



UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMÉRI DE TIZI-OUZOU
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE



LABORATOIRE DE PHYSIQUE ET CHIMIE QUANTIQUE

MÉMOIRE DE MASTER

FILIÈRE: Physique

SPÉCIALITÉ: Physique de l'interaction rayonnement matière

Présenté par:

BERROUANE Massyl

Étude des modes Laguerre-Gauss d'un résonateur optique

Soutenu le 10/07/2017, devant le jury composé de:

MOKDAD	Rabah	Professeur	Président
DEGHICHE	Djamel	Maître de Conférences	Examinateur
BOUKELLAL	Ali	Professeur	Encadreur

Résumé

Ce travail porte sur l'étude des modes Laguerre Gauss d'un résonateur optique. Pour cela nous aborderons l'aspect physique qui traitera les principales propriétés d'un faisceau laser en tant que faisceau gaussien de manière tout à fait descriptive, et nous reprendrons par la suite la théorie mathématique qui régleme sa propagation sachant que le mode gaussien fondamental constitue la solution des équations de Maxwell, et on verra à la même occasion les modes d'ordres supérieurs, d'où par la suite on verra l'intérêt et l'importance de la description et la théorie mathématique établie relative aux faisceaux gaussiens pour la description d'un champ électromagnétique dans une cavité.

On passera par la suite à l'aspect programmation qui portera sur l'étude des profils spatiaux d'intensité suivant le plan transverse des modes Laguerre-Gauss, où on verra le confinement des modes et les pertes d'énergie ou vis versa dans une cavité, d'où va s'avérer l'importance de jouer sur la configuration et les caractéristiques géométriques de la cavité pour maximiser le gain en modes et en énergie, pour cela deux logiciels seront utilisés Mathematica et Matlab.

Abstract

This work deals with the study of Laguerre Gauss modes of an optical resonator. To do this, we will discuss the physical aspect that will treat the main properties of a laser beam as a Gaussian beam in a descriptive way, and we will resume the mathematical theory that regulates its propagation knowing that the fundamental gaussian mode constitutes The solution of Maxwell's equations, and we will see at the same time the higher order of gaussian beam, from which we will see after then, the interest and importance of the description and mathematical theory established relative to the Gaussian beam that will introduce us in Description of an electromagnetic field in a cavity.

We will go on to the programming aspect, which study the spatial profiles of intensity along the transverse plane of Laguerre-Gauss modes, where we will see the confinement of modes and the loss of energies or in a cavity, from where will prove the importance of playing on the configuration and the geometric characteristics of the cavity to maximize the gains in modes and energies, for that two software will be used Mathematica and Matlab.

Remerciements

Je remercie vivement Mr Ali BOUKELLAL, sans qui ce mémoire n'aurait pas pu être réalisé. Merci pour votre soutien, votre confiance et votre bonne humeur qui m'ont été d'une grande utilité dans la réalisation de ce mémoire.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude au professeur Hamid BOUZAR directeur du laboratoire de physique et chimie quantique (LPCQ) pour m'avoir accueilli et de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions.

Je remercie très chaleureusement le Pr Rabah MOKDAD, d'avoir accepté de présider le jury de soutenance, ainsi que Dr Djamel DEGHCHE, qui m'a fait l'honneur de juger mon travail, en faisant partie du jury de ce mémoire.

Je tiens à remercier tous mes professeurs depuis la première année universitaire qui ont contribué à ma formation et m'ont fait découvrir un domaine qui m'a toujours fasciné.

Mes plus grands remerciements vont naturellement aussi à mes parents, ma sœur et son mari, ainsi que mes amis, qui m'ont toujours soutenu et encouragé en toutes circonstances.

Je remercie de même toutes les personnes ayant participé, de près ou de loin, à la réalisation de ce mémoire et m'ayant soutenu tout au long de cette dernière année.

Merci à tous.

Sommaire

Introduction générale

Chapitre I : Equations paraxiales

1-Des équations de maxwell à l'équation paraxiale :	1
2-Mode fondamental gaussien (état fondamental) :	3
3-Faisceaux gaussiens d'ordre supérieur :	6
3-1.Modes Hermite-Gauss:	6
3-2.Modes Laguerre-Gauss :	7

Chapitre II : propriétés sur les lasers

1-Faisceau Gaussien et principales propriétés :	8
2. Description du fonctionnement d'un laser et cavités :	11
2-1.Description du fonctionnement d'un laser :	11
2-2.Cavité :	12
3-Conclusion :	12

Chapitre III : Cavités résonnantes

1-Les différents types de résonateur :	13
2-Condition de stabilité de la cavité :	14
3-Modes propres de la cavité :	14
3.1-De la condition de résonance aux modes de fréquences de résonances $vmnq$: ..	15
3.2-Les modes longitudinaux et les modes transversaux :	17

Chapitre IV : Travaux réalisés et résultats

IV-1.Détermination des profils des intensités de différents modes Laguerre gaussse à l'aide de mathematica :	19
1-1.Objectif :	21
1-2.Principes de la méthode :	21
1-3.Discussion des résultats :	21

IV-2. Etudes des caractéristiques en plan transverse suivant les axes x et y d'un faisceau gaussien en terme de proportions de gains :	22
2-1. <i>Introductions</i> :	22
2-2. <i>Objectif</i> :	25
2-3. <i>Principe de la méthode</i> :	25
2-4. Discussion des résultats :	27
IV-3. Conclusion :	27
IV-4. Détermination des profils des intensités de différents modes Laguerre-Gauss à l'aide de matlab :	28
4-1. Introduction et objectif :	28
4-2. Profil des intensités sous matlab :	28
4-3. Discussion et conclusion :	30
IV-5. Différences et complémentarités entre le matlab et le mathematica dans le cadre de la thématique étudiée:	30
5-1. Distinction:	30
5-2. Sous mathematica :	30
5-3. Sous matlab:	30
5-4. Complémentarité entre les deux :	31

Conclusion générale

Introduction générale

Le laser est une source de lumière qui se génère artificiellement et qui se décrit mathématiquement grâce au faisceau gaussien, l'émission stimulée décrit et définie par Einstein étant un point clé qui a permis la mise œuvre d'une base solide pour la compréhension d'une émission lumineuse particulière possédant les propriétés de cohérence temporelle et spatiale, ou en d'autres termes munie d'une même phase et une excellente directivité et continue (photons jumeaux).

Donc en premier lieu on évoquera le raisonnement mathématique adopté constituant toute la théorie pour décoder les formulations des lois qui sous tendent les propriétés d'un faisceau laser, d'où on évoquera le mode gaussien fondamental et les modes d'ordres supérieurs.

On abordera ensuite le faisceau laser en tant que faisceau gaussien qui nous permet d'établir les principales propriétés d'un faisceau laser et qui nous permettent de l'appréhender, et puis quoi par la suite on fera un bref aperçu sur la description du fonctionnement d'un laser et de la cavité.

Par la suite on abordera avec un peu plus en détail les notions essentielles sur les cavités résonnantes en termes de configuration et caractéristique géométrique et l'effet ou l'influence des cavités sur les modes d'un faisceau longitudinalement et transversalement, qui nous permettra par la suite de parler du point le plus essentiel sur les modes propres de la cavité.

Vient ensuite l'étude des modes Laguerre gauss d'un résonateur optique, le but étant d'établir le profil des intensités de ces modes en utilisant les logiciels matlab et mathematica afin d'effectuer une comparaison des résultats obtenus par les deux logiciels et de les comparer avec les précédentes études et de discuter de la validité de l'usage entre les deux logiciels et d'évaluer l'avantage et la complémentarité des deux logiciels.

Donc ce thème de fin d'études sera divisé en quatre chapitres qui sont :

Chapitre I : Equations paraxiales

Chapitre II : propriétés sur les lasers

Chapitre III : cavités résonnantes

Chapitre IV : travaux réalisés et résultats

Enfin nous terminerons par une conclusion qui résumera l'essentiel de ce qui a été établi et accompli en mettant en relief la structure et la morphologie de la rédaction de ce mémoire de fin d'études, qui constituera un éclaircissement de l'intérêt et de l'utilité de la thématique.

Chapitre I : Equations paraxiales

1-Des équations de maxwell à l'équation paraxiale :

La propagation d'une onde électromagnétique est décrite à l'aide des équations de Maxwell. Dans ce cas, les équations de Maxwell s'écrivent:

$$\vec{\nabla} * \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} = 0, \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} * \vec{B} = 0; \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -\mu\epsilon * \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \quad (4)$$

Ou : $\epsilon = \epsilon_0 * k$ k : constante diélectrique [5]

Pour exprimer la cohérence temporelle très élevée d'un laser, nous allons décrire le faisceau par une onde monochromatique idéale de pulsation ω .

Pour ce qui est de la cohérence spatiale, on serait tenté de décrire un faisceau bien collimaté par une onde plane décrite par un seul vecteur d'onde \vec{k} , qui décrit à la fois la direction de propagation du faisceau et la longueur d'onde d'émission $k = 2\pi/\lambda$.

Ainsi, si l'émission est polarisée linéairement, i.e, avec un vecteur champ électrique \vec{u} constant, qui est perpendiculaire à \vec{k} , alors on pourrait décrire le champ électrique d'une émission laser par l'expression suivante:

$$\vec{E}_0 = \text{Re}\{\vec{E}\exp(i\omega t)\} \equiv \text{Re}\{\vec{u}\exp[i(\omega t - kz)]\}, \quad (5)$$

Avec : $\vec{E} = \vec{u}\exp(-ikz)$ (*)

, est le champ électrique complexe de l'onde qui se propage dans le sens positif de l'axe z.

$\text{Re}\{\dots\}$ représente la partie réelle entres accolades.

\vec{E}_0 : Partie réelle du champ électrique spatio-temporelle.

\vec{E} : Champ électrique spatial complexe.

\vec{u} : Vecteur champ électrique constant

L'axe z positif, l'axe de propagation de l'onde.

Nous avons introduit la variable u afin de nous affranchir dans les calculs à venir, des oscillations rapides du champ électrique; en effet, c'est surtout l'enveloppe spatiale du champ qui varie lentement à l'échelle de la longueur d'onde pour un faisceau pas trop divergent qui va nous intéresser.

A partir de (3) et (4) et le fait que les opérateurs de dérivées d'espace et de temps commutent on aura :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\mu * \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (6)$$

En utilisant l'identité : $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} * \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ et (1) l'équation (6) devient :

$$\nabla^2 \vec{E} = -\mu\epsilon * \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (7)$$

On retrouve ainsi l'équation d'onde électromagnétique.

$$\text{On a: } c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Comme nous avons supposé une forme harmonique de pulsation ω pour la dépendance temporelle du champ électrique, la partie temporelle de l'équation d'OEM, revient à le multiplier par $i\omega$, ainsi on aura :

$$\nabla^2 \vec{E}(x, y, z) + k^2 \vec{E}(x, y, z) = 0 \quad (8)$$

Ainsi l'équation (8) constitue l'équation de Helmholtz.

$$\text{Avec : } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega\sqrt{\mu * \varepsilon}$$

$$\text{Et sachant que : } \nabla\varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \text{ dans le vide}$$

Dans le cadre de l'approximation lentement variable c'est-à-dire, supposer que ce profil varie plus lentement avec z que le facteur d'onde plane $\exp(ikz)$ dont la période spatiale (λ) est bien plus petite que la largeur du faisceau. L'autre dépendance en z qui reste dans $u(r, \phi, z)$ est elle aussi beaucoup plus lente par rapport à celle de $\exp(ikz)$ et par rapport à sa variation transversale.

Sachant que les solutions recherchées ne correspondent pas à une onde de type sphérique qui se propage dans toutes les directions de l'espace, mais qui possède une direction de propagation bien définie, qui se traduit sous la forme :

$$E(r, \phi, z) = u(r, \phi, z) * \exp(ikz) \quad (9)$$

Et ça sera les types de solutions recherchées dans les paragraphes qui suivent, et constituera la forme de l'expression de la solution de l'équation paraxiale qu'on établira dans ce qui suit.

Ainsi pour mettre au point l'approximation paraxiale nous mettons à profit l'équation d'Helmholtz :

$$\text{On établit ainsi que : } \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \ll 2k \frac{\partial u}{\partial z} \text{ ou } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Qui est essentiellement l'approximation paraxiale.

Mettons de nouveau à profit l'équation de propagation (d'Helmholtz) afin d'aboutir à l'équation paraxiale c'est-à-dire à partir de (8) on aura :

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + iku \right) e^{ikz} * e^{-i\omega t} \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 * i * k * \frac{\partial u}{\partial z} - k^2 u \right) e^{ikz} * e^{-i\omega t}$$

L'approximation de l'enveloppe lentement variable nous autorise à négliger le terme du second ordre en $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ dans l'équation ci-dessus (10), et compte tenu de l'élimination du terme en $k^2 u$, ainsi l'équation (8) dans le cas des ondes paraxiales devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

Ainsi l'équation de Helmholtz se transforme en équation d'onde paraxiale (11).

On définit alors l'opérateur laplacien qui représente l'opérateur qui caractérise la partie transverse (les deux premiers termes) de l'opérateur différentiel ∇ son expression est :

$$\nabla_T^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (12)$$

Ainsi de (11) et (12) on obtient la forme simplifiée de l'équation d'onde paraxiale suivante :

$$\nabla_T^2 u + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

Ainsi l'équation (13) décrit dans de multitude de cas, divers problèmes de propagation des faisceaux lasers. [5-7]

2-Mode fondamental gaussien (état fondamental) :

Le mode gaussien fondamental référencé aussi par TEM_{00} , correspond à un champ caractérisant mathématiquement et physiquement la variation de l'amplitude et l'intensité de ce champ seulement suivant l'axe de propagation d'où l'essence même de son nom mode longitudinal. Les modes transverses d'ordres supérieurs feront l'objet de discussion dans le paragraphe qui suit.

Sachant que l'équation d'onde : $E(x,y,z,t) = \text{Re}[E(x,y,z)\exp(i\omega t)]$

Constitue une forme générale de solution de l'équation paraxiale dans un système de coordonnées cartésiennes qui constitue une équation vectorielle qui se ramène à un système de trois équations scalaires aux dérivées partielles impliquant chacune une dimension, très difficile à résoudre.

Ainsi nous admettons cette version où :

$$E(r, r_0) \rightarrow E(r, r_0)$$

Dans un système de coordonnées sphériques on admet que la solution de l'équation paraxiale est l'onde sphérique divergente d'un point source de vecteur de position r_0 au point d'observation r .

D'où le champ \vec{E} établi dans le paragraphe précédent (*) s'exprimera dans ce cas sous la forme caractérisée par une amplitude complexe :

$$E(r, r_0) = \frac{A}{\rho(r, r_0)} * \exp(ik\rho(r, r_0)) \quad (14)$$

Avec : $\rho(r, r_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$

Est la distance entre le point source $r_0 = x_0 u_x + y_0 u_y + z_0 u_z$ et le point d'observation $r = x u_x + y u_y + z u_z$

Puisque le faisceau tend plus à avoir une symétrie cylindrique, en d'autre terme un faisceau laser n'est pas une onde sphérique, mais un faisceau qui se propage selon une direction bien définie notée (oz).

On effectuera un raisonnement analogue pour la détermination de la forme de la solution du mode fondamental que celui effectué pour la détermination de l'équation paraxiale, c'est-à-dire on effectuera l'approximation paraxiale de l'équation (14) dans une configuration à symétrie cylindrique on aura ce qui suit :

$$\rho(r, r_0) = \sqrt{(r \cos \varphi - r_0 \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi - r_0 \sin \varphi)^2 + (z - z_0)^2} \quad (15)$$

ou $\rho(r, r_0)$ est la distance dans le système de coordonnées cylindriques.

Pour simplification prenons l'origine du point source c'est-à-dire :

$$r_0 = x_0 = y_0 = z_0 = 0 \text{ et } \varphi_0 = 0$$

$$\text{Ainsi (14) devient : } E(r) = \frac{A}{\rho(r)} * \exp(ik\rho(r)) \quad (16)$$

$$\text{Avec : } \rho(r) = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (17)$$

Qui peut être développé comme suit compte tenu de la condition de paraxialité:

$$\rho = z + \frac{r^2}{2z} - \frac{r^4}{8z^3} + \dots \quad (18)$$

L'approximation paraxiale consiste à considérer la distance axiale z entre le point source et le point d'observation très grande devant la distance transverse qui les sépare, soit $r \ll z$.

Ainsi on ne tiendra compte que du développement d'ordre 2 de ρ dans l'exposant, et d'ordre 1 dans l'amplitude, c'est-à-dire $\rho=z$.

Tenant compte de la forme de solution qu'on cherche du paragraphe précédent (9) et compte tenu des approximations effectuées, l'équation (9) devient comme suit :

$$E(r, \varphi, z) = u(r, z) * \exp(ikz) \quad (19)$$

Et par conséquent par identification avec l'expression (16) on aura :

$$u(r, z) = \frac{A}{z} \exp(ikr^2/2z) \quad (20)$$

Comme nous avons pris l'origine des r et des z en zéro, ajouter une constante complexe revient à décaler l'origine d'une distance complexe ou à considérer une source ponctuelle complexe pour notre rayonnement. Ajoutons alors une constante complexe, soit q_0 , à z telle que : $z \rightarrow z + q_0$

Nous aurons dans ce cas :

$$q(z) = z + q_0 \quad (21) \quad \text{avec} \quad q_0 = iz_0$$

$$\text{avec pour : a } z=0 \text{ on aura ; } q(z=0) = q_0 \quad (22)$$

Avec cela, l'équation (20) devient :

$$u(r, z) = \frac{A}{q(z)} \exp(-ikr^2/2q(z)) \quad (23)$$

En combinant entre (19) et la forme de la solution recherchée pour l'équation paraxiale (23) on obtiendra :

$$E(r, \varphi, z) \equiv E(r, z) = u(r, z) * \exp(ikz)$$

$$E(r, z) = \frac{A}{q(z)} \exp\left(\frac{-ikr^2}{2(z+iz_0)} + \frac{2ikz(z+iz_0)}{2(z+iz_0)}\right) \quad (*)$$

A partir de (*) dans l'exposant, en multipliant par le conjugué :

$$\frac{-ikr^2}{2(z+iz_0)} + \frac{2ikz(z+iz_0)}{2(z+iz_0)} = \frac{-ikr^2z}{2(z^2+z_0^2)} - \frac{kr^2z_0}{2(z^2+z_0^2)} + ikz \quad (**)$$

→1^{er} terme :

$$\frac{z}{2(z^2+z_0^2)} = \frac{1}{\frac{z(z^2+z_0^2)}{z}}, \text{ Ainsi on aboutira à : } \frac{(z^2+z_0^2)}{z} = z \left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right)$$

Ainsi on identifie et on définit les rayons de courbures des fronts d'ondes tels que :

$$R(z) = z \left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right) \quad (24)$$

→2nd terme :

$$\frac{z_0}{(z^2+z_0^2)} = \frac{1}{\frac{z(z^2+z_0^2)}{z_0}}, \text{ Ainsi on aboutira à : } \frac{(z^2+z_0^2)}{z_0} = z_0 \left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right)$$

En prenant le terme k du nominateur on aura :

$$2 * \frac{1}{k} * \frac{(z^2+z_0^2)}{z_0} = \frac{z_0\lambda}{\pi} \left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right)$$

Ainsi on identifie et on définit la longueur du waist du faisceau telle que :

$$w_0^2 = \frac{z_0\lambda}{\pi} \quad (25)$$

Et on définit aussi l'évolution du rayon du faisceau telle que :

$$w(z)^2 = w_0^2 \left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right) \text{ Donc : } w(z) = w_0 \sqrt{\left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right)} \quad (26)$$

→En reportant les expressions trouvées (24) et (26) dans (**) on aboutira à :

$$\frac{-ikr^2}{2R(z)} - \frac{r^2}{w^2(z)} + ikz \quad (27)$$

→En remplaçant (27) dans l'exposant c'est-à-dire dans (*) on obtient :

$$E(r, z) = \frac{A}{q(z)} \exp\left(\frac{-ikr^2}{2R(z)} - \frac{r^2}{w^2(z)} + ikz\right)$$

$$\text{Ainsi : } E(r, z) = \frac{A}{q(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \exp\left[i\left(kz - \frac{kr^2}{2R(z)}\right)\right] \quad (28)$$

Ainsi on obtient aisément :

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{2i}{k*w^2(z)} \quad (29)$$

A partir de (28) on aura donc :

$$\rightarrow E(r, z) = A \left[\frac{1}{R(z)} - \frac{2i}{k*w^2(z)} \right] \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \exp\left[i\left(kz - \frac{kr^2}{2R(z)}\right)\right]$$

$$\rightarrow E(r, z) = \frac{A}{iz_0\sqrt{(1+(Z/Z_0)^2)}\sqrt{(z^2+z_0^2)}} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \exp\left[i\left(kz - \frac{kr^2}{2R(z)}\right)\right]$$

En introduisant la phase de gouy telle que : $\xi(z) = \text{atan}(z/z_0)$ (30)

Et posant : $E_0 = (A/iz_0)$

On aura :

$$E(r, z) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \exp\left[i\left(kz - \frac{kr^2}{2R(z)} + \xi(z)\right)\right] \quad (31)$$

[5] et [8]

Ainsi au cours des calculs qui nous conduisent à l'expression du mode fondamental gaussien telle que la variation de l'amplitude du champ obéit à la condition de l'approximation paraxiale donc l'équation paraxiale en se conformant au type de solution recherchée (19) et donc (23) aussi, on arrive en parallèle à extraire tous les principaux paramètres d'un faisceau laser en tant que faisceau gaussien qu'on décrira en détail au second chapitre, à savoir la longueur de Rayleigh z_0 , le rayon de ceinture w_0 et à la fois l'évolution du rayon du faisceau $w(z)$, le rayon de courbure des fronts d'onde $R(z)$.

3-Faisceaux gaussiens d'ordre supérieur :

Les faisceaux gaussiens que nous venons d'étudier peuvent se généraliser à des bases de fonctions solutions de l'équation de l'enveloppe lentement variable. Les deux principales familles de solutions sont constituées respectivement par les modes de Hermite-Gauss et Laguerre-Gauss, [9] Correspondant aux modes transverses dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation, quant au mode gaussien fondamental c'est seulement suivant la direction de propagation.

3-1.Modes Hermite-Gauss:

Les polynômes d'Hermite qui interviennent dans les modes d'Hermite-Gauss découlent de la recherche d'une forme de solution adéquate à la résolution de l'équation paraxiale à variables séparées x et y .

L'équation paraxiale dans la symétrie rectangulaire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{Avec :} \quad \nabla_T^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Forme de solution recherchée: $U(x, y, z) = f(x, z) * g(y, z) * A(z)e^{-i\psi(z)}e^{-i\beta(z)(x^2+y^2)}$

Qui constitue l'équation de départ qui nous conduit à la détermination des modes Hermite-Gauss.

Ainsi la solution obtenue par ce raisonnement est sous la forme :

$$U_{mn}(x, y, z) = E_0 \left(\frac{w_0}{w(z)}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}\right) \exp(ikz) \exp\left(-ik\frac{x^2+y^2}{R_c(z)}\right) \exp[ik(m+n+1)\varphi(z)] \quad (32)$$

Avec H_n est le polynôme d'Hermite d'ordre m il est défini comme suit :

$$H_0 = 1, H_1 = x, H_2 = 4x^2 - 2 \dots\dots$$

Cette solution contenant au même titre que celui du gaussien fondamental tous les principaux paramètres d'un faisceau laser. En plus les ordres latéraux m et n qui donnent le nombre de lignes nodales perpendiculaires aux axes x et y .

Le polynôme d'Hermite se définit et se développe comme suit :

$$H_n(x) = n! \sum_{s=0}^{n/2} (-1)^s \frac{(2x)^{n-2s}}{(n-2s)!s!} \quad (33)$$

[7] et [10]

En résumé cette solution (32) est la résolution de l'équation paraxiale dans un système de coordonnées cartésiennes à variables séparées tenant compte de l'approximation paraxiale dans la configuration d'un faisceau qui se propage présentant une symétrie rectangulaire.

3-2. Modes Laguerre-Gauss :

D'abord ce qu'il y a lieu de savoir c'est que les modes de Laguerre gauss constituent les solutions de l'équation paraxiale dans le cas où le faisceau qui se propage présente une symétrie cylindrique :

Ainsi on a la forme générale de l'équation paraxiale

$$\nabla_T^2 u + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Effectuant le passage de l'opérateur laplacien d'un système de coordonnées cartésiennes vers le système de coordonnées cylindriques suivant le plan transverse on obtient :

$$\begin{aligned} (x,y) & \quad \rightarrow \quad (r,\theta) \\ \nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \quad \rightarrow \quad \nabla_T^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (34)$$

Z : étant l'axe de propagation

Ainsi l'équation paraxiale pour un champ cylindrique devient:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (35)$$

Ces modes se calculent de manière analogue à celui effectué pour Hermite-Gauss, en cherchant des solutions de l'équation d'onde transversale, exprimée en coordonnées polaires, en fonction du rayon vecteur $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et de l'angle azimutal θ dans le plan d'onde.

On recherche des solutions à variables r et θ séparées telles que :

$$u(r, \theta, z) = f(r, z) * g(\theta) * A(z) * e^{-i\psi(z)} * e^{-(\alpha+i\beta)r^2} \quad (36)$$

[7]

Ainsi de (35) et (36) on obtient l'expression de la solution recherchée

$$U_{pl}(r, \theta, z) = E_0 \left(\frac{w_0}{w(z)} \right) \left(\frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right)^l L_p^l \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \exp \left(-i \left[kz - (2l + m + 1) \text{Arctan} \left(\frac{z}{z_R} \right) + \frac{kr^2}{2q(z)} - l\phi \right] \right) \quad (37)$$

Sachant que le polynôme de Laguerre généralisé s'exprime sous la forme :

$$L_l^m(x) = \frac{x^{-m}}{l!} * e^x * \frac{\partial^l}{\partial x^l} (x^{l+m} * e^{-x}) \quad (38)$$

[10]

La solution (37) constitue la résolution de l'équation paraxiale dans un système de Coordonnées cylindrique à variables séparées r et θ dans la configuration d'un faisceau qui se propage présentant une symétrie cylindrique.

Chapitre II : propriétés sur les lasers

1-Faisceau Gaussien et principales propriétés :

Un faisceau Gaussien est mathématiquement la solution de l'équation de propagation, caractérise graphiquement l'évolution du profil transversal d'amplitude en fonction de la propagation spatiale, sur le plan géométrique caractérise la divergence d'un faisceau en chaque point de l'espace et mathématiquement proportionnelle à une fonction gaussienne.

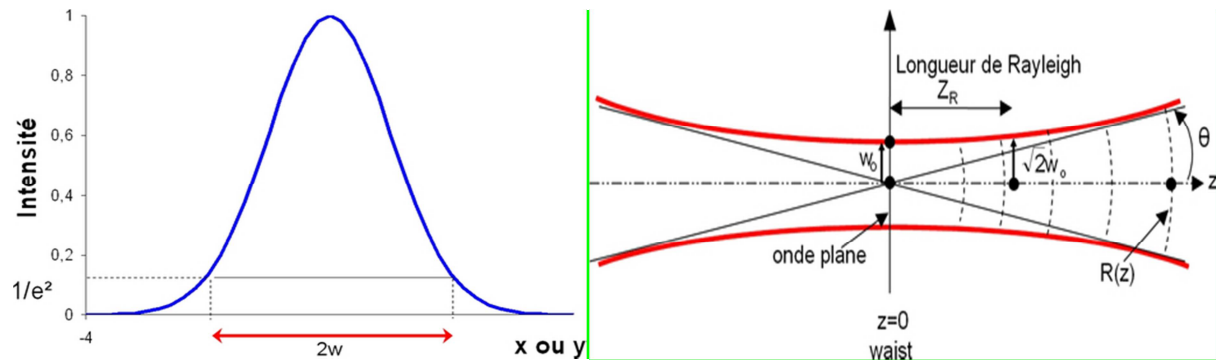


Fig.1-a.Exemple de représentation graphique d'un mode Gaussien fondamental

b.Exemple de la propagation d'un faisceau gaussien

Donc ici on parlera de faisceau laser en tant que faisceau gaussien, on étudiera ici la structure du laser en mode gaussien fondamental, donc le laser peut être contrairement à ce que parfois on dit dans les cours d'optique ou de physique ne se comporte pas comme une onde plane monochromatique, c'est un petit peu plus compliqué que ça et le but, c'est de regarder sa structure, on supposera que celle-ci est une structure à symétrie cylindrique autour de l'axe de propagation z, donc 1^{ère} chose, l'éclairement du laser en mode gaussien fondamental peut s'écrire de la façon suivante :

$$E(r,z) = E_0(z)\exp[-2r^2/w^2(z)] \quad (\text{démontrer au chapitre I}) \quad (1)$$

Donc c'est invariant par rotation autour de l'axe du laser (de symétrie).

-Sachant que $E_0(z)$ représente le sommet de la gaussienne (fig.1-a).

-Cette gaussienne se trace en fonction de la distance r (x ou y) à l'axe.

-Donc on voit bien ici qu'on n'a pas une onde plane puisque l'éclairement tend vers zéro des deux cotés de cette courbe en cloche, car dans tout plan perpendiculaire à z l'éclairement n'est pas uniforme, contrairement à la définition d'une onde plane.

-Enfin surtout on voit la signification physique de la distance de $w^2(z)$ à partir de l'exemple des figures ci-dessus à z fixé perpendiculairement à la direction de propagation on aura le profil de l'éclairement à une distance z de la figure ci-dessous :

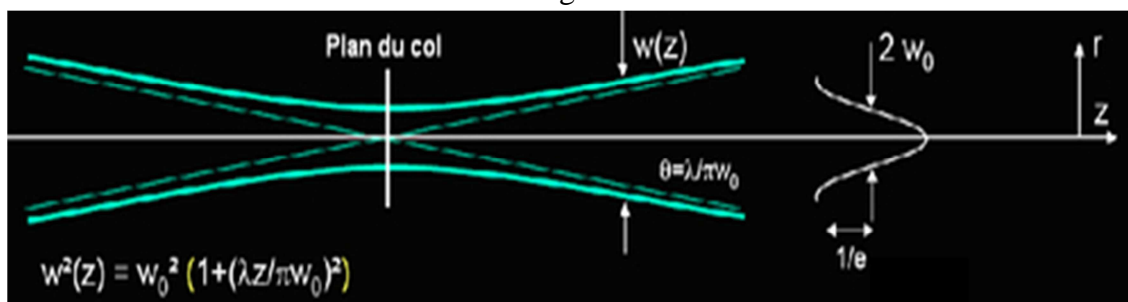


Fig.2-Profil de la gaussienne à une distance z

Si on remplace r par $w(z)$ dans l'expression (1) on trouve :

$$E(r=w(z), z) = E_0(z)e^{-2} = 0.14E_0(z) \quad (2)$$

Ici on voit que le faisceau existe sur une distance de $w(z)$ par rapport à l'axe de symétrie tenant compte du fait que $w(z)$ est supposé à z fixé.

Donc en passant à l'évolution de cette distance en fonction de z qu'on admet sous la forme :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/z_R)^2} \quad (\text{démontrer au chapitre I}) \quad (3)$$

Donc comme on peut le voir dans la figure précédente (fig.2) on a représenté l'exemple d'un faisceau qui se rapproche et puis se rélargit, en effet la fonction $w(z)$ qui caractérise la largeur transversale du faisceau laser, donc c'est une hyperbole

Etudions les limites de cette fonction :

- en $z=0 \Rightarrow w(z=0) = w_0$

w_0 s'appelle la largeur de waist en anglais ou qu'on appelle le col du laser qu'on appelle aussi le rayon de ceinture, c'est à cet endroit que le laser est le plus étroit et ça en étant près du col d'une façon générale donc quand $z \sim 0 \Rightarrow w(z) \sim w_0$.

Dans cette zone ou $Z \ll Z_R$ en étant près du col on peut considérer que le laser se comporte comme une onde plane mais néanmoins pas d'extension illimitée, donc les plans d'ondes sont perpendiculaires à Z car dans cette zone le faisceau ne diverge pas, c'est l'essence même de la définition d'un faisceau gaussien. Il se comporte donc comme un cylindre de rayon w_0 , donc c'est ce qui caractérise en partie la limite du cylindre cône du laser d'où on conclut les deux principales caractéristiques géométriques d'un faisceau laser, d'où la nécessité de décrire et comprendre cette nouvelle grandeur Z_R .

Intéressons nous alors à la signification de cette nouvelle longueur $Z = Z_R$ qu'on appelle la longueur de Rayleigh qu'on admet sous la forme :

$$Z_R = \pi \frac{w_0^2}{\lambda} \quad (\text{démontrer au chapitre I}) \quad (4)$$

Comme on l'a conclue précédemment, c'est la distance qui caractérise et qui découle les deux aspects géométriques du laser, suivant qu'on observe le laser à une distance proche de cette longueur ou qu'on l'observe à une grande distance de Z_R .

- Maintenant si $Z \gg Z_R$ on aura alors: $w(z) \approx w_0 \frac{Z}{Z_R}$

On pourra alors définir un angle θ qui va être pratiquement assimilé à sa tangente, on a quand $Z = Z_R \Rightarrow w(z)=w_0$ l'intersection des asymptotes qui définissent l'hyperbole avec la droite horizontale de coordonnée w_0 , par ailleurs c'est assez commode de le repérer pour tracer le squelette du laser d'où alors: $\text{tang}(\theta) \approx \theta \approx \frac{w_0}{Z_R}$ (5)

Puisque nous sommes dans un domaine d'angle très petit,

Donc : $w(z) \sim Z \cdot \theta$ (6)

qui constitue les équations des asymptotes.

En omettant cette partie cylindrique on constitue le model cône du laser, donc à grande distance devant Z_R on admet que les surfaces d'ondes se comportent pratiquement comme des ondes sphériques.

θ caractérise donc la diffraction du laser donc sa dispersion angulaire.

Il représente donc l'angle de divergence du laser.

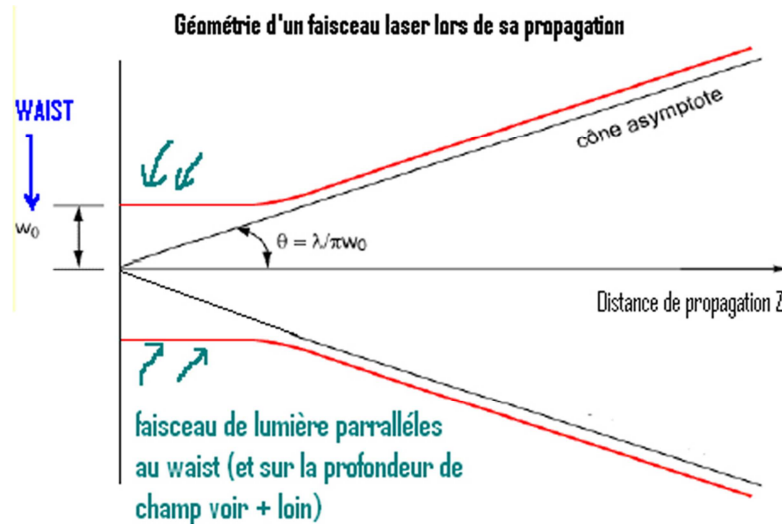


Fig.3-Schéma représentant à la fois le model cylindre et le model cône du laser

On peut exprimer l'angle θ en utilisant les relations (3) et (4) tels que :

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (7)$$

qui caractérise le model cône du laser (voir fig.3).

On remarque à partir de cette relation un lien très important entre le col et l'angle de divergence, c'est que θ est inversement proportionnel à w_0 .

Plus le faisceau parallèle au waist c'est-à-dire le col, est étroit, plus le faisceau se diverge plus, c'est une conséquence de la signification physique du col.

Donc pour finir à partir des définitions et des petites lois qui sous tendent les faisceaux lasers en tant que faisceaux gaussiens, principalement des lois (4) et (7) on conclut que :

A λ fixé, si on connaît w_0 , ou bien θ , ou bien alors Z_R c-a-d le waist ou l'angle de divergence ou la longueur de Rayleigh respectivement, on est capable de déterminer tout le reste, c'est-à-dire les deux autres grandeurs.

Pour compléter l'étude sur les faisceaux gaussiens regardons un petit peu le comportement des maximums d'intensité c'est-à-dire $E_0(z)$, au fur et à mesure de la propagation du laser on admet le maximum varier en fonction de z sous la forme suivante :

$$E_0(z) = E_m \left(\frac{w_0}{w(z)} \right)^2 \quad (8)$$

Ici on voit bien que pour : $w(z) = w_0$ c'est-à-dire pour $z=0 \Rightarrow E_0(z) = E_m$ là où le maximum d'intensité est maximal en mode fondamental.

A mesure qu'on avance dans le laser suivant son axe de propagation le laser s'élargit le maximum diminue, Par exemple pour $Z = Z_R$ on aura à partir de (3) : $w(z) = \sqrt{2} * w_0 \Rightarrow$ à partir de (8) $E_0(z=Z_R) = \frac{E_m}{2}$, pour voir l'allure du comportement des maximums d'intensités en fonction de z qu'on représentera ci-dessous :

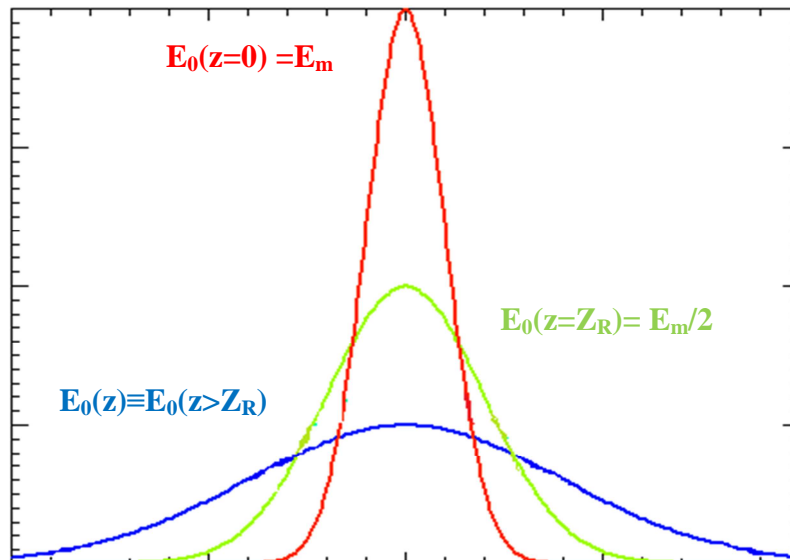


Fig.4-Grappe représentant les maximums d'amplitudes ou d'intensités à différentes positions z du mode gaussien fondamental.

Ici maintenant nous avons résumé toutes les notions élémentaires aussi bien sur le plan de définitions, de lois élémentaires à saisir et bien sur l'aspect graphique qui interprète phénoménologiquement les lasers et une représentation schématique du phénomène étoffé d'explications avec une multitude de combines possibles au fur et à mesure et tout ça en parallèle et étape par étape. [1-4]

2. Description du fonctionnement d'un laser et cavités :

2-1. Description du fonctionnement d'un laser :

Un laser d'une façon très schématique est constitué d'une cavité de deux miroirs en regard, dans l'un laisse partiellement passer la lumière, et entre ces deux miroirs on a la source de lumière amplifiée, c'est-à-dire le laser qui fait des allers retours et qui est amplifié par ce qu'on appelle un milieu amplificateur, et comme cette lumière fait des allers retours et comme un des deux miroirs est semi réfléchissant, elle laisse passer une partie du faisceau lumineux et c'est cette partie là qu'on récupère comme lumière laser, et là il y a un équilibre qui s'établit entre le milieu amplificateur (d'origine solide liquide ou gazeux) et le faisceau lumineux, c'est le principe même des travaux menés par Planck et Einstein, d'où l'importance de l'interaction entre la lumière et la matière, donc schématiquement tous les lasers sont basés sur ce fonctionnement. [2]

Donc en résumé un laser est constitué de :

Un milieu amplificateur, cavité résonnante, système de pompage.

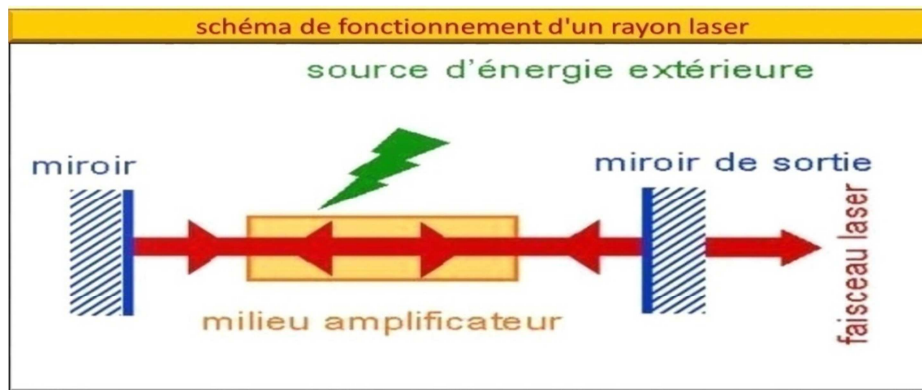


Fig.6-Schéma descriptif du principe de fonctionnement d'un laser

2-2.Cavité :

Le mécanisme d'émission spontanée et stimulée étant en compétition, d'où l'insuffisance d'une inversion de population pour générer un effet laser, car la nature des deux types d'émissions sont antagonistes, cela tend à donner un faisceau qui diverge. Ainsi avant d'être un milieu amplificateur de lumière, un milieu laser pompé par une source d'énergie extérieure est d'abord une "lampe" (émission spontanée).

Donc le rôle de la cavité rend le mécanisme d'émission stimulée prédominant par rapport à l'émission spontanée, car la répétition des allers retours du faisceau dans cette cavité et le pompage en parallèle multiplie le mécanisme d'émission stimulée, donc les conditions favorables pour générer l'effet laser c'est la cavité qui le crée. [2]

3-Conclusion :

Dans ce chapitre on aura vu les principales propriétés et caractéristiques d'un laser aussi bien sur le plan descriptif mathématique que sur le plan schématique, et bien entendu le mécanisme artificiel qui permet de générer ce faisceau cohérent et continu ou en d'autres termes faisceau impulsionnel de lumière parallèle et monochromatique.

Tandis que dans le chapitre précédent on a du voir plus en détails les théories qui ont conduit à la structure du formalisme mathématique qui a permis l'établissement de ces propriétés et on a approfondi pour les modes d'ordres supérieurs, dont la détermination des propriétés sera le but dans la partie réalisation, résultats et discussion.

Et on détaillera un peu plus ensuite sur l'influence des cavités sur les modes, ou en d'autre terme l'effet de celle-ci.

Chapitre III : Cavités résonnantes

1-Les différents types de résonateur :

Les cavités lasers a un rôle très important, elle permet l'amplification de l'onde optique grâce à un système réfléchissant (la plupart du temps des miroirs). C'est aussi la cavité qui permet, via ses pertes (un des miroirs utilisé n'est que partiellement réfléchissant), d'extraire le faisceau laser utile. Enfin la géométrie de la cavité détermine en grande partie les caractéristiques spatiales et spectrales du rayonnement laser émis. Elle est constituée de deux miroirs M1 et M2; l'un est totalement réfléchissant de rayon de courbure R1 et l'autre semi réfléchissant de rayon de courbure R2 pour laisser sortir le faisceau laser. [11]

Comme on a déjà vu ce que c'est qu'une cavité, on distingue alors deux types qui sont :

Les cavités linéaires: (la lumière fait des allers retours dans le milieu amplificateur)

Les cavités en anneaux: (la lumière fait des tours dans le milieu amplificateur)

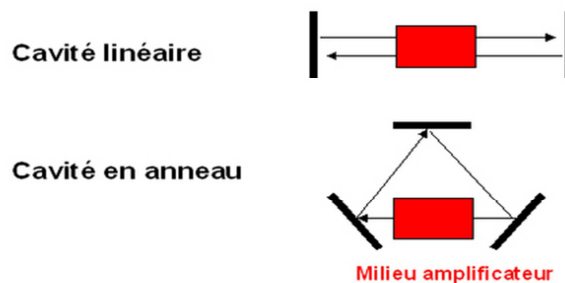


Fig.9-Les deux types de cavités [12]

Comme on peut aussi les établir autrement en parlant de résonateur stable ou instable.

Résonateur stable : le rayonnement reste confiné dans la cavité

Résonateur instable : dans le quel le faisceau sort de la cavité après un nombre fini de réflexion.

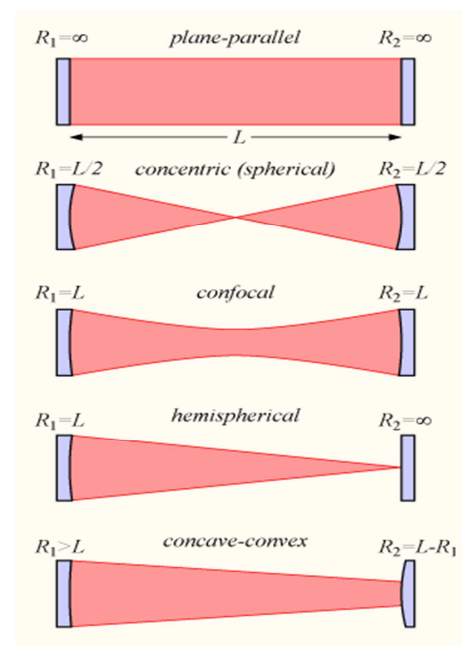
1-Cavité en miroir parallèle $R_1 = R_2 = \infty$

2-Cavité concentrique $R_1 = R_2 = L/2$

3-Cavité Confocal $R_1 = R_2 = L$

4-Cavité hemispherique $R_1 = L$ et $R_2 = \infty$

5-Cavité concave convexe $R_1 > L$ et $R_2 = L - R_1$



[11]

2-Condition de stabilité de la cavité :

Une onde stationnaire résonante ne peut s'installer dans la cavité qu'à la condition suivante :

$$0 \leq \left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{L}{R_2}\right) \leq 1 \quad (1)$$

En introduisant les paramètres géométriques du résonateur :

$$g_1 = 1 - \frac{L}{R_1} \quad \text{et} \quad g_2 = 1 - \frac{L}{R_2} \quad (2)$$

L'équation devient :

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1 \quad (3)$$

1-Résonateur plan-plan => $g_1 = g_2 = 1$

A la limite de la stabilité

2-Résonateur concentrique => $g_1 = g_2 = -1$

A la limite de la stabilité

3-Résonateur confocal => $g_1 = g_2 = 0$

A la limite de la stabilité

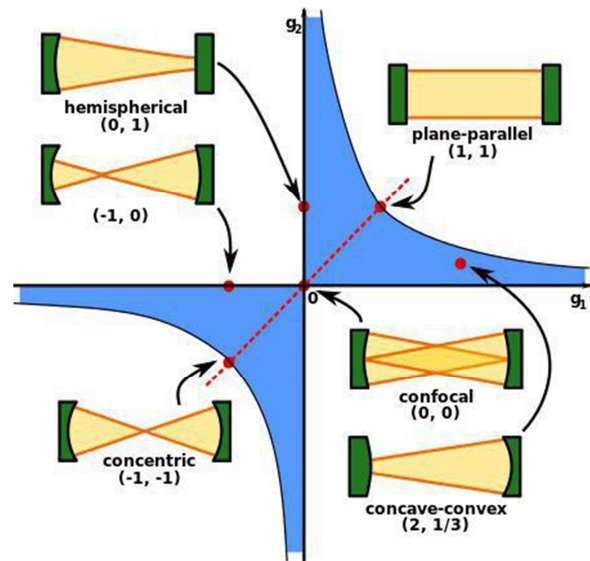
4-Résonateur hémisphérique => $g_2 = 1$ et $0 \leq g_1 \leq 1$

Dans le domaine de la stabilité

5-cas particulier d'un résonateur hémisphérique est celui d'un résonateur semi confocal tel que :

$R_1 = 2L$ et $R_2 = \infty$, dans ce cas => $g_1 = 1/2$ et $g_2 = 1$

A l'intérieur de la zone de stabilité



[4] et [11]

3-Modes propres de la cavité :

Les faisceaux gaussiens dont les propriétés et le formalisme mathématiques abordés respectivement dans les chapitres I et II sont d'un intérêt essentiel pour la description d'un champ électromagnétique dans une cavité. Ainsi en confondant les rayons de courbure du miroir et du front d'onde du faisceau, celui-ci se réfléchit exactement sur lui-même, la structure de champ reste invariante. On peut alors définir ce qu'on appelle les modes propres du champ dans une cavité. C'est une propriété d'autoreproduction illustré dans la figure ci-dessous qui montre que la surface de miroir R_1 coïncide avec la surface équiphasse du faisceau.

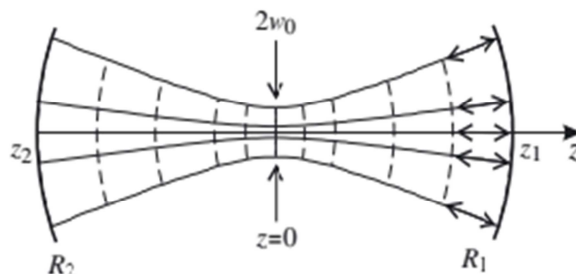


Illustration de l'auto-reproduction du faisceau lors de la réflexion sur les miroirs de la cavité. Chaque rayon (représenté par la double flèche) est en incidence normale sur les miroirs et est réfléchi sur lui-même.

[4]

On exprime ici conformément aux lois de l'optique gaussienne établie précédemment les rayons de courbures R_1 et R_2 suivant le schéma ci-dessus :

$$\text{Suivant le miroir de rayon } R_1 \text{ en } z_1 : \quad R(z_1) = \left[\frac{z_1^2 + z_R^2}{z_1} \right] = R_1 \quad (4-a)$$

$$\text{Suivant le miroir de rayon } R_2 \text{ en } z_2 : \quad R(z_2) = \left[\frac{z_2^2 + z_R^2}{z_2} \right] = R_2 \quad (4-b)$$

Plaçons nous maintenant à exprimer les paramètres du faisceau gaussien en fonction des caractéristique géométrique de la cavité :

A partir des équations (4) on définit ce qui suit :

$$z_1 = \frac{L(L + R_2)}{2L + R_2 - R_1} \quad (5-a) \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{L(R_1 - L)}{2L + R_2 - R_1} \quad (5-b)$$

$$\text{Avec : } L = Z_1 - Z_2 \quad (6)$$

$$\text{On déduit la longueur de Rayleigh : } Z_R = \sqrt{\frac{L(R_2 + L)(R_1 - L)(L + R_2 - R_1)}{(2L + R_2 - R_1)^2}} \quad (7)$$

$$\text{Et le rayon de ceinture : } w_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \left(\frac{L(R_2 + L)(R_1 - L)(L + R_2 - R_1)}{(2L + R_2 - R_1)^2} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (8)$$

Et on définit aussi le rayon du faisceau sur l'un des deux miroirs :

$$w(z = z_{1,2}) = w_0 \sqrt{\frac{z_{1,2}^2 + z_R^2}{z_R^2}} \quad (9)$$

Ainsi tous les paramètres géométriques du faisceau gaussien dépendent des grandeurs géométriques de la cavité (L , Z_1 et Z_2). [4] et [7]

3.1-De la condition de résonance aux modes de fréquences de résonances ν_{mnq} :

Dans une cavité stable le faisceau est donné par les modes d'Hermitte Gauss $E_{mn}(x, y, z)$ (modes Laguerre Gauss $E_{pl}(r, \theta, z)$ respectivement). La condition de résonance prise sur l'axe z ($r=0$) se traduit par :

$$\phi_{mn}(r = 0, z_1) - \phi_{mn}(r = 0, z_2) = q\pi \quad (10)$$

$q \equiv$ entier quelconque

Z_1 et $Z_2 \equiv$ position des miroirs

$\Phi_{mn} \equiv$ est la phase prise par le faisceau gaussien et dépend des indices transverses m, n du mode (respectivement p, l pour les modes Laguerre Gauss).

On a la phase totale du champ qui découle de la résolution de l'équation paraxiale pour les modes d'ordres supérieurs :

$$\phi_{mn}(r, z) = kz - (m + n + 1) \arctan\left(\frac{z}{Z_R}\right) + \frac{kr^2}{2R(z)} \quad (11)$$

En reportant (11) dans (10) on obtient ce qui suit :

$$kL = (m + n + 1) \left[\arctan\left(\frac{z_1}{Z_R}\right) - \arctan\left(\frac{z_2}{Z_R}\right) \right] + q\pi \quad (12)$$

k dépend des entiers m, n et q avec :

$$k = k_{mnq} = 2\pi\nu_{mnq}/c \quad (13)$$

En combinant (5-a), (5-b), (7), (12) et (13) on aboutit a l'expression sous la forme suivante :

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2L} \left[q + \frac{1}{\pi} (m + n + 1) \arccos(\pm\sqrt{g_1 g_2}) \right] \quad (14)$$

L'équation (14) s'appelle la fréquence de résonances qui sont des fréquences propres données en fonction de l'ordre des modes m et n et de l'indice longitudinal q.

Exprimons ν_{mnq} en fonction de l'intervalle spectrale libre $\Delta\nu_L$, et $\Delta\nu_T$ tel que :

$$\Delta\nu_L = \frac{c}{2L} \quad (15) \quad \text{et} \quad \Delta\nu_T = \frac{1}{\pi} \Delta\nu_L \arccos(\pm\sqrt{g_1 g_2}) \quad (16)$$

Ainsi on obtient la nouvelle expression de ν_{mnq} en combinant (14), (15) et (16) :

$$\nu_{mnq} = q\Delta\nu_L + (m + n + 1)\Delta\nu_T \quad (17)$$

Ainsi on tire deux remarques de l'expression (17) :

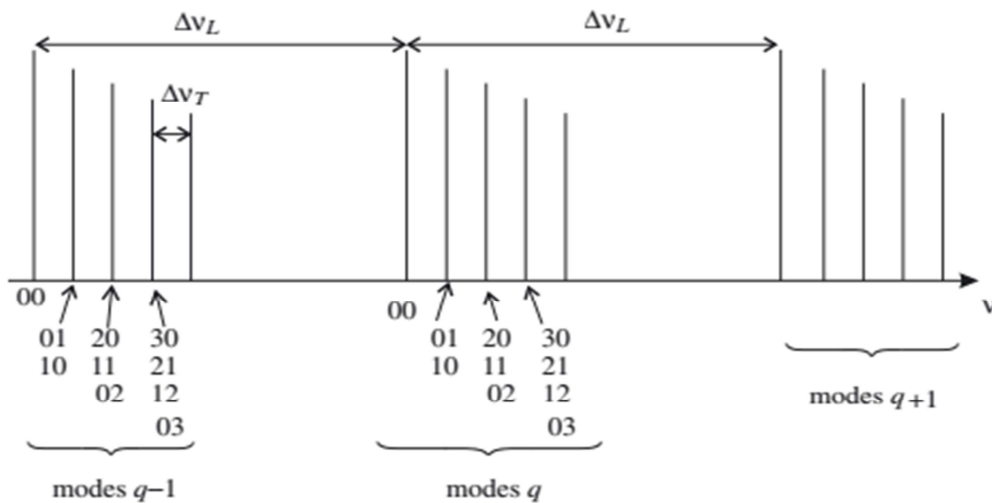
Pour m et n fixé : deux fréquences de résonances successives correspondant aux indices q et q+1 sont distants de $\Delta\nu_L$. Ainsi un mode TEM_{mn} est associé a un ensemble de fréquences propres ν_{mnq} séparées de l'intervalle spectrale libre $\Delta\nu_L$.

Pour q fixé : aux différentes valeurs de m et n est associé un ensemble de modes de même indice longitudinal q. il existe une fréquence propre pour chaque mode TEM_{mn} (q fixé, m et n varient). Les fréquences de deux modes transverses successifs sont distants de :

$$\nu_{m+1,n,q} - \nu_{mnq} = \Delta\nu_T \quad (18)$$

Ainsi l'équation (18) représente l'intervalle transverse en fréquence qui sépare deux modes transverse successifs.

Les valeurs ν_{mnq} et leurs dispositions sur l'axe en fréquence sont représentées sur la figure ci-dessous. Chaque fréquence est (m+n+1) fois dégénérée.



Fréquences propres de cavité. Les « familles » d'ordre $q-1$, q et $q+1$ sont représentées. Les fréquences propres des modes transverses TEM_{mn} (notés par les indices m et n , $m+n=0,1,2,3$) d'ordre le plus bas sont données à titre d'exemple.

Pour les modes Laguerre-Gauss la phase se mets sous la forme :

$$\phi_{pl}(r, z) = kz - (2p + l + 1) \arctan\left(\frac{z}{Z_R}\right) + \frac{kr^2}{2R(z)} \quad (19)$$

Et les fréquences propres correspondantes :

$$\nu_{plq} = \frac{c}{2L} \left[q + \frac{1}{\pi} (2p + l + 1) \arccos(\pm \sqrt{g_1 g_2}) \right] \quad (20)$$

[4] et [13]

3.2-Les modes longitudinaux et les modes transversaux :

Maintenant on est assez bien en mesure de décrire les modes longitudinaux et transversaux d'une cavité :

Les modes longitudinaux : caractérisé par l'indice q, caractérise la propagation du faisceau suivant l'axe longitudinal (suivant la direction de propagation), on parle de fréquence propre de la cavité suivant l'indice q.

Les modes transversaux : caractérisé par les indices m et n (respectivement p et l), caractérise la propagation du faisceau en plan transverse (plan perpendiculaire a la direction de propagation), on parle alors de fréquence propre de la cavité suivant les indices m et n (respectivement p et l).

Un schéma illustrant la représentation de ces deux modes propres de la cavité dans la figure ci-dessous :

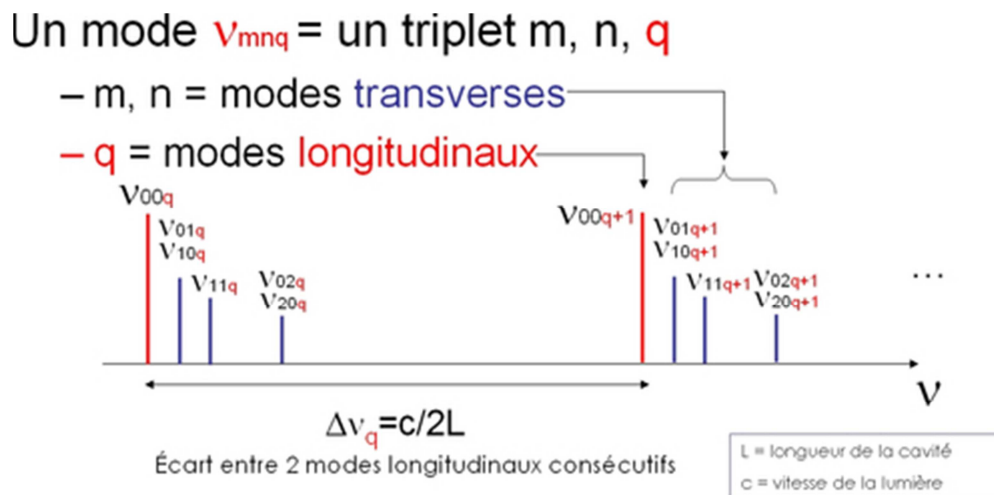


Figure illustrative d'un exemple de représentation de modes longitudinaux et transversaux

On s'aperçoit qu'à partir de la figure la dégénérescence des différents modes qui correspondent à la même fréquence de résonance suivant le plan transverse caractérisant différents modes d'ordres supérieurs, car leurs sommations sont égales, donc s'interprètent phénoménologiquement par la superposition des intensités correspondants a ces différents modes correspondants aux différents domaines caractérisés par leurs indices longitudinaux.

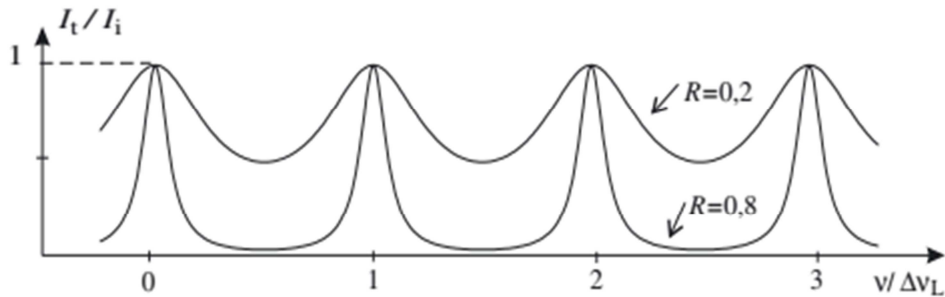
Correspondent aux pics d'intensités maximales par le fait de l'intensité transmise qui s'exprime sous la forme suivante :

$$I_t = \frac{I_i}{1 + \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi \nu}{c/2L}\right)} \quad (21) \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1-R}{\sqrt{R}} \quad (22)$$

Sachant que déjà : $\Delta \nu_L = \frac{c}{2L}$

A l'intérieur du sinus on aura donc : $\frac{\pi v}{c/2L} = \frac{\pi v}{\Delta v_L}$ (23)

Exemple de représentation d'une courbe de transmission d'un résonateur de Fabry-Pérot ci-dessous tel que: $\frac{I_t}{I_i} = f\left(\frac{v}{\Delta v_L}, R\right)$



Courbe de transmission du résonateur de Perot-Fabry. Les cavités de grande finesse présentent des résonances plus aigües. Sont représentés ici les cas $R = 0,8$ et $R = 0,2$.

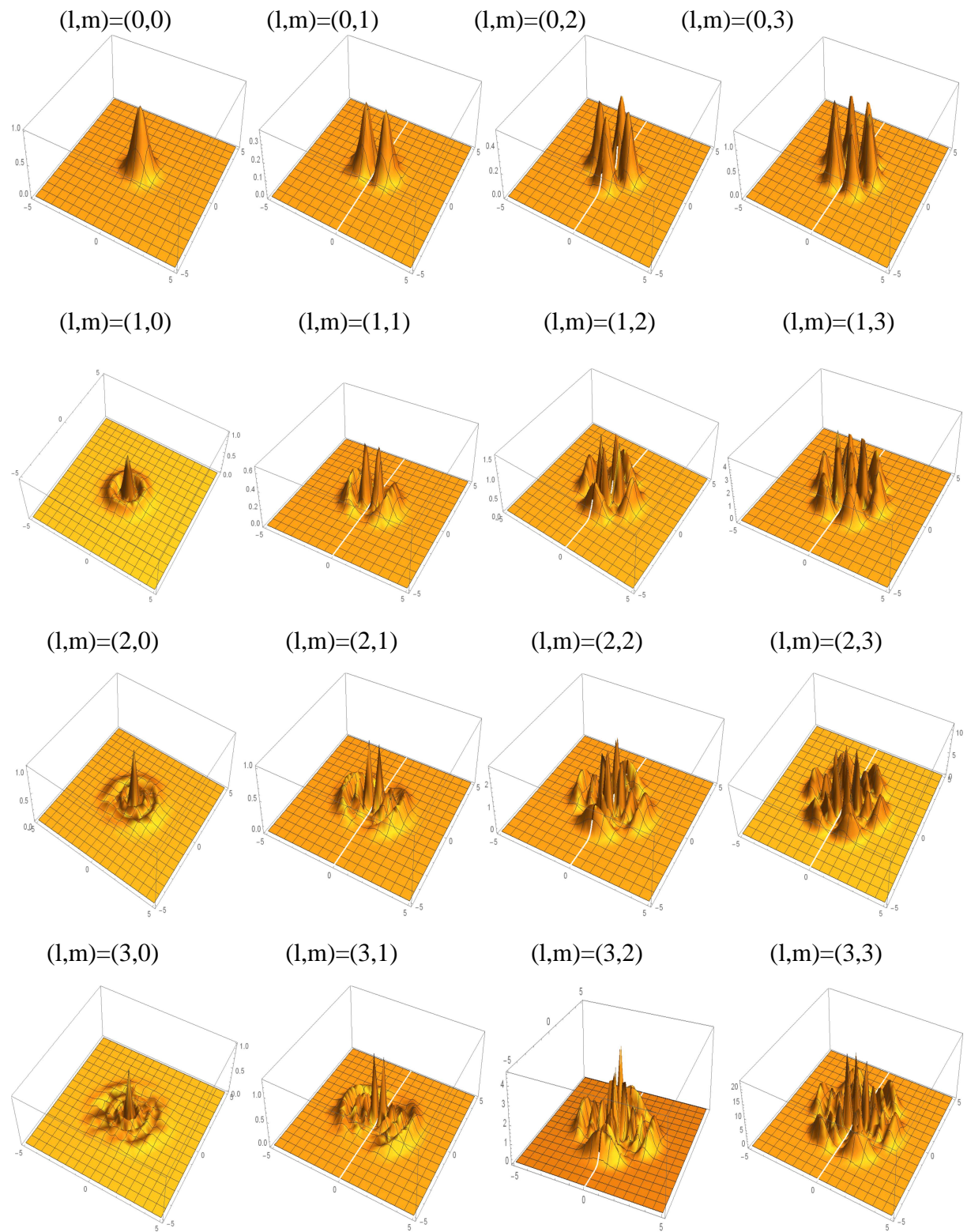
La courbe de transmission I_t/I_i en fonction de v présente des résonances pour des fréquences : $v_m = m\Delta v_L$ (24)

Donc c'est l'annulation du terme $\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi v}{c/2L}\right)$ pour que le dénominateur soit égal à 1 qui nous découle les fréquences de résonances correspondant aux pics d'intensité maximale.

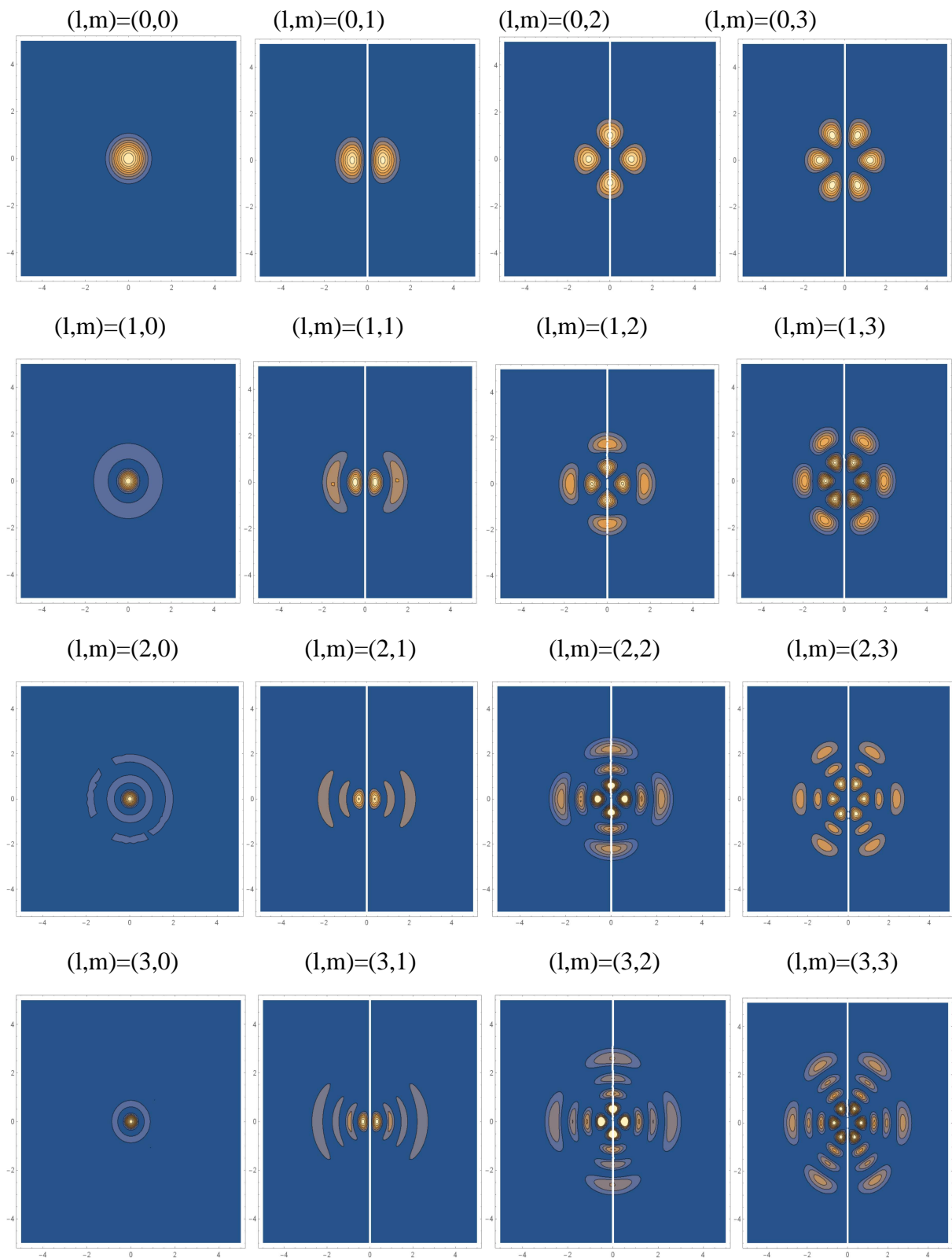
Par analogie aux fréquences de résonances v_{mnq} qui nous décrivent le même aspect que décrit l'équation (24) dont la démonstration qui abouti a cette propriété est détaillées dans la référence [4].

Chapitre IV : Travaux réalisés et résultats

IV-1. Détermination des profils des intensités de différents modes Laguerre gaussien à l'aide de Mathematica :



Représentation des profils d'intensités en 3D pour les différents modes de Laguerre Gauss.



Représentation des profils d'intensités en projection sur le plan transverse (x,y) pour les différents modes Laguerre Gauss.

1-1.Objectif :

En préliminaire, un code Matlab a été programmé , permettant de calculer les valeurs des fonctions de Laguerre associées pour différents degrés. Le but étant de déterminer le profil spatial des intensités associées aux modes Laguerre Gauss, deux logiciels, à savoir Mathematica et Matlab, ont été utilisés dans ce but. . Ceci permettra de voir les différences entre ces modes et d'analyser ces profils afin d'avoir un aperçu sur les caractéristiques d'un faisceau gaussien en plan transverse.

1-2.Principes de la méthode :

Tout commence par l'identification de l'expression qui exprime les différents modes, on a à partir de la littérature donnée par l'article [14] :

$$E_{lm} = (\sqrt{2} * R)^l * L_l^m(2 * R^2) * \exp(-R^2) * \cos(l\theta) \quad (1)$$

Sachant que le polynome de laguerre généralisé s'exprime:

$$L_l^m(x) = \frac{x^{-m}}{l!} * e^x * \frac{\partial^l}{\partial x^l} (x^{l+m} * e^{-x}) \quad (2)$$

[13]

Qui représente l'expression générale qui constitue les solutions de l'équation paraxiale suivant les valeurs attribuées aux paramètres mathématiques discrets l et m caractérisant chaque mode, évidemment tout ça sans tenir compte de l'évolution du rayon du faisceau.

Puisque l'expression se place dans le cadre où la propagation du faisceau présente une symétrie cylindrique, il faudra veiller à effectuer le passage au système de coordonnées cartésiennes telles que:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3) \quad \text{et} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (4)$$

Nous dans notre cas cherchant à établir les profils d'intensités de ces modes, on veillera à implémenter l'expression de chaque mode pour déterminer les profils d'intensités tels qu'on les a obtenus dans les figures ci-dessus associés à divers couples d'entiers mathématiques discrets (l,m) disposés aussi en ordre de la façon la plus commode possible de façon à pouvoir tirer des constats.

Mathematica effectue la formulation de la fonction mathématique spéciale laguerre généralisée en introduisant l'instruction qui lui est associée pour tous les différents modes établis, on occulte une partie de l'expression, ainsi de la même façon pour tous les petits termes restants, on effectue le passage vers le système de coordonnées cartésiennes et enfin on compile l'expression finale, et ceci pour chaque mode qui s'établit en l'exécutant par shift plus entré.

1-3.Discussion des résultats :

A partir des profils obtenus, on s'aperçoit bien que les intensités se manifestent sous forme de taches intenses pour différents modes. Donc les entiers mathématiques discrets associés aux valeurs l et m qui caractérisent mathématiquement les différents modes qui constituent les diverses solutions de l'équation paraxiale nous interprète phénoménologiquement la présence

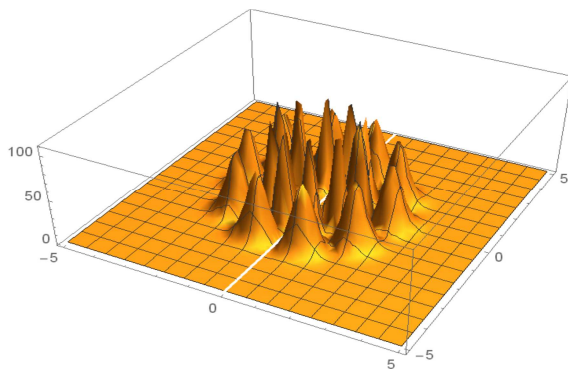
des intensités dans différentes zones du plan transverse (x,y) normal à la direction de propagation du faisceau.

Autre chose que l'on constate de la même façon qu'on constate dans l'article [14] que pour $m=0$ il a un pic maximal selon le profil en 3D et une tache intense selon la projection correspondante et entourée de 1 anneaux concentriques, et présentant une symétrie cylindrique.

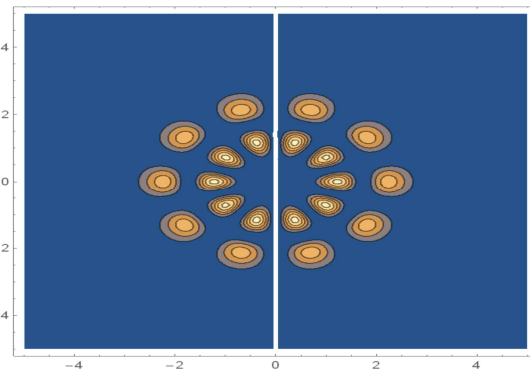
Et pour $m \neq 0$ on aperçoit $2m$ pic maximal selon la représentation du profil en 3D et $2m$ taches intenses selon la projection correspondante et chaque tache lui superpose d'autres taches suivant la valeur de l qui est beaucoup moins intense que la tache maximale et le nombre de taches qui se superposent sur ces $2m$ maxima c'est suivant le nombre de cette dernière et suivant la valeur de l .

Exemple :

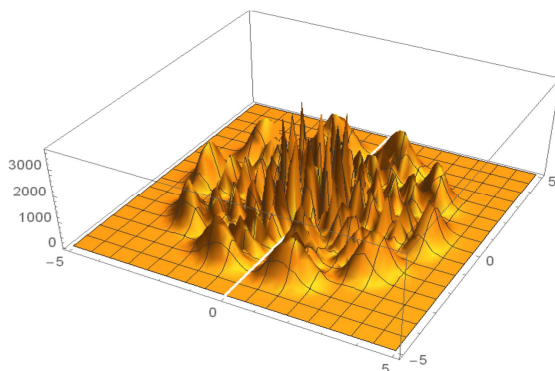
(l,m)=(1,5) profil en 3D



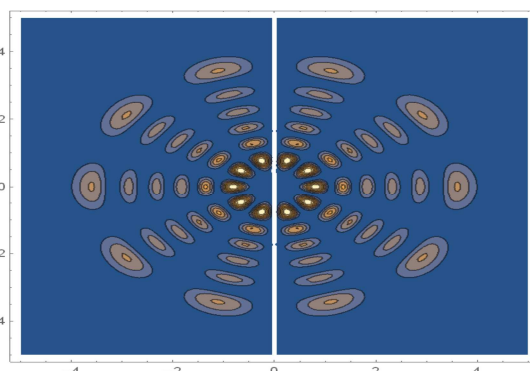
(l,m)=(1,5) projection (contour)



(l,m)=(5,5) profil en 3D



(l,m)=(5,5) projection (contour)



IV-2. Etudes des caractéristiques en plan transverse suivant les axes x et y d'un faisceau gaussien en terme de proportions de gains :

2-1. Introductions :

Ici on verra l'intérêt et l'utilité d'introduire une autre grandeur caractéristique du faisceau gaussien, un rayon du faisceau ou bien la taille du rayon différent de w , car $w(z)$ se considère seulement dans le cadre du mode fondamental et n'inclut pas l'effet des modes, car la taille de ce rayon dans le cadre de la détermination des modes d'ordres supérieurs affine et perfectionne le model qui découle du mode fondamental. En effet les modes d'ordres

supérieurs graphiquement forment des taches d'intensités qui s'étendent d'avantages à mesure que les ordres des paramètres qui régissent les modes augmentent (voir profils d'intensités ci-dessus), alors que le $w(z)$ qui découle de l'ordre fondamental ne change pas avec les ordres des modes, donc ne tient pas compte des intensités des taches qui nous sont disposées par les modes d'ordres supérieurs, d'où son insuffisance pour une description plus précise de ce principal paramètre qui nous décrit le comportement de la divergence du faisceau qui fait même l'essence de l'identité de ce faisceau, qui de par nature diverge bien que lentement. [14]

Plus précisément la divergence du faisceau pour les modes d'ordres supérieurs est plus grande que celles pour les modes d'ordres inférieurs dans une zone constituant un plan d'éclairage suivant le plan transverse à la même position z .

Donc quantifions l'évolution de cette nouvelle divergence, c'est-à-dire le nouveau rayon tenant compte de l'effet des modes en énumérant succinctement les étapes de raisonnement qui font le siège de l'aboutissement à cet affinement :

Tout d'abord l'intensité de ce rayon dans le cadre de la propagation à symétrie cylindrique se met sous la forme :

$$I(r, \varphi, z) = k(z) \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) * \left[L_p^m \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \right]^2 * \exp(-2r^2/w(z)) * \begin{cases} \sin^2(\varphi) \\ \cos^2(\varphi) \end{cases} \quad (5)$$

On définit ensuite le rayon du faisceau selon sa propagation le long de l'axe z suivant le plan transverse (x,y) à symétrie cylindrique donc (r,θ) :

$$\sigma_r(z) = \sigma_r(0) * \left(1 + \frac{z^2}{Z_{0r}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6) \quad \text{ou} \quad Z_{0r}^2 = \frac{2\pi}{\lambda} * \sigma_r^2(0) \quad (7)$$

Ainsi les paramètres fondamentaux pour un faisceau gaussien sont établis.

Nous voyons ici pour le mode d'ordre le plus bas pour $p=m=0$, $\sigma_r(z)$ est la demi-largeur à mi-hauteur de $1/e$ pour l'intensité du mode fondamental suivant le plan transverse à n'importe quel z , hors pour les modes d'ordres supérieurs, $\sigma_r(z)$ ne s'adapte pas aussi simplement, les modes d'ordres supérieurs comme nous les avons établis ci-dessus forment des taches d'intensités plus complexes contrairement au mode fondamental qui forme une tache simple dans quel cas s'exprime le $\sigma_r(z)$. Ces faisceaux caractérisés par les modes d'ordres supérieurs divergent plus rapidement à partir du waist ou le mode fondamental est le plus concentré. En d'autres termes la zone éclairée suivant le plan transverse perpendiculaire à l'axe de propagation de constante $z \neq 0$ augmente avec les entiers discrets p et m .

D'où la nécessité de modifier la relation habituelle du rayon du faisceau en incluant les modes par l'intermédiaire de l'intensité pour l'étude de ces propriétés caractérisant la zone éclairée par les modes d'ordres supérieurs, caractérisant la présence de l'intensité des taches suivant le plan transverse en utilisant le carré de la variance qui sera le nouveau rayon tenant compte de l'effet des modes, ainsi on aura :

$$\sigma_r^2(z)_{mp} = \frac{2 * \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r^2 I(r, \varphi, z) r dr d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(r, \varphi, z) r dr d\varphi} \quad (8)$$

De (5) et (8) on aura donc :

$L_p^M \equiv$ polynôme de laguerre généralisé de degré p et m

$K \equiv$ fonction de z qui se simplifie clairement dans les calculs et qui donc n'en dépendra pas dans le résultat final

$\varphi \equiv$ l'angle qui se simplifie lors de l'intégration

Ce qui fait donc le résultat qu'on obtient :

$$\rightarrow \sigma_r^2(z)_{mp} = \frac{w^2(z) \int_0^\infty x^{m+1} [L_p^m(x)]^2 \exp(-x) dx}{\int_0^\infty x^m [L_p^m(x)]^2 \exp(-x) dx} \quad (9)$$

Où on a effectué un changement de variable : $x = 2r^2/w^2(z)$

Où l'intégrale au dénominateur s'exprime :

$$\int_0^\infty x^m * [L_p^m]^2 * \exp(-x) dx = \frac{(p+m)!}{p!} \quad (10)$$

Et celui du numérateur comme suit :

$$\int_0^\infty x^m * [L_p^m]^2 * \exp(-x) dx = \frac{(p+m)!}{p!} (2p + m + 1) \quad (11)$$

Et par conséquent on aura la nouvelle expression du rayon comme suit:

$$\rightarrow \sigma_r(z)_{mp} = \sigma_r(z) * (2p + m + 1)^{1/2} \quad (12)$$

On obtient donc l'expression du nouveau rayon tenant compte de l'effet des modes dans le cas d'un faisceau présentant une symétrie cylindrique qui peut s'exprimer de façon générale comme suit :

$$\sigma_r(z)_{mp} = \sigma_r(z) * f(p, m) \quad (13) \quad \text{avec : } f(p, m) = (2p + m + 1)^{1/2}$$

Avec :

$\sigma_r(z) \equiv$ l'évolution du rayon du faisceau correspondant relatif au mode fondamental.

$f(p,m) \equiv$ une fonction qui tient compte de l'effet des modes.

Remarques :

*On remarque de l'expression (14) que la taille du rayon est symétrique par rapport au long de l'axe de propagation z du faisceau.

*Pour $p=m=0$ l'expression se réduit à l'expression de la taille du rayon relatif au mode fondamental d'où : $\sigma_r(z)_{mp} \equiv \sigma_r(z)$

Propriétés :

*Un critère souhaité est que le rayon du faisceau (14) soit suffisamment grand pour contenir tous les maxima d'intensités relatifs aux ordres supérieurs des modes caractérisés par toutes les valeurs m et p .

*On montre aisément par quelques manipulations algébriques que l'équation (14) satisfait à ce critère, en illustrant que l'intensité maximale le plus loin de l'axe z est inférieur au rayon du faisceau. [15]

Le plus essentiel maintenant après avoir expliqué l'importance de l'effet des modes sur la modification du rayon. Plaçons nous maintenant à expliciter la proportion de gain suivant chaque mode de paramètre (m,p), c'est-à-dire la fraction de l'énergie totale transportée par un faisceau gaussien de type laguerre gauss suivant le plan transverse délimité par le rayon du faisceau, et cela bien entendu est quantifié sous la forme :

$$E_{mp} = \int_0^a x^m [L_p^m(x)]^2 \exp(-x) dx \quad (14)$$

$$\text{Avec : } a = 2 * (2 * l + m + 1) \quad (15)$$

Qui constitue une conséquence directe du nouveau raisonnement introduit dans le cadre des ordres supérieurs des modes.

Ainsi la proportion en pourcentage s'exprime très simplement sous la forme :

$$g = \frac{\int_0^a x^m * [L_l^m]^2 * \exp(-x) dx}{\int_0^\infty x^m * [L_l^m]^2 * \exp(-x) dx} \quad (16)$$

2-2.Objectif :

L'objectif de ce paragraphe est d'établir les valeurs de proportion de gain suivant les différents modes associés, c'est-à-dire la fraction de l'énergie totale transportée par un mode Laguerre Gauss, aussi pour divers modes correspondants qui sont repérés dans différentes localités de la taille du rayon suivant le plan transverse. Le tout c'est-à-dire tous les modes transportés dans le faisceau et d'établir un tableau nous disposant ces valeurs suivant les entiers l et m, et d'établir le profil des valeurs trouvées en 3D et on analysera par la suite l'intérêt et la description phénoménologique de cette dernière.

2-3.Principe de la méthode :

Commençons d'abord par définir l'expression qui nous détermine ces proportions de gain :

$$g = \frac{\int_0^a x^m * [L_l^m]^2 * \exp(-x) dx}{\int_0^\infty x^m * [L_l^m]^2 * \exp(-x) dx}$$

$$\text{Sachant que : } \int_0^\infty x^m * [L_l^m]^2 * \exp(-x) dx = \frac{(l+m)!}{l!}$$

$$\text{Et } \int_0^a x^m * [L_l^m]^2 * \exp(-x) dx = E_{l,m}$$

$$\text{Et } a = 2 * (2 * l + m + 1)$$

l et m paramètres du polynôme Laguerre généralisé et a entier défini comme précédemment.[14]

2-3-1.Tableau de valeurs des proportions de gains contenues dans le rayon suivant les différents modes de laguerre gauss :

Dans le tableau ci-dessous le résumé des calculs et résultats obtenus à l'aide de mathematica après le calcul des intégrales :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.864665	0.908422	0.938031	0.95762	0.970747	0.979659	0.985772	0.99	0.992944	0.995005	0.996453
1	0.908286	0.921837	0.936697	0.949931	0.960927	0.969771	0.976756	0.982209	0.986431	0.989681	0.992171
2	0.922775	0.930024	0.93925	0.948588	0.957228	0.964856	0.971398	0.976901	0.981463	0.985205	0.988246
3	0.930932	0.935637	0.942005	0.949025	0.955905	0.962346	0.96818	0.973341	0.977829	0.981679	0.984946
4	0.936429	0.939809	0.944596	0.950031	0.955631	0.96109	0.966228	0.970944	0.975191	0.978959	0.982261
5	0.940493	0.943078	0.946823	0.951204	0.955857	0.960529	0.965054	0.969324	0.973273	0.976869	0.980103
6	0.943674	0.945737	0.948769	0.952393	0.956328	0.960371	0.964373	0.968231	0.971876	0.975266	0.978376
7	0.946262	0.947961	0.95048	0.953539	0.956919	0.960452	0.964011	0.967503	0.970859	0.974033	0.976995
8	0.948428	0.94986	0.951996	0.954621	0.957562	0.960679	0.963864	0.967033	0.970123	0.973086	0.97589
9	0.95028	0.951509	0.95335	0.955634	0.95822	0.960993	0.963861	0.966748	0.969596	0.97236	0.975007
10	0.951889	0.952961	0.954569	0.956578	0.958875	0.961361	0.963957	0.966596	0.969227	0.971806	0.974301

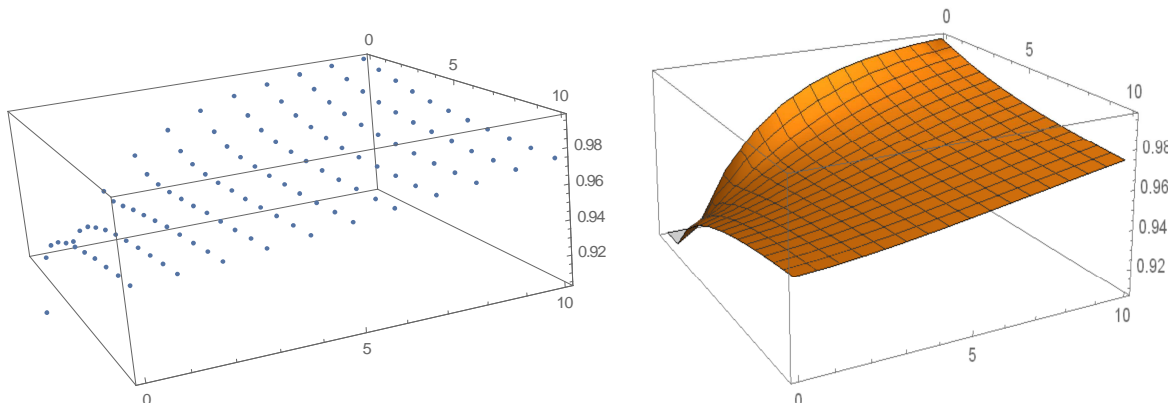
Tableau représentatif des valeurs obtenues à l'aide de mathematica des proportions de gains des différents modes.

Le remplissage de ce tableau se fait très aisément en prélevant les résultats des intégrales obtenues à l'aide de mathematica après l'exécution des instructions qui nous permettent de les obtenir pour la combinaison de tous les entiers l et m qui engendrent ces valeurs pour les modes souhaités et ces instructions suivent les étapes de calculs pour chaque mode tout comme dans l'exemple cité précédemment.

La procédure étant dans le cas de ce qu'on a fait consiste à maintenir une seule valeur de l'entier l et on varie les m jusqu'au remplissage de la première ligne, ainsi de suite pour tous les restes.

2-3-2. Profil de ces modes en 3D :

Après avoir terminé les calculs des proportions de gain des différents modes qui constituent une caractéristique essentielle d'un faisceau gaussien en plan transverse suivant les axes (x,y). Place maintenant à la représentation du profil de ces gains à 3D suivant les deux axes caractérisant les entiers discrets. La procédure étant relativement simple, il suffit de disposer tous les vecteurs en composantes (m,l,g_{ml}) comme un ensemble de points qui seront disposés dans l'espace à trois dimensions (3D)



Représentation des profils des proportions de gains répartis en points en 3D suivant la répartition des entiers l et m dans l'ordre suivant les deux axes de la base, de façons discrète et continue respectivement.

2-4. Discussion des résultats :

Ainsi on constate à partir des valeurs obtenues disposées dans le tableau que la proportion de gain croît par l'accroissement de l'ordre des modes, c'est-à-dire des paramètres l et m , ainsi on confirme en partie la validité du raisonnement adopté pour l'introduction de l'effet des modes dans le rayon du faisceau d'où la conséquence de la fraction de l'énergie transportée dans le faisceau qui constitue une caractéristique essentielle d'un faisceau laser suivant le plan transverse reflétant sa propriété énergétique en volume.

Par contre l'augmentation de ces fractions d'énergie se resserre que ça soit en adoptant un raisonnement par lignes (l entier l maintenu, m allant de $0, \dots, 10$) ou en colonnes (l entier m maintenu, l allant de $0, \dots, 10$).

Il paraît évident que si on continue pour les modes supérieurs à 10 y compris pour l'entier l ou m on atteindra une stabilité due à la réduction d'écart des variations (le resserrement) pour les fractions d'énergies transportées selon les différents modes jusqu'à atteindre un régime quasi-stationnaire pour des valeurs très grandes de l et m .

Et c'est ces fractions d'énergies qui sont récupérées dans une cavité pour amplifier la puissance donc maximiser le gain en énergie qui sort de la cavité. Donc le reste, tout se joue dans la configuration géométrique de la cavité pour le confinement du faisceau pour qu'il n'y ait pas de perte, car quand on élargit la cavité pour permettre la voie à l'agrandissement des fronts d'ondes, d'où la récupération des modes possibles, mais d'autre part implique une perte en confinement, où on enregistre des pertes.

A partir de l'allure du profil en 3D on constate que ça nous reflète assez bien tous les renseignements tirés du comportement numérique tirés du tableau ci-dessus, évidemment explicité dans ce paragraphe.

IV-3. Conclusion :

Tout ce qu'on a vu jusqu'ici dans ce troisième chapitre se concentre sur deux aspects, l'aspect physique et l'aspect programmation. On a pu voir qu'à l'aide de Mathematica on peut réaliser, compiler et exécuter des fonctions complexes et arriver à tracer leurs profils sous ses divers aspects et même exécuter des calculs d'intégrales sachant que Mathematica regorge d'une multitude de fonctions mathématiques spéciales, d'où notre cas de besoin d'introduire les polynômes de Laguerre généralisés qui entrent dans le contexte relatif à la thématique traitée, Mathematica en son ensemble est un logiciel et un langage qui travaille en symbolique qui nous raccourcit pas mal de situations en terme de gain de temps.

L'autre aspect, physique est qu'on arrive à des résultats très appréciables qui nous permettent de tirer les caractéristiques de l'aspect phénoménologique du contexte traité, mais on ne peut pas juger le degré de précision et d'exactitude des résultats qui en découlent, c'est pourquoi

on verra brièvement un autre travail mais cette fois sous Matlab qui nous permettra de dégager la distinction et en faire un lien de complémentarité entre les deux.

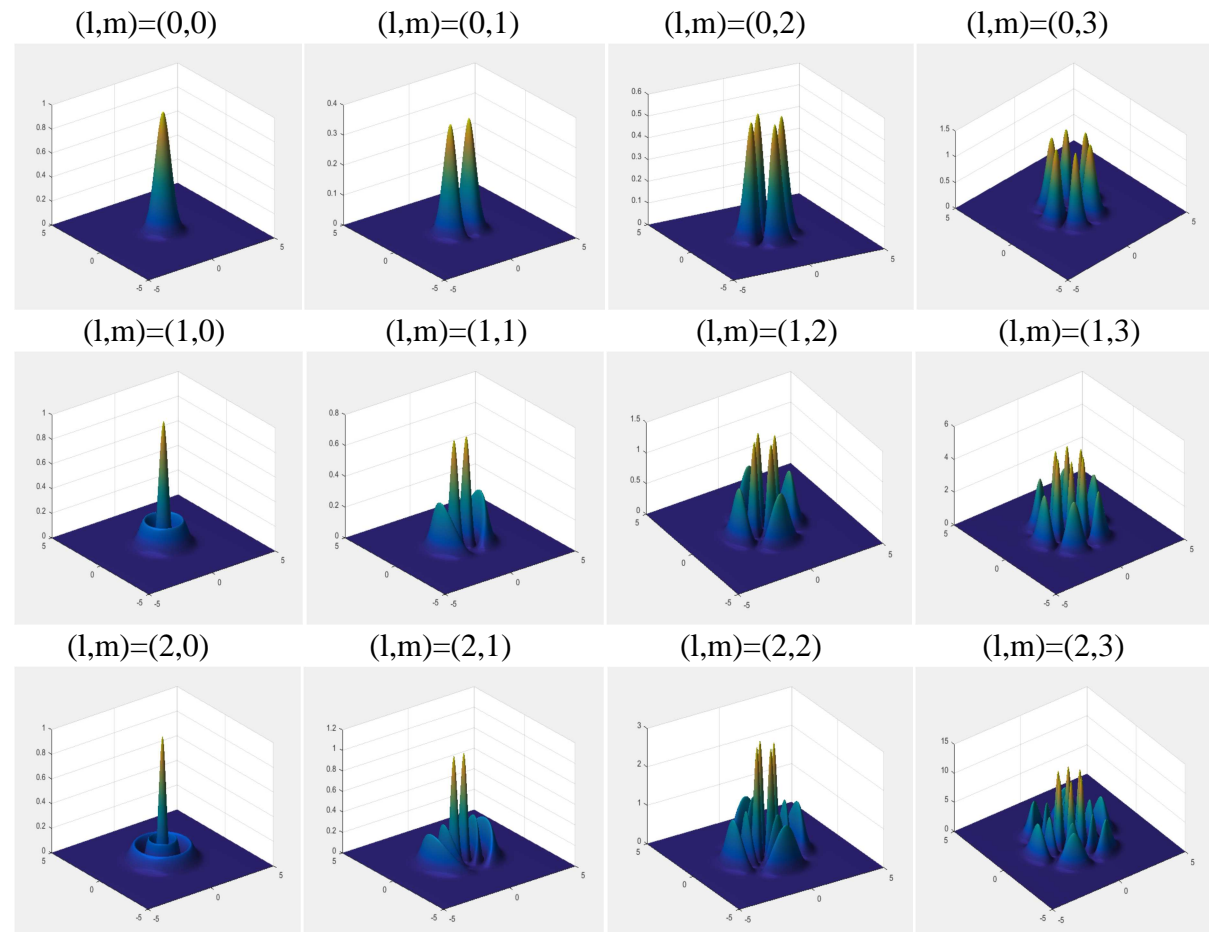
IV-4. Détermination des profils des intensités de différents modes Laguerre-Gauss à l'aide de matlab :

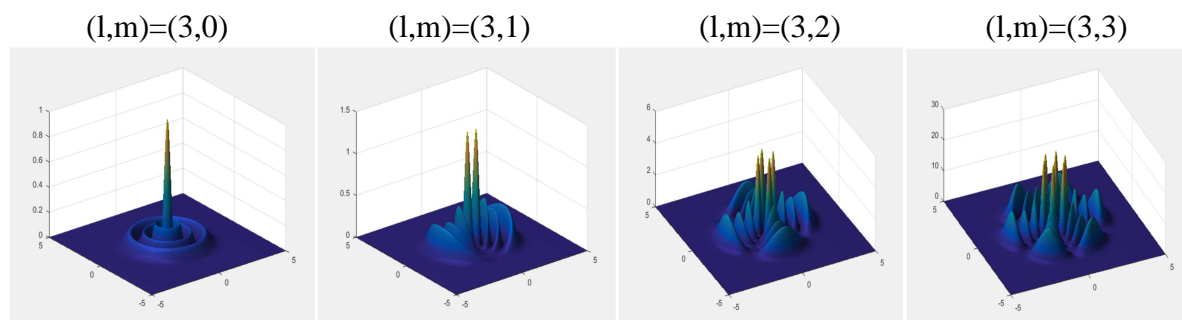
4-1. Introduction et objectif :

L'objectif de cette partie est de reprendre ce qui était établi sous mathematica et de le réaliser sous matlab au niveau des profils des intensités des différents modes.

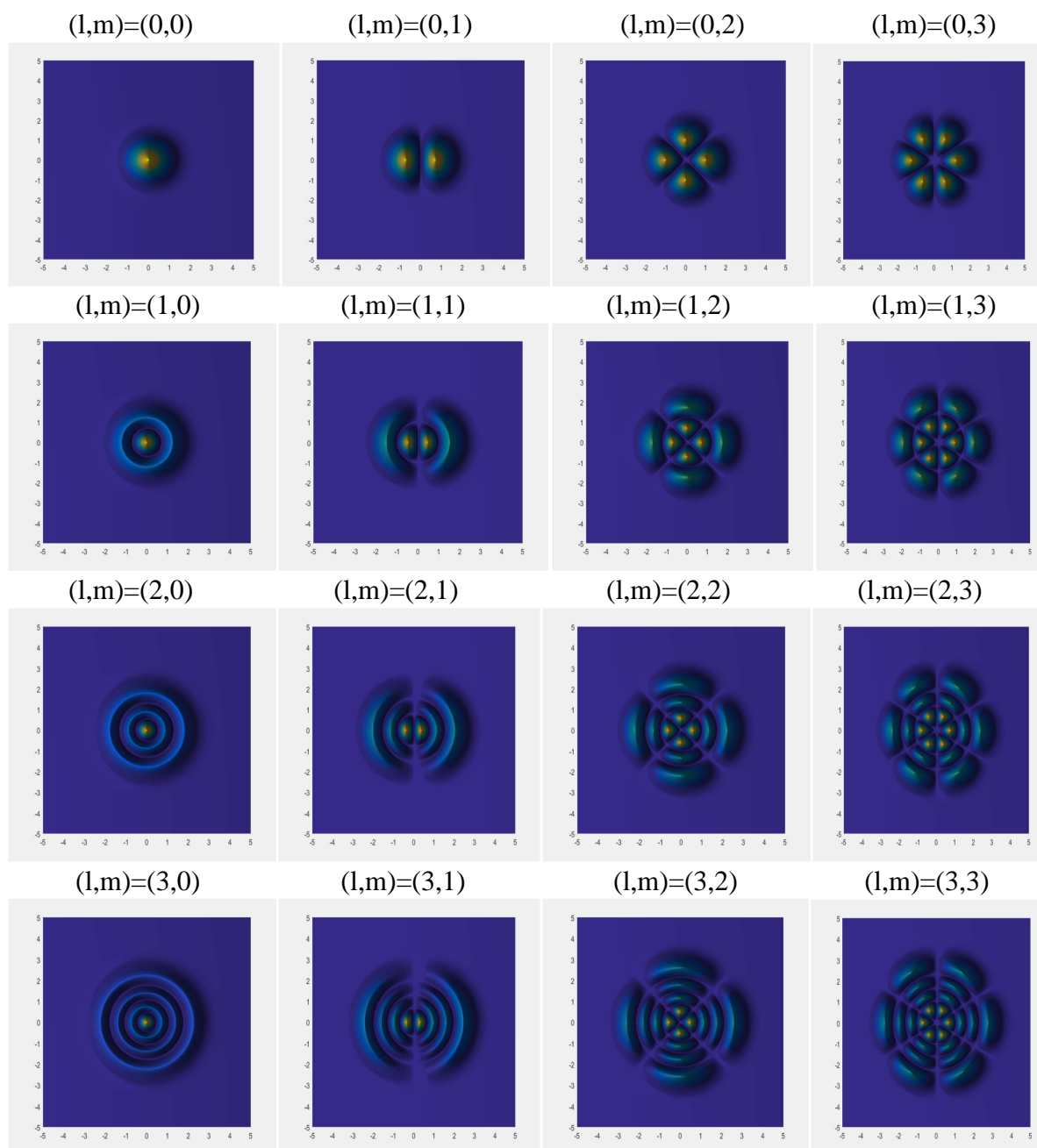
Pour ce faire on a en notre possession un code de calculs après réalisation du programme concernant le sujet qui regorge les lignes de commandes qui représentent les étapes de la réalisation des profils d'amplitude et des intensités passant par la compilation et l'exécution de l'expression qui décrit l'amplitude et l'intensité des différents modes, intitulé (ProfilLagGauss.m), et un sous programme nous disposant pour les différents ordres les fonctions qui représentent les polynômes de laguerre généralisés qu'on cohabitera sous un même répertoire. Revenant au programme principal, le principe est de jouer sur les paramètres p et m qui régissent les modes pour l'exécution et l'obtention des profils à partir du programme.

4-2. Profil des intensités sous matlab :





Représentation des profils d'intensités en 3D pour les différents modes de Laguerre Gauss sous matlab.



Représentation des profils d'intensités en projection sur le plan transverse (x,y) pour les différents modes laguerre gauss sous matlab.

4-3. Discussion et conclusion :

On s'aperçoit au niveau de l'allure et des caractéristiques de ces profils que ce qui est obtenu sous matlab aboutit typiquement aux mêmes interprétations et mêmes constats que ce qui s'obtient sous mathematica, mis à part la démarche et l'outil logistique utilisés qui diffèrent entre eux dans certains critères qui résident au niveau de la manière même comment se gèrent les deux logiciels par le biais d'instructions dont ils sont munis, dont nous nous restreignons pour le besoin du contexte de la thématique étudiée. Dans ce qui suit qui fera l'objet d'un tout nouveau paragraphe, on énumérera la différence et la complémentarité entre les deux.

IV-5. Différences et complémentarités entre le matlab et le mathematica dans le cadre de la thématique étudiée:

5-1. Distinction:

1-Mathematica est un langage qui travaille en symbolique, alors que le matlab nécessite comme tout programme qui effectue une simulation d'adopter le protocole à savoir la déclaration des variables Etc.

2-Mathematica est un logiciel qui trace des figures, profils, graphes...., à l'aide d'instructions simples, une fois l'expression compilée et exécutée par le logiciel, il suffit de délimiter un intervalle où il effectue l'opération de l'application suivante ; $(x,y) \rightarrow f(x,y)$ et ainsi effectue ensuite le Plot3D, tandis qu'avec le matlab il faut d'abord préciser le pas de discrétisation par lequel évoluent les variables x et y et ensuite les établir en tant que valeurs de x et y qui seront reconnues par le matlab en effectuant l'instruction $[X,Y] = \text{meshgrid}(x,y)$ qui reconsidèrent (x,y) en tant que grille de valeurs plutôt en tant que composantes.

3-Sous mathematica il y a une panoplie d'instructions qui expriment diverses fonctions mathématiques spéciales, alors que sous matlab il faut le formaliser par une série d'instructions comme ce fut le cas dans notre problème étant placé sous forme d'un sous programme.

4-En terme de précision, de netteté et de rigueur de l'allure des profils sous matlab paraissent bien meilleures que sous mathematica, donc le matlab a une meilleure résolution dans la réalisation de profils ou de courbes (graphes) ...etc.

5-2. Sous mathematica :

Donc mathematica, d'une façon générale dans divers contextes hormis la thématique que nous venons de traiter peut s'avérer d'un très grand intérêt et d'une très grande utilité dans les calculs, dans la réalisation des courbes ..., du fait de son usage simpliste en tant que langage qui travaille en symbolique dont il suffit de manier les instructions dont t'il dispose et qu'il exécute en sachant dès le départ ce qu'on veut établir comme opération et à quel résultat on veut aboutir afin de dégager les analyses qu'on veut établir et des renseignements qu'on veut extraire avec un gain de temps très satisfaisant.

5-3. Sous matlab:

Tandis que sous matlab il faut réaliser le tout qui fait l'objet du sujet qu'on traite en nous conformant strictement à la démarche qu'il exige et en établissant le programme avec une bonne cohérence en disposant les données du problème sous forme de déclaration de variables et qu'on veille à ce qu'il ait une bonne continuité au niveau de la structure et que la morphologie du programme tienne son sens, qui nécessite un certain temps et de la

concentration et un certain esprit d'anticipation pour maintenir la cohérence ou un bon enchaînement de l'objet du programme qu'on veut réaliser.

5-4.Complémentarité entre les deux :

Donc dès le départ tout se place dans le contexte du besoin de l'utilisateur qui peut être un problème d'interprétation ou de renseignements à extraire ou alors s'affranchir de ceci en voulant un peu plus tels que des résultats plus fins, plus précis et surtout plus nets.

Donc ce qui fait la complémentarité entre les deux, en mathematica on a recours à son usage quand on se contente de l'allure et d'éventuelles mises en évidence auquel ça aboutit avec gain de temps satisfaisant avec les avantages dont il dispose, tandis qu'en matlab c'est pour une meilleure résolution de la position physique du problème après un certain temps pour la réalisation du programme concernant le sujet, pour cela il faut tatonner, mouliner ou alors effectuer une gymnastique de combines qui nous permettent une morphologie aussi meilleure que possible pour la réalisation, le fonctionnement et le bon déroulement du programme.

Donc avec mathematica ça implique un gain de temps et une petite perte en netteté et vis-versa pour le matlab.

Conclusion générale

En conclusion dans ce mémoire de fin d'études qui concerne la thématique qui constitue une initiation à la recherche qui se repose sur deux aspects, une initiation à la recherche qui touche l'aspect physique et l'aspect programmation.

Donc l'aspect physique on l'aura exposé en trois blocs, le fondement qui constitue la compréhension phénoménologique des lasers, les descriptions de base illustrant et expliquant aussi bien schématiquement qu'au niveau des lois tout ce qui se rapporte aux faisceaux lasers au niveau de ses propriétés. Par la suite on a établi le formalisme mathématique qui sous tend la théorie des faisceaux lasers en parlant du mode gaussien fondamental et des modes d'ordres supérieurs. Et on a enfin parlé des cavités résonnantes et du confinement d'un faisceau gaussien dans une cavité, qui nous a ouvert la voie aux modes propres de la cavité, qui nous permet de voir l'effet de la cavité sur les modes aussi bien pour Hermite-Gauss que Laguerre-Gauss.

Alors que dans l'aspect programmation on a eu l'occasion de travailler sous deux logiciels de langages de programmation qui sont le mathematica et le matlab dont on a fait l'exploitation pour l'étude des modes d'ordres supérieurs d'un faisceau gaussien et tirer profit en analysant les résultats qui nous permettent d'établir les caractéristiques de celles-ci, et bien évidemment mettre en évidence l'avantage et la complémentarité entre les deux.

Enfin par-dessus tout un aspect primordial prévaut et rejoint en même temps tout ce qui a été dit dans cette conclusion réside dans la capacité rédactionnelle, c'est-à-dire prise de contact avec la rédaction d'un article scientifique en vue d'acquérir cette familiarité.

Annexe 1 : exemple d'établissement de l'expression et des profils d'intensité associés aux différents modes sous mathematica

$$f00 = \text{LaguerreL}[0,0,x] \quad \text{shift +entré}$$

$$g00 = (\text{Sqrt}(2) * x)^0 * f00 * \text{Cos}[0 * \text{theta}] \quad \text{shift +entré}$$

$$h00 = g00/.x \rightarrow (2 * r^2/\omega_0^2) \quad \text{shift +entré}$$

$$f00 = h00 * \text{Exp}[-r^2/\omega_0^2] \quad \text{shift +entré}$$

$$fR = f00/.(\frac{r^2}{\omega_0^2}) \rightarrow R^2 \quad \text{shift +entré}$$

$$Fxy = fR/.R \rightarrow \text{Sqrt}[x^2 + y^2] \quad \text{shift +entré}$$

$$Fxy = Fxy/.theta \rightarrow \text{ArcTan}[\frac{y}{x}] \quad \text{shift +entré}$$

$$F00 = Fxy^2 \quad \text{shift+entré}$$

Par raisonnement analogue on effectue ces opérations sous mathematica pour tous les modes restants.

Maintenant que l'expression de l'intensité correspondant à un mode est établie reste à tracer le profil qui lui est associé. Pour cela il suffit tout simplement d'exécuter une instruction qui se trouve dans mathematica qui a pour fonction d'exécuter cette tâche telle que du même exemple que ci-dessus F_{00} :

$$\text{Plot3D}[F00, \{x, -5, +5\}, \{y, -5, +5\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}]$$

Ainsi on arrive à avoir le profil en 3D de l'intensité du mode correspondant.

Et pour obtenir la projection suivant le plan transverse de la propagation on effectue l'instruction suivante, toujours le même que celui établi ci-dessus :

$$\text{ContourPlot}[F00, \{x, -5, +5\}, \{y, -5, +5\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}]$$

Ainsi on obtient le profil de l'intensité par projection au plan transverse du faisceau.

En résumé ce qu'il faut retenir de la démarche pour établir le profil à l'aide de mathematica, il faut d'abord construire l'expression du mode correspondant puis l'élever au carré pour avoir l'intensité puis établir le profil et enfin faire le contour (la projection).

Annexe 2 : exemple de calcul de proportion de gain à l'aide de mathematica

Calcul de proportion de gain d'un mode à l'aide de mathematica :

$$f10 = \int_0^6 (x^0) * (\text{LaguerreL}[1,0,x]^2) * \text{Exp}[-x] dx \quad \text{shift + entré}$$

$$h10 = \int_0^\infty (x^0) * (\text{LaguerreL}[1,0,x]^2) * \text{Exp}[-x] dx \quad \text{shift + entré}$$

$$g10 = f10/h10 \quad \text{shift + entré}$$

Ainsi par exemple on obtient la proportion de gain pour le mode 10.

La procédure est la même pour tous les modes, dans notre cas on effectuera les calculs de $l = (0,10)$ et $m = (0,10)$.

Annexe 3 : procedure pour realiser le profil des modes suivant le couple (m,l) a 3D

$$R = \{ \{0,0,g_{00}\}, \{0,1,g_{01}\}, \{0,2,g_{02}\}, \{0,3,g_{03}\}, \dots, \{0,10,g_{010}\}, \{1,0,g_{10}\}, \{1,1,g_{11}\}, \{1,2,g_{12}\}, \dots, \{1,10,g_{110}\}, \dots, \{10,0,g_{100}\}, \{10,1,g_{101}\}, \dots, \{10,10,g_{1010}\} \}$$

En tout c'est 11(lignes)*11(colonnes) de vecteurs qui vont constituer les points du profil 3D, tout comme representé par l'ensemble ci-dessus de façon simplifiée.

Une fois l'ensemble est défini on exécute l'instruction, ainsi une fois reconnu par le logiciel mathematica, place ensuite au tracé du profil des deux façons par une répartition discrète de points en 3D et l'allure du profil de façon continue à l'aide des deux instructions suivantes :

ListPointPlot3D[R] shift + entré

Pour la réalisation du profil en 3D discret,

Ou bien alors :

ListPlot3D[R] shift + entré

Pour l'obtention d'un profil continu.

Référence bibliographique :

[1] Julien Hillairet Applications du formalisme des faisceaux gaussiens a la modélisation de l'interaction d'une onde électromagnétique avec un objet 3D complexe, UNIVERSITE TOULOUSE III - PAUL SABATIER

[2] : Sébastien Forget, Optique des lasers & faisceaux Gaussiens, Laboratoire de physique des lasers université paris nord 13

[3] Sébastien FORGET, Lasers et optique non lineaire, (2007)

http://www.optique-ingenieur.org/fr/cours/OPI_fr_M01_C03/co/Grain_OPI_fr_M01_C03.html

[4] D. Hennequin, V. Zehnlé, D.Dangoisse, les lasers cours et exercices corrigés, 3^e édition Paris 2013

[5] Résolution de l'équation de l'Helmholtz pour déterminer les paramètres d'un faisceau Laser, Par Amel BELAISSAOUI, UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE, SOUTENU LE : 10/03/2009

[6] L'approximation de l'optique paraxiale, Université de Moncton Phys-6013, Chapitre 1 :

La propagation des faisceaux de lumière dans l'approximation de l'optique paraxiale

[7]: lasers interactions lumière-atomes bernard CAGNAC-Jean Pierre FAROUX.

[8] P. Piot, PHYS 630 – Fall 2008

[9] <https://www.phys.ens.fr/IMG/pdf/Chp2.pdf>

[10] thèse : Modélisation de structures dynamiques dans un champ optique, par M. Thomas CROUZIL

[11] these : Développement d'une technique d'analyse de la phase dans les lasers et interférogrammes, Mr. BENCHEIKH Abdelhalim

[12] François BALEMBOIS - Sébastien FORGET, Lasers fondamentaux, (2007)

http://www.optique-ingenieur.org/fr/cours/OPI_fr_M01_C01/co/Grain_OPI_fr_M01_C01.html

[13] Yannick Dumeige et Jean-Francois Roch, Etude d'un laser He-Ne en "kit" Cavite optique et faisceaux gaussiens, (2002)

[14] Spot size and divergence for Laguerre Gaussian beams of any order, Ronald L. Phillips and Larry C. Andrews, 1983

[15] Spot size and divergence for Hermite Gaussian beams of any order, William H. Carter, U.S. Naval Research Laboratory, Washington, D.C. 20375. Received 1 December 1979.