

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

UNIVERSITE MOULOU MAMMARI DE TIZI-OUZOU  
Faculté du Génie de la Construction  
Département de Génie Civil

## MEMOIRE DE MASTER ACADEMIQUE

EN GENIE CIVIL

Option: Structures



Présenté par : Khider Ouerdia

**REPONSE DYNAMIQUE D'UNE PASSERELLE SUSPENDUE PAR  
CABLES PRECONTRAINTS : DEVELOPPEMENTS ET ANALYSES**



**Devant les membres du jury composé:**

Kaci Salah  
Sadaoui Arezki  
Illouli Said

Professeur  
Professeur  
Maitre de Conférence A

U.M.M.Tizi-Ouzou  
U.M.M.Tizi-Ouzou  
U.M.M.Tizi-Ouzou

Président  
Rapporteur  
Examineur

Soutenu, le 10/07/2019

## REMERCIEMENTS

*A l'issue de cette présente étude, j'adresse mes remerciements à Dieu de m'avoir donné la chance et le courage d'aboutir au terme de ce travail.*

*Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à M. Sadaoui Arezki, professeur à l'UMMTO pour la confiance qu'il m'a accordé en acceptant de rapporter ce travail .Son soutien constant, sa disponibilité et ces précieux conseils, m'ont permis de mener à bien ce travail, qu'il trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.*

*Je tiens à remercier aussi les membres de jury, M.Kaci Salah et M.Illouli Said pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de juger ce travail.*

*Mes remerciements s'adressent aussi à M. Lattari Kamel pour sa disponibilité ses conseils et son orientation qui m'ont permis de mener à bien ce travail.*

*Enfin, Je tiens à remercier ma famille et mes amis(es) pour leurs soutiens et leurs encouragements.*

Dédicaces

*Je dédie ce mémoire*

*A mes chers parents qui m'ont apporté leurs soutiens et leurs encouragements.*

*Puisse dieu tout puissant vous garder et vous procurer Santé et bonheur.*

*A mes très chères sœurs*

*A mes très chers frères*

*A mes très chers nièces et neveux*

*A mes très chères belles sœurs*

*A mes très chers amis(es)*

*A toute ma promotion M2 Structures 2018/2019 en particulier Mr Hacherouf mohamed cherif*

*A tous ceux qui m'ont aidé de loin ou de près à réaliser ce travail*

*Merci pour tous.*

# SOMMAIRE

## Chapitre 1 : Introduction

1-1 Etat de la question .....	1
1-2 Etat de problématique .....	3
1-3 Nature des câbles employés dans les ouvrages suspendus .....	5
1-4 Cadre de ce travail .....	6
1-5 Cheminement du travail suivi .....	7

## Chapitre 2 : Revue des phénomènes physiques et aérodynamiques responsables des vibrations des câbles dans les ouvrages suspendus

2-1 Généralités .....	9
2-2 Principe de fonctionnement d'un pont suspendu et qualités des câbles de précontrainte .....	10
2-2-1 Principe de fonctionnement de l'ouvrage .....	10
2-2-2 Qualités de câbles de précontrainte .....	11
2-2-3 Choix des matériaux .....	17
2-3 Vibrations des câbles .....	20
2-3-1 Causes des vibrations .....	20
2-3-2 Paramètres aérodynamiques d'un câble .....	20
2-3-3 Phénomènes physiques engendrant des vibrations .....	24

## Chapitre 3: Analyse dynamique en régime vibratoire libre : développements théoriques

3-1 Généralités .....	30
3-2 Rappel de la méthode de calcul des poussées sous charges statiques .....	30
3-2-1 Formes initiales d'équilibres .....	31
3-2-2 Formes d'équilibre sous charge (s) .....	32
3-2-3 Equation de la déformée .....	33
3-2-4 Equation des déplacements orthogonaux .....	34

3-2-5 Application au cas d'un système vertical précontraint .....	36
3-3 Méthode de calcul en régime vibratoire libre .....	42
3-3-1 Formulation de l'équation élémentaire de mouvement .....	42
3-3-2 Equations générales des poussées des câbles sous forme linéarisée .....	46
3-3-3 Equation générale transcendante .....	48

#### Chapitre 4 : Expérimentation numérique et validations des résultats

4-1 Généralités .....	53
4-2 Description de la structure .....	54
4-3 Résultats et analyses .....	55

#### **Chapitre 5 : Conclusions générales**

6-1 Rétrospective .....	61
6-2 Organisation du travail .....	63
6-3 Résultats obtenus .....	65
6-4 Recommandations futures .....	65
Références .....	66

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

### 1- 1 Etat de la question

L'utilisation des systèmes suspendus par câbles dans la construction constitue actuellement tant sur le plan architectural que technique une évolution conceptuelle importante dans l'art de construire. Leurs avantages, permettant à la fois d'augmenter la portée et de réduire le poids propre, répondent d'une manière radicale au problème longtemps posé dans la réalisation des grandes portées qui sont requises aussi bien par les constructions civiles et industrielles (toitures suspendues ; fig.1-1) que par les ouvrages de ponts suspendus usuels qui sont indispensables pour franchir des vallées (fig.1-2), des rivières (fig.1-3) ou des bras de mer (fig.1-4) d'une ampleur considérable [1,2,3,4]. Ces deux critères combinés à la possibilité d'une exploitation optimale des matériaux utilisés conduisent naturellement à considérer l'économie éventuellement réalisée et à une valeur élevée du rapport résistance/poids.



Figure 1-1: Structure de la toiture suspendue de la station du métro Erasme à Bruxelles



Figure 1-2: Pont Sidi M'Cid de Constantine surplombant les gorges à 175 m de Rhumel ;  
Année : 1910-1912 ;  
Longueur : 164 m ;  
Largeur : 5.75 m



Figure1- 3: Pont routier Pierre-Laporte, Québec city ;  
Longueur totale : 1041 m ;  
Portée principale: 668 m ;  
Hauteur totale: 116 m ;  
Année : 1966-1970



Figure 1-4: Pont du Golden Gate, San-Francisco ; Californie ; Longueur totale : 2737 m ; Portée principale: 1280 m ; Hauteur: 230 m ;

## 1-2 Etat de la problématique

Les systèmes formés de câbles sont réputés très légers et emploient comme principal élément le câble dont l'équilibre des charges est réalisé uniquement par des efforts de traction pure, développés parallèlement à la fibre moyenne du câble. Cela signifie qu'aucune rigidité flexionnelle ou de compression n'est attribuée au système par opposition aux structures classiques en portique ou en treillis. De cette caractéristique découle la nécessité pratique de mise en tension préalable à toute utilisation, et dont l'effet joue un rôle extrêmement important dans la stabilité des structures correspondantes dont le poids propre demeure particulièrement faible. Cette pré-tension, également appelée précontrainte, représente la charge qu'il est nécessaire d'intégrer initialement à une résille pour qu'en aucun cas de surcharge, l'un quelconque des éléments de cette résille ne risque d'être virtuellement comprimé i.e tendu.

On ne peut cependant faire abstraction de la vulnérabilité de ce type de structures aux problèmes de stabilité liés principalement à certains phénomènes vibratoires comme le flottement et la résonance qui, à défaut n'ayant pas reçu à priori une grande attention, risquent d'affecter à terme sérieusement la durabilité entière de la structure. En effet, à cause des effets dynamiques dus aux charges mécaniques ou environnementales, la structure peut être animée de mouvements de grandes amplitudes par exemple sous l'impulsion de la circulation, de la

pression du vent ou de la chute de manchons de givre lors de la saison hivernale. Ces mouvements exercent sur les supports des câbles des efforts beaucoup plus élevés que les efforts statiques qu'il faut donc en tenir compte dans la conception de l'ouvrage. L'étude du comportement dynamique de la structure devient par conséquent importante à laquelle, en outre, il faut considérer la non linéarité géométrique qui joue un rôle significatif dans un système léger et aussi déformable qu'est le système à câble [1,2,3].

Le système auquel nous allons nous intéresser dans ce travail consiste en un système plan vertical à câbles précontraints, de courbures inversées, équivalent à un pont suspendu dont les poutres de rigidité sont représentées par des câbles auxiliaires précontraints appelés câbles de rigidité. Comme représenté sur la figure 1-5, ce système se compose principalement d'une nappe de suspentes verticales réunissant deux câbles (porteur et tendeur) fixés en leurs extrémités à des massifs d'ancrage. Deux systèmes de ce type peuvent supporter un tablier léger que nous pouvons supposer dépourvu de rigidité propre appréciable pouvant dans le cas pratique être l'exemple d'une passerelle piétonnière très flexible dont l'implantation sera très intéressante dans des sites d'attraction (fig.1-6).

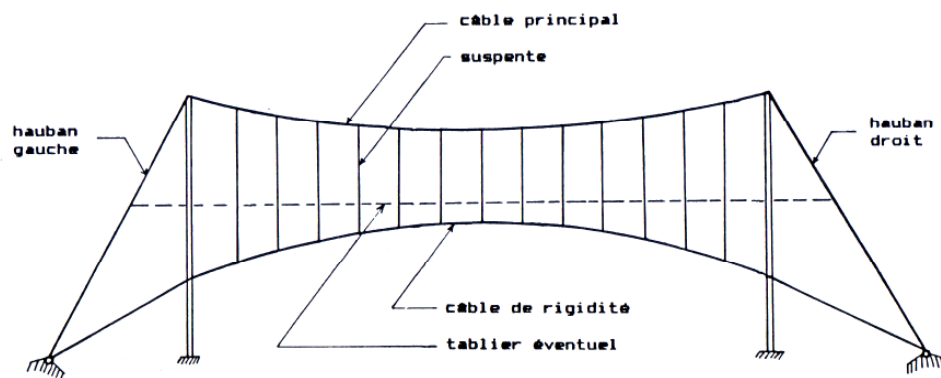


Figure 1-5: Passerelle piétonnière suspendue rigidifiée par des câbles précontraints



Figure 1-6: Passerelle piétonnière suspendue rigidifiée par des câbles précontraints

### **1-3 Nature des câbles employés dans les ouvrages suspendus**

Les câbles les plus employés dans les ouvrages suspendus sont constitués de faisceaux de torons de précontrainte qui sont formés comme représentés sur la figure 1-7 par des fils d'acier enroulés hélicoïdalement autour d'un fil central appelé âme, en plusieurs couches de pas inversés. Le faisceau est généralement contenu dans une gaine métallique ou en polyéthylène injectée au coulis de ciment. Les câbles ainsi obtenus ont une très haute limite d'élasticité atteignant plusieurs fois celle de l'acier traditionnel de charpente métallique. Chaque toron peut contenir des centaines de fils et atteindre des limites de rupture de plusieurs centaines de tonnes. Le module d'élasticité intrinsèque du câble est plus petit que celui du matériau en acier à cause de l'enroulement des fils en hélice ou une valeur de 170000MPa n'est pas rare. On parle ainsi de câbles à torons parallèles lorsque les faisceaux sont constitués d'un ensemble de torons alignés. Quand ils sont constitués d'un ensemble de torons enroulés autour d'une âme centrale métallique ou textile, on parle alors de cordages. Les cordages possèdent un module d'élasticité intrinsèque encore plus faible, qui peut être inférieur à 140000 MPa.

Comme sera décrite plus en détail ultérieurement, la protection individuelle des torons parallèles a été toutefois progressivement complétée et améliorée durant les deux dernières décennies en raison principalement de la nécessité de réduire le coefficient de traîné engendré par l'action du vent. A l'heure actuelle, il est possible de dire que les câbles constitués d'un faisceau de torons parallèles individuellement protégés, logé dans une gaine continue se sont techniquement imposés dans la vie pratique, une technologie qui combine à la fois des fonctions aérodynamiques, esthétiques et de protection contre les effets de l'environnement.

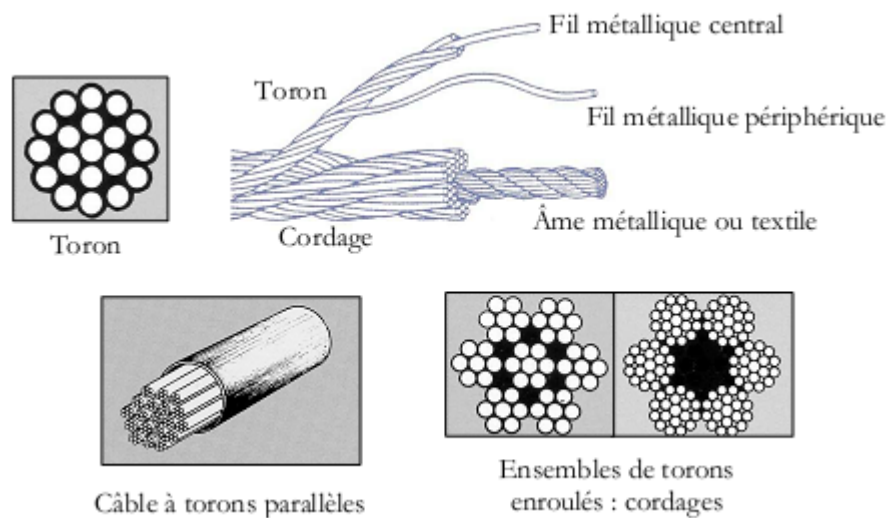


Figure 1-7: Faisceaux de torons parallèles et enroulés [5]

#### 1-4 Cadre de ce travail

Les réseaux à câbles dont sont composés les structures suspendues sont essentiellement des systèmes discrets, et peuvent être traités comme tels soit par éléments finis. Cependant, si le nombre des câbles dans le réseau devient élevé, il est possible d'approximer le réseau par un système continu conduisant à une méthode d'analyse de nature analytique. Par suite, la modélisation mathématique d'un réseau à câble peut s'effectuer par l'approche fondamentale qui assimile le comportement de la nappe des suspentes verticales à un voile continu et inextensible [4,6,7]. Les équations à caractère non linéaire résultantes décrivant les tractées ou les poussées dans les câbles s'établissent de façon à être résolues numériquement par itérations successives. Par ailleurs, il y a lieu de mentionner que le comportement caractéristique des systèmes suspendus est en général fondamentalement non linéaire; cela

signifie d'une autre manière que les équations d'équilibre fondamentales de mouvement doivent être formulées par référence à la configuration non déformée [8].

Le but principal de ce travail consiste de développer une méthode analytique d'analyse simple, mais suffisamment précise et fiable, permettant d'aborder le calcul d'un ouvrage suspendu léger sans poutre de rigidité, telle une passerelle suspendue rigidifiée par câbles précontraints soumise à l'action des charges dynamiques.

## **1-5 Cheminement du travail suivi**

Le travail présenté dans ce mémoire sera organisé en cinq chapitres dont le présent premier chapitre en guise d'introduction est consacré essentiellement à la nature de la problématique et de la question des structures suspendues ainsi à la description des objectifs fixés.

Le chapitre deux expose les phénomènes des vibrations des câbles dans le but de mettre en relief la vulnérabilité des vibrations résultantes qui peuvent par le phénomène de fatigue endommager à terme les câbles et par conséquent mettre en péril complètement la stabilité de l'ouvrage. Tout d'abord, nous analyserons les conséquences choix des matériaux constitutifs de base qui permettent d'obtenir la durabilité requise. Nous rappellerons ensuite les paramètres aérodynamiques des câbles où seront présentés succinctement les différents phénomènes physiques susceptibles de donner lieu à des vibrations.

Le chapitre suivant aura trait à l'exposé des fondements théoriques de base de la méthode de calcul d'un système vertical précontraint sans poutre de rigidité en utilisant l'approche fondamentale qui assimile le comportement de la nappe des suspentes à celui d'un voile continu et inextensible. Sous charges statiques d'origine mécaniques, les équations à caractère non linéaire décrivant les tractées ou les poussées dans les câbles seront rappelées et présentées de façon à être résolues par la méthode de Newton-Raphson à double itération. Sous l'action dynamique, la théorie linéaire en régime vibratoire libre sera adoptée afin de dériver l'équation d'équilibre de mouvement vertical d'un élément différentiel et les équations des poussées résultantes engendrées dans les câbles en négligeant les effets de second ordre liés aux grands déplacements. Cependant, seul le mouvement transversal vertical sera considéré à cause de la vitesse des ondes de vibration longitudinales qui est généralement

beaucoup moins importante que celle des ondes de vibration transversales. La résolution des équations qui en résultent conduit à une équation type transcendante donnant lieu à des modes propres antisymétriques et à des modes propres symétriques. Les fréquences propres de vibration et les déformées modales seront obtenues par analogie au cas d'un câble parabolique simple.

L'avant dernier chapitre sera consacré à l'implémentation numérique et à l'analyse des résultats portant sur l'analyse d'un ouvrage type de pont suspendu léger et sans poutre de rigidité en régime vibratoire libre. Nous montrerons comment évaluer les pulsations et les fréquences propres de vibration selon que le système est en mode de vibration antisymétrique ou symétrique.

Nous terminerons en guise de dernier chapitre par une conclusion générale suivie par quelques recommandations pour l'amélioration et la poursuite de ce travail.

## CHAPITRE 2

# REVUE DES PHENOMENES PHYSIQUES ET AERODYNAMIQUES RESPONSABLES DES VIBRATIONS DES CABLES DANS LES OUVRAGES SUSPENDUS

### **2-1 Généralités**

Il s'agit principalement dans ce chapitre d'analyser les différents phénomènes physiques et aérodynamiques responsables des vibrations des câbles précontraints des ouvrages suspendus. C'est dans le but de mettre en relief la vulnérabilité des oscillations dynamiques qui en résultent pouvant, si elles ne sont pas maîtrisées, endommager les câbles par fatigue et par conséquent mettre en danger complètement la stabilité de l'ouvrage en question. Soulignons, toutefois, qu'il y a peu ou pas d'organes accessoires dans un ouvrage suspendu contrairement à la plupart des autres structures usuelles. Chacun à un rôle à jouer, et un désordre ou une anomalie de fonctionnement, d'apparence mineure, peut à terme entraîner sinon la ruine, du moins des désordres graves dans la structure principale.

Cependant, nous allons d'abord faire une description sommaire d'un pont suspendu usuel dans la perspective d'ancrer dans l'esprit du lecteur la philosophie du principe de fonctionnement d'un ouvrage suspendu en général. Sera suivi ensuite d'un bref aperçu relatif au choix des matériaux de base qui permettent d'obtenir la qualité et la durabilité qu'exigent les câbles de précontrainte.

Mentionnons par ailleurs que ce chapitre s'inspire profondément du document de travail établi par SETRA, en novembre 2001, intitulé : Haubans, recommandations de la commission interministérielle de la précontrainte [9] et sur les articles de M. Virlogeux et al. [10,11] qui détaillent les phénomènes aérodynamiques responsables des vibrations des câbles ou des haubans et de leur résistance à la fatigue afin de formuler des mesures correctives.

## **2-2 Principe de fonctionnement d'un pont suspendu et qualités des câbles de précontrainte**

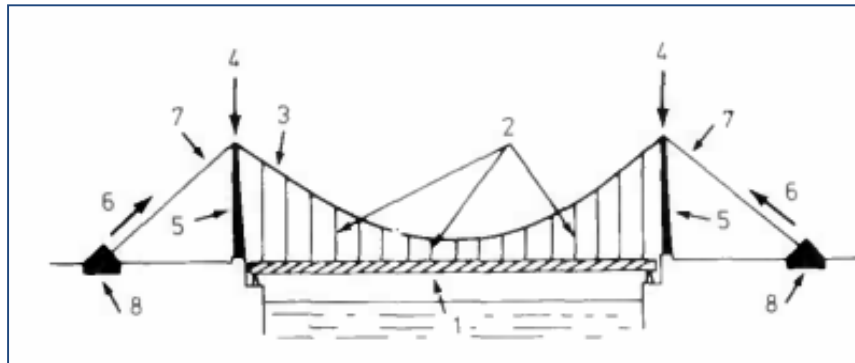
Soit la structure d'un pont suspendu classique schématisé sur la figure 2-1 qui se compose principalement d'un tablier, des suspentes, des câbles porteurs, des haubans et des pylônes.

### **2-2-1 Principe de fonctionnement de l'ouvrage**

Le principe de fonctionnement de l'ouvrage est tel que le tablier assure la continuité de la voie portée et la répartition de charges, les suspentes généralement verticales supportent le tablier et transmettent les efforts aux câbles porteurs disposés en sa partie supérieure. Les câbles porteurs qui sont souvent de la forme parabolique, assurent la fonction porteuse principale de l'ouvrage où les efforts se décomposent généralement en une réaction verticale absorbée par les pylônes, et à un effort de tension transmis par les câbles de retenue ou d'ancrage qui sont amarrés sur des massifs d'ancrage très rigides.

Dans le cas général, les câbles de retenue ou simplement appelés haubans, qui sont situés entre les ancrages et les pylônes, ne supportent pas de charge verticale. C'est selon ce schéma qu'ont été construits la plupart des ponts suspendus de moyenne portée ayant une seule travée comme le pont de Sidi M'Cid à Constantine (fig.1-2). Dans certains cas, les suspentes verticales sont complétées par des haubans inclinés afin de réduire les déformations du tablier et de limiter les effets de la torsion. Le passage des charges sur l'ouvrage, du fait de l'augmentation des efforts internes, entraîne un allongement élastique des câbles porteurs et de retenue.

Le plus fréquemment, les pylônes en maçonnerie ou en béton, sont encastrés à leur base et le câble prend appui par l'intermédiaire de selles (ou chariots) munis de galets [12] de roulement permettant ces déplacements en réduisant au maximum les efforts horizontaux. Dans un certain nombre d'autres cas, les pylônes, en acier ou en béton, sont articulés à leur base ; les câbles sont alors solidarités aux pylônes et les déplacements sont rendus possibles par l'inclinaison de ces derniers. Enfin, dans le cas des pylônes souples, la flexibilité est suffisante pour supporter sans dommage les déformations des câbles.



1 : Tablier ; 2 : Suspentes ; 3 : Câbles ; 4 : Réaction verticale ; 5 : Pylônes  
6 : Effort de tension ; 7 : Câbles de retenue ; 8 : Massifs d'ancrage

Figure 2-1 : Principe de fonctionnement d'un pont suspendu

### 2-2-2 Qualités de câbles de précontrainte

Selon la réglementation française sur la précontrainte [9], on distingue trois catégories en fonction des armatures élémentaires utilisées à savoir fils ou torons ainsi récapitulées dans le tableau ci-dessous [13,14,15,16]:

Abréviation	Désignation	Armatures en acier revêtu
MTP	Multi-torons parallèles	Torons de précontrainte T15.2 ou T15,7 gainés individuellement ou collectivement
MFP	Multi-fils parallèles	Fils ronds boutonnés gainés collectivement
TMC	Torons multi-couches	Fils ronds et/ou fils profilés

#### A- Catégorie MTP : câbles multi-torons parallèles

Les câbles multi-torons sont constitués de torons parallèles, ancrés individuellement (fig.2-2) dont les torons sont protégés par un dépôt métallique et une gaine injectée individuelle (fig.2-3) ou collective (fig.2-4). Les armatures des câbles MTP possèdent les caractéristiques suivantes :

- diamètre nominal : 15.2 mm (toron T15.2) ou 15.7 mm (toron T15.7) ;
- section résistante nominale : 140 mm<sup>2</sup> ou 150 mm<sup>2</sup> respectivement ;

- masse linéique nominale du toron nu : 1.086 kg/m ou 1.172 kg/m respectivement ;
- revêtement de protection d'un dépôt métallique de zinc ou d'un alliage zinc et aluminium normalisé compris entre 190 et 350 g/m<sup>2</sup> (épaisseur moyenne de 26 à 40 μm environ) ;
- classe de résistance  $f_{rg}$  1770 ou 1860 MPa ;
- allongement relatif sous charge maximale  $A_{gt}$  supérieur ou égal à 3.5% ;
- module d'élasticité du faisceau de torons parallèles de l'ordre de 190 GPa ;
- très basse relaxation (TBR) : inférieure ou égale à 2.5 % à 1000 h sous 0.7  $F_m$  (20°C) ;
- tenue en fatigue : 2 millions de cycles avec une contrainte maximale de 0.45  $f_{rg}$  et une variation de contrainte de 300 MPa ;
- Coefficient de traction déviée inférieur ou égale à 26%.

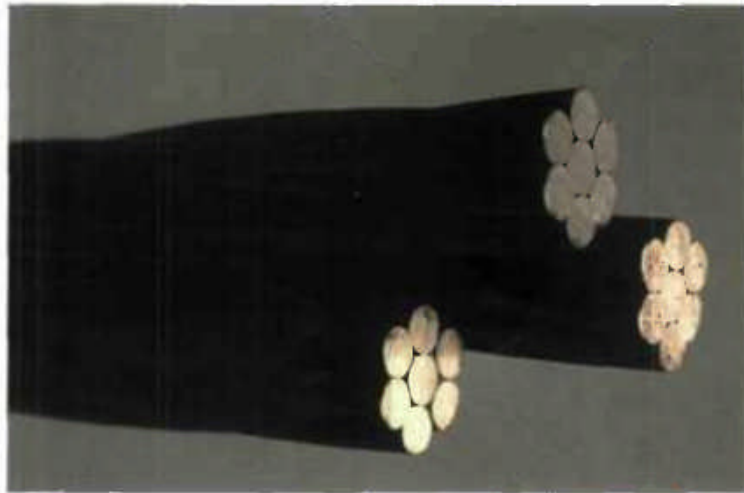


Figure 2-2 : Détail d'un toron

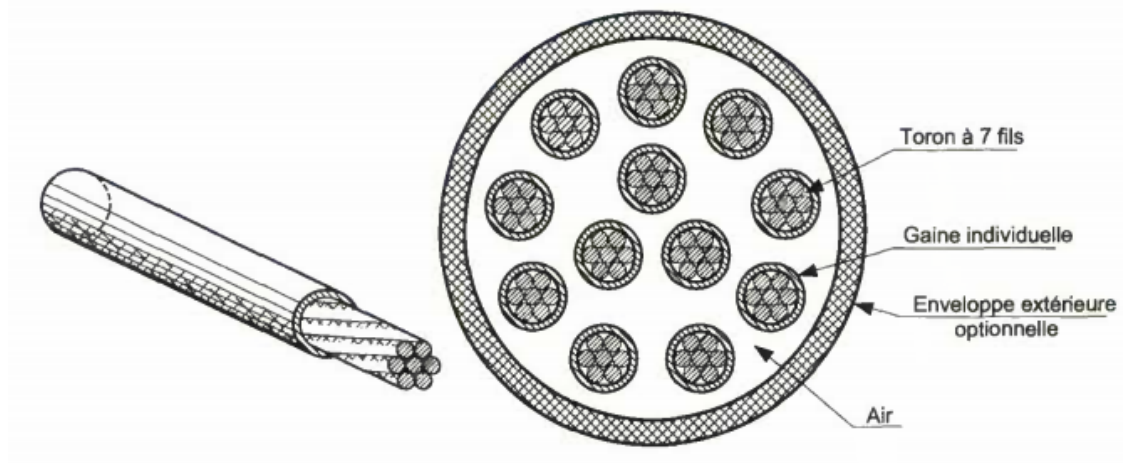


Figure 2-3 : Schéma de principe d'un câble MTP à gaine individuelle [13]

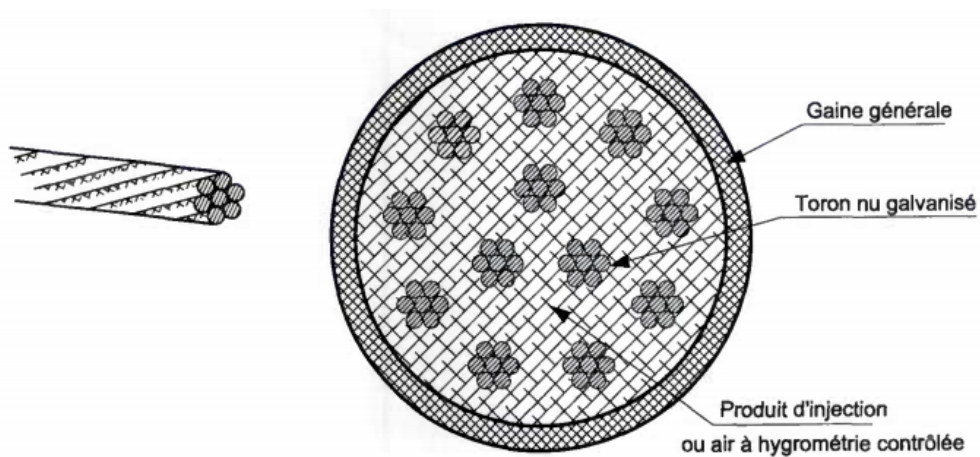


Figure 2-4 : Schéma de principe d'un câble MTP à gaine collective [13]

## B- Catégorie MFP : câbles multi-fils parallèles

Les armatures des câbles MFP sont des fils lisses revêtus (fig. 2-5) et ayant les caractéristiques suivantes :

- diamètre nominal : 7 mm ;
- section résistante nominale : 38.5 mm<sup>2</sup>;
- masse linéique nominale d'un fil de 7 mm : 0.301kg/ml;

- revêtement de protection d'un dépôt métallique de zinc ou d'un alliage zinc et aluminium normalisé compris entre 190 et 350 g/m<sup>2</sup> (épaisseur moyenne de 26 à 50 μm environ) ;
- classe de résistance  $f_{rg}$  1670 ou 1770 MPa ;
- allongement relatif sous charge maximale  $A_{gt}$  supérieur ou égal à 3.5% ;
- module d'élasticité du faisceau de fil de 7 mm de l'ordre de 200 GPa ;
- très basse relaxation (TBR) : inférieure ou égale à 2.5 % à 1000 h sous 0.7  $F_m$  (20°C) ;
- tenue en fatigue : 2 millions de cycles avec une contrainte maximale de 0.45  $f_{rg}$  et une variation de contrainte de 300 MPa.

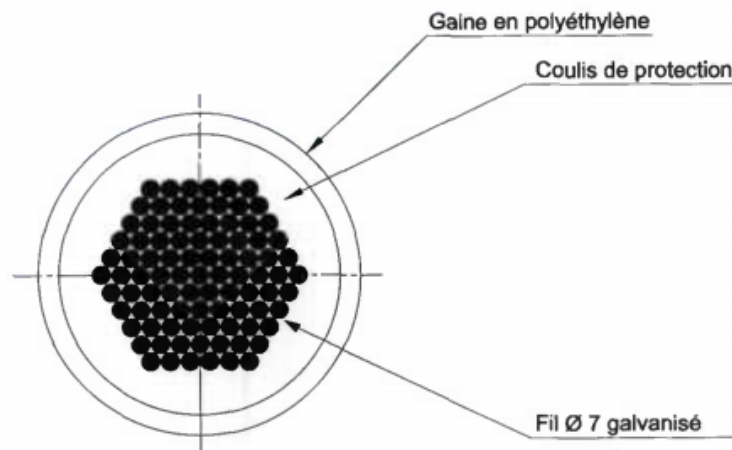


Figure 2-5 : Coupe transversale d'un câble MFP [13]

### C- Catégorie TMC: câbles à torons multi-couches

Les câbles à torons multi-couches sont constitués d'un ou plusieurs câbles monotorons dont le schéma de principe est illustré sur la figure 2-6. Un câble monotoron multi-couches est formé de fils élémentaires enroulés en hélice autour d'un fil d'âme, en plusieurs couches successives. Ces couches sont généralement à pas inversés, ce qui engendre des contacts interfilaires ponctuels, ou au contraire enroulés avec le même pas et des fils de diamètre choisis pour obtenir des contacts interfilaires linéiques.

Le diamètre extérieur d'un TMC dépend du nombre de couches et des diamètres des fils élémentaires; ils varient sur demande de 20 à 150 mm et la composition de chaque type de câble est définie de façon spécifique pour chaque projet. Les fils élémentaires peuvent être ronds ou profilés. Les fils profilés sont utilisés sur certains câbles pour réaliser les couches extérieures (2 à 4 couches de fils profilés emboîtés) ; les couches intérieures étant réalisées avec des fils ronds : ce type de câble est appelé câble clos.

Les fils extérieurs profilés ont été développés par la construction mécanique pour améliorer l'étanchéité des câbles, mais aussi pour répondre à la nécessité mécanique d'une surface extérieure cylindrique, apte à passer sur des poulies. A l'origine, ils étaient surtout destinés aux câbles de téléphériques et remontés mécaniques, puis leur usage a été étendu aux structures de génie civil et off-shore.

Les fils élémentaires ronds et profilés des câbles TMC sont des fils revêtus destinés avant tout aux câbles porteurs fixes pour les structures de bâtiment et de génie civil (fig. 2-7), et présentent les caractéristiques suivantes:

- diamètre nominal des fils ronds ou hauteur nominale des fils profilés compris entre 2 et 8 mm ;
- revêtement de protection d'un dépôt métallique de zinc ou d'un alliage zinc-aluminium, de classe A au minimum ;
- classe de résistance  $f_{rg}$  des fils 1570, 1670 MPa ou 1860 MPa;
- allongement relatif total après rupture supérieur à 4% ou bien allongement relatif sous charge maximale  $A_{gt}$  supérieur à 3.5%;

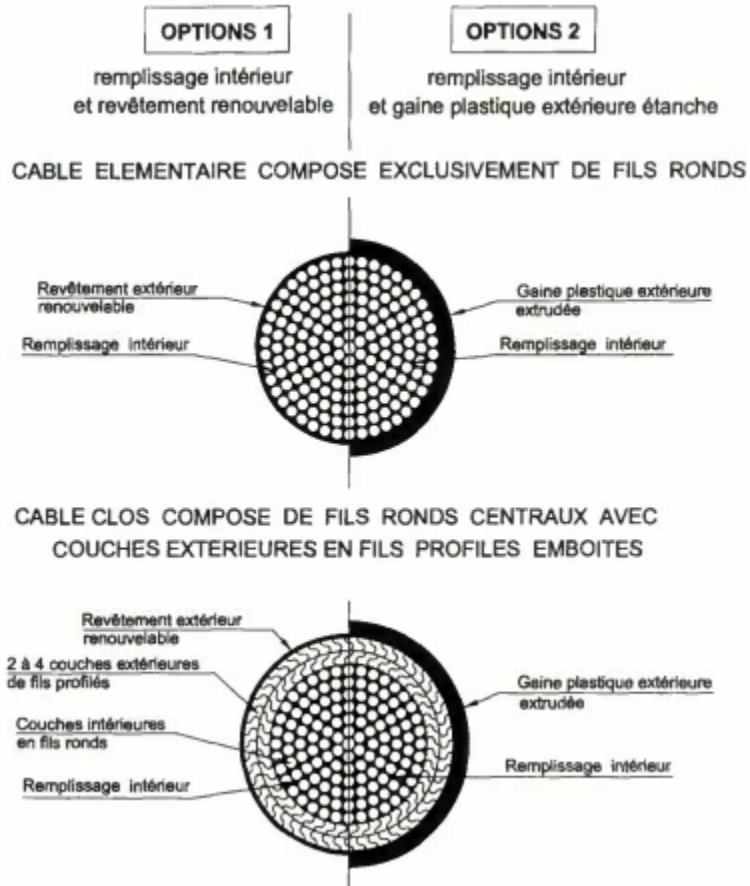


Figure 2-6 : Coupe transversale types des câbles TMC [13]



Figure 2-7 : Câble TMC [13,16]

### **2-2-3 Choix des matériaux**

Ce choix concerne non seulement les matériaux de base, en général définis par les sollicitations mécaniques, mais aussi les techniques de mise en œuvre, les traitements à cœur ou en surface et la formulation particulière permettant d'obtenir la durabilité requise. Les exemples ci-dessous fournissent quelques bases de jugement.

#### **2-2-3-1 Câbles et autres pièces utilisées en acier**

Le choix de l'acier des câbles et de leur mode d'élaboration est étroitement lié à la tenue en fatigue axiale sous 2 millions de cycles. Dans le cas de structures légères, les câbles sont soumis à une amplitude de contrainte importante et il convient, là aussi, d'être vigilant au choix du type de câble. C'est pourquoi la catégorie B des normes des fils ou torons est systématiquement choisie.

La résistance à 2 millions de cycles de fatigue axiale n'est cependant pas une garantie suffisante de durabilité, en particulier pour les produits comportant des contacts interfils non protégés vis-à-vis des phénomènes tribologiques. Le choix de l'acier du toron doit donc être associé à un traitement des contacts permettant de se prémunir des phénomènes FIP et UIP (traitement de surface et lubrification, combiné à une protection anticorrosion). Le choix de torons galvanisé est souvent recommandé car la galvanisation est le seul procédé industriel qui ait largement fait ses preuves en la matière.

Quant aux autres pièces comme les têtes d'ancrage, les organes de transfert et les dispositifs d'ancrage (mors ou manchon), le choix de l'acier doit être guidé par une analyse semblable à celle des câbles, tenant compte de leurs spécificités de forme et de fonction. La durabilité de ces organes dépend aussi :

- de leur mode d'élaboration (forge, fonderie, laminage) ;
- des traitements qu'ils reçoivent (thermique, thermo-chimique, de surface) ;
- de la combinaison de matériaux différents, en évitant les incompatibilités.

Il convient enfin de détecter et d'exclure tout défaut (fissures, porosités, soufflures, tapures, etc.) par des exigences sur le processus de fabrication et des contrôles adéquats (radiographie, ultrasons, ressuage, IRM, etc.).

### **2-2-3-2 Matières plastiques**

Des matières plastiques sont utilisées sur les câbles. Les plus courantes sont les polyoléfinés, et les gaines de PEHD en particulier. Il convient d'analyser avec soin, et de manière spécifique à chaque matériau, le vieillissement de ces matières plastiques.

#### **- Gains extérieures en PEHD**

La principale cause de vieillissement des gaines en PEHD exposées au soleil est la photoxydation des chaînes de polymères, donnant lieu à la formation de carbonyles, puis à la perte des propriétés mécaniques du PEHD. Il convient donc de formuler le PEHD avec des agents anti-oxydants et anti-ultraviolets pour obtenir des gaines de durabilité suffisante. Le noir de carbone permet par exemple d'absorber les ultraviolets, à condition que sa dispersion soit homogène. Il est remplacé par d'autres agents chimiques dans les gaines de couleur. L'efficacité de ces agents doit être analysée par des essais de vieillissement accéléré qui sont basés sur l'étude de l'endommagement physico-chimique du matériau en prenant compte l'agressivité de l'environnement où sera placé la gaine (intensité du rayonnement ultraviolet en fonction de la situation géographique de l'ouvrage) et les facteurs accélérateurs (température, vent, etc.).

#### **- Torons gainés**

Une analyse particulière est nécessaire pour les gaines de torons individuellement gainés, où le PEHD est directement en contact de l'acier. Le rôle de l'interface acier-PEHD est primordial : l'action différentielle de la chaleur sur l'acier et le PEHD, par suite de la différence des coefficients de dilatation thermique, doit être prise en compte dans la conception du système de câblage. Un matériau d'interface est indispensable, qui sert généralement aussi à colmater les vides interfils du toron.

### **2-2-3-3 Peinture de la partie courante des torons multi-couches**

Le vieillissement des systèmes de protection par peinture affecte à la fois i) l'aspect et la tenue de la couleur, justifiant des exigences sur le pigment ii) la protection anti-corrosion et le tenue mécanique, justifiant le choix de la résine.

Comme pour toutes les structures métalliques, la qualité de la préparation de surface est capitale pour la durabilité de la peinture. Le recours au grenaillage est admis seulement lorsque des dispositions garantissent l'absence de grains dans le câble en fin d'opération. Il convient d'apporter aussi un grand soin à la protection des assemblages mécaniques mobiles ou semi-mobiles. En effet, la présence de grains dans le câble ou les assemblages pourrait compromettre sérieusement leur tenue en fatigue. Sur la peinture, comme pour les matières plastiques, la combinaison des contraintes mécaniques et d'agressions environnementales entraîne une accélération du vieillissement. Cela doit être pris en compte dans le mode opératoire d'application initiale de la peinture, avant ou après la mise en tension des câbles, ainsi que lors de l'opération de renouvellement de la peinture.

### **2-2-3-4 Besoin de remplaçabilité**

L'analyse de la durabilité doit être menée très sérieusement lors de la conception initiale de l'ouvrage. Comme il subsiste malgré tout une part d'aléas dans l'appréciation du vieillissement futur, il est indispensable de prévoir des câbles remplaçables et facilement visitables. La remplaçabilité est conditionnée par le mode d'accrochage du câble sur la structure. En particulier, les assemblages des organes de protection dans la zone d'ancrage doivent être réversibles plutôt que permanents (filetage au lieu de la soudure).

L'examen et le diagnostic des câbles, par des méthodes directes ou indirectes, visuelles, dynamiques ou acoustiques impose les dispositions technologiques suivantes :

- possibilités d'ouvertures d'accès à l'examen visuel ou au prélèvement d'éléments en vue d'un contrôle de vieillissement ;
- protections supportant les démontages répétés ;
- mise en place de systèmes de mesure interrogeables à distance en permanence.

## 2-3 Vibrations des câbles

Lorsqu'ils sont soumis à une excitation périodique, les câbles de précontrainte peuvent, dans certaines conditions, accumuler de l'énergie et osciller avec des amplitudes importantes. Ces oscillations mettent rarement l'ouvrage en danger, mais elles sont inquiétantes pour les usagers et peuvent, si elles ne sont pas maîtrisées, endommager ces câbles par fatigue.

### 2-3-1 Causes des vibrations

Les causes de vibration des câbles sont de deux types:

- Déplacement des ancrages, sous l'effet des charges du trafic ou du vent agissant sur l'ouvrage (tablier, pylônes) ;
- Les effets du vent agissant directement sur les câbles.

Le risque de vibrations des câbles doit être pris en considération lors de la conception de l'ouvrage. Si des instabilités imprévues se produisent sur un ouvrage achevé, un diagnostic précis est nécessaire pour prendre des mesures correctives adaptées [32,33]. Dans cette section, il s'agit d'abord de rappeler les paramètres aérodynamiques d'un câble, puis de présenter d'une façon succincte, les phénomènes physiques pouvant engendrer des vibrations et enfin de décrire les actions permettant de combattre ces vibrations.

### 2-3-2 Paramètres aérodynamiques d'un câble

#### 2-3-2-1 Trainée d'un câble

L'effort de trainée (statique) du vent sur un câble est donnée par:

$$F_d = \frac{1}{2} \rho U^2 D C_d \quad (2-1)$$

où  $\rho$  est la densité de l'air ( $\rho = 1.23 \text{ kg/m}^3$  dans les conditions normales de température et de pression),  $U$  est la vitesse du vent,  $D$  le diamètre extérieur du câble et  $C_d$  le coefficient de

trainée appelé  $C_{f0}$  dans l'Eurocode 1. Dans le cas classique des gaines circulaires, la valeur du coefficient de trainée dépend de la vitesse du vent, ou plus précisément du nombre de Reynolds  $R_e$  :

$$R_e = \frac{UD}{\nu} \quad (2-2)$$

où  $\nu$  est la viscosité cinématique de l'air ( $\nu=15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  dans les conditions normales de température et de pression).

Comme le montre le diagramme ci-dessous (fig.2-8), on observe trois domaines pour la valeur de  $C_d$  :

- Pour des faibles valeurs de  $R_e$ , dans le domaine subcritique,  $C_d$  est relativement élevé, de l'ordre de 1.2 ;
- dans le domaine supercritique, au dessus d'une valeur critique du nombre de Reynolds variant de  $2 \cdot 10^5$  à  $8 \cdot 10^5$  selon la rugosité de la gaine, le coefficient de trainée chute à 0.5 ou 0.6 ;
- pour des valeurs plus élevées de  $R_e$ , dans le domaine hypercritique, le coefficient de trainée croît pour atteindre un palier qui dépend à nouveau de la rugosité.

Dans la plupart des ouvrages, les câbles se trouvent dans le domaine supercritique pour les valeurs extrêmes de la vitesse du vent, et l'on adopte généralement une valeur de 0.7 pour le coefficient  $C_d$  afin de couvrir l'évolution de la rugosité des gaines dans le temps, avec le dépôt de poussière et l'altération des matériaux.

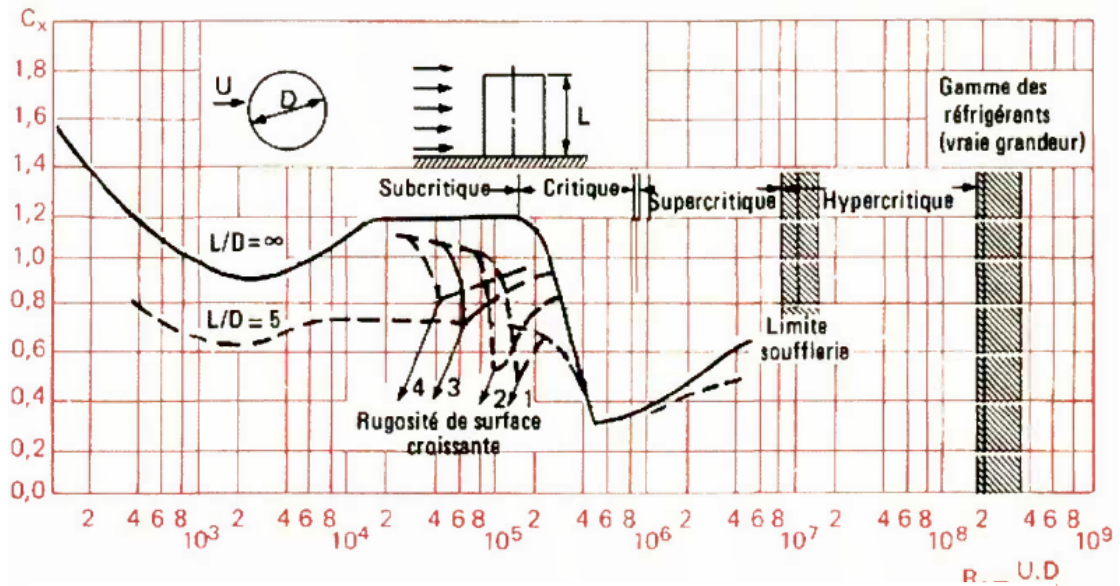


Figure 2-8 : Evolution du coefficient de trainée du cylindre en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement

### 2-3-2-2 Amortissement d'un câble

L'amortissement d'un câble provient de frottements internes entre les éléments constitutifs du câble ou des ancrages; il est caractérisé par plusieurs paramètres. Dans les équations de la dynamique, la force d'amortissement par unité de longueur peut être modélisée à partir d'une constante d'amortissement visqueux notée  $\gamma$  et de la vitesse de déplacement transversal du câble ( $y$ ), donnée par la relation :

$$F_{amort} = -\gamma \frac{\partial y}{\partial t} \quad (2-3)$$

Si l'on désigne par  $\mu$  la masse linéique du câble et  $\omega_1$  sa pulsation fondamentale, l'amortissement rapporté au critique  $\xi$  est défini par :

$$\xi = \frac{\gamma}{2\mu\omega_1} \quad (2-4)$$

Enfin, on définit par décrement logarithmique d'un câble le logarithme du rapport, que l'on note  $\delta$ , des amplitudes de deux oscillations libres successives ( $A_n$  et  $A_{n+1}$ ).

$$\delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} \quad (2-5)$$

L'amortissement rapporté au critique  $\xi$  étant naturellement faible pour un câble, on montre que  $\delta=2\pi\xi$  pour des oscillations d'amplitude modérées.

L'amortissement total d'un câble est la somme de son amortissement intrinsèque et de l'amortissement aérodynamique :  $\delta_{\text{tot}} = \delta_i + \delta_a$ . Ce dernier augmente avec la vitesse du vent, si bien que les problèmes de vibrations liés à une insuffisance d'amortissement sont souvent plus critiques pour des vents modérés que pour des vents extrêmes. L'amortissement intrinsèque  $\delta_i$  d'un câble provient des frottements internes entre armatures constitutives du câble et entres pièces constitutives de l'ancrage. Il dépend donc fortement de la technologie du câble employé et l'on suggère de prendre les ordres de grandeurs suivants :

- Câbles multi-torons parallèles (MTP) protégés individuellement :  $\delta_i=0.9$  à  $1.2\%$  ;
- Câbles multi-fils parallèles (MFP) et multi-torons parallèles protégés collectivement par un produit souple:  $\delta_i=0.6$  à  $1.8\%$  ;
- Câbles multi-fils parallèles (MFP) et multi-torons parallèles (torons nus) injectés au coulis de ciment:  $\delta_i=0.05$  à  $0.1\%$  ;
- Câbles torons multi-couches (TMC):  $\delta_i =0.3$  à  $0.6\%$  en fonction du produit de colmatage.

L'amortissement décroît généralement lorsque la longueur du câble augmente, puisque les frottements localisés aux ancrages se diluent sur une plus grande portée. En outre, les frottements internes du hauban peuvent générer des problèmes de fatigue ou d'usure nuisibles à la résistance des câbles. L'amortissement aérodynamique provient du frottement du câble sur l'air, ou plus exactement de la vitesse relative du câble en vibration par rapport à l'écoulement du vent. Pour un déplacement relatif du câble dans la direction du vent, l'amortissement aérodynamique (décrément logarithmique) du mode  $k$  vaut :

$$\delta_a = \frac{\rho\pi UDC_d}{\mu\omega_k} \quad (2-6)$$

où  $\mu$  est la masse linéique du câble et  $\omega_k$  la pulsation propre du mode k. Pour un déplacement relatif du câble orthogonal à la direction du vent, l'amortissement aérodynamique (décrément logarithmique) du mode k vaut :

$$\delta_a = \frac{\rho\pi UDC_d}{2\mu\omega_k} \quad (2-7)$$

On remarque que l'amortissement aérodynamique est deux fois plus faible que pour des vibrations dans un plan vertical (i.e perpendiculaire à la direction du vent) que pour des vibrations transversales (selon la direction du vent).

### **2-3-3 Phénomènes physiques engendrant des vibrations**

#### **2-3-3-1 Détachement tourbillonnaire (vortex shedding)**

Ce phénomène est assez classique, et qui se produit lorsqu'un écoulement fluide rencontre un obstacle non profilé, le sillage présente des tourbillons de Von Karman, tournant dans un sens puis dans l'autre. Ces tourbillons sont dus au détachement de la couche limite de l'écoulement autour de l'obstacle, et s'accompagnant d'une force transversale périodique sur l'obstacle.

La fréquence du détachement tourbillonnaire (N) est donnée par le nombre de Strouhal (St) donnée par la relation :

$$N = \frac{US_t}{D} \quad (2-8)$$

où U est la vitesse du vent et D le diamètre extérieur du câble. Pour un cylindre circulaire, par le nombre de Strouhal St vaut 0.20.

Pour une vitesse de vent déterminée, l'échappement tourbillonnaire peut donc exciter un mode propre de vibration du câble. Toutefois, on s'aperçoit que la vitesse de vent permettant d'exciter les premiers modes d'un câble ( $N < 2\text{Hz}$ ) est assez faible, de l'ordre de quelques mètres par seconde ; l'énergie d'un tel vent est très limitée. En outre, des

phénomènes complexes d'amortissement liés à l'échappement tourbillonnaire limitent les amplitudes des vibrations ainsi engendrés à une portion du diamètre du câble. C'est pourquoi ce phénomène ne constitue pas généralement un danger pour les câbles.

### **2-3-3-2 Effet de sillage (wake galloping)**

Il existe plusieurs effets de sillage différents, désignant tous l'action sur un câble des tourbillons de Von Karman créés par un obstacle en amont de l'écoulement. Les câbles d'un ouvrage suspendu peuvent se trouver dans le sillage d'un élément de structure. Les turbulences provoquées par l'élément de structure peuvent exciter la vibration du mode k des câbles si le vent a la vitesse critique suivante :

$$U_c = \frac{N_k D_{pyl}}{S_{pyl}} \quad (2-9)$$

où  $S_{pyl}$  et  $D_{pyl}$  sont le nombre de Strouhal et la dimension transversale de l'élément de structure engendrant les tourbillons. L'obstacle créant les tourbillons peut être un câble. C'est le cas lorsque le vent est quasiment parallèle à l'axe de l'ouvrage : les câbles amont pourraient alors provoquer l'excitation des câbles aval. Cependant, du fait de la fréquence de l'échappement tourbillonnaire sur un câble, et des distances entre câbles, ce phénomène ne peut pas se produire pour des vitesses de vent importantes, et ne présente donc pas de danger réel.

### **2-3-3-3 Action du vent turbulent (buffeting)**

Le vent turbulent a une action dynamique sur les câbles, de même que sur toute structure souple. Ces effets dépendent de la vitesse du vent, de l'intensité de la turbulence, et des paramètres aérodynamiques des câbles. Ils peuvent être appréhendés en calculant la réponse des câbles au vent turbulent, à l'aide de logiciels spécialisés, après une caractérisation adéquate du vent sur le site.

L'amplitude des vibrations augmente avec la vitesse du vent, mais cet effet n'est pas dangereux par lui-même. En effet, contrairement aux phénomènes d'instabilité qui peuvent engendrer des vibrations de grande amplitude sous des vitesses de vent très modérées, la réponse au vent turbulent n'atteint des amplitudes extrêmes que sous des vents exceptionnels

et engendre peu de phénomènes de fatigue. En outre, l'amortissement aérodynamique des câbles, ainsi que la tension relativement élevée sous charges permanentes limite les vibrations.

#### 2-3-3-4 Galop (galloping)

Le galop désigne une instabilité aéroélastique qui peut se produire pour certaines structures élastiques mal profilées placées dans un écoulement laminaire. Cette instabilité, normalement régie par l'analyse des écoulements non stationnaires, peut être mise en évidence par une analyse quasi-stationnaire.

Considérons par exemple un profil se déplaçant transversalement au vent avec une vitesse  $y'(t)$ , la vitesse du vent étant  $U$ . Alors, le vent attaque le profil avec un angle d'incidence  $i(t) = -\tan^{-1} \frac{y'(t)}{U}$ , et pour des petits angles, l'effort transversal exercé par le vent sur le profil est de la forme :

$$F_y(t) = \frac{-1}{2} \rho U^2 B \left[ \frac{\partial C_L}{\partial i} + C_D \right] \frac{y'(t)}{U} \quad (2-10)$$

où  $C_L$  et  $C_D$  sont respectivement les coefficients de portance et de trainée du profil, mesurés dans le référentiel du vent et  $B$  la largeur du profil. Le comportement du profil dans l'écoulement est celui d'un oscillateur linéaire dont l'amortissement (terme en  $y'$ ) est de la forme :

$$\gamma = 2\mu\xi\omega_1 + \frac{1}{2} \rho U B \left[ \frac{\partial C_L}{\partial i} + C_D \right] \quad (2-11)$$

Pour certains profils (portance à forte dérivée négative), le terme entre crochets peut être suffisamment négatif pour que l'amortissement total de l'oscillateur soit négatif, conduisant alors à une instabilité aéroélastique appelée galop. Par raison de symétrie, la portance d'un cylindre circulaire est nulle pour tout angle d'incidence, si bien que l'écoulement du vent autour d'un câble circulaire ne peut pas engendrer de phénomène de galop, y compris pour des vents obliques.

Cependant, des développements théoriques, fondés sur des résultats expérimentaux japonais, prétendent établir une corrélation entre le risque de galop et le nombre de Scrutton  $S_c$  :

$$S_c = \frac{\mu \xi}{\rho D^2} \quad (2-12)$$

D'après ces recherches, il n'y aurait pas de risque de galop pour des vitesses de vent inférieures à la vitesse critique :

$$V_c = 35 D N_k \sqrt{S_c} \quad (2-13)$$

où  $N_k$  est la fréquence propre du mode  $k$ . En revanche, des phénomènes de galop sont possibles dès que le profil du câble présente une certaine asymétrie susceptible d'engendrer des efforts de portance. C'est le cas par exemple d'un faisceau de torons parallèles rangés selon une disposition hexagonale et sans gaine générale. Les torons multi-couches à fils extérieurs circulaires peuvent également produire des phénomènes de galop, sous certaines conditions de pas d'enroulement. Enfin un dépôt de glace sur un câble modifie la forme aérodynamique du câble et peut engendrer une instabilité, à l'exemple des lignes électriques.

### **2-3-3-5 Phénomène pluie + vent (rain-wind induced vibrations)**

L'excitation combinée pluie+vent est un phénomène qui fut mis en évidence par des chercheurs japonais dont le premier fut Y. Hikami. Sous certaines conditions de vent, et par temps de pluie, l'eau qui descend le long de la surface du câble s'organise selon deux filets d'eau, l'un en équilibre stable en fibre inférieure du câble, et l'autre en équilibre instable en fibre supérieure. Ce dernier est placé à l'angle d'azimut où s'équilibrent les effets de la gravité, de la capillarité et du vent.

La présence de ces filets d'eau modifie le profil aérodynamique du câble. De plus, le mouvement oscillant du filet d'eau supérieur provoque des efforts aérodynamiques variables, qui engendrent une instabilité du câble. L'amplitude des vibrations du câble sous excitation combinée pluie+vent peut atteindre plusieurs mètres.

L'instabilité pluie+vent a été observée dans les conditions suivantes :

- L'intensité de la pluie est sans importance, sauf en cas de pluie trop abondante pour permettre aux filets d'eau de se former.
- Le vent doit être oblique, avec un angle d'azimut compris entre 30 et 80 °, et tendre à soulever les câbles considérés. L'instabilité pluie+vent se développe pour des vitesses de vent modérées, compris entre 8 et 15 m/s. Il semblerait que la turbulence du vent limite le phénomène, sans doute parce qu'elle empêche l'organisation des filets d'eau.
- Le diamètre des gaines est sans importance mais leur état de surface joue un grand rôle. L'instabilité pluie+vent a été observée sur des gaines en acier peint, en acier inoxydable ou en PEHD. Si la surface est trop lisse, le filet d'eau supérieur ne peut pas se former, mais l'augmentation de la rugosité liée au dépôt de la poussière sur le câble permet à l'instabilité pluie+vent de s'établir.
- Les oscillations les plus couramment observées ont une fréquence de de 1.0 à 3.0 Hz et sont verticales.

### **2-3-3-6 Excitation paramétrique**

La vibration des câbles peut être provoquée par le déplacement périodique de leurs ancrages, et donc par des oscillations de l'ouvrage engendrées par l'action du vent sur le tablier ou les pylônes ou par l'action du trafic. Un déplacement périodique quelconque d'un ancrage peut être décomposé en déplacement transversal, d'une part, et déplacement longitudinal, d'autre part. Le déplacement transversal d'un ancrage peut engendrer un phénomène de résonance classique. La réponse du câble présente une amplitude maximale lorsque la pulsation d'excitation correspond à une pulsation propre ; cette amplitude est limitée par l'amortissement du câble. Cependant, le déplacement longitudinal d'un ancrage peut donner lieu à un phénomène de résonance paramétrique, qui s'apparente à une instabilité, lorsque la pulsation d'excitation est double de la pulsation propre du câble. L'amplitude de la réponse ne dépend pas de l'amortissement du câble.

L'excitation paramétrique est responsable de vibration de grande amplitude, pouvant atteindre plusieurs mètres, y compris pour des vents modérés. Elle est d'autant plus à craindre lorsque la structure est mal profilée (tabliers bi-poutres notamment). Le déplacement des

ancrages du tablier est généralement prépondérant, mais certains pylônes non contreventés pourraient se déplacer sous l'action du vent et engendrer une résonance paramétrique.

### **2-3-3-7 Respiration des torons (rattling)**

Lorsque les câbles sont constitués d'un faisceau ouvert de torons (câbles MTP individuellement protégés sans gaine générale, faisceau de câbles TMC) des interactions aérodynamiques se produisent entre torons. Les torons périphériques s'éloignent et se rapprochent périodiquement du faisceau, choquant les torons centraux et engendrant finalement une vibration d'ensemble du câble.

Ces mouvements, dénommés souvent respiration des torons, produisent un bruit de claquement violent et désagréable. Ils sont évités en plaçant des colliers de serrage à intervalles réguliers sur le faisceau de torons, ou mieux, en logeant ce faisceau dans une gaine générale. Dans ce dernier cas, la gaine générale interdit toute action directe du vent sur les torons. Lorsque les torons sont individuellement protégés, la gaine n'est habituellement pas injectée et repose simplement sur le faisceau de torons.

Si des vibrations importantes se produisent pour une autre raison, par exemple l'action du vent turbulent, il est possible que l'accélération verticale du câble dépasse celle de la gravité, si bien que la gaine pourra décoller du faisceau de torons. Les vibrations de grande amplitude peuvent ainsi s'accompagner d'un claquement sonore de la gaine sur le faisceau de torons, sans gravité pour le câble, mais désagréable pour le voisinage.

## CHAPITRE 3

### ANALYSE DYNAMIQUE EN REGIME VIBRATOIRE LIBRE : DEVELOPPEMENTS THEORIQUES

#### **3-1 Généralités**

Ce chapitre a pour but d'exposer les développements théoriques de base de la méthode de calcul d'un système vertical précontraint, tel que décrit dans le premier chapitre, en considérant l'aspect dynamique sous l'action de vibrations libres pouvant être le siège de l'application d'une petite perturbation dynamique d'origine quelconque. Les fondements mathématiques utilisés sont basés essentiellement sur l'approche fondamentale qui assimile le comportement de la nappe des suspentes à celui d'un voile continu et inextensible. Cependant, nous allons faire d'abord un bref rappel de la méthode de calcul sous charges statiques permettant de calculer les poussées développées dans les câbles.

Les autres hypothèses qui délimitent les conditions de validité de la méthode sont les suivantes :

- câble parfaitement flexible : cela revient à énoncer en langage structural que, tout au long d'un câble en équilibre, le moment fléchissant est nul ;
- inextensibilité des suspentes signifiant que les déplacements verticaux respectifs du câble porteur disposé dans la partie supérieure de l'ouvrage, des suspentes et du câble de rigidité disposé en sa partie inférieure sont égaux ;
- câbles relativement tendus (peu profonds) correspondant à un rapport flèche/travée de l'ordre de 1/10 ou moins de sorte que les chaînettes fortement aplaties sont assimilables, dans l'état initial, à des paraboles de 2<sup>ème</sup> degré ; il en découle que les densités de réaction sur les câbles sont uniformes sur l'horizontale, au moment du réglage ;

#### **3-2 Rappel de la méthode de calcul des poussées sous charges statiques**

Supposons qu'en l'absence de surcharge, le réglage de l'ouvrage à l'état initial est tel que les câbles porteur et de rigidité soient soumis à des forces de traction de composantes horizontales respectives  $H_0$  et  $H_1$ . Ces forces qu'on appelle poussées, sont dues à la mise en

tension initiale et au poids propre des éléments constitutifs de la structure, et sont constantes d'une extrémité à l'autre des câbles. Sous chargement, les poussées deviennent  $H_0+h_0$  et  $H_1+h_1$  dont le problème fondamental posé par l'étude d'un système à suspension revient à la détermination des poussées additionnelles  $h_0$  et  $h_1$  permettant par la suite de calculer les déformations et les flèches en n'importe quel point des câbles.

On obtient de façon générale l'équation fondamentale relative à un câble de travée quelconque en exploitant l'équation des déplacements orthogonaux et la condition d'immobilité des extrémités des câbles solidaires des ancrages et en tenant compte de la configuration parabolique du câble. On en déduit alors directement les équations de détermination des poussées dans les câbles. Les équations à caractère non linéaire qui en résultent sont établies de façon à être résolues numériquement soit par la méthode de Newton-Raphson à double itération. Pour de plus amples informations, nous renvoyons directement le lecteur de consulter la référence [17].

### 3-2-1 Formes initiales d'équilibres

Considérons les conditions initiales de réglage du système à suspension CDC'D' comme indiqué sur la figure 3-1. Le système est composé d'un câble porteur et d'un câble de rigidité disposé respectivement en sa partie supérieur et inférieur; les dénivellations d'appuis étant supposées nulles. Les deux câbles sont reliés par nappes de suspentes verticales très rapprochées dont le comportement peut être assimilé à celui d'un voile continu et inextensible.

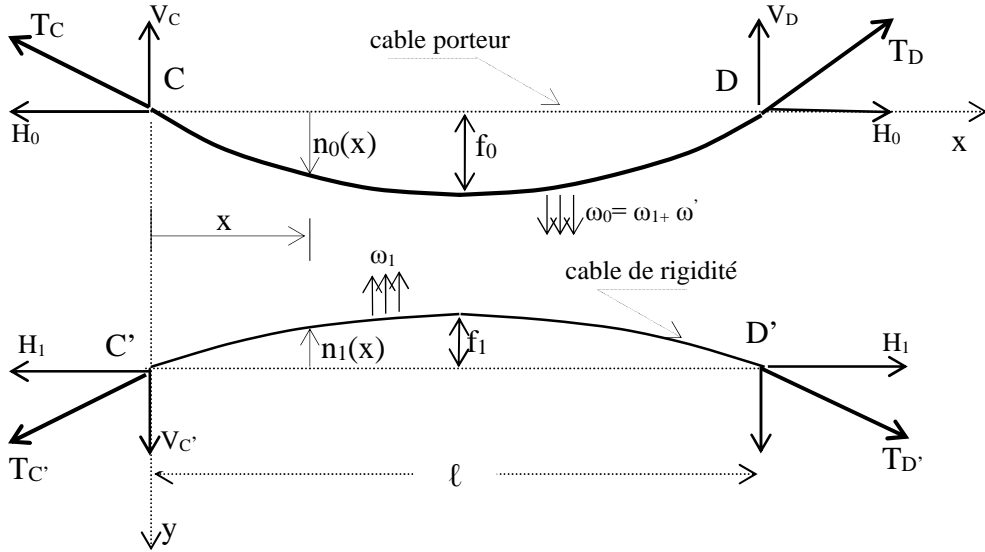


Figure 3-1 : Conditions de réglage initiales des câbles

Soit  $\omega_1$ , la densité de réaction constante due à la mise en pré-tension du câble de rigidité sur la nappe des suspentes dont la poussée est  $H_1$ . Si  $\omega'$  est le poids linéique horizontal total de l'ouvrage au moment du réglage, la densité de charge sur le câble porteur de poussée  $H_0$  est donnée par :

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega' \quad (3-1)$$

Les câbles décrivent des paraboles de flèches  $f_0$  et  $f_1$  dont les équations, suivant le sens positif de l'axe  $y$ , sont :

$$n_0 = \frac{4f_0}{\ell^2} x(\ell - x) \quad (3-2)$$

$$n_1 = -\frac{4f_1}{\ell^2} x(\ell - x) \quad (3-3)$$

où  $\ell$  étant la portée de la travée considérée. Désignons par  $\mu'$  le moment fléchissant produit par la densité de charge  $\omega'$  dans la poutre droite isostatique sur appuis simples de portée  $\ell$ , et par  $\mu_1$  le moment fléchissant dû à  $\omega_1$ . On obtient alors la figure d'équilibre d'un câble en écrivant que le moment fléchissant en tout point d'abscisse  $x$  du câble est nul. Compte tenu des deux expressions précédentes, il est possible d'écrire les relations suivantes :

$$H_1 n_1 = -\mu_1 \quad (3-4)$$

$$H_1 = \frac{\omega_1 L^2}{8f_1} \quad (3-5)$$

$$H_0 n_0 = \mu' + \mu_1 \quad (3-6)$$

$$H_0 = \frac{\omega_0 L^2}{8f_0} \quad (3-7)$$

### 3-2-2 Formes d'équilibre sous charge (s)

Supposons maintenant que des surcharges, pouvant comprendre des charges isolées ou des charges réparties sur tout ou partie de la travée, soient appliquées au tablier considéré, dépourvu de rigidité appréciable. Désignons par  $\mu$  le moment fléchissant dû à ces surcharges

dans la poutre droite sur appuis simples de portée  $\ell$ , et par  $v$  le moment fléchissant qui se produirait dans cette même poutre sous l'action de la partie des surcharges transmise au câble principal par les suspentes. Les poussées dans les câbles deviennent respectivement  $(H_0+h_0)$  et  $(H_1+h_1)$ , et les câbles prennent des nouvelles figures d'équilibre respectives  $(n_0+v_0)$  et  $(n_1+v_1)$ , définies par les équations suivantes, analogues aux relations (3-4) et (3-6).

$$(H_1 + h_1)(n_1 + v_1) = -\mu_1 + \mu - v \quad (3-8)$$

$$(H_0 + h_0)(n_0 + v_0) = \mu' + \mu_1 + v \quad (3-9)$$

### 3-2-3 Equation de la déformée

La nappe des suspentes étant assimilée à un voile continu et inextensible, à toute déformation  $v(x)$  du câble principal, comptée à partir de l'état initial, correspond la même déformation  $v(x)$  du câble de rigidité. Alors :

$$v_0 = v_1 = v \quad (3-10)$$

En vertu de cette relation, l'élimination de  $v$  entre les équations (3-8) et (3-9), compte tenu de l'état initial décrit par (3-4) et (3-6), conduit à l'expression de la déformée :

$$v = \frac{\mu - h_0 n_0 - h_1 n_1}{H} \quad (3-11)$$

où  $H = H_0 + H_1 + h_0 + h_1$

Nous constatons que la détermination de la déformée  $v$  exige le calcul des variations  $h_0$  et  $h_1$  des poussées ; ce calcul constitue le problème principal de l'étude de ce système suspendu. Le fonctionnement caractéristique de ce système, si les charges appliquées sont par exemple descendantes, est tel que le câble porteur travaille en surtension ( $h_0 > 0$ ) et le câble de rigidité en détension ( $h_1 < 0$ ).

### 3-2-4 Equation des déplacements orthogonaux

Cette équation donne le déplacement horizontal  $u(x=\ell)$  du câble à l'extrémité de la travée, connaissant le déplacement horizontal à l'origine  $u(x=0)$ , la flèche  $v=v(x)$  du câble, la variation de poussée  $h$  engendré dans le câble. Soit comme indiqué sur la figure 3-2, relativement à un système d'axes cartésiens  $xy$ , un élément de câble de longueur  $ds$  avant déformation et de longueur  $\bar{ds}$  après déformation, il est possible d'écrire :

$$(\bar{ds})^2 - (ds)^2 = 2dudx + (du)^2 + 2dvdx + (dv)^2 \quad (3-12)$$

En sachant que  $\bar{ds} = ds + \delta ds$  où  $\delta ds$  représente l'allongement élastique du à l'accroissement  $h$  de la poussée développée dans le câble s'écrivant sous la forme :

$$\delta ds = \frac{h}{EA} \left( \frac{ds}{dx} \right) ds \quad (3-13)$$

E et A désignant respectivement le module d'élasticité et la section du câble, l'équation (3-12) devient alors :

$$\frac{du}{dx} = \frac{h}{EA} \left( \frac{ds}{dx} \right)^3 - \frac{dy}{dx} \frac{dv}{dx} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + \left( \frac{du}{dx} \right)^2 - \left( \frac{\delta ds}{dx} \right)^2 \right] \quad (3-14)$$

L'intégration cette équation d'une extrémité à l'autre de la travée donne :

$$\Delta u \Big|_0^\ell = \int_0^\ell \frac{h}{EA} \left( \frac{ds}{dx} \right)^3 dx - \int_0^\ell \frac{dy}{dx} \frac{dv}{dx} dx - \frac{1}{2} \int_0^\ell \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[ \left( \frac{du}{dx} \right)^2 - \left( \frac{\delta ds}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (3-15)$$

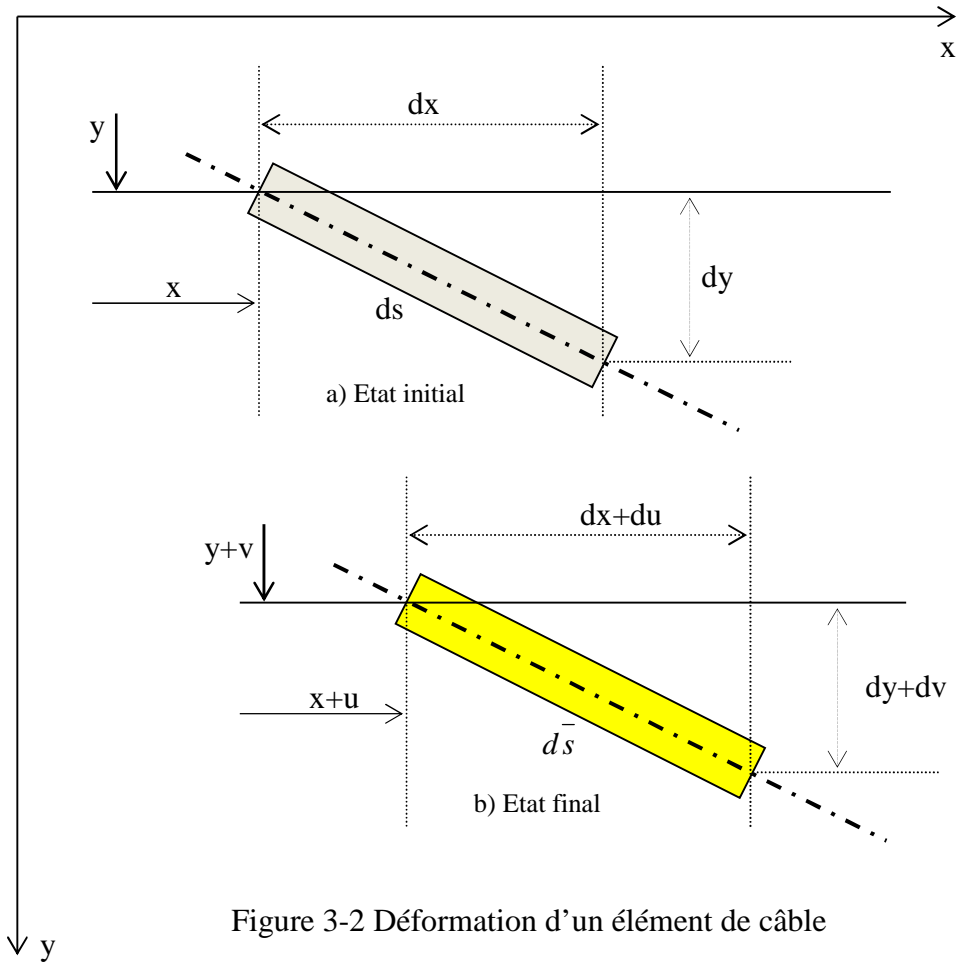


Figure 3-2 Déformation d'un élément de câble

Pour de faibles déformations et des petits déplacements horizontaux du câble, les deux derniers termes de cette dernière deviennent négligeables. Si de plus, on suppose que  $v(0) = v(L) = 0$  (ce qui traduit l'incompressibilité des pylônes et la fixité verticale des ancrages) et le câble parabolique aplati, décrit par l'ordonnée  $y$ , et après une intégration par partie, donne :

L'équation générale de base (3-15) devient finalement :

$$\Delta u \Big|_0^\ell = \frac{h L_s}{ES} + \int_0^\ell \frac{d^2 y}{dx^2} v dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{d^2 v}{dx^2} v dx \quad (3-16)$$

où  $L_s = \int_0^\ell \left( \frac{ds}{dx} \right)^3 dx$  étant un paramètre de longueur

L'équation (3-16) est l'équation dite des déplacements orthogonaux.

### 3-2-5 Application au cas d'un système vertical précontraint

Ce système est représenté sur la figure 3-3 dans lequel on attribue l'indice (') aux paramètres relatifs aux travées de haubanage. Le câble porteur est composé de la travée principale et de deux haubans reliés aux massifs d'ancrage. Le câble de rigidité est seulement constitué d'une travée principale s'appuyant éventuellement sur les pylônes. Une application directe de l'équation fondamentale des déplacements orthogonaux (3-16) à chaque câble donne l'expression recherchée de la poussée.

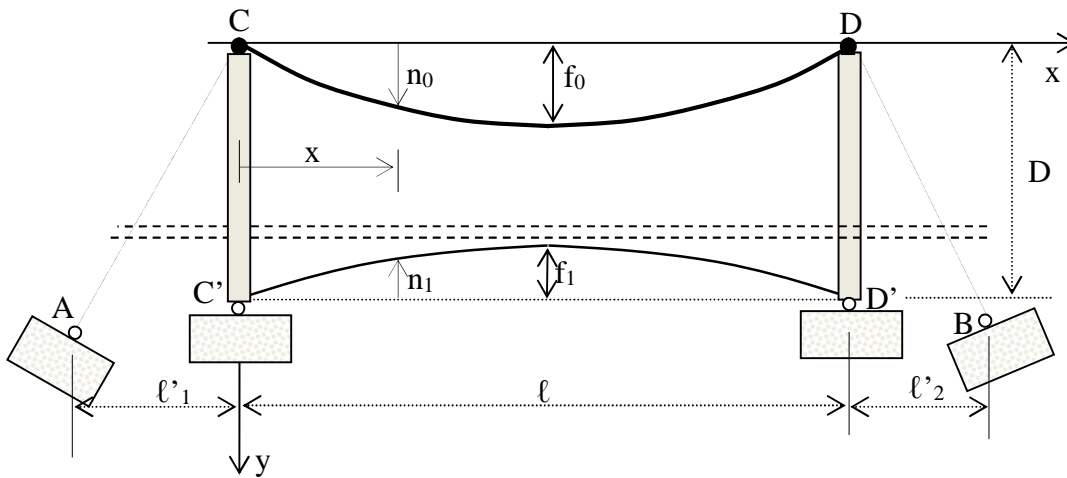


Figure 3-3 : Système vertical précontraint

#### 3-2-5-1 Câble porteur

Cherchons tout d'abord à développer les deux derniers termes de l'équation (3-16) pour chacune des parties du câble. Cependant, à cause de la configuration rectiligne des haubans de rive ( $f'_i=0$ ), ces termes s'annulent pour les travées de haubanage. Par suite, à l'aide de la relation (3-11), en tenant compte de la configuration parabolique des câbles décrite par les expressions (3-2) et (3-3), la travée principale conduit aux expressions suivantes :

$$\int_0^{\ell} \frac{d^2 y}{dx^2} v dx = \frac{16}{3} \frac{f_0^2}{H \ell} h_0 - \frac{16}{3} \frac{f_0 f_1}{H \ell} h_1 - \frac{8 f_0}{H \ell^2} \int_0^{\ell} \mu dx \quad (3-17)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\ell} \frac{d^2 v}{dx^2} v dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\ell} \frac{p v}{H} dx - \frac{8}{3} \ell \left( \frac{f_0 h_0 - f_1 h_1}{H \ell} \right)^2 + 4 \left( \frac{f_0 h_0 - f_1 h_1}{H^2 \ell^2} \right) \int_0^{\ell} \mu dx \quad (3-18)$$

Notons que dans l'expression (3-18), la surcharge linéique  $p(x)$  est une fonction généralement continue. On peut généraliser pour un ensemble de charges concentrées  $P_j$  appliquées aux sections d'abscisses  $x_j$ , en remplaçant cet ensemble de charges concentrées par la densité de charge généralement continue :

$$p(x) = \begin{cases} \frac{P_j}{2\varepsilon} & \text{lorsque } x \text{ appartient à l'intervalle } (x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon) \\ 0 & \text{lorsque } x \text{ n'appartient pas à l'intervalle } (x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon) \end{cases}$$

Sachant que  $\int_0^{\ell} p v dx = \sum_j \left( \frac{P_j}{2\varepsilon} \int_{x_j-\varepsilon}^{x_j+\varepsilon} dx \right) v_j = \sum_j (P_j v_j)$ , l'équation (3-18) devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \frac{d^2 v}{dx^2} v dx = & -\frac{1}{2} \left[ \int_0^{\ell} \frac{pv}{H} dx + \sum_j \left( \frac{P_j v_j}{H} \right) \right] - \frac{8}{3} L \left( \frac{f_0 h_0 - f_1 h_1}{H \ell} \right)^2 \\ & + 4 \left( \frac{f_0 h_0 - f_1 h_1}{H^2 \ell^2} \right) \int_0^{\ell} \mu dx \end{aligned} \quad (3-19)$$

En intégrant d'une extrémité A à l'autre B du câble, et à l'aide des développements (3-17), (3-18) et (319) et de la condition déformationnelle des ancrages  $\left( \Delta u \Big|_A^B = 0 \right)$ , nous obtenons l'équation de la poussée du câble principal que nous écrivons sous la forme:

$$h_0 = \frac{1}{D_0} \left[ \frac{8f_0}{L^2} \int_0^{\ell} \mu dx - \frac{16f_0 f_1}{3\ell} h_1 - \Delta_0 \right] \quad (3-20)$$

avec la définition suivante des différents paramètres,  $\Delta_0$  étant un terme correctif:

$$\zeta_{s_0} = L_{s_0} + \sum_{i=1}^2 L'_{s_i} \quad (3-21a)$$

$$D_0 = \frac{H \zeta_{s_0}}{EA_0} + \frac{16}{3} \frac{f_0^2}{\ell} \quad (3-21b)$$

$$\Delta_0 = -\frac{1}{2} \left[ \int_0^{\ell} pv dx + \sum_j (P_j v_j) \right] + 4 \left( \frac{f_0 h_0 - f_1 h_1}{H \ell^2} \right) \int_0^{\ell} \mu dx - \frac{8}{3} \frac{(f_0 h_0 - f_1 h_1)^2}{H \ell} \quad (3-21c)$$

### 3-2-5-2 Câble de rigidité

Si on reprend le processus de calcul précédent à l'aide des considérations suivantes :

- équation de la déformée (3-11),
- définition de tout point du câble par  $y=D+n_1$  où  $D$  est la distance verticale entre les points d'appuis et d'accrochage des câbles en tête et au pied du pylône (CC' ou DD'),
- intégration le long du câble C'D' avec la condition déformationnelle  $\Delta u = 0$  entre deux points de fixation,

on aboutit à la deuxième équation de poussée, correspondant au câble de rigidité :

$$h_1 = \frac{1}{D_1} \left[ -\frac{8f_1}{L^2} \int_0^\ell \mu dx + \frac{16f_0 f_1}{3\ell} h_0 - \Delta_0 \right] \quad (3-22)$$

où :

$$\zeta_{s_1} = L_{s_1} \quad (3-23a)$$

$$D_1 = \frac{H \zeta_{s_1}}{ES_1} + \frac{16f_1^2}{3L} \quad (3-23b)$$

### 3-2-5-3 Transformation des équations de poussées

Nous allons calculer  $\int_0^\ell \mu dx$  pour un certain nombre de cas de surcharges. Pour alléger l'écriture, on pourra cependant, sans confusion possible supprimer les indices relatifs aux câbles.

1. Charge concentrée  $P$  à  $x = \alpha \ell$  (fig.3-4a) :

$$\int_0^\ell \mu dx = \frac{\ell^2}{12} P \psi(\alpha) \quad (3-24a)$$

avec :

$$\psi(\alpha) = 6(\alpha - \alpha^2) \quad (3-24b)$$

2. Charge répartie uniforme  $p$  entre  $x_1 = \alpha_1 \ell$  et  $x_2 = \alpha_2 \ell$  (fig.3-4b) :

$$\int_0^\ell \mu dx = \frac{p\ell^3}{12} [\varphi(\alpha_2) - \varphi(\alpha_1)] \quad (3-25a)$$

avec :

$$\varphi(\alpha) = 3\alpha^2 - 2\alpha^3 \quad (3-25b)$$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1 \ell}^{\alpha_2 \ell} \mu dx &= \int_0^\ell \mu dx - \left[ \int_0^{\alpha_1 \ell} \mu dx + \int_{\alpha_2 \ell}^\ell \mu dx \right] \\ &= \frac{pL^3}{12} \left\{ (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \left[ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \frac{3}{4}(\alpha_1 + \alpha_2)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (3-26)$$

3. Sous la combinaison de charges concentrées et réparties :

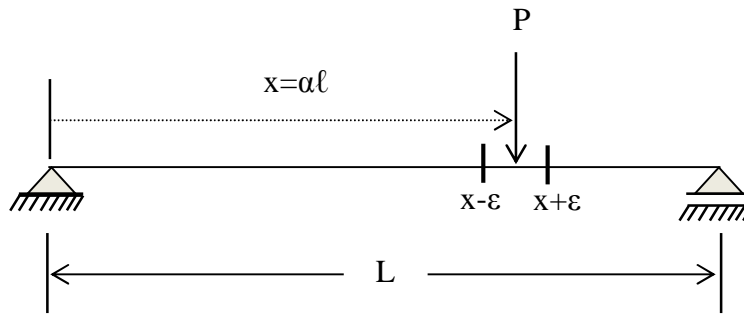
Sous  $n$  charges concentrées et  $m$  charges réparties, les expressions (3-24a) et (3-25a) peuvent se mettre sous les formes générales suivantes:

$$\int_0^\ell \mu dx = \frac{\ell^2}{12} F(\psi_j, \phi_i) \quad (3-27)$$

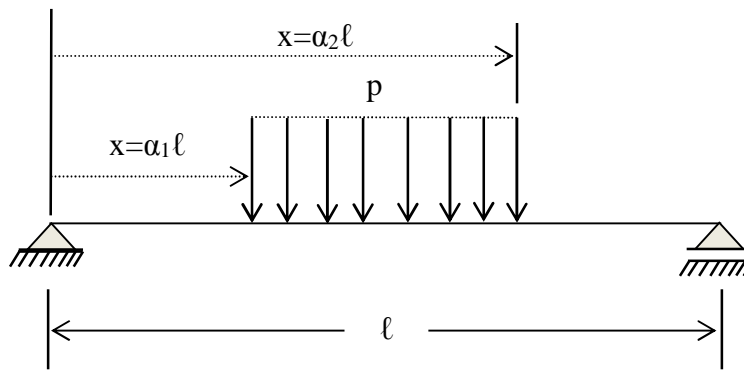
$$F(\psi_j, \phi_i) = \sum_{j=1}^n P_j \psi(\alpha_j) + \sum_{i=1}^m [p_i \ell (\varphi(\alpha_2^i) - \varphi(\alpha_1^i))] \quad (3-28)$$

$$\int_{\alpha_1 \ell}^{\alpha_2 \ell} \mu dx = \frac{\ell^3}{12} \sum_{i=1}^m p_i (\alpha_2^i - \alpha_1^i)^2 - \frac{3}{4} (\alpha_1^i + \alpha_2^i)^2 + f(p_1, p_2, \dots) \quad (3-29)$$

où  $f(p_1, p_2, \dots)$  étant un terme qui dépend de la simultanéité de charges uniformes.



a) Charge concentrée



b) Charge uniforme

Figure 3-4 Cas de charge particuliers sur une travée type

En fonction de (3-24) et (3-25), le terme correctif  $\Delta_0$  peut s'écrire par exemple d'une manière plus explicite pour une seule gamme de charges ( $i=j=1$ ) :

$$\begin{aligned}
 \Delta_0 = & -\frac{\ell^3}{6H} \left\{ p_i^2 (\alpha_2^i - \alpha_1^i)^2 \left[ (2\alpha_1^i + \alpha_2^i) - \frac{3}{4}(\alpha_1^i + \alpha_2^i)^2 \right] \right\} \\
 & + \frac{2\ell}{3H} (f_0 h_0 - f_1 h_1) \{ p_i [\varphi(\alpha_2) - \varphi(\alpha_1)] \} \\
 & - \frac{8}{3} \left[ \frac{(f_0 h_0 - f_1 h_1)^2}{H \ell} \right] - \left( \frac{P_j v_j}{2} \right) + \frac{(f_0 h_0 - f_1 h_1)}{3H} P_j \psi(\alpha_i)
 \end{aligned} \tag{3-30}$$

En portant ces valeurs dans les équations (3-24) et (3-22), on parvient à la nouvelle forme suivante des équations de poussée plus facilement utilisable :

$$h_0 = \frac{1}{D_0} \left[ \frac{2}{3} f_0 F(\psi_j, \phi_i) - \frac{16 f_0 f_1}{3\ell} h_1 - \Delta_0 \right] \quad (3-31a)$$

$$h_1 = \frac{1}{D_1} \left[ -\frac{2}{3} f_1 F(\psi_j, \phi_i) + \frac{16 f_0 f_1}{3\ell} h_0 - \Delta_0 \right] \quad (3-31b)$$

Le système d'équations ainsi obtenu est non linéaire; les inconnues sont les variations de poussée  $h_0$  et  $h_1$ . On utilise pour la résolution la méthode itérative de Newton-Raphson dans le cas d'une double itération [18,19] où il faut transformer encore une fois les équations (3-31) sous une forme polynômiale. L'algorithme général de la méthode est illustré sur la figure 3-5 où il s'agit de résoudre un système d'équations  $F_x(x,y)$  et  $F_y(x,y)$  en se fixant a priori la solution initiale et les pas d'incrément. Cependant, comme dans tous les processus itératifs, un mauvais choix des solutions approchées initiales peut engendrer soit une divergence, soit une convergence vers une solution erronée. Afin de contourner cette difficulté, on propose de prendre comme solutions initiales du problème, les parties principales de  $h_0$  et  $h_1$  données par (3-31) sans le terme correctif  $\Delta_0$ , avec  $h_0 = h_1 = 0$  au départ.

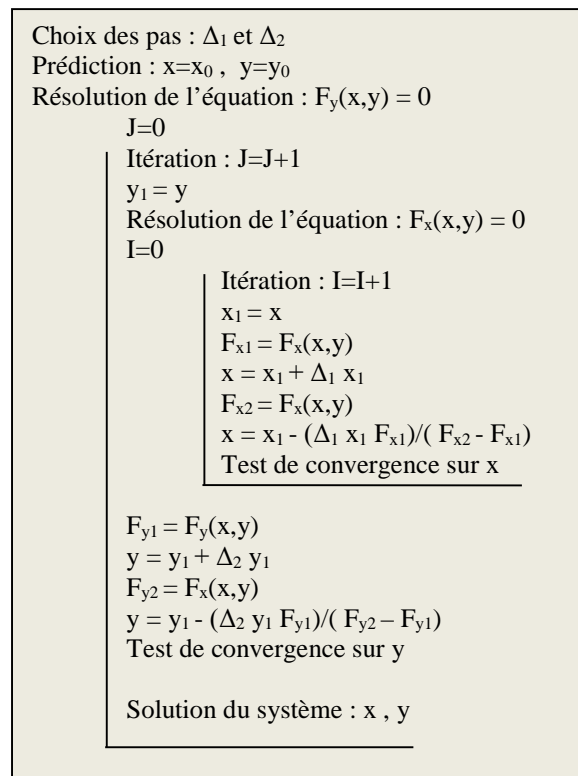


Figure 3-5 : Algorithme général de la méthode de Newton–Raphson à double itération

### 3-3 Méthode de calcul en régime vibratoire libre

Dans cette section, nous allons montrer comment aborder l'aspect dynamique en régime vibratoire libre d'un système vertical précontraint appliqué à l'exemple de la passerelle piétonnière siège d'une petite perturbation dynamique d'origine quelconque. La démarche des calculs suit la même logique que dans la méthode exposée par Irvine [13] pour un système à treillis dont les câbles paraboliques et biconvexes.

#### 3-3-1 Formulation de l'équation élémentaire de mouvement

Découpons ainsi du système vertical précontraint ainsi décrit dans la figure 3-3, un élément infinitésimal de longueur  $dx$  initialement chargé sous l'action de son poids propre ( $w'$ ) et sous l'effet de la prétension du câble de rigidité ( $H_1$ ); la notation adoptée étant inchangée par rapport à la démarche adoptée sous charges statiques. Proposons d'abord d'écrire la condition d'équilibre des forces verticales ( $\sum f_{yi} = 0$ ) respective sous les trois situations de charge suivantes à savoir lors du réglage initial de l'ouvrage, sous les charges statiques ( $p$ ) appliquées sur le tablier engendrant un déplacement vertical ( $v$ ) et enfin en admettant une petite perturbation dynamique libre qui se traduit par un petit déplacement vertical ( $v^*$ ) en tout point du système étudié.

##### 3-3-1-1 Lors du réglage initial (fig.3-6)

La condition ( $\sum f_{yi} = 0$ ) permet d'écrire :

$$\frac{d}{dx} \left( (H_0) \frac{dn_0}{dx} \right) - \frac{d}{dx} \left( (H_1) \frac{dn_1}{dx} \right) + w' = 0 ; \text{ soit}$$
$$H_0 \frac{d^2 n_0}{dx^2} - H_1 \frac{d^2 n_1}{dx^2} + w' = 0 \quad (3-32)$$

Notons que le sens de la configuration parabolique du câble de rigidité ( $n_1$ ) est considéré ici positif vers le haut ( $\uparrow$ ); soit contrairement à la relation (3-3), son expression

ainsi devient :  $n_1 = \frac{4f_1}{L^2} x(L-x)$  où nous pouvons vérifier que la relation (3-32) à l'aide des (3-2), (3-5) et (3-7) conduit bien à la relation (3-1).

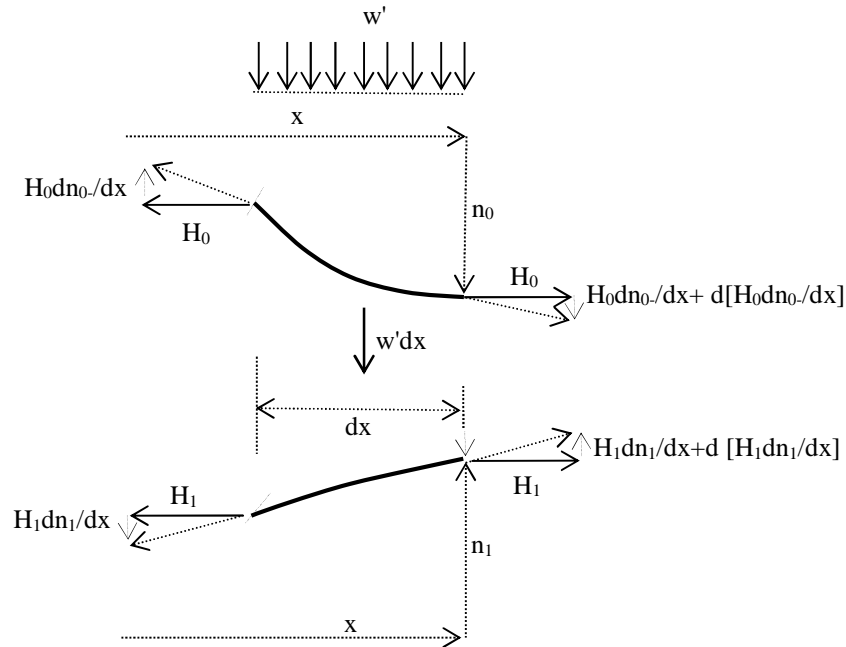


Figure 3-6 : Equilibre d'un élément lors du réglage initial de l'ouvrage

### 3-3-1-2 Sous l'action des surcharges d'intensité $p$ (fig.3-7)

La condition ( $\sum f_{yi} = 0$ ) permet d'écrire à son tour:

$$\frac{d}{dx} \left( (H_0 + h_0) \frac{d(n_0 + v)}{dx} \right) - \frac{d}{dx} \left( (H_1 - h_1) \frac{d(n_1 - v)}{dx} \right) + w' + p = 0$$

ce qui conduit à la relation suivante:

$$(H_0 + h_0) \frac{d^2(n_0 + v)}{dx^2} - (H_1 - h_1) \frac{d^2(n_1 - v)}{dx^2} + w' + p = 0$$

En développant cette dernière expression et en retranchant les conditions initiales i.e la condition (3-32), nous obtenons la relation suivante qui exprime la condition d'équilibre sous l'action des charges statiques ( $p$ ):

$$(H_0 + h_0 + H_1 - h_1) \frac{d^2 v}{dx^2} + h_0 \frac{d^2 n_0}{dx^2} + h_1 \frac{d^2 n_1}{dx^2} = -p \quad (3-33)$$

Il est aussi possible de vérifier que cette relation est bien équivalente à l'équation de la déformée (3-11) en notant que  $\mu'' = -p$  (dérivée seconde) puisque  $\mu(x) = \frac{p\ell x}{2} - \frac{px^2}{2}$ .

Notons que par rapport à la notation adoptée dans cette section, l'équation (3-11) est ici de la forme  $v = \frac{\mu - h_0 n_0 - h_1 n_1}{H_0 + H_1 + h_0 - h_1}$ .

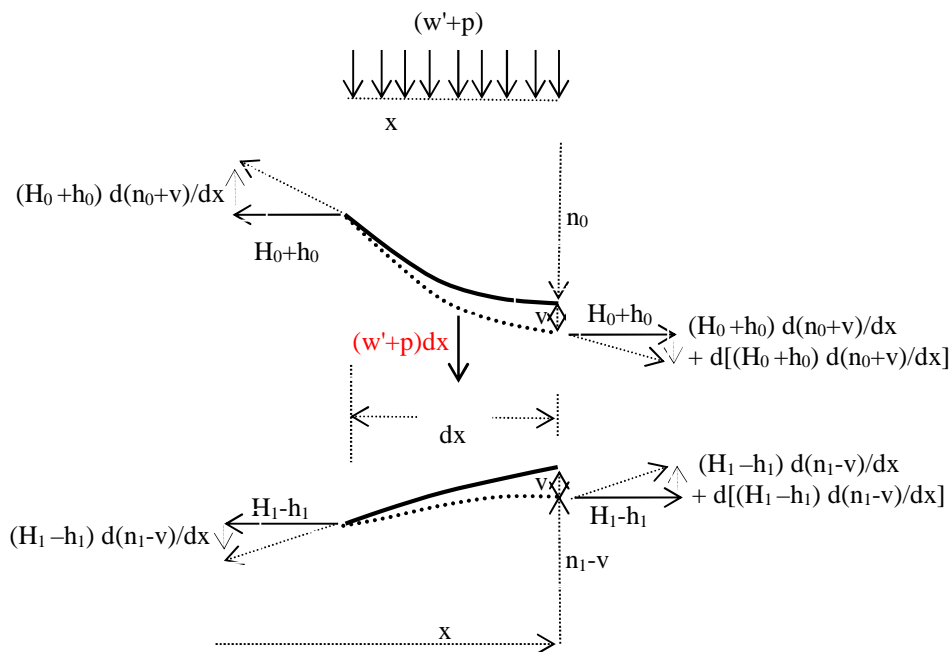


Figure 3-7 : Equilibre de l'élément en présence des surcharges (p)

### 3-3-1-3 Sous l'action d'une vibration libre ( $v^*$ )

Désignons par  $h_0^*$  et  $h_1^*$  les poussées additionnelles engendrées respectivement dans les câbles supérieur et inférieur dues à l'action du déplacement vertical ( $v_*$ ), siège dans le système d'une perturbation dynamique en régime libre. Admettons en outre, dans un système vertical précontraint comme la passerelle piétonnière montrée dans la figure 3-3, que si les charges sont par exemple descendantes, le câble supérieur principal travaille en surtension

( $h_0^* > 0$ ) et le câble inférieur de rigidité en détension ( $h_1^* < 0$ ). Alors, le bilan des forces verticales ( $\sum f_{yi} = 0$ ) ainsi indiquées sur la figure 3-8 permet d'écrire :

$$\frac{d}{dx} \left[ (H_0 + h_0 + h_0^*) \frac{d(n_0 + v + v_*)}{dx} \right] - \frac{d}{dx} \left[ (H_1 - h_1 - h_1^*) \frac{d(n_1 - v - v_*)}{dx} \right] + w' + p - m\ddot{v}_* = 0$$

où  $\ddot{v}_*$ , dérivée seconde de la fonction de déplacement  $v_*$ , étant l'accélération correspondant liée à la force d'inertie ( $m\ddot{v}_*$ ) et  $m$  est la masse de l'élément. Cette dernière équation conduit à :

$$(H_0 + h_0 + h_0^*) \frac{d^2(n_0 + v + v_*)}{dx^2} - (H_1 - h_1 - h_1^*) \frac{d^2(n_1 - v - v_*)}{dx^2} + w' + p - m\ddot{v}_* = 0$$

qui après développement de chaque terme et en tenant compte des relations (3-32) et (3-33) liées respectivement au réglage initial et aux surcharges (statiques), nous obtenons l'équation générale de mouvement recherchée qui caractérise le comportement dynamique en régime libre d'un élément d'un système vertical précontraint. Cette équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$H^* \frac{d^2 v_*}{dx^2} + h_0^* \frac{d^2 n_0}{dx^2} + h_1^* \frac{d^2 n_1}{dx^2} + (h_0^* - h_1^*) \frac{d^2 v}{dx^2} - m\ddot{v}_* = 0 \quad (3-34)$$

où  $H^* = H_0 + H_1 + h_0 - h_1 + h_0^* - h_1^*$

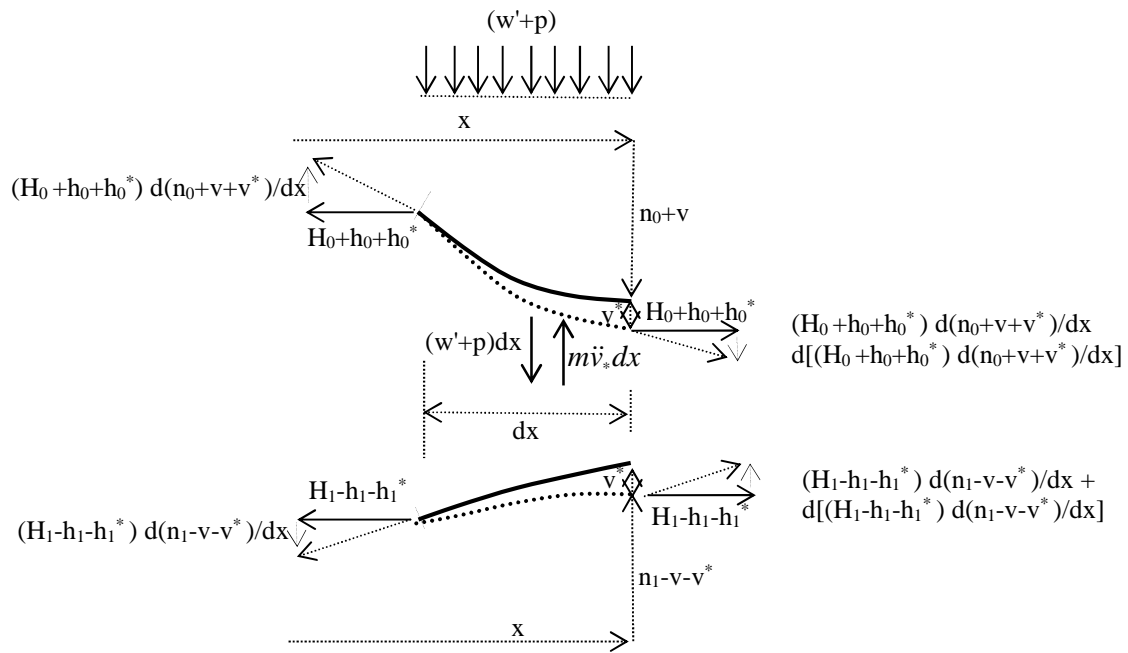


Figure 3-8 : Equation générale de mouvement en vibration libre

NB : Particulièrement, si le système vertical précontraint est géométriquement symétrique par rapport à l'axe des x (i.e situé à mi-distance entre les câbles supérieur et inférieur), et en posant :  $h_0 = h_1 = h$ ;  $h_0^* = h_1^* = h^*$  et  $n_0 = n_1 = n$ , alors l'équation de mouvement (3-34) se réduit à :

$$(H_0 + H_1) \frac{d^2 v^*}{dx^2} + 2h^* \frac{d^2 n}{dx^2} - m \ddot{v}^* = 0 \quad (3-35)$$

Cette équation est essentiellement linéaire et indépendante de l'état de déformation sous charges statiques.

### 3-3-2 Equations générales des poussées des câbles sous forme linéarisée

L'équation linéarisée des déplacements orthogonaux pour chacun des câbles, en présence de l'effet dynamique, permet d'écrire respectivement :

### 3-3-2-1 Cas du câble de rigidité

$$\frac{(h_1 - h_1^*) L_{e1}}{E_1 A_1} = \int_0^\ell \frac{dn_1}{dx} \frac{d(v - v_*)}{dx} dx \quad (3-36)$$

soit avec  $\frac{h_1 L_{e1}}{E_1 A_1} = \int_0^\ell \frac{dn_1}{dx} \frac{dv}{dx} dx$ , condition qui exprime l'état du câble sous charges statiques,

nous aurons :

$$\frac{h_1^* L_{e1}}{E_1 A_1} = \int_0^\ell \frac{dn_1}{dx} \frac{dv_*}{dx} dx \quad (3-37a)$$

où par intégration par parties :

$$\frac{h_1^* L_{e1}}{E_1 A_1} = - \int_0^\ell \frac{d^2 n_1}{dx^2} v_* dx \quad (3-37b)$$

où  $E_1$  et  $A_1$  sont respectivement le module d'élasticité et la section du câble de rigidité.

### 3-3-2-2 Cas du câble porteur

$$\frac{(h_0 + h_0^*) L_{e0}}{E_0 A_0} = \int_0^\ell \frac{dn_0}{dx} \frac{d(v + v_*)}{dx} dx \quad (3-38)$$

soit avec  $\frac{h_0 L_{e0}}{E_0 A_0} = \int_0^\ell \frac{dn_0}{dx} \frac{dv}{dx} dx$ , condition qui exprime l'état du câble sous charges statiques,

nous aurons :

$$\frac{h_0^* L_{e0}}{E_0 A_0} = \int_0^\ell \frac{dn_0}{dx} \frac{dv_*}{dx} dx \quad (3-39a)$$

ou par intégration par parties :

$$\frac{h_0^* L_{e0}}{E_0 A_0} = - \int_0^\ell \frac{d^2 n_0}{dx^2} v_* dx \quad (3-39b)$$

où  $E_0$  et  $A_0$  sont respectivement le module d'élasticité et la section du câble porteur.

Remarque: dans le cas particulièrement d'un système vertical précontraint symétrique, avec  $h_0^* = h_1^* = h^*$  ;  $h^* > 0$  ;  $n_0 = n_1 = n$  ;  $E_0 = E_1 = E$  ;  $A_0 = A_1 = S_C$  ;  $L_{e1} = L_{e0} = L_e$  (les haubans étant négligés), les relations (3-37) et (3-39) se réduisent à une seule équation :

$$\frac{h^* L_e}{E A} = \int_0^\ell \frac{dn}{dx} \frac{dv_*}{dx} dx \quad (3-40a)$$

où par intégration par parties :

$$\frac{h^* L_e}{E A} = - \int_0^\ell \frac{d^2 n}{dx^2} v_* dx \quad (3-40b)$$

### 3-3-3 Equation générale transcendante

Afin de résoudre l'équation générale de mouvement (eq.3-34), quoique complexe, nous posons  $v_*(x,t) = \tilde{v}_*(x) e^{i\omega t}$ ,  $h_0^*(t) = \tilde{h}_0 e^{i\omega t}$ ,  $h_1^*(t) = \tilde{h}_1 e^{i\omega t}$  où  $\omega$  étant la fréquence circulaire de vibration.

#### 3-3-3-1 Résolution de l'équation générale de mouvement

L'équation générale de mouvement (3-34) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \left[ (H_0 + H_1 + h_0 - h_1) + (\tilde{h}_0 - \tilde{h}_1) e^{i\omega t} \right] \frac{d^2 \tilde{v}_*}{dx^2} + \tilde{h}_0 \frac{d^2 n_0}{dx^2} + \tilde{h}_1 \frac{d^2 n_1}{dx^2} \\ + (\tilde{h}_0 - \tilde{h}_1) \frac{d^2 v}{dx^2} + m\omega^2 \tilde{v}_* = 0 \end{aligned} \quad (3-41)$$

Sachant qu'à partir des équations paraboliques des câbles :  $\frac{d^2 n_0}{dx^2} = -\frac{8f_0}{\ell^2}$  et

$\frac{d^2 n_1}{dx^2} = -\frac{8f_1}{\ell^2}$ , l'équation différentielle de mouvement s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\left[ (H_0 + H_1 + h_0 - h_1) + (\tilde{h}_0 - \tilde{h}_1) e^{i\omega t} \right] \frac{d^2 \tilde{v}_*}{dx^2} + m\omega^2 \tilde{v}_* = \frac{8}{\ell^2} (\tilde{h}_0 f_0 + \tilde{h}_1 f_1) - (\tilde{h}_0 - \tilde{h}_1) \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (3-42)$$

Par suite, l'équation (3-42) se réduit à :

$$\left[ (H_0 + H_1) + (\tilde{h}_0 - \tilde{h}_1) e^{i\omega t} \right] \frac{d^2 \tilde{v}_*}{dx^2} + m\omega^2 \tilde{v}_* = \frac{8}{\ell^2} (\tilde{h}_0 f_0 + \tilde{h}_1 f_1) \quad (3-43)$$

Les équations linéarisées des câbles (3-37b) et (3-42b) deviennent à leur tour :

$$\frac{\tilde{h}_1 L_{e1}}{E_1 A_1} = \frac{8f_1}{\ell^2} \int_0^\ell \tilde{v}_* dx \quad (3-44a)$$

$$\frac{\tilde{h}_0 L_{e0}}{E_0 A_0} = \frac{8f_0}{\ell^2} \int_0^\ell \tilde{v}_* dx \quad (3-44b)$$

Considérons deux cas possibles de vibration à savoir i) un mode antisymétrique où il faut prendre  $h_0^* = h_1^* = 0$  ii) un mode symétrique où dans ce cas  $h_0^*$  et  $h_1^*$  sont différents et non nuls.

### 3-3-3-2 Modes de vibration antisymétriques

Vu qu'au premier ordre, les poussées additionnelles  $h_0^*$  et  $h_1^*$  engendrées dans les câbles par l'action de la vibration dynamique sont par hypothèse nulles, alors l'équation de mouvement (3-43) devient:

$$(H_0 + H_1 + h_0 - h_1) \frac{d^2 \tilde{v}_*}{dx^2} + m\omega^2 \tilde{v}_* = 0 \quad (3-45)$$

Les conditions aux limites à satisfaire pour chaque mode antisymétrique sont

$\tilde{v}(x=0) = \tilde{v}(x = \frac{\ell}{2}) = 0$ . Les fréquences naturelles des modes de vibration sont données

par :

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{\ell} \sqrt{\frac{(H_0 + H_1)}{m}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3-46)$$

Les valeurs  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$  représentent respectivement les fréquences naturelles de la première, deuxième, troisième, etc. des modes antisymétriques plans. Pour les modes antisymétriques, l'analogie étant évidente avec le cas d'un câble parabolique seul ou d'un système à treillis convexe :

$$\tilde{v}_*(x) = A_n \sin \frac{2n\pi}{\ell} x \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3-47)$$

### 3-3-3-2 Modes de vibration symétriques

Quand le système à treillis oscille dans un mode vertical symétrique, des raccourcissements et des allongements se produisent dans les câbles qui donnent lieu à des valeurs de poussées  $h_0^*$  et  $h_1^*$  différentes. Dans ce cas, il faut songer à résoudre complètement, toutefois complexe, l'équation non homogène (3-43) qui est clairement dépendante de l'état de déformation sous le chargement statique. La complexité vient du fait non seulement de la présence du second membre mais également de la racine complexe.

Afin de simplifier sa résolution, nous suggérons que la surcharge (p) soit appliquée simultanément avec le poids propre de la structure ou en d'autres termes nous postulons que l'effet de la surcharge soit pris en considération par exemple lors du réglage initial. De ce fait, les poussées  $h_0$  et  $h_1$  sont incluses dans les valeurs de  $H_0$  et de  $H_1$  respectivement ; ce qui est de même pour la déformée (v) qui par hypothèse incluse dans les configurations initiales des câbles à savoir  $n_0$  et  $n_1$ . Par suite, l'équation (3-43) se réduit à :

$$\left[ (H_0 + H_1) + (\tilde{h}_0 - \tilde{h}_1) e^{i\omega t} \right] \frac{d^2 \tilde{v}_*}{dx^2} + m\omega^2 \tilde{v}_* = \frac{8}{\ell^2} (\tilde{h}_0 f_0 + \tilde{h}_1 f_1) \quad (3-48)$$

On peut facilement vérifier que l'expression suivante est bien la solution du problème puisque elle satisfait conjointement les conditions aux limites  $\tilde{v}_*(0) = \tilde{v}_*(\ell) = 0$  et l'équation différentielle de mouvement (3-48) :

$$\tilde{v}_*(x) = \frac{\delta}{(\beta\ell)^2} \frac{(\tilde{h}_0 f_0 + \tilde{h}_1 f_1)}{(H_0 + H_1) + (\tilde{h}_0 - \tilde{h}_1) e^{i\omega t}} \left[ 1 - \tan\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) \sin \beta x - \cos \beta x \right] \quad (3-49)$$

avec:

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{m}{(H_0 + H_1) + (\tilde{h}_0 - \tilde{h}_1) e^{i\omega t}}} \quad (3-50)$$

Par ailleurs, d'après l'équation (3-44b), nous avons pour le câble supérieur:

$$\tilde{h}_0 = \frac{8E_0 EA_0 f_0}{L_{e0} \ell^2} \int_0^\ell \tilde{v}_* dx \quad (3-51)$$

D'autre part, le développement du terme  $\int_0^\ell \tilde{v}_*(x) dx$  nous permet d'écrire :

$$\int_0^\ell \tilde{v}_*(x) dx = \frac{\delta}{(\beta\ell)^2} \frac{\ell(\tilde{h}_0 f_0 + \tilde{h}_1 f_1)}{(H_0 + H_1) + (\tilde{h}_0 - \tilde{h}_1) e^{i\omega t}} \left[ 1 - \frac{2}{\beta\ell} \tan\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) \right] \quad (3-52)$$

Exprimons maintenant la relation entre les tensions additionnelles  $\tilde{h}_0$  et  $\tilde{h}_1$  en considérant l'égalité entre les relations linéarisées des câbles (3-44) en éliminant le terme

$\int_0^\ell \tilde{v}_*(x) dx$ ; cela nous conduit à:

$$\tilde{h}_1 = \tilde{h}_0 \frac{L_{e0} E_1 A_1 f_1}{L_{e1} E_0 A_0 f_0} = C_1 \tilde{h}_0 \quad (3-53)$$

où  $C_1 = \frac{L_{e0} E_1 A_1 f_1}{L_{e1} E_0 A_0 f_0}$  est une constante qui dépend des caractéristiques géométriques et mécaniques des câbles.

Substituons maintenant dans la relation (3-52), l'expression (3-52) en tenant compte de la relation (3-53) où après élimination de la variable  $\tilde{h}_0$ , nous pouvons obtenir l'équation transcendante recherchée, caractéristique des modes de vibration symétriques, que nous écrivons comme précédemment sous la forme :

$$\tan\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) = \frac{\beta\ell}{2} - \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\beta\ell}{2}\right)^3 \quad (3-54)$$

où

$$\lambda^2 = \frac{64(f_0^2 + C_1 f_0 f_1)}{\left[ H_0 + H_1 + \tilde{h}_0 e^{i\omega t} - \tilde{h}_0 C_1 e^{i\omega t} \right] \frac{L_{e0} \ell}{E_0 S_{c0}}} \quad (3-56)$$

Notons que le terme qui contient la racine complexe n'est ici d'aucune signification physique puisque les solutions recherchées (qui sont les pulsations ou les fréquences propres) sont indépendantes du temps. Par suite, la relation (3-56) se réduit à :

$$\lambda^2 = \frac{64(f_0^2 + C_1 f_0 f_1)}{\left[ H_0 + H_1 \right] \frac{L_{e0} \ell}{E_0 S_{c0}}} \quad (3-57)$$

Par suite, l'équation transcendante (3-54) devient linéaire et peut être résolue numériquement (en appliquant l'algorithme de Newton Raphson de la figure 3-5) afin de trouver la valeur de  $\beta$  et ensuite déduire la pulsation propre ( $\omega$ ) correspondante via la relation (3-51) en omettant le terme contenant la racine complexe ; soit :

$$\omega = \beta \sqrt{\frac{H_0 + H_1}{m}} \quad (3-58)$$

Ayant déterminée ainsi les pulsations ou les fréquences propres, il est possible alors de déduire les poussées correspondantes dans les câbles ( $\tilde{h}_0, \tilde{h}_1$ ) en considérant les relations (3-52), (3-53) et (3-54).

## CHAPITRE 4

### EXPERIMENTATION NUMERIQUE ET VALIDATION DES RESULTATS

#### 4-1 Généralités

Afin de jauger la fiabilité et la précision de la méthode de calcul établie, nous proposons d'analyser un exemple d'une structure suspendue dont les résultats nous serviront principalement d'étalon de référence théorique. L'exemple porte sur une passerelle piétonnière rigidifiée par câble cambré dont les vues en élévation et en profil sont montrées respectivement sur les figures 4-1 et 4-2. La géométrie et les propriétés mécaniques des différents éléments utilisés de la structure sont empruntées de la passerelle réalisée actuellement à Charny, surplombant la rivière chaudière, dans le parc d'attraction des chutes-de-la chaudière situé dans la municipalité de Lévy près de la ville de Québec. Il s'agit de calculer les cinq premières pulsations ( $\omega_n$ ) et fréquences ( $f_n$ ) propres de vibration de la passerelle en modes symétrique et antisymétrique et de comparer ensuite les résultats ainsi obtenus avec ceux affichés par le code ANSYS [20].

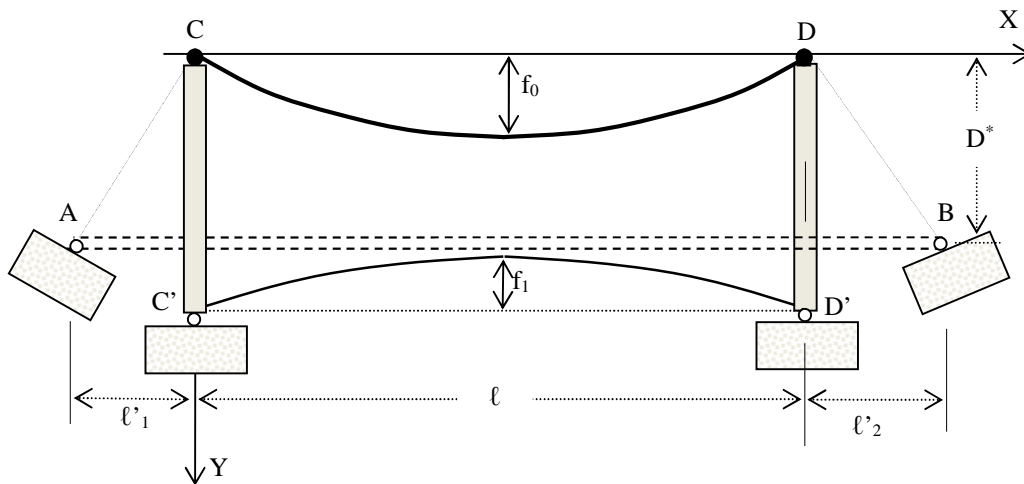


Figure 4-1 : Vue en élévation de la structure

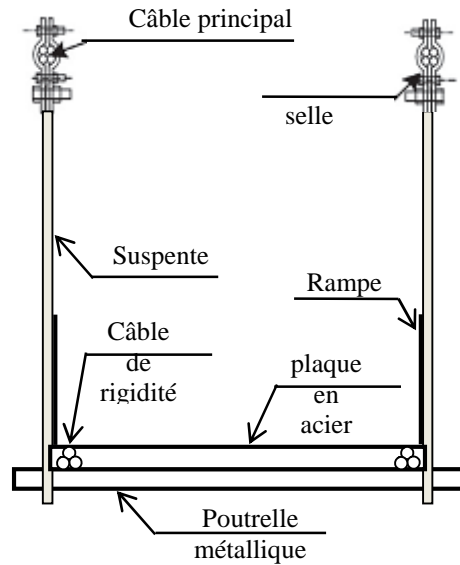


Figure 4-2: Vue en profil de la structure suspendue

#### 4-2 Description de la structure

Les dispositions générales adoptées pour assurer le support de ces surcharges sont décrites ci-après. Elles ont été choisies de façon à correspondre à un système représentatif d'une structure légère de ce type (dimensions générales, sections des éléments utilisés).

- Travée : la travée unique franchie est de  $\ell=80\text{m}$  centre à centre des pylônes ; chaque hauban de rive s'étend sur  $\ell'=18\text{m}$  en projection horizontale.
- Câbles porteurs : chacune des deux nappes de suspentes est portée par un câble toronné de 50 mm, ( $A_0=0.196 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ ), en fils d'acier étiré à haute résistance. Chaque câble est réglé sur une forme parabolique dans un plan vertical, passe aux sommets des pylônes auxquels il aboutit, et est finalement prolongé sur les rives comme hauban dont la section transversale est identique à celle des câbles porteurs ( $A'_0=0.196 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ ).
- Suspension : chaque nappe des suspentes verticales est constituée par des ronds de 10 mm, ( $A=0.079 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ ), écartés de 2m d'axe en axe ; la tension moyenne initiale dans une suspente vaut  $T_s=\omega_s \times 2\text{m}=4.80\text{kN}$ .
- Tablier : le tablier est supposé composé de poutrelles métalliques simples reposant sur les platines des suspentes, entretoisées par des pièces légères.
- Câbles de rigidité : d'un diamètre de 40 mm, ( $A_1=0.126 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ ), ils sont au nombre de deux et disposés de chaque côté de l'ouvrage, à l'aplomb de la suspension à laquelle ils sont liés.

Les extrémités de chacun d'eux sont ancrées aux pieds des pylônes, dans les massifs de fondation de ces derniers, à une distance verticale  $D^*=12.6\text{m}$  du sommet des pylônes ( $D^*=f_0 + f_1 + \text{cte}$ ). La traction de précontrainte  $H_1$  s'élève à  $600\text{kN}$ , compte tenu de la géométrie retenue et du poids propre de l'ouvrage ainsi sommairement décrit, qui s'élève à environ  $1000\text{N}$  par mètre horizontal. Chaque câble parabolique supportera alors  $500\text{N/m}$  avant l'introduction de toute surcharge. Sous l'effet de cette charge permanente et au réglage initial, le câble porteur réalise une flèche  $f_0$  de  $6.4\text{m}$ , le câble de rigidité une contreflèche  $f_1$  de  $3.2\text{m}$ . Toutefois, à cause de la faible charge due à leur poids propre, les haubans présentent une flèche minimale et sont supposés quasi rectilignes ( $f_1'=0$ ) et seront négligés dans le cadre de ce travail..

Tableau 4-1 : Données géométriques et mécaniques du système type étudié

$\ell$ (m)	$\ell_1'$ (m)	$A_0, A_0'$ ( $\text{m}^2$ )	$A_1$ ( $\text{m}^2$ )	$A$ ( $\text{m}^2$ )	$f_1$ (m)	$f_0$ (m)	$f_1'$ (m)	$D^*$ (m)
80	18	0.196E-2	0.126E-2	0.79E-3	3.2	6.4	0	12.6

$E$ ( $\text{kN/m}^2$ )	$\omega'$ ( $\text{kN/m}$ )	$T_s$ ( $\text{kN}$ )	$H_1$ ( $\text{kN}$ )	$H_0$ ( $\text{kN}$ )
$150 \times 10^6$	0.5	4.80	600	362.5

### 4-3 Résultats et analyses

La première pulsation du mode de vibration antisymétrique est définie par la relation (3-46) où avec  $n=1$ , nous aurons:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{\ell} \sqrt{\frac{(H_0 + H_1)}{m}} = \frac{2\pi}{80} \sqrt{\frac{(362.5 + 600)}{\frac{0.5}{9.81}}} = 10.8 \text{ rad/s} \quad \text{soit} \quad f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 1.7 \text{ Hz.}$$

simulation à l'aide du code ANSYS, celui-ci affiche pour la fréquence, une valeur égale à 1.67 soit une erreur relative qui n'excède guère 1%. Pour les autres valeurs i.e pour  $n=2$ ,  $n=3$ ,  $n=4$  et  $n=5$ , nous obtenons respectivement:

$$\omega_2 = \frac{4\pi}{80} \sqrt{\frac{(362.5 + 600)}{\frac{0.5}{9.81}}} = 21.6 \text{ rad/s} \text{ soit } f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 3.44 \text{ Hz et ANSYS affiche } f_2 = 3.37 ;$$

$$\omega_3 = \frac{6\pi}{80} \sqrt{\frac{(362.5 + 600)}{\frac{0.5}{9.81}}} = 32.4 \text{ rad/s} \text{ soit } f_3 = \frac{\omega_3}{2\pi} = 5.15 \text{ Hz et ANSYS affiche } f_3 = 5.04.$$

$$\omega_4 = \frac{8\pi}{80} \sqrt{\frac{(362.5 + 600)}{\frac{0.5}{9.81}}} = 43.2 \text{ rad/s} \text{ soit } f_4 = \frac{\omega_4}{2\pi} = 6.88 \text{ Hz et ANSYS affiche } f_3 = 6.67.$$

$$\omega_5 = \frac{10\pi}{80} \sqrt{\frac{(362.5 + 600)}{\frac{0.5}{9.81}}} = 54.0 \text{ rad/s} \text{ soit } f_4 = \frac{\omega_4}{2\pi} = 8.59 \text{ Hz et ANSYS affiche } f_3 = 8.25.$$

Quant au mode de vibration symétrique, il faut d'abord résoudre numériquement, via la relation (3-57), l'équation transcendante (3-54) pour trouver la solution  $(\frac{\beta\ell}{2})_n$  et ensuite utiliser la relation (3-58) pour calculer la pulsation ( $\omega_n$ ) ou la fréquence ( $f_n = \omega_n/2\pi$ ).

Afin de résoudre l'équation transcendante (3-54), il est nécessaire d'adapter l'algorithme de Newton-Raphson à double itération exposé dans la figure 3-5 pour trouver la solution d'une seule équation de la forme  $F_x(x)=0$ . Ainsi, en posant  $x = \frac{\beta\ell}{2}$ , l'équation (3-54) s'écrit:

$$F_x(x) = \tan(x) - x + 4x^3/\lambda^2 = 0$$

Cependant, à cause de la multitude (ou infinie) de solutions que peut prendre cette équation et également de la solution initiale dont dépendent chacune des solutions, il est nécessaire de procéder d'abord à un balayage dans un certain intervalle de la solution initiale préalablement choisie. Les résultats ainsi trouvés les cinq premières solutions et en les comparant avec ceux obtenus par le code ANSYS, sont récapitulés dans le tableau 4-2 où  $\lambda^2$  étant égal à 138.87.

Tableau 4-2 : Les cinq premières fréquences du mode symétrique

Solution initiale ( $X_0$ )	Solution (X)	$\beta$ [rad/s]	$\omega$ [rad/s]	f [1/s ou Hz]	f [1/s ou Hz] (ANSYS)
4	4.27	0.106	14.57	2.32	2.34
5	6.08	0.152	20.889	3.32	3.25
10	8.01	0.200	27.48	4.38	4.28
11	11.03	0.276	37.89	6.03	5.88
14	14.15	0.354	48.61	7.74	7.47

L'ensemble des 10 premières fréquences ainsi obtenues pour les deux modes de vibration (antisymétrique et symétrique) comparées avec celles issues du code ANSYS, sont récapitulées par ordre croissant dans le tableau 4-3 ; les déformées modales correspondantes, étant illustrées dans les figures 4-3 à 4-12. Nous remarquons une concordance assez satisfaisante qui laisse entrevoir la véracité des hypothèses admises.

Tableau 4-3 : Récapitulation des dix premières fréquences de vibration obtenues comparées avec celles issues du code ANSYS

Mode	antisymétrique	Symétrique	ANSYS
1	1.72	-	1.67
2	-	2.32	2.34
3	-	3.32	3.25
4	3.44	-	3.37
5	-	4.38	4.28
6	5.15	-	5.04
7	-	6.03	5.88
8	6.87	-	6.67
9	-	7.74	7.47
10	8.59	-	8.25

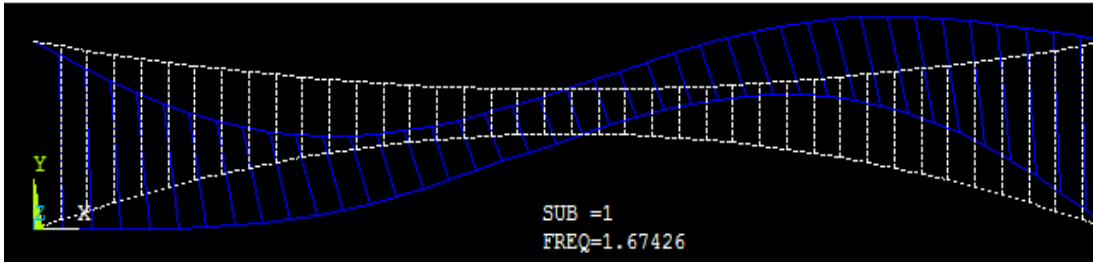


Figure 4-3 : Forme du mode 1 (antisymétrique)

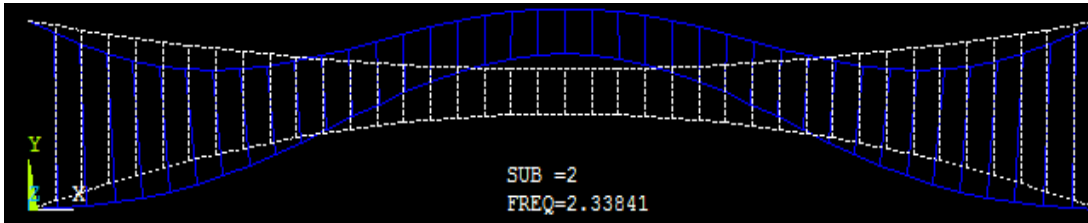


Figure 4-4 : Forme du mode 2 (symétrique)



Figure 4-5: Forme du mode 3 (symétrique)

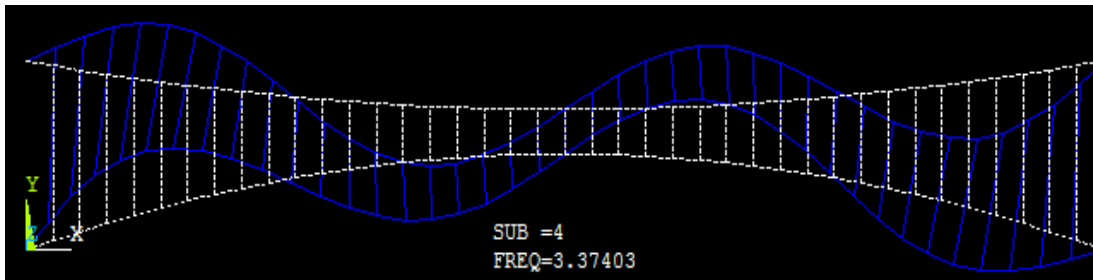


Figure 4-6: Forme du mode 4 (antisymétrique)

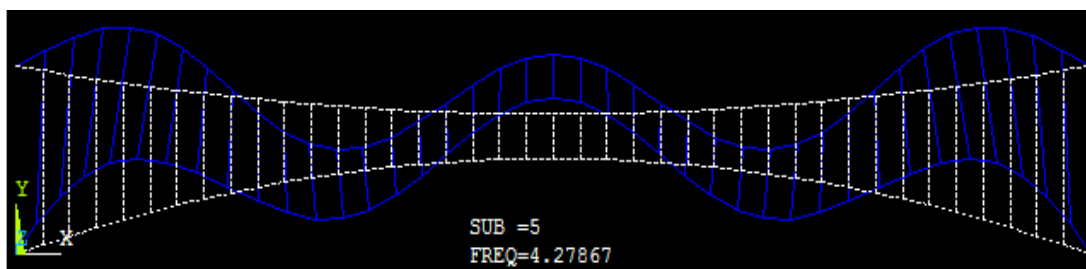


Figure 4-7: Forme du mode 5 (symétrique)

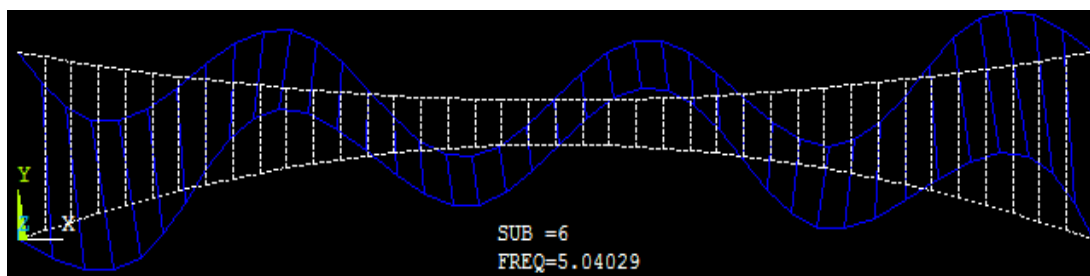


Figure 4-8: Forme du mode 6 (antisymétrique)

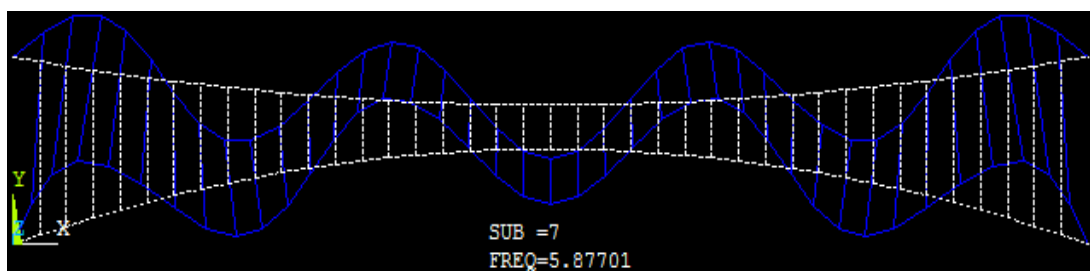


Figure 4-9: Forme du mode 7 (symétrique)

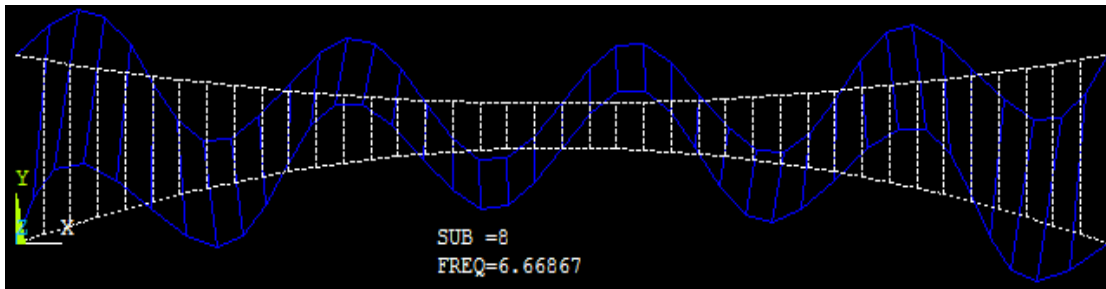


Figure 4-10: Forme du mode 8 (antisymétrique)

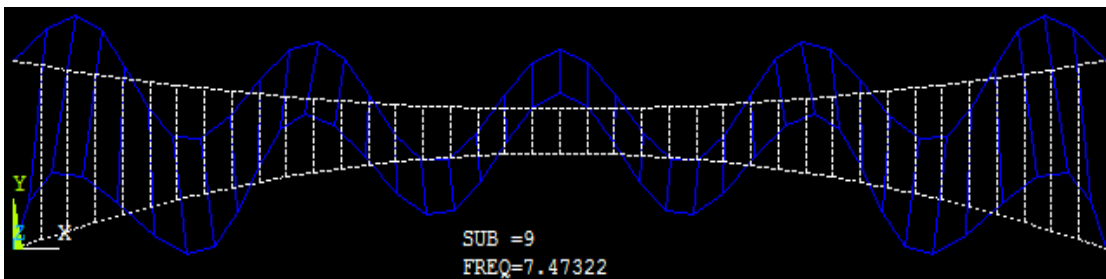


Figure 4-11: Forme du mode 9 (symétrique)

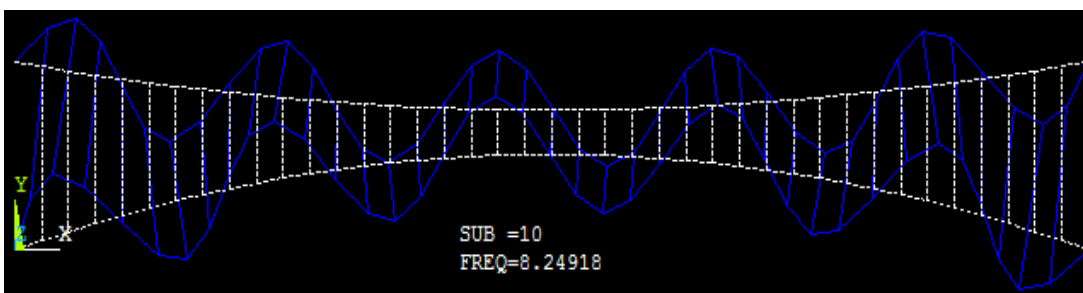


Figure 4-12: Forme du mode 10 (antisymétrique)

## CHAPITRE 5

### CONCLUSIONS GENERALES

#### **5-1 Rétrospective**

Le but principal de ce travail consistait de développer une méthode de calcul analytique soit par modèle continu, simple mais suffisamment précise et fiable, permettant d'aborder le calcul dynamique d'un ouvrage suspendu léger et sans poutre de rigidité qui se compose principalement d'une nappe de suspentes verticales réunissant un câble porteur et un câble de rigidité fixés en leurs extrémités à des massifs d'ancrage. Un tel système peut supporter éventuellement un tablier léger supposé dépourvu d'aucune rigidité propre appréciable pouvant dans le cas pratique être l'exemple d'une passerelle piétonnière très flexible dont l'implantation sera très intéressante dans des sites d'attraction.

Les fondements mathématiques ont été présentés d'une manière succincte en exploitant fondamentalement l'approche qui assimile le comportement de la nappe des suspentes à celui d'un voile continu et inextensible. Sous charges statiques d'une part, un rappel de la méthode de calcul a été d'abord effectué permettant de calculer les poussées développées dans les câbles. Ensuite, la théorie linéarisée des vibrations libres a été adoptée en vue de déterminer les pulsations et les fréquences propres de vibration. Sous l'effet dynamique d'autre part, la théorie linéaire en régime vibratoire libre a été adoptée. L'équation d'équilibre de mouvement vertical d'un élément différentiel dans la direction longitudinale de la structure ainsi que les équations des poussées résultantes engendrées dans les câbles sont linéarisées en négligeant les effets de second ordre liés aux grands déplacements. Cependant, seul le mouvement transversal vertical est considéré vu que la célérité des ondes de vibration longitudinales est généralement beaucoup moins importante que les ondes de vibration transversales. La résolution des équations qui en résultent conduit à une équation type transcendante donnant lieu à des modes propres antisymétriques et à des modes propres symétriques qui caractérisent le comportement dynamique en régime vibratoire libre du système. Les fréquences propres

de vibration et les déformées modales sont alors obtenues comme dans le cas d'un câble parabolique simple.

Les autres hypothèses admises qui délimitent les conditions de validité de la méthode de calcul sont principalement les suivantes:

- câble parfaitement flexible qui revient à énoncer en langage structural que, tout au long d'un câble en équilibre, le moment fléchissant est nul;
- inextensibilité des suspentes permettant d'assimiler le comportement de la nappe des suspentes à celui d'un voile continu et inextensible;
- câbles relativement peu profonds correspondant à un rapport flèche/travée ne dépassant pas l'ordre de 1/10 afin d'assimiler les chaînettes fortement aplaties, dans l'état initial, à des paraboles de 2<sup>ème</sup> degrés;
- Lors du réglage initial, le câble porteur reprend la totalité des charges uniformément réparties dues au poids propre de l'ouvrage y compris le poids de l'ensemble des câbles et des suspentes, et auquel il faut ajouter les effets engendrés par la pré-tension du câble de rigidité.
- Surtensions négligeables dans le cas des modes propres antisymétriques.

La méthode est ensuite appliquée principalement à différents aspects de l'analyse dynamique d'une passerelle piétonnière rigidifiée par câbles précontraints soumise à l'action d'une petite perturbation vibratoire quelconque. Les pulsations et les fréquences propres sont évaluées selon que le système est en mode de vibration antisymétrique ou symétrique. Les résultats sont confrontés avec succès à ceux issus du code ANSYS, qui est un code essentiellement numérique basé sur la méthode des éléments finis dont le principe consiste de traiter la structure comme telle soit par modèle discret.

## 5-2 Organisation du travail

Le travail présenté dans cette thèse a été organisé en 5 chapitres dont le premier en guise d'introduction a été consacré essentiellement à la nature de la problématique et à la question des structures suspendues ainsi qu'à la description des objectifs fixés.

Le chapitre deux analyse les conditions des vibrations des câbles dans le but de mettre en relief la vulnérabilité du phénomène vibratoire qui en résulte pouvant, s'il n'est pas maîtrisé, endommager par fatigue les câbles et ainsi mettre en péril la stabilité de l'ouvrage. Les conséquences du choix des matériaux constitutifs de base a été tout d'abord rapporté et commenté. Suivi ensuite de la revue des paramètres aérodynamiques des câbles où sont présentés d'une manière succincte les phénomènes physiques susceptibles de donner lieu à des vibrations.

Le chapitre suivant est consacré à la présentation des développements théoriques de la méthode de calcul d'un système vertical précontraint sans poutre de rigidité en utilisant l'approche fondamentale qui assimile le comportement de la nappe des suspentes à celui d'un voile continu et inextensible. Sous charges statiques, les équations à caractère non linéaire décrivant les tractées dans les câbles sont établies de façon à être résolues par la méthode de Newton-Raphson à double itération. Sous l'action dynamique, la théorie linéaire en régime vibratoire libre a été adoptée afin de dériver l'équation d'équilibre de mouvement vertical d'un élément différentiel et les équations des poussées résultantes engendrées dans les câbles en négligeant les effets de second ordre liés aux grands déplacements. Cependant, seul le mouvement transversal vertical a été considéré à cause de la vitesse des ondes de vibration longitudinales qui est généralement beaucoup moins importante que les ondes de vibration transversales verticales. Dans le cas particulier d'un système à treillis de câbles symétriques, la résolution des équations qui en résultent conduit à une équation transcendante donnant lieu à des modes propres antisymétriques et à des modes propres symétriques. Les fréquences propres de vibration et les déformées modales seront obtenues par analogie au cas d'un câble parabolique simple.

L'avant dernier chapitre a été consacré à l'implémentation numérique et à l'analyse des portant sur l'analyse d'une passerelle suspendue soumise à l'action de vibration libre où les résultats sont comparés à ceux issus du code ANSYS.

### **5-3 Résultats obtenus**

La méthode analytique de calcul ainsi établie, nous permet de procéder aisément à l'analyse du comportement dynamique d'un ouvrage suspendu léger sans poutre de rigidité en adoptant la théorie linéarisée des vibrations libres. Son fondement théorique est simple. Appliquée à une passerelle piétonnière rigidifiée par câble cambré, la méthode semble fiable et efficace.

La comparaison des résultats obtenus révèle une excellente précision que l'on peut obtenir avec la modélisation numérique basée sur le principe de discrétisation par éléments finis où l'erreur n'excède guère en moyenne 3%.

### **5-4 Recommandations futures**

Ce qu'on pourrait enfin suggérer comme études futures pour l'amélioration de ce thème de travail sont les suivantes :

- Etendre la théorie des vibrations libres en tenant compte de la présence de charges périodiques, telles que par exemple des charges dues aux piétons ou sous l'effet du vent en exploitant la voie de la théorie basée sur les principes énergétiques.
- Poursuivre et raffiner la méthode de calcul des fréquences propres de vibration en procédant à des tests numériques élaborés.

## Références

- [1] Juozpaitis A. and al., 2010. Non linear analysis of suspension bridges with flexible and rigid cables, *Journal of Civil Eng. and Mang.*, 16:1, pp.149-151.
- [2] Desai Y.M. and al., 1989. Geometric nonlinear static analysis of cable supported structures, *Computers & Structures*, V. 29, N° 6, pp. 1001, 1009.
- [3] Goremikins V. and al., 2013. Simplified method of determination of natural-vibration frequencies of prestressed suspension bridges, *Procedia Engineering*, 57, pp. 343-352.
- [4] Grogorjeva T., Juozpaitis A. and Kamaitis Z., Static analysis and simplified design of suspension bridges having various rigidity of cables, 2010, *Journal of Civil Eng. And Mang.*, 16:3, pp. 363-371.
- [5] Latteur P., 2014. Calculer une structure – de la théorie à l'exemple, Chapitre 13\_Les câbles, ed. academia-Bruylant, [www.issd.be](http://www.issd.be).
- [6] Chen Z. and al., A simplified structural mechanics model for cable truss footbridges and its implications for preliminary design, 2014, *Engineering Structures*, 68, pp. 121-133.
- [7] Grigorjeva T. and Juozpaitis A., Revised engineering method for analysis of behavior of suspension bridge with rigid cables and some aspects of numerical modeling, 2013, *Procedia Engineering*, 57, pp. 364-371.
- [8] Shrefler B.A. and Odorizzi S., 1983. A total lagrangian geometrically non-linear analysis of combined beam and cable structures, *Computers & Structures*, V. 17, N° 1, pp. 115, 127.
- [9] SETRA, novembre 2001. Haubans, Recommandations de la commission interministérielle de la précontrainte, [www.setra.equipement.gouv.fr](http://www.setra.equipement.gouv.fr).
- [10] Virlogeux M, 1998. Cable vibration in cable stayed bridges, *Bridge aerodynamics*, Larsen Esdahl editors, Rotterdam.
- [11] Virlogeux M, Lacoste G., Fontaine J.F., Le faucheur D., Mai 1986. Réflexions sur la résistance à la fatigue des haubans : détermination des conditions de l'essai de réception des haubans et des ancrages du pont de Seyssel.
- [12] Courbon, J., 1950. Application de la résistance des matériaux au calcul des ponts, Dunod, Paris.
- [13] Irvine, M., 1994. Studies in the statics and dynamics of simple cable systems, PhD Thesis, Dynamics laboratory, California institute of technology, DYNL-108.
- [14] Routh E.J., 1891. Analytical statistics, Cambridge, Vol. 1, Chapter X.
- [15] Pugsley, A.G., 1957. The theory of suspension bridges, Edward Arnold, London, Chapters I,II,III.
- [16] Whittaker E.T.,1944. Analytical dynamics, Fourth edition, Dover, pp. 34, 177.

- [17] Sadaoui A., Lattari K. and Khennane A. , 2016. A novel analytical method for the analysis of cable-truss footbridges, *Engineering Structures*, 123, Pages 97-107. <http://dx.doi.org/10.201j.struct.2016.05.025>.
- [18] Shrefler B.A. and Odorizzi S., 1983. A total lagrangian geometrically non-linear analysis of combined beam and cable structures, *Computers & Structures*, V. 17, N° 1, pp. 115-127.
- [19] Grigorjeva T. and Juozpaitis A., 2013. Revised engineering method for analysis of behavior of suspension bridge with rigid cables and some aspects of numerical modeling, *Procedia Engineering*, 57, pp. 364-371.
- [20] ANSYS® Academic Research, Release 15.0 <http://www.ansys.com/>.