2} \right) \left(\frac{1}{l_1} \int_x^{x+l_1} \|f(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{l_2} \int_{x+l_1}^{x+l_2} \|f(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\
&\le \left(\frac{l_1}{l_2} \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{S^p_{l_1}} + \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \left(\frac{1}{l_1} \int_{x+l_1}^{x+l_2} \|f(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\
&\le \left(\frac{l_1}{l_2} \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{S^p_{l_1}} + \|f\|_{S^p_{l_1}} \\
&= \left(\left(\frac{l_1}{l_2} \right)^{\frac{1}{p}} + 1 \right) \|f\|_{S^p_{l_1}}
\end{aligned}
$$

à partir duquelle, on déduit que

$$\|f\|_{S^p_{l_2}} \le \left(\left(\frac{l_1}{l_2} \right)^{\frac{1}{p}} + 1 \right) \|f\|_{S^p_{l_1}},$$

On conclut que toutes les normes de Stepanov sont équivalentes avec $\alpha = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}}$ et $\beta = \left(\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}} + 1 \right)$.

Remarque 2.2 *Dans tous ce qui suit, et en raison de l'équivalence des normes $\|.\|_{S^p_L}$, $L > 0$, on peut supposer que $L = 1$.*

Définition 2.3 *Une fonction $f \in L^p_{Loc}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est dite presque périodique au sens de Stepanov, et on écrit $f \in APS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $l(\epsilon) > 0$ tel que tout intervalle de longueur*

$l(\epsilon)$ contient au moins un nombre τ vérifiant

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left\{\int_x^{x+1} \mid f(t+\tau)-f(t)\mid^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Le nombre τ est dit ϵ-Stepanov presque périodique où ϵ-translation de Stepanov associé à f.

La presque périodicité au sens de Stepanov peut être vue comme la presque périodicité au sens de Bohr d'une certaine fonctions à valeurs dans un espace de Lebesgue, plus précisément

Définition 2.4 (Transformation de Bochner) *1. La transformation de Bochner $f^b(t,s)$, $t \in \mathbb{R}$, $s \in [0,1]$ d'une fonction f de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$, est défini par*

$$f^b(t,s) = f(t+s).$$

2. La transformation de Bochner $f^b(t,s,u)$, $t \in \mathbb{R}$, $s \in [0,1]$, $u \in \mathbb{X}$ pour la fonction $f(t,u)$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{X}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$, est définie par

$$f^b(t,s,u) = f(t+s,u),$$

pour tout $u \in \mathbb{X}$.

Définition 2.5 *Soit $p \in [1,+\infty[$, l'espace $BS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$ de toute les fonctions Stepanov bornées, d'ordre p, consiste toute les fonctions mesurables de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$ tel que*

$$f^b \in L^\infty(\mathbb{R},L^p((0,1),\mathbb{X})).$$

$$\|f\|_{S^p} = \|f^b\|_{L^\infty(\mathbb{R},L^p)} = \sup_{t\in\mathbb{R}}\left(\int_t^{t+1}\|f(\tau)\|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Théorème 3 (Théorème de Bochner) *$f \in APS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$ si et seulement si $f^b \in AP(\mathbb{R},L^p([0,1];\mathbb{X}))$, de plus*

$$\|f\|_{S^p} = \left\|f^b\right\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|f^b(t,.)\right\|_{L^p([0,1];\mathbb{X})}.$$

Grâce à la caractérisation de Bochner de la Stepanov presque périodicité, toutes les propriétés de la Bohr presque périodicité se transférent à la presque périodicité de Stepanov, en particulier, toute fonction $f \in APS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est

1. S^P-bornée.
2. S^p uniformément continue c'est à dire $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta = \delta(t)$ tel que si $\mid h \mid < \delta$ alors

$$D_{S^p}\left\{f(x+h),f(x)\right\} < \epsilon.$$

Nous disposons aussi d'un critère de normalité pour les fonctions $f \in APS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$:

Définition 2.6 ***(S^p-normalité)***
La fonction $f \in L^p_{Loc}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est dite S^p-normale si la famille de fonctions $\{f(x+h)\}$ (h est un nombre arbitraire) est S^p precompact c'est à dire si pour toute sous-suite $f(x+h_1)$, $f(x+h_2)$, ... on peut choisir une sous-suite S^p-convergente.

Encore une fois, grâce à la transformé de Bochner et le fait qu'une suite f_n converge vers f si et seulement si f_n^b converge vers f^b (voir par exemple [2, 14]), on obtient la deuxième caractérisation de la Stepanov périodicité:

Théorème 4 *Les definitions 2.3 et 2.6 sont équivalentes.*

Remarque 2.7 *Pour tous p, $q \geq 1$ avec $q < p$, les inclusions suivantes sont vérifiées*

$$AP(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset APS^p(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset APS^q(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset APS(\mathbb{R},\mathbb{X})$$

de plus,

$$\|\cdot\|_\infty \geq \|\cdot\|_{S^p} \geq \|\cdot\|_{S^q} \geq \|\cdot\|_{S^1}.$$

2.7.1 Le lien entre les fonctions Bohr presque périodiques et Stepanov presque périodiques

Nous avons vu que toute fonction Bohr presque périodique est Stepanov presque périodique. Le résultat suivant précise mieux le lien entre les deux concepts. Si $C_u(\mathbb{R},\mathbb{X})$ désigne l'ensemble des fonctions uniformément continues de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$ alors

Proposition 2.8 ([2, 14])

$$APS^p(\mathbb{R},\mathbb{X}) \cap C_u(\mathbb{R},\mathbb{X}) = AP(\mathbb{R},\mathbb{X}). \tag{2.2}$$

Pour montrer la proposition, on aura besoin du lemme suivant qui donne une propriété de la dérivé des fonctions presque périodique. Pour simplifier la présentation, on suppose ici que $\mathbb{X} = \mathbb{R}$.

Lemme 2.9 *Soit f une fonction presque périodique derivable à valeur dans un espace de Banach. Si f' existe et uniformément continue alors f' est presque périodique.*

Preuve. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}.$$

Posons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(x) = n\left\{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right\}.$$

La suite f_n est presque périodique comme somme de deux fonctions presque périodiques. Pour montrer que $f' \in AP(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que f_n converge uniformément vers f'. On a par définition $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
|f'(x) - f_n(x)| &= |f'(x) - n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f'(t)dt| \\
&= |n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f'(x)dt - n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f'(t)dt| \\
&= n|\int_x^{x+\frac{1}{n}} \left(f'(x) - f'(t)\right)dt| \\
&\leq n\int_x^{x+\frac{1}{n}} |f'(x) - f'(t)|dt \\
&\leq n\frac{1}{n} \sup_{t\in[x,x+\frac{1}{n}]} |f'(x) - f'(t)|.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$|f'(x) - f_n(x)| \leq \sup_{t\in[x,x+\frac{1}{n}]} |f'(x) - f'(t)| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On veut montrer que $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x) - f_n(x)| = 0$ c'est-à-dire: $\forall\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tels que $\forall n \geq n_0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $|f'(x) - f_n(x)| < \epsilon$. Comme f' est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta := \delta(\epsilon) > 0$ tel que si $|u - v| < \delta$, on a

$$|f'(u) - f'(v)| < \epsilon.$$

Finalement, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (provenant de l'inégalité $|x + \frac{1}{n} - x| = \frac{1}{n} < \delta$, avec $\delta > 0$ e est celui provenant de l'uniforme continuité de f'), tel que $\forall n \geq n_0$, on a

$$\sup_{t\in[x,x+\frac{1}{n}]} |f'(x) - f'(t)| < \epsilon.$$

Donc

$$|f'(x) - f_n(x)| \leq \sup_{t\in[x,x+\frac{1}{n}]} |f'(x) - f'(t)| < \epsilon,$$

ce qui implique que $f_n \longrightarrow f'$ uniformément, et comme f_n est presque périodique alors f' est aussi presque périodique. ■

Nous pouvons à présent commencer la démonstration de la dernière proposition.

Preuve. (de la proposition 2.8) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n(t) = n \int_0^{\frac{1}{n}} f(t + \eta)d\eta.$$

Comme f est uniformément continue, il vient par le lemme 2.9 que $f_n \longrightarrow f$, lorsque $n \longrightarrow \infty$, uniformément sur $\mathbb{R}$. Pour montrer le résultat désiré, il suffit alors de montrer que f_n est presque périodique pour chaque n. Pour ce faire, nous exploitons la Stepanov presque périodicité avec $L = \frac{1}{n}$.

Soit $\epsilon > 0$, on peut trouver un ensemble relativement dense de nombre τ vérifiant

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} n \int_0^{\frac{1}{n}} \|f(t + \tau + \eta) - f(t + \eta)\|^p d\eta \leq \epsilon^p.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, il vient que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\|f_n(t + \tau) - f_n(t)\| &= n \int_0^{\frac{1}{n}} \|f(t + \tau + \eta) - f(t + \eta)\|d\eta \\
&\leq n \left(\int_0^{\frac{1}{n}} 1^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\frac{1}{n}} \|f(t + \tau + \eta) - f(t + \eta)\|^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq n \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\frac{1}{n}} \|f(t + \tau + \eta) - f(t + \eta)\|^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq n n^{-\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\frac{1}{n}} \|f(t + \tau + \eta) - f(t + \eta)\|^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon
\end{aligned}$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ce qui achève la démonstration de la proposition. ■

2.9.1 Les fonctions paramétriques Stepanov presque périodiques

Dans tous ce qui suit, on considère $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{X},\mathbb{X})$.

1. On dit qu'une fonction paramétrique $f : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ est Stepanov presque périodique si, pour tout $x \in \mathbb{X}$, la fonction $f(.,x)$ est Stepanov presque périodique.
   L'ensemble de ces fonctions est noté par $APS^p(\mathbb{R} \times \mathbb{X},\mathbb{X})$.
2. On dit qu'une fonction paramétrique $f : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ est Stepanov presque périodique uniformément sur les partie compact $K \in \mathbb{X}$ si, la fonction $f(.,x)$ est Stepanov presque périodique pour tout $x \in K$.
   On note par $APS^p_K(\mathbb{R} \times \mathbb{X},\mathbb{X})$ l'ensemble des fonctions paramétriques presque périodiques sur les parties compacts.
3. On dit qu'une fonction paramétrique $f : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ est Stepanov presque périodique uniformément sur les parties bornées $B \in \mathbb{X}$ si, la fonction $f(.,x)$ est Stepanov presque périodique pour tout $x \in B$.
   L'ensemble de ces fonctions est noté par $APS^p_B(\mathbb{R} \times \mathbb{X},\mathbb{X})$.

2.10 Solutions mild Stepanov (Bohr) presque périodiques d'une classe d'équations différentielles

Dans cette section, on abordera le problème d'existence et d'unicité d'une solution mild presque périodique de l'équation

$$u'(t) = Au(t) + f(t,u(t)) \tag{2.3}$$

où f est une fonction Stepanov presque périodique uniformément sur les parties compactes de $\mathbb{X}$ et A est un opérateur linéaire (non borné) qui génére un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$. On suppose que f et $T(t)$ vérifient les hypothèses suivantes:

- **(H1)** Le C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est expenontiellement stable, i.e., il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\delta > 0$ telles que
$$\|T(t)\| \leq Me^{-\delta t}.$$
- **(H2)** La fonction $f \in APS^p(\mathbb{R} \times \mathbb{X},\mathbb{X})$ est L-lipschitzienne c'est-à-dire il existe une fonction positive $L(.) \in BS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $u,v \in \mathbb{X}$
$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq L(t)\|u - v\|.$$

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de ce chapitre, ce résultat d'existence repose sur un résultat de composition des fonctions Stepanov presque périodiques, que nous présentons ci-après.

Théorème 5 *On suppose que $p > 2$ et les conditions suivantes sont vérifiées.*

1. $f \in APS^p_K(\mathbb{R} \times \mathbb{X},\mathbb{X})$, *et il existe une fonction $L \in BS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$ telle que*
$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq L(t)\|u - v\| \tag{2.4}$$
   pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(u,v) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$.
2. $x \in APS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$, *et il existe un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ avec $mesE = 0$ tel que*
$$K = \overline{\left\{x(t), t \in \mathbb{R} \setminus E\right\}}$$
   est compact dans $\mathbb{X}$.

Alors $f(.,x(.)) \in APS^{\frac{p}{2}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Preuve.

– Premièrement on montre que $f(.,x(.)) \in BS^{\frac{p}{2}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. En effet, par (2.4) on a

$$\begin{aligned}
\Big(\int_t^{t+1} \|f(\tau,x(\tau))\|^{\frac{p}{2}} d\tau\Big)^{\frac{2}{p}} &\leq \Big(\int_t^{t+1} \|f(\tau,x(\tau)) - f(\tau,0) + f(\tau,0)\|^{\frac{p}{2}} d\tau\Big)^{\frac{2}{p}} \\
&\leq \Big(2^{\frac{p}{2}-1}\Big\{\int_t^{t+1} \|f(\tau,x(\tau)) - f(\tau,0)\|^{\frac{p}{2}} d\tau + \int_t^{t+1} \|f(\tau,0)\|^{\frac{p}{2}} d\tau\Big\}\Big)^{\frac{2}{p}} \\
&\leq \Big(2^{\frac{p}{2}-1}\Big)^{\frac{2}{p}}\Big(\Big\{\int_t^{t+1} \|f(\tau,x(\tau)) - f(\tau,0)\|^{\frac{p}{2}} d\tau + \int_t^{t+1} \|f(\tau,0)\|^{\frac{p}{2}} d\tau\Big\}\Big)^{\frac{2}{p}} \\
&\leq \Big(2^{\frac{p}{2}-1}\Big)^{\frac{2}{p}}\Big\{2^{\frac{p}{2}-1}\Big(\Big(\int_t^{t+1} \|f(\tau,x(\tau)) - f(\tau,0)\|^{\frac{p}{2}} d\tau\Big)^{\frac{2}{p}} + \Big(\int_t^{t+1} \|f(\tau,0)\|^{\frac{p}{2}} d\tau\Big)^{\frac{2}{p}}\Big)\Big\} \\
&\leq \Big(\int_t^{t+1} \|L(\tau)\|^{\frac{p}{2}} \|x(\tau)\|^{\frac{p}{2}} d\tau\Big)^{\frac{2}{p}} + \Big(\int_t^{t+1} \|f(\tau,0)\|^{\frac{p}{2}} d\tau\Big)^{\frac{2}{p}} \\
&\leq \Big(\Big(\int_t^{t+1} \|L(\tau)\|^{p} d\tau\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_t^{t+1} \|x(\tau)\|^{p} d\tau)^{\frac{1}{2}}\Big)^{\frac{2}{P}} + \Big(\int_t^{t+1} 1^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_t^{t+1} \|f(\tau,0)\|^{p} d\tau\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \Big(\int_t^{t+1} \|L(\tau)\|^{p} d\tau\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_t^{t+1} \|x(\tau)\|^{p} d\tau\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_t^{t+1} \|f(\tau,0)\|^{p} d\tau\Big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Et comme $f \in APS^p_K(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$, $L \in BS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$, $x \in APS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$, on a

$$\max_{t\in\mathbb{R}}\Big\{\Big(\int_t^{t+1} \|f(.,x)\|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \Big(\int_t^{t+1} \|L(t)\|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \Big(\int_t^{t+1} \|x(t)\|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\} < \infty,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
\Big(\int_t^{t+1} \|f(\tau,x(\tau))\|^{\frac{p}{2}} d\tau\Big)^{\frac{2}{p}} \quad &\leq \quad \Big(\int_t^{t+1} \|L(\tau)\|^{p} d\tau\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_t^{t+1} \|x(\tau)\|^{p} d\tau\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \quad \Big(\int_t^{t+1} \|f(\tau,0)\|^{p} d\tau\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty.
\end{aligned}$$

Donc $f(.,x(.)) \in BS^{\frac{p}{2}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

– Il reste à montrer le caractère Stepanov presque période de $f(.,x(.))$.
Comme $f \in APS^p_K(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$ et $x \in APS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$, on a pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble commun relativement dense $P(\epsilon) \subset \mathbb{R}$ tel que

$$\|f(t+\tau+.,u) - f(t+.,u)\|_{S^p} < \frac{\epsilon}{6k}, \tag{2.5}$$

et

$$\|x(t+\tau+.) - x(t+.)\|_{S^p} < \frac{\epsilon}{2\|L\|_{S^p}}, \tag{2.6}$$

pour tout $\tau \in P(\epsilon)$, $t \in \mathbb{R}$ et $u \in K$. Pour montrer que $f(.,x(.)) \in APS^{\frac{p}{2}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, il suffit de montrer que pour tout $\tau \in P(\epsilon)$, on a

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\Big(\int_t^{t+1} \|f(t+s+\tau,x(t+s+\tau)) - f(t+s,x(t+s))\|^{\frac{p}{2}} d\tau\Big)^{\frac{2}{p}} < \epsilon.$$

Comme K est compact, et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x_1,x_2,...,x_k \in K$ tel que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B\Big(x_i,\frac{\epsilon}{6\|L\|_{S^{\frac{p}{2}}}}\Big), \tag{2.7}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et grâce à l'inégalité (2.4), on obtient les estimations:

$$\begin{aligned}
&\|f(t+s+\tau,x(t+s+\tau)) - f(t+s,x(t+s))\|_{S^{\frac{p}{2}}} \\
&\quad = \|f(t+s+\tau,x(t+s+\tau)) - f(t+s+\tau,x(t+s)) \\
&\quad + f(t+s+\tau,x(t+s)) - f(t+s,x(t+s))\|_{S^{\frac{p}{2}}} \\
&\quad \leq \|f(t+s+\tau,x(t+s+\tau)) - f(t+s+\tau,x(t+s))\|_{S^{\frac{p}{2}}} \\
&\quad + \|f(t+s+\tau,x(t+s)) - f(t+s,x(t+s))\|_{S^{\frac{p}{2}}} \\
&\quad \leq \|L(t+s+\tau)\|_{S^{\frac{p}{2}}}\|x(t+s+\tau) - x(t+s)\|_{S^{\frac{p}{2}}} \\
&\quad + \|f(t+s+\tau,x(t+s)) - f(t+s,x(t+s))\|_{S^{\frac{p}{2}}} \\
&\quad = I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

- Nous commençons à estimer I_1. Par (2.6), on a

$$\begin{aligned}
I_1 &= \|L(t+s+\tau)\|_{S^{\frac{p}{2}}}\|x(t+s+\tau) - x(t+s)\|_{S^{\frac{p}{2}}} \\
&= \Big(\int_0^1 L^{\frac{p}{2}}(t+s+\tau)\|x(t+s+\tau) - x(t+s)\|^{\frac{p}{2}}\Big)^{\frac{2}{p}} \\
&\leq \|L\|_{S^p}\|x(t+s+\tau) - x(t+s)\|_{S^p} \\
&\leq \|L\|_{S^p}\frac{\epsilon}{2\|L\|_{S^p}} \\
&< \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

- Il reste à montrer que $I_2 < \frac{\epsilon}{2}$.
  En effet, on fixe un $t \in \mathbb{R}$. On définit $E_t = \{x \in [0,1]; t+s \notin E\}$. Il suit que $mes([0,1]/E_t) = 0$ et $x(t+s) \in K$ pour tout $s \in E_t$. Alors par (2.7), pour chaque $s \in E_t$, il existe $i(s) \in \{1,2,...,k\}$ tel que

$$\|x_{i(s)} - x(t+s)\| \leq \frac{\epsilon}{6\|L\|_{S^p}}. \tag{2.8}$$

  D'autre part par (2.5), on a

$$\|f(t+\tau+.,x_i) - f(t+.,x_i)\|_{S^p} \leq \frac{\epsilon}{6k} \tag{2.9}$$

  pour chaque $\tau \in P(\epsilon)$ et $i = 1,...,k$ et d'après (2.4), (2.8) et (2.9), et grâce à l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
I_2 &= \Big(\int_0^1 \|f(t+s+\tau,x(t+s)) - f(t+s,x(t+s))\|^{\frac{p}{2}}ds\Big)^{\frac{2}{p}} \\
&= \Big(\int_{E_t} \|f(t+s+\tau,x(t+s)) - f(t+s,x(t+s))\|^{\frac{p}{2}}ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
+ & \int_{E_t^c} \|f(t+s+\tau,x(t+s)) - f(t+s,x(t+s))\|^{\frac{p}{2}} ds\Big)^{\frac{2}{p}} \\
= & \Big(\int_{E_t} \|f(t+s+\tau,x(t+s)) - f(t+s,x(t+s))\|^{\frac{p}{2}} ds\Big)^{\frac{2}{p}} \\
= & \Big(\int_{E_t} \|f(t+s+\tau,x(t+s)) - f(t+s+\tau,x_i(s)) \\
+ & f(t+s+\tau,x_i(s)) - f(t+s,x_i(s)) \\
+ & f(t+s,x_i(s)) - f(t+s,x(t+s))\|^{\frac{p}{2}} ds\Big)^{\frac{2}{p}} \\
\leq & \Big(\int_{E_t} \|f(t+s+\tau,x(t+s)) - f(t+s+\tau,x_i(s))\|^{\frac{p}{2}} ds\Big)^{\frac{2}{p}} \\
+ & \Big(\int_{E_t} \|f(t+s+\tau,x_i(s)) - f(t+s,x_i(s))\|^{\frac{p}{2}} ds\Big)^{\frac{2}{p}} \\
+ & \Big(\int_{E_t} f(t+s,x_i(s)) - f(t+s,x(t+s))\|^{\frac{p}{2}} ds\Big)^{\frac{2}{p}} \\
\leq & \Big(\int_{E_t} L^{\frac{p}{2}}(t+s+\tau)\|x(t+s) - x_i(s)\|^{\frac{p}{2}} ds\Big)^{\frac{2}{p}} \\
+ & \Big(\int_{E_t} \|f(t+s+\tau,x_i(s)) - f(t+s,x_i(s))\|^{\frac{p}{2}} ds\Big)^{\frac{2}{p}} \\
+ & \Big(\int_{E_t} L^{\frac{p}{2}}(t+s)\|x(t+s) - x_i(s)\|^{\frac{p}{2}} ds\Big)^{\frac{2}{p}} \\
\leq & \|L\|_{S^p}\frac{\epsilon}{6\|L\|_{S^p}} + \|L\|_{S^p}\frac{\epsilon}{6\|L\|_{S^p}} \\
+ & \sum_{i=1}^{k}\Big(\int_{E_t} \|f(t+s+\tau,x_i(s)) - f(t+s,x_i(s))\|^{\frac{p}{2}} ds\Big)^{\frac{2}{p}} \\
\leq & \frac{\epsilon}{6} + k\frac{\epsilon}{6k} + \frac{\epsilon}{6} \\
= & \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Il vient alors que $I_1 + I_2 < \epsilon$. Ce qui montre que

$$\|f(t+s+\tau,x(t+s+\tau)) - f(t+s,x(t+s))\|_{S^{\frac{p}{2}}} < \epsilon.$$

Ce qui achève la démonstration.

■

Nous pouvons à présent aborder le problème d'existence et d'unicité de la solution mild presque périodique de l'équation d'évolution

$$u'(t) = Au(t) + f(t). \tag{2.10}$$

Théorème 6 *On suppose que* $f \in APS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *avec* $p > 1$ *et **(H1)** est vérifiée. Alors l'équation* (2.10) *admet une unique solution mild bornée presque périodique donnée par*

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)f(s)ds.$$

Preuve.

- On montre dans un premier temps que $u(t)$ est une solution mild de (2.10). On suppose que

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)f(s)ds.$$

Alors

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{-\infty}^{t} T(t-s)f(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{a} T(t-s)f(s)ds + \int_{a}^{t} T(t-s)f(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{a} T(t-a+a-s)f(s)ds + \int_{a}^{t} T(t-s)f(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{a} T(t-a)T(a-s)f(s)ds + \int_{a}^{t} T(t-s)f(s)ds \\ &= T(t-a)\int_{-\infty}^{a} T(a-s)f(s)ds + \int_{a}^{t} T(t-s)f(s)ds \quad \forall a < t. \end{aligned}$$

Donc

$$u(t) = T(t-a)u(a) + \int_{a}^{t} T(t-s)f(s)ds.$$

- Montrons que $u(t)$ est l'unique solution mild de (2.10). On suppose que $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{X}$ est bornée et satisfaite l'équation homogène

$$u'(t) = A(t)u(t),\ t \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Alors $u(t) = T(t-s)u(s)$, pour tout $t \geq s$. Donc

$$\|u(t)\| \leq KMe^{-\delta(t-s)},$$

où $\|u(t)\| \leq K$. On prend une suite de nombres réelles (S_n) telle que $S_n \longrightarrow \infty$ quand $n \longrightarrow \infty$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, on peut extraire une sous-suite $(S_{n_k}) \subset (S_n)$ telle que $S_{n_k} < t$ pour tout $k = 1,2,...$, quand $k \longrightarrow \infty$, on obtient $u(t) = 0$.
Si u_1, u_2 deux solutions bornées de l'équation (2.10) alors $v = u_1 - u_2$ est une solution bornée de l'équation (2.11), ce qui implique que $v = 0$, c'est-à-dire $u_1 = u_2$.

- Nous aurons également besoin de montrer que $u(t)$ est une solution mild bornée.
Comme $f \in APS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$, alors il existe un ensemble relativement dense $P(\epsilon) \subset \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} \int_0^1 \|f(s+\tau) - f(s)\|ds < \frac{\epsilon}{cM} \quad \forall \tau \in P(\epsilon), \tag{2.12}$$

avec

$$c = \frac{1}{\sqrt[q]{q\delta}}\left(e^{q\delta} - 1\right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{1 - e^{-\delta}}.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), on obtient

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\| &= \|\int_{-\infty}^{t} T(t-s)f(s)ds\| \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} \|T(t-s)\|\|f(s)\|ds \\
&\leq M\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}\|f(s)\|ds \\
&\leq M\sum_{n=0}^{\infty}\int_{t-n-1}^{t-n} e^{-\delta(t-s)}\|f(s)\|ds \\
&\leq M\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\int_{t-n-1}^{t-n} e^{-q\delta(t-s)}ds\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_{t-n-1}^{t-n} \|f(s)\|^{p}ds\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq M\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{q\delta}\Big\{e^{-q\delta(t-s)}-e^{-q\delta n}\Big\}\Big)^{\frac{1}{q}}\|f(s)\|_{S^p} \\
&\leq \frac{M}{\sqrt[q]{q\delta}}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(e^{-q\delta n}\Big(e^{q\delta}-1\Big)\Big)^{\frac{1}{q}}\|f(s)\|_{S^p} \\
&\leq \frac{M}{\sqrt[q]{q\delta}}\Big(e^{q\delta}-1\Big)^{\frac{1}{q}}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\delta n}\|f(s)\|_{S^p}.
\end{aligned}
$$

Sachant que

$$
\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\delta n}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1-e^{-\delta(n+1)}}{1-e^{-\delta}}=\frac{1}{1-e^{-\delta}},
$$

alors

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\| &\leq \frac{M}{\sqrt[q]{q\delta}}\Big(e^{q\delta}-1\Big)^{\frac{1}{q}}\frac{1}{1-e^{-\delta}}\|f(s)\|_{S^p} \\
&< cM\frac{\epsilon}{cM}<\epsilon.
\end{aligned}
$$

Donc u est borné.

- Il reste donc à montrer la presque périodicité de la solution mild. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $\tau \in P(\epsilon)$ (donné dans (2.12)), on a

$$
\|u(t+\tau)-u(t)\| \leq \epsilon.
$$

En faisant le changement de variable $s-\tau=r$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\|u(t+\tau)-u(t)\| &= \|\int_{-\infty}^{t+\tau} T(t+\tau-s)f(s)ds-\int_{-\infty}^{t} T(t-s)f(s)ds\| \\
&= \|\int_{-\infty}^{t} T(t-s)f(s+\tau)ds-\int_{-\infty}^{t} T(t-s)f(s)ds\| \\
&= \|\int_{-\infty}^{t} T(t-s)\{f(s+\tau)-f(s)\}ds\|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \int_{-\infty}^{t} \|T(t-s)\| \|f(s+\tau)-f(s)\| ds \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t-n-1}^{t-n} \|T(t-s)\| \|f(s+\tau)-f(s)\| ds \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t-n-1}^{t-n} M e^{-\delta(t-s)} \|f(s+\tau)-f(s)\| ds
\end{aligned}
$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$
\begin{aligned}
\|u(t+\tau)-u(t)\| &\le M \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\int_{t-n-1}^{t-n} e^{-q\delta(t-s)} ds \Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\int_{t-n-1}^{t-n} \|f(s+\tau)-f(s)\|^p ds \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\le Mc \frac{\epsilon}{cM} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}
$$

Ce qui implique que u est presque périodique. Ce qui achève la démonstration.

■

Revenons au cas de l'équation (2.3), où l'on montre grâce au théorème du point fixe de Banach l'existence et l'unicité d'une solution mild Bohr presque périodique de l'équation (2.3) (sous certaines conditions) lorsque f est une fonction paramétrique Stepanov presque périodique.

Théorème 7 *On suppose que $f \in APS^p(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$ avec $p > 2$ et **(H1)** et **(H2)** sont vérifiées. Alors l'équation (2.3) admet une unique solution mild presque périodique à condition que*

$$
\|L\|_{S^p} < \frac{1-e^{-\delta}}{M} \Big(\frac{\delta q}{1-e^{-\delta q}} \Big)^{\frac{1}{q}},
$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Preuve. On construit un opérateur point fixe de $AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ dans $AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Soit $u \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ ce qui implique que $u \in APS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et on a $K = \{\overline{u(t), t \in \mathbb{R}}\}$ est un compact. Soit pour $t \in \mathbb{R}$

$$
F(u)(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s) f(s,u(s)) ds.
$$

D'après les deux théorèmes 5 et 6 on a $F(u) \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$.
Soit $u,v \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$, et en utilisant l'inégalité de Hölder on a

$$
\begin{aligned}
\|F(u)(t)-F(v)(t)\| &= \Big\| \int_{-\infty}^{t} T(t-s) \{f(s,u(s))-f(s,v(s))\} ds \Big\| \\
&\le \int_{-\infty}^{t} \|T(t-s)\| \, \|\{f(s,u(s))-f(s,v(s))\} ds\| \\
&\le \int_{-\infty}^{t} \|T(t-s)\| \, L(s) \, \|u(s)-v(s)\| \, ds \\
&\le \|u-v\| \int_{-\infty}^{t} \|T(t-s)\| \, L(s) ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|u-v\| \int_{-\infty}^{t} Me^{-\delta(t-s)} L(s) ds \\
&\leq \|u-v\| \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t-n-1}^{t-n} Me^{-\delta(t-s)} L(s) \right\} ds \\
&= \|u-v\| M \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{t-n-1}^{t-n} Me^{-\delta q(t-s)} ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{t-n-1}^{t-n} L^p(s) ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u-v\| M \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\delta q} \left\{ e^{-\delta q n} - e^{-\delta q(n+1)} \right\} \right)^{\frac{1}{q}} \|L\|_{S^p} \\
&= \|u-v\| M \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\delta n} \left(\frac{1-e^{-\delta q}}{\delta q} \right)^{\frac{1}{q}} \|L\|_{S^p} \\
&= \|u-v\| \frac{M}{1-e^{-\delta}} \left(\frac{1-e^{-\delta q}}{\delta q} \right)^{\frac{1}{q}} \|L\|_{S^p} ,
\end{aligned}
$$

comme

$$\|L\|_{S^p} < \frac{1-e^{-\delta}}{M} \left(\frac{\delta q}{1-e^{-\delta q}} \right)^{\frac{1}{q}} ,$$

nous utilisons le théorème du point fixe, on aura F admet un unique point fixe $u \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ satisfait pour $t \in \mathbb{R}$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s) f(s,u(s)) ds.$$

Similaire à la preuve du théorème précédent, on peut montrer que $u(t)$ est l'unique solution mild presque périodique. ■

Chapitre 3

Fonctions Stepanov-pseudo presque périodique et application

Dans ce chapitre, nous examinons un autre concept de presque périodicité, dit pseudo presque périodicité au sens de Stepanov, introduit par Diagana [7] comme généralisation naturelle de la pseudo presque périodicité. Certains résultats concernant ce concept seront présentés et développés. Ce chapitre sera achevé par une application: étude d'une classe d'équation différentielle à coefficient Stepanov pseudo presque périodique. Les résultats de ce chapitre sont essentiellement issus des références [5, 7].

3.1 Définitions et propriétés fondamentales

Commençons par introduire les fonctions pseudo presque périodiques au sens de Stepanov.

Définition 3.2 *Une fonction $f \in BS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est dite Stepanov (ou S^p) pseudo presque périodique, si f s'exprime comme*

$$f = h + \phi$$

avec $h^b \in AP(\mathbb{R},L^p((0,1);\mathbb{X}))$ et $\phi^b \in \mathcal{E}(\mathbb{R},L^p((0,1);\mathbb{X}))$.

On note par $PAPS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$ l'ensemble des fonctions pseudo presque périodiques au sens de Stepanov.

En d'autres termes, une fonction $f \in BS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et dite S^p-pseudo presque périodique si sa transformation de Bochner

$$f^b : \mathbb{R} \longrightarrow L^p((0,1),\mathbb{X})$$

est pseudo presque périodique dans le sens d'existence de deux fonctions $h,\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{X}$ telles que $f = h + \phi$ avec $h \in APS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et

$$\lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_t^{t+1}\|\phi(\sigma)\|^p\,d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} dt = 0.$$

Remarque 3.3 – *Si $1 \leq p < q < \infty$ et $f \in L^q(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est S^q-pseudo presque périodique alors f est S^p-pseudo presque périodique, i.e.*

$$PAPS^q(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset PAPS^p(\mathbb{R},\mathbb{X}).$$

Le lien entre les fonctions $PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et les fonctions dans $PAPS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est donné dans la proposition suivante:

Proposition 3.4 *Si $f \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$, alors f est $PAPS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$ pour tout $1 \leq p < \infty$.*

Preuve. Soit $f = h + \phi$ où $h \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et $\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. On note que $f \in BS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Il suffit alors de montrer que $\phi^b \in \mathcal{E}(\mathbb{R},L^p((0,1);\mathbb{X}))$. Alors pour tout $T > 0$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T}\Big(\int_0^1 \|\phi(t+s)\|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}} dt &\leq \Big(\int_{-T}^{T} dt\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_{-T}^{T}\Big(\int_0^1 \|\phi(t+s)\|^p ds\Big)dt\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq (2T)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_{-T}^{T}\Big(\int_0^1 \|\phi(t+s)\|^p ds\Big)dt\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq (2T)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_{-T}^{T}\Big(\int_0^1 \|\phi(t+s)\|\|\phi(t+s)\|^{p-1} ds\Big)dt\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq (2T)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_{-T}^{T}\Big(\int_0^1 \|\phi(t+s)\|\|\phi\|_\infty^{p-1} ds\Big)dt\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq (2T)^{\frac{1}{q}}\|\phi\|_\infty^{\frac{p-1}{p}}\Big(\int_{-T}^{T}\Big(\int_0^1 \|\phi(t+s)\| ds\Big)dt\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq (2T)^{1-\frac{1}{p}}\|\phi\|_\infty^{\frac{p-1}{p}}\Big(\int_{-T}^{T}\Big(\int_0^1 \|\phi(t+s)\| ds\Big)dt\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq 2T\|\phi\|_\infty^{\frac{p-1}{p}}\Big(\int_0^1 \frac{1}{2T}\Big(\int_{-T}^{T} \|\phi(t+s)\| dt\Big)ds\Big)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Big(\int_0^1 \|\phi(t+s)\|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}} dt \leq \|\phi\|_\infty^{\frac{p-1}{p}}\Big(\int_0^1 \frac{1}{2T}\Big(\int_{-T}^{T} \|\phi(t+s)\| dt\Big)ds\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Comme $\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est invariant par translation alors En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\Big(\int_0^1 \frac{1}{2T}\Big(\int_{-T}^{T} \|\phi(t+s)\| dt\Big)ds\Big)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0 \text{ quand } T \longrightarrow \infty.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Nous introduisons la notion de S^p-pseudo presque périodique pour les fonctions paramétriques.

Définition 3.5 *Une fonction*

$$\begin{aligned}
F : \mathbb{R}\times\mathbb{X} &\longrightarrow \mathbb{X}\\
(t,u) &\longmapsto f(t,u)
\end{aligned}$$

avec $F(.,u) \in L^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$, pour tout $u \in \mathbb{X}$ est dite S^p-pseudo presque périodique en $t \in \mathbb{R}$ uniformément en $u \in \mathbb{X}$ si $t \longmapsto f(t,u)$ est S^p-pseudo presque périodique pour tout $u \in \mathbb{X}$.

Autrement; il existe deux fonctions $H,\Phi : \mathbb{R}\times\mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ telles que F s'écrit comme

$$F = H + \Phi$$

où $H^b \in AP(\mathbb{R} \times L^p((0,1);\mathbb{X}))$ et $\Phi^b \in \mathcal{E}(\mathbb{R} \times L^p((0,1);\mathbb{X}))$ avec

$$\lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\int_{t}^{t+1} \|\Phi(\sigma,u)\|^P \, d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} dt = 0$$

uniformément en $u \in \mathbb{X}$.

L'espace de fonctions $F : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ S^p-pseudo presque périodique est notée PAP$S^p(\mathbb{R} \times \mathbb{X},\mathbb{X})$

Nous avons le théorème de composition des fonctions S^p-pseudo presque périodiques.

Théorème 8 *Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ une fonction Stepanov pseudo presque périodique. On suppose que $F(t,u)$ est Lipschitzienne en $u \in \mathbb{X}$ et uniformément en $t \in \mathbb{R}$:*

(H2)' *Il existe $L > 0$ tel que*

$$\| F(t,u) - F(t,v) \| \leq L \| u - v \|$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(u,v) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$.

Si $\phi \in PAPS^P(\mathbb{R},\mathbb{X})$ alors $\Lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{X}$ définie par $\Lambda(.) = F(.,\phi(.))$ appartient à $PAPS^P(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Pour montrer le théorème, on aura besoin du résultat suivant établi par [12]:

Lemme 3.6 *Si $\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R} \times \mathbb{X},\mathbb{X})$ et $h \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$, alors*

$$\phi(.,h(.)) \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X}).$$

Preuve. (de théorème 8) On écrit

$$F^b = H^b + \Phi^b$$

où $H^b \in AP(\mathbb{R} \times L^P((0,1),\mathbb{X}))$ et $\Phi^b \in \mathcal{E}(\mathbb{R} \times L^P((0,1),\mathbb{X}))$. On écrit

$$\phi^b = \phi_1^b + \phi_2^b$$

où $\phi_1^b \in AP(L^P((0,1),\mathbb{X}))$ et $\phi_2^b \in \mathcal{E}(L^P((0,1),\mathbb{X}))$, c'est-à-dire

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\int_{t}^{t+1} \left\|\phi_2^b(\sigma)\right\|^P d\sigma \right)^{\frac{1}{P}} dt = 0. \tag{3.1}$$

Comme $F^b(.,\phi(.)) : \mathbb{R} \longrightarrow L^P((0,1),\mathbb{X})$. Maintenant, on decompose F^b comme suit

$$\begin{aligned} F^b(.,\phi^b(.)) &= H^b(.,\phi_1^b(.)) + F^b(.,\phi^b(.)) - H^b(.,\phi_1^b(.)) \\ &= H^b(.,\phi_1^b(.)) + F^b(.,\phi^b(.)) - F^b(.,\phi_1^b(.)) + \Phi^b(.,\phi_1^b(.)). \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de composition des fonction presque périodique, on obtient $H^b(.,\phi_1^b(.)) \in AP(\mathbb{R},L^P((0,1);\mathbb{X}))$. Soit alors

$$G^b(.) = F^b(.,\phi^b(.)) - F^b(.,\phi_1^b(.)).$$

On a $G^b(.) \in \mathcal{E}(\mathbb{R},L^p(0,1);\mathbb{X}))$. En effet, pour $T > 0$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\int_{t}^{t+1} \left\|G^b(\sigma)\right\|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} dt \\ = \;& \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\int_{t}^{t+1} \left\|F^b(\sigma,\phi^b(\sigma)) - F^b(\sigma,\phi_1^b(\sigma))\right\|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} dt \end{aligned}$$

$$\leq \frac{L}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{t}^{t+1}\left\|\phi^b(\sigma)-\phi_1^b(\sigma)\right\|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} dt$$

$$\leq \frac{L}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{t}^{t+1}\left\|\phi_2^b(\sigma)\right\|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} dt,$$

en utilisant (3.1), on obtient

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{t}^{t+1}\left\|G^b(\sigma)\right\|^P d\sigma\right)^{\frac{1}{P}} dt = 0.$$

Et grâce au lemme 3.6, on a $\mathcal{E}(L^p(0,1),\mathbb{X}))$ (Voir [12]) on obtient,

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{t}^{t+1}\left\|\Phi^b(\sigma,\phi_1^b(\sigma))\right\|^P d\sigma\right)^{\frac{1}{P}} dt = 0.$$

Ce qui achève la démonstration. ∎

Remarque 3.7 *L'hypothèse (H2)' imposée par Diagana [7] dans le Théorème 8 est plus restrictive que (H2) imposée par Ding et al. [11] dans le Théorème 5.*

3.8 Application aux équations différentielles

Nous pouvons à présent introduire le problème d'existence et d'unicité d'une solution mild pseudo presque périodique des fonctions S^p-pseudo presque périodiques de l'équation différentielle

$$u'(t) = Au(t) + f(t). \tag{3.2}$$

Théorème 9 *Si A (non borné) vérifie la condition (**H1**). Alors l'équation* (3.2) *admet une unique solution mild $u \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$. donnée par*

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)f(s)ds \tag{3.3}$$

Preuve. Par hypothèse, nous avons l'existence d'un $M > 0$ et $\delta > 0$ tel que

$$\|T(t)\|_{t\geq 0} \leq Me^{-\delta t}.$$

- L'existence et l'unicité de la solution mild bornée a été démontrée (voir la preuve du théorème 6).
- Il reste donc à montrer que u donnée par (3.3) est pseudo presque périodique. Pour ce faire, soit $f = h + \phi$ avec $h^b \in AP(\mathbb{R},L^p((0,1);\mathbb{X}))$ et $h^b \in AP(\mathbb{R},L^p((0,1);\mathbb{X}))$.
  On a alors
  $$u(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)h(s)ds + \int_{-\infty}^{t} T(t-s)\phi(s)ds,$$
  on a vu au théorème 6 que
  $$t \longmapsto \int_{-\infty}^{t} T(t-s)h(s)ds \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X}),$$

pour ce faire, on pose

$$X_n(t) = \int_{n-1}^{n} T(\xi)\phi(t-\xi)d\xi.$$

Montrons d'abord que $t \longmapsto X_n(t)$ est continue. La continuité de X_n, pour chaque n, provient du fait que ϕ est $L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, voir Amerio et Prouse [2].
Montrons à présent la bornitude de X_n. En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \|X_n(t)\| &\leq M\left(\int_{t-n}^{t-n+1} e^{-\delta q(t-s)}ds\right)^{\frac{1}{q}} (\int_{t-n}^{t-n+1} \|\phi(s)\|^p\, ds)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq Me^{-\delta n}\left(\frac{e^{q\delta}-1}{q\delta}\right)^{\frac{1}{q}} \|\phi\|_{S^p}. \end{aligned}$$

Comme la série $M\left(\frac{e^{q\delta}-1}{q\delta}\right)^{\frac{1}{q}}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta n}$ est convergente, il vient par le test de Weierstrass que la suite de fonctions $\sum_{n=1}^{N} X_n(t)$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. Posons alors

$$N(t) := \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t),\, t \in \mathbb{R}.$$

Remarquons que

$$N(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-r)\phi(r)dr,\, t \in \mathbb{R},$$

N est clairement continue comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Cependant, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\|N(t)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|X_n(t)\| \leq C_q(M,\delta)\, \|\phi\|_{S^p}$$

où $C_q(M,\delta)$ est une constante ne dépendant que de q, M et δ.
Montrons alors que chaque $X_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

$$\begin{aligned} \|X_n(t)\| &\leq M\left(\int_{t-n}^{t-n+1} e^{-\delta q(t-s)}ds\right)^{\frac{1}{q}} (\int_{t-n}^{t-n+1} \|\phi(s)\|^p\, ds)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq Me^{-\delta n}\left(\frac{e^{q\delta}-1}{q\delta}\right)^{\frac{1}{q}} \|\phi\|_{S^p}. \\ &= C_q(M,\delta)\, \|\phi\|_{S^p}. \end{aligned}$$

Donc $X_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, quand $\phi^b(\mathbb{R},L^p((0,1);\mathbb{X})$. Passant à la limite uniforme on a $u \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$, par la proposition 1.38.

■

Nous pouvons à présent introduire le problème d'existence et d'unicité d'une solution mild pseudo presque périodique de l'équation différentielle

$$u'(t) = Au(t) + f(t,u(t)). \tag{3.4}$$

Théorème 10 *Supposons que les conditions (**H1**) et (**H2**)' sont vérifiées et que le terme source f est une fonction appartient à $PAPS^p(\mathbb{R} \times \mathbb{X},\mathbb{X})$. Alors si $\frac{LM}{\delta} < 1$, l'équation* (3.4) *admet une unique solution mild $\widetilde{u} \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ donnée par:*

$$\widetilde{u}(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)f(s,\widetilde{u}(s))ds.$$

Preuve. On construit un opérateur point fixe P de $PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ dans $PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ définit par

$$(Pu)(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)f(s,u(s))ds$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Comme $u \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset PAPS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$, et grâce aux théorèmes 8 et 9, on a $Pu \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Et pour completer la preuve, il suffit de montrer que Pu admet un unique point fixe. Alors

$$\begin{aligned}
\| Pu - Pv \| &= \| \int_{-\infty}^{t} T(t-s)\{F(s,u(s)) - F(s,v(s)))\}ds \| \\
&\leq L \| u - v \| \int_{-\infty}^{t} \| T(t-s) \| ds \\
&\leq L \| u - v \| \int_{-\infty}^{t} Me^{-\delta(t-s)}ds \\
&\leq LM \| u - v \| \frac{1}{\delta}\Big[e^{-\delta(t-s)}\Big]_{-\infty}^{t} \\
&\leq \frac{LM}{\delta} \| u - v \| .
\end{aligned}$$

Ce qui implique que P admet un unique point fixe $\widetilde{u} \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ si $\frac{LM}{\delta} < 1$. Ce qui achève la démonstration. ■

Bibliographie

[1] M.Larbi Ahmed. Contribution a l etude de modeles autoregressifs ar(1) a coefficients periodiques et presque periodiques. memoire de magister, universite de mouloude mammeri de tizi ouzou, 2012.

[2] L. Amerio and G. Prouse. *Almost-periodic functions and functional equations. (The University Series in Higher Mathematics.).* 1971. Published: New York etc.: Van Nostrand Reinhold Company VIII, 184 p. (1971).

[3] A.M.Fink. Almost periodic functions invented for specific purposes. *Siam Review*, 14(4), 1972.

[4] A.S.Besicovitch. *Almost Periodic Functions.* Through Epecisl Permission Of Cambridge University Press, 1954.

[5] Toka Diagana (auth.). *Almost Automorphic Type and Almost Periodic Type Functions in Abstract Spaces.* Springer International Publishing, 1 edition, 2013.

[6] Haim Brezis. *Analyse Fonctionnelle Theorie et Appliaction.* Masson Paris, University Pierre and Marie Curie, 1987.

[7] Toka Diagana. Stepanov-like pseudo almost periodic functions and their applications to differential equations. *Communication in Mathematical Analysis*, 3(1):9–18, 2007.

[8] Toka Diagana. Weighted pseudo-almost periodic solutions to some differential equations. *Nonlinear Anal.*, 68(8):2250–2260, 2008.

[9] Toka Diagana. Weighted pseudo-almost periodic solutions to a neutral delay integral equation of advanced type. *Nonlinear Anal*, 70:298–304, 2009.

[10] Davide Giraudo. Fonctions presque périodiques. Memoire de master, Universite de Rouen, mai 2011.

[11] Gaston M.N Guérékata H.S Ding, W.Long. Almost periodic solutions to abstract semilinear evolution equations with stepanov almost periodic coefficients. *Journal Of Computational Analysis And Applications*, 13(2):231–242, 2011.

[12] F.L.Huang H.X.Li and J-Y.Li. Composition of pseudo almost-periodic functions and semilinear differential equations. *J. Math. Anal*, 255(2):436–446, 2001.

[13] K.J.Angel and R.Nagel. one-parameter semigroups for linear evolution equations. *Springer-Verlag*, 2000.

[14] B. M. Levitan and V. V. Zhikov. *Almost periodic functions and differential equations.* Press Syndicate of the University of Cambridge, 1982.

[15] A Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Applied mathematical sciences (Springer-Verlag New York Inc.) 44. Springer-Verlag, 1992.

[16] Jean-Pierre Raymond. Equations d'évolution. Master's thesis, Université Paul Sabatier.

[17] J.Andres A.M.Bersani R.F.Grande. Hierarchy of almost-periodic function spaces. *Rendiconti di Mathematica*, 26:121–188, 2006.

[18] H.S.Ding J.Liang T.J.Xiao. Some properties of stepanov-like almost automorphic functions and applications to abstract evolution equations. *Amer.Math.Soc*, 1999.

[19] Chuanyi Zhang. Pseudo almost periodic solutions of some differential equations. *journal of mathematical analysis and applications*, 181:62–76, 1994.