

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université MOULOUD MAMMARI, Tizi-Ouzou  
Faculté de Génie Électrique et d'Informatique, Département Automatique



# THÈSE

pour l'obtention du titre de

## Docteur es sciences

en Automatique de l'université Mouloud Mammeri

Présentée et soutenue par

### M. Boualem SALHI

Ingénieur UMMTO (1999) et Magister UMMTO (2006)

le 28 Janvier 2024

# *Approche Commande à Gain Récuratif* pour la commande des systèmes non linéaires *Strict Feedback Systems* : Application à la machine *SPMSM*

Thèse dirigée par M. Arezki BENFDILA

Devant le Jury :

Président	: M. Ahmed MAIDI	<i>Professeur, UMM Tizi-Ouzou</i>
Rapporteur	: M. Arezki BENFDILA	<i>Professeur, UMM Tizi-Ouzou</i>
Examineurs	: M. Yassine YAKHELEF	<i>MCA, UMB Boumerdes</i>
	: M. Fares NAFA	<i>MCA, UMSB Jijel</i>
Invité	: M. Said DJENNOUNE	<i>Professeur, UMM Tizi-Ouzou</i>

Cette page est intentionnellement laissée blanche

## REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à exprimer mes vifs remerciements à M. Arezki BENFDILA, Professeur à l'université Mouloud Mammeri, pour avoir dirigé cette thèse. J'exprime ma profonde gratitude à M. Ahmed MAIDI, Professeur à l'université Mouloud Mammeri, pour avoir accepté la présidence du jury. Je tiens à remercier aussi les membres du jury M. Yassine YAKHELEF, M. Fares NAFA et M. Saïd DJENNOUNE qui ont accepté d'examiner mon travail et d'assumer le lourd et minutieux travail dévolu aux examinateurs. Pour finir, mes remerciements les plus profonds et ma reconnaissance vont à toute ma famille.

M. SALHI Boualem

2023

Cette page est intentionnellement laissée blanche

## DÉDICACES

Mon père disait toujours, *étudie et dit allah yarham baba*. Je dédie ce modeste travail avant tout à mon père M. *SALHI Amar, Allah Yarahmou*, à ma très chère maman, à ma chère épouse, à mes trois magnifiques enfants *Yahia Zakaria, Adam Ayoub* et *Abdrahim* ainsi que toute ma famille.

M. SALHI Boualem

2023

Cette page est intentionnellement laissée blanche

L'approche *Backstepping* est l'une des approches les plus importantes pour la commande des systèmes non linéaires. Cette approche n'est applicable qu'à une classe particulière de systèmes. Plus précisément, l'approche *Backstepping* est applicable aux systèmes non linéaires dont la représentation d'état est sous la forme *Strict Feedback Form*. Lesquels systèmes sont désignés par le nom *Strict Feedback Systems*.

Juste après l'apparition de l'approche *Backstepping*, beaucoup de chercheurs ont relevé les limites et inconvénients de cette approche. En effet, l'approche *Backstepping* n'est pas applicable à tous les systèmes appartenant à la classe *Strict Feedback Systems* ; mais seulement à ceux dont les non linéarités sont suffisamment lisses. Autrement dit, les systèmes dont les non linéarités appartiennent à la classe  $C^n$  des fonctions, i.e.  $n$  fois dérivables et dont les dérivées jusqu'à l'ordre  $n$  sont continues. Cette dernière condition constitue une hypothèse de travail très contraignante qui limite l'applicabilité de l'approche *Backstepping*. La même condition est imposée au signal de référence, lequel doit être aussi suffisamment lisse. Cette deuxième hypothèse de travail, aussi très contraignante, est satisfaite par l'approche *Backstepping* grâce à l'implémentation d'un *préfiltre* d'ordre  $n$ . La nécessité de l'utilisation d'un filtre constitue un premier inconvénient de cette approche. En plus des limites et inconvénients dûs aux hypothèses de travail, d'autres inconvénients majeurs sont inhérents à la procédure récursive de la conception des lois de commande dans l'approche *Backstepping*. En effet, cette approche souffre, d'une part, du problème d'*explosion de complexité* et, d'autre part, de celui d'*explosion de termes*. Ces deux derniers inconvénients sont dûs aux dérivations successives des commandes virtuelles.

Différentes approches ont été proposées afin de traiter les inconvénients de l'approche *Backstepping* et de permettre la commande d'un plus large ensemble de systèmes appartenant à la classe *Strict Feedback Systems*. Deux approches parmi toutes les autres, très reconnues dans la littérature scientifique et qui ont traité cette problématique sont les approches *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping*. Ces deux dernières approches, bien qu'elles soient applicables à un plus large ensemble de systèmes appartenant à la classe *Strict Feedback Systems*, i.e. hypothèses de travail moins contraignantes, et qu'elles ne souffrent pas du problème d'*explosion de complexité* grâce à l'introduction d'un ensemble de filtres, elles présentent d'autres inconvénients et limites. En particulier, ces deux approches ne constituent que des approximations de l'approche *Backstepping*.

Dans cette thèse, nous avons développé une nouvelle approche pour la commande des systèmes non linéaires appartenant à la classe *Strict Feedback Systems*. Cette nouvelle approche, à laquelle nous nous référons par le nom *Commande à Gain Récursif*, est basée sur l'introduction d'une nouvelle notion de signaux que l'on a désigné par le nom *signaux fictifs*. Ces derniers sont dits *fictifs* car ils n'existent pas réellement. L'approche *Commande à Gain Récursif* permet, d'une part, de mieux traiter les inconvénients de l'approche *Backstepping* et ce sans implémentation de filtres, i.e. régler définitivement le problème d'*explosion de complexité* et celui d'*explosion de termes* et, d'autre part, de rendre possible la commande d'un ensemble beaucoup plus large de systèmes appartenant à la classe *Strict Feedback Systems*, i.e. hypothèses de travail beaucoup moins contraignantes. Ce résultat théorique est rendu possible grâce à l'utilisation des *signaux fictifs*. Plus encore et à la différence des approches *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping*, l'approche *Commande à Gain Récursif* est supérieure à celle du *Backstepping*. La commande en vitesse, par orientation du flux rotorique, de la machine synchrone à aimant permanent *SPMSM* est réalisée avec les approches *Commande à Gain Récursif* et *Backstepping* afin de comparer leurs performances et confirmer les résultats théoriques.

Mots clés : Systèmes non linéaires, *Strict Feedback Systems*, *Backstepping*, *Dynamic Surface Control*, *Command Filtered Backstepping*, *Commande à Gain Récursif*, Moteur *SPMSM*.

Cette page est intentionnellement laissée blanche

The *Backstepping* approach is one of the most important approaches for controlling non linear systems. This approach is applicable for a special class of systems. Precisely, the *Backstepping* approach is used for controlling non linear systems whose state space representation is in the *Strict Feedback Form*. These systems are referred to as *Strict Feedback Systems*.

Just after the appearance of the *Backstepping* approach, many researchers pointed out the limits and drawbacks of this approach. Indeed, the *Backstepping* approach is not applicable to all systems belonging to the class of *Strict Feedback Systems*, but only to those whose non linearities are sufficiently smooth. In other words, systems whose non linearities belong to the class  $C^n$  of functions, i.e. that are  $n$  times differentiable and whose derivatives till order  $n$  are continuous. This condition constitutes a very stringent assumption which limits the applicability of the *Backstepping* approach. The same condition is required for the reference signal; which also must be sufficiently smooth. This second assumption, also very stringent, is satisfied in the *Backstepping* approach by implementing an  $n^{\text{th}}$  order *prefilter*. The use of this filter constitutes a first drawback of this approach. In addition to the limitations and drawbacks due to the stringent assumptions, other major drawbacks are arising from the recursive design procedure of the *Backstepping* approach. Indeed, this approach suffers, on one hand, from the *explosion of complexity* problem and, on the other hand, from that of *explosion of terms*. These last two drawbacks are due to the successive derivations of the virtual controls.

Different approaches have been proposed in order to deal with the drawbacks of the *Backstepping* approach and to allow control of a larger set of systems belonging to the class of *Strict Feedback Systems*. Two approaches among all others, widely recognized in the scientific literature, which have dealt with these issues are the *Dynamic Surface Control* and *Command Filtered Backstepping* approaches. These two approaches, although they are applicable to a larger set of systems belonging to *Strict Feedback Systems* class, i.e. less stringent assumptions, and they do not suffer from the *explosion of complexity* problem, thanks to the implementation of a filters set ; they have other drawbacks and limitations. In particular, these two approaches are only approximations of the *Backstepping* approach.

In this thesis, we have developed a new approach for the control of non linear systems belonging to the *Strict Feedback Systems* class. This new approach, which we refer to as *Recursive Gain Controller*, is based on the introduction of a new notion of signals which we have called *fictitious signals*. These signals are called *fictitious* because they don't really exist. The *Recursive Gain Controller* approach deals better with the drawbacks of the *Backstepping* approach without implementing filters, i.e. definitively solves the *explosion of complexity* problem and that of *explosion of terms*, and allows to control a much larger set of systems belonging to *Strict Feedback Systems* class, i.e. much less stringent assumptions. This theoretical result is made possible by using the *fictitious signals*. On the other hand and unlike the *Dynamic Surface Control* and *Command Filtered Backstepping* approaches, performances of the *Recursive Gain Controller* approach are superior to those of the *Backstepping* approach. The speed control, using rotor flux orientation, of the surface permanent magnet synchronous machine *SPMSM* is carried out with the *Recursive Gain Controller* and *Backstepping* approaches in order to compare their performances and to confirm the theoretical results.

Key words : Non linear systems, *Strict Feedback Systems*, *Backstepping*, *Dynamic Surface Control*, *Command Filtered Backstepping*, *Recursive Gain Controller*, *SPMSM* Motor.

Cette page est intentionnellement laissée blanche

يعد *Backstepping* أحد أهم المقاربات للتحكم في الأنظمة غير الخطية. هذه المقاربة قابلة للتطبيق لفئة خاصة من الأنظمة. على وجه التحديد، يتم استخدام مقاربة *Backstepping* للتحكم في الأنظمة غير الخطية التي يكون تمثيلها الفضائي على شكل *Strict Feedback Form*. يشار إلى هذه الفئة من الأنظمة باسم *Strict Feedback Systems*.

منذ ظهور مقاربة *Backstepping*، أشار العديد من الباحثين إلى حدود هذه المقاربة وعيوبها. في الواقع، لا يمكن تطبيق مقاربة *Backstepping* على جميع الأنظمة التي تنتمي إلى فئة *Strict Feedback Systems*؛ ولكن فقط لأولئك الذين تكون دوالهم غير الخطية سلسلة بدرجة كافية. بعبارة أخرى، الأنظمة التي تنتمي دوالها غير الخطية إلى فئة الدوال  $C^n$ ، أي الدوال التي يمكن اشتقاقها  $n$  مرات ومشتقاتها النونية  $n^{th}$  مستمرة، حيث  $n$  هو درجة النظام. يشكل هذا الشرط افتراضاً صارماً للغاية مما يحد من قابلية تطبيق مقاربة *Backstepping*. نفس الشرط مطلوب للإشارة المرجعية؛ والتي يجب أيضاً أن تكون سلسلة بدرجة كافية. يتم استيفاء هذا الافتراض الثاني، وهو أيضاً صارم للغاية، في مقاربة *Backstepping* من خلال إستعمال مرشح ذو درجة  $n$ . يشكل استخدام هذا المرشح أول العيوب في هذه المقاربة. بالإضافة إلى الحدود والعيوب بسبب الافتراضات الصارمة، عيوب رئيسية أخرى تنشأ بسبب عملية التصميم المتتالية لمقاربة *Backstepping*. في الواقع، تعاني هذه المقاربة، من ناحية، من مشكلة *explosion of complexity* ومن ناحية أخرى، من مشكلة *explosion of terms*. يرجع هذان العيبان الأخيران إلى الاشتقاقات المتتالية لعناصر التحكم الافتراضية.

اقترحت مقاربات مختلفة للتعامل مع عيوب مقارنة *Backstepping* وللسماح بالتحكم في مجموعة أكبر من الأنظمة التي تنتمي إلى فئة *Strict Feedback Systems*. مقاربتان من بين جميع المقاربات الأخرى، المعترف بهما على نطاق واسع في الأدبيات العلمية، واللتي تناولت هذه العيوب هما *Dynamic Surface Control* و *Command Filtered Backstepping*. هاتان المقاربتان، على الرغم من أنهما تطبقان على مجموعة أكبر من الأنظمة التي تنتمي إلى فئة *Strict Feedback Systems*، بفضل الافتراضات أقل صرامة، ولا تعاني من مشكلة *explosion of complexity*، وذلك بفضل إستعمال مجموعة من المرشحات، لديهن عيوب وقيود أخرى. على وجه الخصوص، فإن هاتان المقاربتان هن فقط مقاربتان تقريبية لمقاربة *Backstepping*.

في هذه الرسالة، قمنا بتطوير مقاربة جديدة للتحكم في الأنظمة غير الخطية التي تنتمي إلى فئة *Strict Feedback Systems*. تعتمد هذه المقاربة الجديدة، التي نشير إليها باسم *Recursive Gain Controller*، على إدخال مفهوم جديد للإشارات أطلقنا عليهم اسم *fictitious signals*. سميت *fictitious signals* لأنها غير موجودة في الحقيقة. تتعامل مقاربة *Recursive Gain Controller* بشكل أفضل و كامل مع عيوب *Backstepping* بدون إستعمال المرشحات، أي الحل الجدري لمشكلة *explosion of complexity* ومشكلة *explosion of terms*، والسماح بالتحكم في مجموعة أكبر بكثير من الأنظمة التي تنتمي إلى فئة *Strict Feedback Systems*، أي أن افتراضاتها أقل صرامة بكثير. هذه النتيجة النظرية أصبحت ممكنة باستخدام *fictitious signals* من ناحية أخرى، وبخلاف *Dynamic Surface Control* و *Command Filtered Backstepping*، فإن أداء *Recursive Gain Controller* متفوق على أداء *Backstepping*. يتم انجاز و تنفيذ التحكم في السرعة، من خلال توجيه التدفق الدوار، للمحرك المتزامن ذو المغناطيس الدائم *SPMSM* باستخدام المقاربتين *Recursive Gain Controller* و *Backstepping* من أجل مقارنة أدائهما و تأكيد النتائج النظرية.

الكلمات الأساسية: الأنظمة غير الخطية؛ فئة *Strict Feedback Systems*؛ مقاربة *Backstepping*؛ مقاربة *Dynamic Surface Control*؛ مقاربة *Command Filtered Backstepping*؛ مقاربة *Recursive Gain Controller*؛ محرك *SPMSM*.

Cette page est intentionnellement laissée blanche

# TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	ii
Dédicaces	iv
Résumé	vii
Abstract	x
Résumé en arabe	xiii
<b>LISTE DES SYMBOLES</b>	<b>xix</b>
<b>1 Introduction Générale</b>	<b>2</b>
1.1 Contexte et motivation . . . . .	2
1.2 Objectif de la thèse . . . . .	10
1.3 Organisation de la thèse . . . . .	11
<b>2 <i>Strict Feedback Systems</i></b>	<b>14</b>
2.1 Introduction . . . . .	14
2.2 Formes normales . . . . .	15
2.2.1 Formes normales canoniques . . . . .	16
2.2.2 <i>Strict Feedback Normal Form</i> . . . . .	19
2.3 Strict Feedback Systems . . . . .	23
2.4 Discussion sur le signal de référence . . . . .	27

2.4.1	Cas où le sous système $x$ est du premier ordre . . . . .	28
2.4.1.1	Méthode de linéarisation . . . . .	28
2.4.1.2	Modification de la méthode de linéarisation . . . . .	32
2.4.2	Cas où le sous système $x$ est d'ordre $n$ . . . . .	34
2.4.2.1	Placement de pôles et linéarisation . . . . .	35
2.4.2.1.1	Placement de pôles . . . . .	36
2.4.2.1.2	Linéarisation . . . . .	39
2.4.2.1.3	Commande finale et discussion . . . . .	39
2.4.3	Approche <i>Backstepping</i> . . . . .	41
2.5	Conclusion . . . . .	47

### **3 Approches *Backstepping*, *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered***

<b><i>Backstepping</i></b>	<b>50</b>	
3.1	Introduction . . . . .	50
3.2	Approche <i>Backstepping</i> . . . . .	51
3.3	Solutions proposées dans la littérature scientifique . . . . .	56
3.4	Approche <i>Dynamic Surface Control</i> . . . . .	58
3.5	Approche <i>Command Filtered Backstepping</i> . . . . .	65
3.5.1	Analyse principale . . . . .	67
3.5.2	Analyse complémentaire . . . . .	71
3.6	Conclusion . . . . .	75

### **4 Approche *Commande à Gain Récursif***

4.1	Introduction . . . . .	79
4.2	Approche <i>Commande à Gain Récursif</i> . . . . .	80
4.3	Exemples d'application et comparaison . . . . .	93
4.3.1	Premier cas . . . . .	94
4.3.1.1	Référence désirée constante . . . . .	95
4.3.1.2	Référence désirée sinusoïdale . . . . .	98
4.3.2	Deuxième cas . . . . .	98
4.4	Étude de robustesse . . . . .	101
4.4.1	Robustesse de l'approche <i>Commande à Gain Récursif</i> . . . . .	104

4.4.2	Exemples d'application . . . . .	112
4.5	Conclusion . . . . .	115
<b>5</b>	<b>Application à la commande de la <i>SPMSM</i></b>	<b>118</b>
5.1	Introduction . . . . .	118
5.2	Machine <i>SPMSM</i> . . . . .	119
5.2.1	Principe de la commande par orientation du flux rotorique . . . . .	119
5.3	Application à la commande de la <i>SPMSM</i> . . . . .	120
5.3.1	Approche <i>Backstepping</i> . . . . .	121
5.3.1.1	Loi de commande $u_{d,Linea}$ . . . . .	121
5.3.1.2	Loi de commande $u_{q,Back}$ . . . . .	122
5.3.1.3	Analyse complète de la convergence . . . . .	127
5.3.2	Approche <i>Commande à Gain Récursif</i> . . . . .	128
5.3.2.1	Loi de commande $u_{d,CGR}$ . . . . .	128
5.3.2.2	Loi de commande $u_{q,CGR}$ . . . . .	132
5.3.2.2.1	Dynamique du courant statorique $i_q$ . . . . .	133
5.3.2.2.2	Dynamique de la vitesse $\Omega$ . . . . .	137
5.3.2.3	Analyse complète de la convergence . . . . .	143
5.3.3	Comparaison et simulation . . . . .	144
5.4	Conclusion . . . . .	149
<b>6</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>151</b>
<b>A</b>	<b>Norme vectorielle et espace <math>L_p</math></b>	<b>168</b>

Cette page est intentionnellement laissée blanche

## LISTE DES SYMBOLES

$\alpha_0$  : Signal de référence dans l'approche *Backstepping Standard*.

$\alpha_{i-1}$  : *Commande virtuelle* pour stabiliser le  $i^{ieme}$  état du système.

$C^0$  : Ensemble des fonctions continues.

$C^n$  : Ensemble des fonctions  $n$  fois analytiquement dérivables et dont les  $n^{ieme}$  dérivées analytiques sont continues.

$i$  : Numéro d'étape dans la conception récursive des lois de commande dans toutes les approches.

$n$  : Ordre du système.

*BS* : *Backstepping Standard*.

*SFF* : *Strict Feedback Form*.

*SFS* : *Strict Feedback Systems*.

Crochet de Lie :

$$ad_f^0 g(z) = g(z).$$

$$ad_f^1 g(z) = [f, g](z) = \frac{\partial g}{\partial z} f(z) - \frac{\partial f}{\partial z} g(z).$$

$$ad_f^i g(z) = [f, ad_f^{i-1} g].$$

Distribution Involutive : La distribution  $\Delta = span \{f_1, \dots, f_d\}$  est involutive si  $[f_i, f_j] \in \Delta$

$$\forall 1 \leq i, j \leq d.$$

Dérivée de Lie : C'est la dérivée de  $g(x)$  le long de  $f(x)$  défini par  $L_f g(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} f_i(x)$

---

Cette page est intentionnellement laissée blanche

## 1.1 Contexte et motivation

La théorie de la commande est l'une des branches les plus importantes dans le domaine du contrôle automatique des systèmes. Cette théorie se décline en plusieurs approches telles que l'approche *Backstepping*, *Mode Glissant*, *Passivité* etc. [58, 114, 130]. La diversité de ces approches vient naturellement de celle des classes de systèmes à commander. En effet, la théorie de commande ne s'intéresse pas à un système particulier ; mais à une forme particulière de la représentation d'état qui englobe un grand ensemble de systèmes réels de natures différentes tels que les systèmes électriques, électromécaniques, chimiques . . . . Les classes générales sont celles des systèmes linéaires et non linéaires. A la différence de la théorie portant sur la commande des systèmes linéaires, celle concernant les systèmes non linéaires reste un vaste domaine de recherche.

Dans la classe générale des systèmes non linéaires, la sous classe qui a reçue un grand intérêt de la part des chercheurs en théorie de la commande est la classe *Strict Feedback Systems*. Les systèmes appartenant à cette dernière classe sont caractérisés par une forme triangulaire de leurs représentation d'état dite *Strict Feedback Form* [53, 54, 55, 58, 64, 108, 128, 161]. La classe *Strict Feedback Systems* englobe plusieurs systèmes et procédés, mais aussi tous les systèmes et procédés dont la représentation d'état peut être ramenée à la forme *Strict Feedback Form* par un difféomorphisme [55, 58]. Parmi les systèmes qui font naturellement partie de la

classe *Strict Feedback Systems*, on cite à titre d'exemple les machines synchrone, asynchrone et à courant continu [12, 20, 25, 26, 40, 88, 127]; mais aussi les convertisseurs de puissance hacheurs série et parallèle [3, 22, 23, 93].

D'autre part, la théorie de la commande est basée principalement sur la théorie de stabilité de Lyapounov. Cette dernière, bien que très développée dans sa forme théorique, pose un grand problème quand on cherche à l'appliquer pour la commande des systèmes non linéaires. La difficulté principale vient du fait qu'il n'existe aucun moyen permettant de trouver la fonction de Lyapounov adéquate et nécessaire pour réaliser l'analyse de stabilité et où la conception d'une loi de commande [49, 58, 106, 114, 128, 130].

Pour la classe *Strict Feedback Systems*, une approche permettant de construire récursivement une fonction de Lyapounov, synthétiser une loi de commande et démontrer la stabilité du système en boucle fermée a été introduite en 1991 par Krstic et al. laquelle est désignée par le nom *Backstepping* [53, 54, 55, 56, 62, 63, 64]. Historiquement, l'origine de cette technique n'est pas vraiment claire. En effet, elle aurait été utilisée implicitement par certains chercheurs et ce depuis 1966 [1, 94]. Cependant, l'approche *Backstepping* a été formalisée par Krstic et al. [64] et Sepulchre et al. [108], lesquels références sont fréquemment citées comme background. Depuis 1991, l'approche *Backstepping* est considérée comme l'une des techniques les plus importantes pour la commande des systèmes continus non linéaires. Cette approche a reçu un grand engouement de la part des chercheurs en théorie de contrôle du point de vue purement théorique, mais aussi et surtout dans le domaine de la mise en application de cette technique pour la commande de différents systèmes réels.

L'approche *Backstepping* met à profit les relations causales et successives de la forme triangulaire des systèmes appartenant à la classe *Strict Feedback Systems* afin de réaliser de manière récursive, étape par étape, la conception d'une loi de commande. Ces étapes sont dites *Backstepping design*; cette appellation est dû au fait qu'en partant de la première dynamique, chaque étape réalise un pas en arrière jusqu'à arriver à l'entrée de commande. Le caractère récursif de la conception permet de réaliser systématiquement la loi de commande mais aussi la fonction de Lyapounov correspondante. En plus, l'approche *Backstepping* permet de conserver toutes les non linéarités du système.

Les avantages de cette approche, cités ci-haut, ont suscité un grand intérêt dans la communauté des chercheurs en théorie de la commande. Cependant, l'approche *Backstepping* ne présente pas que des avantages. En effet, juste après son apparition beaucoup de chercheurs ont relevé les limites et inconvénients de cette approche. Ces limites et inconvénients qui continuent à être discutés jusqu'à nos jours résultent, d'une part, du caractère récursif et, d'autre part, de la simplicité affligeante du principe de cette approche [19, 30, 121, 145, 146]. En effet, l'approche *Backstepping* n'est pas applicable à tous les systèmes appartenant à la classe *Strict Feedback Systems*, mais seulement à ceux dont les non linéarités sont suffisamment lisses. Autrement dit, les systèmes dont les non linéarités appartiennent à la classe  $C^n$  des fonctions, i.e. les fonctions  $n$  fois analytiquement dérivables et dont les  $n^{ième}$  dérivées analytiques sont continues. Cette dernière condition constitue une hypothèse de travail très contraignante qui limite l'applicabilité de l'approche *Backstepping* à une catégorie limitée de la classe *Strict Feedback Systems*. La même condition précédente est imposée au signal de référence; lequel doit être aussi suffisamment lisse, i.e. un signal de classe  $C^n$ . Cette deuxième hypothèse de travail, aussi très contraignante, est satisfaite par l'approche *Backstepping* grâce à l'implémentation d'un *préfiltre* d'ordre  $n$ . La nécessité de l'utilisation de ce dernier filtre constitue un premier inconvénient de cette approche.

En plus des limites et inconvénients dus aux hypothèses de travail, deux autres inconvénients majeurs sont aussi inhérents à la procédure récursive de la conception des lois de commande dans l'approche *Backstepping*. En effet, cette approche souffre, d'une part, du problème d'*explosion de complexité* et, d'autre part, de celui d'*explosion de termes* [17, 19, 30, 39, 43, 69, 92, 110, 115, 122, 145, 146, 151, 157]. Le problème d'*explosion de complexité* caractérise la difficulté de l'application de la procédure de conception dans l'approche *Backstepping*. En effet, pour un système d'ordre  $n$  l'approche *Backstepping* nécessite  $n$  étapes successives pour déterminer la loi de commande. A chaque étape  $i$ , l'approche *Backstepping* utilise la *commande virtuelle*  $\alpha_{i-1}$  pour stabiliser le  $i^{ième}$  état du système. Le problème d'*explosion de complexité* vient du fait que, de la première étape jusqu'à la  $n^{ième}$  étape, il faut dériver analytiquement la  $i^{ième}$  *commande virtuelle*  $n - i$  fois. Les dérivations successives font exploser la complexité de conception, i.e. le degré de difficulté, d'où le problème d'*explosion de complexité*. Plus en-

core, le nombre de termes explose dans la loi de commande obtenue. On désigne ce fait par le nom problème d'*explosion de termes* [19, 30, 121]. Il est important de noter que, autant l'ordre du système est grand autant les problèmes d'*explosion de complexité* et d'*explosion de termes* sont importants. Pratiquement et dès que l'ordre du système est  $n \geq 3$ , la procédure de conception par l'approche *Backstepping* devient incroyablement difficile et très ennuyeuse [6, 17, 19, 30, 39, 43, 69, 79, 92, 110, 115, 122, 145, 146, 151, 157].

D'autre part, il est important de noter que les extensions de l'approche *Backstepping* telles que *Adaptative Backstepping* [55, 62] et *Observer Backstepping* [64] non seulement héritent des limites et inconvénients de l'approche *Backstepping* standard, mais possèdent leurs propres limites et inconvénients [16, 19, 69, 85, 110, 116, 122, 146, 157]. De ce fait, il est logique et raisonnable de chercher et de proposer une nouvelle approche permettant, en premier lieu, de traiter les limites et inconvénients de l'approche *Backstepping* standard et, en deuxième lieu, d'étendre la nouvelle approche si c'est possible, afin de traiter les limites et inconvénients des différentes extensions de l'approche *Backstepping* standard.

Plusieurs auteurs se sont donc intéressés aux limites et inconvénients de l'approche *Backstepping* standard. En effet, on trouve dans la littérature scientifique plusieurs approches qui ont discuté et traité cette problématique. Puisque les limites et inconvénients de l'approche *Backstepping* sont tous une conséquence directe des dérivations analytiques et successives des *commandes virtuelles*  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , et du signal de référence désiré  $\alpha_0$ ; alors les différents auteurs ont proposé, dans leurs approches, de simplement contourner ces dérivations analytiques successives. En effet, cette idée très simple peut être réalisée soit par l'utilisation des différences finies ou bien par l'implémentation de filtres.

Afin de contourner les dérivations analytiques successives, certains auteurs ont donc opté pour l'utilisation des différences finies de premier ordre afin de réaliser les approximations des dérivées nécessaires à l'obtention de la loi de commande. En se basant sur la technique du mode glissant et en utilisant les différences finies Green and Hedrick ont proposé en 1990 l'approche *Multiple Surface Sliding Control* [37, 38, 43, 95]. Cette approche exige que les non linéarités du système et le signal de référence appartiennent à  $C^1$ , elle assure une convergence semi-globale

et où les erreurs sont bornées. L'approche *Multiple Surface Sliding Control* a été étendue au cas adaptatif en 2004 par Huang and Chen [45] et aux systèmes incertains en 2020 par Thanh and Hong [123, 124]. Cette approche a été appliquée avec succès pour la commande de différents systèmes tels que les Quadrotors [46, 47, 51, 119], système de freinage anti-blocage (ABS) [109, 129], Unmanned Aerial Vehicles (UAV) [101] mais aussi les convertisseurs DC - DC [93]. En utilisant les différences finies et la théorie de passivité, l'approche *Dissipative Control* est proposée en 2000 par Alleyne and Liu [2] et étendue au cas adaptatif en 2002 par Seiler and Alleyne [107]. Cette approche exige que les non linéarités du système soient suffisamment lisses et potentiellement appartiennent à  $C^n$ , elle assure une convergence globale et exponentielle des erreurs vers zéro. L'approche *Dissipative Control* a été appliquée aux systèmes électro-hydrauliques [60]. En utilisant toujours les différences finies mais avec la technique *Virtual Power Flows*, qui définit les interactions dynamiques entre des sous systèmes adjacents, Koivumäki et al. ont proposé en 2022 l'approche *Subsystem-Based Control* [61]. Cette approche exige que les non linéarités du système soient suffisamment lisses et assure une convergence globale et asymptotique des erreurs dans des boules de centre zéro. Les approches *Multiple Surface Sliding Control*, *Dissipative Control* et *Subsystem-Based Control* sont basées sur l'hypothèse que les différences finies n'introduisent aucune erreur lors du calcul des dérivées nécessaires à l'obtention de la loi de commande. Cette hypothèse constitue un grand manque de rigueur dans l'analyse des ces dernières approches et donc leur plus grand défaut. Plus encore, les approches *Dissipative Control* et *Subsystem-Based Control* ne réduisent pas les contraintes sur les non linéarités du système comparativement à l'approche *Backstepping*. D'autre part et à la différence de l'approche *Backstepping* qui est une approche mono-boucle, les approches ci-dessus sont des approches multi-boucle.

Pour le même objectif de contournement des dérivations analytiques successives dans l'approche *Backstepping*, d'autres auteurs ont opté pour l'utilisation d'un filtre à chaque étape de la conception afin d'obtenir une meilleur approximation des dérivées nécessaires à l'obtention de la loi de commande. En utilisant donc des filtres de premier ordre au lieu des différences finies, Won and Hedrick ont amélioré en 1996 l'approche *Multiple Surface Sliding Control* tout en l'étendant aux systèmes avec des non linéarités Lipschitziennes [142]. Une autre extension modification de l'approche *Multiple Surface Sliding Control* consistant en l'utilisation d'un en-

semble de *filtres à modes glissants* est proposée en 1997 par Stotsky et al. [118]. Ces deux extensions, comme l'approche originale, exigent que les non linéarités du système et le signal de référence appartiennent à  $C^1$ , n'assurent qu'une convergence semi-globale et où les erreurs sont bornées.

En utilisant des filtres de premier ordre, Yip et al. ont proposé en 1996 l'approche *Dynamic Surface Control* laquelle est basée sur la technique du *mode glissant* [121, 122, 147]. Cette approche est étendue en 1998 au cas adaptatif par Yip and Hedrick [146], au cas adaptatif avec retard inconnu en 2007 par Yoo et al. [148], aux systèmes multi-variables en 2010 par Chenliang and Yan [16], à la commande décentralisée des systèmes inter-connectés en 2012 par Wang and Lin [131] et aux systèmes incertains en 2018 par Liu [79]. Li et al. ont étendu en 2012 l'approche *Dynamic Surface Control* aux systèmes ayant la forme *Semi-Strict Feedback Form* en utilisant des filtres du second ordre [69] et en 2018 par Zhang et al. en utilisant des filtres adaptatifs non linéaires [157]. En se basant sur la théorie des perturbations singulières Pan and Yu ont réalisé en 2015 une analyse complète de l'approche *Dynamic Surface Control* [92]. De même que *Multiple Surface Sliding Control*, l'approche *Dynamic Surface Control* exige que les non linéarités du système et le signal de référence appartiennent à  $C^1$ , assure une convergence semi-globale et où les erreurs sont bornées. En utilisant des filtres du second ordre et en se basant sur la technique des perturbations singulières, les auteurs Farrell et al. ont proposé en 2009 l'approche *Command Filtered Backstepping* [30]. L'approche *Command Filtered Backstepping* exige aussi que les non linéarités du système et le signal de référence appartiennent à  $C^1$ , assure une convergence globale et asymptotique des erreurs. Cette approche a été étendue en 2011 au cas adaptatif par Dong et al. [19] et en 2015 aux systèmes multi-agents ayant la forme *Strict Feedback Form* par Shen and Shi [110]. En introduisant le différenciateur de Levant [67], Yu et al. ont réalisé en 2018 l'approche *Command Filtered Backstepping* avec un temps de convergence fini [151]. De même que les approches utilisant les différences finies, les approches *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping* sont aussi des approches multi-boucle.

Une autre approche développée par Bechlioulis and Rovithakis est apparue en 2011, elle est désignée par *Prescribed Performance Control* [5]. Cette approche n'utilise ni les différences

finies ni des filtres, elle utilise un ensemble de  $n$  fonctions  $\rho_i$  dites de *performance* permettant de pré-définir les performances désirées mais en plus un deuxième ensemble de  $n$  fonctions lisses  $S_i$ . L'approche *Prescribed Performance Control* exige que le signal de référence appartienne à  $C^0$  mais n'impose aucune condition sur les non linéarités du système. Cette approche exige la connaissance des valeurs initiales pour la référence et les commandes virtuelles, ceci constitue une contrainte difficile à vérifier [6] mais en plus la loi de commande dépend des fonctions  $\rho_i$ ,  $S_i$  et les dérivées premières des fonctions  $S_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Cette approche peut souffrir d'un problème de singularité lequel peut causer une instabilité [138]. Des études générales de cette approche sont réalisées par certains auteurs tels que Wei et al. mais aussi Bu peuvent être consultées pour plus de détails [9, 141]. Cette approche est appliquée avec succès pour la commande de certains systèmes tels que les systèmes aéroélastiques [34], les systèmes non linéaires commutés [143] et d'autres encore [48, 72, 74, 87, 137]. Comme les autres approches, l'approche *Prescribed Performance Control* est une approche multi-boucles.

Le plus grand avantage de l'approche *Prescribed Performance Control* réside dans le fait qu'elle peut être appliquée aux systèmes de la classe *Strict Feedback Systems* dont les non linéarités sont inconnues. Pour cette même classe des systèmes et en combinant les techniques de commande intelligentes, réseaux de neurones et logique floue, plusieurs auteurs ont réussi à étendre les approches *Backstepping*, *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping*. En effet, les réseaux de neurones et la logique floue sont des techniques très puissantes permettant l'obtention de très bonnes approximations pour les non linéaires inconnues des systèmes [14, 66, 153, 155, 162]. Grâce à ces techniques les fonctions non linéaires à paramètres inconnus et où incertaines peuvent être approximées en se basant sur une connaissance limitée du système. En combinant la logique floue avec l'approche *Backstepping* des auteurs ont réalisé la commande des systèmes à événements discrets [18, 68], drone quadrirotor [149] et d'autres [8, 125, 126]. L'approche *Backstepping* combinée avec les réseaux de neurones est utilisée pour la commande des systèmes stochastiques avec retard [15] ou bien entrées saturées [86], pour les exosquelettes [144] et plusieurs autres systèmes [70, 75, 80, 133]. De même que pour l'approche *Backstepping*, les réseaux de neurones et la logique floue ont été combinés à l'approche *Dynamic Surface Control* dans plusieurs travaux [7, 41, 71, 73, 75, 77, 113, 120, 132, 135, 140, 150, 152] mais aussi à l'approche *Command Filtered Backstepping* [13, 33, 42, 44, 52, 57, 76, 78, 89, 90,

111, 134, 136, 139, 154, 156, 158, 159, 160, 163].

Dans toutes les approches citées auparavant, l'objectif principal étant d'éliminer le calcul analytique des dérivées des *commandes virtuelles* lors de la conception de la loi de commande par l'approche *Backstepping* et par conséquent d'éliminer les problèmes d'*explosion de complexité* et d'*explosion de termes*. En plus de cet objectif, ces approches cherchent à recouvrir, au mieux possible, les performances de l'approche *Backstepping*. Bien que toutes ces approches éliminent effectivement le problème d'*explosion de complexité*, elles ne réussissent pas à éliminer le problème d'*explosion de termes*. Plus exactement et du fait de l'introduction des différences finies dans les approches *Multiple Surface Sliding Control*, *Dissipative Control* et *Subsystem-Based Control* ou bien d'un ensemble de filtres dans les approches *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping* ou d'un ensemble de fonctions dans l'approche *Prescribed Performance Control* la loi de commande obtenue, multi-boucles, contiendrait beaucoup de termes. D'autre part, le recouvrement des performances de l'approche *Backstepping* ne peut être obtenu par les approches utilisant les différences finies puisque l'approximation est grossière ni par l'approche *Prescribed Performance Control* puisque la détermination des fonctions nécessaires est très difficile. Le recouvrement des performances peut être plus ou moins obtenu en rendant les paramètres des différents filtres très petits dans le cas de l'approche *Dynamic Surface Control* [92], ou bien en augmentant la bande passante des filtres dans le cas de l'approche *Command Filtered Backstepping* [30]. De ce fait toutes les approches ne constituent que des approximations et ne peuvent en aucun cas dépasser les performances de l'approche *Backstepping*. Il est important de noter que l'implémentation réelle des filtres numériques dans les approches *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping* mais aussi le préfiltre dans l'approche *Backstepping* limite les performances. En effet, la bande passante maximale des filtres numériques est limitée par la fréquence du cycle d'exécution [121]. Plus encore et à la différence de l'approche *Backstepping*, toutes les autres sont des approches multi-boucles. Une dernière remarque très importante qu'il est nécessaire de noter est que toutes les approches citées auparavant, comme l'approche *Backstepping*, réalisent des étapes en arrière i.e. on remonte le système en partant du premier état jusqu'au dernier.

## 1.2 Objectif de la thèse

Comme discuté plus haut, l'approche *Backstepping* est une technique qui est non seulement très difficile pour la commande des systèmes non linéaires de la classe *Strict Feedback Systems* mais qui en plus montre beaucoup d'inconvénients et de limites. Les différentes approches proposées dans la littérature n'étant que des approximations et par conséquent ne peuvent pas dépasser les performances de l'approche *Backstepping*. Plus exactement, ces dernières approches réalisent un compromis entre les performances de l'approche *Backstepping* et leur simplicité.

L'objectif dans cette thèse est de concevoir une nouvelle approche qui non seulement dépasse les performances de l'approche *Backstepping* mais qui est en plus beaucoup plus simple que toutes les autres approches existantes dans la littérature. En effet, l'approche que l'on propose dans cette thèse apporte une solution complète aux problèmes d'*explosion de complexité* et d'*explosion de termes* ; elle est applicable à un plus large ensemble des systèmes non linéaires de la classe *Strict Feedback Systems* que toutes les autres approches puisque ces hypothèses de travail sont les moins exigeantes ; elle est en particulier la plus simple puisque elle n'utilise, comparativement aux autres approches, que des gains de réglage. Ces derniers avantages, qui caractérisent notre approche, sont rendus possible grâce à l'introduction d'une nouvelle notion désignée par le nom *signal fictif*. Ce dernier signal est dit *fictif* car il n'est pas implémenté dans la loi de commande, mais il est utilisé seulement pour les besoins de l'analyse de la convergence. En effet et grâce au *signaux fictifs*, une nouvelle manière pour la construction récursive des fonctions de *Lyapounov* est rendu possible. Du fait de la récursivité dans l'analyse de convergence et que notre approche n'utilise que des gains, nous avons désigné cette approche par le nom *Commande à Gain Récursif*.

### 1.3 Organisation de la thèse

Outre cette introduction qui fait office à la fois d'état de l'art, de motivation et de présentation générale du sujet, cette thèse s'articule autour des chapitres suivants :

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des différentes formes canoniques obtenues par un difféomorphisme à partir de l'écriture générale d'un système non linéaire  $\dot{x} = f(x)$  tout en rappelant les conditions nécessaires pour l'existence d'un difféomorphisme. Ce chapitre nous permettra en particulier de définir les différentes formes dites *Strict Feedback Form* sur lesquelles les approches citées ci-haut sont applicables et de définir la forme générale des systèmes appartenant à la classe *Strict Feedback Systems*. Des exemples de systèmes réels appartenant à cette dernière classe, domaines des machines électriques, sont donnés afin de compléter la présentation.

Le troisième chapitre est dédié en premier lieu à la présentation de l'approche *Backstepping* sous sa forme théorique générale ce qui nous permettra de mettre en évidence les différents inconvénients et limites de cette approche. Dans cette présentation les problèmes d'*explosion de complexité* et d'*explosion de termes*, les raisons qui limitent l'applicabilité et enfin la nécessité de l'adjonction d'un *préfiltre* seront clarifiés. En deuxième lieu, on présentera les deux approches les plus populaires dans la littérature scientifique, *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping*, qui ont traité les inconvénients et limites de l'approche *Backstepping*. La présentation de ces deux dernières approches nous permettra de mettre en évidence d'une part, les limites et inconvénients des solutions proposées dans la littérature et, d'autre part, les avantages de notre approche.

Dans le quatrième chapitre, nous présenterons notre approche *Commande à Gain Récursif*. Les avantages et performances de l'approche *Commande à Gain Récursif* par rapport à celle de *Backstepping* seront clairement montrés par analyse théorique et par simulation. En effet, des simulations traitant différentes situations théoriques seront présentées afin de confirmer les qualités notre approche comparativement à l'approche *Backstepping*.

Dans le cinquième et dernier chapitre nous réaliserons une comparaison entre les deux approches *Commande à Gain Récursif* et *Backstepping* dans le cas d'un système réel. En effet, nous réaliserons la commande par orientation du flux rotorique de la machine synchrone à aimant permanent à pôles lisses *SPMSM*. Les résultats des simulations obtenues avec les deux approches seront discutés afin de mieux montrer les avantages de notre approche par rapport à celle de *Backstepping*.

Une conclusion générale terminera ce manuscrit tout en donnant les perspectives futures pour l'extension de l'approche *Commande à Gain Récursif*.

Cette page est intentionnellement laissée blanche

## CHAPITRE 2

*STRICT FEEDBACK SYSTEMS*

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre on présentera les formes normales obtenues par transformation d'un système *SISO* non linéaire affine en l'entrée par un difféomorphisme. En effet, ce dernier système peut être transformé en les formes normales canoniques dites généralement linéarisation entrée sortie ou bien entrée état, mais aussi la forme *Strict Normal Form* et *Strict Feedback Normal Form*. Cette dernière forme, nous permettra d'introduire la classe des systèmes *Strict Feedback systems* ayant la forme *Strict Feedback Form*.

L'objectif principal dans ce chapitre est de discuter les conditions que les non linéarités du système et la référence doivent satisfaire pour que la loi de commande par retour d'état soit valide et ce dans le cas d'un problème de poursuite de trajectoire. Pour atteindre cet objectif, on réalisera la conception de deux lois de commande par retour d'état en considérant les formes normales canoniques et la forme *Strict Normal Form*. La première loi sera conçue en combinant un placement de pôles et la méthode de linéarisations, alors que la deuxième loi sera conçue en utilisant l'approche *Backstepping*. L'autre objectif est de présenter les principes de bases de l'approche *Backstepping* et d'étudier ses inconvénients dans le cas particulier des systèmes obtenus par transformation d'un système *SISO* non linéaire affine en l'entrée par un difféomorphisme et correspondant aux formes normales canoniques et *Strict Normal Form*.

## 2.2 Formes normales

Dans l'objectif de réaliser la commande ou l'observation d'un système non linéaire en utilisant une méthode donnée, il est parfois nécessaire de transformer le système en question vers une forme équivalente. Plus précisément il s'agit de déterminer un difféomorphisme, voir Définition 2.1, permettant le passage de la représentation d'état initiale, impossible à utiliser, vers une autre représentation équivalente plus judicieuse [50, 58].

**Définition 2.1** (Difféomorphisme). S'il existe une transformation lisse  $x = T(z)$ , i.e.  $T(z)$  est infiniment différentiable, et que son inverse  $z = T^{-1}(x)$  existe et soit lisse, alors cette transformation est un difféomorphisme.

L'objectif dans cette section est de présenter la forme équivalente *Strict Feedback Normal Form* introduite par Kanellakopoulos et al. [55]. La forme *Strict Feedback Normal Form* est obtenue par une transformation de coordonnées (difféomorphisme) du système *SISO* non linéaire affine en l'entrée

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \alpha(z) u + \beta(z) \\ y &= h(z) \end{aligned} \tag{2.1}$$

où  $z \in \mathfrak{R}^n$ ,  $y \in \mathfrak{R}$  et  $u \in \mathfrak{R}$  sont respectivement le vecteur d'état, la sortie et l'entrée du système [1, 50, 58].

Afin d'atteindre cet objectif il est nécessaire de présenter en premier lieu la transformation des systèmes non linéaires (2.1) vers la forme normale canonique; cette transformation est généralement désignée dans la littérature scientifique par le terme linéarisation entrée sortie.

### 2.2.1 Formes normales canoniques

Si les champs de vecteurs  $\alpha(z)$ ,  $\beta(z)$  et  $h(z)$  du système (2.1) sont lisses, i.e. infiniment différentiables, et que  $h(z)$  satisfait les conditions suivantes

$$\begin{aligned} L_\alpha L_\beta^{i-1} h(z) &= 0 & i &= 1, \dots, r-1 \\ L_\alpha L_\beta^{r-1} h(z) &\neq 0 & \forall z &\in \mathfrak{R}^n \end{aligned} \quad (2.2)$$

alors le système (2.1) possède un degré relatif  $1 \leq r \leq n$  défini globalement [63]. Par contre, le système (2.1) possède un degré relatif  $r$  en un point  $z_0$  si les conditions (2.2) sont vérifiées dans un voisinage  $D \subset \mathfrak{R}^n$  de  $z_0$  tel que

$$\begin{aligned} L_\alpha L_\beta^{i-1} h(z) &= 0 & i &= 1, \dots, r-1, & \forall z &\in D \\ L_\alpha L_\beta^{r-1} h(z_0) &\neq 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Le degré relatif  $r$  du système (2.1) correspond en effet à la Définition 2.2.

**Définition 2.2** (Degré relatif [50]). Le degré relatif du système non linéaire affine en l'entrée (2.1) correspond au nombre de dérivations de la sortie  $y = h(z)$  qu'il faut réaliser afin de faire apparaître explicitement l'entrée de commande  $u$  et que celle-ci ne disparaît pas  $\forall z \in D \subset \mathfrak{R}^n$ .

En considérant donc les conditions (2.2), la dérivée d'ordre  $r$  de la sortie  $y = h(z)$  est telle que

$$y^{(r)} = L_\beta^r h(z) + L_\alpha L_\beta^{r-1} h(z) u \quad (2.4)$$

où la notation  $y^{(i)}$  correspond à la  $i^{\text{ieme}}$  dérivée de  $y$  et  $L_\alpha L_\beta^{i-1} h(z)$ ,  $L_\alpha L_\beta^{r-1} h(z)$  et  $L_\beta^r h(z)$  sont des dérivées de Lie. Plus encore, si l'on choisit le changement de variable

$$\begin{bmatrix} \zeta \\ \dots \\ x \end{bmatrix} = T(z) = \begin{bmatrix} T_1(z) \\ \vdots \\ T_{n-r}(z) \\ \dots \\ T_{n-r+1}(z) \\ \vdots \\ T_n(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1(z) \\ \vdots \\ T_{n-r}(z) \\ \dots \\ h(z) \\ \vdots \\ L_\beta^{r-1} h(z) \end{bmatrix} \quad x \in \mathfrak{R}^r \quad \zeta \in \mathfrak{R}^{n-r} \quad (2.5)$$

où les fonctions  $T_i(z)$ , pour  $i = 1, \dots, n - r$ , sont choisies de sorte qu'elles vérifient

$$\frac{\partial T_i(z)}{\partial z} \alpha(z) = L_\alpha T_i(z) = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n - r, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \quad (2.6)$$

alors, la transformation  $T(z)$  (2.5) est un difféomorphisme permettant de transformer le système (2.1) vers la forme normale canonique équivalente

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \Gamma(\zeta, x) \\ \dot{x}_i &= x_{i+1} \quad i = 1, \dots, r - 1 \\ \dot{x}_r &= g_r(x, \zeta) u + f_r(x, \zeta) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

où

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_i &= \Gamma_i(x, \zeta) = L_\beta T_i(z) \quad 1 \leq i \leq n - r \\ y^{(i)} &= x_{i+1} = L_\beta^i h(z) \quad 1 \leq i \leq r \\ y &= x_1 = h(z) \end{aligned} \quad (2.8)$$

et

$$\begin{aligned} g_r(x, \zeta) &= L_\alpha L_\beta^{r-1} h(z) \\ f_r(x, \zeta) &= L_\beta^r h(z) \end{aligned} \quad (2.9)$$

La forme normale équivalente (2.7) montre que le système *SISO* affine en l'entrée (2.1) est décomposable en deux sous systèmes appelés dynamiques internes  $\zeta$  et dynamiques externes  $x$ . Remarquer que dans le cas où (2.1) est un système linéaire, i.e.  $\beta(z) = A z$ ,  $\alpha(z) = B$  et  $h(z) = C^T z$ , alors les dynamiques internes  $\zeta$  correspondent aux zéros de la fonction de transfert

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (2.10)$$

et où le degré relatif est égale à la différence entre les degrés des polynômes dénominateur et numérateur  $r = n - m$ . Plus encore, si les dynamiques internes sont stables alors le système (2.1) est dit à minimum de phase. Par contre si les dynamiques internes sont instables le système (2.1) est dit à non minimum de phase et par conséquent il n'est pas possible de le commander.

D'autre par si le degré relatif est  $r = n$ , alors le système non linéaire (2.1) ne possède pas de dynamiques internes et est donc à minimum de phase. Dans ce cas, le difféomorphisme  $T(z)$  suivant :

$$x = T(z) = \begin{bmatrix} T_1(z) \\ \vdots \\ T_n(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(z) \\ \vdots \\ L_\beta^{n-1}h(z) \end{bmatrix} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.11)$$

transforme le système non linéaire (2.1) vers la forme normale canonique suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} & i &= 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= g_n(x) u + f_n(x) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (2.12)$$

où

$$\begin{aligned} y &= x_1 = h(z) \\ y^{(i)} &= x_{i+1} = L_\beta^i h(z) & 1 \leq i \leq n-1 \\ y^{(n)} &= \dot{x}_n \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} g_n(x) &= L_\alpha L_\beta^{n-1} h(z) \\ f_n(x) &= L_\beta^n h(z) \end{aligned} \quad (2.14)$$

L'obtention des deux formes normales canoniques (2.7) et (2.12) respectivement par les difféomorphismes (2.5) et (2.11) est désignée dans la littérature scientifique par le terme linéarisation entrée sortie. Le théorème suivant résume l'analyse présentée ci-haut.

**Théorème 2.1** ([58]). *Si le système SISO non linéaire affine en l'entrée (2.1) possède un degré relatif  $r = n$  dans un domaine  $D$ , alors pour tout  $z_0 \in D$  il existe un voisinage  $N$  de  $z_0$  tel que le changement de variable  $x = T(z)$  (2.11) est un difféomorphisme restreint à  $N$  transformant le système (2.1) vers la forme normale canonique (2.12). Si par contre  $r < n$ , alors pour tout  $z_0 \in D$  il existe un voisinage  $N$  de  $z_0$  et des fonctions lisses  $T_i(z)$ , pour  $i = 1, \dots, n-r$ , tel que le changement de variable  $[\zeta, x]^T = T(z)$  (2.5) est un difféomorphisme restreint à  $N$  transformant le système (2.1) vers la forme normale canonique (2.7).*

D'autre part, si le système non linéaire (2.1) ne possède pas de sortie et qu'il soit possible de trouver un champ de vecteurs  $h(z)$  tel que pour le choix  $y = h(z)$  le système possède un degré relatif  $r = n$ , alors on parle de linéarisation entrée état. Dans ce cas, les conditions de l'existence du champ de vecteurs  $h(z)$  sont données par le théorème suivant.

**Théorème 2.2** ([50]). *Il existe un champ de vecteurs  $h(z)$  tel que pour le choix  $y = h(z)$  le système SISO non linéaire affine en l'entrée possède un degré relatif  $r = n$  si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites*

- (i) *La matrice  $[ad_{\beta}^0\alpha(z_0), ad_{\beta}^1\alpha(z_0), \dots, ad_{\beta}^{n-1}\alpha(z_0)]$  est de rang  $n$ .*
- (ii) *La distribution  $G = \text{span} \{ad_{\beta}^0\alpha, ad_{\beta}^1\alpha, \dots, ad_{\beta}^{n-2}\alpha\}$  est involutive au voisinage de  $z_0$ .*

### 2.2.2 *Strict Feedback Normal Form*

La transformation du système *SISO* non linéaire affine en l'entrée (2.1) présentée dans la section précédente n'est pas unique. En effet, il existe d'autres formes que l'on peut obtenir grâce à un difféomorphisme. La forme à laquelle on s'intéresse dans cette section est la forme *Strict Feedback Normal Form*. Mais avant de présenter cette dernière forme, on présentera une autre forme dite *Strict Normal Form* donnée par

$$\begin{aligned}
 \dot{\zeta} &= \Gamma(\zeta, y) \\
 \dot{x}_i &= x_{i+1} \quad i = 1, \dots, r-1 \\
 \dot{x}_r &= g_r(x, \zeta) u + f_r(x, \zeta) \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

avec

$$\begin{aligned}
 f_r(0, 0) &= L_{\beta}^r h(0) = 0 \\
 g_r(x, \zeta) &= L_{\alpha} L_{\beta}^{r-1} h(z) \neq 0 \quad \forall z \in D \\
 \Gamma(0, 0) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

**Proposition 2.1** (*Strict Normal Form* [4, 10, 81]). *Il existe  $n - r$  fonctions lisses  $T_i$ , pour  $i = 1, \dots, n - r$ , tel que la transformation  $T(z)$  (2.5) est un difféomorphisme transformant localement le système SISO affine en l'entrée (2.1) ayant un degré relatif  $r < n$  vers la forme *Strict Normal Form* (2.15), si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites au voisinage  $D$*

de l'origine

$$\begin{aligned} L_\alpha L_\beta^{i-1} h(z) &= 0 & i = 1, \dots, r-1, & \quad \forall z \in D \\ L_\alpha L_\beta^{r-1} h(0) &\neq 0 \end{aligned}$$

et que la distribution  $G^i = \text{span} \{ad_\beta^0 \alpha, ad_\beta^1 \alpha, \dots, ad_\beta^i \alpha\}$  pour  $i = 1, \dots, r-1$ , soit involutive et de rang  $i+1$  constant.

En comparant avec les formes normales canoniques (2.7) et (2.12) obtenues précédemment, il est clair que la forme *Strict Normal Form* (2.15) est particulièrement utile pour la conception d'une loi de commande permettant l'obtention de la stabilité globale pour le système [10]. En effet, les dynamiques internes  $\dot{\zeta} = \Gamma(\zeta, y)$  dépendent seulement de la sortie  $y = x_1$  et non pas de ces dérivées  $y^{(i)} = x_{i+1}$  pour  $i = 1, \dots, r-1$ . Autrement dit, la sortie  $y$  est une entrée, *non réelle*, de commande pour les dynamiques internes  $\dot{\zeta} = \Gamma(\zeta, y)$ . La forme *Strict Normal Form* (2.15) correspond alors à deux sous systèmes, dynamiques internes et externes, en cascade. Il est donc possible de concevoir, en premier lieu, une loi de commande  $y = \gamma(\zeta)$  pour stabiliser globalement le sous système  $\zeta$  et, en second lieu, de concevoir la loi de commande réelle  $u$  permettant de commander le sous système  $x$  où la référence est  $y_{ref} = \gamma(\zeta)$ .

En se basant sur l'analyse présentée ci-dessus, les auteurs Kanellakopoulos et al. ont démontré que le système *SISO* non linéaire affine en l'entrée (2.1) est transformable sous une autre forme [55]. Plus exactement, Kanellakopoulos et al. considèrent le système *SISO* non linéaire paramétrique affine en l'entrée (2.17) avec des paramètres constants  $\theta_i$  pour  $i = 1, \dots, p$  et où les champs de vecteurs  $h(z)$ ,  $\alpha(z)$  et  $\beta_i(z)$ ,  $i = 0, \dots, p$ , sont lisses et que  $h(0) = 0$ ,  $\beta_i(0) = 0$  et  $\alpha(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathfrak{R}^n$ . Si les paramètres  $\theta_i$  sont connus, alors on retrouve le système (2.1).

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \alpha(z) u + \beta_0(z) + \sum_{i=1}^p \theta_i \beta_i(z) \\ y &= h(z) \end{aligned} \tag{2.17}$$

En effet, la nouvelle forme est désignée par le nom *Strict Feedback Normal Form*, si les paramètres  $\theta_i$  sont connus, ou bien *Parametric Strict Feedback Normal Form* si non. Ces deux

dernières formes sont données respectivement par les deux systèmes suivants :

$$\begin{aligned}
 \dot{\zeta} &= \Gamma(\zeta, y) \\
 \dot{x}_i &= x_{i+1} + f_i(x_1, \dots, x_i, \zeta) \quad i = 1, \dots, r-1 \\
 \dot{x}_r &= g_r(x, \zeta) u + f_r(x, \zeta) \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\zeta} &= \Gamma_0(\zeta, y) + \sum_{i=1}^p \theta_i \Gamma_i(\zeta, y) \\
 \dot{x}_i &= x_{i+1} + \theta^T f_i(x_1, \dots, x_i, \zeta) \quad i = 1, \dots, r-1 \\
 \dot{x}_r &= g_r(x, \zeta) u + \theta^T f_r(x, \zeta) + f_0(x, \zeta) \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

De même les systèmes (2.18) et (2.19) sont désignés par *Strict Feedback Normal System* ou bien *Parametric Strict Feedback Normal System* respectivement. Si le système *SISO* non linéaire paramétrique affine en l'entrée (2.17) possède un degré relatif  $r < n$ , alors il est transformable globalement vers les deux formes précédentes tel que édicté par la proposition suivante.

**Proposition 2.2** ([55]). *En considérant la Proposition (2.1), le système SISO non linéaire paramétrique affine en l'entrée (2.17) est globalement équivalent par un difféomorphisme à la forme (2.19) si et seulement si les conditions Strict Feedback suivantes sont satisfaites globalement*

$$[X, \beta_i] \in G^j, \quad \forall X \in G^i, \quad j = 0, \dots, r-2, \quad i = 1, \dots, p$$

ou bien de manière équivalente

$$[\text{ad}_{\beta_0}^j \alpha, \beta_i] \in G^j, \quad j = 0, \dots, r-2, \quad i = 1, \dots, p$$

où la distribution  $G^j$  est définie dans la Proposition (2.1).

De plus, les dynamiques internes  $\zeta$  des systèmes (2.18) et (2.19) possèdent la propriété *bounded input - bounded state* par rapport à l'entrée  $y = x_1$ .

D'autre part si le système non linéaire (2.17) a un degré relatif  $r = n$ , alors il ne possède pas des dynamiques internes et il est transformable vers la forme *Strict Feedback Normal Form*

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} + f_i(x_1, \dots, x_i) & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= g_n(x) u + f_n(x) \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{2.20}$$

ou bien vers la forme *Parametric Strict Feedback Normal Form*

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} + \theta^T f_i(x_1, \dots, x_i, \zeta) & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= g_n(x, \zeta) u + \theta^T f_n(x, \zeta) + f_0(x, \zeta) \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{2.21}$$

tel que édicté par la proposition suivante

**Proposition 2.3** ([55]). *Le système SISO non linéaire paramétrique affine en l'entrée (2.17) est globalement équivalent par un difféomorphisme à la forme (2.21) si et seulement si les conditions Strict Feedback suivantes sont satisfaites globalement*

$$[ad_{\beta_0}^j \alpha, \beta_i] \in G^j, \quad j = 0, \dots, r-2, \quad i = 1, \dots, p$$

où la distribution  $G^j$  est définie dans la Proposition (2.1).

Dans cette section, nous avons présenté la transformation par difféomorphisme des systèmes *SISO* non linéaires affines en l'entrée vers les formes normales. Il est aussi possible de transformer par difféomorphisme les systèmes *MIMO*, i.e. *Multi Input Multi Output*, affines en les entrées donnés par :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \sum_{i=1}^m \alpha_i(z) u_i + \beta(z) \\ y_i &= h_i(z) & i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{2.22}$$

Il est important de noter que la transformation des systèmes (2.22) donne un ensemble de  $m$  systèmes inter-connectés et ayant les formes citées auparavant [1, 19, 50, 81].

## 2.3 Strict Feedback Systems

Les formes présentées dans la section précédente ne constituent qu'une infime partie d'une forme de systèmes non linéaires plus générale. Cette dernière forme est donnée par le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
 \dot{\zeta} &= \Gamma(\zeta, x_1) \\
 \dot{x}_i &= g_i(\zeta, x_1, \dots, x_i) x_{i+1} + f_i(\zeta, x_1, \dots, x_i) \quad i = 1, \dots, r-1 \\
 \dot{x}_r &= g_r(\zeta, x_1, \dots, x_r) u + f_r(\zeta, x_1, \dots, x_r) \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

où  $\zeta \in \mathfrak{R}^p$ ,  $x_i \in \mathfrak{R}$  pour  $i = 1, \dots, r$  et  $u \in \mathfrak{R}$  est l'unique entrée du système. Les fonctions  $g_i(\zeta, x_1, \dots, x_i) \neq 0 \forall \zeta$  et  $x_i$  pour  $i = 1, \dots, r$ .

Cette forme est désignée par *Strict Feedback Form (SFF)*, alors que le système ayant cette forme est désigné par *Strict Feedback System (SFS)* [64, 161]. La raison derrière cette appellation vient du fait que les non linéarités  $f_i$  et  $g_i$  du sous système  $x$ , pour  $i = 1, \dots, r$ , dépendent seulement de  $\zeta, x_1, \dots, x_i$ ; autrement dit elles dépendent des états renvoyés vers l'arrière "Fed Back" [63]. En effet, le sous système  $x$  présente une forme triangulaire inférieure par rapport aux états  $x_i$  pour  $i = 1, \dots, r$ . De plus la dynamique  $\dot{x}_i$ , pour  $i = 1, \dots, r-1$ , est affine par rapport à l'état  $x_{i+1}$  et de même  $\dot{x}_n$  est affine par rapport à l'unique entrée  $u$ . D'autre part, si le système (2.23) ne possède pas de dynamiques  $\zeta$ , alors il correspond à la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i &= g_i(x_1, \dots, x_i) x_{i+1} + f_i(x_1, \dots, x_i) \quad i = 1, \dots, n-1 \\
 \dot{x}_n &= g_n(x_1, \dots, x_n) u + f_n(x_1, \dots, x_n) \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

La classe *Strict Feedback Systems*, telle que donnée par (2.23), représente un large éventail de systèmes non linéaires. En effet, le système (2.23) composé des deux sous systèmes  $\zeta$  et  $x$  peut être vu de différentes manières. Par exemple, le sous système  $\zeta$  peut être la partie non contrôlable mais stable d'un système d'ordre  $n$  ayant un degré relatif  $r$  où le sous système  $x$  est la partie contrôlable d'ordre  $r$ . Dans ce cas, le sous système  $\zeta$  est tel que  $\dot{\zeta} = \Gamma(\zeta, x)$  et les

fonctions scalaires  $g_i$  et  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, r - 1$ , sont telles que  $g_i = 1$  et  $f_i = 0$ . Il correspond donc à la forme (2.7), ou bien (2.12) si  $r = n$ , obtenue par transformation du système non linéaire *SISO* affine en l'entrée (2.1) ou bien au système linéaire (2.10) par un difféomorphisme. Si par contre  $\dot{\zeta} = \Gamma(\zeta, x_1)$ ,  $g_i = 1$  et  $f_i = 0$  pour  $i = 1, \dots, r - 1$ , alors on a la forme *Strict Normal Form* (2.15). Le système (2.23) peut aussi correspondre à la forme *Strict Feedback Normal Form* (2.18), ou bien (2.20) si  $r = n$ , obtenue aussi par transformation du système non linéaire *SISO* affine en l'entrée (2.1) par un difféomorphisme. Dans lequel cas, le sous système  $\zeta$  est tel que  $\dot{\zeta} = \Gamma(\zeta, x_1)$ , les fonctions scalaires  $g_i$  et  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, r - 1$ , sont telles que  $g_i = 1$  et  $f_i = f_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$ . La classe *Strict Feedback Systems* ne comprend pas seulement les formes précédentes obtenues par difféomorphisme, mais englobe de manière générale tous les systèmes dont la représentation d'état correspond à la forme (2.23), les systèmes constitués par l'interconnexion de sous systèmes ayant la forme (2.23) mais aussi les systèmes constitués de sous systèmes en cascade ayant la forme (2.23). Ces derniers systèmes sont désignés par *Block Strict Feedback Systems* [63]. Il existe plusieurs systèmes, dans différents domaines, appartenant à la classe *Strict Feedback Systems*. On donne les exemples suivants du domaine des machines électriques.

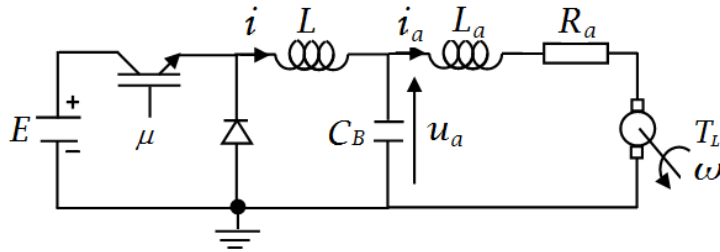


FIGURE 2-1 – Moteur à courant continu associée au hacheur série.

**Exemple 2.1.** *Le modèle mathématique du système correspondant à l'association d'un moteur à courant continu, à excitation séparée, avec un hacheur série (Fig.2-1) est donné par le système*

d'équations suivant [20, 21] :

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega}(t) &= -\frac{f}{J} \omega(t) + \frac{K_a}{J} i_a(t) - \frac{T_L}{J} \\
 i_a(t) &= -\frac{R_a}{L_a} i_a(t) - \frac{K_a}{L_a} \omega(t) + \frac{1}{L_a} u_a(t) \\
 \dot{i}_a(t) &= -\frac{1}{C} i_a(t) + \frac{1}{C} i(t) \\
 i(t) &= -\frac{1}{L} u_a(t) + \frac{E}{L} \mu(t)
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

où  $\omega$  est la vitesse de rotation du moteur,  $T_L$  couple de charge,  $i_a$  et  $u_a$  courant et tension d'induit,  $i$  courant traversant l'inductance  $L$  et  $\mu$  le rapport cyclique.  $K_a$  constante du moteur,  $R_a$  et  $L_a$  résistance et inductance d'induit,  $J$  moment d'inertie,  $f$  frottement visqueux,  $L$  et  $C$  inductance et condensateur du hacheur.

Le système (2.25) correspond à la forme (2.24) où  $x_1 = \omega$  est la sortie,  $x_2 = i_a$ ,  $x_3 = u_a$ ,  $x_4 = i$  et  $u = \mu(t)$  est l'entrée de commande comme suit

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \frac{K_a}{J} x_2 + f_1(x_1) \\
 \dot{x}_2 &= \frac{1}{L_a} x_3 + f_2(x_1, x_2) \\
 \dot{x}_3 &= \frac{1}{C} x_4 + f_3(x_2) \\
 \dot{x}_4 &= \frac{E}{L} u + f_4(x_3)
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

**Exemple 2.2.** Le modèle mathématique du système correspondant au moteur synchrone PMSM dans le référentiel tournant  $(d, q)$  est donné par le système d'équations suivant [25, 26] :

$$\begin{aligned}
 \dot{i}_d &= -\frac{R_s}{L_s} i_d + P \Omega i_q + \frac{1}{L_s} u_d \\
 \dot{\Omega} &= \frac{P K_e}{J} i_q - \frac{f}{J} \Omega - \frac{1}{J} T_L \\
 \dot{i}_q &= -\frac{R_s}{L_s} i_q - P \Omega i_d - \frac{p K_e}{L_s} \Omega + \frac{1}{L_s} u_q
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

où  $\Omega$  est la vitesse de rotation du moteur,  $u_d$  et  $u_q$  tensions statoriques,  $i_d$  et  $i_q$  courants statoriques,  $P$  nombre de paires de pôles et  $T_L$  le couple de charge. La constante de flux rotorique  $K_e$  reliée au flux de l'aimant permanent  $\phi_f$  par  $K_e = \sqrt{3/2} \phi_f$ ,  $R_s$  et  $L_s$  résistance et inductance

statoriques,  $J$  moment d'inertie et  $f$  le frottement visqueux.

Le système (2.27) correspond à l'interconnexion de deux sous systèmes. Le premier d'ordre un à pour entrée  $u_d$  et  $i_d$  comme sortie. Le deuxième, ayant la forme (2.24), à pour entrée  $u_q$  et  $\Omega$  comme sortie où pour la notation  $x_1 = \Omega$ ,  $x_2 = i_q$  et  $u = u_q$  on a

$$\dot{i}_d = -\frac{R_s}{L_s} i_d + \frac{1}{L_s} u_d + p x_1 x_2 \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{p K_e}{J} x_2 + f_1(x_1) \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{L_s} u + f_2(x_1, x_2, i_d) \end{aligned} \quad (2.29)$$

**Exemple 2.3.** Le modèle mathématique du système correspondant au moteur asynchrone à cage dans le référentiel tournant  $(d, q)$  avec orientation du flux rotorique est donné par le système d'équations suivant [82] :

$$\begin{aligned} \frac{d \Omega}{dt} &= [P M / (J L_r)] \phi_{dr} i_{qs} - (f/J) \Omega - (1/J) T_L \\ \frac{d i_{qs}}{dt} &= - [1 / (L_s \sigma)] [R_s + M^2 R_r / L_r^2] i_{qs} - [M / (L_r L_s \sigma)] P \Omega \phi_{dr} \\ &\quad - P \Omega i_{ds} - [M R_r / (L_r \phi_{dr})] i_{qs} i_{ds} + [1 / (L_s \sigma)] v_{qs} \\ \frac{d \phi_{dr}}{dt} &= (M R_r / L_r) i_{ds} - (R_r / L_r) \phi_{dr} \\ \frac{d i_{ds}}{dt} &= - [1 / (L_s \sigma)] [R_s + M^2 R_r / L_r^2] i_{ds} + [M R_r / (L_r^2 L_s \sigma)] \phi_{dr} \\ &\quad + P \Omega i_{qs} + [M R_r / (L_r \phi_{dr})] i_{qs}^2 + [1 / (L_s \sigma)] v_{ds} \end{aligned} \quad (2.30)$$

où  $\Omega$  est la vitesse de rotation du moteur,  $v_{ds}$  et  $v_{qs}$  tensions statoriques,  $i_{ds}$  et  $i_{qs}$  courants statoriques,  $\phi_{dr}$  flux rotorique,  $P$  nombre de paires de pôles et  $T_L$  le couple de charge.  $R_s$  et  $L_s$  résistance et l'inductance statoriques,  $R_r$  et  $L_r$  résistance et l'inductance rotoriques,  $J$  moment d'inertie,  $f$  frottement visqueux,  $M$  inductance mutuelle cyclique,  $\sigma = 1 - M^2 / (L_s L_r)$  coefficient de dispersion de Blondel.

Le système (2.27) correspondent à l'interconnexion de deux sous systèmes ayant chacun la forme (2.24). Le premier à pour entrée  $v_{qs}$  et  $\Omega$  comme sortie, alors que l'entrée du second est

$v_{ds}$  et sa sortie  $\phi_{dr}$  où pour la notation  $x_{1,1} = \Omega$ ,  $x_{2,1} = i_{qs}$ ,  $x_{1,2} = \phi_{dr}$ ,  $x_{2,2} = i_{ds}$  on a

$$\begin{aligned}\frac{d x_{1,1}}{dt} &= g_{1,1}(x_{1,2}) x_{2,1} + f_{1,1}(x_{1,1}) \\ \frac{d x_{2,1}}{dt} &= [1/(L_s \sigma)] v_{qs} + f_{2,1}(x_{1,1}, x_{2,1}, x_{1,2}, x_{2,2})\end{aligned}\tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}\frac{d x_{1,2}}{dt} &= (M R_r/L_r) x_{2,2} + f_{1,2}(x_{1,2}) \\ \frac{d x_{2,2}}{dt} &= [1/(L_s \sigma)] v_{ds} + f_{2,2}(x_{1,2}, x_{2,2}, x_{1,1}, x_{2,1})\end{aligned}\tag{2.32}$$

Le système ayant la forme *Strict Feedback Form* (2.23) correspond à la cascade de deux sous systèmes. En effet,  $u$  est l'entrée de commande réelle pour le système (2.23),  $y = x_1$  étant la sortie non réelle du sous système  $x$  et est elle même l'entrée de commande non réelle du sous système  $\zeta$ . En effet, l'approche *Backstepping* considère qu'il existe une loi de commande  $y = \alpha(\zeta)$  et une fonction de Lyapounov  $V(\zeta)$  pour lesquelles le sous système  $\zeta$  est globalement exponentiellement stable. Si cette condition est satisfaite, alors l'approche *Backstepping* est appliquée au sous système  $x$ , ayant la forme triangulaire inférieure, où la référence  $y_{ref}$  n'est autre que la loi de commande pour le sous système  $\zeta$ , i.e.  $y_{ref} = \alpha(\zeta)$ . Autrement dit, l'approche *Backstepping* n'est applicable qu'au sous système  $x$  de la forme *Strict Feedback Form* (2.23) ou bien à la forme *Strict Feedback Form* (2.24). Dans cette dernière forme,  $u$  est l'entrée de commande réelle et  $y = x_1$  est la sortie réelle et où la référence  $y_{ref}$  est choisie librement par l'utilisateur.

## 2.4 Discussion sur le signal de référence

L'objectif dans cette section est de discuter les conditions que les non linéarités du système et en particulier la référence doivent satisfaire pour que la loi de commande par retour d'état soit valide et ce dans le cas d'un problème de poursuite de trajectoire. Cette discussion portera sur les formes normales canoniques et la forme *Strict Normal Form*. On considérera successivement les deux cas : le sous système  $x$  est de premier ordre, le sous système  $x$  est d'ordre  $n$ .

### 2.4.1 Cas où le sous système $x$ est du premier ordre

Soit le système non linéaire, correspondant à l'interconnexion des deux sous systèmes (2.33) et (2.34), de forme générale suivante

$$\dot{\zeta} = \Gamma(\zeta, y, v) \quad (2.33)$$

$$\dot{y} = g(y, \zeta) u + f(y, \zeta) \quad (2.34)$$

où  $u \in \mathfrak{R}$  et  $y \in \mathfrak{R}$  sont l'entrée et la sortie du sous système de premier ordre (2.34) et les fonctions scalaires  $g(y, \zeta)$  et  $f(y, \zeta)$  sont des fonctions non linéaires dépendantes de la sortie  $y$  et de l'état  $\zeta \in \mathfrak{R}^p$  du sous système (2.33) et où  $\forall y \in \mathfrak{R}$  et  $\zeta \in \mathfrak{R}^p$  on a  $g(y, \zeta) \neq 0$ . Remarquer que le sous système  $\zeta$  (2.33) est donné sous une forme générale. En effet, il est clair que pour une forme particulière du sous système  $\zeta$  on retrouve l'une des formes présentées précédemment. D'autre part, si les fonctions scalaires  $g$  et  $f$  sont des constantes, i.e.  $g(y, \zeta) = b \neq 0$  et  $f(y, \zeta) = a$ , alors le sous système (2.34) est un système linéaire du premier ordre.

Comme expliqué dans la section précédente, on s'intéresse à la commande du sous système (2.34). Plus exactement et afin d'étudier la problématique de la référence, on se propose de concevoir la loi de commande  $u$  pour le sous système (2.34) de manière à réaliser la poursuite de trajectoire, i.e.  $y \rightarrow y_{ref}$ , où  $y_{ref}$  est une référence variable. Il faut noter que la condition  $g(y, \zeta) \neq 0$  est nécessaire pour assurer la contrôlabilité du système et que les fonctions scalaires  $g(y, \zeta)$  et  $f(y, \zeta)$  doivent être de classe  $C^1$  pour assurer l'existence et l'unicité de la solution (voir Théorème 3.1 et Lemme 3.1 dans [58]). Mise à part ces deux conditions, aucune autre condition n'est imposée pour l'instant ; ni au signal de référence  $y_{ref}$  ni aux fonctions scalaires  $g(y, \zeta)$  et  $f(y, \zeta)$ .

#### 2.4.1.1 Méthode de linéarisation

La conception de la loi de commande sera réalisée en utilisant la méthode de linéarisation [58]. La loi de commande obtenue sera discutée et analysée afin de tirer les conditions qui doivent être satisfaites pour qu'elle soit valide. Afin de réaliser la poursuite de trajectoire

$y \rightarrow y_{ref}$ , considérons donc l'erreur de poursuite

$$e = y - y_{ref} \quad (2.35)$$

dérivons l'erreur  $e$ , par rapport au temps, pour avoir

$$\dot{e} = \dot{y} - \dot{y}_{ref} \quad (2.36)$$

et en utilisant (2.34), la dynamique de cette erreur devient

$$\dot{e} = g(y, \zeta) u + f(y, \zeta) - \dot{y}_{ref} \quad (2.37)$$

Considérons maintenant la fonction de Lyapounov quadratique

$$V = \frac{1}{2} e^2 \quad (2.38)$$

dérivons, par rapport au temps, cette fonction de Lyapounov pour obtenir

$$\dot{V} = e \dot{e} \quad (2.39)$$

en utilisant l'équation de la dynamique de l'erreur de poursuite (2.37), cette dérivée devient

$$\dot{V} = e [g(y, \zeta) u + f(y, \zeta) - \dot{y}_{ref}] \quad (2.40)$$

De cette dernière équation il est facile de déterminer la loi de commande  $u$ . En effet, pour obtenir une convergence globale et exponentielle de l'erreur de poursuite vers zéro, il suffit de prendre la loi de commande  $u$  comme suit

$$u = \frac{1}{g(y, \zeta)} [-f(y, \zeta) - k e + \dot{y}_{ref}] \quad (2.41)$$

où la constante  $k > 0$  est le gain de réglage. En remplaçant  $e$  par sa définition (2.35), la loi de commande  $u$  devient finalement

$$u = \frac{1}{g(y, \zeta)} [-f(y, \zeta) - k y + k y_{ref} + \dot{y}_{ref}] \quad (2.42)$$

En utilisant donc la loi de commande (2.42), la dérivée de la fonction de Lyapounov (2.40) est telle que

$$\dot{V} = -k e^2 \quad (2.43)$$

ou de manière équivalente en utilisant (2.38)

$$\dot{V} = -2 k V \quad (2.44)$$

L'équation (2.44) montre que la fonction de Lyapounov  $V$  converge globalement et exponentiellement vers zéro. Par conséquent, l'erreur de poursuite  $e$  converge aussi globalement et exponentiellement vers zéro, avec un taux de convergence fixé par le gain de réglage  $k$ , selon l'équation suivante :

$$\|e(t)\| = \|e(0)\| e^{-k t} \quad (2.45)$$

La convergence globale et exponentielle de la fonction de Lyapounov  $V$  implique que l'erreur de poursuite  $e \in L_\infty$ . Plus encore, en intégrant (2.44) on démontre que l'erreur de poursuite  $e \in L_2$ . En imposant la condition de bornitude au signal de référence  $y_{ref}$ , i.e.  $y_{ref} \in L_\infty$ , avec le fait que  $e \in L_\infty$ , alors la sortie  $y$  est bornée, i.e.  $y \in L_\infty$ .

Ce résultat à l'air d'être parfait, mais en réalité ce n'est pas le cas. A bien regarder, la loi de commande  $u$  (2.42) obtenue par la méthode de linéarisation montre quelques limites. En effet, pour que cette loi soit valable il faut qu'elle soit continue et bornée. De ce fait, on impose des conditions aux fonctions scalaires  $g(y, \zeta)$  et  $f(y, \zeta)$  mais aussi au signal de référence  $y_{ref}$  et sa dérivée  $\dot{y}_{ref}$ . Plus exactement et en plus des exigences de départ, la loi de commande  $u$  (2.42) est valable si et seulement si :

- (i) Les fonctions scalaires  $g(y, \zeta)$  et  $f(y, \zeta)$  sont bornées.
- (ii) La référence  $y_{ref}$  est continue, bornée et dérivable.
- (iii) La première dérivée  $\dot{y}_{ref}$  est continue, bornée et disponible analytiquement.

Pour le sous système du premier ordre (2.34), étudié dans cette section, on ne peut pas discuter plus que ça les deux fonctions  $g(y, \zeta)$  et  $f(y, \zeta)$ , on s'intéresse donc au signal de référence et sa dérivée.

Si le signal de référence  $y_{ref}$  est généré par l'utilisateur de sorte qu'il soit continu, borné et que sa forme soit simple, dans le sens que sa dérivée  $\dot{y}_{ref}$  peut être obtenue analytiquement et qu'elle soit continue et bornée, alors le problème ne se pose pas. Ce cas correspond par exemple à une référence sinusoïdale, laquelle est continue, bornée et où sa dérivée est disponible continue et bornée. En effet, pour une référence sinusoïdale la sortie  $y$  tend, après le régime transitoire, exactement vers la référence  $y_{ref}$  avec une erreur nulle. Il est à noter ici que, dans un cas pratique, on n'utilise pas une référence de forme sinusoïdale, mais plutôt une forme carrée ou bien trapézoïdale. Pour ces deux derniers cas on a un problème, puisque les dérivées premières de ces deux formes ne sont pas continues.

Si par contre le signal de référence  $y_{ref}$  dépend d'un autre système, par exemple les formes (2.15, 2.18, 2.23), ou bien sa dérivée n'admet pas une forme analytique (disponibilité), ou encore sa dérivée n'est pas continue ou n'est pas bornée (cas d'une référence carrée), alors on ne peut pas implémenter la loi de commande (2.42) obtenue par linéarisation. Dans ce cas de figure et afin de satisfaire aux conditions de validité de la loi de commande (2.42), on peut utiliser le filtre du premier ordre

$$\dot{\psi}_{ref} = -\omega (\psi_{ref} - y_{ref}) \quad (2.46)$$

pour générer la référence filtrée  $\psi_{ref} \approx y_{ref}$  et la première dérivée de la référence filtrée  $\dot{\psi}_{ref} \approx \dot{y}_{ref}$ . En effet, si  $y_{ref}$  est bornée alors la référence filtrée  $\psi_{ref}$  est continue, bornée et sa dérivée  $\dot{\psi}_{ref}$  est disponible, continue et bornée. On voit que dans ce cas les conditions de validité de la commande (2.42) obtenue par linéarisation sont satisfaites. Le paramètre  $\omega$  de l'équation caractéristique  $s + \omega = 0$  du filtre (2.46) est choisi pour spécifier la bande passante et la réponse transitoire. Le paramètre  $\omega$  du filtre doit être assez grand pour que l'approximation soit suffisamment bonne. On utilise donc les signaux  $\psi_{ref}$  et  $\dot{\psi}_{ref}$  dans la loi de commande (2.42) à la place des signaux  $y_{ref}$  et  $\dot{y}_{ref}$  comme suit :

$$u = \frac{1}{g(y, \zeta)} [-f(y, \zeta) - k y + k \psi_{ref} + \dot{\psi}_{ref}] \quad (2.47)$$

Remarquer que dans ce cas, la loi de commande (2.47) n'est qu'une approximation de la loi (2.42). Autrement dit, après le régime transitoire la sortie  $y$  suivra exactement  $\psi_{ref}$  et non

pas  $y_{ref}$ . D'autre part, l'implémentation du filtre (2.46) pose un autre problème du fait que pratiquement, implémentation temps réel, on ne peut pas prendre le paramètre  $\omega$  du filtre (2.46) infiniment grand, i.e. constante de temps du filtre  $\tau = 1/\omega$  infiniment petite. Ceci est dû au fait que la bande passante du filtre, implémentation numérique, est limitée par la fréquence d'exécution. En plus, il faut noter que  $\omega$  constitue un deuxième paramètre de réglage.

### 2.4.1.2 Modification de la méthode de linéarisation

Si les conditions de disponibilité, continuité et bornitude sur la dérivée  $\dot{y}_{ref}$  du signal de référence ne peuvent pas être satisfaites et que l'utilisation du filtre (2.46) n'est pas satisfaisante, alors il est judicieux de penser à modifier l'analyse donnée précédemment. En regardant bien la dérivée de la fonction de Lyapounov (2.40), une idée très simple peut jaillir. L'idée est de ne pas inclure la dérivée du signal de référence  $\dot{y}_{ref}$  dans la loi de commande (2.42). Plus exactement, on opte pour la loi de commande suivante :

$$u = \frac{1}{g(y, \zeta)} [-f(y, \zeta) - k e] = \frac{1}{g(y, \zeta)} [-f(y, \zeta) - k y + k y_{ref}] \quad (2.48)$$

dans ce cas, la dérivée de la fonction de Lyapounov (2.40) devient :

$$\dot{V} = -k e^2 - e \dot{y}_{ref} \quad (2.49)$$

On impose au signal de référence  $y_{ref}$  d'avoir un taux de variation maximal  $c$  fini, i.e.  $|\dot{y}_{ref}| \leq c$ , voir Définition 2.3. Cette condition est toujours valable, puisque le signal de référence  $y_{ref}$  est continu et borné. Dans ce cas, on relaxe les conditions de disponibilité et de continuité sur la dérivée  $\dot{y}_{ref}$ .

**Définition 2.3** (Taux de variation maximal). S'il existe une constante finie  $c > 0$ , non nécessairement connue, telle que la dérivée temporelle d'un signal  $h(t)$  vérifie la condition

$$|\dot{h}(t)| \leq c \quad \forall t \geq 0$$

alors la constante  $c$  est le taux de variation maximal du signal  $h(t)$ .

En utilisant donc la nouvelle condition  $|\dot{y}_{ref}| \leq c$  avec l'inégalité de Young, on peut réécrire

(2.49) comme suit :

$$\dot{V} \leq -\left(k - \frac{\varepsilon}{2}\right) e^2 + \frac{1}{2\varepsilon} c^2 \quad (2.50)$$

et en utilisant la fonction de Lyapounov (2.38)

$$\dot{V} \leq -2\left(k - \frac{\varepsilon}{2}\right) V + \frac{1}{2\varepsilon} c^2 \quad (2.51)$$

Cette dernière équation montre que si l'on choisit  $\varepsilon \gg \frac{c^2}{2}$  et  $k > \frac{\varepsilon}{2}$  ou bien en combinant les deux  $k \gg \frac{c^2}{4}$ , alors la fonction de Lyapounov  $V$  converge globalement et exponentiellement dans une boule de centre zéro et dont le rayon peut être rendu aussi petit que désiré. Par conséquent, l'erreur de poursuite  $e$  converge aussi globalement et exponentiellement dans une boule de centre zéro et dont le rayon peut être rendu aussi petit que désiré en choisissant le gain de réglage  $k$  suffisamment grand. Le gain  $k$  est choisi assez grand car on suppose que le taux de variation maximal  $c$  est inconnu. Si par contre la constante  $c$  est connue, alors le choix du gain  $k$  est simple. L'erreur de poursuite  $e$  évolue donc selon l'équation suivante

$$\|e(t)\|^2 = \left[ \|e(0)\|^2 - \frac{c^2}{2\varepsilon\left(k - \frac{\varepsilon}{2}\right)} \right] e^{-2\left(k - \frac{\varepsilon}{2}\right)t} + \frac{c^2}{2\varepsilon\left(k - \frac{\varepsilon}{2}\right)} \quad (2.52)$$

La convergence globale et exponentielle dans une boule de la fonction de Lyapounov  $V$  implique que l'erreur de poursuite  $e \in L_\infty$ . En imposant toujours la condition de bornitude au signal de référence  $y_{ref} \in L_\infty$  avec le fait que  $e \in L_\infty$ , alors la sortie  $y$  est bornée  $y \in L_\infty$ .

Dans ce cas et en plus des exigences de départ, la loi de commande (2.48) est valable si et seulement si :

- (i) Les fonctions scalaires  $g(y, \zeta)$  et  $f(y, \zeta)$  sont bornées.
- (ii) La référence  $y_{ref}$  est continue, bornée et possède un taux de variation maximal inconnu mais fini.

En comparant les deux lois de commande (2.42) et (2.48), il est clair que les conditions de validité sur le signal de référence  $y_{ref}$  concernant la commande (2.48) sont moins contraignantes que celles concernant (2.42). D'autre part, la loi de commande (2.48) est plus simple à implémenter que la loi de commande avec filtre (2.47, 2.46).

Dans cette section, nous avons discuté les conditions de validité imposées à la référence  $y_{ref}$  pour le système (2.33, 2.34) où le sous système  $x$  est de premier ordre. Dans la section suivante, on présentera la même discussion dans le cas où le sous système  $x$  est d'ordre  $n > 1$ .

### 2.4.2 Cas où le sous système $x$ est d'ordre $n$

Soit le système non linéaire, correspondant à l'interconnexion des deux sous systèmes (2.53) et (2.54), de forme générale suivante

$$\dot{\zeta} = \Gamma(\zeta, y, v) \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} & i &= 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= g_n(x, \zeta) u + f_n(x, \zeta) \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$y = x_1$$

où  $u \in \mathfrak{R}$  et  $y \in \mathfrak{R}$  sont l'entrée et la sortie du sous système de premier ordre (2.54) et les fonctions scalaires  $g_n(x, \zeta)$  et  $f_n(x, \zeta)$  sont des fonctions non linéaires dépendantes des états  $x \in \mathfrak{R}^n$  et  $\zeta \in \mathfrak{R}^p$  des sous systèmes (2.54) et (2.53) respectivement et où  $\forall x \in \mathfrak{R}^n$  et  $\zeta \in \mathfrak{R}^p$  on a  $g_n(x, \zeta) \neq 0$ . Comme indiqué dans la Section 2.4.1, le sous système  $\zeta$  (2.53) est donné sous une forme générale. En effet, il est clair que pour une forme particulière du sous système  $\zeta$  on retrouve l'une des formes (2.7), (2.12) où bien (2.15) présentées précédemment. D'autre part, si les fonctions scalaires  $g_n(x, \zeta)$  et  $f_n(x, \zeta)$  sont des constantes, i.e.  $g_n(x, \zeta) = b \neq 0$  et  $f_n(x, \zeta) = a$ , alors le sous système (2.54) est un système linéaire d'ordre  $n$ .

Comme dans la section précédente, on s'intéresse à la commande du sous système (2.54). Plus exactement et afin d'étudier la problématique de la référence, on se propose de concevoir la loi de commande  $u$  pour le sous système (2.54) de manière à réaliser la poursuite de trajectoire, i.e.  $y \rightarrow y_{ref}$ , où  $y_{ref}$  est une référence variable. Il faut noter que la condition  $g_n(x, \zeta) \neq 0$  est nécessaire pour assurer la contrôlabilité du système et que les fonctions scalaires  $g_n(x, \zeta)$  et  $f_n(x, \zeta)$  doivent être de classe  $C^1$ . Mise à part ces deux conditions, aucune autre condition n'est imposée pour l'instant ; ni au signal de référence  $y_{ref}$  ni aux fonctions scalaires  $g_n(x, \zeta)$  et  $f_n(x, \zeta)$ .

Dans cette section, la conception de la loi de commande  $u$  sera réalisée de deux manières différentes. Dans la première conception, on utilisera une combinaison entre la méthode de linéarisation et la méthode de placement de pôles [58]. Dans la deuxième conception, on utilisera l'approche *Backstepping*. Ces méthodes seront discutées pour tirer des conclusions. Les lois de commande obtenues seront discutées et analysées afin de tirer les conditions qui doivent être satisfaites pour qu'elles soient valables.

### 2.4.2.1 Placement de pôles et linéarisation

Dans cette section, la conception de la loi de commande sera réalisée en deux étapes. La première étape consiste à réaliser un placement de pôles, alors que la deuxième étape consiste à réaliser une commande par linéarisation. Afin de réaliser ces deux étapes, le sous système  $x$  (2.54) est scindé en deux sous systèmes correspondants à la partie linéaire et non linéaire respectivement. Afin de séparer ces deux parties on réalise le changement de variable suivant : pour  $i = 1, \dots, n - 1$   $z_i = x_i$  tel que :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= x_n \end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\dot{x}_n = g_n(x_n, z_{n-1}, \dots, z_1, \zeta) u + f_n(x_n, z_{n-1}, \dots, z_1, \zeta) \tag{2.56}$$

Le sous système linéaire d'ordre  $n - 1$  (2.55) a pour sortie réelle  $y = z_1$  et pour entrée  $x_n$ . Noter que l'entrée de commande  $x_n$  n'est pas une entrée réelle (intermédiaire), mais c'est la sortie du sous système (2.56). Le sous système non linéaire du premier ordre (2.56), tel que celui étudié dans la Section 2.4.1, a pour sortie  $x_n$  et pour entrée de commande réelle  $u$ . Noter aussi que la sortie  $x_n$  n'est pas une sortie réelle (intermédiaire). Il est clair que les deux sous systèmes (2.55) et (2.56) sont en cascade et connectés entre eux par la paire (entrée intermédiaire, sortie intermédiaire) correspondant à l'état  $x_n$ .

### 2.4.2.1.1 Placement de pôles

Le sous système linéaire (2.55) peut être récrit sous la forme matricielle suivante

$$\dot{z} = A_c z + B_c x_n \quad (2.57)$$

où la matrice  $A_c \in \mathfrak{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  et le vecteur  $B_c \in \mathfrak{R}^{n-1}$  sont tels que

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Le système linéaire (2.57) est sous la forme canonique commandable. De ce fait, la paire  $(A_c, B_c)$  est contrôlable et donc la loi de commande  $x_n = -Kz + v$  permet de commander le système (2.57). Le vecteur  $K^T \in \mathfrak{R}^{n-1}$  est choisi tel que la matrice  $A_c - B_c K$  est Hurwitz et où la quantité  $v$  reste à déterminer. L'objectif étant de réaliser la poursuite de trajectoire  $y \rightarrow y_{ref}$  du sous système linéaire (2.57) ayant un ordre  $n - 1$ , on considère donc le vecteur erreur de poursuite  $e \in \mathfrak{R}^{n-1}$  suivant [58] :

$$e = z - z_{ref} \quad (2.58)$$

où le vecteur  $z_{ref}$  est comme suit :

$$z_{ref} = \begin{bmatrix} y_{ref} \\ y_{ref}^{(1)} \\ \vdots \\ y_{ref}^{(n-2)} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Dérivons l'erreur de poursuite  $e$ , par rapport au temps, pour avoir la dynamique

$$\dot{e} = \dot{z} - \dot{z}_{ref} \quad (2.60)$$

utilisons (2.57), pour obtenir

$$\dot{e} = A_c z + B_c x_n - \dot{z}_{ref} \quad (2.61)$$

et en utilisant la loi de commande  $x_n = -Kz + v$ , il vient que :

$$\dot{e} = [A_c - B_c K] z + B_c v - \dot{z}_{ref} \quad (2.62)$$

remplaçons  $z$  à partir de (2.58), pour trouver

$$\dot{e} = [A_c - B_c K] e + B_c v + [A_c - B_c K] z_{ref} - \dot{z}_{ref} \quad (2.63)$$

si en plus on impose que

$$B_c v + [A_c - B_c K] z_{ref} - \dot{z}_{ref} \equiv 0 \quad (2.64)$$

alors la dynamique de l'erreur  $e$  devient

$$\dot{e} = [A_c - B_c K] e \quad (2.65)$$

L'équation (2.65) montre clairement que si la matrice  $[A_c - B_c K]$  est Hurwitz, alors l'erreur de poursuite  $e$  converge globalement et exponentiellement vers zéro. Cette convergence peut être démontrée en utilisant la fonction de Lyapounov

$$V = e^T P e \quad (2.66)$$

laquelle après dérivation donne

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -e^T Q e \\ P [A_c - B_c K] + [A_c - B_c K]^T P &= -Q \end{aligned} \quad (2.67)$$

où  $P [A_c - B_c K] + [A_c - B_c K]^T P = -Q$  est l'équation de Lyapounov où les matrices  $P$  et  $Q$  sont définies positives.

D'autre part, l'équation (2.64) permet de déterminer la quantité  $v$  apparaissant dans la loi de commande linéaire  $x_n = -Kz + v$ . En effet, puisque la matrice  $[A_c - B_c K]$  est Hurwitz alors elle est inversible. Ce fait permet de tirer  $z_{ref}$  à partir de l'équation (2.64) comme suit :

$$z_{ref} = -[A_c - B_c K]^{-1} B_c v + [A_c - B_c K]^{-1} \dot{z}_{ref} \quad (2.68)$$

Du fait que  $y = z_1 = C z$  et donc  $y_{ref} = C z_{ref}$ , où  $C = [1, 0, \dots, 0]$  et  $C^T \in \mathfrak{R}^{n-1}$ , on obtient :

$$y_{ref} = C z_{ref} = -C [A_c - B_c K]^{-1} B_c v + C [A_c - B_c K]^{-1} \dot{z}_{ref} \quad (2.69)$$

De cette dernière relation on détermine  $v$ , laquelle est donc donnée par

$$v = -\frac{1}{C [A_c - B_c K]^{-1} B_c} (y_{ref} - C [A_c - B_c K]^{-1} \dot{z}_{ref}) \quad (2.70)$$

Donc la loi de commande permettant de réaliser la poursuite de trajectoire  $y \rightarrow y_{ref}$ , pour le sous système linéaire (2.57), est finalement donnée par :

$$x_n = -Kz - \frac{1}{C [A_c - B_c K]^{-1} B_c} (y_{ref} - C [A_c - B_c K]^{-1} \dot{z}_{ref}) \quad (2.71)$$

Pour que la loi de commande (2.71) soit valable il faut imposer des conditions sur le signal de référence  $y_{ref}$ , sur le vecteur  $z_{ref}$ , sur la dérivée  $\dot{z}_{ref}$  et plus encore il faut montrer que l'état  $z$  est borné. Le vecteur  $z_{ref}$  et sa dérivée  $\dot{z}_{ref}$  étant en fonction du signal de référence  $y_{ref}$ , équation (2.59), alors ces conditions sont imposées au signal de référence  $y_{ref}$ . En effet,  $y_{ref}$  doit être continu et borné alors que ses dérivées  $y_{ref}^{(i)}$ , pour  $i = 1, \dots, n - 1$ , doivent être analytiques, continues et bornées. Plus exactement, le signal de référence doit être tel que  $y_{ref} \in C^{n-1}$ . D'autre part, la convergence globale et exponentielle de la fonction de Lyapounov  $V$  implique que l'erreur de poursuite  $e \in L_\infty$  et plus encore en intégrant  $\dot{V} = -e^T Q e$  on démontre que  $e \in L_2$ . Les conditions de bornitude sur la référence  $y_{ref}$  et ces dérivées  $y_{ref}^{(i)}$  implique que  $z_{ref} \in L_\infty$ . Du fait que  $z_{ref} \in L_\infty$  et que  $e \in L_\infty$ , on conclut que les états  $z_i$  pour  $i = 1, \dots, n - 1$  sont bornés,  $z_i \in L_\infty$ , et en particulier  $y = z_1 \in L_\infty$ .

Comme expliqué ci-haut,  $x_n$  n'est pas une entrée réelle mais une entrée intermédiaire pour le sous système linéaire (2.55) et elle est aussi la sortie intermédiaire du sous système non linéaire (2.56). Dans ce cas, la loi de commande (2.71) devient une simple référence pour la sortie intermédiaire du sous système (2.56) et donc sera notée  $x_{n,ref}$ , i.e.

$$x_{n,ref} = -Kz - \frac{1}{C [A_c - B_c K]^{-1} B_c} (y_{ref} - C [A_c - B_c K]^{-1} \dot{z}_{ref}) \quad (2.72)$$

### 2.4.2.1.2 Linéarisation

Dans cette deuxième étape, l'objectif est de réaliser la commande du sous système non linéaire (2.56). Plus exactement, on cherche à déterminer la loi de commande  $u$  permettant de réaliser la poursuite de trajectoire  $x_n \rightarrow x_{n,ref}$ . Considérons donc l'erreur de poursuite  $e_n = x_n - x_{n,ref}$  et la fonction de Lyapounov  $V_n = \frac{1}{2} e_n^2$ . En suivant la même procédure que celle dans la section 2.4.1, on obtient la loi de commande  $u$  suivante

$$u = \frac{1}{g_n(x_n, z_{n-1}, \dots, z_1, \zeta)} [-f_n(x_n, z_{n-1}, \dots, z_1, \zeta) + \dot{x}_{n,ref} - k x_n + k x_{n,ref}] \quad (2.73)$$

où  $k > 0$  est le gain de réglage.

On voit que  $x_n$ ,  $x_{n,ref}$  et  $\dot{x}_{n,ref}$  apparaissent dans la loi de commande  $u$ . Dans ce cas, les conditions sur la référence  $y_{ref}$  deviennent comme suit : le signal  $y_{ref}$  doit être continu, borné et doit admettre des dérivées  $y_{ref}^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , analytiques, continues et bornées. Plus exactement, le signal de référence doit être tel que  $y_{ref} \in C^n$ . D'autre part, la convergence globale et exponentielle de la fonction de Lyapounov  $V_n$  implique que l'erreur de poursuite  $e_n \in L_\infty$  et plus encore en intégrant  $\dot{V}_n$  on démontre que  $e_n \in L_2$ . Du fait que la référence  $x_{n,ref} \in L_\infty$  et que  $e_n \in L_\infty$ , on conclut que l'état  $x_n \in L_\infty$ .

### 2.4.2.1.3 Commande finale et discussion

En combinant (2.72) et (2.73), la loi de commande finale par placement de pôles et linéarisation pour le système non linéaire (2.53, 2.54) est donc donnée après arrangement comme suit :

$$u = \frac{1}{g_n(x, \zeta)} \left[ -f_n(x, \zeta) + H_1 x + \frac{1}{C [A_c - B_c K]^{-1} B_c} \{-k y_{ref} + H_2 \bar{y}_{ref}\} \right] \quad (2.74)$$

où

$$\begin{aligned} T &= C [A_c - B_c K]^{-1} & T^T &\in R^{n-1} \\ H_1 &= -k [K, 1] - [0, K] & H_1^T &\in R^n \\ H_2 &= [k T, 0] + [-1, T] & H_2^T &\in R^n \\ \bar{y}_{ref} &= [y_{ref}^{(1)}, y_{ref}^{(2)}, \dots, y_{ref}^{(n)}]^T \end{aligned}$$

Comme discuté précédemment et en plus des exigences de départ, la loi de commande  $u$  (2.74) est valable si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) Les fonctions scalaires  $g_n(x, \zeta)$  et  $f_n(x, \zeta)$  sont bornées.
- (ii) La référence  $y_{ref}$  est continue, bornée et  $n$  fois dérivable.
- (iii) Ses dérivées  $y_{ref}^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont continues, bornées et disponibles analytiquement.

Comme dans la section 2.4.1, il n'y a pas lieu de discuter plus que ça les deux fonctions scalaires  $g_n(x, \zeta)$  et  $f_n(x, \zeta)$ . Par contre, on peut discuter le signal de référence et ses dérivées. Si  $y_{ref}$  est généré par l'utilisateur de sorte que sa forme est simple, dans le sens que l'on peut obtenir analytiquement les dérivées de  $y_{ref}$  jusqu'à l'ordre  $n$  et que les conditions citées ci-haut sont satisfaites, alors le problème ne se pose pas. Ce cas correspond par exemple à une référence de type sinusoïdale. En effet, pour ce type de référence la sortie  $y$  tend, après le régime transitoire, vers la référence  $y_{ref}$  avec une erreur de poursuite nulle.

Si par contre le signal de référence  $y_{ref}$  dépend d'un autre système, par exemple les formes (2.15, 2.18, 2.23), ou bien ses dérivées  $y_{ref}^{(i)}$  jusqu'à l'ordre  $n$  n'admettent pas une forme analytique (disponibilité) ou encore ne sont pas continues ou bornées (cas d'une référence carrée), alors on ne peut pas implémenter la loi de commande (2.74). Dans ce cas de figure et afin de satisfaire aux conditions de validité, on peut utiliser le filtre d'ordre  $n$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{i,ref} &= \psi_{i+1,ref} & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{\psi}_{n,ref} &= -a_1 (\psi_{1,ref} - y_{ref}) - \sum_{i=2}^n a_i \psi_{i,ref} \end{aligned} \quad (2.75)$$

pour générer la référence filtrée  $\psi_{1,ref} \approx y_{ref}$ , ses dérivées  $\psi_{i+1,ref}$  pour  $i = 1, \dots, n-1$  et la  $n^{ieme}$  dérivée  $\dot{\psi}_{n,ref}$ . En effet, si  $y_{ref}$  est bornée alors la référence filtrée  $\psi_{1,ref}$  est continue, bornée et ses dérivées  $\psi_{i+1,ref}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , et  $\dot{\psi}_{n,ref}$  sont disponibles, continues et bornées.

Dans ce cas les conditions de validité pour la loi de commande (2.74) sont satisfaites. Les paramètres  $a_i$  de l'équation caractéristique  $s^n + \sum_{i=1}^n a_i s^{i-1} = 0$  du filtre (2.75) sont choisis pour spécifier la bande passante et la réponse transitoire. Les paramètres  $a_i$  doivent être choisis

convenablement pour que l'approximation soit suffisamment bonne. On utilise donc les signaux  $\psi_{i,ref}$  pour  $i = 1, \dots, n$  et  $\dot{\psi}_{n,ref}$  dans la loi de commande  $u$  (2.74) à la place des signaux  $y_{ref}$  et  $y_{ref}^{(j)}$  pour  $j = 1, \dots, n$  comme suit :

$$u = \frac{1}{g_n(x, \zeta)} \left[ -f_n(x, \zeta) + H_1 x + \frac{1}{C [A_c - B_c K]^{-1} B_c} \{-k \psi_{1,ref} + H_2 \Psi\} \right] \quad (2.76)$$

où

$$\Psi = [\psi_{2,ref}, \psi_{3,ref}, \dots, \psi_{n,ref}, \dot{\psi}_{n,ref}]^T$$

Remarquer que dans ce cas, la loi de commande (2.76) n'est qu'une approximation de la loi (2.74). Autrement dit, après le régime transitoire la sortie  $y$  suivra exactement  $\psi_{1,ref}$  et non pas  $y_{ref}$ . D'autre part, l'implémentation du filtre (2.75) pose un autre problème du fait que pratiquement, implémentation temps réel, on ne peut pas choisir les paramètres  $a_i$  infiniment grands de telle sorte que la constante de temps du filtre soit infiniment petite. Ceci est dû au fait que la bande passante du filtre est limitée par la fréquence d'exécution. En plus, il faut noter que le filtre (2.75) introduit  $n$  paramètres de réglages supplémentaires  $a_i$ .

### 2.4.3 Approche *Backstepping*

Pour le même objectif de poursuite de trajectoire  $y \rightarrow y_{ref}$ , on cherche à déterminer la loi de commande  $u$  pour le système (2.54) en utilisant l'approche *Backstepping* [63, 64]. Noter que dans la Section 2.4.2.1, nous avons utilisé la notion d'entrée et de sortie intermédiaire  $x_n$  qui relie les deux sous systèmes (2.55) et (2.56) afin de réaliser la commande par placement de pôles et linéarisation. L'approche *Backstepping* généralise cette notion d'entrée et de sortie intermédiaire à tout le système (2.54). En effet, le système (2.54) peut être vu comme une cascade de  $n - 1$  sous systèmes de premier ordre où chaque deux sous systèmes consécutifs  $(\dot{x}_i, \dot{x}_{i+1}, i = 1, \dots, n - 1)$  sont reliés par l'état du deuxième sous système, i.e.  $x_{i+1}$ , lequel état joue le rôle d'entrée et de sortie intermédiaires. A la différence de la technique utilisée dans la Section 2.4.2.1, l'approche *Backstepping* désigne la paire (entrée intermédiaire, sortie intermédiaire) par le nom *commande virtuelle* tout en introduisant une nouvelle variable dite

fonction stabilisatrice notée  $\alpha_i$ . L'approche *Backstepping* définit alors les erreurs suivantes :

$$e_i = x_i - \alpha_{i-1} \quad i = 2, \dots, n \quad (2.77)$$

où  $e_i$  est l'erreur entre la *commande virtuelle*  $x_i$  et la *fonction stabilisatrice*  $\alpha_{i-1}$ . A ces  $n - 1$  erreurs (2.77), l'approche *Backstepping* définit l'erreur de poursuite comme  $e_1 = x_1 - \alpha_0$  où  $\alpha_0$  n'est rien d'autre que la référence  $y_{ref}$ , i.e.  $\alpha_0 \equiv y_{ref}$ .

Noter qu'il existe d'autres terminologies pour désigner l'état  $x_i$  et la fonction  $\alpha_{i-1}$  pour  $i = 2, \dots, n$ . En effet, certains auteurs désignent l'état  $x_i$  par le nom *entrée virtuelle* et la fonction  $\alpha_{i-1}$  par le nom *commande virtuelle*. La fonction  $\alpha_{i-1}$  est aussi désignée par le nom *entrée synthétique*. Ce qui est important à noter ici est le fait que, la terminologie *entrée synthétique* est antérieure à l'apparition de l'approche *Backstepping* [65]. En effet, les développeurs de l'approche *Backstepping* ont repris l'idée de l'*entrée synthétique* pour développer leur approche avec une analyse complète. Dans cette thèse, on utilisera la terminologie *entrée virtuelle* pour désigner l'état  $x_i$  et la terminologie *commande virtuelle* pour désigner la fonction  $\alpha_{i-1}$  pour  $i = 2, \dots, n$  et où l'entrée de commande réelle  $u$  est notée  $\alpha_n$ .

Dans la section 2.4.2.1, la commande par placement de pôles et linéarisation est réalisée en deux étapes puisque le système (2.54) est décomposé en deux sous systèmes. Dans l'approche *Backstepping*, ce même système est décomposé en  $n$  sous systèmes de premier ordre, il faut donc réaliser  $n$  étapes successives pour déterminer la loi de commande réelle  $u$ . A chaque étape  $i$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ , l'objectif étant de déterminer la loi de commande virtuelle  $\alpha_{i-1}$  permettant de stabiliser l'erreur  $e_i$ . C'est pour cette raison que les lois de commande virtuelles  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ , sont appelées *fonctions stabilisatrices*. A la  $n^{ieme}$  et dernière étape, l'objectif est de déterminer la loi de commande réelle  $u$  permettant de stabiliser la dernière erreur  $e_n$ . Cette manière de procéder confère à l'approche *Backstepping* un caractère récursif. En effet, la loi de commande réelle  $u = \alpha_n$  dépend récursivement des commandes virtuelles  $\alpha_i$ ,  $i = n - 1, \dots, 1$ .

A chaque étape  $i$ ,  $i = 2, \dots, n$ , l'approche *Backstepping* utilise la fonction de Lyapounov  $V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} e_i^2$  où  $V_1 = \frac{1}{2} e_1^2$  est la fonction de Lyapounov pour la première étape. On dit alors que l'approche *Backstepping* construit récursivement une fonction de Lyapounov

$V \equiv V_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i^2$  pour tout le système (2.54). Cette méthode permet donc de résoudre entièrement le problème de construction d'une fonction de Lyapounov.

Afin de réaliser la conception de la loi de commande  $u$  pour le système (2.54) en utilisant l'approche *Backstepping*, on procède de la manière suivante. Commençons tout d'abord par les  $n$  erreurs définies ci-haut :

$$\begin{aligned}
 e_1 &= x_1 - \alpha_0 & i &= 1 \\
 e_i &= x_i - \alpha_{i-1} & i &= 2, \dots, n-1 \\
 e_n &= x_n - \alpha_{n-1} & i &= n
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

dérivons ces erreurs, par rapport au temps, pour obtenir les dynamiques suivantes :

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{\alpha}_0 & i &= 1 \\
 \dot{e}_i &= \dot{x}_i - \dot{\alpha}_{i-1} & i &= 2, \dots, n-1 \\
 \dot{e}_n &= \dot{x}_n - \dot{\alpha}_{n-1} & i &= n
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

remplaçons les dynamiques du système (2.54), pour avoir :

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= x_2 - \dot{\alpha}_0 & i &= 1 \\
 \dot{e}_i &= x_{i+1} - \dot{\alpha}_{i-1} & i &= 2, \dots, n-1 \\
 \dot{e}_n &= g_n(x, \zeta) u + f_n(x, \zeta) - \dot{\alpha}_{n-1} & i &= n
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

remplaçons les états  $x_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ , en utilisant (2.78), pour trouver :

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= e_2 + \alpha_1 - \dot{\alpha}_0 & i &= 1 \\
 \dot{e}_i &= e_{i+1} + \alpha_i - \dot{\alpha}_{i-1} & i &= 2, \dots, n-1 \\
 \dot{e}_n &= g_n(x, \zeta) u + f_n(x, \zeta) - \dot{\alpha}_{n-1} & i &= n
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

Considérons les fonctions de Lyapounov  $V_i$  telles que définies ci-haut :

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{1}{2} e_1^2 & i &= 1 \\
 V_i &= V_{i-1} + \frac{1}{2} e_i^2 & i &= 2, \dots, n-1 \\
 V_n &= V_{n-1} + \frac{1}{2} e_n^2 & i &= n
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

les dérivées temporelles de ces fonctions sont telles que :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 &= e_1 \dot{e}_1 & i &= 1 \\
 \dot{V}_i &= \dot{V}_{i-1} + e_i \dot{e}_i & i &= 2, \dots, n-1 \\
 \dot{V}_n &= \dot{V}_{n-1} + e_n \dot{e}_n & i &= n
 \end{aligned} \tag{2.83}$$

en utilisant les dynamiques des erreurs (2.81), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 &= e_1 (e_2 + \alpha_1 - \dot{\alpha}_0) & i &= 1 \\
 \dot{V}_i &= \dot{V}_{i-1} + e_i (e_{i+1} + \alpha_i - \dot{\alpha}_{i-1}) & i &= 2, \dots, n-1 \\
 \dot{V}_n &= \dot{V}_{n-1} + e_n [g_n(x, \zeta) u + f_n(x, \zeta) - \dot{\alpha}_{n-1}] & i &= n
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

L'objectif de l'approche *Backstepping* est de déterminer la loi de commande réelle  $u$  permettant d'obtenir la convergence globale et exponentielle de la fonction de Lyapounov totale  $V_n$  pour le système (2.54). Afin d'obtenir cette convergence, on choisit les commandes virtuelles  $\alpha_i$  pour  $i = 1, \dots, n-1$  et la commande réelle  $u$  comme suit :

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= -k_1 e_1 + \dot{\alpha}_0 & i &= 1 \\
 \alpha_i &= -k_i e_i - e_{i-1} + \dot{\alpha}_{i-1} & i &= 2, \dots, n-1 \\
 u &= \frac{1}{g_n(x, \zeta)} [-f_n(x, \zeta) - k_n e_n - e_{n-1} + \dot{\alpha}_{n-1}] & i &= n
 \end{aligned} \tag{2.85}$$

où les constantes  $k_i > 0$  pour  $i = 1, \dots, n$  sont des gains de réglage. Pour ce choix, les dérivées

des fonctions de Lyapounov  $V_i$  deviennent :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 &= -k_1 e_1^2 + e_1 e_2 & i = 1 \\
 \dot{V}_i &= \dot{V}_{i-1} - k_i e_i^2 - e_i e_{i-1} + e_i e_{i+1} & i = 2, \dots, n-1 \\
 \dot{V}_n &= \dot{V}_{n-1} - k_n e_n^2 - e_n e_{n-1} & i = n
 \end{aligned} \tag{2.86}$$

Comme expliqué auparavant, la fonction de Lyapounov pour tout le système (2.54) est la fonction de Lyapounov  $V \equiv V_n$ . De ce fait, on a le résultat suivant :

$$V = V_n = \sum_{i=n-1}^1 V_i + \frac{1}{2} e_n^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} e_i^2 \tag{2.87}$$

dont la dérivée, part rapport au temps, est telle que :

$$\dot{V} = \sum_{i=n-1}^1 \dot{V}_i + e_n \dot{e}_n \tag{2.88}$$

en utilisant (2.86) avec (2.87), la dérivée temporelle de  $V$  est finalement comme suit :

$$\dot{V} = - \sum_{i=1}^n k_i e_i^2 = -2 k_0 V \tag{2.89}$$

où  $k_0$  est le minimum des gains de commande  $k_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ , i.e.  $k_0 = \min_i k_i$ .

L'équation (2.89) montre clairement que la fonction de Lyapounov  $V$  converge globalement et exponentiellement vers zéro. Par conséquent, le vecteur erreur  $e = [e_1, \dots, e_n]^T$  converge aussi globalement et exponentiellement vers zéro selon l'équation suivante :

$$\|e(t)\| = \|e(0)\| e^{-k_0 t} \tag{2.90}$$

Revenons maintenant à la loi de commande  $u$  donnée par (2.85). Cette loi ne peut pas être utilisée directement parce qu'elle dépend récursivement des commandes virtuelles  $\alpha_i$  et de leurs dérivées  $\dot{\alpha}_i$  pour  $i = n-1, \dots, 1$ , mais aussi des erreurs  $e_i$  pour  $i = n, \dots, 1$ . Donc pour déterminer la loi de commande finale à utiliser, il faut dériver analytiquement les commandes virtuelles  $\alpha_i$  jusqu'à l'ordre  $n-i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , et remplacer à chaque fois les erreurs  $e_i$ , leurs dérivées

$\dot{e}_i$  et les commandes virtuelles  $\alpha_i$  telles que données par (2.78), (2.80) et (2.85) respectivement. Suivre donc cette procédure pour déterminer la loi de commande finale à implémenter est très difficile, ennuyeux et fastidieux. Ceci est d'autant vrai que l'ordre du système  $n$  est grand, i.e.  $n \geq 3$ . Ce dernier phénomène est connu dans la littérature scientifique sous le nom problème d'*explosion de complexité*, lequel constitue l'un des grands handicaps de l'approche *Backstepping* [17, 19, 30, 39, 61, 122, 123, 147]. Plus encore, la loi de commande finale  $u$  contiendrait un nombre très important de termes, ce fait constitue un autre problème désigné par problème d'*explosion de termes* [102, 147]. Un autre handicap qui nous intéresse en particulier dans ce chapitre est que, en suivant la procédure décrite ci-avant, la commande finale à appliquer au système d'ordre  $n$  (2.54) contiendrait la référence  $y_{ref} = \alpha_0$  et ses dérivées  $y_{ref}^{(i)}$  jusqu'à l'ordre  $n$ .

Comme discuté précédemment et en plus des exigences de départ, la loi de commande  $u$  obtenue par l'approche *Backstepping* est valable si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) Les fonctions scalaires  $g_n(x, \zeta)$  et  $f_n(x, \zeta)$  sont bornées.
- (ii) La référence  $y_{ref}$  est continue, bornée et  $n$  fois dérivable.
- (iii) Ses dérivées  $y_{ref}^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont continues, bornées et disponibles analytiquement.

Comme précédemment, il n'y a pas lieu de discuter plus que ça les deux fonctions scalaires  $g_n(x, \zeta)$  et  $f_n(x, \zeta)$ . De même, si le signal de référence est généré par l'utilisateur de sorte que l'on peut obtenir analytiquement ses dérivées jusqu'à l'ordre  $n$  et que les conditions citées ci-haut sont satisfaites, alors le problème ne se pose pas. Ce cas correspond par exemple à une référence de type sinusoïdale. En effet, pour ce type de référence la sortie  $y$  tend, après le régime transitoire, vers la référence  $y_{ref}$  avec une erreur de poursuite nulle.

Si par contre le signal de référence  $y_{ref}$  dépend d'un autre système, par exemple les formes (2.15, 2.18, 2.23), ou bien ses dérivées  $y_{ref}^{(i)}$  jusqu'à l'ordre  $n$  n'admettent pas une forme analytique (disponibilité) ou encore ne sont pas continues ou bornées (cas d'une référence carrée), alors on ne peut pas implémenter la loi de commande  $u$  obtenue par l'approche *Backstepping*. Dans ce cas de figure et afin de satisfaire aux conditions de validité, on peut utiliser le filtre

d'ordre  $n$  (2.75) pour générer approximativement la référence et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $n$ . Dans ce dernier cas, la loi de commande obtenue n'est qu'une approximation de la loi de commande  $u$  obtenue par l'approche *Backstepping*. En plus, le filtre (2.75) introduit  $n$  paramètres de réglages supplémentaires.

Il est important de noter que pratiquement le filtre d'ordre  $n$  (2.75) constitue une partie intégrante de l'approche *Backstepping* et il est généralement désigné par le nom *préfiltre*. L'utilisation du filtre (2.75) pour générer approximativement la référence et ses dérivées constitue un autre handicap de l'approche *Backstepping* [102].

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les formes normales obtenues par transformation d'un système *SISO* non linéaire affine en l'entrée par un difféomorphisme. Les différentes formes sont les formes normales canoniques, *Strict Normal Form* et *Strict Feedback Normal Form*. Nous avons aussi présenté la forme plus générale *Strict Feedback Form* qui englobe non seulement les formes normales, mais une très large catégorie de systèmes.

Pour le cas des formes normales canoniques et *Strict Normal Form*, nous avons étudié les conditions que les non linéarités du système et la référence doivent satisfaire pour que la loi de commande soit valable. En particulier, nous avons montré de manière claire que la référence doit satisfaire les conditions très contraignantes suivantes :

- (i) La référence  $y_{ref}$  doit être continue, bornée et  $n$  fois dérivable.
- (ii) Ses dérivées  $y_{ref}^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$  doivent être continues, bornées et disponibles analytiquement.

Nous avons aussi montré que l'utilisation d'un filtre d'ordre  $n$  permet de contourner les conditions que la référence doit satisfaire. En effet, ce dernier filtre ne règle pas le problème mais ne fait que le contourner. Plus encore, ce filtre constitue en lui même un problème.

D'autre part, nous avons présenté l'approche *Backstepping* et montré ses inconvénients pour les cas des formes normales canoniques et *Strict Normal Form*. Plus exactement, les problèmes d'*explosion de complexité*, d'*explosion de termes* et le problème du *préfiltre* d'ordre  $n$ .

Dans le chapitre suivant, nous nous intéresserons aux inconvénients de l'approche *Backstepping* pour la classe plus générale des systèmes ayant la forme *Strict Feedback Form* et les solutions proposées dans la littérature.

Cette page est intentionnellement laissée blanche

## CHAPITRE 3

# APPROCHES *BACKSTEPPING*, *DYNAMIC SURFACE CONTROL* ET *COMMAND FILTERED BACKSTEPPING*

### 3.1 Introduction

Dans le précédent chapitre, nous avons étudié et analysé les conditions très contraignantes que la référence doit satisfaire pour que la loi de commande soit valide et ce pour les formes normales canoniques et *Strict Normal Form*. Nous avons aussi constaté que les conditions sur les non linéarités de ces dernières formes ne sont pas contraignantes. D'autre part, nous avons introduit l'approche *Backstepping* pour la conception de la loi de commande pour les formes normales canoniques et *Strict Normal Form*. Cette conception nous a permis de relever plusieurs inconvénients et limites de l'approche *Backstepping*.

Notre objectif dans le présent chapitre est, d'une part, de présenter les inconvénients et limites de l'approche *Backstepping* dans le cas de la forme générale *Strict Feedback Form* et, d'autre part, de présenter les deux approches les plus intéressantes, en l'occurrence *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping*, qui ont essayé de remédier aux inconvénients de l'approche *Backstepping*. En effet, il est judicieux de noter qu'il existe d'autres approches dans la littérature scientifique mais qui n'apportent pas un réel apport et dont les démonstrations mathématiques ne sont pas très rigoureuses.

## 3.2 Approche *Backstepping*

Dans cette section, on s'intéresse à l'application de l'approche *Backstepping* à la classe des systèmes non linéaires ayant la forme *Strict Feedback Form*. Cette classe, présentée dans le précédent chapitre, est la suivante :

$$\begin{aligned}
 \dot{\zeta} &= \Gamma(\zeta, x_1) \\
 \dot{x}_i &= g_i(\zeta, x_1, \dots, x_i) x_{i+1} + f_i(\zeta, x_1, \dots, x_i) & i = 1, \dots, n-1 \\
 \dot{x}_n &= g_n(\zeta, x_1, \dots, x_n) u + f_n(\zeta, x_1, \dots, x_n) \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

où  $\zeta \in \mathfrak{R}^p$ ,  $x_i \in \mathfrak{R}$  pour  $i = 1, \dots, n$  et  $u \in \mathfrak{R}$  est l'unique entrée du système.

Dans le précédent chapitre, nous avons vu que l'application de l'approche *Backstepping* aux formes normales canoniques et *Strict Normal Form* est valide si et seulement si les conditions sur le signal de référence et les fonctions scalaires non linéaires  $g_n(x, \zeta)$  et  $f_n(x, \zeta)$  sont satisfaites. Il est donc normal que l'application de l'approche *Backstepping* à la classe des systèmes (3.1) exige des conditions sur le signal de référence et sur les fonctions scalaires non linéaires  $g_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  et  $f_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  du sous système  $x$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Ces conditions sont édictées sous forme d'hypothèses de travail comme suit [30, 64, 108, 161] :

**Hypothèse 3.1.** *Il existe une borne constante  $\bar{g}_i > 0$  telle que la fonction scalaire non linéaire  $g_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  est telle que  $|g_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)| > \bar{g}_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ .*

**Hypothèse 3.2.**  *$\forall t > 0$  le signal de référence  $\psi_1$  doit être continu et borné ; ses dérivées  $\psi_1^{(i)}$ , pour  $i = 1, \dots, n-1$ , doivent être continues, bornées et disponibles et que sa  $n^{\text{ieme}}$  dérivée  $\psi_1^{(n)}$  soit bornée et disponible.*

**Hypothèse 3.3.** *Les fonctions scalaires non linéaires  $g_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  et  $f_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , doivent être bornées et continuellement différentiable jusqu'à l'ordre  $n-i$ , i.e.  $g_i(\zeta, x_1, \dots, x_i), f_i(\zeta, x_1, \dots, x_i) \in C^{n-i}$ . Pour  $i = 1, \dots, n$  et  $j = 1, \dots, n-1$  les dérivées  $g_i^{(j)}(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  et  $f_i^{(j)}(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  doivent être continues, bornées et connues analytiquement.*

Il est clair que l'hypothèse 3.1 est nécessaire pour assurer la contrôlabilité du sous système  $x$ , alors que les hypothèses 3.2 et 3.3 sont nécessaires pour que les commandes virtuelles  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , et la commande réelle  $u = \alpha_n$  soient valides, voir discussion en Chapitre 2. Les hypothèses 3.1 et 3.3 donnent les conditions que les non linéarités du sous système  $x$  doivent satisfaire. Autrement dit, si ces conditions ne sont pas satisfaites alors on ne peut pas appliquer l'approche *Backstepping*.

Afin de respecter les conditions de l'hypothèse 3.2, l'approche *Backstepping* utilise un *pré-filtre* d'ordre  $n$ . Comme discuté en Chapitre 2, l'approche *Backstepping* utilise la référence filtrée  $\psi_1$  et ses dérivées  $\psi_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ , et sa  $n^{ieme}$  dérivée  $\dot{\psi}_n$  générées par filtrage du vrai signal de référence désiré, noté ici  $x_{1d}$ , avec le *préfiltre* d'ordre  $n$  suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i &= \psi_{i+1} & i &= 1, \dots, n-1 \\ \dot{\psi}_n &= -a_1 (\psi_1 - x_{1d}) - \sum_{i=2}^n a_i \psi_i \end{aligned} \quad (3.2)$$

En effet, si le vrai signal de référence  $x_{1d}$  est borné, alors la référence filtrée  $\psi_1$  est continue, bornée et où ses dérivées  $\psi_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ , et  $\dot{\psi}_n$  sont disponibles, continues et bornées.

Pour le sous système  $x$  de la classe des systèmes ayant la forme *Strict Feedback Form* (3.1), l'approche *Backstepping* définit récursivement les commandes virtuelles  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , et la commande réelle  $u = \alpha_n$  comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{g_1} [-f_1 - k_1 z_1 + \dot{\alpha}_0] \\ \alpha_i &= \frac{1}{g_i} [-f_i - k_i z_i - g_{i-1} z_{i-1} + \dot{\alpha}_{i-1}] & i &= 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.3)$$

où les paramètres  $k_i > 0$  pour  $i = 1, \dots, n$ , sont les gains de réglage et où  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , est l'erreur de poursuite correspondante à l'étape  $i$ . En effet, l'approche *Backstepping* définit, à chaque étape, l'erreur de poursuite  $z_i$  comme étant la différence entre l'entrée virtuelle  $x_i$  et la commande virtuelle  $\alpha_{i-1}$  pour  $i = 2, \dots, n$  alors que l'erreur de poursuite de trajectoire  $z_1$  est la différence entre la sortie  $y = x_1$  du sous système  $x$  et la référence filtrée  $\psi_1$ . Remarquer que pour la convenance de notation, la référence filtrée  $\psi_1$  est notée  $\alpha_0$ , i.e.  $\psi_1 = \alpha_0$ . Ces erreurs sont donc comme suit :

$$z_i = x_i - \alpha_{i-1} \quad i = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

En utilisant la définition des commandes virtuelles  $\alpha_i$  et la commande réelle  $\alpha_n$  (3.3) et la définition des erreurs  $z_i$  (3.4), il est facile de montrer que les dérivées temporelles de ces erreurs sont telles que :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -k_1 z_1 + g_1 z_2 \\ \dot{z}_i &= -k_i z_i + g_i z_{i+1} - g_{i-1} z_{i-1} \quad i = 2, \dots, n-1 \\ \dot{z}_n &= -k_n z_n - g_{n-1} z_{n-1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Comme expliqué en Chapitre 2, l'objectif de l'approche *Backstepping* est de faire tendre le vecteur des erreurs  $z = [z_1, \dots, z_n]^T$  globalement et exponentiellement vers zéro. Pour ce faire, l'approche *Backstepping* définit récursivement les fonctions de Lyapounov  $V_i$  suivantes :

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} z_1^2 \\ V_i &= V_{i-1} + \frac{1}{2} z_i^2 \quad i = 2, \dots, n-1 \\ V_n &= V_{n-1} + \frac{1}{2} z_n^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

La fonction de Lyapounov pour le sous système  $x$  du système (3.1) notée  $V_0 \equiv V_n$  est telle que :

$$\begin{aligned} V_0 &= V_n = \sum_{i=1}^{n-1} V_i + \frac{1}{2} z_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n z_i^2 \\ V_0 &= \frac{1}{2} z^T z \end{aligned} \quad (3.7)$$

En utilisant (3.5), les dérivées temporelles des fonctions de Lyapounov individuelles (3.6) sont comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -k_1 z_1^2 + g_1 z_1 z_2 \\ \dot{V}_i &= \dot{V}_{i-1} - k_i z_i^2 + g_i z_i z_{i+1} - g_{i-1} z_i z_{i-1} \quad i = 2, \dots, n-1 \\ \dot{V}_n &= \dot{V}_{n-1} - k_n z_n^2 - g_{n-1} z_n z_{n-1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

et en utilisant (3.8), la dérivée temporelle de la fonction de Lyapounov  $V_0$  est telle que :

$$\dot{V}_0 = \sum_{i=1}^{n-1} \dot{V}_i + z_n \dot{z}_n = - \sum_{i=1}^n k_i z_i^2 \quad (3.9)$$

si l'on note  $k_0$  le minimum des gains  $k_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ , i.e.  $k_0 = \min(k_i)$ , alors :

$$\dot{V}_0 = -\min(k_i) z^T z = -k_0 z^T z \quad (3.10)$$

et en utilisant (3.7), on a finalement :

$$\dot{V}_0 = -k_0 V_0 \quad (3.11)$$

L'équation (3.11) montre que l'approche *Backstepping* assure la convergence du vecteur erreur  $z$  globalement et exponentiellement vers zéro. Elle montre aussi que les erreurs individuelles  $z_i$  pour  $i = 1, \dots, n$  sont bornées, i.e.  $z_i \in L_\infty$ . En intégrant (3.11), on montre que ces erreurs sont aussi telles que  $z_i \in L_2$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Plus encore, du fait que la référence  $\alpha_0 = \psi_1$  est bornée, hypothèse 3.2, et que  $z_1 \in L_\infty$  on conclut que l'état  $x_1$  est borné, i.e.  $x_1 \in L_\infty$ . La bornitude de l'état  $x_1$ , de la dérivée  $\dot{\alpha}_0 = \psi_2$ , hypothèse 3.2, et des fonctions  $g_1(\zeta, x_1)$  et  $f_1(\zeta, x_1)$ , hypothèse 3.3, implique la bornitude de la commande virtuelle  $\alpha_1$ , i.e.  $\alpha_1 \in L_\infty$ . En suivant le même raisonnement, on montre que pour  $i = 1, \dots, n$  on a  $z_i \in L_\infty \cap L_2$  et  $x_i, \alpha_i, u \in L_\infty$ . L'approche *Backstepping* est résumée par le théorème suivant :

**Théorème 3.1** (Approche *Backstepping*). *Si le sous système  $x$  du système non linéaire (3.1) satisfait aux conditions des hypothèses 3.1, 3.2 et 3.3, alors la loi de commande  $u = \alpha_n$  telle que donnée par (3.3) assure la convergence globale et exponentielle du vecteur erreur  $z$  vers zéro. Plus encore, pour  $i = 1, \dots, n$  on a  $z_i \in L_\infty \cap L_2$  et  $x_i, \alpha_i, u \in L_\infty$ .*

L'approche *Backstepping* possède donc des caractéristiques très intéressantes : convergence globale et exponentielle vers zéro des erreurs de poursuite  $z_i$ , bornitude de l'ensemble des commandes virtuelles  $\alpha_i$ , de la commande réelle  $u = \alpha_n$  et l'ensemble des états  $x_i$  pour  $i = 1, \dots, n$  du sous système  $x$  du système (3.1). D'autre part, l'approche *Backstepping* possède des inconvénients et limites. En effet et juste après l'apparition de cette approche, plusieurs auteurs ont relevé ses limites et inconvénients.

Dans le Chapitre 2, nous avons discuté largement le premier inconvénient de l'approche *Backstepping* lequel est intrinsèque à l'hypothèse de travail 3.2. Cette hypothèse exige non

seulement la continuité et la bornitude du signal de référence  $\psi_1$ , mais exige aussi la continuité, la bornitude et la disponibilité (forme analytique) de toutes les dérivées  $\psi_1^{(j)}$  du signal de référence jusqu'à l'ordre  $n$ . Nous avons aussi vu que pour respecter les conditions de cette hypothèse, l'approche *Backstepping* utilise le *préfiltre* (3.2) d'ordre  $n$ , qui constitue une partie intégrante de cette approche, pour générer et implémenter le signal de référence filtré  $\psi_1$  et ses dérivées  $\psi_1^{(j)}$  pour  $j = 1, \dots, n$ . Nous avons aussi relevé que ce filtre en lui même pose un problème. En effet et autant le système est large, ordre  $n$  important, le filtre introduit  $n$  paramètres de réglage additionnels. D'autre part, ce filtre pose un sérieux problème lors de l'implémentation temps réel, filtre numérique, puisque la fréquence d'exécution est limitée.

Un deuxième inconvénient est intrinsèque à l'hypothèse de travail 3.3. En effet, cette hypothèse exige que les fonctions scalaires non linéaires  $g_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  et  $f_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  du sous système  $x$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , soient continuellement différentiables jusqu'à l'ordre  $n - i$  et plus encore que leurs dérivées  $g_i^{(j)}(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  et  $f_i^{(j)}(\zeta, x_1, \dots, x_i)$ , pour  $j = 1, \dots, n - i$ , aient des formes analytiques. Les conditions de cette hypothèse sont donc très contraignantes. Les systèmes qui respectent les conditions introduites par cette hypothèse ne sont pas très nombreux du point de vue théorique. Autrement dit, l'approche *Backstepping* n'est applicable que pour une partie limitée de la classe des systèmes ayant la forme *Strict Feedback Form*.

L'hypothèse de travail 3.2 et surtout l'hypothèse 3.3 sont donc très contraignantes et limitent l'étendue de la classe des systèmes pour lesquels l'approche *Backstepping* peut être appliquée. Plus encore et pour les systèmes qui satisfont aux conditions de l'hypothèse 3.3 et celles de 3.2 grâce à l'introduction du *préfiltre* (3.2), un autre inconvénient majeur de l'approche *Backstepping* apparaît. Connue dans la littérature scientifique sous le nom problème d'*explosion de complexité*, ce dernier inconvénient est inhérent à la procédure récursive de l'approche *Backstepping* et désigne le degré de complexité pour l'obtention de la loi de commande finale. En effet, cette dernière loi  $u = \alpha_n$  telle que donnée par (3.3) dépend récursivement des erreurs  $z_i$  et  $z_{i-1}$ , des fonctions scalaires non linéaires  $f_i$ ,  $g_i$  et  $g_{i-1}$  et les dérivées des commandes virtuelles  $\dot{\alpha}_{i-1}$  pour  $i = n, \dots, 1$ . Pour obtenir donc la loi de commande finale  $u$  il faut réaliser successivement  $n$  fois le travail suivant. Dériver analytiquement la commande virtuelle  $\alpha_{i-1}$ , i.e.  $\dot{\alpha}_{i-1}$ , remplacer la dérivée  $\dot{\alpha}_{i-1}$ , les erreurs  $z_i$ ,  $z_{i-1}$  et les fonctions scalaires non linéaires  $f_i$ ,

$g_i$  et  $g_{i-1}$  pour obtenir la commande virtuelle  $\alpha_i$  pour  $i = n, \dots, 1$ . Il est important de noter que la dérivation analytique de la commande virtuelle  $\alpha_{i-1}$  induit la dérivation analytique des fonctions  $f_{i-1}$ ,  $g_{i-1}$ ,  $g_{i-2}$  et des erreurs  $z_{i-1}$  et  $z_{i-2}$ . Réaliser toutes ces étapes est fastidieux, ennuyeux, demande plusieurs pages de calcul et peut donner lieu à des erreurs en particulier lorsque les non linéarités sont complexes. Pour un système d'ordre  $n$  important,  $n \geq 3$ , la complexité de réalisation de toutes ces étapes explose d'où le nom problème d'*explosion de complexité*.

En plus du problème d'*explosion de complexité*, la loi de commande finale  $u$  contiendrait un nombre très important de termes. Pour un système d'ordre  $n$  grand,  $n \geq 3$ , et ayant des non linéarités complexes, la loi de commande finale peut s'étendre sur plusieurs pages. Ceci constitue un autre inconvénient de l'approche *Backstepping* et il est désigné par le nom problème d'*explosion de termes*. Il est important de noter que l'implémentation d'une loi de commande ayant un nombre très important de termes non linéaires et contenant des additions, multiplications et divisions n'est pas évidente dans le cas d'une implémentation temps réel.

### 3.3 Solutions proposées dans la littérature scientifique

Résoudre les problèmes inhérents l'approche *Backstepping* n'est pas une mince affaire. En effet et jusqu'au temps présent, seulement quelques approches ont été proposées afin de réduire les inconvénients de l'approche *Backstepping* et en particulier le problème principal qui est celui d'*explosion de complexité*. D'autre part, ces dernières approches ne sont pas basées sur des idées innovantes mais ne font que contourner ce problème. Donc afin d'éviter l'implémentation des dérivées analytiques successives des commandes virtuelles et donc de réduire le problème d'*explosion de complexité* les différentes approches utilisent soit la différentiation numérique ou bien un ensemble de filtres pour réaliser l'approximation des différentes dérivées.

On peut classer ces approches en deux catégories, celles qui utilisent la différentiation numérique et celles qui utilisent des filtres. La différentiation numérique a été utilisée par Green and Hedrick en 1990 dans l'approche *Multiple Surface Sliding* [38, 43, 124, 142], par Seiler and Alleyne en 2002 dans l'approche *Dissipative Adaptive Control* [2, 60, 107] et beaucoup

plus récemment par Koivumäki et al. en 2022 dans l'approche *Subsystem-Based Control* [61]. L'introduction d'un ensemble de filtres a été utilisée par Stotsky et al. en 1997 dans l'approche *Multiple Surface Sliding* [43, 118, 124], par Yip et al. en 1996 dans l'approche *Dynamic Surface Control* [79, 92, 121, 122, 147, 157] et par Farrell et al. en 2009 dans l'approche *Command Filtered Backstepping* [17, 30, 39, 110, 151].

Les approches basées sur l'utilisation de la différentiation numérique n'ont pas reçu un grand intérêt à cause du fait qu'elles supposent que la différentiation numérique n'introduit aucune erreur. Cette supposition implique en effet un manque de rigueur dans l'analyse de convergence. A la différence de ces dernières, les approches basées sur l'introduction d'un ensemble de filtres ont reçu un très grand intérêt et en particulier les approches *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping*. En effet, l'analyse de convergence dans ces deux approches est très rigoureuse. Pour ces raisons, on se limitera dans cette thèse à la présentation de ces deux dernières approches.

D'autre part, il est nécessaire et important de noter que l'idée de l'utilisation d'un ensemble de filtres dans les approches *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping* n'est pas à vrai dire très originale. En effet, cette idée correspond simplement à la généralisation de l'utilisation du *préfiltre* (3.2) dans l'approche *Backstepping*. On rappelle ici que le *préfiltre*, dans l'approche *Backstepping*, est utilisé pour générer le signal de référence filtré et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $n$  et par conséquent éviter de dériver analytiquement le vrai signal de référence. Le *préfiltre* permettant donc l'obtention des approximations du vrai signal de référence et ses dérivées. L'introduction des filtres, dans les approches *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping*, sert aussi à générer des approximations des commandes virtuelles et leurs dérivées.

L'objectif principal des approches *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping* est donc d'éliminer la détermination analytique des dérivées des commandes virtuelles et par conséquent de réduire le problème *d'explosion de complexité* tout en recouvrant, aux mieux possible, les performances de l'approche *Backstepping*.

### 3.4 Approche *Dynamic Surface Control*

Comme précisé ci-haut, l'approche *Dynamic Surface Control* cherche à éliminer le problème d'*explosion de complexité*, dû à la différentiation répétitive des commandes virtuelles dans l'approche *Backstepping*, en utilisant la technique du mode glissant et un ensemble de filtres. Les auteurs de l'approche *Dynamic Surface Control* s'intéresse à la classe des systèmes ayant la forme *Strict Feedback Normal Form* (2.18), présentés dans le précédent chapitre, et où ils considère la fonction scalaire  $g_n(x, \zeta) \equiv 1$ . Cette classe des systèmes est donc représentée par le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \Gamma(\zeta, y) \\ \dot{x}_i &= x_{i+1} + f_i(x_1, \dots, x_i, \zeta) \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= u + f_n(x, \zeta) \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Pour la classe des systèmes (3.12), l'approche *Dynamic Surface Control* n'exige pas à la référence et aux fonctions scalaires  $f_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  du sous système  $x$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , de respecter les hypothèses très contraignantes de l'approche *Backstepping*, hypothèses 3.2 et 3.3, mais de respecter les hypothèses 3.4 et 3.5 beaucoup moins contraignantes suivantes :

**Hypothèse 3.4.**  $\forall t > 0$  le signal de référence  $\psi_1$  doit être continu et borné et sa première dérivée  $\psi_1^{(1)}$  doit être continue, bornée et disponible.

**Hypothèse 3.5.** Les fonctions non linéaires scalaires  $f_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , doivent être continues, bornées et différentiable une fois, i.e.  $f_i(\zeta, x_1, \dots, x_i) \in C^1$ . Pour  $i = 1, \dots, n$ , la première dérivée  $f_i^{(1)}(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  doit être continue et bornée.

Remarquer que pour la classe des systèmes considérés par l'approche *Dynamic Surface Control*, les fonctions scalaires non linéaires  $g_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , sont telles que  $g_i(\zeta, x_1, \dots, x_i) \equiv 1 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^p$  et  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ . De ce fait, il est claire que l'approche *Dynamic Surface Control* ne traite les inconvénients de l'approche *Backstepping* que pour une sous classe de la classe plus générale des système ayant la forme *Strict Feedback Form*.

Afin de respecter les conditions de l'hypothèse 3.4, l'approche *Dynamic Surface Control* utilise intrinsèquement un filtre du premier ordre. En effet, cette approche utilise la référence filtrée  $\psi_1$  et sa première dérivée  $\dot{\psi}_1$  générées par filtrage du vrai signal de référence désiré  $x_{1d}$  en utilisant le filtre suivant :

$$\tau_1 \dot{\psi}_1 + \psi_1 = x_{1d} \quad \psi_1(0) = x_{1d}(0) \quad (3.13)$$

En effet, si le vrai signal de référence  $x_{1d}$  est borné alors la référence filtrée  $\psi_1$  est continue, bornée et où sa dérivée première  $\dot{\psi}_1$  est disponible, continue et bornée.

D'autre part, afin de respecter les conditions de l'hypothèse 3.5, l'approche *Dynamic Surface Control* utilise intrinsèquement un ensemble de filtres du premier ordre. En effet, cette approche utilise les commandes virtuelles filtrées  $\alpha_{i,f}$  et leurs dérivées premières  $\dot{\alpha}_{i,f}$  générées par filtrage des commandes virtuelles  $\alpha_i$ , pour  $i = 2, \dots, n$ , en utilisant les filtres suivant :

$$\tau_i \dot{\alpha}_{i,f} + \alpha_{i,f} = \alpha_i \quad i = 2, \dots, n \quad (3.14)$$

Les constantes de temps des filtres  $\tau_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , doivent être choisies suffisamment petites.

L'approche *Dynamic Surface Control* définit pour  $i = 1, \dots, n$  les surfaces de glissement  $S_i$  comme étant les erreurs suivantes :

$$S_i = x_i - \alpha_{i,f} \quad i = 1, \dots, n \quad (3.15)$$

où pour des raisons de notation le signal de référence filtré  $\psi_1$  est noté  $\alpha_{1,f}$  et le vrai signal de référence  $x_{1d}$  est noté  $\alpha_1$ , i.e.  $\alpha_{1,f} = \psi_1$  et  $\alpha_1 = x_{1d}$ . Autrement dit, le filtre (3.13) est réécrit comme suit :

$$\tau_1 \dot{\alpha}_{1,f} + \alpha_{1,f} = \alpha_1 \quad \alpha_{1,f}(0) = \alpha_1(0) \quad (3.16)$$

L'approche *Dynamic Surface Control* définit récursivement les commandes virtuelles  $\alpha_i$ , pour  $i = 2, \dots, n$ , et la commande réelle  $u$  comme suit :

$$\begin{aligned}\alpha_{i+1} &= -f_i - k_i S_i + \dot{\alpha}_{i,f} & i = 1, \dots, n-1 \\ u &= -f_n - k_n S_n + \dot{\alpha}_{n,f}\end{aligned}\tag{3.17}$$

Dérivons (3.15), par rapport au temps, et utilisons (3.12) pour obtenir les dynamiques suivantes des surfaces de glissement  $S_i$  :

$$\begin{aligned}\dot{S}_i &= x_{i+1} + f_i - \dot{\alpha}_{i,f} & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{S}_n &= u + f_n - \dot{\alpha}_{n,f} & i = n\end{aligned}\tag{3.18}$$

remplaçons  $\dot{\alpha}_{i,f}$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , en utilisant (3.17) pour avoir :

$$\begin{aligned}\dot{S}_i &= x_{i+1} - k_i S_i - \alpha_{i+1} & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{S}_n &= -k_n S_n & i = n\end{aligned}\tag{3.19}$$

et en utilisant les définitions des surfaces de glissement (3.15), on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{S}_i &= S_{i+1} - k_i S_i + \alpha_{i+1,f} - \alpha_{i+1} & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{S}_n &= -k_n S_n & i = n\end{aligned}\tag{3.20}$$

Remarquer ici que les termes  $\alpha_{i,f} - \alpha_i$ , pour  $i = 2, \dots, n$ , sont les erreurs de filtrage introduites par les filtres de premier ordre (3.14). Ces erreurs, correspondants à la différence entre les commandes virtuelles filtrées  $\alpha_{i,f}$  et les commandes virtuelles  $\alpha_i$ , sont notées  $y_i$ . En ajoutant l'erreur  $y_1$  entre la référence filtrée  $\alpha_{1,f}$  et la vraie référence  $\alpha_1$ , introduite par le filtre de premier ordre (3.16), on peut écrire :

$$y_i = \alpha_{i,f} - \alpha_i \quad i = 1, \dots, n\tag{3.21}$$

en utilisant donc les erreurs  $y_i$  pour  $i = 2, \dots, n$  dans (3.20) on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{S}_i &= S_{i+1} + y_{i+1} - k_i S_i & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{S}_n &= -k_n S_n & i = n\end{aligned}\tag{3.22}$$

D'autre part, en dérivant (3.21), part rapport au temps, les dynamiques des erreurs  $y_i$  dues aux filtres sont comme suit :

$$\dot{y}_i = \dot{\alpha}_{i,f} - \dot{\alpha}_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.23)$$

et en utilisant les filtres (3.14) et (3.16) avec les définitions des erreurs  $y_i$  (3.21) on obtient :

$$\dot{y}_i = -\frac{y_i}{\tau_i} - \dot{\alpha}_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.24)$$

Afin de prendre en considération les dynamiques des erreurs introduites par les différents filtres de premier ordre et donc réaliser une analyse rigoureuse, l'approche *Dynamic Surface Control* divise l'erreur standard  $z_i$  (3.4) de l'approche *Backstepping* en ajoutant et soustrayant la commande virtuelle filtrée  $\alpha_{i,f}$  pour  $i = 2, \dots, n$  ou bien la référence filtrée  $\alpha_{1,f}$  pour  $i = 1$  comme suit :

$$\begin{aligned} z_i &= x_i - \alpha_i \\ z_i &= x_i - \alpha_{i,f} + \alpha_{i,f} - \alpha_i \\ z_i &= S_i + y_i \end{aligned} \quad i = 1, \dots, n \quad (3.25)$$

pour le sous système  $x$  du système (3.12) l'approche *Dynamic Surface Control* considère donc la fonction de Lyapounov suivante :

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [S_i^2 + y_i^2] \quad (3.26)$$

**Remarque 3.1.** A notre humble avis, le choix de cette dernière fonction de Lyapounov n'est pas très judicieux. En effet, la fonction de Lyapounov (3.26) ne considère qu'une partie de l'erreur standard  $z_i$  de l'approche *Backstepping*, i.e.  $z_i^2 \neq S_i^2 + y_i^2$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Ce fait constitue donc un manque de rigueur dans l'analyse de convergence pour l'approche *Dynamic Surface Control*. A notre connaissance, ce manque de rigueur n'a jamais été relevé dans la littérature scientifique.

Dérivons la fonction de Lyapounov (3.26), par rapport au temps, pour avoir :

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n S_i \dot{S}_i + \sum_{i=1}^n y_i \dot{y}_i \quad (3.27)$$

utilisons (3.22) et (3.24), pour obtenir :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^{n-1} S_i [-k_i S_i + S_{i+1} + y_{i+1}] - k_n S_n^2 \\ & + \sum_{i=1}^n y_i \left[ -\frac{1}{\tau_i} y_i - \dot{\alpha}_i \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

en utilisant l'inégalité de Young et après arrangement on a :

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & - \sum_{i=1}^n k_i S_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} [2 S_i^2 + S_{i+1}^2 + y_{i+1}^2] \\ & - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tau_i} y_i^2 + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{M_i}{2 \varepsilon} y_i^2 + \frac{\varepsilon}{2 M_i} \dot{\alpha}_i^2 \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Afin de démontrer que la dérivée (3.29) de la fonction de Lyapounov est définie négative, les auteurs de l'approche *Dynamic Surface Control* démontrent tout d'abord qu'il existe une fonction continue positive et bornée  $n_i$  ayant une borne supérieure  $M_i > 0$ , pour laquelle la dérivée de la commande virtuelle  $\alpha_i$  est telle que :

$$|\dot{\alpha}_i| \leq n_i \leq M_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.30)$$

En effet, les auteurs de cette approche démontrent que la fonction continue positive  $n_i$  est fonction, pour  $j = 1, \dots, i$ , des surfaces  $S_j$ , des erreurs  $y_j$ , des gains  $k_j$ , des constantes de temps  $\tau_j$  mais aussi du signal de référence filtré  $\alpha_{1,f}$ , sa première dérivée  $\dot{\alpha}_{1,f}$  et sa deuxième dérivée  $\ddot{\alpha}_{1,f}$  [122, 147]. L'existence de la borne supérieure  $M_i > 0$  est garantie par les réclamations suivantes :

**Réclamation 3.1.** *Pour toute constante positive donnée  $K_0 > 0$  l'ensemble  $Q$  défini par*

$$Q = \{(\alpha_{1,f}, \dot{\alpha}_{1,f}, \ddot{\alpha}_{1,f}) : \alpha_{1,f}^2 + \dot{\alpha}_{1,f}^2 + \ddot{\alpha}_{1,f}^2 \leq K_0\}$$

*est compact dans  $\mathbb{R}^3$ .*

**Réclamation 3.2.** Pour toute constante positive donnée  $p > 0$  l'ensemble  $A_i$  définit par

$$A_i = \{S_1^2 + y_1^2 + \dots + S_i^2 + y_i^2 \leq 2 p\}$$

est compact dans  $\mathfrak{R}^{2i-1}$ .

en plus de l'existence de la borne  $M_i$ , les auteurs de cette approche font les deux choix suivants :

$$\begin{aligned} k_i &= 2 + \beta & \forall i \\ \frac{1}{\tau_i} &= 1 + \frac{M_i^2}{2 \varepsilon} + \beta & i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.31)$$

en utilisant donc (3.30) et (3.31), la dérivée de la fonction de Lyapounov devient :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq - \sum_{i=1}^n (2 + \beta) S_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} [2 S_i^2 + S_{i+1}^2 + y_{i+1}^2] \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{M_i^2}{2 \varepsilon} + \beta\right) y_i^2 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{M_i^2}{2 \varepsilon} y_i^2 + \frac{\varepsilon n_i^2}{2 M_i^2}\right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

et après arrangement on a :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\beta \sum_{i=1}^n (S_i^2 + y_i^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n S_i^2 - \frac{1}{2} S_1^2 - S_n^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n y_i^2 - y_1^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon n_i^2}{2 M_i^2} \end{aligned} \quad (3.33)$$

en éliminant les termes strictement négatifs et en utilisant (3.26) on obtient :

$$\dot{V} \leq -2 \beta V + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon n_i^2}{2 M_i^2} \quad (3.34)$$

De la Réclamation 3.2 on sait que pour  $V(S_1^2 + y_1^2 + \dots + S_n^2 + y_n^2) = p$  on a  $n_i \leq M_i$ , dans ce cas la dérivée de la fonction de Lyapounov (3.34) est équivalente à :

$$\dot{V} \leq -2 \beta p + \frac{n \varepsilon}{2} \quad (3.35)$$

De cette dernière équation, il est évident que pour le choix  $\beta > \frac{n \varepsilon}{4 p}$  la dérivée de la fonction de Lyapounov est semi définie négative, i.e  $\dot{V} \leq 0$  sur la frontière  $V = p$ . Par conséquent, l'ensemble défini par  $V \leq p$  est un ensemble invariant, plus précisément si  $V(t = 0) \leq p$  alors  $V(t) \leq p$  pour  $t > 0$ .

Ce résultat montre que la convergence de l'approche *Dynamic Surface Control* est asymptotiquement semi-globale et où les erreurs convergent "éventuellement" dans une boule de centre zéro et de rayon  $\frac{n \varepsilon}{4 \beta}$ . Il est facile de montrer récursivement la bornitude des commandes virtuelles  $\alpha_i$  et de la commande réelle  $u$  données par l'équation (3.17). En effet, du fait que la fonction de Lyapounov est décroissante, alors les surfaces  $S_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ , sont bornées et en considérant les hypothèses 3.4 et 3.5, alors la commande virtuelle  $\alpha_{i+1}$ , pour  $i = 1, \dots, n - 1$ , est bornée et par conséquent la commande réelle  $u$  est bornée. La bornitude des états  $x_i$  découle de la bornitude des commandes virtuelles filtrées  $\alpha_{i,f}$  et des surface  $S_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , voir équation (3.15). L'approche *Dynamic Surface Control* est résumée par le théorème suivant :

**Théorème 3.2** (*Dynamic Surface Control*). *Si le sous système non linéaire  $x$  du système (3.12) respecte les hypothèses 3.4 et 3.5, alors pour tous  $p > 0$  et  $\varepsilon > 0$  donnés, il existe des gains de surface  $k_i$  et des constantes de temps  $\tau_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , pour lesquelles l'approche Dynamic Surface Control garantit :*

- *Si la référence désirée  $\alpha_{1,f}$  est bornée telle que pour tout  $K_0 > 0$  cette référence vérifie  $\alpha_{1,f}^2 + \dot{\alpha}_{1,f}^2 + \ddot{\alpha}_{1,f}^2 \leq K_0$ , alors l'état du système est régulée à l'intérieur d'une boule de centre zéro et de rayon  $R(p, K_0)$  et ce pour tout état initial compris dans une boule de rayon  $p$ . La technique assure donc une stabilité asymptotique semi-globale.*
- *L'erreur de poursuite où de régulation réside éventuellement dans une boule de rayon  $\varepsilon$ .*

A la différence de l'approche *Backstepping*, qui est une méthode globale et dont la convergence est exponentielle, l'approche *Dynamic Surface Control* comme le montre clairement le Théorème 3.2 est une méthode semi-globale et dont la convergence n'est que asymptotique. D'autre part, l'approche *Dynamic Surface Control* décompose l'erreur standard  $z_i = x_i - \alpha_i$

de l'approche *Backstepping* en la somme des deux erreurs  $S_i = x_i - \alpha_{i,f}$  et  $y_i = \alpha_{i,f} - \alpha_i$  en introduisant la commande virtuelle filtrée  $\alpha_{i,f}$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Cette approche réalise donc l'analyse de la convergence des erreurs  $S_i$  et  $y_i$  en démontrant leurs convergence asymptotique et semi-globale. Plus exactement, l'approche *Dynamic Surface Control* démontre que  $x_i$  converge vers  $\alpha_{i,f}$ , dans une boule de rayon non nécessairement nulle, et que  $\alpha_{i,f}$  converge vers  $\alpha_i$ , dans une boule de rayon non nécessairement nulle. Par conséquence,  $x_i$  converge vers  $\alpha_i$  dans une boule de rayon non nécessairement nulle. De ce fait, l'approche *Dynamic Surface Control* ne constitue qu'une approximation de l'approche *Backstepping*. En effet, l'approximation est d'autant meilleur que les gains de réglage  $k_i$  sont choisis de grandes valeurs et que les constantes de temps des filtres  $\tau_i$  sont choisies de très faibles valeurs pour  $i = 1, \dots, n$ . Les constantes de temps  $\tau_i$  des différents filtres ne peuvent pas être prises arbitrairement très petites dans le cas d'une implémentation temps réel [122]. De ce fait, les erreurs de poursuite convergent dans des boules dont les rayons restent grands et donc l'approche *Dynamic Surface Control* ne peut pas recouvrir les performances de l'approche *Backstepping*. Une analyse complète basée sur la théorie des perturbations singulières de l'approche *Dynamic Surface Control* réalisée par Pan and Yu en 2015 peut être consultée pour plus d'informations [92].

### 3.5 Approche *Command Filtered Backstepping*

L'approche *Command Filtered Backstepping* est apparue sous sa forme finale treize ans après l'apparition de l'approche *Dynamic Surface Control*, plus exactement en 2009 [30]. En effet, l'approche *Command Filtered Backstepping* a été introduite et utilisée par Farrell et al. dès 2003 mais sans preuve formelle et ce pour le contrôle de vol des avions [27, 28, 29, 117]. En plus des objectifs d'élimination du problème d'*explosion de complexité* et de réduction des exigences très contraignantes des hypothèses de travail de l'approche *Backstepping*, l'approche *Command Filtered Backstepping* cherche à éliminer les défauts de l'approche *Dynamic Surface Control*. A la différence de cette dernière, l'approche *Command Filtered Backstepping* est basée sur la théorie des perturbations singulières et implémente un ensemble de filtres du deuxième ordre afin d'éviter la dérivation analytique des commandes virtuelles, i.e. des fonctions non linéaires scalaires  $g_i$  et  $f_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , du sous système  $x$  du système (3.1) ayant la forme *Strict Feedback Form*.

L'approche *Command Filtered Backstepping* n'impose pas les hypothèses de travail 3.2 et 3.3 de l'approche *Backstepping* qui sont très contraignantes, mais impose d'autres hypothèses moins exigeantes. En effet, en plus de l'hypothèse 3.1 qui est toujours nécessaire, contrôlabilité du sous système  $x$  du système (3.1), l'approche *Command Filtered Backstepping* impose les hypothèses de travail moins contraignantes suivantes :

**Hypothèse 3.6.**  $\forall t > 0$  le signal de référence  $\psi_1$  doit être continu et borné et sa première dérivée  $\psi_1^{(1)}$  doit être continue, bornée et disponible.

**Hypothèse 3.7.** Les fonctions non linéaires scalaires  $g_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  et  $f_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  du sous système  $x$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , doivent être continues, bornées et différentiable une fois, i.e.  $g_i, f_i \in C^1$ . Pour  $i = 1, \dots, n$ , les premières dérivées  $g_i^{(1)}(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  et  $f_i^{(1)}(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  doivent être continues et bornées. De plus, pour  $i = 1, \dots, n$  la fonction scalaire  $f_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  doit être localement Lipschitzienne.

De même que pour l'approche *Dynamic Surface Control*, l'approche *Command Filtered Backstepping* utilise intrinsèquement un filtre de premier ordre afin de générer la référence filtrée  $\psi_1$  et sa première dérivée  $\dot{\psi}_1$  par filtrage du vrai signal de référence désiré  $x_{1d}$  en utilisant le filtre (3.13).

Mis à part la ressemblance correspondante à l'introduction d'un filtre, à chaque étape  $i$ , et la génération de la référence filtrée  $\psi_1$  et sa première dérivée  $\psi_1^{(1)}$ ; les deux approches *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping* présentent des analyses complètement différentes. A la différence de l'approche *Dynamic Surface Control*, l'analyse de convergence de l'approche *Command Filtered Backstepping* se présente selon deux théorèmes. Le premier constitue la partie essentielle dans l'analyse de l'approche, alors que le deuxième n'est qu'un complément du premier théorème, i.e. sans importance pour le simple utilisateur de l'approche.

Dans le premier théorème, l'approche *Command Filtered Backstepping* réalise l'analyse de convergence de l'erreur  $\tilde{x}_i$  définie comme étant la différence entre l'état du système  $x_i$  et la commande virtuelle filtrée  $\alpha_{i,f}$ , i.e.  $\tilde{x}_i = x_i - \alpha_{i,f}$  pour  $i = 1, \dots, n$ , où  $\alpha_{i,f}$  est obtenue par filtrage de la commande virtuelle  $\alpha_{i-1}$  en utilisant un filtre de deuxième ordre. Le premier

théorème ne traitant pas les erreurs introduites par les différents filtres de deuxième ordre ; il est alors complété par un deuxième théorème. Dans ce dernier, l'approche *Command Filtered Backstepping* réalise l'analyse de l'approximation entre les deux approches *Command Filtered Backstepping* et *Backstepping*. En utilisant le Théorème de Tikhonov , voir Théorème 11.2 dans [58], l'approximation entre les deux approches est réalisée en comparant d'une part l'erreur de poursuite  $\tilde{x}_i$  de l'approche *Command Filtered Backstepping* et l'erreur de poursuite  $z_i$  de l'approche *Backstepping*, et d'autre part en comparant la commande virtuelle filtrée  $\alpha_{i,f}$  et sa dérivée  $\dot{\alpha}_{i,f}$  avec la commande virtuelle  $\alpha_{i-1}$  et sa dérivée  $\dot{\alpha}_{i-1}$  respectivement.

### 3.5.1 Analyse principale

Comme expliqué ci-haut, l'objectif de l'approche *Command Filtered Backstepping* dans sa partie principale est de réaliser l'analyse de convergence des erreurs  $\tilde{x}_i$  définies comme suit :

$$\tilde{x}_i(t) = x_i(t) - \alpha_{i,f}(t) \quad i = 1, \dots, n \quad (3.36)$$

où l'état initial est tel que

$$\tilde{x}_i(0) = x_i(0) - \alpha_{i,f}(0) \quad (3.37)$$

et où pour des raisons de simplicité de notation le signal de référence filtré  $\psi_1$  et sa première dérivée sont notés  $\alpha_{1,f}$  et  $\dot{\alpha}_{1,f}$  respectivement, i.e.  $\alpha_{1,f} = \psi_1$  et  $\dot{\alpha}_{1,f} = \dot{\psi}_1$ . On rappelle que ces deux signaux sont obtenus par filtrage du vrai signal de référence  $x_{1d}$ , noté dans cette approche  $\alpha_0$ , en utilisant le filtre de premier ordre ayant la constante de temps  $\tau > 0$  suivant :

$$\tau \dot{\psi}_1 + \psi_1 = x_{1d} \quad \psi_1(0) = x_{1d}(0) \quad (3.38)$$

où de manière équivalente

$$\tau \dot{\alpha}_{1,f} + \alpha_{1,f} = \alpha_0 \quad \alpha_{1,f}(0) = \alpha_0(0) \quad (3.39)$$

Pour  $i = 2, \dots, n$ , les commandes virtuelles filtrées  $\alpha_{i,f}$  et leurs dérivées premières sont obtenus par filtrage des commandes virtuelles  $\alpha_{i-1}$  en utilisant les filtres de deuxième ordre

suivants :

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_{i,1} &= \omega_n \psi_{i,2} \\ \dot{\psi}_{i,2} &= -2 \delta \omega_n \psi_{i,2} - \omega_n (\psi_{i,1} - \alpha_{i-1})\end{aligned}\quad i = 2, \dots, n \quad (3.40)$$

dans ce cas la commande virtuelle filtrée  $\alpha_{i,f}$  correspond à  $\psi_{i,1}$  et sa première dérivée à  $\omega_n \psi_{i,2}$ , i.e.  $\alpha_{i,f} = \psi_{i,1}$  et  $\dot{\alpha}_{i,f} = \omega_n \psi_{i,2}$  pour  $i = 2, \dots, n$ . Les filtres (3.40) sont dénommés dans cette approche par le nom *filtre de commande* et c'est pour cette raison que l'approche est désignée par le nom *Command Filtered Backstepping*, i.e. *Backstepping à Commandes Filtrées*.

Dans l'approche *Command Filtered Backstepping*, les commandes virtuelles  $\alpha_i$ , pour  $i = 1, \dots, n-1$ , et la commande réelle  $u = \alpha_n$  sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{g_1} (-k_1 \tilde{x}_1 + \dot{\alpha}_{1,f} - f_1) \\ \alpha_i &= \frac{1}{g_i} (-k_i \tilde{x}_i + \dot{\alpha}_{i,f} - f_i - g_{i-1} v_{i-1})\end{aligned}\quad i = 2, \dots, n \quad (3.41)$$

où les gains  $k_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sont les gains de réglage.

Les *filtres de commande* (3.40) possèdent des gains unitaires, une fréquence naturelle  $\omega_n$  et un coefficient d'amortissement  $\delta \in ]0, 1]$  alors que l'état initial, pour  $i = 2, \dots, n$ , doit être tel que :

$$\begin{aligned}\psi_{i,1}(0) &= \alpha_{i-1}(x_1(0), \dots, x_i(0), \alpha_{i,f}(0), v_{i-1}(0)) \\ \psi_{i,2}(0) &= 0\end{aligned}$$

Il est important de noter que l'utilisateur doit choisir la fréquence naturelle  $\omega_n$  des *filtres de commande* (3.40) suffisamment grande de telle manière à ce que la commande virtuelle filtrée  $\alpha_{i,f}$  et sa dérivée  $\dot{\alpha}_{i,f}$  suivent de manière "précise" la commande virtuelle  $\alpha_{i-1}$  et sa dérivée  $\dot{\alpha}_{i-1}$  respectivement.

Comme précisé ci-haut, l'effet des erreurs  $\alpha_{i,f} - \alpha_{i-1}$  et  $\dot{\alpha}_{i,f} - \dot{\alpha}_{i-1}$  dues aux filtres (3.40), pour  $i = 2, \dots, n$ , constituent une question crucial dans l'analyse de l'approche *Command Filtered Backstepping*. En effet et afin de prendre en considération l'effet de ces dernières erreurs,

l'approche *Command Filtered Backstepping* introduit un nouveau signal considéré comme la partie non achevée de la commande virtuelle  $\alpha_i$  pour  $i = 1, \dots, n-1$ . Ce nouveau signal, noté  $\xi_i$ , est obtenu par filtrage de l'erreur  $\alpha_{i,f} - \alpha_{i-1}$ , pour  $i = 2, \dots, n$ , comme suit :

$$\dot{\xi}_i = -k_i \xi_i + g_i (\alpha_{i+1,f} - \alpha_i) + g_i \xi_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (3.42)$$

où l'état initial est choisi tel que  $\forall i \xi_i(0) = 0$  et où  $\xi_n = 0$ .

Le signal  $\xi_i$  permet donc de prendre en considération la partie non achevée de la commande virtuelle  $\alpha_i$  par l'introduction du signal d'erreur  $v_i$ , pour  $i = 1, \dots, n-1$ , dans les définitions des commandes virtuelles  $\alpha_i$  et de la commande réelle  $u = \alpha_n$ , voir équations (3.41). Le signal  $v_i$  est désigné par le nom *erreur de poursuite compensée* et il est défini comme suit :

$$v_i = \tilde{x}_i - \xi_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.43)$$

Dérivons  $\tilde{x}_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ , par rapport au temps, et utilisons les équations du sous système  $x$  du système (3.1) pour avoir les dynamiques suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_i &= g_i x_{i+1} + f_i - \dot{\alpha}_{i,f} \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{\tilde{x}}_n &= g_n u + f_n - \dot{\alpha}_{n,f} \end{aligned} \quad (3.44)$$

ajoutons et soustrayons  $g_i \alpha_i$  et  $g_i \alpha_{i+1,f}$ , pour  $i = 1, \dots, n-1$ , pour obtenir après arrangement :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_i &= g_i \alpha_i + f_i - \dot{\alpha}_{i,f} + g_i (\alpha_{i+1,f} - \alpha_i) + g_i (x_{i+1} - \alpha_{i+1,f}) \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{\tilde{x}}_n &= g_n u + f_n - \dot{\alpha}_{n,f} \end{aligned} \quad (3.45)$$

remplaçons les commandes virtuelles  $\alpha_i$  et la commande réelle  $u = \alpha_n$ , équation (3.41), et utilisons la définition des erreurs  $\tilde{x}_i$ , équation (3.36), pour trouver :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= -k_1 \tilde{x}_1 + g_1 (\alpha_{2,f} - \alpha_1) + g_1 \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_i &= -k_i \tilde{x}_i - g_{i-1} v_{i-1} + g_i (\alpha_{i+1,f} - \alpha_i) + g_i \tilde{x}_{i+1} \quad i = 2, \dots, n-1 \\ \dot{\tilde{x}}_n &= -k_n \tilde{x}_n - g_{n-1} v_{n-1} \end{aligned} \quad (3.46)$$

D'autre part, en dérivant  $v_i$ , par rapport au temps, et en utilisant (3.42), (3.43) et (3.46) on obtient les dynamiques des *erreurs de poursuite compensées* suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -k_1 v_1 + g_1 v_2 \\ \dot{v}_i &= -k_i v_i - g_{i-1} v_{i-1} + g_i v_{i+1} \quad i = 2, \dots, n-1 \\ \dot{v}_n &= -k_n v_n - g_{n-1} v_{n-1} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Dans cette étape, l'objectif de l'approche *Command Filtered Backstepping* est d'analyser la convergence du vecteur *erreurs de poursuite compensées*, i.e. le vecteur  $v = [v_1, \dots, v_n]^T$ . Pour ce faire, cette approche considère la fonction de Lyapounov suivante :

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_i^2 = \frac{1}{2} \|v\|^2 \quad (3.48)$$

En dérivant, par rapport au temps, cette fonction de Lyapounov et en utilisant (3.47) on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^n v_i \dot{v}_i \\ &= -k_1 v_1^2 + g_1 v_1 v_2 + \sum_{i=2}^{n-1} [-k_i v_i^2 - g_{i-1} v_i v_{i-1} + g_i v_i v_{i+1}] \\ &\quad - k_n v_n^2 - g_{n-1} v_n v_{n-1} \end{aligned} \quad (3.49)$$

où bien, de manière équivalente

$$\dot{V} = - \sum_{i=1}^n k_i v_i^2 \quad (3.50)$$

si en plus on prend  $k = \min_i(k_i)$ , alors la dérivée de la fonction de Lyapounov (3.48) est telle que :

$$\dot{V} = -k \|v\|^2 = -2 k V \quad (3.51)$$

Cette dernière équation montre que le vecteur des *erreurs de poursuite compensées*  $v$  converge globalement et exponentiellement vers zéro. En particulier, l'erreur  $\tilde{x}_n$  converge globalement et exponentiellement vers zéro puisque  $\tilde{x}_n = v_n$ . De la convergence de la fonction de Lyapounov  $V$  et de (3.48) il est évident que  $v \in L_\infty$ . Plus encore, en intégrant (3.51) il est clair

que  $v \in L_2$ . l'approche *Command Filtered Backstepping* résume l'analyse de cette étape par le premier théorème suivant :

**Théorème 3.3** (*Command Filtered Backstepping*). *Si le sous système non linéaire  $x$  du système (3.1) vérifie les hypothèses 3.1, 3.6 et 3.7, alors la loi de commande  $u = \alpha_n$ , donnée par (3.41), assure la convergence globale et exponentielle des erreurs de poursuite compensées  $v_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , et de l'erreur  $\tilde{x}_n$  vers zéro. Plus encore, pour  $i = 1, \dots, n$  on a  $v_i \in L_\infty \cap L_2$  et en particulier  $\tilde{x}_n \in L_\infty \cap L_2$ .*

### 3.5.2 Analyse complémentaire

Le Théorème 3.3 établit que les *erreurs de poursuite compensées*  $v_i$  de l'approche *Command Filtered Backstepping* possèdent les mêmes propriétés que les erreurs de poursuites  $z_i$  de l'approche *Contrôleur Backstepping*, voir Théorème 3.1. Le Théorème 3.3 ne traitant pas les propriétés des signaux  $\tilde{x}_i$  et  $\xi_i$ , pour  $i = 1, \dots, n - 1$ , il est alors complété par un deuxième théorème. L'objectif de ce dernier est de démontrer que l'approche *Command Filtered Backstepping* tend de plus en plus vers l'approche *Backstepping*, i.e. l'approximation est meilleure, lorsque l'on choisit la pulsation propre  $\omega_n$  des *filtres de commande* de plus en plus grande. Ce deuxième théorème utilise la définition suivante de l'approximation entre deux signaux :

**Définition 3.1.**  $y(t, \varepsilon) = O(\varepsilon)$  s'il existe deux constantes  $k$  et  $c$  telle que

$$|y(t, \varepsilon)| < k |\varepsilon|, \quad \forall |\varepsilon| < c \text{ et } \forall t > 0$$

où  $\varepsilon$  est défini comme  $\varepsilon = \frac{1}{\omega_n}$ , i.e. pour  $\omega_n$  de plus en plus grand  $\varepsilon$  est de plus en plus petit et donc l'approximation est meilleure.

La preuve du deuxième théorème, de l'approche *Command Filtered Backstepping*, est basée sur la théorie des perturbations singulières. Cette preuve utilise l'ensemble compact  $D_{\hat{x}} \times D_{\hat{\psi}}$ , où  $D_{\hat{x}} \subset \mathbb{R}^{2n-1}$  et  $D_{\hat{\psi}} \subset \mathbb{R}^{2n-2}$  sont des ensembles compacts qui contiennent l'origine. D'autre part, les vecteurs  $\hat{x}$  et  $\hat{\psi}$  sont définis comme  $\hat{x} = [\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}]^T \in \mathbb{R}^{2n-1}$  et  $\hat{\psi} = [\psi_{2,1}, \psi_{2,2}, \dots, \psi_{n,1}, \psi_{n,2}]^T \in \mathbb{R}^{2n-2}$ . On rappelle ici que  $\psi_{i,1}$  et  $\psi_{i,2}$  sont définis par

$\psi_{i,1} = \alpha_{i,f}$  et  $\omega_n \psi_{i,2} = \dot{\alpha}_{i,f}$  pour  $i = 2, \dots, n$ . Les équations différentielles des vecteurs  $\hat{x}$  et  $\hat{\psi}$  sont comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \hat{f}(t, \hat{x}, \hat{\psi}, \varepsilon) \\ \varepsilon \dot{\hat{\psi}} &= \hat{g}(t, \hat{x}, \hat{\psi}, \varepsilon)\end{aligned}\tag{3.52}$$

Les états initiaux, indépendants de  $\varepsilon$ , sont tels que  $\hat{x}(0) = [\tilde{x}_1(0), \dots, \tilde{x}_n(0), 0, \dots, 0]^T$  et  $\hat{\psi}(0) = 0$  et où les champs de vecteurs  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$  sont définis en concordance avec (3.40), (3.42) et (3.46).

Le champs de vecteur  $\hat{f}$ , en concordance avec (3.42) et (3.46), et en utilisant (3.43) correspond à :

$$\begin{aligned}\hat{f}_1 &= -k_1 \tilde{x}_1 + g_1 (\psi_{2,1} - \alpha_1) + g_1 \tilde{x}_2 \\ \hat{f}_i &= -k_i \tilde{x}_i - g_{i-1} (\tilde{x}_{i-1} - \xi_{i-1}) + g_i (\psi_{i+1,1} - \alpha_i) + g_i \tilde{x}_{i+1} \quad i = 2, \dots, n-1 \\ \hat{f}_n &= -k_n \tilde{x}_n - g_{n-1} v_{n-1} \\ \hat{f}_{i+n} &= -k_i \xi_i + g_i (\psi_{i+1,1} - \alpha_i) + g_i \xi_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-1\end{aligned}\tag{3.53}$$

De (3.53), on note que le champs de vecteur  $\hat{f}$  est indépendant de  $\varepsilon$ . De ce fait, de l'hypothèse de travail 3.7 et quelque soit l'ensemble compact  $D_{\hat{x}} \times D_{\hat{\psi}}$  le champ de vecteur  $\hat{f}$  et ses dérivées partielles, par rapport à  $\hat{x}$ ,  $\hat{\psi}$  et  $\varepsilon$ , sont continus et bornés et de plus  $\partial \hat{f} / \partial t$  est Lipschitz en  $\hat{x}$  uniformément en  $t$ .

D'autre part, le champs de vecteur  $\hat{g}$  n'est qu'une concaténation des *filtres de commande* (3.40) pour  $i = 2, \dots, n$ . Autrement dit, le champs de vecteur  $\hat{g}$  est comme suit :

$$\begin{aligned}\hat{g}_{2i-1} &= \psi_{i,2} \\ \hat{g}_{2i} &= -2 \zeta \psi_{i,2} - (\psi_{i,1} - \alpha_{i-1}) \quad i = 2, \dots, n\end{aligned}\tag{3.54}$$

Des équations (3.54), on note que le champs de vecteur  $\hat{g}$  est indépendant de  $\varepsilon$ . De ce fait, des les Hypothèses de travail 3.7 et 3.1 et quelque soit l'ensemble compact  $D_{\hat{x}} \times D_{\hat{\psi}}$  le champ de vecteur  $\hat{g}$  et ses premières dérivées partielles, par rapport à  $\hat{x}$ ,  $\hat{\psi}$  et  $\varepsilon$ , sont continus et bornés ;

$\partial\hat{g}/\partial t$  est continue et bornée ; de plus, les dérivées partielles premières de  $\partial\hat{g}(t, \hat{x}, \hat{\psi}, 0)/\partial\hat{\psi}$  par rapport à ses arguments sont bornées.

Pour  $\varepsilon = 0$ , l'unique solution de l'équation (3.52) est définie par  $\psi_{i,1} = \alpha_{i-1}$  et  $\psi_{i,2} = 0$  où bien, en utilisant la notation vectorielle, cette solution est notée  $\hat{\psi} = \hat{h}(t, \hat{x})$  où pour  $i = 2, \dots, n$  on a :

$$\begin{aligned} \hat{h}_{2i-1}(t, \hat{x}) &= \alpha_{i-1} \\ \hat{h}_{2i}(t, \hat{x}) &= 0 \end{aligned} \quad i = 2, \dots, n \quad (3.55)$$

En considérant les hypothèses de travail 3.7 et 3.1, sur tout compact  $D_{\hat{x}}$  la fonction  $\hat{h}(t, \hat{x})$  possède des dérivées partielles bornées par rapport à ses arguments.

Considérons maintenant que l'erreur  $z$ , de l'approche *Contrôleur Backstepping*, est la solution du problème d'ordre réduit suivant avec l'état initial  $\hat{x}(0) = [\tilde{x}_1(0), \dots, \tilde{x}_n(0), 0, \dots, 0]^T$  :

$$\dot{z} = \hat{f}(t, z, \hat{h}(t, \hat{x}), 0) \quad (3.56)$$

Pour cet état initial et du fait que  $\psi_{i,1} = \alpha_{i-1}$ , la solution du problème d'ordre réduit montre que  $\forall t > 0$  et pour  $i = n + 1, \dots, 2n - 1$  on a que  $z_i(t) = 0$ . Ceci est facile à démontrer en considérant la fonction de Lyapounov  $V_\zeta = \frac{1}{2} \xi^T \xi$  et en rappelant que  $\xi_n = 0$ . En considérant les faits relevés auparavant, la solution pour les états  $z_i(t)$ , pour  $i = 1, \dots, n$  et pour le même état initial, est tout simplement la solution du problème standard de l'approche *Backstepping*, présenté en Section 3.2, lequel est exponentiellement stable. Ceci est aussi facile à démontrer en considérant la fonction de Lyapounov  $V_{\hat{x}} = \frac{1}{2} \hat{x}^T \hat{x}$ . Par conséquence, pour le problème d'ordre réduit, les états  $z_i(t)$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , convergent exponentiellement vers zéro. Donc du fait que  $z_i(t)$  convergent exponentiellement vers zéro, pour  $i = 1, \dots, n$ , et que  $z_i(t) = 0 \forall t > 0$  pour  $i = n + 1, \dots, 2n - 1$  ; alors l'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable pour le problème d'ordre réduit (3.56).

En définissant l'erreur  $\hat{y} = \hat{\psi} - \hat{h}(t, \hat{x})$ , alors pour  $(t, \hat{x})$  fixés et  $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$  le modèle sur la

frontière  $\frac{d\hat{y}}{d\tau} = \hat{g}(t, \hat{x}, \hat{y} + \hat{h}(t, \hat{x}))$  est tel que

$$\frac{d\hat{y}}{d\tau} = A \hat{y} \quad (3.57)$$

où  $A$  est une matrice bloc diagonale avec  $n - 1$  blocs ; chaque bloc est tel que :

$$J_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \zeta \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Dans ce cas, on voit que le modèle sur la frontière est indépendant de  $\hat{x}$  et que la matrice  $A$  est Hurwitz. De ce fait, l'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable pour le modèle sur la frontière.

Dans tout compact  $D_{\hat{x}} \times D_{\hat{y}}$ , toutes les conditions du Théorème 11.2 dans [58] sont respectées. Dans ce cas, si l'on dénote les solutions de (3.52) comme  $\hat{x}(t, \varepsilon)$ ,  $\hat{\psi}(t, \varepsilon)$  et la solution de (3.56) comme  $z(t)$ , alors on a le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \hat{x}(t, \varepsilon) - z(t) &= O(\varepsilon) \\ \hat{\psi}(t, \varepsilon) - \hat{h}(t, z(t)) &= O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.59)$$

L'approche *Command Filtered Backstepping* résume l'analyse de cette étape par le deuxième théorème suivant :

**Théorème 3.4** (*Command Filtered Backstepping*). *Si le sous système non linéaire  $x$  du système (2.24) respecte les Hypothèses 3.1, 3.6 et 3.7, alors la loi de commande  $u = \alpha_n$ , donnée par (3.41), assure les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} \hat{x}(t, \varepsilon) - z(t) &= O(\varepsilon) \\ \hat{\psi}_{i,1}(t, \varepsilon) - \alpha_{i-1, \text{Backstepping}} &= O(\varepsilon) \\ \hat{\psi}_{i,2}(t, \varepsilon) - \dot{\alpha}_{i-1, \text{Backstepping}} &= O(\varepsilon) \quad i = 2, \dots, n \end{aligned}$$

L'approche *Command Filtered Backstepping* est implémentée selon le diagramme bloc donné par la figure 3-1. Cette figure montre la complexité de l'implémentation de cette approche. En

effet, en plus des  $n$  *filtre de commande*, dans la figure  $n = 3$ , il faut ajouter les  $n - 1$  filtres permettant de générer les signaux  $\xi_i$  pour  $i = 1, \dots, n-1$ . On peut donc conclure que l'approche *Command Filtered Backstepping* bien qu'elle réduit les contraintes des hypothèses de travail de l'approche *Backstepping* et le problème d'*explosion de complexité*, elle crée un problème d'explosion de signaux et de filtres, i.e.  $2n - 2$  signaux et  $2n - 1$  filtres. En plus, l'approche *Command Filtered Backstepping* exige que la pulsation propre  $\omega_n$  des *filtres de commande* soit grande afin que l'approximation, par rapport à l'approche *Backstepping*, soit suffisamment bonne. De ce fait, réaliser cette approche pratiquement, implémentation temps réel, n'est pas évidente en particulier lorsque le degré du système est important.

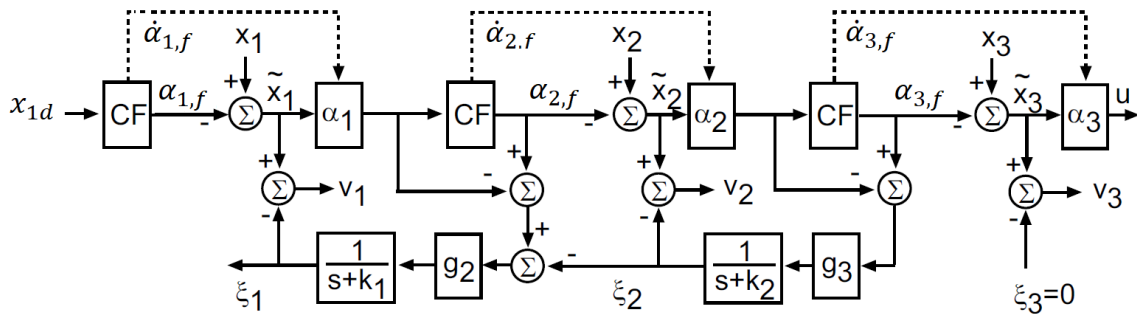


FIGURE 3-1 – Bloc diagramme de l'approche *Command Filtered Backstepping* pour  $n = 3$  où CF représente le *filtre de commande* (3.40).

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'approche *Backstepping* générale permettant la détermination de la loi de commande pour les systèmes ayant la forme *Strict Feedback Form*. Nous avons aussi vu que les hypothèses de travail de cette approche sont très contraignantes ce qui limite l'étendue de la classe des systèmes *Strict Feedback Systems* pour lesquels l'approche *Backstepping* peut être appliquée. D'autre part, pour les systèmes qui respectent les hypothèses de travail de l'approche *Backstepping*, nous avons vu que cette approche possède plusieurs inconvénients et dont le plus majeur est le problème d'*explosion de complexité*.

D'autre part, nous avons présenté les deux plus importantes approches, en l'occurrence *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping*, qui ont été proposées dans la littérature afin de contrecarrer les inconvénients de l'approche *Backstepping*. En effet, ces deux

dernières approches exigent des hypothèses de travail beaucoup moins contraignantes que celles de l'approche *Backstepping* tout en réduisant le problème d'*explosion de complexité* grâce à l'introduction d'un ensemble de filtres.

Bien qu'elles apportent des solutions aux inconvénients de l'approche *Backstepping*, nous avons relevé que les approches *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping* elles mêmes montrent les limites et inconvénients suivants :

- Les hypothèses de travail des deux approches restent assez contraignantes.
- L'approche *Dynamic Surface Control* est une approche semi-globale.
- L'approche *Dynamic Surface Control* introduit  $n$  filtres de premier ordre et  $2n$  signaux supplémentaires  $\alpha_{i,f}$  et  $\dot{\alpha}_{i,f}$  pour  $i = 1, \dots, n$ .
- L'approche *Command Filtered Backstepping* introduit  $n - 1$  filtres de deuxième ordre,  $n$  filtres de premier ordre et  $4n - 1$  signaux supplémentaires  $\alpha_{i,f}$ ,  $\dot{\alpha}_{i,f}$ ,  $v_i$  pour  $i = 1, \dots, n$  et  $\xi_i$  pour  $i = 1, \dots, n - 1$ .

Plus encore, les approches *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping* ne sont que des approximations de l'approche *Backstepping* et ne peuvent donc pas avoir de meilleurs résultats que l'approche *Backstepping*. L'approximation est d'autant meilleure que les constantes de temps des filtres dans l'approche *Dynamic Surface Control* sont très petites où bien la pulsation propre des filtres dans l'approche *Command Filtered Backstepping* est très grande. Ce fait rend difficile l'implémentation temps réel de ces deux approches.

Un autre fait que l'on a relevé et que les trois approches *Backstepping*, *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping* n'utilisent pas la vraie référence, mais utilisent la référence filtrée. En effet, l'approche *Backstepping* utilise la référence filtrée et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $n$ , alors que les approches *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping* utilisent la référence filtrée et sa première dérivée.

Dans le chapitre suivant, on présentera notre nouvelle approche désignée par le nom *Commande à Gain Récursif*. On montrera que notre approche non seulement présente une solution

radicale aux inconvénients de l'approche *Backstepping* mais qu'elle l'a dépassé. Plus encore, verra que notre approche ne présente aucuns des inconvénients relevés ci-haut dans les cas des approches *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping*.

Cette page est intentionnellement laissée blanche

## CHAPITRE 4

APPROCHE *COMMANDE À GAIN RÉCURSIF*

## 4.1 Introduction

Dans le précédent chapitre, nous avons présenté et discuté les avantages et inconvénients de l'approche *Backstepping*. Nous avons aussi présenté et discuté les avantages et inconvénients des approches *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping*, lesquelles ont été conçues afin de traiter les inconvénients et limites de l'approche *Backstepping*.

Dans ce chapitre, notre objectif est de présenter et d'analyser notre nouvelle approche que nous avons conçue et développée afin de traiter les limites et inconvénients des approches *Backstepping*, *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping*. Nous avons désigné cette nouvelle approche par le nom *Commande à Gain Récurisif*. A la différence des deux dernières approches, l'approche *Commande à Gain Récurisif* n'est ni une approximation de l'approche *Backstepping* ni elle est basée sur l'introduction d'un ensemble de filtres. En effet, l'approche *Commande à Gain Récurisif* est basée, d'une part, sur l'introduction d'un ensemble de signaux désignés par le nom *signaux fictifs* et, d'autre part, sur une nouvelle manière de construction des fonctions de Lyapounov. D'autre part, nous réaliserons l'étude de robustesse de l'approche *Commande à Gain Récurisif* pour la classe des systèmes *Strict Feedback Systems* incertains.

## 4.2 Approche *Commande à Gain Récuratif*

A la différence des autres approches qui sont basées sur l'introduction d'un ensemble de filtres, l'approche *Commande à Gain Récuratif* que l'on propose dans cette thèse est basée sur l'introduction d'une nouvelle notion que l'on a désignée par le nom *signal fictif* [102]. En effet et afin de construire les fonctions de Lyapounov nécessaires à l'analyse de convergence de notre approche on introduit à chaque étape un *signal fictif*. Ces signaux sont dits *fictifs* car ils ne sont pas implémentés dans la loi de commande, mais ils sont seulement nécessaires pour l'analyse de convergence de la *Commande à Gain Récuratif*. En plus de la nouvelle notion de *signal fictif*, notre approche utilise aussi la notion de taux de variation maximal d'une fonction tel que définie dans la section 2.4.1.2. Pour les besoins de l'analyse on rappelle donc cette dernière notion et on donne la définition d'un *signal fictif*.

**Définition 4.1** (Taux de variation maximal). S'il existe une constante finie  $c > 0$ , non nécessairement connue, telle que la dérivée temporelle d'un signal  $h(t)$  vérifie la condition

$$|\dot{h}(t)| \leq c \quad \forall t \geq 0$$

alors la constante  $c$  est le taux de variation maximal du signal  $h(t)$ .

**Définition 4.2** (Signal fictif). On définit le *signal fictif*  $\phi$  comme étant le signal décrit par l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\dot{\phi} + k \phi = \lambda(k, \dots) \tag{4.1}$$

où la constante réelle  $k > 0$  est un paramètre de réglage. L'équation différentielle (4.1) définissant le *signal fictif*  $\phi$  possède deux termes. Le premier terme  $\dot{\phi} + k \phi$ , correspondant à l'équation différentielle sans second membre, constitue la définition de base du *signal fictif*  $\phi$  et reste donc inchangé, alors que le second terme  $\lambda(k, \dots)$ , dépendant de la constante de réglage  $k$  et d'autres signaux, peut correspondre à différentes formes. Ce deuxième terme est défini par l'utilisateur selon les besoins de l'analyse.

Le *signal fictif*  $\phi$  est utilisé pour décomposer une erreur  $e$  en les deux erreurs  $e_1$  et  $e_2$ . Dans ce cas et au lieu d'analyser directement la convergence de l'erreur  $e$ , on réalise successivement l'analyse de convergence des erreurs  $e_1$  et  $e_2$  et on conclue sur la convergence de l'erreur  $e$ . Le *signal fictif*  $\phi$  n'est utilisé que pour l'analyse de convergence et plus exactement il n'apparaît pas dans la loi de commande recherchée. Autrement dit, le *signal fictif*  $\phi$  n'existe pas réellement et ce dans le sens que : il n'y a aucune raison de le générer même s'il est décrit par une équation différentielle permettant de le générer. C'est pour cette raison que l'on a désigné le signal  $\phi$  par le nom *signal fictif*.

L'approche *Commande à Gain Récurisif* que l'on expose ici est basée sur la décomposition de l'erreur standard  $z_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , de l'approche *Backstepping* en deux autres erreurs grâce à l'introduction à chaque étape  $i$  d'un *signal fictif*  $\phi_i$ . Dans ce cas l'analyse de convergence de l'erreur  $z_i$  sera réalisée en trois étapes et où un théorème sera énoncé pour résumer l'analyse de chacune des trois étapes.

Pour le même objectif de poursuite de trajectoire  $y \rightarrow y_{ref}$ , où  $y_{ref}$  est une référence variable, l'approche *Commande à Gain Récurisif* cherche donc à traiter les limites et inconvénients de l'approche *Backstepping* et ce pour la commande des systèmes non linéaires appartenant à la classe *Strict Feedback Systems* que l'on rappelle ici :

$$\begin{aligned}
 \dot{\zeta} &= \Gamma(\zeta, x_1) \\
 \dot{x}_i &= g_i(\zeta, x_1, \dots, x_i) x_{i+1} + f_i(\zeta, x_1, \dots, x_i) & i = 1, \dots, n-1 \\
 \dot{x}_n &= g_n(\zeta, x_1, \dots, x_n) u + f_n(\zeta, x_1, \dots, x_n) \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

où  $\zeta \in \mathfrak{R}^p$ ,  $x_i \in \mathfrak{R}$  pour  $i = 1, \dots, n$  et  $u \in \mathfrak{R}$  est l'unique entrée du système. Comme expliquer dans les précédents chapitres, la loi de commande  $u$  sera conçue pour le sous système  $x$  du système (4.2).

Comme pour les autres approches présentées dans cette thèse, l'approche *commande à Gain Récurisif* formule des hypothèses de travail qui résument les conditions que le vrai signal de référence noté  $x_{1d}$  et les fonctions scalaires non linéaires  $g_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  et  $f_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$ ,

$i = 1, \dots, n$ , doivent satisfaire pour que l'approche soit applicable à la classe des systèmes (4.2). Ces hypothèses sont édictées comme suit :

**Hypothèse 4.1.** *Il existe une borne constante  $\bar{g}_i > 0$ , non nécessairement connue, pour laquelle la fonction non linéaire scalaire  $g_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  est telle que  $0 < |g_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)| \leq \bar{g}_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ .*

**Hypothèse 4.2.**  *$\forall t > 0$  le signal de référence  $x_{1d}$  doit être continu, borné et ayant une dérivée première bornée telle que  $|\dot{x}_{1d}| \leq c_1$ . La constante  $c_1 > 0$  peut être inconnue.*

**Hypothèse 4.3.** *Les fonctions non linéaires scalaires  $g_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  et  $f_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  pour  $i = 1, \dots, n$  doivent être continues, bornées et ayant des dérivées premières bornées.*

**Hypothèse 4.4.** *Pour  $i = 2, \dots, n$ , il existe des bornes constantes et inconnues  $c_i > 0$  telles que les dérivées premières des commandes virtuelles sont bornées, c'est à dire  $|\dot{\alpha}_i| \leq c_i$ .*

Afin de montrer que l'approche *Commande à Gain Récuratif* est applicable à une classe des systèmes *Strict Feedback Systems* plus étendue comparativement aux approches *Backstepping*, *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping* on présente une comparaison des hypothèses de travail de ces différentes approches.

L'hypothèse 4.1 de l'approche *Commande à Gain Récuratif* est équivalente aux hypothèses des autres approches. En effet, la condition  $g_i(\zeta, x_1, \dots, x_i) \neq 0, i = 1, \dots, n$ , est une condition standard qui permet d'assurer la contrôlabilité du système (4.2). Pour l'approche *Commande à Gain Récuratif*, il est important de noter que la constante  $\bar{g}_i > 0, i = 1, \dots, n$ , est seulement nécessaire pour l'analyse de convergence et donc peut être inconnue.

L'hypothèse 4.2 de l'approche *Commande à Gain Récuratif* exige la continuité et la bornitude du vrai signal de référence  $x_{1d}$ . L'hypothèse 4.2 n'exige pas la disponibilité, soit sous forme analytique où bien par filtrage, ni la continuité de la dérivée première  $\dot{x}_{1d}$  de la référence  $x_{1d}$  mais elle exige seulement sa bornitude. La constante  $c_1$  est le taux de variation maximale du signal de référence  $x_{1d}$ . Il est clair que l'hypothèse 4.2 de l'approche *Commande à Gain Récuratif* est très simple si on la compare à l'hypothèse 3.2 de l'approche *Backstepping*. En effet, l'hypothèse 3.2 de l'approche *Backstepping* exige la continuité, la bornitude et la disponibilité,

forme analytique, du signal de référence et elle exige aussi que les dérivées successives du signal de référence jusqu'à l'ordre  $n - 1$  soient continues, bornées et disponibles analytiquement et en plus la  $n^{ième}$  dérivée soit bornée et disponible analytiquement. Comme indiqué dans le Chapitre 3, l'hypothèse 3.2 de l'approche *Backstepping* est satisfaite par l'implémentation du filtre d'ordre  $n$  tel que donné par (3.2). Remarquer que l'approche *Backstepping* n'utilise pas la vraie référence  $x_{1d}$ , mais utilise la référence filtrée  $\psi_1$  et ses dérivées générées par filtrage de la vraie référence  $x_{1d}$ . L'hypothèse 4.2 de l'approche *Commande à Gain Récuratif* est aussi plus simple que les hypothèses 3.4 et 3.6 des approches *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping* respectivement. En effet, les hypothèses 3.4 et 3.6 exigent que la référence soit continue et bornée et que sa première dérivée soit continue, bornée et disponible. Comme pour l'approche *Backstepping*, les approches *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping* n'utilisent pas la vraie référence  $x_{1d}$ , mais utilisent la référence filtrée  $\psi_1$  et sa première dérivée  $\psi_1^{(1)}$  générées par filtrage de la vraie référence  $x_{1d}$  en utilisant le filtre de premier ordre (3.13).

L'hypothèse 4.3 de l'approche *Commande à Gain Récuratif* exige seulement la continuité et la bornitude des fonctions non linéaires scalaires  $g_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  et  $f_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  pour  $i = 1, \dots, n$ . L'hypothèse 4.3 de l'approche *Commande à Gain Récuratif* n'exige ni la disponibilité ni la continuité de leurs premières dérivées, mais seulement leurs bornitudes. Il est clair que l'hypothèse 4.3 de l'approche *Commande à Gain Récuratif* est très simple si on la compare à l'hypothèse 3.3 de l'approche *Backstepping*. En effet, l'hypothèse 3.3 de l'approche *Backstepping* exige que les fonctions non linéaires scalaires  $g_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  et  $f_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , soient telles que  $g_i, f_i \in C^{n-i}$ . L'hypothèse 4.3 de l'approche *Commande à Gain Récuratif* est aussi plus simple que les hypothèses 3.5 et 3.7 des approches *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping* respectivement. En effet, l'approche *Command Filtered Backstepping* exige que les fonctions non linéaires scalaires  $g_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  et  $f_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , et leurs premières dérivées soient continues et bornées et de plus que les fonctions  $f_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  soient localement Lipschitziennes. L'approche *Dynamic Surface Control* exige, pour le système (3.12), que les fonctions non linéaires scalaires  $f_i(\zeta, x_1, \dots, x_i)$  et leurs premières dérivées soient continues et bornées.

L'hypothèse 4.4 de l'approche *Commande à Gain Récur­sif* exige la bornitude des dérivées premières des commandes virtuelles, mais elle n'exige ni leurs continuités ni leurs disponibilités. Les constantes inconnues  $c_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ , sont les taux de variation maximale des commandes virtuelles  $\alpha_i$ . Il est clair que l'hypothèse 4.4 de l'approche *Commande à Gain Récur­sif* est très simple comparativement à l'approche *Backstepping*. En effet, l'approche *Backstepping* exige la connaissance des dérivées des commandes virtuelles dans leurs formes analytiques et ce jusqu'à l'ordre  $n - i$ . L'hypothèse 4.4 de l'approche *Commande à Gain Récur­sif* est aussi plus simple comparativement aux approches *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping*. En effet, ces deux approches utilisent les approximations des commandes virtuelles  $\alpha_i$  et leurs dérivées premières en implémentant des filtres de premier ordre ou bien de deuxième ordre respectivement.

La comparaison entre les hypothèses de travail de l'approche *Commande à Gain Récur­sif* et celles des approches *Backstepping*, *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping* montre clairement que l'approche *Commande à Gain Récur­sif* règle définitivement le problème des conditions très contraignantes qui limitent l'applicabilité de l'approche *Backstepping*. De ce fait, l'approche *Commande à Gain Récur­sif* peut être appliquée à une plus large classe des systèmes *Strict Feedback Systems* que les approches *Backstepping*, *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping*.

A la différence des autres approches et comme expliqué ci-haut, l'approche *Commande à Gain Récur­sif* est présenté en trois théorèmes où, dans l'ordre, chaque théorème traite l'analyse de convergence des erreurs suivantes :  $\tilde{x}_i$ ,  $\tilde{\alpha}_i$  et  $z_i$ . En effet, l'erreur standard  $z_i$  de l'approche *Backstepping*, voir équation (3.4), est décomposée en la somme de deux nouvelles erreurs  $\tilde{x}_i$  et  $\tilde{\alpha}_i$  et ce en ajoutant et soustrayant le *signal fictif*  $\phi_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , comme suit :

$$\begin{aligned} z_i &= x_i - \alpha_i = x_i - \phi_i + \phi_i - \alpha_i \\ z_i &= \tilde{x}_i + \tilde{\alpha}_i \end{aligned} \qquad i = 1, \dots, n \tag{4.3}$$

tel que

$$\begin{aligned}\tilde{x}_i &= x_i - \phi_i & i &= 1, \dots, n \\ \tilde{\alpha}_i &= \phi_i - \alpha_i & i &= 1, \dots, n\end{aligned}\tag{4.4}$$

où  $x_i$  est le  $i^{ieme}$  état du sous système  $x$  du système (4.2) pour  $i = 1, \dots, n$ ;  $\alpha_i$  est la  $i^{ieme}$  commande virtuelle pour  $i = 2, \dots, n$ . Pour une raison de convenance de notation, le signal de référence désiré  $x_{1d}$  est noté  $\alpha_1$ , i.e.  $x_{1d} = \alpha_1$ .

Dans l'approche *Commande à Gain Récurisif*, on définit récursivement les commandes virtuelles  $\alpha_i$  et la commande réelle  $u$  comme suit :

$$\begin{aligned}\alpha_{i+1} &= \frac{1}{g_i} [-k_i x_i - f_i + k_i \alpha_i] & i &= 1, \dots, n-1 \\ u &= \frac{1}{g_n} [-k_n x_n - f_n + k_n \alpha_n]\end{aligned}\tag{4.5}$$

Comme expliqué au début de cette section et pour atteindre les objectifs de l'analyse, voir définition 4.2, les *signaux fictifs*  $\phi_i$  sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_i + k_i \phi_i &= k_i \alpha_i + g_i (\tilde{x}_{i+1} + \tilde{\alpha}_{i+1}) & i &= 1, \dots, n-1 \\ \dot{\phi}_n + k_n \phi_n &= k_n \alpha_n & i &= n\end{aligned}\tag{4.6}$$

où les constantes  $k_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sont les gains de réglages.

**Théorème 4.1.** *Si le sous système  $x$  du système (4.2) satisfait les hypothèses de travail 4.1, 4.2 et 4.3 avec la commande réelle définie dans (4.5), alors les erreurs  $\tilde{x}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) converge globalement et exponentiellement vers zéro. En plus, pour  $i = 1, \dots, n$ , on a  $\tilde{x}_i \in L_2 \cap L_\infty$ .*

*Démonstration.* Pour  $i = 1, \dots, n-1$ , en ajoutant et soustrayant  $g_i \alpha_{i+1}$  le  $i^{ieme}$  état  $x_i$  du sous système  $x$  peut être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= g_i x_{i+1} + f_i \\ \dot{x}_i &= g_i x_{i+1} + f_i - g_i \alpha_{i+1} + g_i \alpha_{i+1} \\ \dot{x}_i &= g_i (x_{i+1} - \alpha_{i+1}) + f_i + g_i \alpha_{i+1}\end{aligned}\tag{4.7}$$

en ajoutant et soustrayant le *signal fictif*  $\phi_{i+1}$  avec les définitions (4.4) on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= g_i (x_{i+1} - \phi_{i+1} + \phi_{i+1} - \alpha_{i+1}) + f_i + g_i \alpha_{i+1} \\ \dot{x}_i &= g_i (\tilde{x}_{i+1} + \tilde{\alpha}_{i+1}) + f_i + g_i \alpha_{i+1}\end{aligned}\tag{4.8}$$

et en utilisant les commandes virtuelles  $\alpha_{i+1}$  données par (4.5), il s'en suit que :

$$\dot{x}_i = g_i (\tilde{x}_{i+1} + \tilde{\alpha}_{i+1}) - k_i x_i + k_i \alpha_i\tag{4.9}$$

Considérons la fonction de Lyapounov pour la  $i^{\text{eme}}$  erreur de poursuite  $\tilde{x}_i = x_i - \phi_i$  :

$$V_{1,i} = \frac{1}{2} \tilde{x}_i^2\tag{4.10}$$

dérivons  $V_{1,i}$ , par rapport au temps, pour obtenir :

$$\dot{V}_{1,i} = \tilde{x}_i \dot{\tilde{x}}_i = \tilde{x}_i (\dot{x}_i - \dot{\phi}_i)\tag{4.11}$$

en remplaçant  $\dot{\phi}_i$  à partir de (4.6) avec (4.9) dans (4.11) et en utilisant (4.4) on trouve :

$$\dot{V}_{1,i} = \tilde{x}_i (-k_i x_i + k_i \phi_i) = -k_i \tilde{x}_i^2\tag{4.12}$$

et en utilisant (4.10) on a finalement

$$\dot{V}_{1,i} = -k_i |\tilde{x}_i|^2 = -2 k_i V_{1,i}\tag{4.13}$$

Pour  $i = n$ , le  $n^{\text{eme}}$  état  $x_n$  est comme suit :

$$\dot{x}_n = g_n(\zeta, x) u + f_n(\zeta, x)\tag{4.14}$$

en utilisant la commande réelle  $u$  donnée par (4.5), on obtient :

$$\dot{x}_n = -k_n x_n + k_n \alpha_n\tag{4.15}$$

Considérons la fonction de Lyapounov suivante pour l'erreur de poursuite  $\tilde{x}_n = x_n - \phi_n$  :

$$V_{1,n} = \frac{1}{2} \tilde{x}_n^2 \quad (4.16)$$

dérivons  $V_{1,n}$ , par rapport au temps, pour avoir :

$$\dot{V}_{1,n} = \tilde{x}_n \dot{\tilde{x}}_n = \tilde{x}_n (\dot{x}_n - \dot{\phi}_n) \quad (4.17)$$

en remplaçant  $\dot{\phi}_n$  à partir de (4.6) avec (4.15) dans (4.17) et en utilisant (4.4) on obtient :

$$\dot{V}_{1,n} = \tilde{x}_n (-k_n x_n + k_n \phi_n) = -k_n \tilde{x}_n^2 \quad (4.18)$$

et en utilisant (4.16) on a finalement

$$\dot{V}_{1,n} = -k_n |\tilde{x}_n|^2 = -2 k_n V_{1,n} \quad (4.19)$$

A partir de (4.13) et (4.19), il est clair que pour tout choix du gain de réglage  $k_i > 0$ , la fonction de Lyapounov individuelle  $V_{1,i}$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , converge globalement et exponentiellement vers zéro. Par conséquence, de (4.10) et (4.16), l'erreur de poursuite  $\tilde{x}_i$  converge globalement et exponentiellement vers zéro avec un taux de convergence déterminé par le gain de réglage  $k_i$ . A partir de (4.10) et (4.16), il est facile de voir que  $\tilde{x}_i \in L_\infty$ . Plus encore, en intégrant (4.13) et (4.19), on déduit que  $\tilde{x}_i \in L_2$ . Ceci termine la démonstration.  $\square$

**Théorème 4.2.** *Si le sous système  $x$  du système (4.2) satisfait les hypothèses de travail 4.1 à 4.4 avec les commandes virtuelles définies par (4.5), alors les erreurs  $\tilde{\alpha}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) convergent globalement et exponentiellement dans des boules de centres zéro et dont les rayons peuvent être rendus aussi petits que désiré en choisissant les gains de réglage  $k_i$  suffisamment grands. En plus, pour  $i = 1, \dots, n$ , on a  $\tilde{\alpha}_i \in L_\infty$ .*

*Démonstration.* Pour  $i = n$ , considérons la fonction de Lyapounov suivante pour l'erreur de poursuite  $\tilde{\alpha}_n = \phi_n - \alpha_n$  :

$$V_{2,n} = \frac{1}{2} \tilde{\alpha}_n^2 \quad (4.20)$$

dérivons  $V_{2,n}$ , par rapport au temps, pour avoir :

$$\dot{V}_{2,n} = \tilde{\alpha}_n \dot{\tilde{\alpha}}_n = \tilde{\alpha}_n (\dot{\phi}_n - \dot{\alpha}_n) \quad (4.21)$$

remplaçant  $\dot{\phi}_n$  à partir de (4.6) dans (4.21) pour obtenir :

$$\dot{V}_{2,n} = \tilde{\alpha}_n (-k_n \tilde{\alpha}_n - \dot{\alpha}_n) = -k_n \tilde{\alpha}_n^2 - \tilde{\alpha}_n \dot{\alpha}_n \quad (4.22)$$

alors l'inégalité de Young donne :

$$\dot{V}_{2,n} \leq -\left(k_n - \frac{\varepsilon_{1,n}}{2}\right) \tilde{\alpha}_n^2 + \frac{\dot{\alpha}_n^2}{2 \varepsilon_{1,n}} \quad (4.23)$$

et en considération l'hypothèse de travail 4.4 avec (4.20), il s'en suit que :

$$\dot{V}_{2,n} \leq -2 \left(k_n - \frac{\varepsilon_{1,n}}{2}\right) V_{2,n} + \frac{c_n^2}{2 \varepsilon_{1,n}} \quad (4.24)$$

Dans ce cas, en choisissant

$$\varepsilon_{1,n} \gg \frac{c_n^2}{2} \quad \text{et} \quad k_n > \frac{\varepsilon_{1,n}}{2} \quad (4.25)$$

c'est à dire

$$k_n \gg \frac{c_n^2}{4} \quad (4.26)$$

il est facile de conclure à partir de (4.24) que la fonction de Lyapounov  $V_{2,n}$  converge globalement et exponentiellement. Par conséquence, l'erreur de poursuite  $\tilde{\alpha}_n$  converge globalement et exponentiellement dans une boule de centre zéro et dont le rayon est tel que

$$R_n = \sqrt{\frac{c_n^2}{2 \varepsilon_{1,n} \left(k_n - \frac{\varepsilon_{1,n}}{2}\right)}} \quad (4.27)$$

qu'on peut rendre aussi petit que désiré en choisissant, conformément à (4.26), le paramètre de réglage  $k_n$  suffisamment grand.

Pour  $i = n - 1, \dots, 1$ , considérons la fonction de Lyapounov suivante pour la  $i^{\text{ieme}}$  erreur de poursuite  $\tilde{\alpha}_i = \phi_i - \alpha_i$  :

$$V_{2,i} = \frac{1}{2} \tilde{\alpha}_i^2 \quad (4.28)$$

dérivons  $V_{2,i}$ , par rapport au temps, pour obtenir :

$$\dot{V}_{2,i} = \tilde{\alpha}_i \dot{\tilde{\alpha}}_i = \tilde{\alpha}_i (\dot{\phi}_i - \dot{\alpha}_i) \quad (4.29)$$

remplaçant  $\dot{\phi}_i$  à partir de (4.6) dans (4.29) pour avoir :

$$\dot{V}_{2,i} = \tilde{\alpha}_i (-k_i \tilde{\alpha}_i + g_i (\tilde{x}_{i+1} + \tilde{\alpha}_{i+1}) - \dot{\alpha}_i) \quad (4.30)$$

Conformément au Théorème 4.1, l'erreur de poursuite  $\tilde{x}_{i+1}$  converge globalement et exponentiellement vers zéro, par conséquent le terme correspondant peut être ignoré dans la dérivée de la fonction de Lyapounov (4.30), donc on peut écrire que

$$\dot{V}_{2,i} = -k_i \tilde{\alpha}_i^2 - \tilde{\alpha}_i \dot{\alpha}_i + g_i \tilde{\alpha}_i \tilde{\alpha}_{i+1} \quad (4.31)$$

et en utilisant l'inégalité de Young, on obtient :

$$\dot{V}_{2,i} \leq -\left(k_i - \frac{\varepsilon_{1,i}}{2} - \frac{\varepsilon_{2,i}}{2}\right) \tilde{\alpha}_i^2 + \frac{\dot{\alpha}_i^2}{2 \varepsilon_{1,i}} + \frac{g_i^2 \tilde{\alpha}_{i+1}^2}{2 \varepsilon_{2,i}} \quad (4.32)$$

En considération les hypothèses de travail 4.1, 4.2, 4.4 et le fait que l'erreur de poursuite précédente  $\tilde{\alpha}_{i+1}$  converge à l'intérieur d'une boule de rayon  $R_{i+1}$ , autrement dit  $|\tilde{\alpha}_{i+1}| \leq R_{i+1}$ , il s'en suit que :

$$\dot{V}_{2,i} \leq -2 \left(k_i - \frac{\varepsilon_{1,i}}{2} - \frac{\varepsilon_{2,i}}{2}\right) V_{2,i} + \frac{c_i^2}{2 \varepsilon_{1,i}} + \frac{\bar{g}_i^2 R_{i+1}^2}{2 \varepsilon_{2,i}} \quad (4.33)$$

Dans ce cas, en choisissant

$$\varepsilon_{1,i} \gg \frac{c_i^2}{2}, \quad \varepsilon_{2,i} \gg \frac{\bar{g}_i^2 R_{i+1}^2}{2} \quad \text{et} \quad k_i > \frac{\varepsilon_{1,i} + \varepsilon_{2,i}}{2} \quad (4.34)$$

c'est à dire

$$k_i \gg \frac{c_i^2 + \bar{g}_i^2 R_{i+1}^2}{4} \quad (4.35)$$

il est facile de conclure à partir de (4.33) que la fonction de Lyapounov  $V_{2,i}$  converge globalement et exponentiellement. Par conséquent, l'erreur de poursuite  $\tilde{\alpha}_i$  converge globalement et

exponentiellement dans une boule de centre zéro et dont le rayon est tel que

$$R_i = \sqrt{\left[ \frac{c_i^2}{\varepsilon_{1,i}} + \frac{\bar{g}_i^2 R_{i+1}^2}{\varepsilon_{2,i}} \right] / \left[ 2 \left( k_i - \frac{\varepsilon_{1,i}}{2} - \frac{\varepsilon_{2,i}}{2} \right) \right]} \quad (4.36)$$

qui peut être rendu aussi petit que désiré en choisissant, conformément à (4.35), le paramètre de réglage  $k_i$  suffisamment grand.

A partir des relations (4.27) et (4.36) qui donnent les rayons de convergence des erreurs de poursuite  $\tilde{\alpha}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), des remarques importantes doivent être tirées. En effet, les bornes  $\bar{g}_i$  des fonctions scalaires  $g_i$  sont souvent inconnues mis à part lorsque ces fonctions correspondent à des constantes, voir par exemple les systèmes correspondants aux moteurs électriques en Chapitre 2. De plus, les taux de variation maximale  $c_i$  des commandes virtuelles et les rayons de convergence  $R_i$  sont inconnus. Par conséquent, il n'est pas possible de choisir des valeurs exactes pour les gains de réglages  $k_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Dans ce cas, une condition suffisante et nécessaire pour assurer la convergence consiste à choisir les gains de réglages  $k_i$  suffisamment grands. D'autre part, à partir de (4.20) et (4.28) il est clair que  $\tilde{\alpha}_i \in L_\infty$ . Ceci termine la démonstration.  $\square$

**Théorème 4.3.** *Si le sous système  $x$  du système (4.2) satisfait les hypothèses de travail 4.1 à 4.4 avec la commande réelle  $u$  définie dans (4.5), alors les erreurs  $z_i = x_i - \alpha_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) convergent globalement et exponentiellement dans des boules de centres zéro et dont les rayons peuvent être rendus aussi petits que désiré en choisissant les gains de réglage  $k_i$  suffisamment grands. En plus, pour  $i = 1, \dots, n$ , on a  $z_i \in L_\infty$  et  $x_i, \alpha_i, u \in L_\infty$  pour  $i = 1, \dots, n$ .*

*Démonstration.* Pour  $i = 1, \dots, n$ , considérons la fonction de Lyapounov suivante pour l'erreur de poursuite  $z_i = x_i - \alpha_i$  :

$$V_{3,i} = \frac{1}{2} z_i^2 = \frac{1}{2} [x_i - \alpha_i]^2 \quad (4.37)$$

en ajoutant et soustrayant le *signal fictif*  $\phi_i$  avec 4.4 on obtient :

$$\begin{aligned} V_{3,i} &= \frac{1}{2} [x_i - \phi_i + \phi_i - \alpha_i]^2 \\ V_{3,i} &= \frac{1}{2} [\tilde{x}_i + \tilde{\alpha}_i]^2 \\ V_{3,i} &= \frac{1}{2} \tilde{x}_i^2 + \frac{1}{2} \tilde{\alpha}_i^2 + \tilde{x}_i \tilde{\alpha}_i \end{aligned} \quad (4.38)$$

alors l'inégalité de Young donne :

$$V_{3,i} \leq \tilde{x}_i^2 + \tilde{\alpha}_i^2 \quad (4.39)$$

laquelle peut être réécrite sous la forme suivante en utilisant les définitions des fonctions de Lyapounov  $V_{1,i}$  et  $V_{2,i}$  pour  $i = 1, \dots, n$  :

$$V_{3,i} \leq 2 V_{1,i} + 2 V_{2,i} \quad (4.40)$$

1) Pour  $i = n$  et en considération les équations (4.19) et (4.24), la dérivée temporelle de  $V_{3,n}$  est comme suit :

$$\dot{V}_{3,n} \leq -4 k_n V_{1,n} - 4 \left(k_n - \frac{\varepsilon_{1,n}}{2}\right) V_{2,n} + \frac{c_n^2}{\varepsilon_{1,n}} \quad (4.41)$$

et puisque  $0 < \left(k_n - \frac{\varepsilon_{1,n}}{2}\right) < k_n$ , il vient :

$$\dot{V}_{3,n} \leq -4 \left(k_n - \frac{\varepsilon_{1,n}}{2}\right) (V_{1,n} + V_{2,n}) + \frac{c_n^2}{\varepsilon_{1,n}} \quad (4.42)$$

ou de manière équivalente

$$\dot{V}_{3,n} \leq -2 \left(k_n - \frac{\varepsilon_{1,n}}{2}\right) V_{3,n} + \frac{c_n^2}{\varepsilon_{1,n}} \quad (4.43)$$

en choisissant donc

$$\varepsilon_{1,n} \gg c_n^2 \quad \text{et} \quad k_n > \frac{\varepsilon_{1,n}}{2} \quad (4.44)$$

plus exactement

$$k_n \gg \frac{c_n^2}{2} \quad (4.45)$$

alors de l'équation (4.43), on peut voir que la fonction de Lyapounov  $V_{3,n}$  converge globalement et exponentiellement. Par conséquent, l'erreur de poursuite  $z_n$  converge globalement et

exponentiellement dans une boule de centre zéro dont le rayon est tel que

$$R_{z,n} = \sqrt{\frac{c_n^2}{\varepsilon_{1,n} (k_n - \frac{\varepsilon_{1,n}}{2})}} \quad (4.46)$$

qui peut être rendu aussi petit que désiré en choisissant, conformément à (4.45), le paramètre de réglage  $k_n$  suffisamment grand.

2) Pour  $i = n - 1, \dots, 1$  et en considération les équations (4.13) et (4.33), la dérivée temporelle de  $V_{3,i}$  est :

$$\dot{V}_{3,i} \leq -4 k_i V_{1,i} - 4 \left(k_i - \frac{\varepsilon_{1,i} + \varepsilon_{2,i}}{2}\right) V_{2,i} + \frac{c_i^2}{\varepsilon_{1,i}} + \frac{\bar{g}_i^2 R_{i+1}^2}{\varepsilon_{2,i}} \quad (4.47)$$

et puisque  $0 < \left(k_i - \frac{\varepsilon_{1,i} + \varepsilon_{2,i}}{2}\right) < k_i$ , il vient :

$$\dot{V}_{3,i} \leq -4 \left(k_i - \frac{\varepsilon_{1,i} + \varepsilon_{2,i}}{2}\right) (V_{1,i} + V_{2,i}) + \frac{c_i^2}{\varepsilon_{1,i}} + \frac{\bar{g}_i^2 R_{i+1}^2}{\varepsilon_{2,i}} \quad (4.48)$$

ou de manière équivalente

$$\dot{V}_{3,i} \leq -2 \left(k_i - \frac{\varepsilon_{1,i} + \varepsilon_{2,i}}{2}\right) V_{3,i} + \frac{c_i^2}{\varepsilon_{1,i}} + \frac{\bar{g}_i^2 R_{i+1}^2}{\varepsilon_{2,i}} \quad (4.49)$$

en choisissant donc

$$\varepsilon_{1,i} \gg c_i^2, \quad \varepsilon_{2,i} \gg \bar{g}_i^2 R_{i+1}^2 \quad \text{et} \quad k_i > \frac{\varepsilon_{1,i} + \varepsilon_{2,i}}{2} \quad (4.50)$$

plus exactement

$$k_i \gg \frac{c_i^2 + \bar{g}_i^2 R_{i+1}^2}{2} \quad (4.51)$$

alors on peut voir de l'équation (4.49) que la fonction de Lyapounov  $V_{3,i}$  converge globalement et exponentiellement. Par conséquent, l'erreur de poursuite  $z_i$  converge globalement et exponentiellement dans une boule de centre zéro et dont le rayon est tel que

$$R_{z,i} = \sqrt{\left[ \frac{c_i^2}{\varepsilon_{1,i}} + \frac{\bar{g}_i^2 R_{i+1}^2}{\varepsilon_{2,i}} \right] / \left[ k_i - \frac{\varepsilon_{1,i} + \varepsilon_{2,i}}{2} \right]} \quad (4.52)$$

qui peut être rendu aussi petit que désiré en choisissant, conformément à (4.51), le paramètre de réglage  $k_i$  suffisamment grand.

A partir des relations (4.46) et (4.52) qui donnent les rayons de convergence des erreurs de poursuite  $z_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) et le résultat du Théorème 4.2, une condition suffisante et nécessaire pour assurer la convergence est de choisir les paramètres de réglages  $k_i$  suffisamment grands.

De l'équation (4.37) il est clair que  $z_i \in L_\infty$ . D'autre part, la bornitude de l'erreur  $z_1$  et  $\alpha_1 = x_{1d}$  implique la bornitude de l'état  $x_1$ , donc d'après la définition des commandes virtuelles (4.5) et l'hypothèse de travail 4.3, il s'ensuit que la commande virtuelle  $\alpha_2$  est aussi bornée. En suivant le même raisonnement, on conclut que l'état  $x_i$  et  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) et  $u$  sont bornés. Ceci termine la démonstration.  $\square$

**Remarque 4.1.** De l'analyse donnée ci-haut, il est démontré que les paramètres de réglage  $k_i$  doivent être pris suffisamment grands. D'autre part, les rayons de convergence sont interdépendant de manière récursive, autrement dit,  $R_{z,i} = f(R_{z,i+1})$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ). De ces deux faits et afin d'aider l'utilisateur dans le choix des gains de réglage  $k_i$ , on recommande que ces paramètres soient choisis suffisamment grands de la manière suivante :

$$k_n \gg k_{n-1} \gg \dots \gg k_1$$

### 4.3 Exemples d'application et comparaison

L'objectif dans cette section est de montrer à travers quelques exemples que, d'une part, l'approche *Commande à Gain Récursif* est applicable à une plus large classe de systèmes *Strict Feedback Systems* et, d'autre part, de comparer l'approche *Commande à Gain Récursif* à celle du *Backstepping*. Afin de réaliser cet objectif, considérons le système simple ayant la condition initiale  $x(0) = [1.5, 0.8, -0.2]^T$  suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2 x_2 + f_1^3(x_1) \\ \dot{x}_2 &= -x_3 + f_2^3(x_2) \\ \dot{x}_3 &= 3 u + x_3 + 10 \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Ce système nous permettra de réaliser une comparaison entre l'approche *Commande à Gain Récursif* et celle du *Backstepping*. Cette comparaison est réalisée en considérant deux judicieux

cas. Dans le premier cas, la référence désirée  $x_{1d}$ , les fonctions  $f_1(x_1)$  et  $f_2(x_2)$  sont choisies de manière à ce que les hypothèses de travail des approches *Commande à Gain Récuratif* et *Backstepping* sont satisfaites. Par contre et dans le deuxième cas, la référence désirée  $x_{1d}$ , les fonctions  $f_1(x_1)$  et  $f_2(x_2)$  sont choisies de manière à ce que les hypothèses de travail de l'approche *Commande à Gain Récuratif* sont satisfaites mais pas celles de l'approche *Backstepping*.

### 4.3.1 Premier cas

Pour ce premier cas, les fonctions  $f_1(x_1)$  et  $f_2(x_2)$  sont choisies comme :  $f_1(x_1) = x_1$  et  $f_2(x_2) = x_2$ , alors que pour la référence désirée  $x_{1d}$ , on considère successivement une constante et une fonction sinusoïdale. Pour ces choix, il est clair que les hypothèses de travail des deux approches sont satisfaites.

L'utilisation des relations (4.5) de l'approche *Commande à Gain Récuratif* donne facilement la loi de commande  $u$  suivante :

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{1}{6} k_1 k_2 k_3 x_1 + \frac{1}{6} k_2 k_3 x_1^3 + \frac{1}{3} k_2 k_3 x_2 \\
 & + \frac{1}{3} k_3 x_2^3 - \frac{1}{3} [k_3 + 1] x_3 - \frac{10}{3} - \frac{1}{6} k_1 k_2 k_3 x_{1d}
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

alors que l'application de l'approche *Backstepping* donne, après un travail fastidieux et ennuyeux, la loi de commande  $u$  suivante :

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{1}{6} k_1 k_2 k_3 x_1 + [(k_1 + k_2 + k_3) x_2 + x_2^3 - x_3] x_1^2 \\
 & + \frac{1}{6} [k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3] x_1^3 + 7 x_2 x_1^4 + \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + k_3] x_1^5 \\
 & + \frac{15}{6} x_1^7 + \frac{1}{3} [k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3] x_2 + [4 x_1 - x_3] x_2^2 \\
 & + \frac{1}{3} [k_1 + k_2 + k_3] x_2^3 + x_2^5 - \frac{1}{3} [k_1 + k_2 + k_3 + 1] x_3 - \frac{10}{3} \\
 & - \frac{1}{6} k_1 k_2 k_3 x_{1d,f} - \frac{1}{6} [k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3] x_{1d,f}^{(1)} \\
 & - \frac{1}{6} [k_1 + k_2 + k_3] x_{1d,f}^{(2)} - \frac{1}{6} x_{1d,f}^{(3)}
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

où la référence filtrée  $x_{1d,f}$  et ses dérivées successives sont obtenues par filtrage de la référence

désirée  $x_{1d}$  en utilisant le *préfiltre* de troisième ordre suivant :

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}_1 &= \psi_2 \\
 \dot{\psi}_2 &= \psi_3 \\
 \dot{\psi}_3 &= -\omega_n^3 (\psi_1 - x_{1d}) - \omega_n^2 (1 + 2\xi) \psi_2 - \omega_n (1 + 2\xi) \psi_3
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

telle que la référence filtrée est  $x_{1d,f} = \psi_1$  et ses dérivées successives sont telles que  $x_{1d,f}^{(1)} = \psi_2$ ,  $x_{1d,f}^{(2)} = \psi_3$  et  $x_{1d,f}^{(3)} = \dot{\psi}_3$ . On note ici que le *préfiltre* (4.56) correspond à un filtre unitaire de deuxième ordre ayant une pulsation propre  $\omega_n$  et un coefficient d'amortissement  $\xi$ , combiné à un filtre unitaire de premier ordre ayant une constante de temps  $1/\omega_n$ .

#### 4.3.1.1 Référence désirée constante

L'objectif de cette première simulation est de comparer les performances des approches *Commande à Gain Récuratif* et *Backstepping* dans le cas d'une référence désirée constante, plus exactement on prend  $x_{1d} = 1$ . Pour les deux approches, les gains de réglage sont choisis comme suit :  $k_1 = 20$ ,  $k_2 = 60$  et  $k_3 = 180$ . Les paramètres du *préfiltre* (4.56), pour l'approche *Backstepping*, sont choisis comme suit :  $\omega_n = 10 \text{ rd/s}$  et  $\xi = 1$ .

La Figure. 4-1 montre les résultats de la simulation. On peut voir que les deux approches réalisent l'objectif de poursuite de trajectoire avec une erreur statique nulle. Cependant, la comparaison entre les temps de réponse, voir la Figure. 4-2, révèle la supériorité de l'approche *Commande à Gain Récuratif* puisque le temps de réponse est plus petit. Les entrées de commande sont telles que montrées par la Figure. 4-3. La Figure. 4-4 donne les résultats de simulations obtenus pour différentes valeurs de la pulsation propre  $\omega_n$  du *préfiltre* de l'approche *Backstepping*. On peut voir clairement que l'augmentation de la valeur de  $\omega_n$  réduit légèrement le temps de réponse dans l'approche *Backstepping*, mais il reste plus important que dans l'approche *Commande à Gain Récuratif*. De ce fait et à cause du *préfiltre*, l'approche *Backstepping* ne peut pas recouvrir les performances de l'approche *Commande à Gain Récuratif*. Ceci montre la supériorité de l'approche *Commande à Gain Récuratif*.

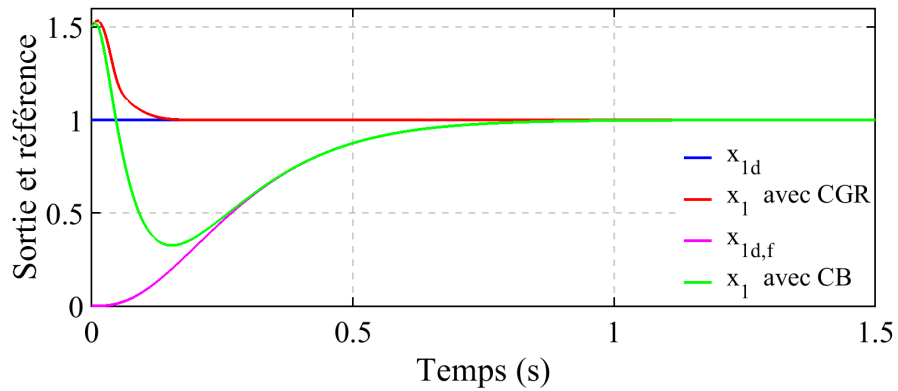
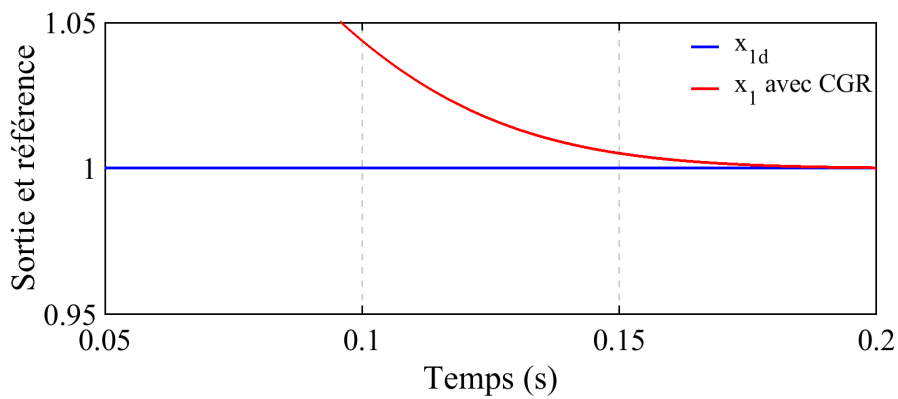
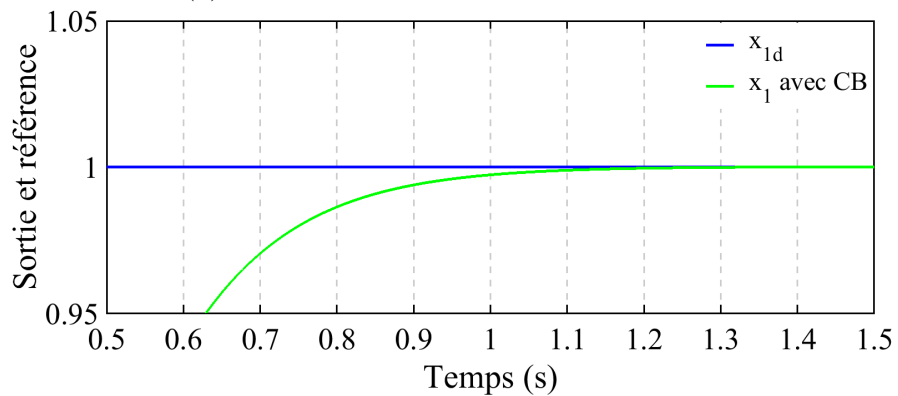


FIGURE 4-1 – Évolution de la sortie contrôlée  $x_1$ .



(a) Approche *Commande à Gain Récurisif*.



(b) Approche *Backstepping*.

FIGURE 4-2 – Comparaison des temps de réponse.

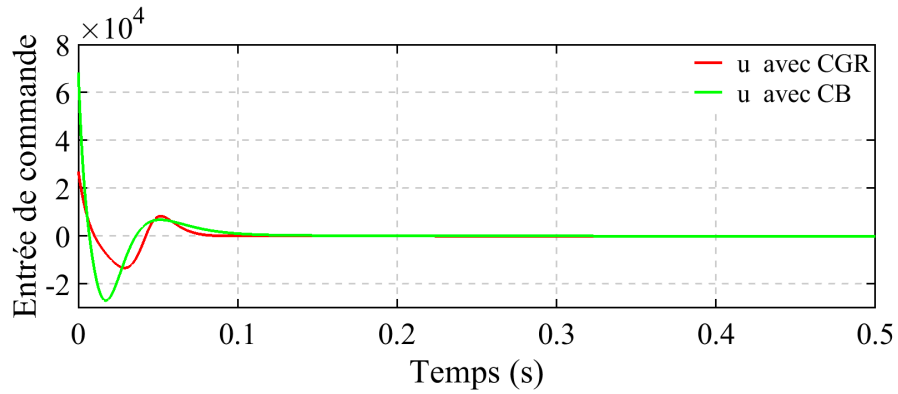


FIGURE 4-3 – Entrée de commande  $u$  avec les approches *Contrôleur à Gain Récurisif* et *Contrôleur Backstepping*.

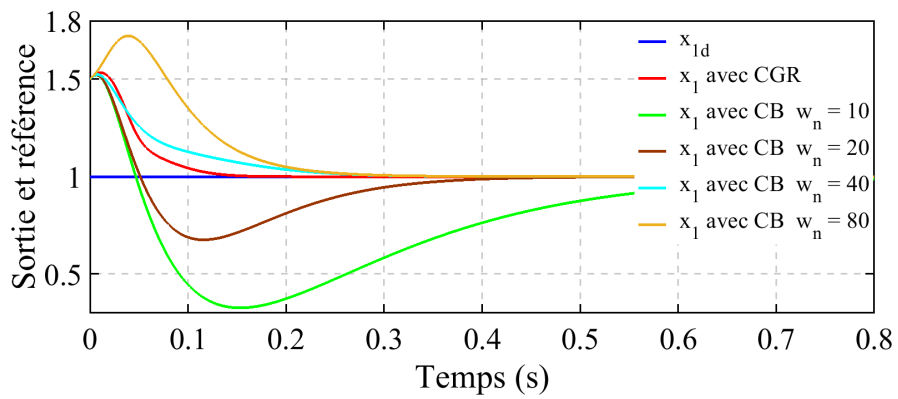


FIGURE 4-4 – Evolution de la sortie contrôlée  $x_1$  avec le *Contrôleur Backstepping* pour différentes valeurs de  $\omega_n$ .

### 4.3.1.2 Référence désirée sinusoïdale

L'objectif de cette deuxième simulation est de comparer les performances des approches *Commande à Gain Récurisif* et *Backstepping* dans le cas d'une référence désirée sinusoïdale, plus exactement on prend  $x_{1d} = 1 \sin\left(\frac{2}{1.5}\pi t\right)$ . Pour les deux approches, les gains de réglage sont choisis comme suit :  $k_1 = 40$ ,  $k_2 = 400$  et  $k_3 = 4 \times 10^4$ . Les paramètres du *préfiltre* (4.56) pour l'approche *Backstepping* sont choisis comme :  $\omega_n = 50 \text{ rd/s}$  et  $\xi = 1$ . Les résultats de simulations sont telles que données par la Fig. 4-5, laquelle montre que la poursuite est meilleure dans le cas de l'approche *Commande à Gain Récurisif* comparativement à celle dans le cas de l'approche *Backstepping*.

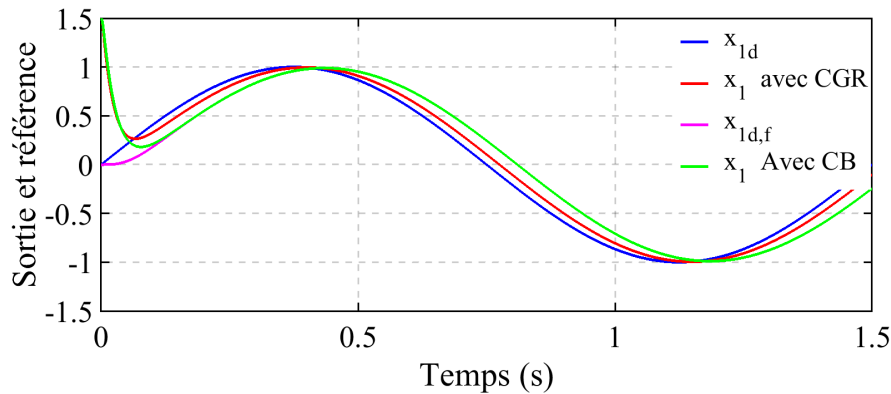


FIGURE 4-5 – Évolution de la sortie contrôlée  $x_1$  avec les deux approches pour une référence sinusoïdale.

### 4.3.2 Deuxième cas

L'objectif de cette section est de montrer que l'approche *Commande à Gain Récurisif* reste applicable au système ayant la forme *Strict Feedback Form* et ce lorsque les hypothèses de travail des approches *Backstepping*, *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping* ne sont pas respectées. En effet, pour cette simulation on choisit une forme triangulaire, voir Fig. 4-7, pour la référence désirée  $x_{1d}$  et pour les fonctions  $f_1(x_1)$  et  $f_2(x_2)$ . Pour ces choix, les dérivées premières de  $x_{1d}$ ,  $f_1(x_1)$  et  $f_2(x_2)$  ne sont pas continues et donc les approches *Backstepping*, *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping* ne peuvent être utilisées.

L'utilisation des relations (4.5) de l'approche *Commande à Gain Récur­sif*, donne facilement la loi de commande  $u$  suivante :

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{1}{6} k_1 k_2 k_3 x_1 + \frac{1}{6} k_2 k_3 f_1^3(x_1) + \frac{1}{3} k_2 k_3 x_2 \\
 & + \frac{1}{3} k_3 f_2^3(x_2) - \frac{1}{3} [k_3 + 1] x_3 - \frac{10}{3} - \frac{1}{6} k_1 k_2 k_3 x_{1d}
 \end{aligned}
 \tag{4.57}$$

Les gains de réglage choisis pour cette simulation sont :  $k_1 = 40$ ,  $k_2 = 400$  et  $k_3 = 4 \times 10^4$ . De la Figure. 4-6 qui donne les résultats de simulation, il est clair que l'approche *Commande à Gain Récur­sif* montre toujours des bonnes performances puisque la poursuite de trajectoire est atteinte. Ce résultat montre que l'approche *Commande à Gain Récur­sif* est applicable à une plus large classe des système *Strict Feedback Systems*.

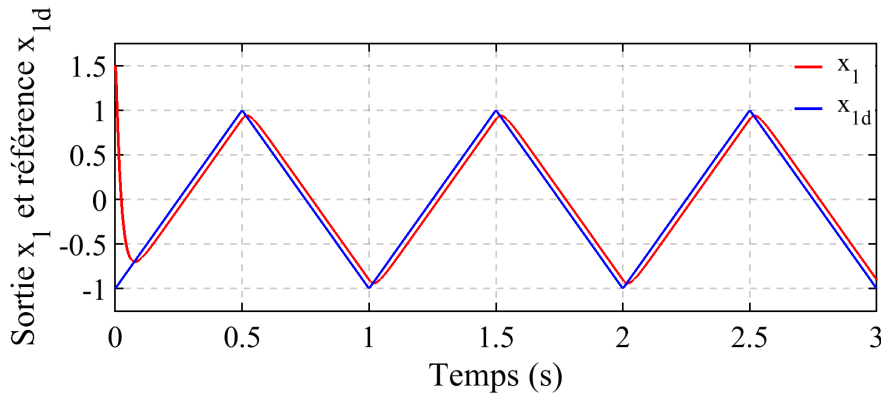
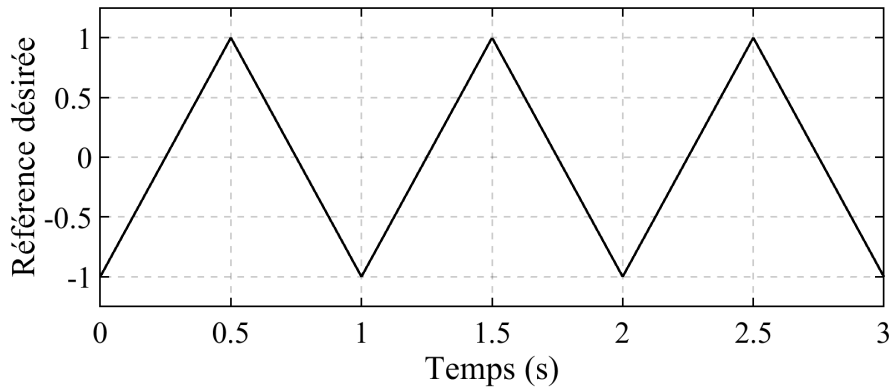
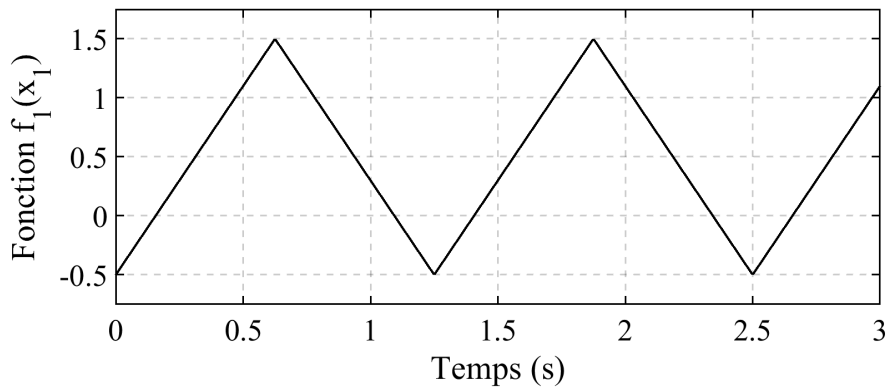


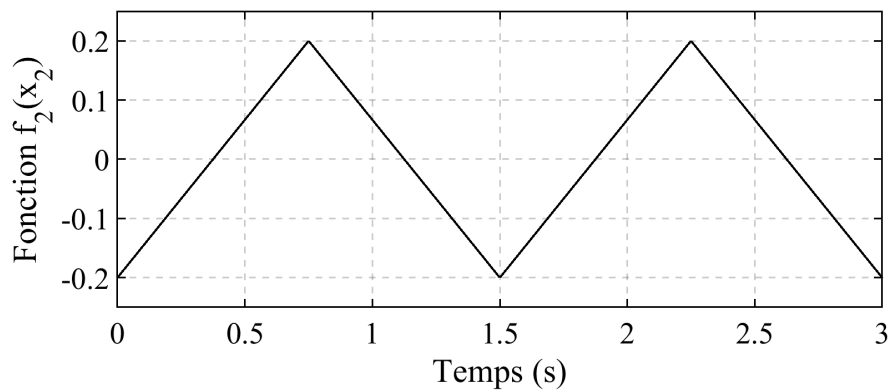
FIGURE 4-6 – Évolution de la sortie contrôlée  $x_1$ .



(a) Référence désirée  $x_{1d}$ .



(b) Fonction  $f_1(x_1)$ .



(c) Fonction  $f_2(x_2)$ .

FIGURE 4-7 – Évolution de  $x_{1d}$ ,  $f_1(x_1)$  et  $f_2(x_2)$ .

## 4.4 Étude de robustesse

L'étude de robustesse s'intéresse aux problèmes de commande ou de stabilisation des systèmes dont les non linéarités ne sont pas parfaitement connues. L'incertitude représente la partie du système physique qui ne peut pas être facilement modélisée ou bien parfaitement connue, autrement dit le système est partiellement connu. Les incertitudes dans le cas de la modélisation déterministe des systèmes physiques incluent les paramètres, constants ou variants, dynamiques non modélisées, les erreurs de modélisation, les entrées inconnues telles que les perturbations, bruits de mesure etc. Ces dernières peuvent être des incertitudes dynamiques (dynamiques non modélisées) ou bien statique (incertitudes paramétriques, erreurs de modélisation et perturbation). L'effet des incertitudes dynamiques est souvent étudié en utilisant les méthodes asymptotiques telles que les perturbations singulières, center manifold theory ou des arguments de séparation d'échelles de temps. Les incertitudes statiques peuvent être prises en compte plus facilement dans la conception des commandes. Les incertitudes peuvent aussi être structurées ou non. Les non structurées sont bornées par une fonction  $h$  dépendante de l'état du système et du temps et où aucune information additionnel sur la structure de l'incertitude n'est disponible tel que  $\Delta(x, t) < h(x, t)$ , par exemple  $|\Delta(x, t)| < \|x\|$  où  $x \in \mathfrak{R}^n$ . Par contre en dispose de plus d'information sur la fonction  $h(x, t)$  dans le cas des incertitudes structurées.

En considérant toujours les systèmes non linéaires SISO affines en l'entrée, voir le système (2.1) du chapitre 2, avec incertitudes représentés par

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \overline{\alpha(z)} u + \overline{\beta(z)} \\ y &= h(z) \end{aligned} \tag{4.58}$$

où  $z \in \mathfrak{R}^n$ ,  $y \in \mathfrak{R}$  et  $u \in \mathfrak{R}$  sont respectivement le vecteur d'état, la sortie et l'entrée du systèmes et où les champs de vecteurs  $\overline{\alpha(z)}$  et  $\overline{\beta(z)}$  sont des incertitudes structurées [31, 59, 99]. En assume que les dynamiques de ce système peuvent être scindées en deux parties, où la premières est parfaitement connue alors que la deuxième est incertaine. Autrement dit, les champs de vecteurs  $\overline{\alpha(z)}$  et  $\overline{\beta(z)}$  sont décomposables en leurs parties nominales et incertaines

comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= [\alpha(z) + \Delta\alpha(z)] u + \beta(z) + \Delta\beta(z) \\ y &= h(z) \end{aligned} \tag{4.59}$$

Si le système nominal possède un degré relatif  $r$  et que les termes de perturbation  $\Delta\alpha$  et  $\Delta\beta$  du système incertain (4.59) vérifient

$$\begin{aligned} L_{\Delta\alpha}L_{\alpha}^i h(z) &= 0 & i = 1, \dots, r-1 \\ L_{\Delta\beta}L_{\alpha}^i h(z) &= 0 & i = 1, \dots, r-1 \end{aligned} \tag{4.60}$$

alors il existe un difféomorphisme permettant de transformer le système incertain (4.59) on la forme normale suivante [11, 83, 105] :

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \Gamma(\zeta, x) + L_{\Delta\beta} \zeta + L_{\Delta\alpha} \zeta u \\ \dot{x}_i &= x_{i+1} & i = 1, \dots, r-1 \\ \dot{x}_r &= g_r(x, \zeta) u + f_r(x, \zeta) \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{4.61}$$

Dans cette dernière forme, les incertitudes sont confinées dans les dynamiques internes  $\zeta$  et par conséquent elles n'ont aucun effet sur la loi de commande quelque soit l'approche utilisées *Backstepping* ou bien *Commande à Gain Récuratif*.

**Définition 4.3** (Matching conditions). Pour le système incertain (4.59) les conditions données dans (4.60) sont dites *matching conditions* [11, 83, 105].

**Définition 4.4** (Generalized matching conditions [97]). Pour le système incertain (4.59) les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} L_{\Delta\alpha}L_{\alpha}^i h(z) &= 0 & i = 1, \dots, r-2 \\ L_{\Delta\beta}L_{\alpha}^i h(z) &= 0 & i = 1, \dots, r-1 \end{aligned} \tag{4.62}$$

sont dites *generalized matching conditions* ou bien *extended matching conditions* [11, 98, 105].

Dans le cas où seulement les conditions (4.62) sont vérifiées, alors le dernier état de la forme normale (4.61) est tel que :

$$\dot{x}_r = g_r(x, \zeta) u + f_r(x, \zeta) + L_{\Delta\beta} L_{\beta}^{r-1} h \quad (4.63)$$

dans lequel cas le terme  $L_{\Delta\beta} L_{\beta}^{r-1} h$  doit être pris en considération par la loi de commande.

D'une manière générale les systèmes non linéaires ayant la forme *Strict Feedback Form* avec incertitudes structurées sont représentés par le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \Gamma(\zeta, x_1) \\ \dot{x}_i &= g_i(x_1, \dots, x_i) x_{i+1} + f_i(x_1, \dots, x_i) + \Delta_i(x, t) \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= g_n(x_1, \dots, x_n) u + f_n(x_1, \dots, x_n) + \Delta_n(x, t) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (4.64)$$

Il est important de remarquer que dans le système (4.64) l'incertitude  $\Delta_n(x, t)$  vérifié la *matching condition*, alors que les incertitudes  $\Delta_i(x, t)$  ne la vérifient pas. Afin que ces dernières incertitudes vérifient l'*extended matching conditions*, elles doivent respectées les conditions suivantes [32] :

$$\begin{aligned} |\Delta_i(x, t)| &\leq \rho_i(x_1, \dots, x_i, t) \quad i = 1, \dots, n-1 \\ |\Delta_n(x, t)| &\leq \rho_n(x, t) \end{aligned} \quad (4.65)$$

où  $\rho_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , sont des fonctions positives connues.

En effet si les conditions données par (4.65) sont vérifiées, alors l'incertitude  $\Delta_i(x, t)$  vérifie la *matching condition* par rapport à l'entrée virtuelle  $x_{i+1}$  pour  $i = 1, \dots, n-1$  et  $\Delta_n(x, t)$  par rapport à  $u$ .

Pour les systèmes incertains ayant la forme de chaine d'intégrateurs, i.e. systèmes (4.64) où  $g_i = 1$  et  $f_i = 0 \forall i$ , vérifiant les conditions (4.65) Freeman and Kokotovic ont étendu en 1993 pour la première fois l'approche *Backstepping* aux systèmes incertains. Cette extension

est basée sur la modification des commandes virtuelles et la commande réel en introduisant un ensemble de fonctions  $s_i(x_1, \dots, x_i) = \rho_i(x_1, \dots, x_i) \operatorname{sgn}(x_i)$  et où les fonctions  $\rho_i$  doivent être lisses. L'adjonction des fonctions  $s_i$  aux commandes virtuelles et réel complique plus encore la conception des lois de commande avec l'approche *Backstepping* pour les systèmes incertains. Plus exactement et à l'étape  $i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , les fonctions  $s_i$  doivent être choisies pour contrecarrer l'incertitude  $\Delta_i(x, t)$  plus un terme récursif, autrement dit l'incertitude composée  $\bar{\Delta}_i(x, t) = \Delta_i(x, t) - \partial\alpha_i/\partial x_i \Delta_{i-1}(x, t)$ . Il est judicieux de remarquer que seulement dans ce cas que l'on parle de l'approche *Backstepping* robuste. Pour une discussion détaillée avec explication de la procédure dans le cas général, voir [31]. L'approche *Backstepping* robuste est appliquée au modèle multi-input/multi-output d'un missile où des fonctions sigmoïdes,  $s_i = \rho_i (1 - \exp^{-\sigma_i |x_i - \alpha_{i-1}|}) \operatorname{sgn}(x_i - \alpha_{i-1})$ , sont utilisées pour dominer les incertitudes [84].

#### 4.4.1 Robustesse de l'approche *Commande à Gain Récursif*

Afin de réaliser l'étude de robustesse de l'approche *Commande à Gain Récursif* on ajoute l'hypothèse de travail suivante.

**Hypothèse 4.5.** *Il existe une constante inconnue  $\bar{\rho}_i > 0$  telle que l'incertitude  $\Delta_i(x, t)$  vérifie*

$$|\Delta_i(x, t)| \leq \rho_i(x_1, \dots, x_i) \leq \bar{\rho}_i$$

L'Hypothèse 4.5 exige que le système (4.64) vérifie les conditions l'*extended matching conditions* et que les fonctions  $\rho_i$  soient bornées par des bornes inconnues. Cette hypothèse n'exige pas la connaissance des fonctions  $\rho_i$  comme dans le cas de l'approche *Backstepping* robuste.

L'étude de robustesse de l'approche *Commande à Gain Récursif* est présentée en trois théorèmes comme l'approche originale où, dans l'ordre, chaque théorème traite l'analyse de convergence des erreurs suivantes :  $\tilde{x}_i$ ,  $\tilde{\alpha}_i$  et  $z_i$ . Les commandes virtuelles  $\alpha_i$  restent inchangées telles que données par (4.5), alors que les *signaux fictifs*  $\phi_i$  sont modifiés comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_i + k_i \phi_i &= k_i \alpha_i + g_i (\tilde{x}_{i+1} + \tilde{\alpha}_{i+1}) + \Delta_i(x, t) & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{\phi}_n + k_n \phi_n &= k_n \alpha_n + \Delta_n(x, t) & i = n \end{aligned} \tag{4.66}$$

**Théorème 4.4.** *Si le sous système  $x$  du système (4.64) satisfait les hypothèses de travail 4.1, 4.2 et 4.3 avec la commande réelle définie dans (4.5), alors les erreurs  $\tilde{x}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) converge globalement et exponentiellement vers zéro. En plus, pour  $i = 1, \dots, n$ , on a  $\tilde{x}_i \in L_2 \cap L_\infty$ .*

*Démonstration.* Pour  $i = 1, \dots, n - 1$ , en ajoutant et soustrayant  $g_i \alpha_{i+1}$  le  $i^{ieme}$  état  $x_i$  du sous système  $x$  du système (4.64) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= g_i x_{i+1} + f_i + \Delta_i(x, t) \\ \dot{x}_i &= g_i x_{i+1} + f_i - g_i \alpha_{i+1} + g_i \alpha_{i+1} + \Delta_i(x, t) \\ \dot{x}_i &= g_i (x_{i+1} - \alpha_{i+1}) + f_i + g_i \alpha_{i+1} + \Delta_i(x, t) \end{aligned} \quad (4.67)$$

en ajoutant et soustrayant le *signal fictif*  $\phi_{i+1}$  avec les définitions (4.4) on obtient :

$$\dot{x}_i = g_i (\tilde{x}_{i+1} + \tilde{\alpha}_{i+1}) + f_i + g_i \alpha_{i+1} + \Delta_i(x, t) \quad (4.68)$$

et en utilisant les commandes virtuelles  $\alpha_{i+1}$  données par (4.5), il s'en suit que :

$$\dot{x}_i = g_i (\tilde{x}_{i+1} + \tilde{\alpha}_{i+1}) - k_i x_i + k_i \alpha_i + \Delta_i(x, t) \quad (4.69)$$

Considérons la fonction de Lyapounov pour la  $i^{ieme}$  erreur de poursuite  $\tilde{x}_i = x_i - \phi_i$  :

$$V_{1,i} = \frac{1}{2} \tilde{x}_i^2 \quad (4.70)$$

dérivons  $V_{1,i}$ , par rapport au temps, pour obtenir :

$$\dot{V}_{1,i} = \tilde{x}_i \dot{\tilde{x}}_i = \tilde{x}_i (\dot{x}_i - \dot{\phi}_i) \quad (4.71)$$

en remplaçant  $\dot{\phi}_i$  à partir de (4.66) avec (4.69) dans (4.71) et en utilisant (4.4) on trouve :

$$\dot{V}_{1,i} = \tilde{x}_i (-k_i x_i + k_i \phi_i) = -k_i \tilde{x}_i^2 \quad (4.72)$$

et en utilisant (4.70) on a finalement

$$\dot{V}_{1,i} = -k_i |\tilde{x}_i|^2 = -2 k_i V_{1,i} \quad (4.73)$$

Pour  $i = n$ , le  $n^{ieme}$  état  $x_n$  est comme suit :

$$\dot{x}_n = g_n(\zeta, x) u + f_n(\zeta, x) + \Delta_n(x, t) \quad (4.74)$$

en utilisant la commande réelle  $u$  donnée par (4.5), on obtient :

$$\dot{x}_n = -k_n x_n + k_n \alpha_n + \Delta_n(x, t) \quad (4.75)$$

Considérons la fonction de Lyapounov suivante pour l'erreur de poursuite  $\tilde{x}_n = x_n - \phi_n$  :

$$V_{1,n} = \frac{1}{2} \tilde{x}_n^2 \quad (4.76)$$

dérivons  $V_{1,n}$ , par rapport au temps, pour avoir :

$$\dot{V}_{1,n} = \tilde{x}_n \dot{\tilde{x}}_n = \tilde{x}_n (\dot{x}_n - \dot{\phi}_n) \quad (4.77)$$

en remplaçant  $\dot{\phi}_n$  à partir de (4.66) avec (4.75) dans (4.77) et en utilisant (4.4) on obtient :

$$\dot{V}_{1,n} = \tilde{x}_n (-k_n x_n + k_n \phi_n) = -k_n \tilde{x}_n^2 \quad (4.78)$$

et en utilisant (4.76) on a finalement

$$\dot{V}_{1,n} = -k_n |\tilde{x}_n|^2 = -2 k_n V_{1,n} \quad (4.79)$$

A partir de (4.73) et (4.79), il est clair que pour tout choix du gain de réglage  $k_i > 0$ , la fonction de Lyapounov individuelle  $V_{1,i}$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , converge globalement et exponentiellement vers zéro. Par conséquence, de (4.70) et (4.76), l'erreur de poursuite  $\tilde{x}_i$  converge globalement et exponentiellement vers zéro avec un taux de convergence déterminé par le gain de réglage  $k_i$ . A partir de (4.70) et (4.76), il est facile de voir que  $\tilde{x}_i \in L_\infty$ . Plus encore, en intégrant (4.73) et (4.79), on déduit que  $\tilde{x}_i \in L_2$ . Ceci termine la démonstration.  $\square$

**Théorème 4.5.** *Si le sous système  $x$  du système (4.64) satisfait les hypothèses de travail 4.1 à 4.5 avec les commandes virtuelles définies par (4.5), alors les erreurs  $\tilde{\alpha}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) convergent globalement et exponentiellement dans des boules de centres zéro et dont les rayons*

peuvent être rendus aussi petits que désiré en choisissant les gains de réglage  $k_i$  suffisamment grands. En plus, pour  $i = 1, \dots, n$ , on a  $\tilde{\alpha}_i \in L_\infty$ .

*Démonstration.* Pour  $i = n$ , considérons la fonction de Lyapounov suivante pour l'erreur de poursuite  $\tilde{\alpha}_n = \phi_n - \alpha_n$  :

$$V_{2,n} = \frac{1}{2} \tilde{\alpha}_n^2 \quad (4.80)$$

dérivons  $V_{2,n}$ , par rapport au temps, pour avoir :

$$\dot{V}_{2,n} = \tilde{\alpha}_n \dot{\tilde{\alpha}}_n = \tilde{\alpha}_n (\dot{\phi}_n - \dot{\alpha}_n) \quad (4.81)$$

remplaçant  $\dot{\phi}_n$  à partir de (4.66) dans (4.81) pour obtenir :

$$\dot{V}_{2,n} = \tilde{\alpha}_n (-k_n \tilde{\alpha}_n - \dot{\alpha}_n + \Delta_n(x, t)) = -k_n \tilde{\alpha}_n^2 - \tilde{\alpha}_n \dot{\alpha}_n + \tilde{\alpha}_n \Delta_n(x, t) \quad (4.82)$$

alors l'inégalité de Young donne :

$$\dot{V}_{2,n} \leq -\left(k_n - \frac{\varepsilon_{1,n}}{2} - \frac{\varepsilon_{3,n}}{2}\right) \tilde{\alpha}_n^2 + \frac{\dot{\alpha}_n^2}{2 \varepsilon_{1,n}} + \frac{\Delta_n^2(x, t)}{2 \varepsilon_{3,n}} \quad (4.83)$$

et en considération les hypothèses de travail 4.4 et 4.5 avec (4.80), il s'en suit que :

$$\dot{V}_{2,n} \leq -2 \left(k_n - \frac{\varepsilon_{1,n}}{2} - \frac{\varepsilon_{3,n}}{2}\right) V_{2,n} + \frac{c_n^2}{2 \varepsilon_{1,n}} + \frac{\bar{\rho}_n^2}{2 \varepsilon_{3,n}} \quad (4.84)$$

Dans ce cas, en choisissant

$$\varepsilon_{1,n} \gg \frac{c_n^2}{2} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{3,n} \gg \frac{\bar{\rho}_n^2}{2} \quad \text{et} \quad k_n > \frac{\varepsilon_{1,n} + \varepsilon_{3,n}}{2} \quad (4.85)$$

c'est à dire

$$k_n \gg \frac{c_n^2 + \bar{\rho}_n^2}{4} \quad (4.86)$$

il est facile de conclure à partir de (4.84) que la fonction de Lyapounov  $V_{2,n}$  converge globalement et exponentiellement. Par conséquent, l'erreur de poursuite  $\tilde{\alpha}_n$  converge globalement et

exponentiellement dans une boule de centre zéro et dont le rayon est tel que

$$R_n = \sqrt{\left[ \frac{c_n^2}{2 \varepsilon_{1,n}} + \frac{\bar{\rho}_n^2}{2 \varepsilon_{3,n}} \right] / \left[ k_n - \frac{\varepsilon_{1,n} + \varepsilon_{3,n}}{2} \right]} \quad (4.87)$$

qu'on peut rendre aussi petit que désiré en choisissant, conformément à (4.86), le paramètre de réglage  $k_n$  suffisamment grand.

Pour  $i = n - 1, \dots, 1$ , considérons la fonction de Lyapounov suivante pour la  $i^{\text{ieme}}$  erreur de poursuite  $\tilde{\alpha}_i = \phi_i - \alpha_i$  :

$$V_{2,i} = \frac{1}{2} \tilde{\alpha}_i^2 \quad (4.88)$$

dérivons  $V_{2,i}$ , par rapport au temps, pour obtenir :

$$\dot{V}_{2,i} = \tilde{\alpha}_i \dot{\tilde{\alpha}}_i = \tilde{\alpha}_i (\dot{\phi}_i - \dot{\alpha}_i) \quad (4.89)$$

remplaçant  $\dot{\phi}_i$  à partir de (4.66) dans (4.89) pour avoir :

$$\dot{V}_{2,i} = \tilde{\alpha}_i (-k_i \tilde{\alpha}_i + g_i (\tilde{x}_{i+1} + \tilde{\alpha}_{i+1}) + \Delta_i(x, t) - \dot{\alpha}_i) \quad (4.90)$$

Conformément au Théorème 4.4, l'erreur de poursuite  $\tilde{x}_{i+1}$  converge globalement et exponentiellement vers zéro, par conséquent le terme correspondant peut être ignoré dans la dérivée de la fonction de Lyapounov (4.90), donc on peut écrire que

$$\dot{V}_{2,i} = -k_i \tilde{\alpha}_i^2 - \tilde{\alpha}_i \dot{\alpha}_i + g_i \tilde{\alpha}_i \tilde{\alpha}_{i+1} + \tilde{\alpha}_i \Delta_i(x, t) \quad (4.91)$$

et en utilisant l'inégalité de Young, on obtient :

$$\dot{V}_{2,i} \leq -\left(k_i - \frac{\varepsilon_{1,i}}{2} - \frac{\varepsilon_{2,i}}{2} - \frac{\varepsilon_{3,i}}{2}\right) \tilde{\alpha}_i^2 + \frac{\dot{\alpha}_i^2}{2 \varepsilon_{1,i}} + \frac{g_i^2 \tilde{\alpha}_{i+1}^2}{2 \varepsilon_{2,i}} + \frac{\Delta_i^2(x, t)}{2 \varepsilon_{3,i}} \quad (4.92)$$

En considération les hypothèses de travail 4.1, 4.2, 4.4, 4.5 et le fait que l'erreur de poursuite précédente  $\tilde{\alpha}_{i+1}$  converge à l'intérieur d'une boule de rayon  $R_{i+1}$ , autrement dit  $|\tilde{\alpha}_{i+1}| \leq R_{i+1}$ ,

il s'en suit que :

$$\dot{V}_{2,i} \leq -2 \left( k_i - \frac{\varepsilon_{1,i}}{2} - \frac{\varepsilon_{2,i}}{2} - \frac{\varepsilon_{3,i}}{2} \right) V_{2,i} + \frac{c_i^2}{2 \varepsilon_{1,i}} + \frac{\bar{g}_i^2 R_{i+1}^2}{2 \varepsilon_{2,i}} + \frac{\bar{\rho}_i^2}{2 \varepsilon_{3,i}} \quad (4.93)$$

Dans ce cas, en choisissant

$$\varepsilon_{1,i} \gg \frac{c_i^2}{2}, \quad \varepsilon_{2,i} \gg \frac{\bar{g}_i^2 R_{i+1}^2}{2}, \quad \varepsilon_{3,i} \gg \frac{\bar{\rho}_i^2}{2} \quad \text{et} \quad k_i > \frac{\varepsilon_{1,i} + \varepsilon_{2,i} + \varepsilon_{3,i}}{2} \quad (4.94)$$

c'est à dire

$$k_i \gg \frac{c_i^2 + \bar{g}_i^2 R_{i+1}^2 + \bar{\rho}_i^2}{4} \quad (4.95)$$

il est facile de conclure à partir de (4.93) que la fonction de Lyapounov  $V_{2,i}$  converge globalement et exponentiellement. Par conséquent, l'erreur de poursuite  $\tilde{\alpha}_i$  converge globalement et exponentiellement dans une boule de centre zéro et dont le rayon est tel que

$$R_i = \sqrt{\left[ \frac{c_i^2}{\varepsilon_{1,i}} + \frac{\bar{g}_i^2 R_{i+1}^2}{\varepsilon_{2,i}} + \frac{\bar{\rho}_i^2}{\varepsilon_{3,i}} \right] / \left[ 2 \left( k_i - \frac{\varepsilon_{1,i}}{2} - \frac{\varepsilon_{2,i}}{2} - \frac{\varepsilon_{3,i}}{2} \right) \right]} \quad (4.96)$$

qui peut être rendu aussi petit que désiré en choisissant, conformément à (4.95), le paramètre de réglage  $k_i$  suffisamment grand.

Les bornes  $\bar{g}_i$ , les taux de variation maximale  $c_i$ , les rayons de convergence  $R_i$  et les bornes  $\bar{\rho}_i$  sont inconnus. Par conséquent, une condition suffisante et nécessaire pour assurer la convergence consiste à choisir les gains de réglages  $k_i$  suffisamment grands. D'autre part, à partir de (4.80) et (4.88) il est clair que  $\tilde{\alpha}_i \in L_\infty$ . Ceci termine la démonstration.  $\square$

**Théorème 4.6.** *Si le sous système  $x$  du système (4.64) satisfait les hypothèses de travail 4.1 à 4.5 avec la commande réelle  $u$  définie dans (4.5), alors les erreurs  $z_i = x_i - \alpha_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) convergent globalement et exponentiellement dans des boules de centres zéro et dont les rayons peuvent être rendus aussi petits que désiré en choisissant les gains de réglage  $k_i$  suffisamment grands. En plus, pour  $i = 1, \dots, n$ , on a  $z_i \in L_\infty$  et  $x_i, \alpha_i, u \in L_\infty$  pour  $i = 1, \dots, n$ .*

*Démonstration.* Pour  $i = 1, \dots, n$ , considérons la fonction de Lyapounov suivante pour l'erreur

de poursuite  $z_i = x_i - \alpha_i$  :

$$V_{3,i} = \frac{1}{2} z_i^2 = \frac{1}{2} [x_i - \alpha_i]^2 \quad (4.97)$$

en ajoutant et soustrayant le *signal fictif*  $\phi_i$  avec (4.4), alors l'inégalité de Young donne :

$$V_{3,i} \leq \tilde{x}_i^2 + \tilde{\alpha}_i^2 \quad (4.98)$$

laquelle peut être réécrite sous la forme suivante en utilisant les définitions des fonctions de Lyapounov  $V_{1,i}$  et  $V_{2,i}$  pour  $i = 1, \dots, n$  :

$$V_{3,i} \leq 2 V_{1,i} + 2 V_{2,i} \quad (4.99)$$

1) Pour  $i = n$  et en considérant les équations (4.79) et (4.84), la dérivée temporelle de  $V_{3,n}$  est comme suit :

$$\dot{V}_{3,n} \leq -4 k_n V_{1,n} - 4 \left( k_n - \frac{\varepsilon_{1,n}}{2} - \frac{\varepsilon_{3,n}}{2} \right) V_{2,n} + \frac{c_n^2}{\varepsilon_{1,n}} + \frac{\bar{\rho}_n^2}{\varepsilon_{3,n}} \quad (4.100)$$

et puisque  $0 < \left( k_n - \frac{\varepsilon_{1,n}}{2} - \frac{\varepsilon_{3,n}}{2} \right) < k_n$ , il vient :

$$\dot{V}_{3,n} \leq -4 \left( k_n - \frac{\varepsilon_{1,n}}{2} - \frac{\varepsilon_{3,n}}{2} \right) (V_{1,n} + V_{2,n}) + \frac{c_n^2}{\varepsilon_{1,n}} + \frac{\bar{\rho}_n^2}{\varepsilon_{3,n}} \quad (4.101)$$

ou de manière équivalente

$$\dot{V}_{3,n} \leq -2 \left( k_n - \frac{\varepsilon_{1,n}}{2} - \frac{\varepsilon_{3,n}}{2} \right) V_{3,n} + \frac{c_n^2}{\varepsilon_{1,n}} + \frac{\bar{\rho}_n^2}{\varepsilon_{3,n}} \quad (4.102)$$

en choisissant donc

$$\varepsilon_{1,n} \gg c_n^2 \quad , \quad \varepsilon_{3,n} \gg \bar{\rho}_n^2 \quad \text{et} \quad k_n > \frac{\varepsilon_{1,n} + \varepsilon_{3,n}}{2} \quad (4.103)$$

plus exactement

$$k_n \gg \frac{c_n^2 + \bar{\rho}_n^2}{2} \quad (4.104)$$

alors de l'équation (4.102), on peut voir que la fonction de Lyapounov  $V_{3,n}$  converge globalement et exponentiellement. Par conséquence, l'erreur de poursuite  $z_n$  converge globalement et

exponentiellement dans une boule de centre zéro dont le rayon est tel que

$$R_{z,n} = \sqrt{\left[ \frac{c_n^2}{\varepsilon_{1,n}} + \frac{\bar{\rho}_n^2}{\varepsilon_{1,n}} \right] / \left[ k_n - \frac{\varepsilon_{1,n}}{2} - \frac{\varepsilon_{3,n}}{2} \right]} \quad (4.105)$$

qui peut être rendu aussi petit que désiré en choisissant, conformément à (4.104), le paramètre de réglage  $k_n$  suffisamment grand.

2) Pour  $i = n - 1, \dots, 1$  et en considérant les équations (4.73) et (4.93), la dérivée temporelle de  $V_{3,i}$  est :

$$\dot{V}_{3,i} \leq -4 k_i V_{1,i} - 4 \left( k_i - \frac{\varepsilon_{1,i} + \varepsilon_{2,i} + \varepsilon_{3,i}}{2} \right) V_{2,i} + \frac{c_i^2}{\varepsilon_{1,i}} + \frac{\bar{g}_i^2 R_{i+1}^2}{\varepsilon_{2,i}} + \frac{\bar{\rho}_i^2}{\varepsilon_{3,i}} \quad (4.106)$$

et puisque  $0 < \left( k_i - \frac{\varepsilon_{1,i} + \varepsilon_{2,i} + \varepsilon_{3,i}}{2} \right) < k_i$ , il vient :

$$\dot{V}_{3,i} \leq -4 \left( k_i - \frac{\varepsilon_{1,i} + \varepsilon_{2,i} + \varepsilon_{3,i}}{2} \right) (V_{1,i} + V_{2,i}) + \frac{c_i^2}{\varepsilon_{1,i}} + \frac{\bar{g}_i^2 R_{i+1}^2}{\varepsilon_{2,i}} + \frac{\bar{\rho}_i^2}{\varepsilon_{3,i}} \quad (4.107)$$

ou de manière équivalente

$$\dot{V}_{3,i} \leq -2 \left( k_i - \frac{\varepsilon_{1,i} + \varepsilon_{2,i} + \varepsilon_{3,i}}{2} \right) V_{3,i} + \frac{c_i^2}{\varepsilon_{1,i}} + \frac{\bar{g}_i^2 R_{i+1}^2}{\varepsilon_{2,i}} + \frac{\bar{\rho}_i^2}{\varepsilon_{3,i}} \quad (4.108)$$

en choisissant donc

$$\varepsilon_{1,i} \gg c_i^2, \quad \varepsilon_{2,i} \gg \bar{g}_i^2 R_{i+1}^2, \quad \varepsilon_{3,i} \gg \bar{\rho}_i^2 \quad \text{et} \quad k_i > \frac{\varepsilon_{1,i} + \varepsilon_{2,i} + \varepsilon_{3,i}}{2} \quad (4.109)$$

plus exactement

$$k_i \gg \frac{c_i^2 + \bar{g}_i^2 R_{i+1}^2 + \bar{\rho}_i^2}{2} \quad (4.110)$$

alors on peut voir de l'équation (4.108) que la fonction de Lyapounov  $V_{3,i}$  converge globalement et exponentiellement. Par conséquent, l'erreur de poursuite  $z_i$  converge globalement et exponentiellement dans une boule de centre zéro et dont le rayon est tel que

$$R_{z,i} = \sqrt{\left[ \frac{c_i^2}{\varepsilon_{1,i}} + \frac{\bar{g}_i^2 R_{i+1}^2}{\varepsilon_{2,i}} + \frac{\bar{\rho}_i^2}{\varepsilon_{3,i}} \right] / \left[ k_i - \frac{\varepsilon_{1,i} + \varepsilon_{2,i} + \varepsilon_{3,i}}{2} \right]} \quad (4.111)$$

qui peut être rendu aussi petit que désiré en choisissant, conformément à (4.110), le paramètre de réglage  $k_i$  suffisamment grand.

A partir des relations (4.105) et (4.111) qui donnent les rayons de convergence des erreurs de poursuite  $z_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) et le résultat du Théorème 4.5, une condition suffisante et nécessaire pour assurer la convergence est de choisir les paramètres de réglages  $k_i$  suffisamment grands.

De l'équation (4.97) il est clair que  $z_i \in L_\infty$ . D'autre part, la bornitude de l'erreur  $z_1$  et  $\alpha_1 = x_{1d}$  implique la bornitude de l'état  $x_1$ , donc d'après la définition des commandes virtuelles (4.5) et l'hypothèse de travail 4.3, il s'ensuit que la commande virtuelle  $\alpha_2$  est aussi bornée. En suivant le même raisonnement, on conclut que l'état  $x_i$  et  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) et  $u$  sont bornés. Ceci termine la démonstration.  $\square$

De l'analyse donnée ci-haut, il est clair que l'approche *Commande à Gain Récur­sif* est robuste pour une très large classe des systèmes perturbés sans aucune modification ni changement. Ce résultat montre encore une fois que cette nouvelle approche est supérieure à l'approche *Backstepping*.

#### 4.4.2 Exemples d'application

L'objectif dans cette section est de montrer à travers un simple exemple que l'approche *Commande à Gain Récur­sif* est applicable, sans aucune modification de la loi de commande, à la classe des systèmes *Strict Feedback Systems* incertains. Afin de réaliser cet objectif, considérons le système suivant :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= 4 x_2 + x_1^3 + \Delta_1(x, t) \\
 \dot{x}_2 &= 6 x_3 + x_2^3 + \Delta_2(x, t) \\
 \dot{x}_3 &= 3 u + x_3 + \Delta_3(x, t) \\
 y &= x_1
 \end{aligned}
 \tag{4.112}$$

où pour  $i = 1, 2, 3$  les incertitudes  $\Delta_i(x, t)$  sont définies en s'inspirant de différents travaux comme suit [35, 122, 164] :

$$\begin{aligned}\Delta_1(x, t) &= \rho_1 \sin(x_1) \\ \Delta_2(x, t) &= \rho_2 (x_1^2 + x_2^2) \sin(x_2) \\ \Delta_3(x, t) &= \rho_3 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \sin(x_3)\end{aligned}\tag{4.113}$$

tels que  $\rho_1 = 0.6$ ,  $\rho_2 = 0.5$  et  $\rho_3 = 0.4$ . Les valeurs des ces dernières constantes sont seulement nécessaires pour réaliser la simulation.

En appliquant l'approche *Commande à Gain Récurisif* au système (4.112) en utilisant (4.5) on obtient la loi de commande  $u$  suivante :

$$\begin{aligned}u &= -\frac{1}{72} k_1 k_2 k_3 x_1 - \frac{1}{72} k_2 k_3 x_1^3 - \frac{1}{18} k_2 k_3 x_2 \\ &\quad - \frac{1}{18} k_3 x_2^3 - \frac{1}{3} [k_3 + 1] x_3 + \frac{1}{72} k_1 k_2 k_3 x_{1d}\end{aligned}\tag{4.114}$$

Pour les gains de réglages  $k_1 = 100$ ,  $k_2 = 400$  et  $k_3 = 1000$  la loi de commande (4.114) est appliquée au système incertains (4.112). Les résultats de simulations sont tels que montrés par les Figures 4-8, 4-9 et 4-10.

La Figure 4-8 montre que la sortie  $x_1$  du système suit la référence désirée  $x_{1d}$  avec une faible erreur telle qu'on peut le voir sur la Figure 4-9 et où évolution de l'entrée de commande  $u$  est montée par la figure 4-10.

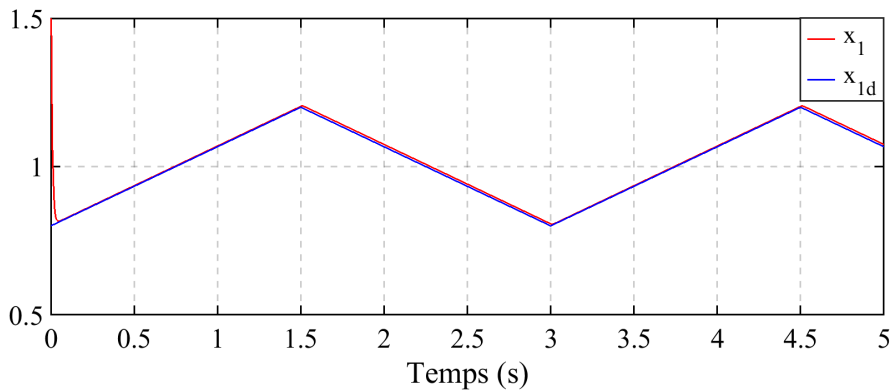


FIGURE 4-8 – Évolution de la sortie contrôlée  $x_1$  et référence  $x_{1d}$ .

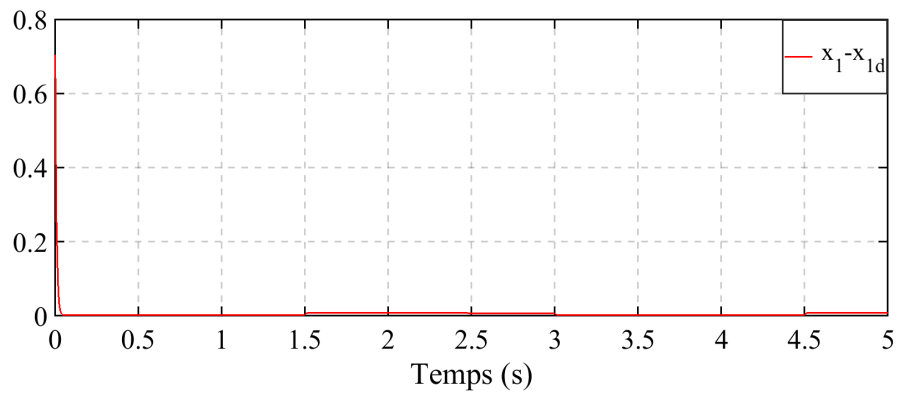


FIGURE 4-9 – Évolution de l'erreur de poursuite  $x_1 - x_{1d}$ .

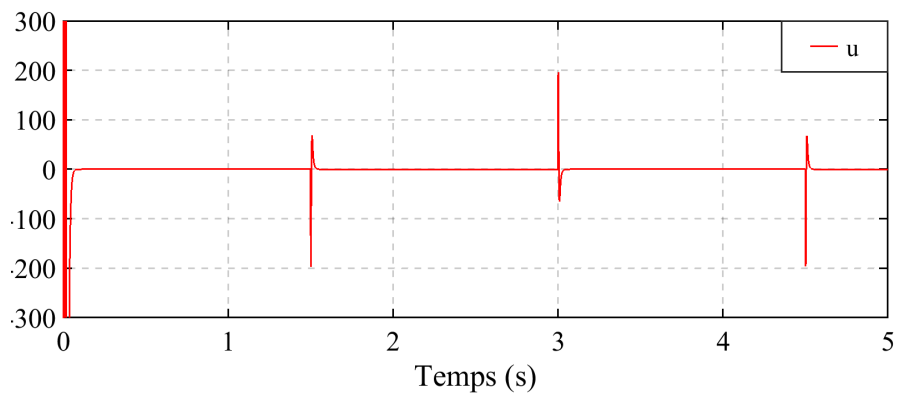


FIGURE 4-10 – Évolution de l'entrée de commande  $u$ .

Ces résultats de simulation confirment l'étude théorique portant sur la robustesse de l'approche *Commande à Gain Récur­sif* réalisée ci-dessus. En effet, cette approche est intrinsèquement robuste pour la classe des systèmes incertains étudiés dans cette thèse. Autrement dit, elle ne nécessite aucune modification ni addition comme c'est le cas de l'approche *Backstepping*. Ce fait montre donc que notre approche *Commande à Gain Récur­sif* est aussi supérieure à celle du *Backstepping*.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle approche pour la commande des systèmes ayant la forme *Strict Feedback Form*. Cette nouvelle approche, que l'on a désigné par le nom *Commande à Gain Récur­sif*, permet d'éliminer complètement le problème majeur dit d'*explosion de complexité* dû aux dérivations successives des commandes virtuelles dans l'approche *Backstepping*. Plus encore, l'approche *Commande à Gain Récur­sif* élimine aussi les problèmes d'*explosion de termes*, d'utilisation d'un *préfiltre* et des conditions très contraignantes dans l'approche *Backstepping*. D'autre part, étant basée sur l'utilisation d'un ensemble de *signaux fictifs*, qui n'existent pas réellement, l'approche *Commande à Gain Récur­sif* élimine l'utilisation des filtres comme dans le cas des approches *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping*. A la différence des autres approches qui utilisent une référence filtrée et sa ou ses dérivées, l'approche *Commande à Gain Récur­sif* utilise le vrai signal de référence. Plus particulièrement, la nouvelle approche *Commande à Gain Récur­sif* n'utilise aucune dérivée ni celle de la vrai référence ni celles des fonctions scalaires non linéaires du système. Plus encore, la nouvelle approche *Commande à Gain Récur­sif* est applicable à une très large classe des systèmes *Strict Feedback Systems* puisque elle requiert des hypothèses de travail beaucoup moins contraignantes. Avec l'approche *Commande à Gain Récur­sif* il est très facile de concevoir la loi de commande comparativement aux approches *Backstepping*, *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping*, par conséquent elle permet de commander facilement les systèmes de très large ordre et dont les non linéarités sont très complexes. De ces faits, notre approche est supérieure à l'approche *Backstepping* et par conséquent elle est aussi supérieure aux approches *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping* puisque ces deux dernières ne sont que des approximations de l'approche *Backstepping*. Plus encore et

à la différence de cette dernière, l'approche *Commande à Gain Récuratif* est intrinsèquement robuste pour la classe des systèmes incertains étudiés ce qui confirme encore plus sa supériorité.

Cette page est intentionnellement laissée blanche

## CHAPITRE 5

# APPLICATION À LA COMMANDE DE LA *SPMSM*

### 5.1 Introduction

L'objectif principale dans ce dernier chapitre est de présenter l'application de la nouvelle approche *Commande à Gain Récursif* dans le cas d'un système réel. En effet, la présentation dans le précédent chapitre est globale et purement théorique. L'autre objectif est de comparer, toujours dans le cas d'un système réel, les deux approches *Commande à Gain Récursif* et *Backstepping*. Le système réel que l'on considère est la machine synchrone à aimant permanent à pôles lisses *SPMSM* (*Surface Permanent Magnet Synchronous Machine*).

On réalise donc la conception des lois de commande permettant de commander la machine *SPMSM* en vitesse par orientation du flux rotorique. Les lois de commande obtenues avec l'une et l'autre des deux approches seront donc comparées du point de vue théorique mais aussi par simulation, i.e. les résultats de simulations obtenus sous Matlab/Simulink permettront de comparer les performances des deux approches.

## 5.2 Machine *SPMSM*

Les machines à aimants permanents ont connu un grand essor dans différents domaines de l'industrie. Cet essor est dû à l'amélioration des qualités des aimants permanents, au développement de l'électronique de puissance et à l'évolution des techniques de commande non linéaire. Les atouts de ces machines sont multiples, parmi lesquels on peut citer : robustesse, faible inertie, couple massique élevé, rendement élevé, vitesse maximale supérieure et faible coût d'entretien. L'une des plus importantes de ces machines est la machine synchrone à aimant permanent à pôles lisses *SPMSM*. Le modèle mathématique dans le plan tournant  $(d, q)$  de cette machine est comme suit [25, 96, 100] :

$$\begin{aligned} \dot{i}_d &= -\frac{R_s}{L_s} i_d + p \Omega i_q + \frac{1}{L_s} u_d \\ \dot{\Omega} &= \frac{p K_e}{J} i_q - \frac{B}{J} \Omega - \frac{1}{J} T_L \\ \dot{i}_q &= -\frac{R_s}{L_s} i_q - p \Omega i_d - \frac{p K_e}{L_s} \Omega + \frac{1}{L_s} u_q \end{aligned} \quad (5.1)$$

où  $\Omega$  est la vitesse de rotation du moteur,  $u_d$  et  $u_q$  les tensions statoriques,  $i_d$  et  $i_q$  les courants statoriques,  $p$  le nombre de paires de pôles et  $T_L$  le couple de charge. Les paramètres du moteur sont : la constante de flux rotorique  $K_e$  reliée au flux de l'aimant permanent  $\phi_f$  par  $K_e = \sqrt{3/2} \phi_f$ , la résistance et inductance statoriques  $R_s$ , le moment d'inertie  $J$  et le frottement visqueux  $B$ .

### 5.2.1 Principe de la commande par orientation du flux rotorique

Notre objectif est de réaliser la commande en vitesse de la machine synchrone à aimant permanent à pôles lisses *SPMSM*. Afin de réaliser cet objectif, on utilise le principe de l'orientation du flux rotorique qui consiste, d'une part, à faire tendre le courant  $i_d$  vers zéro et, d'autre part, d'utiliser le courant  $i_q$  pour gérer le couple de la machine. Le modèle mathématique (5.1), de la machine *SPMSM*, correspond à l'interconnexion de deux sous systèmes. La dynamique du courant statorique  $i_d$  constitue le premier sous système tel que :

$$\dot{i}_d = -\frac{R_s}{L_s} i_d + p \Omega i_q + \frac{1}{L_s} u_d \quad (5.2)$$

Le sous système (5.2) est un système du premier ordre ayant la forme dite linéarisable par retour d'état où la tension  $u_d$  est l'entrée de commande et le courant  $i_d$  est la sortie à commander. La vitesse  $\Omega$  et le courant  $i_q$  sont les états du deuxième sous système connectés au sous système (5.2). En effet, le deuxième sous système est donné par les dynamiques de ces deux derniers états comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\Omega} &= \frac{p K_e}{J} i_q - \frac{B}{J} \Omega - \frac{1}{J} T_L \\ \dot{i}_q &= -\frac{R_s}{L_s} i_q - p \Omega i_d - \frac{p K_e}{L_s} \Omega + \frac{1}{L_s} u_q\end{aligned}\tag{5.3}$$

Le sous système (5.3) est un système du deuxième ordre ayant la forme *Strict Feedback Form* où la tension  $u_q$  est l'entrée de commande et la vitesse  $\Omega$  est la sortie à commander et où le courant  $i_d$  est l'état d'interconnexion.

La commande par orientation de flux rotorique de la *SPMSM* consiste donc à faire tendre le courant  $i_d$  vers zéro. En effet et en utilisant le sous système (5.2), on cherche la loi de commande  $u_d$  permettant de faire tendre et maintenir le courant  $i_d$  à sa référence  $i_{d,ref} = 0$ . D'autre part et en utilisant le sous système (5.3), on cherche la loi de commande  $u_q$  permettant de réaliser la poursuite en vitesse, i.e. la vitesse  $\Omega$  de la machine doit poursuivre la référence  $\Omega_{ref}$ .

### 5.3 Application à la commande de la *SPMSM*

L'objectif étant de comparer l'approche *Backstepping* et la nouvelle approche *Commande à Gain Récursif*, on réalise donc la conception des lois de commande permettant la commande en vitesse par orientation de flux rotorique de la machine *SPMSM*. D'autre part et afin de réaliser cette comparaison entre les deux approches, on choisit comme référence de vitesse  $\Omega_{ref}$  un signal carré variant entre deux créneaux fixes avec une pente très raide. De plus, on considère que le couple de charge  $T_L$  est variable et mesurable.

### 5.3.1 Approche *Backstepping*

La conception des lois de commande  $u_d$  et  $u_q$ , dans cette section, sera réalisée en utilisant deux techniques de commande différentes, en l'occurrence la technique de linéarisation et l'approche *Backstepping*. En effet, le sous système (5.2) étant un système du premier ordre alors on utilisera la technique de linéarisation, voir Section 2.4.1.1, afin de faire tendre le courant  $i_d$  vers sa référence  $i_{d,ref} = 0$ . D'autre part, le sous système (5.3) étant un système du deuxième ordre ayant la forme *Strict Feedback Form* alors on utilisera l'approche *Backstepping* afin de réaliser la poursuite de trajectoire  $\Omega$  vers  $\Omega_{ref}$ .

#### 5.3.1.1 Loi de commande $u_{d,Linea}$

Le sous système (5.2) étant sous la forme linéarisable par retour d'état, il est donc facile de déterminer la loi de commande  $u_{d,Linea}$  afin de faire tendre le courant  $i_d$  vers sa référence  $i_{d,ref} = 0$ . Considérons donc l'erreur de poursuite  $z_1$  suivante :

$$z_1 = i_d - i_{d,ref} = i_d \quad (5.4)$$

dérivons l'erreur de poursuite  $z_1$ , par rapport au temps, pour avoir :

$$\dot{z}_1 = \dot{i}_d \quad (5.5)$$

en utilisant (5.2), la dynamique de l'erreur  $z_1$  est telle que :

$$\dot{z}_1 = -\frac{R_s}{L_s} i_d + p \Omega i_q + \frac{1}{L_s} u_d \quad (5.6)$$

Considérant maintenant la fonction de Lyapounov quadratique suivante :

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 \quad (5.7)$$

la dérivée, par rapport au temps, de cette fonction de Lyapounov est :

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 \quad (5.8)$$

remplaçons (5.6) dans (5.8) pour avoir :

$$\dot{V}_1 = z_1 \left[ -\frac{R_s}{L_s} \iota_d + p \Omega \iota_q + \frac{1}{L_s} u_d \right] \quad (5.9)$$

De cette dernière équation il est facile de déterminer la loi de commande  $u_{d,Linea}$ . En effet, pour obtenir une convergence globale et exponentielle de l'erreur de poursuite  $z_1$  vers zéro, il suffit de prendre la loi de commande  $u_{d,Linea}$  comme suit :

$$u_{d,Linea} = R_s \iota_d - p L_s \Omega \iota_q - k_1 L_s z_1 \quad (5.10)$$

où le gain de commande  $k_1 > 0$  est le gain de réglage. Cette loi de commande est réécrite, en remplaçant  $z_1$  par sa définition (5.4), comme suit :

$$u_{d,Linea} = [R_s - k_1 L_s] \iota_d - p L_s \Omega \iota_q \quad (5.11)$$

En utilisant donc la loi de commande (5.10), la dérivée de la fonction de Lyapounov  $V_1$  donnée par (5.9) devient :

$$\dot{V}_1 = -k_1 z_1^2 \quad (5.12)$$

et en utilisant la définition de la fonction de Lyapounov (5.7), on obtient finalement :

$$\dot{V}_1 = -2 k_1 V_1 \quad (5.13)$$

L'équation (5.13) montre que la fonction de Lyapounov  $V_1$  converge globalement et exponentiellement vers zéro. De ce fait et vu que l'erreur de poursuite est  $z_1 = \iota_d$ , alors le courant  $\iota_d$  converge aussi globalement et exponentiellement vers zéro, avec un taux de convergence fixé par le gain de réglage  $k_1$ .

### 5.3.1.2 Loi de commande $u_{q,Back}$

Le sous système (5.3) étant un système du deuxième ordre ayant la forme *Strict Feedback Form*, on utilisera donc l'approche *Backstepping* afin de déterminer la loi de commande  $u_{q,Back}$  permettant de réaliser la poursuite de trajectoire. Comme explique dans la Section 3.2, l'approche *Backstepping* exige que la référence respecte les conditions décrites par l'hypothèse de

travail 3.2. Puisque le signal de référence  $\Omega_{ref}$  décrit ci-haut ne respecte pas cette hypothèse, i.e. la deuxième dérivée n'est pas continue, alors on implémente le *préfiltre* du deuxième ordre (5.14) de gain statique unitaire, de pulsation propre  $\omega_n$  et de coefficient d'amortissement  $\xi$  suivant :

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 &= -\omega_n^2 (\psi_1 - \Omega_{ref}) - 2 \xi \omega_n \psi_2\end{aligned}\tag{5.14}$$

Dans ce cas, l'approche *Backstepping* utilisera la référence filtrée notée ici  $\Omega_{ref,filtré}$  et correspondant à  $\psi_1$ , i.e.  $\Omega_{ref,filtré} \equiv \psi_1$ , sa première dérivée  $\dot{\Omega}_{ref,filtré} = \psi_2$  et sa deuxième dérivée  $\ddot{\Omega}_{ref,filtré} = \dot{\psi}_2$ .

L'application de l'approche *Backstepping* pour réaliser la commande en vitesse par orientation du flux rotorique de la machine *SPMSM* suit les deux étapes suivantes :

**étape 1 :**

Considérons l'erreur de poursuite en vitesse  $z_2$  suivante :

$$z_2 = \Omega - \Omega_{ref,filtré}\tag{5.15}$$

dérivons l'erreur de poursuite  $z_2$ , par rapport au temps, pour avoir :

$$\dot{z}_2 = \dot{\Omega} - \dot{\Omega}_{ref,filtré}\tag{5.16}$$

en utilisant la première équation dans (5.3), la dynamique de l'erreur  $z_2$  est telle que :

$$\dot{z}_2 = \frac{p K_e}{J} \iota_q - \frac{B}{J} \Omega - \frac{1}{J} T_L - \dot{\Omega}_{ref,filtré}\tag{5.17}$$

Considérant maintenant la fonction de Lyapounov quadratique suivante :

$$V_2 = \frac{1}{2} z_2^2\tag{5.18}$$

la dérivée, par rapport au temps, de cette fonction de Lyapounov est comme suit :

$$\dot{V}_2 = z_2 \dot{z}_2 \quad (5.19)$$

remplaçons (5.17) dans (5.19) pour avoir :

$$\dot{V}_2 = z_2 \left[ \frac{p K_e}{J} \iota_q - \frac{B}{J} \Omega - \frac{1}{J} T_L - \dot{\Omega}_{ref, filtre} \right] \quad (5.20)$$

L'approche *Backstepping* introduit la commande virtuelle  $\alpha_1$  suivante, où  $k_2 > 0$  est le gain de réglage, afin de stabiliser l'erreur de poursuite  $z_2$  :

$$\alpha_1 = \frac{J}{p K_e} \left[ \frac{B}{J} \Omega + \frac{1}{J} T_L + \dot{\Omega}_{ref, filtre} - k_2 z_2 \right] \quad (5.21)$$

la commande virtuelle  $\alpha_1$  avec l'entrée de commande virtuelle  $\iota_q$  donnent l'erreur de poursuite suivante :

$$z_3 = \iota_q - \alpha_1 \quad (5.22)$$

En utilisant donc la commande virtuelle (5.21) et l'erreur de poursuite (5.22) dans la dérivée de la fonction de Lyapounov (5.20), on obtient :

$$\dot{V}_2 = -k_2 z_2^2 + \frac{p K_e}{J} z_2 z_3 \quad (5.23)$$

ou bien en utilisant (5.18)

$$\dot{V}_2 = -2 k_2 V_2 + \frac{p K_e}{J} z_2 z_3 \quad (5.24)$$

Cette dernière équation montre clairement que si la commande virtuelle  $\alpha_1$  est égale à l'entrée virtuelle  $\iota_q$  alors l'erreur de poursuite  $z_3 = 0$ , par conséquent la fonction de Lyapounov  $V_2$  mais aussi l'erreur de poursuite  $z_2$  convergent globalement et exponentiellement vers zéro. Du fait que la commande virtuelle  $\alpha_1$  n'est pas égale à l'entrée virtuelle  $\iota_q$ , alors on passe à l'étape 2 suivante afin de réaliser l'analyse de convergence de l'erreur de poursuite  $z_3$  vers zéro.

**étape 2 :**

En dérivant (5.22) par rapport au temps et en utilisant (5.3) et (5.21), on montre que la dynamique de l'erreur de poursuite  $z_3$  est telle que :

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 = & -\frac{R_s}{L_s} \iota_q - p \Omega \iota_d - \frac{p K_e}{L_s} \Omega + \frac{1}{L_s} u_q \\ & - \frac{J}{p K_e} \left[ \frac{B}{J} \dot{\Omega} + \frac{1}{J} \dot{T}_L + \ddot{\Omega}_{ref, filtre} - k_2 \dot{z}_2 \right] \end{aligned} \quad (5.25)$$

et en utilisant (5.3) et (5.17), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 = & -\frac{R_s}{L_s} \iota_q - p \Omega \iota_d - \frac{p K_e}{L_s} \Omega + \frac{1}{L_s} u_q \\ & - \frac{B}{p K_e} \left[ \frac{p K_e}{J} \iota_q - \frac{B}{J} \Omega - \frac{1}{J} T_L \right] \\ & + \frac{k_2 J}{p K_e} \left[ \frac{p K_e}{J} \iota_q - \frac{B}{J} \Omega - \frac{1}{J} T_L - \dot{\Omega}_{ref, filtre} \right] \\ & - \frac{1}{p K_e} \dot{T}_L - \frac{J}{p K_e} \ddot{\Omega}_{ref, filtre} \end{aligned} \quad (5.26)$$

après arrangement on a :

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 = & + \frac{1}{L_s} u_q - p \Omega \iota_d - \left[ \frac{R_s}{L_s} + \frac{B}{J} - k_2 \right] \iota_q \\ & + \left[ \frac{B}{p K_e} \left( \frac{B}{J} - k_2 \right) - \frac{p K_e}{L_s} \right] \Omega + \frac{1}{p K_e} \left[ \frac{B}{J} - k_2 \right] T_L \\ & - \frac{1}{p K_e} \dot{T}_L - \frac{k_2 J}{p K_e} \dot{\Omega}_{ref, filtre} - \frac{J}{p K_e} \ddot{\Omega}_{ref, filtre} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Considérons maintenant la fonction de Lyapounov suivante pour l'erreur de poursuite  $z_3$  :

$$V_3 = \frac{1}{2} z_3^2 \quad (5.28)$$

en utilisant (5.27), la dérivée par rapport au temps de la fonction de Lyapounov  $V_3$  est comme suit :

$$\dot{V}_3 = z_3 \dot{z}_3 = z_3 \left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{L_s} u_q - p \Omega \iota_d - \left[ \frac{R_s}{L_s} + \frac{B}{J} - k_2 \right] \iota_q \\ + \left[ \frac{B}{p K_e} \left( \frac{B}{J} - k_2 \right) - \frac{p K_e}{L_s} \right] \Omega + \frac{1}{p K_e} \left[ \frac{B}{J} - k_2 \right] T_L \\ - \frac{1}{p K_e} \dot{T}_L - \frac{k_2 J}{p K_e} \dot{\Omega}_{ref, filtre} - \frac{J}{p K_e} \ddot{\Omega}_{ref, filtre} \end{array} \right\} \quad (5.29)$$

De cette dernière équation et afin de stabiliser l'erreur de poursuite  $z_3$  on prend la loi de commande  $u_{q, Back}$  suivante :

$$u_{q, Back} = L_s \left\{ \begin{array}{l} + p \Omega \iota_d + \left[ \frac{R_s}{L_s} + \frac{B}{J} - k_2 \right] \iota_q \\ - \left[ \frac{B}{p K_e} \left( \frac{B}{J} - k_2 \right) - \frac{p K_e}{L_s} \right] \Omega - \frac{1}{p K_e} \left[ \frac{B}{J} - k_2 \right] T_L \\ + \frac{1}{p K_e} \dot{T}_L + \frac{k_2 J}{p K_e} \dot{\Omega}_{ref, filtre} + \frac{J}{p K_e} \ddot{\Omega}_{ref, filtre} \\ - k_3 z_3 - \frac{p K_e}{J} z_2 \end{array} \right\} \quad (5.30)$$

Le terme  $(-\frac{p K_e}{J} z_2)$  est inclus dans la loi de commande  $u_{q, Back}$  afin de compenser le deuxième terme dans la dérivée de la fonction de Lyapounov  $V_2$  donnée par (5.24) et où le gain  $k_3 > 0$  est le gain de réglage.

En remplaçant donc la loi de commande  $u_{q, Back}$  (5.30) dans la dérivée de la fonction de Lyapounov  $V_3$  (5.29), on trouve :

$$\dot{V}_3 = -k_3 z_3^2 - \frac{p K_e}{J} z_2 z_3 \quad (5.31)$$

Considérons maintenant la fonction de Lyapounov  $V_0$  suivante pour tout le sous système (5.3) :

$$V_0 = V_2 + V_3 = \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} z_3^2 \quad (5.32)$$

Dérivons, par rapport au temps, cette fonction pour avoir :

$$\dot{V}_0 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \quad (5.33)$$

en utilisant (5.23) et (5.31), on trouve :

$$\begin{aligned}\dot{V}_0 &= -k_2 z_2^2 - k_3 z_3^2 \\ \dot{V}_0 &= -\min(k_2, k_3) (z_2^2 + z_3^2)\end{aligned}\tag{5.34}$$

où bien en utilisant (5.32)

$$\dot{V}_0 = -2 \min(k_2, k_3) V_0\tag{5.35}$$

Cette dernière équation montre que pour tout gains de réglage  $k_2 > 0$  et  $k_3 > 0$ , la fonction de Lyapounov  $V_0$  converge globalement et exponentiellement vers zéro. Par conséquence, le vecteur erreur de poursuite  $z^T = [z_2, z_3]$  tend globalement et exponentiellement vers zéro avec un taux de convergence déterminé par le minimum des deux gains de réglage  $k_2$  et  $k_3$ .

En remplaçant les erreurs de poursuite  $z_2$  et  $z_3$  par leurs définitions (5.15) et (5.22), la loi de commande  $u_{q,Back}$  est finalement donnée, après arrangement, comme suit :

$$\begin{aligned}u_{q,Back} &= +p L_s \Omega \iota_d + L_s \left[ \frac{R_s}{L_s} + \frac{B}{J} - k_2 - k_3 \right] \iota_q \\ &+ \left[ p K_e \left( 1 - \frac{L_s}{J} \right) + \frac{L_s B}{p K_e} (k_2 + k_3) - \frac{L_s}{p K_e} \left( \frac{B^2}{J} + J k_2 k_3 \right) \right] \Omega \\ &+ \left[ \frac{p K_e L_s}{J} + k_2 k_3 \frac{L_s J}{p K_e} \right] \Omega_{ref,filtré} + \frac{L_s J}{p K_e} (k_2 + k_3) \dot{\Omega}_{ref,filtré} \\ &+ \frac{L_s J}{p K_e} \ddot{\Omega}_{ref,filtré} + \frac{L_s}{p K_e} \left[ k_3 + k_2 - \frac{B}{J} \right] T_L + \frac{L_s}{p K_e} \dot{T}_L\end{aligned}\tag{5.36}$$

### 5.3.1.3 Analyse complète de la convergence

Les deux lois de commande  $u_{d,Linea}$  et  $u_{q,Back}$  sont les lois de commande permettant de commander séparément les deux sous systèmes (5.2) et (5.3). L'analyse qui nous intéresse ici porte sur la convergence du système complet (5.1).

Considérons la fonction de Lyapounov suivante :

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} [z_1, z_2, z_3] [z_1, z_2, z_3]^T \\
 V &= \frac{1}{2} [z_1^2 + z_2^2 + z_3^2] \\
 V &= V_1 + V_2 + V_3 \\
 V &= V_1 + V_0
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Dérivons, par rapport au temps, et utilisons (5.13) et (5.35) pour avoir :

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= -2 k_1 V_1 - 2 \min(k_2, k_3) V_0 \\
 \dot{V} &= -2 \min(k_1, k_2, k_3) V
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Cette dernière équation montre que la fonction de Lyapounov  $V$  converge globalement et exponentiellement vers zéro et par conséquent le vecteur erreur  $z^T = [z_1, z_2, z_3]$  converge globalement et exponentiellement vers zéro avec un taux de convergence déterminé par le minimum des trois gains de réglage  $k_1, k_2$  et  $k_3$ .

### 5.3.2 Approche *Commande à Gain Récursif*

A la différence des lois de commande réalisées par linéarisation et *Backstepping* dans la précédente section, la conception des lois de commande permettant la commande en vitesse par orientation du flux rotorique de la *SPMSM* seront réalisées, dans cette section, exclusivement en utilisant l'approche *Commande à Gain Récursif*. D'autre part, il est important de noter que le signal de référence  $\Omega_{ref}$ , décrit dans la section 5.3, respecte l'hypothèse de travail 4.2.

#### 5.3.2.1 Loi de commande $u_{d,CGR}$

L'approche *Commande à Gain Récursif* étant applicable aux systèmes non linéaires de premier ordre, on appliquera donc cette approche au sous système (5.2) afin de faire tendre le courant  $i_d$  vers sa référence  $i_{d,ref} = 0$ . Considérons alors la même erreur de poursuite  $z_1$  que dans la précédente section :

$$z_1 = i_d - i_{d,ref} = i_d \tag{5.39}$$

En ajoutant et soustrayant le *signal fictif*  $\phi_{i_d}$ , qui sera défini plus tard, pour l'erreur de poursuite  $z_1$  on obtient :

$$\begin{aligned} z_1 &= i_d - \phi_{i_d} + \phi_{i_d} \\ z_1 &= \tilde{i}_d + \phi_{i_d} \end{aligned} \quad (5.40)$$

où la nouvelle erreur  $\tilde{i}_d$  est comme suit :

$$\tilde{i}_d = i_d - \phi_{i_d} \quad (5.41)$$

Afin de réaliser l'analyse de convergence de l'erreur de poursuite  $z_1$  et de déterminer la loi de commande  $u_{d,CGR}$  permettant de faire tendre le courant  $i_d$  vers sa référence  $i_{d,ref} = 0$ , on procède selon trois étapes comme suit.

**étape 1 :**

Dans cette étape on réalise l'analyse de convergence de l'erreur de poursuite  $\tilde{i}_d$ . En dérivant, par rapport au temps, (5.41) et en utilisant (5.2) on obtient :

$$\dot{\tilde{i}}_d = -\frac{R_s}{L_s} i_d + p \Omega i_q + \frac{1}{L_s} u_d - \dot{\phi}_{i_d} \quad (5.42)$$

Considérons la fonction de Lyapounov  $V_{\tilde{i}_d}$  suivante pour l'erreur de poursuite  $\tilde{i}_d$  :

$$V_{\tilde{i}_d} = \frac{1}{2} \tilde{i}_d^2 \quad (5.43)$$

en dérivant la fonction de Lyapounov  $V_{\tilde{i}_d}$ , par rapport au temps, et en utilisant (5.42) on obtient :

$$\dot{V}_{\tilde{i}_d} = \tilde{i}_d \left[ -\frac{R_s}{L_s} i_d + p \Omega i_q + \frac{1}{L_s} u_d - \dot{\phi}_{i_d} \right] \quad (5.44)$$

L'objectif dans cette étape est de faire tendre l'erreur de poursuite  $\tilde{i}_d$  vers zéro globalement et exponentiellement. Afin de réaliser cet objectif, on opte pour les choix suivants :

Comme expliquer dans la Définition 4.2 du chapitre 4, le deuxième terme dans la forme générale d'un *signal fictif* 4.1 dépend de l'objectif d'analyse. Dans ce cas et dû au fait que la référence est nulle, i.e.  $v_{d,ref} = 0$ , alors le deuxième terme dans 4.1 est pris égale à zéro. Il s'agit d'un cas particulier. Le *signal fictif*  $\phi_{i_d}$  correspond donc à l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\phi}_{i_d} + k_1 \phi_{i_d} = 0 \quad (5.45)$$

Alors que la commande réelle  $u_{d,CGR}$ , conformément à l'analyse en chapitre 4, est choisie comme :

$$u_{d,CGR} = L_s \left[ \frac{R_s}{L_s} i_d - p \Omega i_q - k_1 i_d \right] \quad (5.46)$$

où bien, après arrangement

$$u_{d,CGR} = [R_s - k_1 L_s] i_d - p L_s \Omega i_q \quad (5.47)$$

où la constante  $k_1 > 0$  est le gain de réglage.

En remplaçant donc le *signal fictif* (5.45) et la commande réelle (5.46) dans la dérivée de la fonction de Lyapounov (5.44) et en utilisant l'erreur de poursuite (5.41), on obtient :

$$\dot{V}_{\tilde{i}_d} = -k_1 \tilde{i}_d^2 \quad (5.48)$$

plus encore, en utilisant (5.43) la dérivée de la fonction de Lyapounov devient finalement :

$$\dot{V}_{\tilde{i}_d} = -2 k_1 V_{\tilde{i}_d} \quad (5.49)$$

Cette dernière équation montre clairement que la fonction de Lyapounov converge globalement et exponentiellement vers zéro et par conséquent l'erreur de poursuite  $\tilde{i}_d$  converge, conformément à (5.43), globalement et exponentiellement vers zéro avec un taux de convergence fixé par le gain de réglage  $k_1$ .

**étape 2 :**

Pour ce cas particulier où la référence est nulle, i.e.  $v_{d,ref} = 0$ , cette deuxième étape est très simple à analyser. En effet et du fait que le *signal fictif*  $\phi_{i_d}$  est défini par l'équation différentielle de premier ordre (5.45), il est clair que ce signal converge globalement et exponentiellement vers zéro avec un taux de convergence fixé par le gain de réglage  $k_1$ . Ceci est démontré en considérant la fonction de Lyapounov suivante :

$$V_{\phi_{i_d}} = \frac{1}{2} \phi_{i_d}^2 \quad (5.50)$$

en dérivant, par rapport au temps, cette fonction de Lyapounov et en utilisant (5.45) et (5.50) on a :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\phi_{i_d}} &= \phi_{i_d} \dot{\phi}_{i_d} \\ \dot{V}_{\phi_{i_d}} &= -k_1 \phi_{i_d}^2 \\ \dot{V}_{\phi_{i_d}} &= -2 k_1 V_{\phi_{i_d}} \end{aligned} \quad (5.51)$$

Cette dernière équation montre effectivement que la fonction de Lyapounov  $V_{\phi_{i_d}}$  et le *signal fictif*  $\phi_{i_d}$  convergent globalement et exponentiellement vers zéro.

**étape 3 :**

Dans cette dernière étape on réalise l'analyse de convergence de l'erreur de poursuite  $z_1$ . A cet effet, considérons la fonction de Lyapounov suivante :

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 \quad (5.52)$$

en utilisant (5.40), on a :

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} [\tilde{i}_d + \phi_{i_d}]^2 \\ V_1 &= \frac{1}{2} \tilde{i}_d^2 + \frac{1}{2} \phi_{i_d}^2 + \tilde{i}_d \phi_{i_d} \end{aligned} \quad (5.53)$$

l'inégalité de Young donne :

$$V_1 \leq \tilde{i}_d^2 + \phi_{i_d}^2 \quad (5.54)$$

de plus, en utilisant (5.43) et (5.50) on obtient :

$$V_1 \leq 2 V_{i_d} + 2 V_{\phi_{i_d}} \quad (5.55)$$

et en dérivant cette fonction de Lyapounov, par rapport au temps, et en utilisant (5.49), (5.51) et (5.55) on trouve :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq 2 \dot{V}_{i_d} + 2 \dot{V}_{\phi_{i_d}} \\ \dot{V}_1 &\leq -4 k_1 V_{i_d}^2 - 4 k_1 V_{\phi_{i_d}} \\ \dot{V}_1 &\leq -2 k_1 V_1 \end{aligned} \quad (5.56)$$

Cette dernière équation montre que la fonction de Lyapounov  $V_1$  converge globalement et exponentiellement vers zéro. Par conséquence et conformément à (5.52), l'erreur de poursuite  $z_1$  et donc le courant  $i_d$  convergent aussi globalement et exponentiellement vers zéro avec un taux de convergence déterminé par le gain de réglage  $k_1$ .

### 5.3.2.2 Loi de commande $u_{q,CGR}$

Dans cette section on appliquera l'approche *Commande à Gain Récurisif* au sous système (5.3) afin de déterminer la loi de commande  $u_{q,CGR}$  permettant de réaliser la poursuite de trajectoire  $\Omega$  vers la vraie référence  $\Omega_{ref}$  et non pas la référence filtrée  $\Omega_{ref,filtré}$ . En effet, la vraie référence  $\Omega_{ref}$  respecte l'hypothèse de travail 4.2 et par conséquence aucun filtre n'est nécessaire pour l'implémentation de l'approche *Commande à Gain Récurisif*. D'autre part, le sous système (5.3) étant du deuxième ordre, on traitera successivement la dynamique du courant statorique  $i_q$  et celle de la vitesse  $\Omega$ . Remarquer ici que, à la différence de l'approche *Backstepping* qui traite les états dans un ordre croissant, voir la section précédente, l'approche *Commande à Gain Récurisif* traite les états dans un ordre décroissant, i.e. la dynamique du courant statorique  $i_q$  puis la dynamique de la vitesse  $\Omega$ . Il faut aussi noter que chaque état du sous système (5.3),  $i_q$  et  $\Omega$ , sera traité en trois étapes.

### 5.3.2.2.1 Dynamique du courant statorique $\iota_q$

L'objectif dans cette partie est d'analyser la convergence de l'erreur de poursuite entre l'entrée de commande virtuelle  $\iota_q$  et la commande virtuelle  $\alpha_2$  définie comme suit :

$$z_3 = \iota_q - \alpha_2 \quad (5.57)$$

Il est important de noter que la commande virtuelle  $\alpha_2$  sera définie dans la prochaine partie dans laquelle l'analyse de convergence de l'erreur de poursuite  $z_2$  sera traitée. En effet, dans cette partie on considère simplement que la commande virtuelle  $\alpha_2$  est bien définie dans le sens que  $\alpha_2 \in L_\infty$ , i.e.  $\alpha_2$  est bornée, et qu'il existe une constante  $c_2 > 0$  telle que la première dérivée de  $\alpha_2$  est bornée comme suit :

$$|\dot{\alpha}_2| \leq c_2 \quad (5.58)$$

Ces deux propriétés correspondent en effet aux hypothèses de travail 4.3 et 4.4 de l'approche *Commande à Gain Récursif*, voir Chapitre 4.

En ajoutant et soustrayant le *signal fictif*  $\phi_{\iota_q}$ , qui sera défini plus tard, pour l'erreur de poursuite  $z_3$  (5.57) on obtient :

$$\begin{aligned} z_3 &= \iota_q - \phi_{\iota_q} + \phi_{\iota_q} - \alpha_2 \\ z_3 &= \tilde{\iota}_q + \tilde{\alpha}_2 \end{aligned} \quad (5.59)$$

où les deux nouvelles erreurs  $\tilde{\iota}_q$  et  $\tilde{\alpha}_2$  sont définies comme suit :

$$\tilde{\iota}_q = \iota_q - \phi_{\iota_q} \quad (5.60)$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \phi_{\iota_q} - \alpha_2 \quad (5.61)$$

Afin de réaliser l'analyse de convergence de l'erreur de poursuite  $z_3$  et de déterminer la commande réelle  $u_{q,CGR}$  permettant de faire tendre l'entrée de commande virtuelle  $\iota_q$  vers la commande virtuelle  $\alpha_2$ , on procède selon trois étapes comme suit.

**étape 1 :**

Dans cette étape on réalise l'analyse de convergence de l'erreur de poursuite  $\tilde{i}_q$ . Pour cette fin, considérons la fonction de Lyapounov quadratique suivante :

$$V_{\tilde{i}_q} = \frac{1}{2} \tilde{i}_q^2 \quad (5.62)$$

dérivons cette fonction de Lyapounov, par rapport au temps, et utilisons (5.60) pour avoir :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\tilde{i}_q} &= \tilde{i}_q \dot{\tilde{i}}_q \\ \dot{V}_{\tilde{i}_q} &= \tilde{i}_q \left( i_q - \dot{\phi}_{i_q} \right) \end{aligned} \quad (5.63)$$

et en remplaçant la dynamique du courant  $i_q$  donnée par (5.3) dans (5.63), on obtient :

$$\dot{V}_{\tilde{i}_q} = \tilde{i}_q \left( -\frac{R_s}{L_s} i_q - p \Omega i_d - \frac{p K_e}{L_s} \Omega + \frac{1}{L_s} u_q - \dot{\phi}_{i_q} \right) \quad (5.64)$$

L'objectif étant de faire tendre l'erreur de poursuite  $\tilde{i}_q$  vers zéro globalement et exponentiellement, on opte alors pour les choix suivants :

le *signal fictif*  $\phi_{i_q}$  est choisi tel que défini par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\phi}_{i_q} + k_3 \phi_{i_q} = k_3 \alpha_2 \quad (5.65)$$

et la commande réelle  $u_{q,CGR}$  est choisie comme suit :

$$u_{q,CGR} = L_s \left[ -k_3 i_q + \frac{R_s}{L_s} i_q + p \Omega i_d + \frac{p K_e}{L_s} \Omega + k_3 \alpha_2 \right] \quad (5.66)$$

où la constante  $k_3 > 0$  est le gain de réglage.

En remplaçant donc le *signal fictif* (5.65) et la commande réelle (5.66) dans la dérivée de la fonction de Lyapounov (5.64) et en utilisant l'erreur de poursuite (5.60), on obtient :

$$\dot{V}_{\tilde{i}_q} = -k_3 \tilde{i}_q^2 \quad (5.67)$$

et en utilisant (5.62), on a finalement :

$$\dot{V}_{\tilde{i}_q} = -2 k_3 V_{\tilde{i}_q} \quad (5.68)$$

Pour les choix faits ci-dessus, *signal fictif*  $\phi_{i_q}$  et commande réelle  $u_{q,CGR}$ , on voit clairement que la fonction de Lyapounov  $V_{\tilde{i}_q}$  converge globalement et exponentiellement vers zéro et par conséquence, conformément à (5.62), l'erreur de poursuite  $\tilde{i}_q$  converge aussi globalement et exponentiellement vers zéro avec un taux de convergence fixé par le gain de réglage  $k_3$ .

### étape 2 :

Dans cette étape on réalise l'analyse de convergence de l'erreur de poursuite  $\tilde{\alpha}_2$ . Pour cette fin, considérons la fonction de Lyapounov quadratique suivante :

$$V_{\tilde{\alpha}_2} = \frac{1}{2} \tilde{\alpha}_2^2 \quad (5.69)$$

dérivons cette fonction de Lyapounov, par rapport au temps, et utilisons (5.61) pour avoir :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\tilde{\alpha}_2} &= \tilde{\alpha}_2 \dot{\tilde{\alpha}}_2 \\ \dot{V}_{\tilde{\alpha}_2} &= \tilde{\alpha}_2 \left( \dot{\phi}_{i_q} - \dot{\alpha}_2 \right) \end{aligned} \quad (5.70)$$

en utilisant le *signal fictif*  $\phi_{i_q}$  donné par (5.65), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\tilde{\alpha}_2} &= \tilde{\alpha}_2 \left( -k_3 \phi_{i_q} + k_3 \alpha_2 - \dot{\alpha}_2 \right) \\ \dot{V}_{\tilde{\alpha}_2} &= \tilde{\alpha}_2 \left( -k_3 \tilde{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_2 \right) \\ \dot{V}_{\tilde{\alpha}_2} &= -k_3 \tilde{\alpha}_2^2 - \tilde{\alpha}_2 \dot{\alpha}_2 \end{aligned} \quad (5.71)$$

l'inégalité de Young donne :

$$\dot{V}_{\tilde{\alpha}_2} \leq -\left(k_3 - \frac{\varepsilon_{1,2}}{2}\right) \tilde{\alpha}_2^2 + \frac{1}{2 \varepsilon_{1,2}} \dot{\alpha}_2^2 \quad (5.72)$$

en utilisant (5.69) et (5.58), on a :

$$\dot{V}_{\tilde{\alpha}_2} \leq -2 \left(k_3 - \frac{\varepsilon_{1,2}}{2}\right) V_{\tilde{\alpha}_2} + \frac{1}{2 \varepsilon_{1,2}} c_2^2 \quad (5.73)$$

Dans ce cas, en choisissant

$$\varepsilon_{1,2} \gg \frac{c_2^2}{2} \quad \text{et} \quad k_3 > \frac{\varepsilon_{1,2}}{2} \quad (5.74)$$

c'est à dire

$$k_3 \gg \frac{c_2^2}{4} \quad (5.75)$$

il est facile de conclure à partir de (5.73) que la fonction de Lyapounov  $V_{\tilde{\alpha}_2}$  converge globalement et exponentiellement. Par conséquent, l'erreur de poursuite  $\tilde{\alpha}_2$  converge globalement et exponentiellement dans une boule de centre zéro et dont le rayon

$$R_2 = \sqrt{\frac{c_2^2}{2 \varepsilon_{1,2} (k_3 - \frac{\varepsilon_{1,2}}{2})}} \quad (5.76)$$

peut être rendu aussi petit que désiré en choisissant, conformément à (5.75), le paramètre de réglage  $k_3$  suffisamment grand.

### étape 3 :

Dans cette dernière étape on réalise l'analyse de convergence de l'erreur de poursuite  $z_3$ . A cet effet, considérons la fonction de Lyapounov suivante :

$$V_3 = \frac{1}{2} z_3^2 \quad (5.77)$$

en utilisant (5.59), on a :

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{1}{2} [\tilde{i}_q + \tilde{\alpha}_2]^2 \\ V_3 &= \frac{1}{2} \tilde{i}_q^2 + \frac{1}{2} \tilde{\alpha}_2^2 + \tilde{i}_q \tilde{\alpha}_2 \end{aligned} \quad (5.78)$$

l'inégalité de Young donne :

$$V_3 \leq \tilde{i}_q^2 + \tilde{\alpha}_2^2 \quad (5.79)$$

de plus, en utilisant (5.62) et (5.69) on obtient :

$$V_3 \leq 2 V_{i_q} + 2 V_{\tilde{\alpha}_2} \quad (5.80)$$

en dérivant cette fonction de Lyapounov, par rapport au temps, et en utilisant (5.68) et (5.73) on trouve :

$$\begin{aligned}\dot{V}_3 &\leq 2 \dot{V}_{\tilde{i}_q} + 2 \dot{V}_{\tilde{\alpha}_2} \\ \dot{V}_3 &\leq -4 k_3 V_{\tilde{i}_q} - 4 \left(k_3 - \frac{\varepsilon_{1,2}}{2}\right) V_{\tilde{\alpha}_2} + \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} c_2^2\end{aligned}\quad (5.81)$$

et puisque  $0 < \left(k_3 - \frac{\varepsilon_{1,2}}{2}\right) < k_3$ , il vient :

$$\dot{V}_3 \leq -4 \left(k_3 - \frac{\varepsilon_{1,2}}{2}\right) (V_{\tilde{i}_q} + V_{\tilde{\alpha}_2}) + \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} c_2^2 \quad (5.82)$$

et en utilisant (5.80)

$$\dot{V}_3 \leq -2 \left(k_3 - \frac{\varepsilon_{1,2}}{2}\right) V_3 + \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} c_2^2 \quad (5.83)$$

en choisissant donc

$$\varepsilon_{1,2} \gg c_2^2 \quad \text{et} \quad k_3 > \frac{\varepsilon_{1,2}}{2} \quad (5.84)$$

plus exactement

$$k_3 \gg \frac{c_2^2}{2} \quad (5.85)$$

alors de l'équation (5.83), on peut voir que la fonction de Lyapounov  $V_3$  converge globalement et exponentiellement. Par conséquence et conformément à (5.77), l'erreur de poursuite  $z_3$  converge globalement et exponentiellement dans une boule de centre zéro et dont le rayon

$$R_{z_3} = \sqrt{\frac{c_2^2}{\varepsilon_{1,2} \left(k_3 - \frac{\varepsilon_{1,2}}{2}\right)}} \quad (5.86)$$

peut être rendu aussi petit que désiré en choisissant, conformément à (5.85), le paramètre de réglage  $k_3$  suffisamment grand.

### 5.3.2.2.2 Dynamique de la vitesse $\Omega$

L'objectif dans cette partie est d'analyser la convergence de l'erreur de poursuite en vitesse  $z_2$  définie comme suit :

$$z_2 = \Omega - \Omega_{ref} \quad (5.87)$$

En ajoutant et soustrayant le *signal fictif*  $\phi_\Omega$ , qui sera défini plus tard, pour l'erreur de poursuite  $z_2$  donnée par (5.87) on obtient :

$$\begin{aligned} z_2 &= \Omega - \phi_\Omega + \phi_\Omega - \Omega_{ref} \\ z_2 &= \tilde{\Omega} + \tilde{\Omega}_{ref} \end{aligned} \quad (5.88)$$

où les deux nouvelles erreurs  $\tilde{\Omega}$  et  $\tilde{\Omega}_{ref}$  sont définies comme suit :

$$\tilde{\Omega} = \Omega - \phi_\Omega \quad (5.89)$$

$$\tilde{\Omega}_{ref} = \phi_\Omega - \Omega_{ref} \quad (5.90)$$

Afin de réaliser l'analyse de convergence de l'erreur de poursuite  $z_2$  et de déterminer la commande virtuelle  $\alpha_2$  permettant de faire tendre la vitesse  $\Omega$  vers sa référence  $\Omega_{ref}$ , on procède selon trois étapes comme suit.

### étape 1 :

Dans cette étape on réalise l'analyse de convergence de l'erreur de poursuite  $\tilde{\Omega}$ . Pour cette fin, on modifie la dynamique de la vitesse  $\Omega$  en ajoutant et soustrayant le terme  $\frac{p K_e}{J} \alpha_2$ , où  $\alpha_2$  est la commande virtuelle et  $\iota_q$  l'entrée virtuelle, comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} &= \frac{p K_e}{J} \iota_q - \frac{B}{J} \Omega - \frac{1}{J} T_L - \frac{p K_e}{J} \alpha_2 + \frac{p K_e}{J} \alpha_2 \\ \dot{\Omega} &= \frac{p K_e}{J} [\iota_q - \alpha_2] - \frac{B}{J} \Omega - \frac{1}{J} T_L + \frac{p K_e}{J} \alpha_2 \end{aligned} \quad (5.91)$$

Dans cette dernière équation apparaît l'erreur de poursuite  $z_3$  entre l'entrée virtuelle  $\iota_q$  et la commande virtuelle  $\alpha_2$  telle que définie par (5.57), i.e.  $z_3 = \iota_q - \alpha_2$ , où bien en introduisant le *signal fictif*  $\phi_{\iota_q}$  par (5.59), i.e.  $z_3 = \tilde{\iota}_q + \tilde{\alpha}_2$ . En remplaçant donc cette erreur en utilisant (5.59) on obtient :

$$\dot{\Omega} = \frac{p K_e}{J} [\tilde{\iota}_q + \tilde{\alpha}_2] - \frac{B}{J} \Omega - \frac{1}{J} T_L + \frac{p K_e}{J} \alpha_2 \quad (5.92)$$

Considérons donc la fonction de Lyapounov suivante pour l'erreur de poursuite  $\tilde{\Omega}$  :

$$V_{\tilde{\Omega}} = \frac{1}{2} \tilde{\Omega}^2 \quad (5.93)$$

dérivons cette fonction de Lyapounov, par rapport au temps, et utilisons (5.89) pour avoir :

$$\begin{aligned}\dot{V}_{\tilde{\Omega}} &= \tilde{\Omega} \dot{\tilde{\Omega}} \\ \dot{V}_{\tilde{\Omega}} &= \tilde{\Omega} \left( \dot{\tilde{\Omega}} - \dot{\phi}_{\Omega} \right)\end{aligned}\tag{5.94}$$

et en remplaçant (5.92) dans (5.94), on obtient :

$$\dot{V}_{\tilde{\Omega}} = \tilde{\Omega} \left( \frac{p K_e}{J} [\tilde{i}_q + \tilde{\alpha}_2] - \frac{B}{J} \Omega - \frac{1}{J} T_L + \frac{p K_e}{J} \alpha_2 - \dot{\phi}_{\Omega} \right)\tag{5.95}$$

L'objectif dans cette étape est de faire tendre l'erreur de poursuite  $\tilde{\Omega}$  vers zéro globalement et exponentiellement. Afin de réaliser cet objectif on opte pour les choix suivants :

le *signal fictif*  $\phi_{\Omega}$  est choisi tel que donné par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\phi}_{\Omega} + k_2 \phi_{\Omega} = k_2 \Omega_{ref} + \frac{p K_e}{J} (\tilde{i}_q + \tilde{\alpha}_2)\tag{5.96}$$

et la commande virtuelle  $\alpha_2$  est choisie comme suit :

$$\alpha_2 = \frac{J}{p K_e} \left[ -k_2 \Omega + \frac{B}{J} \Omega + \frac{1}{J} T_L + k_2 \Omega_{ref} \right]\tag{5.97}$$

où la constante  $k_2 > 0$  est le gain de réglage.

En remplaçant donc le *signal fictif* (5.96) et la commande virtuelle (5.97) dans la dérivée de la fonction de Lyapounov (5.95) et en utilisant l'erreur de poursuite (5.89), on obtient :

$$\dot{V}_{\tilde{\Omega}} = -k_2 \tilde{\Omega}^2\tag{5.98}$$

et en utilisant (5.93), on a finalement :

$$\dot{V}_{\tilde{\Omega}} = -2 k_2 V_{\tilde{\Omega}}\tag{5.99}$$

Pour les choix faits ci-dessus, *signal fictif*  $\phi_{\Omega}$  et commande virtuelle  $\alpha_2$ , on voit clairement que la fonction de Lyapounov  $V_{\tilde{\Omega}}$  converge globalement et exponentiellement vers zéro et par

conséquence, conformément à (5.93), l'erreur de poursuite  $\tilde{\Omega}$  converge aussi globalement et exponentiellement vers zéro avec un taux de convergence fixé par le gain de réglage  $k_2$ .

**étape 2 :**

Dans cette étape on réalise l'analyse de convergence de l'erreur de poursuite  $\tilde{\Omega}_{ref}$ . Pour cette fin, considérons la fonction de Lyapounov quadratique suivante :

$$V_{\tilde{\Omega}_{ref}} = \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_{ref}^2 \quad (5.100)$$

dérivons cette fonction de Lyapounov, par rapport au temps, et utilisons (5.90) pour avoir :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\tilde{\Omega}_{ref}} &= \tilde{\Omega}_{ref} \dot{\tilde{\Omega}}_{ref} \\ \dot{V}_{\tilde{\Omega}_{ref}} &= \tilde{\Omega}_{ref} \left( \dot{\phi}_{\Omega} - \dot{\Omega}_{ref} \right) \end{aligned} \quad (5.101)$$

en remplaçant le *signal fictif*  $\phi_{\Omega}$  par sa définition (5.96), on obtient :

$$\dot{V}_{\tilde{\Omega}_{ref}} = \tilde{\Omega}_{ref} \left( -k_2 \phi_{\Omega} + k_2 \Omega_{ref} + \frac{p K_e}{J} (\tilde{i}_q + \tilde{\alpha}_2) - \dot{\Omega}_{ref} \right) \quad (5.102)$$

et en utilisant (5.90), on trouve :

$$\dot{V}_{\tilde{\Omega}_{ref}} = \tilde{\Omega}_{ref} \left( -k_2 \tilde{\Omega}_{ref} + \frac{p K_e}{J} (\tilde{i}_q + \tilde{\alpha}_2) - \dot{\Omega}_{ref} \right) \quad (5.103)$$

Conformément à l'analyse réalisée auparavant, voir Section 5.3.2.2.1, l'erreur de poursuite  $\tilde{i}_q$  converge globalement et exponentiellement vers zéro, par conséquent le terme correspondant peut être ignoré dans la dérivée de la fonction de Lyapounov (5.103), donc on a :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\tilde{\Omega}_{ref}} &= \tilde{\Omega}_{ref} \left( -k_2 \tilde{\Omega}_{ref} + \frac{p K_e}{J} \tilde{\alpha}_2 - \dot{\Omega}_{ref} \right) \\ \dot{V}_{\tilde{\Omega}_{ref}} &= -k_2 \tilde{\Omega}_{ref}^2 + \frac{p K_e}{J} \tilde{\Omega}_{ref} \tilde{\alpha}_2 - \tilde{\Omega}_{ref} \dot{\Omega}_{ref} \end{aligned} \quad (5.104)$$

et en utilisant l'inégalité de Young, on obtient :

$$\dot{V}_{\tilde{\Omega}_{ref}} \leq - \left( k_2 - \frac{\varepsilon_{1,1}}{2} - \frac{\varepsilon_{2,1}}{2} \right) \tilde{\Omega}_{ref}^2 + \frac{1}{2 \varepsilon_{1,1}} \dot{\Omega}_{ref}^2 + \left( \frac{p K_e}{J} \right)^2 \frac{1}{2 \varepsilon_{2,1}} \tilde{\alpha}_2^2 \quad (5.105)$$

En prenant en considération, d'une part, l'hypothèse de travail 4.2 de l'approche *Commande à Gain Récursif*, i.e. il existe une constante  $c_1 > 0$  tel que le signal de référence  $\Omega_{ref}$  possède une dérivée première vérifiant  $|\dot{\Omega}_{ref}| \leq c_1$ , laquelle est en effet vérifié par le choix du signal  $\Omega_{ref}$  et , d'autre part, le résultat de l'analyse réalisée auparavant, i.e.  $|\tilde{\alpha}_2| \leq R_2$ , voir (5.76), il s'en suit que la dérivée de la fonction de Lyapounov (5.105) est comme suit :

$$\dot{V}_{\tilde{\Omega}_{ref}} \leq - \left( k_2 - \frac{\varepsilon_{1,1}}{2} - \frac{\varepsilon_{2,1}}{2} \right) \tilde{\Omega}_{ref}^2 + \frac{1}{2 \varepsilon_{1,1}} c_1^2 + \left( \frac{p K_e}{J} \right)^2 \frac{1}{2 \varepsilon_{2,1}} R_2^2 \quad (5.106)$$

où bien en utilisant (5.100)

$$\dot{V}_{\tilde{\Omega}_{ref}} \leq -2 \left( k_2 - \frac{\varepsilon_{1,1}}{2} - \frac{\varepsilon_{2,1}}{2} \right) V_{\tilde{\Omega}_{ref}} + \frac{1}{2 \varepsilon_{1,1}} c_1^2 + \left( \frac{p K_e}{J} \right)^2 \frac{1}{2 \varepsilon_{2,1}} R_2^2 \quad (5.107)$$

Dans ce cas, en choisissant

$$\varepsilon_{1,1} \gg \frac{c_1^2}{2} , \quad \varepsilon_{2,1} \gg \frac{1}{2} \left( \frac{p K_e}{J} \right)^2 R_2^2 \quad \text{et} \quad k_2 > \frac{\varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{2,1}}{2} \quad (5.108)$$

c'est à dire

$$k_2 \gg \frac{1}{4} \left[ c_1^2 + \left( \frac{p K_e}{J} \right)^2 R_2^2 \right] \quad (5.109)$$

il est facile de conclure à partir de (5.107) que la fonction de Lyapounov  $V_{\tilde{\Omega}_{ref}}$  converge globalement et exponentiellement. Par conséquent, l'erreur de poursuite  $\tilde{\Omega}_{ref}$  converge globalement et exponentiellement dans une boule de centre zéro et dont le rayon

$$R_1 = \sqrt{\left[ \frac{c_1^2}{\varepsilon_{1,1}} + \frac{\left( \frac{p K_e}{J} \right)^2 R_2^2}{\varepsilon_{2,1}} \right] / \left[ 2 \left( k_2 - \frac{\varepsilon_{1,1}}{2} - \frac{\varepsilon_{2,1}}{2} \right) \right]} \quad (5.110)$$

peut être rendu aussi petit que désiré en choisissant, conformément à (5.109), le paramètre de réglage  $k_2$  suffisamment grand.

**étape 3 :**

Dans cette dernière étape on réalise l'analyse de convergence de l'erreur de poursuite  $z_2$ . A cet effet, considérons la fonction de Lyapounov suivante :

$$V_2 = \frac{1}{2} z_2^2 \quad (5.111)$$

en utilisant (5.88), on a :

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{2} \left[ \tilde{\Omega} + \tilde{\Omega}_{ref} \right]^2 \\ V_2 &= \frac{1}{2} \tilde{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_{ref}^2 + \tilde{\Omega} \tilde{\Omega}_{ref} \end{aligned} \quad (5.112)$$

l'inégalité de Young donne :

$$V_2 \leq \tilde{\Omega}^2 + \tilde{\Omega}_{ref}^2 \quad (5.113)$$

de plus, en utilisant (5.93) et (5.100) on obtient :

$$V_2 \leq 2 V_{\tilde{\Omega}} + 2 V_{\tilde{\Omega}_{ref}} \quad (5.114)$$

en dérivant cette fonction de Lyapounov, par rapport au temps, et en utilisant (5.99) et (5.107) on trouve :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq 2 \dot{V}_{\tilde{\Omega}} + 2 \dot{V}_{\tilde{\Omega}_{ref}} \\ \dot{V}_2 &\leq -4 k_2 V_{\tilde{\Omega}} - 4 \left( k_2 - \frac{\varepsilon_{1,1}}{2} - \frac{\varepsilon_{2,1}}{2} \right) V_{\tilde{\Omega}_{ref}} + \frac{c_1^2}{\varepsilon_{1,1}} + \left( \frac{p K_e}{J} \right)^2 \frac{R_2^2}{\varepsilon_{2,1}} \end{aligned} \quad (5.115)$$

et puisque  $0 < \left( k_2 - \frac{\varepsilon_{1,1}}{2} - \frac{\varepsilon_{2,1}}{2} \right) < k_2$ , il vient que

$$\dot{V}_2 \leq -4 \left( k_2 - \frac{\varepsilon_{1,1}}{2} - \frac{\varepsilon_{2,1}}{2} \right) (V_{\tilde{\Omega}} + V_{\tilde{\Omega}_{ref}}) + \frac{c_1^2}{\varepsilon_{1,1}} + \left( \frac{p K_e}{J} \right)^2 \frac{R_2^2}{\varepsilon_{2,1}} \quad (5.116)$$

et en utilisant (5.114)

$$\dot{V}_2 \leq -2 \left( k_2 - \frac{\varepsilon_{1,1}}{2} - \frac{\varepsilon_{2,1}}{2} \right) V_2 + \frac{c_1^2}{\varepsilon_{1,1}} + \left( \frac{p K_e}{J} \right)^2 \frac{R_2^2}{\varepsilon_{2,1}} \quad (5.117)$$

en choisissant donc

$$\varepsilon_{1,1} \gg c_1^2 \quad , \quad \varepsilon_{2,1} \gg \left( \frac{p K_e}{J} \right)^2 R_2^2 \quad \text{et} \quad k_2 > \frac{\varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{2,1}}{2} \quad (5.118)$$

plus exactement

$$k_2 \gg \frac{1}{2} \left[ c_1^2 + \left( \frac{p K_e}{J} \right)^2 R_2^2 \right] \quad (5.119)$$

alors de l'équation (5.117), on peut voir que la fonction de Lyapounov  $V_2$  converge globalement et exponentiellement. Par conséquent et conformément à (5.111), l'erreur de poursuite  $z_2$  converge globalement et exponentiellement dans une boule de centre zéro et dont le rayon

$$R_{z_2} = \sqrt{\left[ \frac{c_1^2}{\varepsilon_{1,1}} + \left( \frac{p K_e}{J} \right)^2 \frac{R_2^2}{\varepsilon_{2,1}} \right] / \left[ k_2 - \frac{\varepsilon_{1,1}}{2} - \frac{\varepsilon_{2,1}}{2} \right]} \quad (5.120)$$

peut être rendu aussi petit que désiré en choisissant, conformément à (5.119), le paramètre de réglage  $k_2$  suffisamment grand.

En remplaçant la commande virtuelle  $\alpha_2$  donnée par (5.97) dans la commande réelle  $u_{q,CGR}$  donnée par (5.66), cette dernière est finalement donnée comme suit :

$$\begin{aligned} u_{q,CGR} = & [R_s - k_3 L_s] i_q + p L_s \Omega i_d + \left[ p K_e + \frac{k_3 L_s}{p K_e} (B - k_2 J) \right] \Omega \\ & + \frac{k_3 L_s}{p K_e} T_L + \frac{k_2 k_3 J L_s}{p K_e} \Omega_{ref} \end{aligned} \quad (5.121)$$

### 5.3.2.3 Analyse complète de la convergence

Les deux lois de commande  $u_{d,CGR}$  et  $u_{q,CGR}$  sont les lois de commande permettant de commander séparément les deux sous systèmes (5.2) et (5.3). L'analyse qui nous intéresse ici porte sur la convergence du système complet (5.1). Considérons donc la fonction de Lyapounov suivante :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} [z_1, z_2, z_3] [z_1, z_2, z_3]^T \\ V &= \frac{1}{2} [z_1^2 + z_2^2 + z_3^2] \\ V &= V_1 + V_2 + V_3 \end{aligned} \quad (5.122)$$

Dérivons, par rapport au temps, et utilisons (5.56), (5.83) et (5.117) pour avoir :

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -2 k_1 V_1 \\ & -2 \left( k_2 - \frac{\varepsilon_{1,1}}{2} - \frac{\varepsilon_{2,1}}{2} \right) V_2 + \frac{c_1^2}{\varepsilon_{1,1}} + \left( \frac{p K_e}{J} \right)^2 \frac{R_2^2}{\varepsilon_{2,1}} \\ & -2 \left( k_3 - \frac{\varepsilon_{1,2}}{2} \right) V_3 + \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} c_2^2 \end{aligned} \quad (5.123)$$

et en utilisant (5.122), on obtient :

$$\dot{V} \leq -2 k_0 V + \frac{c_1^2}{\varepsilon_{1,1}} + \left( \frac{p K_e}{J} \right)^2 \frac{R_2^2}{\varepsilon_{2,1}} + \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} c_2^2 \quad (5.124)$$

où  $k_0$  est le minimum défini comme suit :

$$k_0 = \min \left[ k_1; \left( k_2 - \frac{\varepsilon_{1,1}}{2} - \frac{\varepsilon_{2,1}}{2} \right); \left( k_3 - \frac{\varepsilon_{1,2}}{2} \right) \right] \quad (5.125)$$

L'équation (5.124) montre que la fonction de Lyapounov  $V$  converge globalement et exponentiellement vers zéro. Par conséquent le vecteur erreur  $z^T = [z_1, z_2, z_3]$  converge globalement et exponentiellement vers zéro dans une boule de centre zéro et dont le rayon

$$R = \sqrt{\left[ \frac{c_2^2}{\varepsilon_{1,2}} + \frac{c_1^2}{\varepsilon_{1,1}} + \left( \frac{p K_e}{J} \right)^2 \frac{R_2^2}{\varepsilon_{2,1}} \right]} / k_0 \quad (5.126)$$

peut être rendu aussi petit que désiré en choisissant le minimum  $k_0$ , conformément à (5.125), suffisamment grand.

### 5.3.3 Comparaison et simulation

La première chose à relever ici est que la loi de commande  $u_{d,Linea}$  est obtenue par la théorie de linéarisation, voir Chapitre 13 dans [58]. En effet, l'approche *Backstepping* ne s'applique pas aux systèmes de premier ordre, autrement dit pour ces systèmes l'approche *Backstepping* est équivalente à la méthode de linéarisation. D'autre part, on note que la loi de commande  $u_{d,Linea}$  et celle obtenue en utilisant l'approche *Commande à Gain Récursif*,  $u_{d,CGR}$ , sont exactement les mêmes. Ceci est dû au fait que la référence est nulle, i.e.  $i_{d,ref} = 0$ .

D'autre part, même si le sous système (5.3) est de très faible ordre,  $n = 2$ , les inconvénients de l'approche *Backstepping* apparaissent clairement. En effet, en comparant la loi de commande  $u_{q,Back}$ , obtenue en utilisant l'approche *Backstepping*, à la loi de commande  $u_{q,CGR}$ , obtenue en utilisant l'approche *Commande à Gain Récuratif*, on relève les inconvénients suivants :

1. Difficulté d'obtention de la loi de commande  $u_{q,Back}$  avec l'approche *Backstepping* comparée à la facilité d'obtention de la loi de commande  $u_{q,CGR}$  avec l'approche *Commande à Gain Récuratif*. En effet, l'utilisateur final peut obtenir directement les lois de commande,  $u_{d,CGR}$  et  $u_{q,CGR}$ , sans réaliser l'analyse présentée dans ce chapitre. Il s'agit du problème *d'explosion de complexité*.
2. Nécessité de l'adjonction d'un *préfiltre* pour générer la référence filtrée et ses dérivées afin de réaliser la loi de commande  $u_{q,Back}$  obtenue par l'approche *Backstepping*. La réalisation de la loi de commande  $u_{q,CGR}$  obtenue par l'approche *Commande à Gain Récuratif* ne nécessite aucun filtre. Il s'agit du problème des conditions très contraignantes de l'hypothèse 3.2.
3. Nombre de termes important dans la loi de commande  $u_{q,Back}$  obtenue par l'approche *Backstepping* comparé au nombre de termes dans la loi de commande  $u_{q,CGR}$  obtenue par l'approche *Commande à Gain Récuratif*. Il s'agit du problème *d'explosion de termes*.
4. La loi de commande  $u_{q,Back}$  obtenue par l'approche *Backstepping* nécessite, dans le cas présent, un deuxième *préfiltre* du premier ordre afin d'obtenir la dérivée du couple de charge  $T_L$ . Ceci n'est pas le cas pour la loi de commande  $u_{q,CGR}$  obtenue par l'approche *Commande à Gain Récuratif*.

Il est important de noter que le problème des conditions très contraignantes de l'hypothèse 3.3 sur les non linéarités  $g_i$  et  $f_i$  n'apparaît pas dans le cas de la machine *SPMSM* puisque ses non linéarités sont simples.

Afin de compléter la comparaison entre les deux approches, *Backstepping* et *Commande à Gain Récuratif*, on réalise la simulation de la commande par orientation du flux rotorique de la machine *SPMSM* sous MATLAB/Simulink. Dans cette simulation, on utilise les mêmes valeurs

pour les gains de réglage :  $k_1 = 30$ ,  $k_2 = 100$  et  $k_3 = 10$ . Les paramètres du *préfiltre* (5.14) sont choisis comme suit : le coefficient d'amortissement  $\xi$  est pris constant tel que  $\xi = 0.7$ , alors que pour la pulsation propre  $\omega_n$  on prend successivement les valeurs suivantes  $\omega_n = 10$ ,  $\omega_n = 20$  et  $\omega_n = 30$ . Les deux créneaux pour la vraie référence de vitesse sont  $100 \text{ rd/s}$  et  $80 \text{ rd/s}$ . Le couple de charge est pris constant tel que  $T_L = 1 \text{ Nm}$ .

Les résultats de simulation sont tels que donnés par les figures Figure 5-1 à Figure 5-5. La Figure 5-1 montre clairement que l'approche *Commande à Gain Récursif* est plus performante que l'approche *Backstepping*. En effet, pour les mêmes gains de réglage on voit clairement que la convergence dans le cas de l'approche *Commande à Gain Récursif* est plus rapide que dans celui de l'approche *Backstepping*. Ce fait est dû au *préfiltre* (5.14). En effet, dans le cas de l'approche *Backstepping* la vitesse  $\Omega$  converge d'abord et rapidement vers la référence filtrée  $\Omega_{ref,filtré}$  et ces deux derniers convergent après vers la vraie référence  $\Omega_{ref}$ . De ce fait et pour que l'approche *Backstepping* atteigne les performances de celle de la *Commande à Gain Récursif*, il faut augmenter la valeur de la pulsation propre  $\omega_n$  du *préfiltre* (5.14). D'autre part, il est important de noter que dans le cas d'une implémentation temps réelle la pulsation propre  $\omega_n$  ne peut pas être prise très grande. De ce fait, on conclue que le *préfiltre* (5.14) constitue un inconvénient majeur pour de l'approche *Backstepping*. Cet dernier est encore plus important si le couple de charge  $T_L$  est variable. En effet et dans ce cas de figure, il faudrait ajouter un deuxième *préfiltre* du premier ordre pour obtenir l'approximation du couple de charge et sa première dérivée.

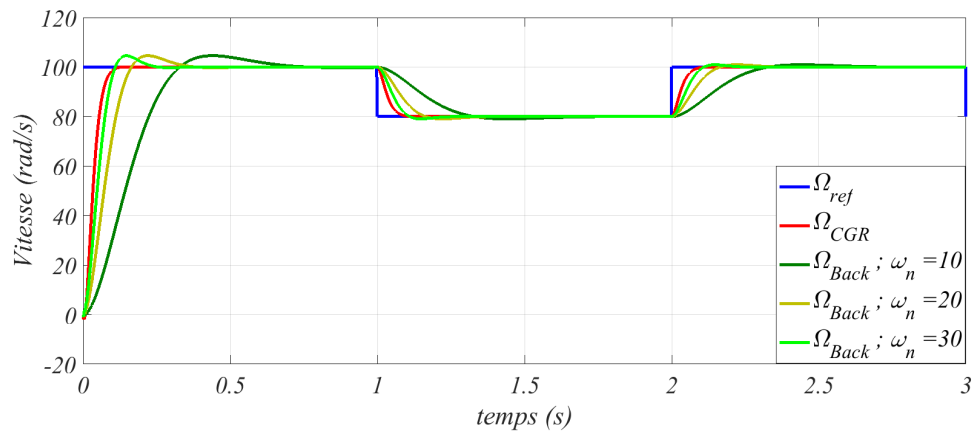


FIGURE 5-1 – Évolution de la vitesse  $\Omega$  pour les deux approches.

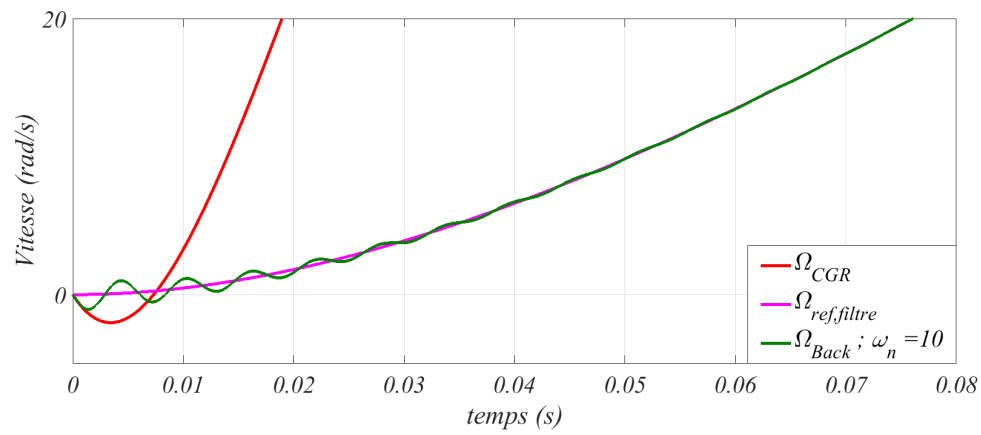


FIGURE 5-2 – Évolution des vitesses  $\Omega_{ref, filtre}$  et  $\Omega_{Back}$  avec l'approche *Backstepping* et  $\Omega_{CGR}$  avec celle de *Commande à Gain Récurisif*. Agrandissement

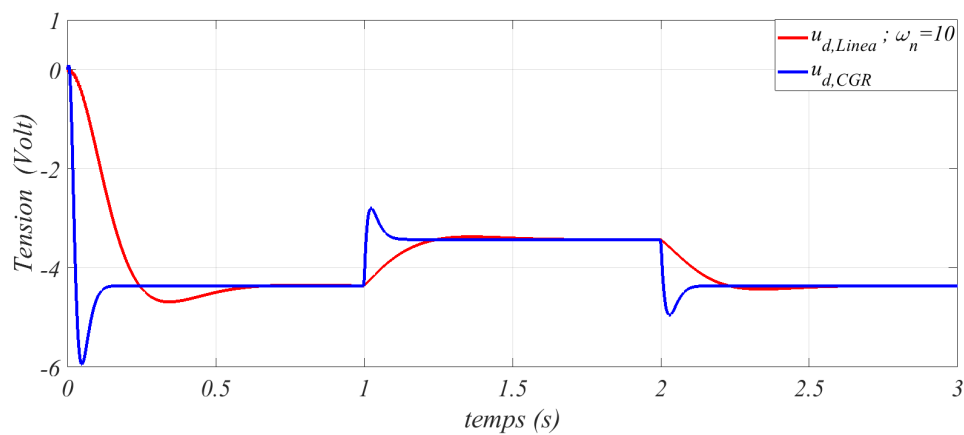


FIGURE 5-3 – Évolution des commandes  $u_{d, Linea}$  et  $u_{d, CGR}$  avec les deux approches.

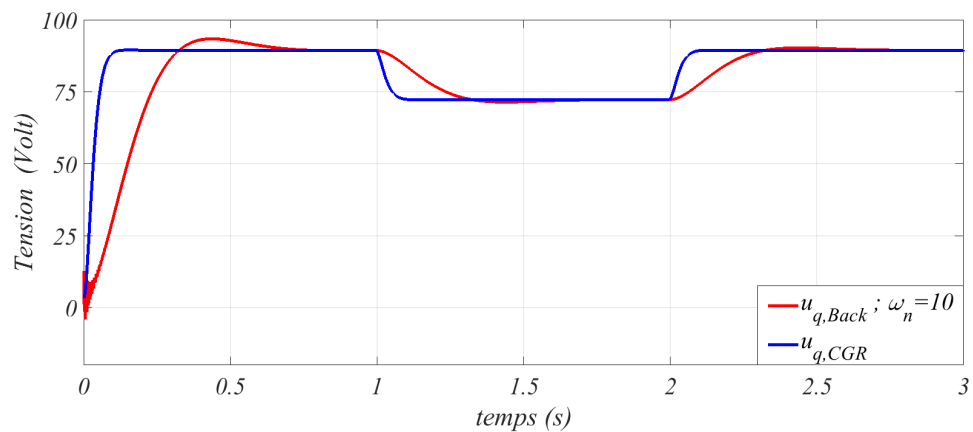


FIGURE 5-4 – Évolution des commandes  $u_{q,Back}$  et  $u_{q,CGR}$  avec les deux approches.

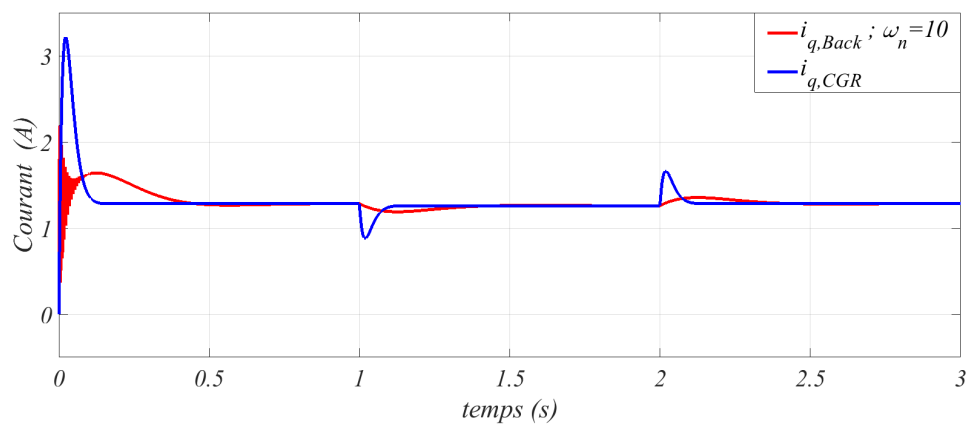


FIGURE 5-5 – Évolution des courants statoriques  $i_{q,Back}$  et  $i_{q,CGR}$  avec les deux approches.

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'application de l'approche *Commande à Gain Récur­sif* pour la conception des lois de commande permettant la commande en vitesse par orientation du flux rotorique de la machine synchrone à aimant permanent *SPMSM*. D'autre part, nous avons réalisé la conception des mêmes lois de commande en combinant les techniques de linéarisation et *Backstepping*. La simulation de ces deux dernières commandes sous MATLAB/Simulink nous a permis de comparer les performances des deux approches *Commande à Gain Récur­sif* et *Backstepping* dans le cas d'un système réel. En effet, ceci nous a permis de mettre en évidence les grands avantages de la nouvelle approche *Commande à Gain Récur­sif* comparativement à celle du *Backstepping*.

Cette page est intentionnellement laissée blanche

## CHAPITRE 6

## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans cette thèse nous avons traité le problème de la commande des systèmes non linéaires appartenant à la classe *Strict Feedback Systems*. La contribution majeure dans cette thèse est le développement d'une nouvelle approche pour la commande de ces derniers systèmes, laquelle approche est désignée par *Commande à Gain Récursif*. Le développement de notre approche est basé sur une nouvelle manière pour la construction récursive des fonctions de Lyapounov laquelle est rendue possible grâce à l'introduction de la nouvelle notion de *signal fictif*, ceci constitue une autre contribution non moins majeure dans cette thèse. L'approche *Commande à Gain Récursif* non seulement apporte une solution radicale aux limites et inconvénients de l'approche *Backstepping*, mais plus encore ces performances lui sont supérieures. Par conséquent notre approche surpasse toutes les approches, proposées dans la littérature scientifique, traitant les limites et inconvénients de l'approche *Backstepping*. Plus encore et à la différence de cette dernière, l'approche *Commande à Gain Récursif* est intrinsèquement robuste pour la classe des systèmes incertains étudiés dans cette thèse ce qui confirme encore plus sa supériorité.

Nous avons commencé par présenté un rappel des transformations permettant le passage de l'écriture générale d'un système non linéaire vers les formes canoniques. Cette présentation nous a permis de présenter les différentes formes canoniques de base des systèmes appartenant à la classe *Strict Feedback Systems*, mais aussi la forme générale. En particulier, ces formes permettent de clarifier les types de systèmes non linéaires traités par les différentes approches citées dans cette thèse.

Après la présentation de la classe *Strict Feedback Systems*, nous avons présenté l'approche *Backstepping* afin de montrer ces limites et inconvénients et par conséquent de situer la problématique traitée dans cette thèse. En effet, nous avons discuté la difficulté de l'établissement de loi de commande, i.e. problème d'*explosion de complexité*, le nombre de termes très important dans cette loi de commande, i.e. problème d'*explosion de termes*, la nécessité de l'adjonction d'un *préfiltre* mais aussi les conditions très contraignantes des hypothèses de travail qui limitent l'étendue de la classe *Strict Feedback Systems* pour laquelle l'approche *Backstepping* est applicable. Plus encore et afin de mieux clarifier la difficulté de la problématique, nous avons choisi de présenter les approches *Dynamic Surface Control* et *Command Filtered Backstepping* parmi toutes celles proposées dans la littérature. Grâce à ces deux dernières nous avons montré que toutes les approches ne traitent pas les limites et inconvénients de l'approche *Backstepping* de manière radicale, elles ne font que contourner ces problèmes au prix d'une limitation des performances. En effet, nous avons montré que leurs objectif est, d'une part, de réduire les contraintes des hypothèses de travail et, d'autre part, de réduire les problèmes d'*explosion de complexité* et d'*explosion de termes* tout en cherchant à recouvrir aux mieux possible les performances de l'approche *Backstepping*.

Afin de montrer les avantages de l'approche *Commande à Gain Récursif* par rapport à celle du *Backstepping* et de valider l'analyse théorique de notre approche, nous avons réalisé la commande par orientation du flux rotorique de la machine synchrone à aimant permanent à pôles lisses *SPMSM*. Les résultats de simulations ont montrés clairement la supériorité de l'approche *Commande à Gain Récursif*.

L'approche *Commande à Gain Récursif* développée dans cette thèse considère que les non linéarités du système sont connues, dont les paramètres sont connus et invariants et que les états du système sont mesurables. De ce fait les perspectives suivantes sont envisageables :

Extension de l'approche *Commande à Gain Récursif* au cas adaptative. Il s'agit d'étendre cette approche à la commande des systèmes de la classe *Parametric Strict Feedback Systems*, cas des systèmes (2.19). Ceci donnera lieu à la commande non linéaire *Commande Adaptative à Gain Récursif*.

Extension de l'approche *Commande à Gain Récursif* au cas où les non linéarités du système (2.19) dépendent seulement de la sortie  $y$ . Il s'agit d'étendre cette approche à la commande des systèmes de la classe *Output Feedback Systems*, voir chapitre 7 dans [63]. Ceci donnera lieu à la commande non linéaire *Commande à Gain Récursif avec Observateur*.

Les deux extensions ci-haut peuvent aussi être combinées afin de réaliser la *Commande Adaptative à Gain Récursif avec Observateur*.

Les réseaux de neurones ou la logique floue peuvent être combinés à l'approche *Commande à Gain Récursif* afin de commander les systèmes dont les non linéarités sont inconnues.

Les quatre extensions ci-haut ne sont qu'un simple aperçu des possibilités existantes. D'autre part, on peut envisager l'utilisation de la nouvelle approche *Commande à Gain Récursif* où ces extensions futures pour la commande avec validation expérimentale de différents systèmes tels que la machine asynchrone, à courant continu . . . .

Cette page est intentionnellement laissée blanche

- [1] K. S. D. Alharbi. *Backstepping Control and Transformation of Multi-Input Multi-Output Affine Nonlinear Systems into a Strict Feedback Form*. PhD thesis, University of Arkansas, 2019.
- [2] A. G. Alleyne and R. Liu. Systematic control of a class of nonlinear systems with application to electrohydraulic cylinder pressure control. *IEEE transactions on control systems technology*, 8(4) :623–634, 2000.
- [3] J. Alvarez-Ramirez, G. Espinosa-Pérez, and D. Noriega-Pineda. Current-mode control of dc-dc power converters : a backstepping approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control : IFAC-Affiliated Journal*, 13(5) :421–442, 2003.
- [4] V. Andrieu and L. Praly. Global asymptotic stabilization for nonminimum phase nonlinear systems admitting a strict normal form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(5) :1120–1132, 2008.
- [5] C. P. Bechlioulis and G. A. Rovithakis. Robust partial-state feedback prescribed performance control of cascade systems with unknown nonlinearities. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(9) :2224–2230, 2011.
- [6] C. P. Bechlioulis and G. A. Rovithakis. A low-complexity global approximation-free control scheme with prescribed performance for unknown pure feedback systems. *Automatica*, 50(4) :1217–1226, 2014.
- [7] W. Bi. Neural networks adaptive control for fractional order non linear system with unmodelled dynamics and actuator faults. *IET Control Theory & Applications*, 17(3) : 259–269, 2023.
- [8] Y. Bouteraa, K. A. Alattas, T. Peng, A. Fekih, R. Rahmani, and S. Mobayen. Design of robust adaptive fuzzy control for uncertain bilateral teleoperation systems based on backstepping approach. *IET Control Theory & Applications*, 17(7) :800–813, 2023.
- [9] X. Bu. Prescribed performance control approaches, applications and challenges : A comprehensive survey. *Asian Journal of Control*, 25(1) :241–261, 2023.
- [10] C. I. Byrnes and A. Isidori. Asymptotic stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(10) :1122–1137, 1991.

- [11] A. Cezayirli. *Adaptive Control of Nonlinear Systems Using Multiple Identification Models*. PhD thesis, Doctoral dissertation, Bogaziçi University, turkey, 2007.
- [12] C. X. Chen, Y. X. Xie, and Y. H. Lan. Backstepping control of speed sensorless permanent magnet synchronous motor based on slide model observer. *International Journal of Automation and Computing*, 12(2) :149–155, 2015.
- [13] L. Chen, Q. Wang, and C. Hu. Adaptive fuzzy command filtered backstepping control for uncertain pure-feedback systems. *ISA transactions*, 129 :204–213, 2022.
- [14] M. Chen, S. S. Ge, and B. V. E. How. Robust adaptive neural network control for a class of uncertain mimo nonlinear systems with input nonlinearities. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 21(5) :796–812, 2010.
- [15] W. Chen, L. Jiao, J. Li, and R. Li. Adaptive nn backstepping output-feedback control for stochastic nonlinear strict-feedback systems with time-varying delays. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 40(3) :939–950, 2009.
- [16] W. Chenliang and L. Yan. Adaptive dynamic surface control for linear multivariable systems. *Automatica*, 46(10) :1703–1711, 2010.
- [17] G. Cui, J. Yu, and Q. G. Wang. Finite-time adaptive fuzzy control for mimo nonlinear systems with input saturation via improved command-filtered backstepping. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics : Systems*, 52(2) :980–989, 2020.
- [18] H. Dong, J. Cao, and H. Liu. Observers-based event-triggered adaptive fuzzy backstepping synchronization of uncertain fractional order chaotic systems. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 33(4) :972–982, 2023.
- [19] W. Dong, J. A. Farrell, M. M. Polycarpou, V. Djapic, and M. Sharma. Command filtered adaptive backstepping. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 20(3) :566–580, 2011.
- [20] H. El Fadil and F. Giri. Accounting of dc-dc power converter dynamics in dc motor velocity adaptive control. In *2006 IEEE Conference on Computer Aided Control System Design, 2006 IEEE International Conference on Control Applications, 2006 IEEE International Symposium on Intelligent Control*, pages 3157–3162. IEEE, October 2006.
- [21] H. El Fadil and F. Giri. Robust control of dc motor velocity through dc-dc buck power converter. In *IECON 2006-32nd Annual Conference on IEEE Industrial Electronics*, pages 1563–1568. IEEE, November 2006.
- [22] H. El Fadil and F. Giri. Backstepping based control of pwm dc-dc boost power converters. In *2007 IEEE international symposium on industrial electronics*, pages 395–400. IEEE, June 2007.
- [23] H. El Fadil, F. Giri, M. Haloua, and H. Ouadi. Nonlinear and adaptive control of buck power converters. In *42nd IEEE International Conference on Decision and Control*, pages 4475–4480. IEEE, December 2003.

- [24] H. El-Fadil, F. Giri, J.M. Guerrero, and B. Salhi. Adaptive control of interleaved boost converter for fuel cell energy. In *Proceedings of the 2011 American Control Conference*, pages 3905–3910. IEEE, june 2011.
- [25] M. Ezzat, J. De Leon, and A. Glumineau. Sensorless speed control of pmsm via adaptive interconnected observer. *International Journal of Control*, 84(11) :1926–1943, 2011.
- [26] M. Ezzat, J. De Leon, and A. Glumineau. Adaptive interconnected observer-based backstepping control design for sensorless pmsm. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1) :6148–6153, 2011.
- [27] J. Farrell, M. Polycarpou, and M. Sharma. Adaptive backstepping with magnitude, rate, and bandwidth constraints : Aircraft longitude control. In *Proceedings of the 2003 American Control Conference*, volume 5, pages 3898–3904. IEEE, June 2003.
- [28] J. A. Farrell, M. Sharma, and M. Polycarpou. Longitudinal flight-path control using online function approximation. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 26(6) :885–897, 2003.
- [29] J. A. Farrell, M. Sharma, and M. M. Polycarpou. On-line approximation based fixed-wing aircraft control. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 28(6) :1089–1102, 2005.
- [30] J. A. Farrell, M. Polycarpou, M. Sharma, and W. Dong. Command filtered backstepping. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(6) :1391–1395, 2009.
- [31] R. Freeman and P. V. Kokotovic. *Robust nonlinear control design : state-space and Lyapunov techniques*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [32] R. A. Freeman and P. V. Kokotovic. Backstepping design of robust controllers for a class of nonlinear systems. In *Nonlinear Control Systems Design 1992*. Pergamon, pages 431–436, 1993.
- [33] C. Fu, Q. G. Wang, J. Yu, and C. Lin. Neural network-based finite-time command filtering control for switched nonlinear systems with backlash-like hysteresis. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 32(7) :3268–3273, 2020.
- [34] Z. Gao, J. Zhang, J. Li, and Z. Song. Prescribed performance adaptive control for a nonlinear aeroelastic system with input constraint. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2022.
- [35] S. S. Ge, F. Hong, and T. H. Lee. Robust adaptive control of nonlinear systems with unknown time delays. *Automatica*, 41(7) :1181–1190, 2005.
- [36] J. C. Gerdes and J. K. Hedrick. Vehicle speed and spacing control via coordinated throttle and brake actuation. *Control Engineering Practice*, 5(11) :1607–1614, 1997.
- [37] D. Ginoya, P. D. Shendge, and S. B. Phadke. Disturbance observer based sliding mode control of nonlinear mismatched uncertain systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 26(1–3) :98–107, 2015.

- [38] J. H. Green and J. K. Hedrick. Nonlinear speed control for automotive engines. In *1990 American Control Conference*, pages 2891–2897. IEEE, May 1990.
- [39] S. Han. Fractional-order command filtered backstepping sliding mode control with fractional-order nonlinear disturbance observer for nonlinear systems. *Journal of the Franklin Institute*, 357(11) :6760–6776, 2020.
- [40] A. Harrouz, H. Becheri, I. Colak, and K. Kayisli. Backstepping control of a separately excited dc motor. *Electrical Engineering*, 100(3) :1393–1403, 2018.
- [41] Y. He, Y. Zhou, Y. Cai, C. Yuan, and J. Shen. Dsc-based rbf neural network control for nonlinear time-delay systems with time-varying full state constraints. *ISA transactions*, 129(2) :79–90, 2022.
- [42] Y. He, X. H. Chang, H. Wang, and X. Zhao. Command-filtered adaptive fuzzy control for switched mimo nonlinear systems with unknown dead zones and full state constraints. *International Journal of Fuzzy Systems*, 25(2) :544–560, 2023.
- [43] P. P Hedrick, J. K. et Yip. Multiple sliding surface control : theory and application. *J. Dyn. Sys., Meas., Control*, 122(4) :586–593, 2000.
- [44] Y. Hou and S. Tong. Command filter-based adaptive fuzzy backstepping control for a class of switched nonlinear systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 314 :46–60, 2017.
- [45] A. C. Huang and Y. C. Chen. Adaptive multiple-surface sliding control for non-autonomous systems with mismatched uncertainties. *Automatica*, 40(11) :1939–1945, 2004.
- [46] N. E. Hwang and B. S. Kim. Active fault tolerant control of quadrotor based on multiple sliding surface control method. *The Journal of the Korea institute of electronic communication sciences*, 17(1) :59–70, 2022.
- [47] N. E. Hwang, J. B. Park, and Y. H. Choi. Design of multiple sliding surface control system for a quadrotor equipped with a manipulator. *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems*, 22(7) :502–507, 2016.
- [48] A. Ilchmann, E. P. Ryan, and P. Townsend. Tracking control with prescribed transient behaviour for systems of known relative degree. *Systems & Control Letters*, 55(5) :396–406, 2006.
- [49] P. A. Ioannou and J. Sun. *Robust adaptive control*. Courier Corporation, 2012.
- [50] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems II*. Communications and Control Engineering. Springer London, 2013.
- [51] S. Jeong and D. Chwa. Coupled multiple sliding-mode control for robust trajectory tracking of hovercraft with external disturbances. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 65(5) :4103–4113, 2017.
- [52] Y. Ji, H. Zhou, and Q. Zong. Adaptive neural network command filtered backstepping control of pure feedback systems in presence of full state constraints. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 33(5) :829–842, 2019.

- [53] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, and R. Marino. An extended direct scheme for robust adaptive nonlinear control. *Automatica*, 27(2) :247–255, 1991.
- [54] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, R. Marino, and P. Tomei. Adaptive control of nonlinear systems with partial state feedback. 1991.
- [55] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, and A. S. Morse. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(11) :1241–1253, 1991.
- [56] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, and A. S. Morse. A toolkit for nonlinear feedback design. *Systems and Control Letters*, 18(2) :83–92, 1992.
- [57] S. Kang, P. X. Liu, and H. Wang. Command filter-based adaptive fuzzy decentralized control for large-scale nonlinear systems. *Nonlinear Dynamics*, 105(4) :3239–3253, 2021.
- [58] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.
- [59] I. S. Khalil, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and optimal control*. Prentice hall, 1996.
- [60] W. Kim, D. Won, D. Shin, and C. C. Chung. Output feedback nonlinear control for electro-hydraulic systems. *Mechatronics*, 22(6) :766–777, 2012.
- [61] J. Koivumäki, J. P. Humaloja, L. Paunonen, W. H. Zhu, and J. Mattila. Subsystem-based control with modularity for strict-feedback form nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022.
- [62] P. V. Kokotovic. The joy of feedback : nonlinear and adaptive. *IEEE Control Systems Magazine*, 12(3) :7–17, 1992.
- [63] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. V. Kokotovic. Nonlinear design of adaptive controllers for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(4) :738–752, 1994.
- [64] M. Krstic, P. V. Kokotovic, and I. Kanellakopoulos. *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley & Sons, Inc, 1995.
- [65] K. Kvaternik. *Global tracking via output feedback for nonlinear MIMO systems*. PhD thesis, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada, 2009.
- [66] H. Lee. Robust adaptive fuzzy control by backstepping for a class of mimo nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 19(2) :265–275, 2010.
- [67] A. Levant. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76(9–10) :924–941, 2003.
- [68] D. Li and J. Dong. Fuzzy weight-based reinforcement learning for event-triggered optimal backstepping control of fractional-order nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2023.
- [69] H. Li, L. Dou, and Z. Su. Adaptive dynamic surface based nonsingular fast terminal sliding mode control for semistrict feedback system. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 134(2), 2012.

- [70] Q. N. Li, R. N. Yang, and Z. C. Liu. Adaptive tracking control for a class of nonlinear non-strict-feedback systems. *Nonlinear Dynamics*, 88 :1537–1550, 2017.
- [71] T. S. Li, D. Wang, G. Feng, and S. C. Tong. A dsc approach to robust adaptive nn tracking control for strict-feedback nonlinear systems. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, 40(3) :915–927, 2009.
- [72] Y. Li, S. Tong, L. Liu, and G. Feng. Adaptive output-feedback control design with prescribed performance for switched nonlinear systems. *Automatica*, 80 :225–231, 2017.
- [73] Y. Li, K. Li, and S. Tong. Finite-time adaptive fuzzy output feedback dynamic surface control for mimo nonstrict feedback systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 27(1) :96–110, 2018.
- [74] Y. Li, X. Shao, and S. Tong. Adaptive fuzzy prescribed performance control of non-triangular structure nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 28(10) : 2416–2426, 2019.
- [75] Y. X. Li and G. H. Yang. Adaptive neural control of pure-feedback nonlinear systems with event-triggered communications. *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 29(12) :6242–6251, 2018.
- [76] J. Liu, Q. G. Wang, and J. Yu. Convex optimization-based adaptive fuzzy control for uncertain nonlinear systems with input saturation using command filtered backstepping. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2022.
- [77] M. Liu, L. Ma, and W. Zhang. Control of state constrained nonlinear systems with unknown dead-zone nonlinearity : A unified fuzzy dynamic surface control approach. *Information Sciences*, 641 :119090, 2023.
- [78] W. Liu, X. Cheng, and J. Zhang. Command filter-based adaptive fuzzy integral backstepping control for quadrotor uav with input saturation. *Journal of the Franklin Institute*, 360(1) :484–507, 2023.
- [79] Y. H. Liu. Adaptive dynamic surface asymptotic tracking for a class of uncertain nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 28(4) :1233–1245, 2018.
- [80] Y. J. Liu, C. P. Chen, G. X. Wen, and S. Tong. Adaptive neural output feedback tracking control for a class of uncertain discrete-time nonlinear systems. *IEEE transactions on neural networks*, 22(7) :1162–1167, 2011.
- [81] R. Marino, W. M. Boothby, and D. L. Elliott. Geometric properties of linearizable control systems. *Mathematical systems theory*, 18(1) :97–123, 1985.
- [82] R. Marino, P. Tomei, and C. M. Verrelli. *Induction motor control design*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [83] G. Mattei. *Robust nonlinear control : from continuous time to sampled-data with aerospace applications*. PhD thesis, Doctoral dissertation, Paris 11, French, 2015.

- [84] G. Mattei and S. Monaco. Nonlinear autopilot design for an asymmetric missile using robust backstepping control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 37(5) :1462–1476, 2014.
- [85] S. Mehraeen, S. Jagannathan, and M. L. Crow. Power system stabilization using adaptive neural network-based dynamic surface control. *IEEE Transactions on Power Systems*, 26(2) :669–680, 2010.
- [86] H. Min, S. Shi, and H. Feng. Adaptive stabilization of constrained stochastic nonlinear systems with input saturation : A combined blf and nn approach. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, page 01423312231200040, 2023.
- [87] J. Na, Y. Huang, X. Wu, G. Gao, G. Herrmann, and J. Z. Jiang. Active adaptive estimation and control for vehicle suspensions with prescribed performance. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 26(6) :2063–2077, 2017.
- [88] S. Nadji and S. Benaïcha. Robust integral backstepping control of pmsm for electric vehicle application. In *5th International Conference on Electrical Engineering-Boumerdes*, pages 1–6. IEEE, 2017.
- [89] Y. Nai, Q. Yang, and Z. Zhang. Adaptive neural output feedback compensation control for intermittent actuator faults using command-filtered backstepping. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 31(9) :3497–3511, 2019.
- [90] B. Niu, Y. Liu, G. Zong, Z. Han, and J. Fu. Command filter-based adaptive neural tracking controller design for uncertain switched nonlinear output-constrained systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 47(10) :3160–3171, 2017.
- [91] H. Ouadi, F. Giri, G. Besançon, L. Dugard, and B. Salhi. Hybrid continuous-discrete state observer for induction machine in presence of magnetic saturation. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1) :6166–6171, 2011.
- [92] Y. Pan and H. Yu. Dynamic surface control via singular perturbation analysis. *Automatica*, 57 :29–33, 2015.
- [93] S. K. Pandey, S. L. Patil, D. Ginoya, U. M. Chaskar, and S. B. Phadke. Robust control of mismatched buck dc-dc converters by pwm-based sliding mode control schemes. *Control Engineering Practice*, 84 :183–193, 2019.
- [94] P. Parks. Lyapunov redesign of model reference adaptive control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11(3) :362–367, 1966.
- [95] M. B. Patil, D. Ginoya, S. B. Phadke, and P. D. Shendge. Multiple sliding surface control for systems with mismatched uncertainties. In *2013 IEEE International Conference on Signal Processing, Computing and Control (ISPCC)*, pages 1–6. IEEE, September 2013.
- [96] P. Pillay and R. Krishnan. Modeling, simulation, and analysis of permanent-magnet motor drives. part 1 : The permanent-magnet synchronous motor drive. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 25(2) :265–273, 1989.

- [97] Z. Qu. Robust control of nonlinear uncertain systems under generalized matching conditions. *Automatica*, 29(4) :985–998, 1993.
- [98] Z. Qu and J. Dorsey. Robust control of generalized dynamic systems without the matching conditions. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 113(4) :582–589, 1991.
- [99] Zhihua Qu. *Robust Control of Nonlinear Uncertain Systems*. John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [100] M. F. Rahman, D. Patterson, A. Cheok, and R. Betts. *Motor Drives. Power Electronics Handbook*. Academic Press., 2001.
- [101] A. S. Sagar, P. D. Shendge, and S. M. Vaitheeswaran. Attitude control of fixed wing uav using multiple sliding surface. In *2016 IEEE 1st International Conference on Power Electronics, Intelligent Control and Energy Systems (ICPEICES)*, pages 1–6. IEEE, July 2016.
- [102] B. Salhi and A. Benfdila. Recursive gain controller for strict feedback systems. *International Journal of Control*, 96(3) :711–718, 2023.
- [103] B. Salhi, A. Tarek-Ahmed, H. El-Fadil, E. Magarotto, and F. Giri. Adaptive output feedback control of interleaved parallel boost converters. *IFAC Proceedings Volumes*, 46(11) :311–317, 2013.
- [104] B. Salhi, H. El-Fadil, A. Tarek-Ahmed, E. Magarotto, and F. Giri. Adaptive output feedback control of interleaved parallel boost converters associated with fuel cell. *Electric Power Components and Systems*, 43(8–10) :1141–1158, 2015.
- [105] S. Sastry. *Nonlinear Systems Analysis, Stability, and Control*. Springer-Verlag, 1999.
- [106] S. Sastry and M. Bodson. *Adaptive Control : Stability, Convergence, and Robustness*. Dover Publications, 2011.
- [107] P. Seiler and A. Alleyne. Dissipative adaptive control for strict feedback form systems. *European Journal of Control*, 8(5) :435–444, 2002.
- [108] R. Sepulchre, M. Jankovic, and P. V. Kokotovic. *Constructive nonlinear control*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [109] V. Sharma, P. Chaudhari, P. D. Shendge, and S. B. Phadke. Multiple sliding surface controller based on disturbance observer for anti-lock braking system. In *2016 IEEE 1st International Conference on Power Electronics, Intelligent Control and Energy Systems (ICPEICES)*, pages 1–6. IEEE, July 2016.
- [110] Q. Shen and P. Shi. Distributed command filtered backstepping consensus tracking control of nonlinear multiple-agent systems in strict-feedback form. *Automatica*, 53 : 120–124, 2015.
- [111] N. Sheng, Z. Ai, and J. Tang. Fuzzy adaptive command filtered backstepping fault-tolerant control for a class of nonlinear systems with actuator fault. *Journal of the Franklin Institute*, 358(13) :6526–6544, 2021.

- [112] K. Shojaei and A. M. Shahri. Output feedback tracking control of uncertain non-holonomic wheeled mobile robots : a dynamic surface control approach. *IET Control Theory and Applications*, 6(2) :216–228, 2012.
- [113] Y. Shu. Neural dynamic surface control for stochastic nonlinear systems with unknown control directions and unmodelled dynamics. *IET Control Theory & Applications*, 17(6) : 649–661, 2023.
- [114] J. J. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice hall, 1991.
- [115] B. Song and J. K. Hedrick. *Dynamic surface control of uncertain nonlinear systems : an LMI approach*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [116] M. Song and Y. Lin. A robust adaptive dynamic surface control for linear systems. *International Journal of Control*, 85(7) :950–963, 2012.
- [117] L. Sonneveldt, Q. P. Chu, and J. A. Mulder. Constrained adaptive backstepping flight control : Application to a nonlinear f-16/matv model. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, page 6413, August 2006.
- [118] A. Stotsky, J. K. Hedrick, and P. P. Yip. The use of sliding modes to simplify the backstepping control method. In *Proceedings of the 1997 American Control Conference*, volume 3, pages 1703–1708. IEEE, June 1997.
- [119] M. Sudakar, S. Sridhar, and M. Kumar. Multiple sliding surface controller for a quadrotor for improved robustness against wind disturbances. In *Dynamic Systems and Control Conference*, volume 84270, page V001T04A005. American Society of Mechanical Engineers, October 2020.
- [120] G. Sun, D. Li, and X. Ren. Modified neural dynamic surface approach to output feedback of mimo nonlinear systems. *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 26(2) :224–236, 2014.
- [121] D. Swaroop, J. K. Hedrick, P. P. Yip, and J. C. Gerdes. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(10) :1893–1899, 2000.
- [122] D. V. A. H. G. Swaroop, J. C. Gerdes, P. P. Yip, and J. K. Hedrick. Dynamic surface control of nonlinear systems. In *Proceedings of the 1997 American Control Conference*, volume 5, pages 3028–3034. IEEE, June 1997.
- [123] H. L. N. N. Thanh and S. K. Hong. An extended multi-surface sliding control for matched/mismatched uncertain nonlinear systems through a lumped disturbance estimator. in *IEEE Access*, 8 :91468–91475, 2020.
- [124] H. L. N. N. Thanh, M. T. Vu, N. X. Mung, N. P. Nguyen, and N. T. Phuong. Perturbation observer-based robust control using a multiple sliding surfaces for nonlinear systems with influences of matched and unmatched uncertainties. *Mathematics*, 8(8) :1371, 2020.

- [125] S. Tong, Y. Li, and P. Shi. Observer-based adaptive fuzzy backstepping output feedback control of uncertain mimo pure-feedback nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy systems*, 20(4) :771–785, 2012.
- [126] S. C. Tong, X. L. He, and H. G. Zhang. A combined backstepping and small-gain approach to robust adaptive fuzzy output feedback control. *IEEE Transactions on Fuzzy systems*, 17(5) :1059–1069, 2009.
- [127] D. Traore, J. De Leon, and A. Glumineau. Adaptive interconnected observer-based backstepping control design for sensorless induction motor. *Automatica*, 48(4) :682–687, 2012.
- [128] S. Vaidyanathan and A. T. Azar (Eds). *Backstepping control of nonlinear dynamical systems*. Academic Press, 2020.
- [129] R. Verma, D. Ginoya, P. D. Shendge, and S. B. Phadke. Slip regulation for anti-lock braking systems using multiple surface sliding controller combined with inertial delay control. *Vehicle System Dynamics*, 53(8) :1150–1171, 2015.
- [130] M. Vidyasagar. *Nonlinear systems analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [131] C. L. Wang and Y. Lin. Decentralised adaptive dynamic surface control for a class of interconnected non-linear systems. *IET Control Theory and Applications*, 6(9) :1172–1181, 2012.
- [132] D. Wang and J. Huang. Neural network-based adaptive dynamic surface control for a class of uncertain nonlinear systems in strict-feedback form. *IEEE transactions on neural networks*, 16(1) :195–202, 2005.
- [133] H. Wang, B. Chen, K. Liu, X. Liu, and C. Lin. Adaptive neural tracking control for a class of nonstrict-feedback stochastic nonlinear systems with unknown backlash-like hysteresis. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 25(5) :947–958, 2013.
- [134] H. Wang, S. Kang, and Z. Feng. Finite-time adaptive fuzzy command filtered backstepping control for a class of nonlinear systems. *International Journal of Fuzzy Systems*, 21 :2575–2587, 2019.
- [135] N. Wang, P. Fan, M. Li, F. Tao, and Z. Fu. Fixed time adaptive fuzzy dynamic surface control for pure feedback stochastic nonlinear systems. *International Journal of Fuzzy Systems*, pages 1–12, 2023.
- [136] Q. Wang, C. Gao, Y. Cui, and L. B. Wu. Observer-based adaptive fuzzy command filtered backstepping control for stochastic nonlinear systems with event-triggered mechanism. *International Journal of Fuzzy Systems*, pages 1–12, 2023.
- [137] S. Wang, J. Na, and X. Ren. Rise-based asymptotic prescribed performance tracking control of nonlinear servo mechanisms. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 48(12) :2359–2370, 2017.
- [138] S. Wang, H. Yu, J. Yu, J. Na, and X. Ren. Neural-network-based adaptive funnel control for servo mechanisms with unknown dead-zone. *IEEE transactions on cybernetics*, 50(4) :1383–1394, 2018.

- [139] Y. Wang, L. Cao, S. Zhang, X. Hu, and F. Yu. Command filtered adaptive fuzzy backstepping control method of uncertain nonlinear systems. *IET Control Theory & Applications*, 10(10) :1134–1141, 2016.
- [140] Y. Wang, F. Tao, Z. Fu, N. Wang, and Q. Chen. Adaptive fuzzy fixed-time dynamic surface control for stochastic nonstrict nonlinear systems with unknown dead-zones. *Journal of the Franklin Institute*, 360(6) :4091–4113, 2023.
- [141] C. Wei, Q. Chen, J. Liu, Z. Yin, and J. Luo. An overview of prescribed performance control and its application to spacecraft attitude system. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I : Journal of Systems and Control Engineering*, 235(4) : 435–447, 2021.
- [142] M. Won and J. K. Hedrick. Multiple-surface sliding control of a class of uncertain nonlinear systems. *International Journal of Control*, 64(4) :693–706, 1996.
- [143] F. Wu, J. Lian, D. Wang, and G. Zhai. Prescribed performance bumpless transfer control for switched large-scale nonlinear systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 2023.
- [144] Q. Wu and Y. Chen. Adaptive cooperative control of a soft elbow rehabilitation exoskeleton based on improved joint torque estimation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 184 :109748, 2023.
- [145] P. C. P. Yip. *Robust and adaptive nonlinear control using dynamic surface controller with applications to intelligent vehicle highway systems*. PhD thesis, University of California, Berkeley, 1997.
- [146] P. P. Yip and J. K. Hedrick. Adaptive dynamic surface control : a simplified algorithm for adaptive backstepping control of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 71(5) :959–979, 1998.
- [147] P. P. Yip, J. K. Hedrick, and D. Swaroop. The use of linear filtering to simplify integrator backstepping control of nonlinear systems. In *Proceedings. 1996 IEEE International Workshop on Variable Structure Systems.-VSS'96-*, pages 211–215. IEEE, December 1996.
- [148] S. J. Yoo, J. B. Park, and Y. H. Choi. Adaptive dynamic surface control for stabilization of parametric strict-feedback nonlinear systems with unknown time delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(12) :2360–2365, 2007.
- [149] D. Yu, S. Ma, Y. J. Liu, Z. Wang, and C. P. Chen. Finite-time adaptive fuzzy backstepping control for quadrotor uav with stochastic disturbance. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2023.
- [150] J. Yu, P. Shi, W. Dong, B. Chen, and C. Lin. Neural network-based adaptive dynamic surface control for permanent magnet synchronous motors. *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 26(3) :640–645, 2014.
- [151] J. Yu, P. Shi, and L. Zhao. Finite-time command filtered backstepping control for a class of nonlinear systems. *Automatica*, 92 :173–180, 2018.

- [152] J. Zhai, H. Wang, J. Tao, and Z. He. Observer-based adaptive fuzzy finite time control for non-strict feedback nonlinear systems with unmodeled dynamics and input delay. *Nonlinear Dynamics*, 111(2) :1417–1440, 2023.
- [153] G. Zhang, J. Hu, and Y. Shen. New results on synchronization control of delayed memristive neural networks. *Nonlinear Dynamics*, 81 :1167–1178, 2015.
- [154] J. Zhang, S. Li, C. K. Ahn, and Z. Xiang. Decentralized event-triggered adaptive fuzzy control for nonlinear switched large-scale systems with input delay via command-filtered backstepping. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 30(6) :2118–2123, 2021.
- [155] T. Zhang and S. S. Ge. Adaptive neural network tracking control of mimo nonlinear systems with unknown dead zones and control directions. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 20(3) :483–497, 2009.
- [156] Y. Zhang, J. Gao, Y. Chen, C. Bian, F. Zhang, and Q. Liang. Adaptive neural network control for visual docking of an autonomous underwater vehicle using command filtered backstepping. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 32(8) :4716–4738, 2022.
- [157] Z. Zhang, G. Duan, and M. Hou. An improved adaptive dynamic surface control approach for uncertain nonlinear systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 32(5) :713–728, 2018.
- [158] L. Zhao, J. Yu, C. Lin, and Y. Ma. Adaptive neural consensus tracking for nonlinear multiagent systems using finite-time command filtered backstepping. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics : Systems*, 48(11) :2003–2012, 2017.
- [159] L. Zhao, J. Yu, and Q. G. Wang. Finite-time tracking control for nonlinear systems via adaptive neural output feedback and command filtered backstepping. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 32(4) :1474–1485, 2020.
- [160] X. Zheng and X. Yang. Command filter and universal approximator based backstepping control design for strict-feedback nonlinear systems with uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(3) :1310–1317, 2019.
- [161] J. Zhou and C. Wen. *Adaptive backstepping control of uncertain systems : Nonsmooth nonlinearities, interactions or time-variations*. Springer, 2008.
- [162] Q. Zhou, P. Shi, J. Lu, and S. Xu. Adaptive output-feedback fuzzy tracking control for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 19(5) :972–982, 2011.
- [163] Z. Zhou, J. Yu, H. Yu, and C. Lin. Neural network-based discrete-time command filtered adaptive position tracking control for induction motors via backstepping. *Neurocomputing*, 260 :203–210, 2017.
- [164] G. Zhu, J. Du, and Y. Kao. Command filtered robust adaptive nn control for a class of uncertain strict-feedback nonlinear systems under input saturation. *Journal of the Franklin institute*, 355(15) :7548–7569, 2018.

Cette page est intentionnellement laissée blanche

## ANNEXE A

NORME VECTORIELLE ET ESPACE  $L_p$ 

A la différence des approches de contrôle linéaire où la preuve de convergence en boucle fermée implique directement que les différents signaux dans la boucle sont bornés, dans certaines approches de contrôle non linéaire cette implication n'est pas directe. Ce dernier cas correspond en particulier à l'approche *Contrôleur Backstepping* mais aussi à la nouvelle approche développée dans cette thèse. De ce fait et afin de compléter l'analyse des signaux, on fait appel aux normes  $L_p$  [49].

La notion de norme vectorielle, cas d'un vecteur, est une extension de la notion de valeur absolue dans le cas d'un scalaire. Dans le cas des fonctions dépendantes du temps on définit la norme  $L_p$ . La norme vectorielle est définie comme suit :

**Définition A.1** (Norme vectorielle). La norme  $|x|$  d'un vecteur  $x$  est une fonction réelle possédant les propriétés suivantes :

- (i)  $|x| \geq 0$  telle que  $|x| = 0$  si et seulement si  $x = 0$ .
- (ii)  $|\alpha x| = |\alpha| |x|$  pour tout scalaire  $\alpha$ .
- (iii)  $|x + y| \leq |x| + |y|$ , inégalité triangulaire.

Les normes les plus utilisées dans l'ensemble  $R^n$  sont les suivantes :

- (i)  $|x|_\infty = \max_i |x_i|$  : Norme infinie.
- (ii)  $|x|_1 = \sum_i |x_i|$ .

(iii)  $\|x\|_2 = (\sum_i |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$  : Norme Ecludienne.

et pour les fonctions dépendantes du temps, on a les normes suivantes :

(i)  $\|x\|_p = (\int_0^\infty |x(\tau)|^p d\tau)^{\frac{1}{p}}$  pour  $p \in [1, \infty)$  : Norme  $L_p$ .

(ii)  $\|x\|_2 = (\int_0^\infty |x(\tau)|^2 d\tau)^{\frac{1}{2}}$  : Norme  $L_2$ .

(iii)  $\|x\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |x(t)|$  : Norme  $L_\infty$ .

Si la norme  $\|x\|_p$ ,  $\|x\|_2$  ou bien  $\|x\|_\infty$  existe, dans le sens qu'elle a une valeur finie, alors on dit respectivement que  $x \in L_p$ ,  $x \in L_2$  ou bien  $x \in L_\infty$ . Remarquer que le symbole  $\| \cdot \|$  représente la valeur absolue si  $x$  est un scalaire, ou bien l'une des normes vectorielles si  $x$  est un vecteur. L'ensemble des fonctions appartenant à  $L_p$  constituent un espace vectorielle linéaire. L'une des propriétés de ces espaces vectorielles, qui nous intéresse dans cette thèse, est donnée par le lemme suivant :

**Lemme A.1** (Inégalité de Minkowski). *Pour tout  $p \in [1, \infty]$  et toutes fonctions  $f, g \in L_p$ , alors la fonction  $f + g \in L_p$  et que*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$